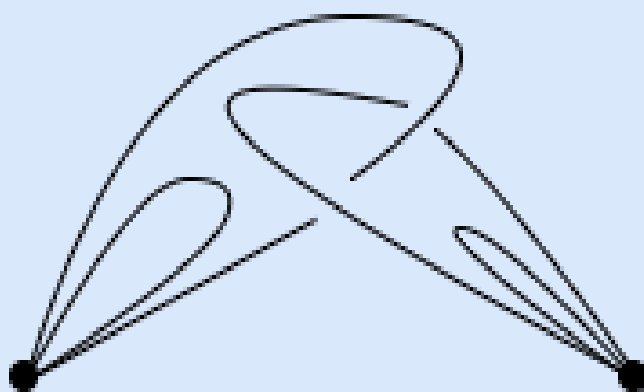


Espaços de Configurações

Cesar A. Ipanaque Zapata

Denise de Mattos



Espaços de Configurações

**Cesar A. Ipanaque Zapata
Denise de Mattos**

Agradecimentos

O primeiro autor deseja agradecer o apoio a esta pesquisa proveniente das bolsas processos nº 2016/18714-8 e nº 2018/23678-6, da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Lista de Figuras

2.1	E^2 e E^3	39
2.2	Sequência espectral do primeiro quadrante.	41
3.1	Dois 3-configurações ordenadas.	50
3.2	Dois 3-configurações não ordenadas: uma na cor escuro e outra na cor claro.	52
3.3	Suspensão não reduzida.	63
3.4	Grafo não localmente euclideo.	64
3.5	Variedade com bordo.	72
3.6	Vizinhança colarinho.	74
3.7	Vizinhança colarinho	76
3.8	Isotopia entre $i \circ p$ e 1_M	77
3.9	Sequência fundamental de fibrações.	116
3.10	Relação de seções	117
3.11	Naturalidade da sequência exata longa da fibração.	120
3.12	Diagramas comutativos	121
3.13	Laço trivial.	124
3.14	$E_{*,*}^2$	127
3.15	Sequência espectral do espaço de configurações $F(\mathbb{R}^n, 4)$	130
3.16	Sequência espectral do espaço de configurações $F(\mathbb{C}P^n, 2)$	131
3.17	Sequência espectral do espaço de configurações $F(S^m, 3)$	135

Sumário

1	Introdução	9
2	Pré-requisitos	15
2.1	Álgebra homológica	15
2.2	Topologia compacta aberta	22
2.3	Grupos de transformações ou G-ações	29
2.4	Complexos CW	36
2.5	Sequências Espectrais	38
2.5.1	Sequência espectral de Leray-Serre	41
2.6	Espaços classificantes	44
3	Espaços de Configurações	49
3.1	Espaços de Configurações clássicos	49
3.2	Espaços de configurações para variedades com bordo	71
3.3	Espaço de configurações para superfícies	79
3.4	Grupos de Tranças e Espaços de Configurações	98
3.5	Grupos de homotopia	99
3.6	Variedades distintas com os mesmos espaços de configurações	117
3.7	Espaços de configurações Euclidianos	122
3.8	Homologia de alguns espaços de configurações	126
3.9	Espaços de configurações da esfera S^n	133
	APÊNDICE A – Fatos Algébricos	137
	APÊNDICE B – Fatos Topológicos	139
B.1	Variedades m -homogêneas	143
B.2	Sequência exata curta para um recobrimento	149
B.3	Variedades com buracos	156

Capítulo 1

Introdução

Oscar Zariski, em 1937, utilizou pela primeira vez o conceito de espaços de configurações não ordenados (ZARISKI, 1937). Posteriormente, Ralph Fox, em 1962, definiu o conceito de tranças geométricas usando os espaços de configurações não ordenados (FOX; NEUWIRTH, 1962). Um estudo detalhado dos espaços de configurações, ordenados e não ordenados, foi apresentado no trabalho de Fadell e Neuwirth (FADELL; NEUWIRTH, 1962).

Uma das características interessantes dos espaços de configurações é a sua estreita relação com a teoria de tranças, introduzida por Emil Artin em 1926, a qual é uma grande linha de pesquisa ativa até o momento. Desde então, os espaços de configurações aparecem em distintas áreas de pesquisa: Geometria, Combinatória, Física (THIFFEAULT; FINN, 2006), Química, Biologia (BERGER L. KAUFFMAN; SUMNERS, 2009), (MISHRA; BHUSHAN, 2012) e, mais recentemente, na Robótica (ZAPATA; GONZÁLEZ, 2020), (ZAPATA; GONZALEZ, 2020).

O *espaço de configurações ordenado* de k pontos distintos em um espaço topológico X é o subespaço de X^k definido por

$$F(X, k) := \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k : x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}.$$

Uma das propriedades básicas dos espaços de configurações é a existência de uma ação livre do grupo simétrico sobre $F(X, k)$. O *espaço de configurações não ordenado*, denotado por $SF(X, k)$, é definido então como sendo o quociente de $F(X, k)$ pela ação natural do grupo simétrico Σ_k , a qual permuta coordenadas.

Um dos problemas em Topologia Algébrica consiste em se calcular a homologia e a cohomologia dos espaços de configurações.

- (1988) Löffler e Milgram (MILGRAM; LÖFFLER, 1988) calcularam os $\mathbb{Z}/2$ -grupos de homologia de $SF(X, n)$, para qualquer variedade (fechada) X .
- (1989) Bödighheimer (BÖDIGHEIMER et al., 1989) calculou os grupos de homologia de $SF(X, n)$, para qualquer variedade X de dimensão ímpar.

Em ambos casos, tais grupos de homologia dependem apenas da homologia da variedade X e de sua dimensão. Em contraste, os números de Betti racionais de $SF(X, n)$ não são determinados pelos números de Betti racionais de X , no caso em que X é uma variedade de dimensão par. Quando se trata dos anéis de cohomologia de $SF(X, n)$, um dos problemas é conhecer se tal anel é um invariante homotópico para variedades fechadas X .

- (1991) Bendersky e Gitler (BENDERSKY; GITLER, 1991) observaram que os grupos de cohomologia de $F(X, n)$ e $SF(X, n)$ são invariantes homotópicos para variedades X fechadas orientáveis e para *variedades formais racionais* X , tais como variedades projetivas complexas suaves. Eles calcularam os grupos de cohomologia racional de $F(X, n)$ e $SF(X, n)$, explicitamente, em termos do anel de cohomologia racional da variedade X .
- (1996) Burt Totaro (TOTARO, 1996) mostrou que se X é uma variedade projetiva complexa suave, então os anéis de cohomologia racionais de $F(X, n)$ e $SF(X, n)$ podem ser calculados a partir do anel de cohomologia racional de X .

A seguir, faremos uma descrição detalhada de todos os resultados apresentados no Capítulo 2 deste trabalho.

Os espaços de configurações de variedades topológicas também são variedades topológicas. E, no caso de uma variedade suave conexa, os seus espaços de configurações possuem estrutura de complexos CW (Teorema 3.5 e Corolário 3.2).

Para uma variedade topológica com bordo compacta e conexa M , a inclusão do interior de M em M induz equivalências de homotopia entre os espaços de configurações $F(Int\ M, k)$, $F(M, k)$ e $SF(Int\ M, k)$ e $SF(M, k)$. Isso significa, que a menos de homotopia, o bordo de uma variedade é irrelevante para os espaços de configurações, assim é suficiente calcular os espaços de configurações para variedades topológicas sem bordo (Teorema 3.6)

A fibração de Fadell e Neuwirth é a ferramenta central no estudo da topologia e geometria dos espaços de configurações. Para uma m -variedade topológica sem bordo conexa M , $m \geq 2$, a aplicação:

$$\begin{aligned} \pi_{k,r} : \quad F(M, k) &\longrightarrow F(M, r) \\ (x_1, \dots, x_r, \dots, x_k) &\longmapsto F(x_1, \dots, x_r, \dots, x_k) := (x_1, \dots, x_r) \end{aligned}$$

obtida pela *projeção* sobre os primeiros r -fatores é um fibrado localmente trivial, com fibra $F(M - Q_r, k - r)$, onde $k > r \geq 1$ (Teorema 3.8).

Tal resultado permite mostrar, por exemplo, que para uma variedade topológica conexa M com a propriedade que M permanece conexa quando é perfurada em $k - 1 \geq 0$ pontos, então os espaços de configurações de M são conexos por caminhos (Corolário 3.4). Como consequência, teremos que os espaços de configurações (ordenados) do \mathbb{R}^n e da n -esfera S^n são simplesmente conexos,

para todo $n \geq 3$. Além disso, o espaço de configurações $F(\mathbb{C}P^n, 2)$ do espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ é 1-conexo (Exemplos 3.13, 3.14 e 3.15).

Uma outra aplicação significativa da fibração de Fadell e Neuwirth é que se M é o plano Euclideano ou se M for uma superfície fechada, orientável ou não, então os espaços de configurações de $M - Q_m$ são espaços de Eilenberg-MacLane do tipo $K(\pi, 1)$, onde Q_m é um subconjunto de M contendo m pontos. Além disso, se M for diferente da esfera S^2 e do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$, então os espaços de configurações de M são $K(\pi, 1)$ -espaços, para todo $k \geq 1$ (Teorema 3.10). Uma consequência importante deste resultado é que se M é o plano Euclideano ou se M for uma superfície fechada, exceto a 2-esfera S^2 e o plano projetivo $\mathbb{R}P^2$, o tipo de homotopia de $F(M, k)$ e $SF(M, k)$ é completamente determinado por seu grupo fundamental. Por essa razão, um interessante problema em Topologia Algébrica consiste em se calcular tais grupos de homotopia, os quais são definidos como grupos de tranças de superfícies

O grupo de tranças puras sobre n -cordas sobre uma variedade topológica M , de dimensão maior ou igual a 2, $PB_n(M)$ é definido como sendo o grupo fundamental do espaço de configurações $F(M, k)$, e o grupo de tranças sobre n -cordas de M , $B_n(M)$ é definido como sendo o grupo fundamental do espaço de configurações $SF(M, k)$. Para uma variedade suave conexa M , com $\dim M \geq 3$, temos:

$$PB_k(M) := \pi_1(F(M, k)) \cong \prod_{i=1}^k \pi_1(M), \quad \forall k \geq 1,$$

ou seja, o grupo de tranças puras $PB_k(M)$ é determinado pelo grupo fundamental $\pi_1(M)$. Em particular, se M for simplesmente conexa, então $F(M, k)$ será simplesmente conexo, ou seja,

$$PB_k(M) := \pi_1(F(M, k)) = 1, \quad \forall k \geq 1.$$

Conseqüentemente,

$$B_k(M) := \pi_1(SF(M, k)) = \pi_1(F(M, k)/\Sigma_k) \cong \Sigma_k, \quad \forall k \geq 1.$$

Por essa razão, o estudo dos grupos de tranças possui relevância no caso de variedades de dimensão igual a 2 (Corolário 3.7 e Teorema B.6).

No que concerne aos grupos de homologia e homotopia dos espaços de configurações, para uma variedade topológica conexa M , com $\dim(M) \geq 1$, sempre que $\pi_1(M)$ for um grupo abeliano não trivial, então o grupo de homologia $H_1(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1))$ e os grupos de homotopia $\pi_1(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1))$ são não triviais, para todo $n \geq 2$ e $k \geq 1$ (Corolário 3.8). Por exemplo, se M é o grupo ortogonal especial $SO(n)$, então $H_1(F(SO(n) \times \mathbb{R}^n, k+1), \mathbb{Z})$ é isomorfo à soma direta $\bigoplus_1^{k+1} \mathbb{Z}_2$, para todo $n \geq 3$ (Exemplo 3.24).

Uma outra relevante propriedade da fibração de Fadell e Neuwirth é sobre a existência de seções. Usando este fato é possível calcular os grupos de ho-

motopia dos espaços de configurações de uma variedade topológica conexa, em termos dos grupos de homotopia da variedade perfurada (Teorema 3.12 e Corolário 3.11).

Uma outra questão natural que surge sobre os espaços de configurações é que para M e N espaços topológicos arbitrários não vazios, se $F(M, k)$ e $F(N, k)$ são *do mesmo tipo*, ou seja, são homeomorfos, ou possuem o mesmo tipo de homotopia, ou possuem o mesmo tipo de homotopia fraca, então M e N serão do mesmo tipo? Uma resposta trivial a essa questão, é obtida quando consideramos os espaços $\{pto\}$ e $\{pto, pto\}$. Para tais espaços, claramente não homeomorfos, tem-se $F(\{pto\}, k) = \emptyset = F(\{pto, pto\}, k)$, $\forall k \geq 3$. Agora, no caso de uma n -variedade contrátil, sem bordo, com $n \geq 3$, seus espaços de configurações, ordenados e não ordenados, possuem o mesmo tipo de homotopia fraca que os correspondentes espaços de configurações do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Em particular, toda n -variedade contrátil, sem bordo possui o mesmo tipo de homotopia fraca que o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Um exemplo importante é dado pela variedade de Whitehead, a qual é uma 3-variedade aberta e contrátil, mas não é homeomorfa ao espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Os espaços de configurações, ordenados e não ordenados, da *variedade de Whitehead* possuem o mesmo tipo de homotopia fraca que os correspondentes espaços de configurações do espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Isto implica, em particular, que a variedade de Whitehead tem o mesmo tipo de homotopia fraca que o \mathbb{R}^3 , porém a variedade de Whitehead não é homeomorfa a \mathbb{R}^3 (Corolário 3.12 e Teorema 3.13)

Em relação aos espaços de configurações do espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , seguirá que tais espaços não são espaços de Eilenberg-MacLane do tipo $K(\pi, 1)$, para todo $n \geq 2$ e para todo $k \geq 2$ (Corolário 3.14).

No que se refere à homologia, para q suficientemente grande, os R -módulos de homologia singular $H_q(F(M, k), R)$ dos espaços de configurações de variedades topológicas conexas são triviais (Proposição 3.24). Ainda como uma consequência da fibração de Fadell e Neuwirth e usando a sequência espectral de Leray-Serre associada a esta fibração, calculamos os grupos de homologia dos espaços de configurações $F(\mathbb{R}^n, 3)$, $F(\mathbb{R}^n, 4)$ e $F(\mathbb{C}P^n, 2)$ (Proposições 3.25, 3.26 e 3.27).

Uma das razões fundamentais em se conhecer os grupos de homologia de um espaço topológico é que um complexo CW simplesmente conexo, cujos grupos de homologia são finitamente gerados, tem o mesmo tipo de homotopia de um complexo CW tendo um número mínimo de células consistentes com seus grupos de homologia, isto é, uma n -célula para cada somando \mathbb{Z} de H_n , e um par de células de dimensões n e $n+1$, para cada somando \mathbb{Z}_k de H_n . Com base neste fato e pelo cálculo dos grupos de homologia citados anteriormente, concluímos que $F(\mathbb{R}^n, 4)$ ($n \geq 3$) tem o mesmo tipo de homotopia de um $3(n-1)$ -dimensional complexo CW finito e que o espaço de configurações $F(\mathbb{C}P^n, 2)$ tem o mesmo tipo de homotopia de um $2(2n-1)$ -dimensional CW complexo finito. (Exemplos 3.28, 3.29).

O Capítulo 1 apresenta resultados essenciais para o desenvolvimento deste trabalho a saber: Categorias e Funtores, a Topologia Compacta Aberta, os Grupos de transformações, Complexos CW, Sequências Espectrais e Espaços Classificantes. Um resultado importante mostrado na Seção 1.6 é que todo espaço CW do tipo $K(G, 1)$, com G um grupo discreto enumerável, é um espaço classificante para G (Proposição 2.18).

No Apêndice A apresentamos dois resultados básicos de Álgebra Homológica: o Lema dos Quatro e o Lema dos Cinco.

No apêndice B, destacamos teoremas imprescindíveis que serão usados neste trabalho, tais como o Teorema da Invariância do Domínio, a Sequência de Mayer-Vietoris e o Teorema de Hurewicz. Além disso, apresentamos uma demonstração de que toda variedade topológica conexa M , com $\dim M \geq 2$, é m -homogênea (Definição B.2), para todo m (Teorema B.5). Este resultado notável foi afirmado por Fadell e Neuwirth em (FADELL; NEUWIRTH, 1962).

Capítulo 2

Pré-requisitos

Este capítulo introduz as noções básicas e notações que serão usadas em todo este trabalho. Em todo este capítulo, R denotará um anel comutativo com unidade 1.

2.1 Álgebra homológica

Definição 2.1. ((SELICK, 2008), Definition 1.1.1, pg. 3 e (MACLANE, 1971), Chapter I, Section 2, pg. 10) Uma *categoria* \mathcal{C} consiste de:

(C₁) Uma classe *Obj* \mathcal{C} , conhecida como os *objetos* de \mathcal{C} (os quais não precisam ser um conjunto).

(C₂) Para cada par X, Y de objetos de *Obj* \mathcal{C} , um conjunto, denotado $\mathcal{C}(X, Y)$ ou $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, chamados os *morfismos* na categoria \mathcal{C} de X para Y .

(C₃) Para cada terna X, Y, Z de objetos de *Obj* \mathcal{C} , uma aplicação

$$\circ : \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$$

chamada *composição*, onde $\circ(f, g)$ usualmente é denota por $g \circ f$.

(C₄) Para cada objeto X de *Obj* \mathcal{C} , um elemento $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$, chamado o *morfismo identidade* de X , denotado também por Id_X .

Tais objetos e morfismos satisfazem as seguintes condições:

(A₁) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, para todo morfismo $f \in \mathcal{C}(W, X)$, $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ e $h \in \mathcal{C}(Y, Z)$.

(A₂) $1_Y \circ f = f$ e $f \circ 1_X = f$, para todo morfismo $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.

Observação 2.1. Quando a categoria é pressuposta escreveremos $f : X \rightarrow Y$ para indicar que f é um morfismo de X para Y .

Definição 2.2. Se existem morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que $g \circ f = 1_X$ e $f \circ g = 1_Y$ então X e Y são chamados *isomorfos* e f e g são chamados *isomorfismos*. Escreveremos $X \cong Y$, para expressar que X é isomorfo a Y .

Exemplo 2.1. ((MACLANE, 1971), Chapter I, Section 2, pg. 12) São exemplos de categorias:

- (i) *Set* denota a categoria cujos objetos são os conjuntos e cujos morfismos são todas as funções entre eles.
- (ii) *Grp* denota a categoria cujos objetos são grupos e cujos morfismos são os homomorfismos de grupos.
- (iii) *GrpAb* ou *Ab* denota a categoria cujos objetos são grupos abelianos e cujos morfismos são homomorfismos de grupos.
- (iv) *R-mod* denota a categoria cujos objetos são R -módulos (à esquerda) e cujos morfismos são R -homomorfismos.
- (vi) *Top* denota a categoria cujos objetos são espaços topológicos e cujos morfismos são funções contínuas.
- (vii) Top_i denota a categoria cujos objetos são espaços topológicos não finitos e cujos morfismos são aplicações contínuas injetoras. Tal categoria é mencionada na Observação 3.6.
- (vii) Top^2 denota a categoria cujos objetos são pares de espaços topológicos (X, A) , isto é, X é um espaço topológico e $A \subset X$, e cujos morfismos são aplicações contínuas entre tais pares $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, ou seja, $f : X \rightarrow Y$ é contínua e $f(A) \subset B$. Em particular, se $A = \{x_0\}$

e $B = \{f(x_0)\}$, temos a categoria cujos objetos são pares de espaços topológicos (X, x_0) e cujos morfismos são aplicações contínuas entre tais pares $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, f(x_0))$.

Exemplo 2.2. Um *complexo de cadeias* (C_*, d_*) sobre o anel R consiste de uma família $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de R -módulos junto com uma família $d = \{d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de R -homomorfismo tal que $d_n \circ d_{n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Sejam C_* e D_* complexos de cadeias. Uma *aplicação de cadeias* $f : C_* \rightarrow D_*$ consiste de um R -homomorfismo $f_n : C_n \rightarrow D_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{d_n} & D_{n-1} \end{array}$$

comuta.

Os complexos de cadeias sobre R e suas aplicações de cadeias com a composição natural formam uma categoria $Chain_R$. A composta das aplicações de cadeias $f : C_* \rightarrow D_*$ e $g : D_* \rightarrow E_*$ é dado pela aplicação de cadeia $g \circ f : C_* \rightarrow E_*$ onde $(g \circ f)_n = g_n \circ f_n : C_n \rightarrow E_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Para cada complexo de cadeias C_* o morfismo identidade 1_{C_*} é dado pela aplicação de cadeias $1_{C_*} : C_* \rightarrow C_*$ onde $(1_{C_*})_n = 1_{C_n}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 2.2. Uma categoria com exatamente um objeto, o qual denotaremos por $*$ é similar a um *monóide*, isto é, um conjunto $M = Hom(*, *)$ equipado com uma lei de composição associativa e de um elemento identidade. Desta maneira, um grupo pode ser considerado como uma categoria com um só objeto (vide (WEIBEL, 1994), Appendix A, Section A.1, pg. 418).

Definição 2.3. ((SELICK, 2008), Chapter 1, Section 1, Definition 1.1.2, pg. 3) Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias. Um *funtor covariante* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consiste de:

(F₁) um objeto $F(X)$ de $Obj \mathcal{D}$ para cada objeto X de $Obj \mathcal{C}$.

(F₂) um morfismo $F(g) \in \mathcal{D}(F(X), F(Y))$, para cada morfismo $g \in \mathcal{C}(X, Y)$.

Tais objetos e morfismos satisfazem as seguintes condições:

$$(F_3) \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g), \text{ para todo } g \in \mathcal{C}(X, Y) \text{ e } f \in \mathcal{C}(Y, Z).$$

$$(F_4) \quad F(1_X) = 1_{F(X)}, \text{ para todos os objetos } X \text{ de } \mathcal{C}.$$

De maneira análoga, um *functor contravariante* é definido invertendo-se os objetos $F(X)$ e $F(Y)$ em (F_2) e invertendo-se o ordem da composição em (F_3) .

Definição 2.4. Sejam categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} . Um *functor contravariante* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consiste:

$$(F_1) \quad \text{de um objeto } F(X) \text{ de } \text{Obj}\mathcal{D}, \text{ para cada objeto } X \text{ de } \text{Obj}\mathcal{C}.$$

$$(F_2) \quad \text{de um morfismo } F(g) \in \mathcal{D}(F(Y), F(X)), \text{ para cada morfismo } g \in \mathcal{C}(X, Y).$$

Tais objetos e morfismos satisfazem as seguintes condições:

$$(F_3) \quad F(f \circ g) = F(g) \circ F(f), \text{ para todo } g \in \mathcal{C}(X, Y) \text{ e } f \in \mathcal{C}(Y, Z).$$

$$(F_4) \quad F(1_X) = 1_{F(X)}, \text{ para todos os objetos } X \text{ de } \mathcal{C}.$$

Exemplo 2.3. São exemplos de funtores, para todo natural $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} F(-, k) : \text{Top}_i &\rightarrow \text{Top}_i \\ X &\mapsto F(X, k) \\ (f : X \rightarrow Y) &\mapsto (F(f, k) : F(X, k) \rightarrow F(Y, k)), \end{aligned}$$

onde $F(X, k)$ é o espaço de configurações ordenado de k pontos distintos de um espaço topológico X , $\forall k \geq 1$ (vide Definição 3.1).

$$\begin{aligned} SF(-, k) : \text{Top}_i &\rightarrow \text{Top}_i \\ X &\mapsto SF(X, k) \\ (f : X \rightarrow Y) &\mapsto (SF(f, k) : SF(X, k) \rightarrow SF(Y, k)), \end{aligned}$$

onde $SF(X, k)$ é o espaço de configurações não ordenado de k pontos distintos de um espaço topológico X , $\forall k \geq 1$ (vide Definição 3.2)

Tais funtores são chamados *funtores de configurações* (vide Observação 3.6).

Definição 2.5. ((SELICK, 2008), Chapter 1, Section 1, Definition 1.1.3, pg. 3 e (MACLANE, 1971), Chapter I, Section 4, pg. 16).
Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias e F, G funtores de \mathcal{C} em \mathcal{D} :

$$F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}.$$

Uma *transformação natural* $\eta : F \rightarrow G$ é uma família de morfismos $\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)$ para cada objeto X de \mathcal{C} tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & G(Y) \end{array}$$

é comutativo, para todo $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ morfismo. Uma transformação natural η tal que η_X é um isomorfismo, para cada objeto X , é chamada uma *equivalência natural* ou um *isomorfismo natural* (em (WEIBEL, 1994), Appendix A, Section A.3, pg. 423).

Exemplo 2.4. Consideremos os funtores de configurações:

$$F(-, k), F(-, r) : Top_i \rightarrow Top, \text{ para } r < k.$$

Note que, neste caso, estamos considerando a categoria de chegada como sendo Top . A regra $\pi_{k,r} : F(-, k) \rightarrow F(-, r)$ que associa para cada $X \in Top_i$, a aplicação contínua (vide Observação 3.27-(1)),

$$\pi_{k,r} : F(X, k) \rightarrow F(X, r), (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_r),$$

é uma transformação natural, mas não um isomorfismo natural, pois,

$$\pi_{k,r} : F(X, k) \rightarrow F(X, r), (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_r)$$

não é injetor.

Observação 2.3. ((WEIBEL, 1994), Appendix A, Section A.2, pg. 421) Um functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ de uma categoria \mathcal{C} em uma categoria \mathcal{D} , induz uma aplicação:

$$Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), f \mapsto F(f),$$

para cada $X, Y \in \mathcal{C}$. Se $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ é outro funtor, a *composição*

$$G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$$

é definida por

$$X \mapsto (G \circ F)(X) := G(F(X)) \text{ e } f \mapsto (G \circ F)(f) := G(F(f)).$$

O *funtor identidade* $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ é a regra fixando todos os objetos e morfismos, isto é, $Id_{\mathcal{C}}(X) := X$ e $Id_{\mathcal{C}}(f) := f$. Assim, para um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ temos

$$F \circ Id_{\mathcal{C}} = F \text{ e } Id_{\mathcal{D}} \circ F = F.$$

Observação 2.4. Um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre duas categorias com um só objeto é similar a um *homomorfismo de monóides*.

Definição 2.6. ((MACLANE, 1971), Chapter I, Section 3, pg. 14) Um funtor que simplesmente esquece parte da estrutura de um objeto algébrico é comumente chamado um *funtor esquecimento*^a e será denotado pela letra E . Como exemplos, existem: um funtor esquecimento de $R\text{-mod}$ para Ab , o qual esquece a estrutura de R -módulo; um funtor de esquecimento de Ab a Set , o qual esquece a estrutura de grupo; e sua composição de $R\text{-mod}$ para Set .

^aOu, o mesmo termo em inglês, Forgetful functor.

Definição 2.7. (WEIBEL, 1994), Appendix A, Section A.2, pg. 421) Um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é chamado *fiel*^a se as aplicações

$$Hom_{\mathcal{C}}(X, X') \rightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(X'))$$

são todas injetivas, ou seja, se f, g são funções distintas de X em X' , então $F(f) \neq F(g)$. Funtores esquecimento são funtores fiéis. Uma categoria \mathcal{C} com um funtor fiel $E : \mathcal{C} \rightarrow Set$ é chamada uma *categoria concreta*. Em uma categoria concreta, os morfismos são completamente determinados por seus efeitos sobre os conjuntos subjacentes.

^aOu, o mesmo termo em inglês, faithful.

Exemplo 2.5. $R - mod$ e Ab são exemplos de categorias concretas.

Exemplo 2.6. $F(-, k) : Top_i \rightarrow Top_i$ e $SF(-, k) : Top_i \rightarrow Top_i$ são funtores fiéis.

Definição 2.8. ((WEIBEL, 1994), Appendix A, Section A.2, pg. 422) Uma *subcategoria* \mathcal{B} de uma categoria \mathcal{C} é uma coleção de alguns dos objetos de \mathcal{C} e alguns dos morfismos de \mathcal{C} tais que os morfismos de \mathcal{B} são fechados sob composições, incluindo 1_X , para todo objeto X em $Obj \mathcal{B}$. Note que uma subcategoria é uma categoria e existe um functor, chamado *functor inclusão*:

$$\begin{aligned} i : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{C}, \quad X \mapsto i(X) := X, \quad f \mapsto i(f) := f, \\ Hom_{\mathcal{B}}(X, X') \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, X') \quad f \mapsto f, \end{aligned}$$

o qual é fiel por definição. Uma subcategoria \mathcal{B} na qual $Hom_{\mathcal{B}}(X, X') = Hom_{\mathcal{C}}(X, X')$, para cada X, X' em \mathcal{B} é chamada *subcategoria completa*.

Exemplo 2.7. Top_i é uma subcategoria de Top , a qual não é completa, pois aplicações constantes não são morfismos em Top_i .

Definição 2.9. ((WEIBEL, 1994), Appendix A, Section A.2, pg. 422) Um functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é *completo* se as aplicações

$$Hom_{\mathcal{C}}(X, X') \rightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(X'))$$

são todas sobrejetoras, ou seja, todo morfismo $g : F(X) \rightarrow F(X')$ em \mathcal{D} é da forma $g = F(f)$, para algum morfismo $f : X \rightarrow X'$ em \mathcal{C} . Um functor que é completo e fiel é chamado *completamente fiel*.

Exemplo 2.8. A inclusão de uma subcategoria completa é completamente fiel.

Exercício 2.1. $\zeta F(-, k) : Top_i \rightarrow Top_i$ e $SF(-, k) : Top_i \rightarrow Top_i$ são funtores completos?

Definição 2.10. ((WEIBEL, 1994), Appendix A, Section A.2, pg. 423) Um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é chamado uma *equivalência de categorias* se existem um funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais $1_{\mathcal{C}} \cong G \circ F$ e $1_{\mathcal{D}} \cong F \circ G$.

Exercício 2.2. $\zeta F(-, k) : Top_i \rightarrow Top_i$ e $SF(-, k) : Top_i \rightarrow Top_i$ são equivalências de categorias?

2.2 Topologia compacta aberta

Usando ((AGUILAR et al., 2002), Chapter 1, section 1.1, Definition 1.1.1, pg. 1), recordemos que se X e Y são conjuntos, Y^X denota o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow Y$. Podemos interpretar Y^X como o produto cartesiano $\prod_{x \in X} Y_x$, onde $Y_x = Y, \forall x \in X$. Quando Y é um espaço topológico, uma topologia canônica sobre $Y^X = \prod_{x \in X} Y_x$ é a topologia produto. Uma sub-base para esta topologia é formada pela família de conjuntos $U^x = \{f \in Y^X; f(x) \in U\}$, onde $x \in X$ e U é um conjunto aberto em Y .

Agora, supondo que X e Y são espaços topológicos, podemos considerar o subconjunto $Map(X, Y) \subset Y^X$ consistindo de todas as funções contínuas de X em Y . Introduziremos uma topologia canônica sobre $Map(X, Y)$, chamada topologia compacto-aberta, a qual é uma topologia que leva em consideração tanto a topologia de X quanto a topologia de Y e que generaliza a topologia produto.

Definição 2.11. ((AGUILAR et al., 2002), Chapter 1, section 1.2, Definition 1.2.1, pg. 2) A *topologia compacto-aberta*, denotada τ_{ca} , sobre $Map(X, Y)$ tem como sub-base a coleção dos conjuntos

$$(C, U) := \{f \in Map(X, Y) : f(C) \subset U\},$$

onde $C \subset X$ é compacto e U é aberto em Y . Ou seja,

$$\tau_{ca} = \left\{ A \subset Map(X, Y) : A = \bigcup \left(\bigcap_{finita} (C, U) \right) \right\}.$$

Observação 2.5. Se τ é uma topologia sobre $Map(X, Y)$ usaremos a notação $Map_\tau(X, Y)$ para o correspondente espaço topológico. Assim, usaremos a notação

$$Map_{ca}(X, Y) = (Map(X, Y), \tau_{ca}),$$

quando $\tau = ca$ for a topologia compacta-aberta.

Proposição 2.1. Se B é um subespaço de Y , então $Map_{ca}(X, B)$ é um subespaço de $Map_{ca}(X, Y)$.

Demonstração. Seja (C, U) um aberto sub-básico para $Map_{ca}(X, B)$. Vejamos que

$$(C, U) = W \cap Map(X, B), \text{ para algum aberto } W \text{ de } Map_{ca}(X, Y).$$

De fato, seja V aberto em Y tal que $U = V \cap B$. Consideremos o aberto sub-básico $W = (C, V)$ de $Map_{ca}(X, Y)$. Mostremos que $(C, U) = W \cap Map(X, B)$.

$$\begin{aligned} f \in (C, U) &\iff f \in Map(X, B) \text{ e } f(C) \subseteq U \\ &\iff f \in Map(X, B) \text{ e } f(C) \subseteq V \\ &\iff f \in Map(X, B) \text{ e } f \in (C, V) \\ &\iff f \in W \cap Map(X, B). \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja (C, V) aberto sub-básico de $Map_{ca}(X, Y)$. Note que

$$(C, V) \cap Map(X, B) = (C, V \cap B),$$

o qual é um aberto sub-básico de $Map(X, B)$. □

Definição 2.12. ((AGUILAR et al., 2002), Chapter 1, Section 1.1, pg. 2) A aplicação

$$\begin{aligned} e : Map(X, Y) \times X &\rightarrow Y \\ (f, x) &\mapsto e(f, x) = f(x), \end{aligned}$$

$\forall f \in Map(X, Y), \forall x \in X$, é chamada *aplicação avaliação*.

Definição 2.13. ((AGUILAR et al., 2002), Chapter 1, Section 1.1, Definition 1.1.3, pg. 2) Uma topologia τ sobre $\text{Map}(X, Y)$ é chamada *admissível* se a aplicação avaliação e for contínua com respeito a essa topologia τ , ou seja,

$$e : \text{Map}_\tau(X, Y) \times X \rightarrow Y \text{ é contínua.}$$

Definição 2.14. ((LEE, 2010), Chapter 4, pg. 104) Um subconjunto A de um espaço topológico X é chamado *relativamente compacto*^a se seu fecho \bar{A} em X for compacto.

^aOu pré-compacto.

Definição 2.15. (LEE, 2010), Chapter 4, pg. 104) Um espaço X é chamado *localmente compacto* se para cada ponto $p \in X$ existe um subconjunto compacto de X contendo uma vizinhança de p .

Exemplo 2.9. Todo espaço compacto é localmente compacto. O espaço Euclidiano \mathbb{R}^n é localmente compacto, mas não é compacto.

Considerando X espaço Hausdorff a propriedade de localmente compacto, é muito mais útil.

Proposição 2.2. ((LEE, 2010), Chapter 4, Proposition 4.63, pg. 104) Seja X um espaço Hausdorff. Os seguintes enunciados são equivalentes:

1. X é localmente compacto.
2. Cada ponto de X tem uma vizinhança pré-compacta.
3. X tem uma base de subconjuntos abertos pré-compactos.

Definição 2.16. Para um espaço topológico X , denotaremos por $\text{Top}(X)$ o conjunto de todos os homeomorfismos $\phi : X \rightarrow X$, o qual é um espaço topológico munido da topologia compacta-aberta.

Proposição 2.3. Seja X um espaço localmente compacto Hausdorff^a.

- (1) A topologia compacta-aberta τ_{ca} é admissível (vide (AGUILAR et al., 2002), Chapter 1, Section 1.2, Proposition 1.2.3, pg. 3).
- (2) A aplicação $\varphi : Top(X) \times Top(X) \rightarrow Top(X)$, $\varphi(g, f) := f \circ g$ é contínua.

^aPor exemplo, o intervalo unitário $I = [0, 1]$

Demonstração. (1) Mostremos que a aplicação avaliação $e : Map_{ca}(X, Y) \times X \rightarrow Y$ é contínua. Sejam $U \subseteq Y$ um aberto e $(f, x) \in e^{-1}(U)$, com $f \in Map(X, Y)$ e $x \in X$.

Como $f(x) = e(f, x) \in U$, então $x \in f^{-1}(U)$. Pela continuidade de f , temos que $f^{-1}(U)$ é um aberto em X contendo x . Assim, existe uma vizinhança aberta W de x em X com $x \in W \subseteq f^{-1}(U) \subseteq X$.

Sendo X localmente compacto Hausdorff, existe uma vizinhança aberta V de x em X , tal que $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq W$, com \bar{V} compacto em X (vide Proposição 2.2-(3)).

O produto $(\bar{V}, U) \times V$ é um aberto em $Map_{ca}(X, Y) \times X$ contendo (f, x) . Assim, é suficiente provar que

$$(\bar{V}, U) \times V \subseteq e^{-1}(U).$$

De fato, se $(g, y) \in (\bar{V}, U) \times V$, então

$$g(\bar{V}) \subseteq U \text{ e } y \in V.$$

Então,

$$e(g, y) = g(y) \in g(V) \subseteq g(\bar{V}) \subseteq U.$$

Portanto, $(g, y) \in e^{-1}(U)$.

(2) Mostremos que $\varphi : Top(X) \times Top(X) \rightarrow Top(X)$ definida por $\varphi(g, f) := f \circ g$ é contínua. Sejam (C, U) um aberto sub-básico em $Top(X)$ e $(g, f) \in \varphi^{-1}((C, U))$. Então,

$$f \circ g = \varphi(g, f) \in (C, U) \text{ e } \underbrace{g(C)}_{compacto} \subseteq \underbrace{f^{-1}(U)}_{aberto}.$$

Como X é localmente compacto Hausdorff, existe um conjunto V aberto em X tal que

$$g(C) \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq f^{-1}(U), \text{ com } \bar{V} \text{ compacto.}$$

Consideremos (C, V) e (\bar{V}, U) abertos sub-básicos em $Top(X)$. Afiramos que:

$$(g, f) \in (C, V) \times (\bar{V}, U) \subseteq \varphi^{-1}((C, U)),$$

De fato, para $(h, l) \in (C, V) \times (\bar{V}, U)$, temos que $h(C) \subseteq V$ e $l(\bar{V}) \subseteq U$. Assim,

$$\varphi(h, l)(C) = (l \circ h)(C) \subseteq l(V) \subseteq l(\bar{V}) \subseteq U.$$

Portanto, $\varphi^{-1}((C, U))$ é aberto em $Top(X) \times Top(X)$. □

Proposição 2.4. ((AGUILAR et al., 2002), Chapter 1, section 1.3, Proposition 1.3.4, pg. 5) Seja X um espaço compacto Hausdorff. Então,

$$\psi : Top(X) \rightarrow Top(X), \quad \psi(f) := f^{-1} \quad \text{é contínua.}$$

Demonstração. Sejam (C, U) um aberto sub-básico em $Top(X)$ e $f \in \psi^{-1}((C, U))$. Então,

$$f^{-1} = \psi(f) \in (C, U) \quad \text{e} \quad f^{-1}(C) \subseteq U, \quad \text{logo; } C \subseteq f(U).$$

Considerando complementares e usando o fato que f é uma bijeção, temos:

$$f(X - U) = X - f(U) \subseteq X - C.$$

Assim, $(X - U, X - C)$ é um aberto sub-básico em $Top(X)$ contendo f e

$$(X - U, X - C) \subseteq \psi^{-1}((C, U)).$$

De fato, para $g \in (X - U, X - C)$, temos

$$X - g(U) = g(X - U) \subseteq X - C, \quad \text{logo } C \subseteq g(U) \quad \text{e} \quad g^{-1}(C) := \psi(g)(C) \subseteq U.$$

Portanto, ψ é contínua. □

Corolário 2.1. Seja X um espaço compacto Hausdorff. O grupo $Top(X)$, dos homeomorfismos de X , munido com a operação de composição de funções e equipado com a topologia compacta-aberta é um grupo topológico.

Observação 2.6. De agora em diante, sempre consideraremos a topologia compacta-aberta sobre $Map(X, Y)$ e denotaremos $Map_{ca}(X, Y)$ simplesmente por $Map(X, Y)$.

Proposição 2.5. Sejam X, Y, Z espaços topológicos. Então, existe uma aplicação $\varphi : \text{Map}(X \times Y, Z) \rightarrow \text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z))$, definida por

$$\varphi(f)(x)(y) := f(x, y), \forall f \in \text{Map}(X \times Y, Z), \forall x \in X \text{ e } \forall y \in Y.$$

A aplicação φ é chamada *aplicação associação*.

Demonstração. Mostremos que $\varphi(f)(x) : Y \rightarrow Z$ é contínua. De fato, ela é dada pela composição de funções contínuas:

$$\varphi(f)(x) = f \circ i_x, \text{ onde } i_x : Y \rightarrow X \times Y, \ i_x(y) = (x, y), \ \forall y \in Y.$$

Assim $\varphi(f)(x) \in \text{Map}(Y, Z)$. Além disso, temos também que

$$\varphi(f) : X \rightarrow \text{Map}(Y, Z)$$

é contínua. De fato, seja (C, U) um aberto sub-básico de $\text{Map}(Y, Z)$, com C compacto em Y e U aberto em Z e mostremos que $\varphi^{-1}(f)((C, U))$ é aberto em X . Para isto, seja $x \in \varphi^{-1}(f)((C, U))$. Para todo $c \in C$,

$$f(x, c) := \varphi(f)(x)(c) \in U, \text{ logo } (x, c) \in f^{-1}(U) \text{ aberto em } X \times Y.$$

Então, existem vizinhanças abertas W_c de x e V_c de c tais que

$$(x, c) \in W_c \times V_c \subseteq f^{-1}(U) \text{ o que implica } f(x, c) \in f(W_c \times V_c) \subseteq U.$$

A coleção

$$\{V_c\}_{c \in C}$$

é uma cobertura aberta do compacto C , assim existe uma sub-coleção finita

$$\{V_{c_1}, V_{c_2}, \dots, V_{c_n}\}$$

que ainda cobre C . Sejam $W_{c_1}, W_{c_2}, \dots, W_{c_n}$ as vizinhanças que correspondem a V_{c_i} , para cada $1 \leq i \leq n$. Consideremos

$$W = \bigcap_{i=1}^n W_{c_i}$$

vizinhança aberta de x em X e mostremos que

$$x \in W \subseteq \varphi^{-1}(f)((C, U)).$$

De fato, se $z \in W$ e $c \in C$, então $\varphi(f)(z)(c) = f(z, c)$, mas $c \in V_{c_i}$, para algum i e $z \in W_{c_i}$, logo $f(z, c) \in U$. Assim, $\varphi(f)$ é contínua e, portanto, φ é bem definida. \square

Observação 2.7. Em (AGUILAR et al., 2002, Chapter 1, section 1.3, Proposition 1.3.1, pg. 4), os autores mostram ainda que a aplicação associação φ dada na Proposição 2.5 é uma equivalência de conjuntos, ou seja, existe

$$\psi : \text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z)) \rightarrow \text{Map}(X \times Y, Z)$$

uma inversa para φ . Para mostrar a boa definição de ψ é necessário considerar a hipótese de Y ser localmente compacto Hausdorff.

Proposição 2.6. ((AGUILAR et al., 2002), Chapter 1, section 1.3, Proposition 1.3.2, pg. 5) Sejam X, Y, Z espaços topológicos, com X Hausdorff. Então,

$$\varphi : \text{Map}(X \times Y, Z) \rightarrow \text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z))$$

é contínua.

Demonstração. Seja (C, U) um aberto sub-básico de $\text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z))$ com $C \subset X$ compacto e $U = (K, V)$ com K compacto em Y e V aberto em Z . Tem-se:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(C, U) &= \{f \in \text{Map}(X \times Y, Z) : \varphi(f) \in (C, U)\} \\ &= \{f \in \text{Map}(X \times Y, Z) : \varphi(f)(C) \subset (K, V)\} \\ &= \{f \in \text{Map}(X \times Y, Z) : \varphi(f)(C)(K) \subset V\} \\ &= \{f \in \text{Map}(X \times Y, Z) : (C \times K) \subset V\} \\ &= (C \times K, V). \end{aligned}$$

Logo, φ é contínua. \square

Observação 2.8. Em (AGUILAR et al., 2002), Chapter 1, section 1.3, Proposition 1.3.2, pg. 4, os autores mostram ainda que a aplicação associação φ dada na Proposição 2.6 é um homeorfismo. Para isto, é necessário considerar a hipótese adicional de que Y é localmente compacto Hausdorff.

Proposição 2.7. Seja $I = [0, 1]$. A aplicação concatenação

$$\begin{aligned} \psi : \text{Map}(I, X) \times \text{Map}(I, X) &\rightarrow \text{Map}(I, X) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \psi(\alpha, \beta) := \alpha * \beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \text{Map}(I, X), \end{aligned}$$

é contínua, onde $\alpha(1) = \beta(0)$ e $\alpha * \beta : I \rightarrow X$ é a concatenação dos caminhos α e β , i.e.,

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \beta(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Demonstração. Seja (C, U) um aberto sub-básico em $\text{Map}(I, X)$, com $C \subset I$ compacto e U aberto em X . Vejamos que $\psi^{-1}(C, U)$ é aberto em $\text{Map}(I, X) \times \text{Map}(I, X)$. De fato,

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(C, U) &= \{(\alpha, \beta) : \psi(\alpha, \beta) \in (C, U)\} \\ &= \{(\alpha, \beta) : \alpha * \beta \in (C, U)\} \\ &= \{(\alpha, \beta) : \alpha * \beta(C) \subseteq U\} \\ &= \left(C \cap \left[0, \frac{1}{2}\right], U \right) \times \left(C \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right], U \right) \end{aligned}$$

Assim, $\psi^{-1}(C, U)$ é aberto em $\text{Map}(I, X) \times \text{Map}(I, X)$. □

2.3 Grupos de transformações ou G-ações

Nesta seção, introduzimos uma série de definições e propriedades fundamentais para grupos de transformações (KAWAKUBO, 1991). Consideramos também grupos de transformações com estruturas adicionais, como a topologia, a estrutura C^∞ e uma estrutura algébrica.

Definição 2.17. ((KAWAKUBO, 1991), Chapter 1, Section 1.1, Definition 1.1, pg. 2) Sejam G um grupo com elemento identidade e e X um conjunto. Uma G -ação à esquerda é uma aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto \varphi(g, x) := g \cdot x \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes condições:

- (1) $e \cdot x = x, \forall x \in X$, ou seja, o elemento identidade e age “trivialmente”.

$$(2) \quad g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) \cdot x, \quad \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X.$$

A tripla (X, G, φ) é chamado um *grupo de transformações* ou uma G -ação sobre X e X é chamado um G -conjunto.

Observação 2.9. ((KAWAKUBO, 1991), Chapter 1, Section 1.1, pg. 3) Para cada $g \in G$ a aplicação $\varphi_g : X \rightarrow X$ definida por $\varphi_g(x) := \varphi(g, x)$. φ_g é chamada uma *transformação* por g . Das condições (1) e (2), segue que φ_g é uma bijeção com inversa $\varphi_{g^{-1}}$.

Exemplo 2.10. ((KAWAKUBO, 1991), Chapter 1, Section 1.1, Example 9, pg. 3) Sejam G um grupo topológico, X um espaço topológico e $\varphi : G \times X \rightarrow X$ uma G -ação contínua. Para cada $g \in G$, $\varphi_g : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo (vide (KAWAKUBO, 1991), Lemma 1.29, pg. 24). A tripla (X, G, φ) é chamada um *grupo de transformações topológico* e X é chamado um G -espaço.

Observação 2.10. O caso citado no Exemplo 2.10 será usado para definir o espaço de configurações não ordenado, no Capítulo 2.

Exemplo 2.11. Sejam G um grupo e H um subgrupo de G . Denotemos por $X = G/H$ o conjunto das classes laterias gH de H em G . Então, a aplicação:

$$\varphi : G \times G/H \rightarrow G/H$$

definida por $\varphi(g', gH) = g'(gH) = (gg')H$ define uma G -ação.

Proposição 2.8. Se G é um grupo discreto, ou seja, G é um grupo munido da topologia discreta, e se X é um espaço topológico qualquer, então $\varphi : G \times X \rightarrow X$ é contínua se, e somente se, $\varphi_g : X \rightarrow X$ é contínua, $\forall g \in G$.

Demonstração. Se $\varphi : G \times X \rightarrow X$ é contínua, então $\varphi_g : X \rightarrow X$ é contínua, para todo $g \in G$, pois é a restrição a X da aplicação contínua φ .

Reciprocamente, dado $g \in G$, suponhamos que $\varphi_g : X \rightarrow X$ seja contínua. Sejam $U \subset X$ um aberto e $(g, x) \in \varphi^{-1}(U)$. Então, $\varphi(g, x) := \varphi_g(x) \in U$, logo $x \in \varphi_g^{-1}(U)$. Como por hipótese $\varphi_g^{-1}(U)$ é um aberto em X contendo o ponto x , existe $V \subseteq X$ aberto tal que $x \in V \subseteq \varphi_g^{-1}(U)$. Assim, $(g, x) \in \{g\} \times V \subseteq \varphi^{-1}(U)$, com $\{g\} \times V$ aberto em $G \times X$. \square

Definição 2.18. ((KAWAKUBO, 1991), Chapter 1, Section 1.1, pg. 4) Seja (X, G, φ) um grupo de transformações.

1. Para cada $x \in X$, o conjunto

$$Gx := G(x) := \{gx \in X : g \in G\}$$

é chamado a *órbita* de x .

2. Para cada $x \in X$, o conjunto

$$G_x := \{g \in G : gx = x\}$$

dos elementos de G fixando x é chamado o *grupo de isotropia* em x .

3. O conjunto

$$X^G := \{x \in X : G_x = G\}$$

é chamado o *conjunto dos pontos fixos*.

As propriedades fundamentais dos conjuntos na Definição 2.18 são apresentadas a seguir.

Proposição 2.9. ((KAWAKUBO, 1991), Chapter 1, Section 1.1, Propositions 1.1, 1.2 e 1.3, pg. 4 e 5)

1. O grupo de isotropia G_x é um subgrupo de G .
2. Para $x, y \in X$, ou $G(x) = G(y)$ ou $G(x) \cap G(y) = \emptyset$.
3. Para qualquer $g \in G$ e $x \in X$, temos

$$G_{gx} = gG_xg^{-1}.$$

Observação 2.11. Seja $\varphi : G \times X \rightarrow X$ uma G -ação contínua. Segue do Exemplo 2.10, que a correspondência $g \mapsto \varphi_g$ define uma aplicação

$$\rho : G \rightarrow \text{Top}(X), \quad \rho(g) := \varphi_g.$$

Embora $\text{Top}(X)$ não seja necessariamente um grupo topológico, ele é um grupo, munido da operação de composição de funções, assim como um espaço topológico, munido da topologia compacto-aberta (vide Definição 2.16). A aplicação ρ definida em (2.1) é um homomorfismo de grupos,

chamado uma *representação* para X (vide (KAWAKUBO, 1991), Chapter 1, Section 1.4, Lemma 1.30, pg. 24).

Reciprocamente, dado um homomorfismo $\rho : G \rightarrow \text{Top}(X)$, definimos $\varphi : G \times X \rightarrow X$ por $\varphi(g, x) := \rho(g)(x)$. Então, φ é uma G -ação no sentido da Definição 2.17 (vide (KAWAKUBO, 1991), Chapter 1, Section 1.4, Lemma 1.31, pg. 25). O kernel do homomorfismo ρ é um subgrupo normal de G , chamado o *kernel da ação* φ . Além disso, $\text{Ker}(\rho) = \bigcap_{x \in X} G_x$ (vide (KAWAKUBO, 1991), Chapter 1, Section 1.4, Lemmas 1.34 e 1.35, pg. 25).

Definição 2.19. ((KAWAKUBO, 1991), Chapter 1, Section 1.1, pg. 6) Um grupo de transformações (X, G, φ) é chamado:

1. *trivial*, se $G_x = G, \forall x \in X$, ou seja, $gx = x, \forall g \in G$ e $\forall x \in X$, isto é, o homomorfismo $\rho : G \rightarrow \text{Top}(X)$ é trivial.
2. *livre*, se $G_x = \{e\}, \forall x \in X$. Neste caso, dizemos que G *age livremente* sobre X .
3. *semi-livre*, se $G_x = G$ ou $G_x = \{e\}, \forall x \in X$.
4. *fiel* ou *efetiva*, se o homomorfismo $\rho : G \rightarrow \text{Top}(X)$ é injetor, ou seja, $gx = x, \forall x \in X$ implica $g = e$.
5. *transitivo*, se existe exatamente uma órbita, ou seja, para quaisquer $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$;
6. *m-transitivo*, se X possui pelo menos m -elementos e, para quaisquer x_1, \dots, x_m e y_1, \dots, y_m pontos distintos de X , existe $g \in G$ tal que $gx_i = y_i, \forall 1 \leq i \leq m$.

Observação 2.12. Toda ação livre é efetiva.

Observação 2.13. O conceito de ação efetiva é usada por Steenrod na definição de fibrado (vide (STEENROD, 1951), pg. 7).

Definição 2.20. ((DIECK, 2008), pg. 64; (HATCHER, 2002), Chapter 1, Section 1.3, pg. 72) Seja (X, G, φ) um grupo de transformações topológico. Dizemos que a ação de G sobre X é *propriamente descontínua* se, para cada $x \in X$, existe uma vizinhança aberta V de x tal que

$$(gV) \cap (g'V) = \emptyset, \forall g, g' \in G, \text{ com } g \neq g'$$

ou, equivalentemente,

$$(gV) \cap V = \emptyset, \forall g \in G, \text{ com } g \neq e,$$

onde $gV := \{gx : x \in V\}$.

Observação 2.14. Toda ação propriamente descontínua é livre (vide (DIECK, 2008), pg. 64).

Definição 2.21. ((KAWAKUBO, 1991), Chapter 1, Section 1.6, Definition 1.3, pg. 36) Para um G -espaço X , definimos uma relação de equivalência \sim sobre X como segue:

$$x \sim y \text{ se, e somente se, existe um elemento } g \in G \text{ com } y = gx.$$

Denotaremos o espaço quociente X/\sim por X/G , ou seja,

$$X/G = \{G(x) : x \in X\},$$

é o conjunto cujos elementos são as órbitas $G(x) = \{gx : g \in G\}$ de G sobre X . X/G é um espaço topológico munido da topologia quociente co-induzida pela projeção natural $q : X \rightarrow X/G$, chamado o *espaço de órbitas* de X .

Proposição 2.10. (Vide (BREDON, 1976). Teorema 3.1, pg. 38) Seja X um G -espaço Hausdorff com G compacto. Então:

- (a) X/G é Hausdorff.
- (b) $q : X \rightarrow X/G$ é fechada
- (c) $q : X \rightarrow X/G$ é uma aplicação própria^a
- (d) X é compacto se, e somente se X/G é compacto.

^aUma função contínua $f : X \rightarrow Y$ é própria se para todo compacto $K \subset Y$, temos $f^{-1}(K) \subset X$ compacto.

Lema 2.1. Se X é um G -espaço, então $q : X \rightarrow X/G$ é uma aplicação aberta.

Demonstração. Note que para qualquer subconjunto U de X :

$$q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} gU,$$

onde $gU = \{gx : x \in U\}$. Em particular, se U for aberto em X , como $\varphi_g : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo e $\varphi_g(U) = gU$, segue que gU é aberto em X , o que implica $q^{-1}(q(U))$ aberto em X . Portanto, $q(U)$ é aberto em X/G . \square

Proposição 2.11. ((HATCHER, 2002), Chapter 1, Section 1.3, Proposition 1.40-(a), pg. 72) Seja X um G -espaço. Se a ação de G sobre X é propriamente descontínua, então $q : X \rightarrow X/G$ é um recobrimento.

Proposição 2.12. Sejam X um espaço de Hausdorff e G um grupo finito. Se a ação de G sobre X é livre, então ela também é propriamente descontínua.

Demonstração. Seja $G = \{g_0, g_1, \dots, g_n\}$, onde $g_0 = e$. Dado um ponto $x \in X$, como a ação de G sobre X é livre, então $G_x = \{e\}$. Logo

$$g_i x \neq x, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Mas como X é Hausdorff, existem vizinhanças abertas U_0, U_1, \dots, U_n de $x, g_1 x, \dots, g_n x$, respectivamente, tais que $U_0 \cap U_j = \emptyset$, para todo $j = 1, \dots, n$. Consideremos o conjunto

$$U := \bigcap_{j=0}^n g_j^{-1} U_j,$$

o qual é aberto em X . Mostremos que $x \in U$. De fato, para todo $j = 0, 1, \dots, n$:

$$x = ex = (g_j^{-1} g_j)x = g_j^{-1}(g_j x) \in g_j^{-1} U_j, \quad \text{então } x \in g_j^{-1} U_j, \quad \forall j = 0, 1, \dots, n.$$

Portanto, $x \in U$. Assim, U é uma vizinhança aberta de x em X e note que

$$U \subseteq g_0^{-1}U_0 = U_0.$$

Resta provar que

$$g_i U \cap U = \emptyset, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

De fato, para $i = 1, \dots, n$ temos: Então, $g_i U \subseteq U_i$, logo $g_i U \cap U \subseteq U_i \cap U_0 = \emptyset$. Assim,

$$g_i U \cap U = \emptyset, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

□

Definição 2.22. ((KAWAKUBO, 1991), Chapter 1, Section 1.1, pg. 5) Sejam (X, G, φ) e (Y, G, ψ) dois grupos de transformações sobre o mesmo grupo G . Dizemos que uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma G -aplicação ou uma aplicação G -equivariante se:

$$f(gx) = gf(x), \quad \forall g \in G \text{ e } \forall x \in X,$$

lembrando que a ação de gx é dada por φ e a ação $gf(x)$ é dada por ψ .

Observação 2.15. No caso de grupos de transformações topológicos, na Definição 2.22 devemos considerar $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua.

Definição 2.23. ((KAWAKUBO, 1991), Chapter 1, Section 1.1, pg. 5) Uma G -aplicação $f : X \rightarrow Y$ a qual é também uma bijeção é chamada um G -isomorfismo. Quando existe um G -isomorfismo $f : X \rightarrow Y$, dizemos que X e Y são G -isomorfos e denotamos G -isomorfismos por $X \cong Y$.

Observação 2.16. No caso de grupos de transformações topológicos, na Definição 2.22, devemos considerar $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo.

Observação 2.17. Um subconjunto Y de um G -conjunto X é chamado G -invariante se $gY \subseteq Y$, para qualquer $g \in G$.

Proposição 2.13. ((KAWAKUBO, 1991), Chapter 1, Section 1.1, Lemma 1.4, pg. 6) Um subconjunto G -invariante Y de um G -conjunto X satisfaz $gY = Y$, para qualquer $g \in G$ e, portanto, a G -ação sobre X induz uma G -ação sobre Y .

Proposição 2.14. ((KAWAKUBO, 1991), Chapter 1, Section 1.1, Theorem 1.5, pg. 6) Seja X um G -conjunto. Para qualquer $x \in X$, a órbita $G(x)$ é um subconjunto G -invariante de X e

$$G(x) \cong G/G_x,$$

onde G/G_x é o G -conjunto do Exemplo 2.11, com G -ação $g'(gG_x) = (g'g)G_x$.

Observação 2.18. Se H é um subgrupo de G e se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação G -equivariante, então f é H -equivariante.

Observação 2.19. Uma aplicação G -equivariante $f : X \rightarrow Y$ induz uma aplicação entre os espaços de órbitas $\bar{f} : X/G \rightarrow Y/G$, definida por $\bar{f}(Gx) = Gf(x), \forall x \in X$. Se $q_X : X \rightarrow X/G$ e $q_Y : X \rightarrow Y/G$ são as projeções naturais, então \bar{f} é a única aplicação que satisfaz:

$$\bar{f} \circ q_X = q_Y \circ f.$$

2.4 Complexos CW

Definição 2.24. ((MUNKRES, 1984), Section 38, pg. 214) Um espaço topológico X é chamado uma *célula fechada* de dimensão m se X é homeomorfo ao m -disco unitário

$$D^m := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq 1\}.$$

Exemplo 2.12. O m -cubo I^m e o m -simplexo padrão

$$\Delta^m = \{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : x_i \geq 0 \text{ para } 0 \leq i \leq m \text{ e } \sum_{i=0}^m x_i = 1\}$$

são m -células fechadas.

Definição 2.25. ((MUNKRES, 1984), Section 38, pg. 214) Um espaço topológico X é chamado uma *célula aberta* de dimensão m se X é homeomorfo à m -bola aberta

$$B^m := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i^2 < 1\}.$$

Usaremos a notação e_α para uma m -célula aberta.

Exemplo 2.13. O interior do m -cubo I^m , $\text{int}(I^m)$ e o interior do m -simplexo padrão $\text{int}(\Delta^m)$ são m -células abertas.

Definição 2.26. ((MUNKRES, 1984), Section 38, pg. 214) Um *complexo celular* ou *CW complexo* é um espaço topológico X e uma coleção de células abertas disjuntas e_α cuja união é X , satisfazendo as seguintes propriedades:

1. X é Hausdorff
2. para cada m -célula aberta e_α da coleção, existe $f_\alpha : D^m \rightarrow X$ contínua, chamada *aplicação característica*, que f_α leva o $\text{int}(D^m) = B^m$ homeomorficamente sobre e_α e leva $\partial D^m = S^{m-1}$ em uma união finita de células abertas da coleção, cada uma de dimensão menor que m .
3. um conjunto A é fechado em X se $A \cap \overline{e_\alpha}$ é fechado em $\overline{e_\alpha}$, para cada α .

O k -esqueleto do complexo X é o conjunto de todas as m -células de X , com $0 \leq m \leq k$.

2.5 Sequências Espectrais

Nesta seção, apresentamos umas das ferramentas mais sofisticadas em Topologia Algébrica, usada para se calcular homologia e cohomologia de espaços: as sequências espectrais. Em particular, a sequência espectral de Leray-Serre.

Lembremos que R denota um anel comutativo com identidade 1.

Definição 2.27. Um R -módulo filtrado é um par (M, \mathcal{F}_M) onde M é um R -módulo e \mathcal{F}_M é uma filtração para M . Uma filtração decrescente \mathcal{F}_M é uma sequência de submódulos de M da forma

$$\cdots \subseteq F_n M \subseteq \cdots \subseteq F_2 M \subseteq F_1 M \subseteq F_0 M = M$$

e uma filtração crescente \mathcal{F}_M é da forma

$$F_0 M \subseteq F_1 M \subseteq F_2 M \subseteq \cdots \subseteq F_n M \subseteq \cdots \subseteq M.$$

Definição 2.28. ((WEIBEL, 1994), Chapter 5, Section 5.2, Definition 5.2.1, pg. 122) Uma seqüência espectral do tipo homológica (começando com E^2) de R -módulos, vide Figure 2.1, consiste de:

1. Uma família $\{E_{pq}^r\}$ de R -módulos definida para todos os inteiros p, q e $r \geq 2$.
2. R -homomorfismos $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$ que são diferenciais, no sentido que, $d^r \circ d^r = 0$.
3. R -isomorfismo entre $E_{p,q}^{r+1}$ e a homologia de $E_{*,*}^r$ no ponto $E_{p,q}^r$, ou seja,

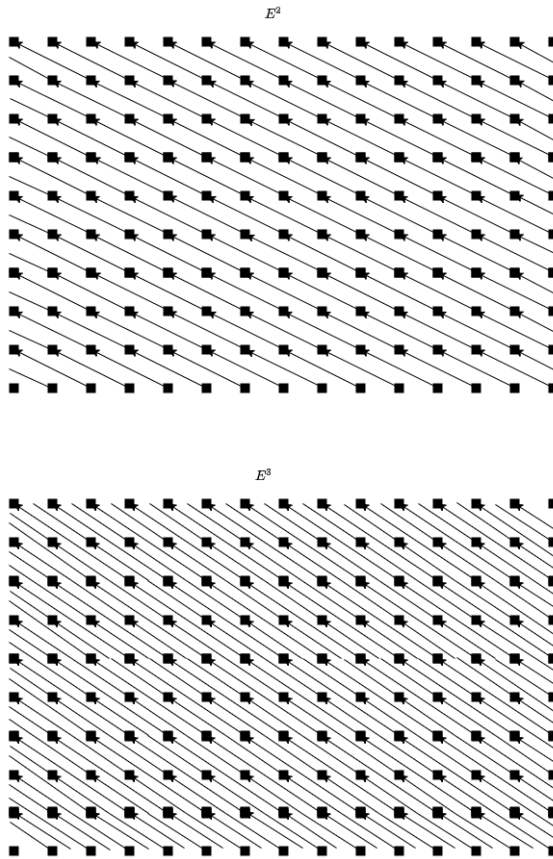
$$E_{p,q}^{r+1} \cong \text{Ker}(d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r) / \text{im}(d_{p+r,q-r+1}^r : E_{p+r,q-r+1}^r \rightarrow E_{p,q}^r)$$

Observação 2.20. ((WEIBEL, 1994), Chapter 5, Section 5.2, pg. 122)

1. A reta de inclinação $-(r-1)/r$ em $E_{*,*}^r$ determina um complexo de cadeias (vide Figura 2.1).
2. Denotaremos por $H_{p,q}(E_{*,*}^r, d^r)$ ao quociente

$$\text{Ker}(d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r) / \text{im}(d_{p+r,q-r+1}^r : E_{p+r,q-r+1}^r \rightarrow E_{p,q}^r)$$

Figura 2.1: E^2 e E^3 .



a homologia de $E_{\star,\star}^r$ no ponto $E_{p,q}^r$. Assim, da condição (3) temos:

$$E_{p,q}^{r+1} \cong H_{p,q}(E_{\star,\star}^r, d^r),$$

isto é, $E_{p,q}^{r+1}$ é um sub-quociente de $E_{p,q}^r$.

3. O grau total do termo $E_{p,q}^r$ é $n = p + q$, assim os termos de grau total n pertencem a uma reta de inclinação -1 e cada diferencial $d_{p,q}^r$ diminui o grau total por um.

Observação 2.21. ((WEIBEL, 1994), Chapter 5, Section 5.2, pg. 122) Existe uma categoria de seqüências espectrais do tipo homológica: um morfismo $f : E' \rightarrow E$ é uma família de \mathbb{R} -homomorfismos $f_{p,q}^r : E_{p,q}^{r'} \rightarrow E_{p,q}^r$ com $d^r \circ f^r = f^r \circ d^r$ tal que cada $f_{p,q}^{r+1}$ é a aplicação induzida por $f_{p,q}^r$ em homologia.

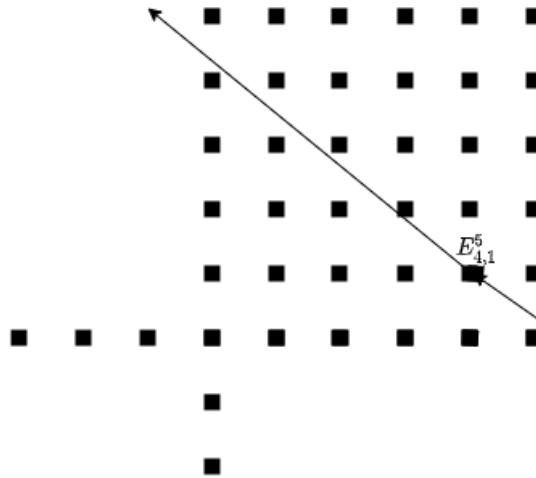
Definição 2.29. ((WEIBEL, 1994), Chapter 5, Section 5.2, Example 5.2.2, pg. 122) Dizemos que uma seqüência espectral é do primeiro quadrante se $E_{p,q}^2 = 0, \forall p, q < 0$ (o que implica que $E_{p,q}^r = 0, \forall p, q < 0, \forall r \geq 2$). Se fixamos p e q , então $E_{p,q}^r = E_{p,q}^{r+1}$ para $r > \max\{p, q + 1\}$, pois o diferencial d^r que chega em $E_{p,q}^r$ vem do quarto quadrante, enquanto o diferencial que sai de $E_{p,q}^r$ chega no segundo quadrante (vide Figura 2.2). Escrevemos $E_{p,q}^\infty$ para este valor estável de $E_{p,q}^r$.

Definição 2.30. ((WEIBEL, 1994), Chapter 5, Section 5.2, pg. 123) Uma seqüência espectral em homologia é chamada limitada, se para cada n , existe somente uma quantidade finita de termos não nulos de grau total n em $E_{\star,\star}^2$. Isto implica que, para cada p e q existe um r_0 tal que $E_{p,q}^r = E_{p,q}^{r+1}, \forall r \geq r_0$. Escrevemos $E_{p,q}^\infty$ para este valor estável de $E_{p,q}^r$. Note que toda seqüência do primeiro quadrante é limitada.

Definição 2.31. Dizemos que uma seqüência espectral limitada converge para H_\star , se existe uma família de \mathbb{R} -módulos H_n , cada um deles tendo uma filtração finita crescente de longitude $t - s$

$$0 = F_s H_n \subseteq \dots \subseteq F_{p-1} H_n \subseteq F_p H_n \subseteq F_{p+1} H_n \subseteq \dots \subseteq F_t H_n = H_n$$

Figura 2.2: Sequência espectral do primeiro quadrante.



e isomorfismos $E_{p,q}^\infty \cong F_p H_{p+q} / F_{p-1} H_{p+q}$. A forma tradicional simbólica de descrever tal convergência limitada é:

$$E_{p,q}^2 \Rightarrow H_{p+q}.$$

Observação 2.22. ((WEIBEL, 1994), Chapter 5, Section 5.2, Example 5.2.6, pg. 124) Se uma sequência espectral (de homologia) do primeiro quadrante converge para H_* , então cada H_n tem uma filtração finita de longitude $n + 1$:

$$0 = F_{-1}H_n \subseteq F_0H_n \subseteq \dots \subseteq F_{n-1}H_n \subseteq F_nH_n = H_n.$$

Neste caso, o quociente $F_0H_n / F_{-1}H_n = F_0H_n = E_{0,n}^\infty$ de H_n fica sobre o eixo Oy e o quociente $H_n / F_{n-1}H_n = E_{n,0}^\infty$ fica sobre o eixo Ox .

2.5.1 Sequência espectral de Leray-Serre

Enunciaremos a seguir um importante teorema para o cálculo de certos grupos de homologia, mais precisamente, grupos de homologia do espaço total de uma fibração.

Teorema 2.1 (Sequência espectral de Leray-Serre para Homologia). ((MC-CLEARY, 2001), Theorem 5.1, pg. 134) Seja G um grupo abeliano. Suponhamos que $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} B$ seja uma fibração, tal que B e F são conexos por caminhos. Então, existe uma sequência espectral de homologia do primeiro quadrante, $\{E_{s,*}^r, d^r\}$, convergindo para $H_*(E; G)$ com

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B, \mathcal{H}_q(F; G)),$$

a homologia do espaço base B com coeficientes locais na homologia da fibra de π .

Observação 2.23. O Teorema 2.1 possui uma versão mais simples, onde uma condição é exigida para que o sistema de coeficientes locais seja trivial. Tal versão será usada na Seção 3.8 no cálculo da homologia de alguns espaços de configurações.

Proposição 2.15. ((MCCLEARY, 2001), Theorem 5.4, pg. 139) Seja G um grupo abeliano. Dada uma fibração $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} B$, tal que B e F são conexos por caminhos e o sistema de coeficientes locais sobre B determinado pela fibra é simples, equivalentemente, a ação de $\pi_1(B)$ sobre $H_*(F; G)$ é trivial (por exemplo, se B for simplesmente conexo). Então, existe uma sequência espectral de homologia do primeiro quadrante, $\{E_{s,*}^r, d^r\}$, convergindo para $H_*(E; G)$ com

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B, H_q(F; G)).$$

Seja M um R -módulo e seja $F : Mod_R \rightarrow Mod_S$ um functor aditivo. Escolha uma resolução projetiva P_* de M :

$$P_* : \dots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

Então

$$F(P_*) : \dots \xrightarrow{F(d_{n+1})} F(P_n) \xrightarrow{F(d_n)} F(P_{n-1}) \xrightarrow{F(d_{n-1})} \dots \rightarrow F(P_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \xrightarrow{F(d_0)} 0$$

é um complexo de cadeias de S -módulos. Se F é exato então $F(P_*)$ é acíclico com $H_0(F(P_*)) = F(M)$ (mas em geral isto não é verdade).

Para cada $n \geq 0$, seja $(L_n F)(M) := H_n(F(P_*))$ e chamamos $L_n F$ o n -ésimo functor derivado a esquerda de F . Note que $L_n F$ é de fato um functor de R -módulos

para S -módulos e $(L_n F)(M)$ é bem definido no sentido que é independente (salvo isomorfismos) da escolha da resolução projetiva P_* . Intuitivamente $L_n F$ mede a desviação de F de preservar a exatidão.

Exemplo 2.14. Fixe M um R -módulo, para o functor $M \otimes_R -$ seu n -ésimo functor derivado a esquerda avaliado em N é escrito por $Tor_n^R(M, N)$. Como $M \otimes_R -$ é exato a direita, temos $Tor_0^R(M, N) = M \otimes_R N$. Vamos escrever $Tor_1^R(M, N)$ simplesmente por $Tor^R(M, N)$.

Observação 2.24. Usualmente para calcular o $E_{p,q}^2$ termo na Proposição 2.15, fazemos uso do Teorema dos Coeficientes Universais para Homologia.

Teorema 2.2 (Teorema dos Coeficientes Universais para Homologia). ((DAVIS; KIRK, 2001), pg. 44) Seja R um domínio de ideais principais. Suponhamos que M seja um módulo sobre R e que (C_*, ∂) seja um complexo de cadeias livre sobre R (ou seja, cada C_p é um R -módulo livre). Então, a sequência

$$0 \rightarrow H_p(C_*) \otimes_R M \rightarrow H_p(C_*; M) \rightarrow Tor^R(H_{p-1}(C_*); M) \rightarrow 0$$

é exata e cinde.

Observação 2.25. Nas mesmas condições do Teorema 2.2, note que se $H_{p-1}(C_*)$ ou se M forem R -livres, então

$$H_p(C_*; M) \cong H_p(C_*) \otimes_R M.$$

Se $R = \mathbb{Z}$ na Proposição 2.15, o $E_{p,q}^2$ termo da sequência espectral de Leray-Serre é da forma:

$$E_{p,q}^2 \cong (H_p(B) \otimes H_q(F)) \oplus Tor^{\mathbb{Z}}(H_{p-1}(B); H_q(F)).$$

Recordemos as propriedades básicas do produto tensorial e do functor Tor .

Proposição 2.16. ((DAVIS; KIRK, 2001),pg. 9) Para $A, B, C, \{A_\alpha\}$ R -módulos:

1. $A \otimes_R B \cong B \otimes_R A$.

2. $R \otimes_R B \cong B$.
3. $(A \otimes_R B) \otimes_R C \cong A \otimes_R (B \otimes_R C)$.
4. $(\bigoplus_{\alpha} A_{\alpha}) \otimes_R B \cong \bigoplus_{\alpha} (A_{\alpha} \otimes_R B)$.
5. Dados R -homomorfismos $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow D$, existe um R -homomorfismo $f \otimes_R g : A \otimes_R B \rightarrow C \otimes_R D$ tal que $a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)$.

Proposição 2.17. 1. $Tor^R(M, N) \cong Tor^R(N, M)$.

2. $Tor_0^R(M, N) = M \otimes_R N$.
3. $Tor_n^R(M, N) = 0, \forall n \geq 1$, se M ou N são R -módulos livres.

2.6 Espaços classificantes

O objetivo desta seção é mostrar que todo espaço CW do tipo $K(G, 1)$, com G um grupo discreto e enumerável, é um espaço classificante para G .

Definição 2.32. Sejam G um grupo e X um espaço topológico conexo por caminhos satisfazendo as seguintes condições:

$$\pi_i(X) = 0, \quad \forall i \neq 1, \quad \text{e} \quad \pi_1(X) \cong G.$$

Então, X é chamado espaço de *Eilenberg-MacLane* ou simplesmente um $K(G, 1)$ -espaço (vide (HATCHER, 2002), Chapter 4, Section 4.2, pg. 365).

Observação 2.26. Mais geralmente, no Capítulo 2 apresentaremos a definição de espaços do tipo $K(G, n)$ ^a, para todo $n \geq 1$ (vide Definição 3.24).

^aPor conveniência, no Capítulo 2 usaremos a notação $K(\pi, n)$ para os espaços de Eilenberg-MacLane.

Observação 2.27. Em toda esta seção, estaremos considerando a definição de um fibrado $\beta = (B, p, X, F, G)$ segundo (STEENROD, 1951), Part I, Section 2, Definições 2.3 e 2.4, pg. 7, 8. De acordo com a nomenclatura adotada por Steenrod, B e X são espaços topológicos, chamados, respectivamente, espaço fibrado e espaço base, $p : B \rightarrow X$ é chamada a

projeção e F é chamada a fibra. O espaço $F_x = p^{-1}(x)$ é chamado a fibra sobre o ponto $x \in X$. (F, G, φ) é um grupo de transformações topológico, no qual a ação à esquerda $\varphi : G \times F \rightarrow F$ de G sobre a fibra F é efetiva. G é chamado o grupo do fibrado.

Definição 2.33. ((STEENROD, 1951), Part I, Section 8, pg. 35) Um fibrado $\beta = (B, p, X, F, G)$ é chamado um *fibrado principal* se a fibra F é o grupo G .

Definição 2.34. ((HATCHER, 2002), Chapter 4, Section 4.1, pg. 346) Um espaço topológico X é chamado *n -conexo*, se $\pi_i(X, x_0)$ é trivial, para todo $0 \leq i \leq n$ e qualquer $x_0 \in X$. *0-conexo* equivale que o espaço X é conexo por caminhos e *1-conexo* equivale que o espaço X é simplesmente conexo.

Observação 2.28. Da Definição 2.34, concluímos que se o espaço X for *n -conexo*, então $\pi_0(X, x_0)$ é trivial, logo X é conexo por caminhos. Assim, a escolha do ponto base x_0 não é significativa. Portanto, a condição de um espaço ser *n -conexo* pode ser expressa sem se fazer menção ao ponto base.

Definição 2.35. ((STEENROD, 1951), Theorem 19.4, pg. 102) Um *fibrado n -universal* é um fibrado principal tal que o espaço fibrado é $(n - 1)$ -conexo. Um *fibrado ∞ -universal* ou, simplesmente, um *fibrado universal* é um fibrado principal que é *n -universal*, para todo n , ou seja, quando o espaço fibrado é fracamente contrátil, isto é, o espaço fibrado é conexo por caminhos e seus grupos de homotopia são triviais.

Definição 2.36. ((MILNOR, 1956), Section 1, pg. 430) Sejam G um grupo topológico e X um espaço topológico. Dizemos que X é um *espaço classificante* para G se X é o espaço base de algum fibrado universal com grupo G .

Observação 2.29. Em (HATCHER, 2002, Chapter 1, Section 1.3, Example 1B.7, pg. 89), o autor mostra que para um grupo discreto G , existe um complexo CW conexo por caminhos, que é um $K(G, 1)$ -espaço. Especificamente, ele constrói um recobrimento universal^a $p : EG \rightarrow EG/G = BG$ do espaço de órbitas $BG = EG/G$ tal que BG é um complexo CW que é um $K(G, 1)$ -espaço.

^avide (HATCHER, 2002), Chapter 1, Section 1.3, pg. 68

Proposição 2.18. Seja G um grupo discreto, Então, existe um complexo CW do tipo $K(G, 1)$ que é o espaço classificante para o grupo G .

Demonstração. Segue da Observação 2.29, que para um grupo discreto G , existe um complexo CW conexo por caminhos BG que é um $K(G, 1)$ espaço, o qual possui um recobrimento universal EG

$$p : EG \rightarrow BG.$$

Pela definição de recobrimento universal, EG é simplesmente conexo, ou seja, EG é conexo por caminhos e tem grupo fundamental trivial. Além disso, como $p : EG \rightarrow BG$ é um recobrimento, os grupos de homotopia superiores de EG satisfazem:

$$\pi_i(EG) \cong \pi_i(BG), \quad \forall i \geq 2.$$

Sendo BG um $K(G, 1)$ -espaço, temos

$$\pi_i(EG) \cong 0, \quad \forall i \geq 2.$$

Assim, o espaço EG é conexo por caminhos e seus grupos de homotopia são triviais. Além disso, toda aplicação de recobrimento é um fibrado principal. Logo $p : EG \rightarrow BG$ é um fibrado universal. Assim, BG é o espaço base do fibrado universal $p : EG \rightarrow BG$ com grupo G , ou seja, BG é um espaço classificante para o grupo G . \square

Definição 2.37. ((MILNOR, 1956), Section 5, pg. 435) Um grupo topológico G é chamado um *CW-grupo enumerável* se G é um complexo CW enumerável^a tal que a aplicação

$$G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

e a aplicação produto

$$G \times G \rightarrow G. (g, h) \mapsto gh$$

são celulares, ou seja, levam o k -esqueleto no k -esqueleto.

^aIsso significa que G possui uma quantidade enumerável de células.

Exemplo 2.15. Todo grupo discreto enumerável é um 0-dimensional complexo CW enumerável, suas 0-células são os elementos de G . Assim, G é seu 0-esqueleto. Portanto, as aplicações

$$G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$$

e

$$G \times G \rightarrow G. (g, h) \mapsto gh$$

são celulares. Assim, G é um CW-grupo enumerável.

Lema 2.2. ((MILNOR, 1956), Section 5, Theorem 5.2-(1) e -(2), pg. 435)

- (1) Qualquer CW-grupo enumerável G tem um complexo CW enumerável X_1 como espaço classificante.
- (2) Um segundo complexo CW X_2 é também um espaço classificante para G se, e somente se, X_2 tem o mesmo tipo de homotopia que X_1 .

Corolário 2.2. Dado um CW-grupo enumerável G , seja X_1 um complexo CW que é um espaço classificante para G . Então, um complexo CW X_2 é também um espaço classificante para G se, e somente se, X_2 tem o mesmo tipo de homotopia que X_1 .

Demonstração. Seja X um complexo CW enumerável que é um espaço classificante para G (Lema 2.2-(1)). Por hipótese geral temos que X_1 é um complexo CW que é um espaço classificante para G , logo pelo Lema 2.2-(2)

$$X \simeq X_1$$

Suponhamos que X_2 seja um espaço classificante para G . Vejamos que X_2 tem o mesmo tipo de homotopia que X_1 . De fato, novamente pelo Lema 2.2-(2),

$$X_2 \simeq X.$$

Assim, de (2.6) e (2.6)

$$X_2 \simeq X_1.$$

Agora, suponhamos que $X_2 \simeq X_1$. Vejamos que X_2 é um espaço classificante para G . De fato, usando (2.6) obtemos que $X_2 \simeq X$. Agora novamente, usando o Lema 2.2-(2) segue que X_2 é um espaço classificante para G . □

Lema 2.3. ((HATCHER, 2002), Chapter 1, Section 1.B, Theorem 1B.8, pg. 90)

O tipo de homotopia de um complexo CW do tipo $K(G, 1)$ é unicamente determinado pelo grupo G .

Proposição 2.19. Seja G um grupo discreto enumerável. Então, qualquer complexo CW do tipo $K(G, 1)$ é um espaço classificante para o grupo G .

Demonstração. Seja X um complexo CW do tipo $K(G, 1)$. Pela Proposição 2.18, existe um complexo CW BG do tipo $K(G, 1)$, que é o espaço classificante para o grupo G . Agora, pelo Exemplo 2.15 G é um CW-grupo enumerável. Por outro lado, usando o Lema 2.3 obtemos que X tem o mesmo tipo de homotopia que BG . Agora, usando o Corolário 2.2 segue que X é um espaço classificante para o grupo G . □

Capítulo 3

Espaços de Configurações

3.1 Espaços de Configurações clássicos

Oscar Zariski, em 1937, utilizou o conceito de espaços de configurações não ordenados (ZARISKI, 1937). Posteriormente, Ralph Fox, em 1962, definiu o conceito de tranças geométricas usando os espaços de configurações não ordenados (FOX; NEUWIRTH, 1962). Um estudo detalhado dos espaços de configurações, ordenados e não ordenados, foi apresentado no trabalho de Fadell e Neuwirth (FADELL; NEUWIRTH, 1962).

Uma das características dos espaços de configurações é a sua relação com a teoria de tranças, introduzida por Emil Artin em 1926, a qual é uma grande linha de pesquisa ativa até o momento. Desde então, os espaços de configurações aparecem em distintas áreas de pesquisa: Geometria, Combinatória, Física, Química, Biologia e, mais recentemente, na Robótica.

Um dos problemas em Topologia Algébrica consiste em calcular a homologia e a cohomologia dos espaços de configurações.

(1988) Löffler e Milgram (MILGRAM; LÖFFLER, 1988) calcularam os $\mathbb{Z}/2$ -grupos de homologia de $SF(X, n)$, para qualquer variedade (fechada) X .

(1989) Bödigheimer (BÖDIGHEIMER et al., 1989) calculou os grupos de homologia de $SF(X, n)$, para qualquer variedade X de dimensão ímpar.

Em ambos casos, tais grupos de homologia dependem apenas da homologia da variedade X e de sua dimensão. Em contraste, os números de Betti racionais de $SF(X, n)$ não são determinados pelos números de Betti racionais de X , no caso em que X é uma variedade de dimensão par. Quando se trata dos anéis de cohomologia de $SF(X, n)$, um dos problemas é conhecer se tal anel é um invariante homotópico para variedades fechadas X .

- (1991) Bendersky e Gitler (BENDERSKY; GITLER, 1991) observaram que os grupos de cohomologia de $F(X, n)$ e $SF(X, n)$ são invariantes homotópicos para variedades X fechadas orientáveis e para *variedades formais racionais* X , tais como variedades projetivas complexas suaves. Eles calcularam os grupos de cohomologia racional de $F(X, n)$ e $SF(X, n)$, explicitamente, em termos do anel de cohomologia racional da variedade X .
- (1996) Burt Totaro (TOTARO, 1996) mostrou que se X é uma variedade projetiva complexa suave, então os anéis de cohomologia racionais de $F(X, n)$ e $SF(X, n)$ podem ser calculados a partir do anel de cohomologia racional de X .

A seguir, apresentamos o conceito de espaços de configurações.

Definição 3.1. ((COHEN, 1995), Section 1, pg. 20) Seja X um espaço topológico. Defina o *espaço de configurações ordenado* de k pontos distintos em X como o subespaço de X^k dado por

$$F(X, k) := \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k : x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}.$$

Os espaços de configurações ordenados são conhecidos também como *espaços de configurações clássicos*.

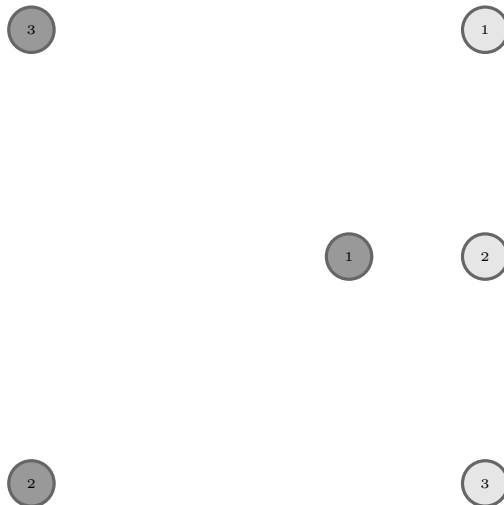


Figura 3.1: Dois 3-configurações ordenadas.

Diretamente da Definição 3.1, obtemos as seguintes observações.

Observação 3.1. Se o número de elementos de X , denotado $|X|$, é estritamente menor que k , então $F(X, k) = \emptyset$.

Observação 3.2.

$$F(X, k) = X^k - \bigcup_{i < j} H_{i,j},$$

onde $H_{i,j} = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k : x_i = x_j\}$.

Uma propriedade básica dos espaços de configurações é a existência de uma ação livre do grupo simétrico S_k sobre $F(X, k)$.

Proposição 3.1. ((COHEN, 2010), Definition 2.1, pg. 184) O grupo simétrico sobre k -letras, Σ_k , age livremente sobre $F(X, k)$ (à direita) permutando coordenadas, como segue:

$$\varphi : F(X, k) \times \Sigma_k \rightarrow F(X, k), \quad \varphi((x_1, \dots, x_k), \sigma) := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}).$$

Demonstração. Note que:

1. Para $id \in \Sigma_k$, a permutação identidade, e para $(x_1, \dots, x_k) \in F(X, k)$, temos:

$$\begin{aligned} \varphi((x_1, \dots, x_k), id) &= (x_{id(1)}, \dots, x_{id(k)}) \\ &= (x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

2. Para quaisquer $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_k$ e $(x_1, \dots, x_k) \in F(X, k)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi((x_1, \dots, x_k), \sigma_2), \sigma_1) &= \varphi((x_{\sigma_2(1)}, \dots, x_{\sigma_2(k)}), \sigma_1) \\ &= \varphi((y_1, \dots, y_k), \sigma_1) \\ &= (y_{\sigma_1(1)}, \dots, y_{\sigma_1(k)}) \\ &= (x_{\sigma_2(\sigma_1(1))}, \dots, x_{\sigma_2(\sigma_1(k))}) \\ &= \varphi((x_1, \dots, x_k), \sigma_2 \circ \sigma_1), \end{aligned}$$

onde $y_i = x_{\sigma_2(i)}$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Note que essa ação é livre, pois apenas o elemento identidade fixa qualquer ponto $(x_1, \dots, x_k) \in F(X, k)$. Resta provar que a ação φ é contínua. Como o grupo $G = \Sigma_k$ é discreto, pela Observação 2.8 é suficiente provar que para cada $\sigma \in \Sigma_k$, a aplicação

$$\varphi_\sigma : F(X, k) \rightarrow F(X, k)$$

é contínua. De fato, note que a aplicação $\varphi_\sigma : F(X, k) \rightarrow F(X, k)$ é a restrição, ao espaço de configurações $F(X, k)$, da aplicação (usando a mesma notação)

$$\varphi_\sigma : X^k \rightarrow X^k, (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}).$$

Assim, basta provar que esta última aplicação é contínua. Seja $\prod_{i=1}^k U_i$ um aberto básico para X^k , então $\varphi_\sigma^{-1}(\prod_{i=1}^k U_i) = \prod_{i=1}^k U_{\sigma^{-1}(i)}$ é aberto em X^k . Portanto, φ_σ é contínua. \square

Definição 3.2. ((COHEN; PAKIANATHAN,) Definition 2.1, pg. 3; (COHEN, 1995) Section 1, pg. 20) Dado um espaço topológico X , podemos considerar o espaço de órbitas

$$SF(X, k) := B(X, k) := F(X, k)/\Sigma_k,$$

chamado o *espaço de configurações não ordenado*.

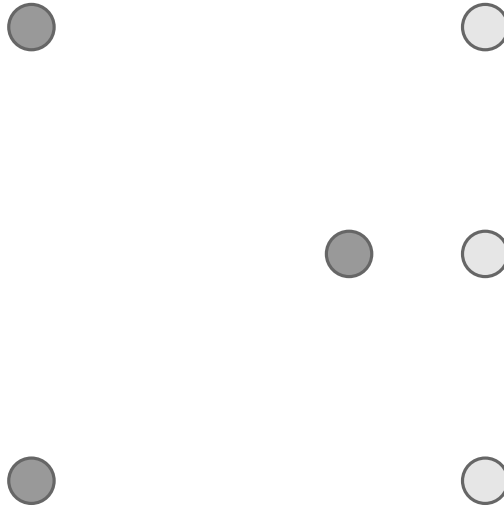


Figura 3.2: Dois 3-configurações não ordenadas: uma na cor escuro e outra na cor claro.

Observação 3.3. Dado um espaço de Hausdorff X , como o grupo finito Σ_k age livremente sobre o espaço de Hausdorff $F(X, k)$, temos pela Proposição 2.12 que essa ação é propriamente descontínua. Assim, a aplicação

quociente

$$q_k^X : F(X, k) \rightarrow SF(X, k)$$

é uma aplicação de recobrimento de $k!$ folhas ((COHEN; PAKIANATHAN,) Section 2, pg. 3).

Observação 3.4. No caso em que $F(X, k)$ é simplesmente conexo, usando o Corolário B.2, temos:

$$\pi_1(SF(X, k)) \cong \Sigma_k.$$

Observação 3.5. Dentre os espaços de configurações mais conhecidos estão os espaços $SF(\mathbb{R}^2, k)$ e $F(\mathbb{R}^2, k)$. Fadell e Neuwirth mostraram que $SF(\mathbb{R}^2, k)$ é um $K(\pi, 1)$ -espaço de Eilenberg-MacLane, com grupo fundamental isomorfo ao *grupo de tranças de Artin sobre k -cordas* B_k (vide (FADELL; NEUWIRTH, 1962)). Usando o fato que $F(\mathbb{R}^2, k)$ é um recobrimento para $SF(\mathbb{R}^2, k)$ segue que $F(\mathbb{R}^2, k)$ é também um $K(\pi, 1)$ -espaço de Eilenberg-MacLane, com grupo fundamental isomorfo ao *grupo de tranças puras sobre k -cordas* PB_k (vide (COHEN, 2010), Section 2, Example 2.2, pg. 184). Assim, a cohomologia de $SF(\mathbb{R}^2, k)$ e $F(\mathbb{R}^2, k)$ é justamente a cohomologia do grupo de tranças B_k e do grupo de tranças puras PB_k , respectivamente. Tais cohomologias foram obtidas pelos seguintes autores:

Arnold (ARNOLD, 1969): calculou a cohomologia de $F(\mathbb{R}^2, k)$.

Fuks (FUKS, 1970) e Cohen ((BIRMAN; LIBGOBER, 1988), pg. 167-206) calcularam a cohomologia de $SF(\mathbb{R}^2, k)$.

Exemplo 3.1. A seguir, apresentamos alguns exemplos.

- (1) $F(X, 1)$ e $SF(X, 1)$ são ambos iguais a X ((COHEN; PAKIANATHAN,) Remark 2.2, pg. 3).
- (2) $F(\mathbb{R}^n, 2) \simeq S^{n-1}$ ((COHEN, 2010), Example 2.3, pg. 185).
- (3) $F(\mathbb{R}^n, 2) \simeq \mathbb{R}^n - \{0\}$.
- (4) $F(\mathbb{R}^n, k)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n \times F(\mathbb{R}^n - \{0\}, k-1)$ ((COHEN, 2010), Example 2.3, pg. 185).

(5) Se G é um grupo topológico com elemento identidade e , então $F(G, k)$ é homeomorfo a $G \times F(G - \{e\}, k - 1)$, $\forall k \geq 2$. ((COHEN, 2010), Example 2.6, pg. 186).

(6) $F(S^n, 2) \simeq S^n$ ((COHEN, 2010), Example 2.4, pg. 186).

Demonstração. (1) Segue da Definição 3.1.

(2) Prova (i) Definimos as funções contínuas:

$$f : S^{n-1} \rightarrow F(\mathbb{R}^n, 2), \quad f(x) = (x, 0) \quad e \quad g : F(\mathbb{R}^n, 2) \rightarrow S^{n-1}, \quad g(x, y) = \frac{x - y}{\|x - y\|}.$$

Note que $g \circ f = 1_{S^{n-1}}$. Consideremos a homotopia $H : F(\mathbb{R}^n, 2) \times [0, 1] \rightarrow F(\mathbb{R}^n, 2)$ (linear) definida por:

$$H((x, y), t) = (1-t)(x, y) + t \left(\frac{x - y}{\|x - y\|}, 0 \right) = \left(t \left(\frac{x - y}{\|x - y\|} - x \right) + x, (1-t)y \right).$$

Então, para todo $(x, y) \in F(\mathbb{R}^n, 2)$, temos:

$$H((x, y), 0) = (x, y) = 1_{F(\mathbb{R}^n, 2)}(x, y) \quad e \quad H((x, y), 1) = \left(\frac{(x - y)}{\|x - y\|}, 0 \right) = (f \circ g)(x, y).$$

Portanto, $f \circ g \stackrel{H}{\simeq} 1_{F(\mathbb{R}^n, 2)}$.

(2) Prova (ii) Alternativamente, podemos considerar as funções contínuas:

$$f : S^{n-1} \rightarrow F(\mathbb{R}^n, 2), \quad f(x) = (x, -x) \quad e \quad g : F(\mathbb{R}^n, 2) \rightarrow S^{n-1}, \quad g(x, y) = \frac{x - y}{\|x - y\|}.$$

Neste caso, temos $g \circ f = 1_{S^{n-1}}$ e $f \circ g \stackrel{H}{\simeq} 1_{F(\mathbb{R}^n, 2)}$, onde

$$H : F(\mathbb{R}^n, 2) \times [0, 1] \rightarrow F(\mathbb{R}^n, 2)$$

é a homotopia (linear) definida por:

$$\begin{aligned} H((x, y), t) &= (1-t)(x, y) + t \left(\frac{x - y}{\|x - y\|}, -\frac{x - y}{\|x - y\|} \right) \\ &= \left((1-t)x + \frac{t}{\|x - y\|}(x - y), (1-t)y - \frac{t}{\|x - y\|}(x - y) \right). \end{aligned}$$

(3) Definimos as funções contínuas:

$$f : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow F(\mathbb{R}^n, 2), \quad f(x) = (x, 0) \quad e \quad g : F(\mathbb{R}^n, 2) \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad g(x, y) = x - y.$$

Note que $g \circ f = 1_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$ e $f \circ g \stackrel{H}{\simeq} 1_{F(\mathbb{R}^n, 2)}$, onde

$$H : F(\mathbb{R}^n, 2) \times [0, 1] \rightarrow F(\mathbb{R}^n, 2)$$

é a homotopia (linear) definida por:

$$H((x, y), t) = (1 - t)(x, y) + t(x - y, 0) = (x - ty, (1 - t)y).$$

(4) Definimos as funções contínuas:

$$f : F(\mathbb{R}^n, k) \rightarrow \mathbb{R}^n \times F(\mathbb{R}^n - \{0\}, k-1), \quad f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, x_2 - x_1, \dots, x_k - x_{k-1}) \text{ e}$$

$$g : \mathbb{R}^n \times F(\mathbb{R}^n - \{0\}, k-1) \rightarrow F(\mathbb{R}^n, k), \quad g(x_1, \dots, x_k) = (x_1, x_2 + x_1, \dots, x_k + x_{k-1}).$$

Note que $f \circ g = 1_{\mathbb{R}^n \times F(\mathbb{R}^n - \{0\}, k-1)}$ e $g \circ f = 1_{F(\mathbb{R}^n, k)}$.

(5) Similarmente ao item anterior, definimos o homeomorfismo

$$h : F(G, k) \rightarrow G \times F(G - \{e\}, k-1), \quad h(g_1, \dots, g_k) = (g_1, (g_2 g_1^{-1}, \dots, g_k g_1^{-1}))$$

com inversa

$$f : G \times F(G - \{e\}, k-1) \rightarrow F(G, k), \quad f(g, (g_1, \dots, g_{k-1})) = (g, g_1 g, g_2 g, \dots, g_{k-1} g).$$

(6) Definimos as funções contínuas

$$f : S^n \rightarrow F(S^n, 2), \quad f(x) = (x, -x) \text{ e } g : F(S^n, 2) \rightarrow S^n, \quad g(x, y) = x.$$

Note que $g \circ f = 1_{S^n}$ e $f \circ g \stackrel{H}{\simeq} 1_{F(S^n, 2)}$, onde

$$H : F(S^n, 2) \times [0, 1] \rightarrow F(S^n, 2)$$

é a homotopia definida por

$$H((x, y), t) = \left(x, \frac{-tx + (1-t)y}{\| -tx + (1-t)y \|} \right).$$

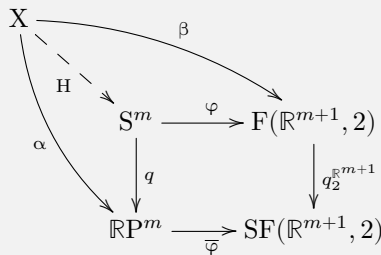
□

Exercício 3.1. Mostre que $SF(\mathbb{R}^{m+1}, 2) \simeq \mathbb{R}P^m \simeq SF(S^m, 2)$.

Exercício 3.2. Assinale verdadeiro V ou falso F.

- () Se $F(X, 2) \simeq F(Y, 2)$ então $X \simeq Y$.
- () Se $SF(X, 2) \simeq SF(Y, 2)$ então $X \simeq Y$.
- () Se $F(X, 2) \cong F(Y, 2)$ então $X \cong Y$.
- () Se $SF(X, 2) \cong SF(Y, 2)$ então $X \cong Y$.

Exercício 3.3. Sejam X um espaço topológico, $\beta : X \rightarrow F(\mathbb{R}^{m+1}, 2)$ e $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}P^m$ aplicações contínuas tais que $q_2^{\mathbb{R}^{m+1}} \circ \beta = \bar{\varphi} \circ \alpha$, onde $\bar{\varphi}$ é a aplicação induzida no quociente pela aplicação $\varphi : S^m \rightarrow F(\mathbb{R}^{m+1}, 2)$, $\varphi(x) = (x, -x)$.



Mostre que existe uma aplicação contínua $H : X \rightarrow S^m$ tal que $\varphi \circ H \simeq \beta$ e $q \circ H = \alpha$, onde $q : S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$ é a aplicação no quociente.

Usando o linguagem de categorias (Definição 2.1), podemos pensar nos espaços de configurações como funtores.

Observação 3.6. ((COHEN; PAKIANATHAN,), Remark 2.3, pg. 3) Consideremos \mathfrak{Top}_i a categoria cujos objetos são espaços topológicos X , com X não finito, e cujos morfismos são as aplicações contínuas injetoras. Então, para cada $k \geq 1$,

$$F(-, k) : \mathfrak{Top}_i \rightarrow \mathfrak{Top}_i$$

é um funtor covariante da categoria \mathfrak{Top}_i na categoria \mathfrak{Top}_i , o qual associa a cada espaço X o espaço de configurações $F(X, k)$ e a cada função contínua e injetora $f : X \rightarrow Y$, associa a função contínua e injetora

$F(f, k) : F(X, k) \rightarrow F(Y, k)$ definida como segue:

$$F(f, k)(x_1, \dots, x_k) = (f(x_1), \dots, f(x_k)).$$

Note ainda que $F(f, k)$ é Σ_k -equivariante, ou seja,

$$F(f, k)(x\sigma) = F(f, k)(x)\sigma, \quad \forall \sigma \in \Sigma_k, \quad \forall x \in F(X, k).$$

Uma aplicação contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que H_t é um morfismo na categoria \mathfrak{Top}_i , para cada $t \in [0, 1]$, ou seja, H_t é injetora, para cada $t \in [0, 1]$, é chamada uma *isotopia*. Tal aplicação induz uma homotopia $H^* := F(H) : F(X, k) \times [0, 1] \rightarrow F(Y, k)$ definida por:

$$H^*((x_1, \dots, x_k), t) = (H(x_1, t), \dots, H(x_k, t)).$$

Observemos que H^* também é uma isotopia e, para cada $t \in [0, 1]$, H_t^* é Σ_k -equivariante.

Para o caso não ordenado, também temos que $SF(-, k) : \mathfrak{Top}_i \rightarrow \mathfrak{Top}_i$ é um functor covariante, o qual associa a cada espaço topológico X , o espaço de configurações $SF(X, k)$ e, a cada função contínua e injetora $f : X \rightarrow Y$, associa a função contínua e injetora $SF(f, k) : SF(X, k) \rightarrow SF(Y, k)$ definida como segue:

$$SF(f, k)[x] = [F(f, k)(x)] = [(f(x_1), \dots, f(x_k))].$$

Note que $SF(f, k)$ é bem definida, pois $F(f, k)$ é Σ_k -equivariante. Uma aplicação contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que H_t é um morfismo na categoria \mathfrak{Top}_i , para cada $t \in [0, 1]$, induz uma homotopia $H^{**} := SF(H) : SF(X, k) \times [0, 1] \rightarrow SF(Y, k)$ definida por:

$$H^{**}([x], t) = [F(H)(x, t)] = [H_t^*(x)],$$

a qual é bem definida, pois H_t^* é Σ_k -equivariante, para cada $t \in [0, 1]$.

No caso em que $k = 1$, tem-se os funtores identidade.

Usando a definição de espaços de configurações, obtemos a seguinte

Proposição 3.2. São válidos os seguintes resultados:

1. Se Y é subespaço de X , então $F(Y, k)$ é subespaço de $F(X, k)$, $\forall k \geq 1$.
2. Se X é homeomorfo a Y , então os espaços de configurações ordenados $F(X, k)$ e $F(Y, k)$ (respectivamente, não ordenados $SF(X, k)$ e $SF(Y, k)$) são homeomorfos, para qualquer $k \geq 1$.

Demonstração. 1. Se Y é subespaço de X , denotemos por

$$\tau_{Y^k} := \{U \cap F(Y, k) : U \text{ é aberto em } Y^k\}$$

a topologia relativa de $F(Y, k)$ com respeito a Y^k e

$$\tau_{F(X, k)} := \{U \cap F(Y, k) : U \text{ é aberto em } F(X, k)\}$$

a topologia relativa de $F(Y, k)$ com respeito a $F(X, k)$. Vejamos que $\tau_{Y^k} = \tau_{F(X, k)}$. De fato, seja $V \in \tau_{Y^k}$ então $V = U \cap F(Y, k)$ com U aberto em Y^k . Como Y^k é subespaço de X^k , existe W aberto em X^k tal que $U = W \cap Y^k$. Assim,

$$V = W \cap Y^k \cap F(Y, k) = W \cap F(Y, k) = (W \cap F(X, k)) \cap F(Y, k).$$

Como $W \cap F(X, k)$ é aberto em $F(X, k)$, segue que $V \in \tau_{F(X, k)}$.

Agora, seja $V \in \tau_{F(X, k)}$. Então, $V = U \cap F(Y, k)$, com U aberto em $F(X, k)$. Como $F(X, k)$ é subespaço de X^k , existe W aberto em X^k tal que $U = W \cap F(X, k)$. Assim,

$$V = W \cap F(X, k) \cap F(Y, k) = W \cap F(Y, k) = (W \cap Y^k) \cap F(Y, k).$$

Como $W \cap Y^k$ é aberto em Y^k , segue que $V \in \tau_{Y^k}$.

2. Seja $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo com inversa $g : Y \rightarrow X$. Se $|X| = |Y| < k$ o resultado é trivial. Vamos ver no caso $|X| = |Y| \geq k$. Temos que $F(f, k) : F(X, k) \rightarrow F(Y, k)$, $F(f, k)(x_1, \dots, x_k) = (f(x_1), \dots, f(x_k))$ é um homeomorfismo com inversa $F(g, k)$. Por outro lado, $F(f, k)$ e $F(g, k)$ são Σ_k -equivariantes, então $F(f, k)$ induz um homeomorfismo $SF(f, k) : SF(X, k) \rightarrow SF(Y, k)$, $SF(f, k)[x_1, \dots, x_k] = [f(x_1), \dots, f(x_k)]$ com inversa $SF(g, k)$. □

Corolário 3.1. Sejam X, Y espaços topológicos. Se $F(X, k)$ não for homotópico a $F(Y, k)$ ou $SF(X, k)$ não for homotópico a $SF(Y, k)$, para algum $k \geq 1$, então X e Y não serão homeomorfos.

Mediante a Proposição 3.2, podemos calcular os espaços de configurações para a variedade aberta $S^n - \{\star\}$.

Exemplo 3.2. $F(S^n - \{\star\}, 2) \simeq S^{n-1}$ e $SF(S^n - \{\star\}, 2) \simeq \mathbb{R}P^{n-1}$.

Demonstração. Sabemos que $S^n - \{\star\}$ é homeomorfa ao \mathbb{R}^n (via a projeção este-reográfica), assim pela Proposição 3.2 (2), $F(S^n - \{\star\}, 2)$ é homeomorfo a $F(\mathbb{R}^n, 2)$ (respectivamente, $SF(S^n - \{\star\}, 2)$ é homeomorfo a $SF(\mathbb{R}^n, 2)$) e do Exemplo 3.1-(2) (respectivamente, Exercício 3.1), temos $F(\mathbb{R}^n, 2) \simeq S^{n-1}$ (respectivamente, $SF(\mathbb{R}^n, 2) \simeq \mathbb{R}P^{n-1}$). \square

Observação 3.7. Sabemos que, se X é homeomorfo a Y , então os espaços de configurações ordenados $F(X, k)$ e $F(Y, k)$ (respectivamente, não ordenados $SF(X, k)$ e $SF(Y, k)$) são homeomorfos, para qualquer $k \geq 1$. Um dos problemas interessantes nesta teoria é saber se os funtores $F(-, k)$ e $SF(-, k)$ são invariantes homotópicos. Vide, por exemplo, (LONGONI; SALVATORE, 2005).

Observação 3.8. Note que, se $A \subseteq X$, então $F(A, k) = A^k \cap F(X, k)$, $\forall k \geq 1$. Assim, quando A for fechado (respectivamente aberto) em X , então $F(A, k)$ será fechado (respectivamente aberto) em $F(X, k)$.

Proposição 3.3. Se X é um espaço de Hausdorff, então $F(X, k)$ é aberto em X^k .

Demonstração. Prova (i) Seja $x = (x_1, \dots, x_k) \in F(X, k)$. Como X é Hausdorff e $x_i \neq x_j$ sempre que $i \neq j$, então para cada $i, j = 1, \dots, k$ existem U_i, U_j vizinhanças abertas para x_i, x_j , com $U_i \cap U_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$. Considerando $U = U_1 \times \dots \times U_k$ aberto em X^k , temos que $x \in U$. Vejamos que $U \subseteq F(X, k)$. De fato, dado $y = (y_1, \dots, y_k) \in U$, suponhamos que existam i, j , com $i \neq j$ tais que $y_i = y_j \in U_i \cap U_j$. Então, $y_i \in U_i \cap U_j$, o que é uma contradição. Portanto, $y \in F(X, k)$. Assim $U \subseteq F(X, k)$.

Prova (ii) Pela Observação 3.2, temos $F(X, k) = X^k - \bigcup_{i < j} H_{i,j}$, onde $H_{i,j} = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k : x_i = x_j\}$. Assim, basta mostrar que

$$H_{i,j} = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k : x_i = x_j\}$$

é fechado $\forall i < j$. De fato, provaremos que

$$X^k - H_{i,j}$$

é aberto. Seja $x = (x_1, \dots, x_k) \in X^k - H_{i,j}$, então $x_i \neq x_j$, para todo $i \neq j$. Como X é Hausdorff, existem U_i, U_j abertos de X tais que $x_i \in U_i, x_j \in U_j$ e $U_i \cap U_j = \emptyset$. Consideremos $U = \prod_{s=1}^k V_s$ aberto de X^k , onde

$$V_s = \begin{cases} U_s, & \text{se } s = i, j; \\ X, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $U_i \cap U_j = \emptyset$, segue que $U \subseteq X^k - H_{i,j}$. Portanto, $X^k - H_{i,j}$ é aberto. \square

Observação 3.9. 1. Pela prova (i) da Proposição 3.3 temos que se X é um espaço de Hausdorff, então cada ponto $x = (x_1, \dots, x_k) \in F(X, k)$ possui uma vizinhança aberta da forma $\prod_{i=1}^k U_i$, com U_i aberto em X e tal que $U_i \cap U_j = \emptyset$, para todo $1 \leq i \neq j \leq k$.

2. Similarmente, se X é Hausdorff, então para cada aberto U em $F(X, k)$ e para cada ponto $x \in U$, existe uma vizinhança aberta para x da forma $\prod_{i=1}^k U_i$, com U_i aberto em X , e tal que $U_i \cap U_j = \emptyset$, para todo $1 \leq i \neq j \leq k$, pois, como $F(X, k)$ é aberto em X^k , então todo aberto em $F(X, k)$ é também um aberto do espaço produto X^k . Assim, x está no aberto U e como os conjuntos da forma $\prod_{i=1}^k U_i$, com U_i aberto em X , formam uma base para o espaço produto X^k , então existe $\prod_{i=1}^k U_i$, com U_i aberto em X , tal que $x \in \prod_{i=1}^k U_i \subseteq U \subseteq F(X, k)$. A propriedade $U_i \cap U_j = \emptyset, \forall 1 \leq i \neq j \leq k$ segue do fato que $\prod_{i=1}^k U_i \subseteq F(X, k)$.

3. Uma base para o espaço de configurações $F(X, k)$, com X Hausdorff, é dada pelos abertos da forma $\prod_{i=1}^k U_i$, com U_i aberto em X , e tal que $U_i \cap U_j = \emptyset, \forall 1 \leq i \neq j \leq k$.

A seguir, apresentamos o conceito de variedades topológicas e algumas de suas importantes propriedades.

Definição 3.3. ((LEE, 2010), pg. 38) Seja $n \geq 0$ um inteiro. Um espaço topológico M é *localmente Euclidiano de dimensão n* se para todo ponto $x \in M$, existe um aberto $U \subset M$ que é homeomorfo a um subconjunto aberto do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n .

O lema a seguir mostra que, na Definição 3.3, podemos substituir conjuntos abertos por bolas abertas ou pelo próprio espaço Euclidiano \mathbb{R}^n .

Lema 3.1. ((LEE, 2010), Lemma 2.52, pg. 38) Um espaço topológico M é localmente Euclidiano de dimensão n se uma das seguintes condições vale:

- (a) Para todo ponto $x \in M$, existe um aberto $U \subset M$ homeomorfo a uma bola aberta em \mathbb{R}^n .
- (b) Para todo ponto $x \in M$, existe um aberto $U \subset M$ homeomorfo a \mathbb{R}^n .

Definição 3.4. ((LEE, 2010), pg. 39) Uma n -dimensional variedade topológica é um espaço topológico Hausdorff M , segundo enumerável (ou seja, possui base enumerável) que é *localmente Euclidiano de dimensão n* .

Exemplo 3.3. ((LEE, 2010), Exercise 2.54, pg. 39) Um espaço topológico M é uma 0-variedade topológica se, e somente se, M for discreto enumerável.

Proposição 3.4. ((LEE, 2010), Proposition 4.23, pg. 93) Toda variedade topológica é localmente conexa e localmente conexa por caminhos^a.

^a

Definição 3.5. ((HATCHER, 2002), Chapter 1, Section 1.3, pg. 62) Um espaço topológico X é *localmente conexo por caminhos* se, para cada ponto $x \in X$ e para cada vizinhança aberta U de x , existe uma vizinhança aberta $V \subseteq U$ de x que é conexa por caminhos. A definição de conexidade local é análoga.

Proposição 3.5. ((LEE, 2010), Proposition 4.64, pg. 105) Toda variedade topológica é localmente compacta.

Teorema 3.1. ((LEE, 2010), Theorem 4.77, pg. 110) Todo espaço segundo enumerável e localmente compacto Hausdorff é paracompacto. Em particular, toda variedade topológica é paracompacto.

Observação 3.10. Como todo espaço paracompacto Hausdorff é normal ((LEE, 2010), Theorem 4.81, pg. 112), segue que toda variedade topológica é um espaço normal, logo completamente regular (pelo Lema de Urysohn) e regular.

Proposição 3.6. ((LEE, 2012), Proposition 1.11, pg. 8) Seja M uma variedade topológica. Então, M é conexa se, e somente se, M for conexa por caminhos.

Teorema 3.2. Seja R um anel comutativo com identidade.

- (a) Se M é uma n -variedade compacta e conexa, então $H_i(M; R) = 0$, para todo $i > n$ ((HATCHER, 2002), Theorem 3.26(c), pg. 236).
- (b) Se M é uma n -variedade conexa e não compacta, então $H_i(M; R) = 0$, para todo $i \geq n$ ((HATCHER, 2002), Proposition 3.29, pg. 239).

Observação 3.11. Seja R um anel comutativo com identidade. Se M é uma n -variedade topológica conexa, então seus grupos de homologia singular, $H_{i+1}(M; R) = 0$ para $i \geq n$ (vide Teorema 3.2).

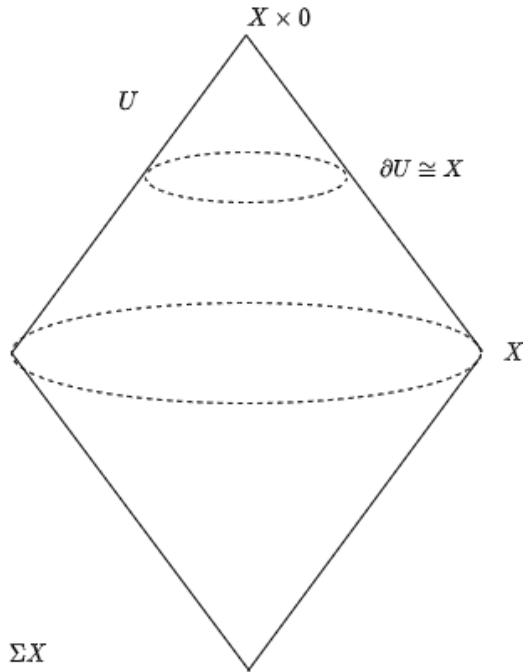
Exemplo 3.4. Existem exemplos importantes de espaços topológicos que não admitem estrutura de variedade topológica, como segue.

1. Seja X um espaço topológico que não é homeomorfo à n -esfera S^n . Então,

$$\Sigma X = (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\} \cup X \times \{0\}),$$

a *suspensão não reduzida* de X , é um espaço topológico que não é uma $(n+1)$ -variedade topológica. De fato, dada qualquer vizinhança aberta U de $X \times 0$ em ΣX , temos que U é homeomorfa a $CX = (X \times [0, 1]) / (X \times \{0\})$, o cone de X . Porém, CX não é homeomorfo a

Figura 3.3: Suspensão não reduzida.

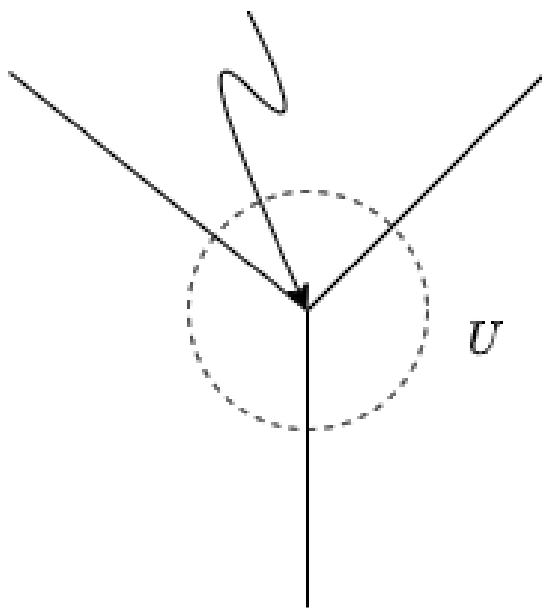


um disco, uma vez que $\partial(CX) = X$ e X não é homeomorfo à esfera S^n (vide Figura 3.3).

2. Um grafo é um 1-dimensional complexo CW. Todo grafo com pelo menos um vértice elementar (vide Figura 3.4) é um espaço topológico (com a topologia relativa de \mathbb{R}^3), mas não é uma variedade topológica, pois não é localmente Euclideano (vide (HATCHER, 2002), Example 0.1, pg. 6).
3. A *reta de Alexandroff (long line)* L é um espaço topológico Hausdorff conexo, localmente homeomorfo à reta real \mathbb{R} , mas não possui base enumerável. Assim, L não é uma variedade topológica (vide (SHASTRI, 2011), Example 5.1.1(4), pg. 122).

Figura 3.4: Grafo não localmente euclidiano.

vértice elementar



Definição 3.6. ((LEE, 2012), pg. 4) Seja M uma n -variedade topológica. Uma carta coordenada (ou apenas uma carta) sobre M é uma par (U, φ) , onde U é um subconjunto aberto de M e $\varphi : U \rightarrow \hat{U}$ é um homeomorfismo de U em um subconjunto aberto $\hat{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Por definição de uma variedade topológica, cada ponto $p \in M$ está contido no domínio de alguma carta (U, φ) . Se $\varphi(p) = 0$, dizemos que a carta está centrada em p . Dada uma carta (U, φ) , chamamos o conjunto U uma vizinhança coordenada de cada um de seus pontos. Se, além disso, $\varphi(U)$ é uma bola aberta em \mathbb{R}^n , então U é chamada uma bola coordenada. A aplicação φ é chamada aplicação coordenada (local) e as funções componentes (x_1, \dots, x_n) de φ , definidas por $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$, são chamadas coordenadas locais sobre U . Escrevemos, (U, φ) é uma carta contendo p , para significar que (U, φ) é uma carta cujo domínio U contém p .

Definição 3.7. ((LEE, 2012), pg. 11) Se U e V são conjuntos abertos dos espaços Euclidianos \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , respectivamente, uma função $F : U \rightarrow V$ é chamada suave (ou de classe C^∞) se cada uma de suas funções componentes possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Se, além disso, F for uma bijeção e possui inversa suave, dizemos que F é um difeomorfismo. Um difeomorfismo é, em particular, um homeomorfismo.

Definição 3.8. ((LEE, 2010), pg. 12) Seja M uma n -variedade topológica. Se (U, φ) e (V, ψ) são duas cartas tais que $U \cap V \neq \emptyset$, a composição

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

é chamada função transição de φ para ψ . Ela é uma composição de homeomorfismos e, portanto, é um homeomorfismo. Duas cartas (U, φ) e (V, ψ) são chamadas suavemente compatíveis se $U \cap V = \emptyset$ ou se a função transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo. Um atlas para M é uma coleção de cartas cujos domínios cobrem M . Um atlas \mathcal{A} é chamado um atlas suave se quaisquer duas cartas em \mathcal{A} são suavemente compatíveis entre si. Um atlas suave \mathcal{A} sobre M é maximal se ele não estiver contido propriamente em qualquer atlas suave “maior”. Isso significa que qualquer carta que seja suavemente compatível com cada carta em \mathcal{A} , já está em \mathcal{A} .

Definição 3.9. Se M é uma variedade topológica, uma estrutura suave sobre M é uma atlas maximal suave. Uma variedade suave é um par (M, \mathcal{A}) , no qual M é uma variedade topológica e \mathcal{A} é uma estrutura suave sobre M .

Exemplo 3.5. Para cada inteiro não negativo n , são exemplos clássicos de variedades:

- (a) O n -espaço Euclidiano \mathbb{R}^n é uma n -dimensional variedade topológica (respectivamente suave), ((LEE, 2012), Example 1.22, pg. 17).
- (b) A n -esfera S^n é uma n -dimensional variedade topológica (respectivamente suave), ((LEE, 2012), Example 1.4, pg.5, Example 1.31, pg. 20).
- (c) O n -espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$; o conjunto de todos os 1-dimensionais sub-espaços lineares em \mathbb{R}^{n+1} munido da topologia quociente co-induzida pela projeção natural $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$, a qual leva cada ponto $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ no sub-espaço linear gerado por x ; é uma n -dimensional variedade topológica (respectivamente suave), ((LEE, 2012), Example 1.5, pg. 6, Example 1.33, pg. 21). Quando $n = 2$, $\mathbb{R}P^2$ é chamado o plano projetivo real.
- (d) O n -espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$; o conjunto de todos os 1-dimensionais sub-espaços lineares complexos em \mathbb{C}^{n+1} , munido da topologia quociente co-induzida pela projeção natural $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$; é uma $2n$ -dimensional variedade topológica (respectivamente suave), ((LEE, 2012), Problem 1-9, pg. 31)
- (e) O produto finito $M_1 \times \dots \times M_k$ de variedades topológicas (respectivamente suaves) de dimensões n_1, \dots, n_k , respectivamente, é uma $(n_1 + \dots + n_k)$ -variedade topológica (respectivamente suave), ((LEE, 2012), Example 1.8, pg. 7, Example 1.34, pg. 21). Um exemplo importante de uma variedade produto é o produto $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ de n cópias da esfera S^1 , o qual é uma n -variedade topológica (respectivamente suave), chamada o n -toro. Em particular, o 2-toro $T^2 = S^1 \times S^1$ é uma 2-variedade topológica (respectivamente suave), chamada simplesmente o toro.
- (f) Todo subconjunto aberto de uma n -variedade topológica (respectivamente suave) é uma n -variedade topológica (respectivamente suave)

suave), chamada subvariedade aberta, ((LEE, 2010), Proposition 2.53, pg. 39 e (LEE, 2012), Example 1.26, pg. 19).

- (g) Seja $q : E \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento. Se E for uma n -variedade topológica e se X for Hausdorff, então X será uma n -variedade topológica ((LEE, 2010), Problem 11-1(c), pg. 302).

Teorema 3.3. (Classificação de 1-variedades, (LEE, 2010), Theorem 5.27, pg. 145 e (SHASTRI, 2011), Theorem 5.4.1, pg. 133) Toda 1-variedade topológica (respectivamente suave) não vazia e conexa M é homeomorfa (respectivamente difeomorfa) à 1-esfera S^1 (caso M seja compacta); e a \mathbb{R} (caso M não seja compacta).

Teorema 3.4. (Classificação de 2-variedades, (LEE, 2010), Theorem 6.15, pg. 174 e (SHASTRI, 2011), Theorem 8.5.1, pg. 236) Toda 2-variedade topológica (respectivamente, suave) não vazia, compacta e conexa é homeomorfa (respectivamente, difeomorfa) a um dos seguintes espaços:

- (a) A esfera S^n .
- (b) A soma conexa de uma ou mais cópias do toro T^2 .
- (c) A soma conexa de uma ou mais cópias do plano projetivo real $\mathbb{R}P^2$.

Observação 3.12. Toda 2-variedade topológica compacta e conexa possui uma única estrutura suave (a menos de difeomorfismo) ((SHASTRI, 2011), Remark 8.5.3-(4), pg. 242). O mesmo ocorre no caso de 3-variedades topológicas compactas e conexas (vide (MOISE, 2013)).

Teorema 3.5. ((FADELL; NEUWIRTH, 1962), Section II, pg.111) Se M é uma n -variedade topológica (respectivamente, suave) conexa, então $F(M, k)$ e $SF(M, k)$ são (nk) -variedades topológicas (respectivamente, suaves).

Demonstração. Como M^k é Hausdorff, segue da Proposição 3.3 que $F(M, k)$ é um conjunto aberto da (nk) -variedade topológica (respectivamente suave) M^k e do Exemplo 3.5-(f), temos que $F(M, k)$ é uma (nk) -variedade topológica (respectivamente suave). Além disso, da Observação 3.3,

temos a aplicação de recobrimento

$$q : F(M, k) \rightarrow SF(M, k)$$

e como $SF(M, k)$ é Hausdorff (pela Proposição 2.10-(a)), temos do Exemplo 3.5-(g) que $SF(M, k)$ é uma (nk) -variedade topológica. Mais ainda, usando ((LEE, 2012), Theorem 21.10, pg. 544), concluímos que $SF(M, k)$ também é uma (nk) -variedade suave (lembrando que todo grupo discreto é um grupo de Lie 0-dimensional). \square

Observação 3.13. Pelo Teorema 3.5, no caso em que M é uma variedade suave conexa, podemos usar as ferramentas da Topologia Diferencial para estudar os espaços de configurações $F(M, k)$ e $SF(M, k)$.

O resultado a seguir afirma que, no caso de variedades suaves conexas, os espaços de configurações possuem uma estrutura de complexo CW.

Corolário 3.2. Se M é uma variedade suave conexa, então os espaços de configurações $F(M, k)$ e $SF(M, k)$ são complexos CW.

Demonstração. Pelo Teorema 3.5, sabemos que se M é uma variedade suave conexa, então os espaços de configurações $F(M, k)$ e $SF(M, k)$ são variedades suaves. Portanto, de ((DAVIS; KIRK, 2001), pg. 345) concluímos que $F(M, k)$ e $SF(M, k)$ são complexos CW. \square

Uma questão natural que surge com relação aos espaços de configurações é a seguinte:

Exercício 3.4. Dados um espaço topológico X e inteiros não negativos k e l , então $F(X, k)$ é homeomorfo a $F(X, l)$ se, e somente se, $k = l$?

Observação 3.14. Em geral, a questão colocada no Problema 3.4 não é verdadeira, como mostram os exemplos a seguir:

1. Se $X = \{\star\}$, então para $k = 2$ e $l = 3$, os espaços de configurações $F(X, 2)$ e $F(X, 3)$ são ambos vazios.

2. Se X é um conjunto finito, denotando por $|X|$ o número de elementos de X , temos:

$$F(X, |X| + 1) = \emptyset = F(X, |X| + 2),$$

com $|X| + 1 \neq |X| + 2$.

No caso de variedades topológicas, o resultado a seguir fornece uma resposta afirmativa para a questão colocada no Problema 3.4.

Proposição 3.7. Sejam M uma m -variedade topológica conexa, com $m \geq 1$, e k, l inteiros não negativos. Então, $F(M, k)$ é homeomorfo a $F(M, l)$ se, e somente se, $k = l$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.5, sabemos que $F(M, k)$ e $F(M, l)$ são variedades topológicas de dimensões km e lm , respectivamente. Agora, se $F(M, k)$ for homeomorfo a $F(M, l)$, segue do Teorema da Invariância Topológica da Dimensão (vide (LEE, 2012), Theorem 1.2, pg. 3), que $km = lm$ e, portanto, $k = l$. \square

No resultado a seguir, usaremos o fato que em uma variedade topológica a conexidade é equivalente à conexidade por caminhos (vide Proposição 3.6).

Proposição 3.8. Sejam M uma n -variedade topológica e $F \subseteq M$ finito, com $n \geq 2$. Se M for conexa, então $M - F$ será uma n -variedade topológica conexa.

Demonstração. $M - F$ é aberto em M e segue do Exemplo 3.5-(f) que $M - F$ é uma n -variedade topológica. Mostremos que $M - F$ é conexa. O resultado seguirá por indução sobre a cardinalidade $|F|$ de F . Suponhamos que $F = \{q\}$ e denotemos por $M' = M - \{q\}$. Dados $x, y \in M'$, consideremos os caminhos:

$$\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow M$$

tais que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = q$, $\beta(0) = q$ e $\beta(1) = y$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $q \notin \alpha([0, 1))$ e $q \notin \beta((0, 1])$. Seja U vizinhança aberta para q e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo. Vejamos que existe $t \in [0, 1)$ tal que $\alpha([t, 1]) \subseteq U$. De fato, temos que $1 \in \alpha^{-1}(U) \subseteq [0, 1]$, com $\alpha^{-1}(U)$ aberto em $[0, 1]$. Então, existe $V \subseteq \mathbb{R}$ aberto tal que $\alpha^{-1}(U) = [0, 1] \cap V$. Como $1 \in V$, existe $\delta > 0$ tal que $(1 - \delta, 1 + \delta) \subseteq V$. Assim,

$$(r, 1] = (1 - \delta, 1 + \delta) \cap [0, 1] \subseteq \alpha^{-1}(U), \quad \text{onde } r = \max\{1 - \delta, 0\} \geq 0.$$

Logo, existe $r \geq 0$ tal que $(r, 1] \subseteq \alpha^{-1}(U)$ e, portanto, $\alpha((r, 1]) \subseteq U$. Dessa forma, considerando $t \in (r, 1)$, temos que existe $t \in [0, 1)$ tal que $\alpha([t, 1]) \subseteq U$. Usando

os mesmos argumentos para o caminho β , concluímos que existe $t' \in (0, 1]$ tal que $\beta([0, t']) \subseteq U$.

Denotemos por $a := \alpha(t) \neq q$ e $b := \beta(t') \neq q$. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ o caminho em \mathbb{R}^n unindo $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$ e tal que $\varphi(q) \notin \gamma([0, 1])$. Consideremos o caminho

$$\theta = \varphi^{-1} \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow U,$$

com $\theta(0) = a$, $\theta(1) = b$ e $q \notin \theta([0, 1])$. Assim, obtemos o caminho em M'

$$(\alpha|_{[0,t]}) * (\theta|_{[0,1]}) * (\beta|_{[t',1]}): [0, 1] \rightarrow M - \{q\},$$

unindo x a y , onde $*$ denota a concatenação de caminhos. Segue que $M' = M - \{q\}$ é conexa por caminhos, logo conexa.

Suponhamos agora que o resultado seja válido para qualquer subconjunto $F \subseteq M$, com $|F| := k < \infty$. Mostremos que $M - F'$ é conexo, para $F' \subseteq M$, com $|F'| = |F| + 1$. Considerando $F' = \{q_1, \dots, q_k, q_{k+1}\}$, temos por hipótese de indução que

$$M' := M - \{q_1, \dots, q_k\}$$

é uma n -variedade topológica conexa por caminhos, onde $n \geq 2$. Portanto, segue do passo inicial da indução que

$$M - F' = M' - \{q_{k+1}\}$$

é uma n -variedade conexa por caminhos, logo conexa, como queríamos demonstrar. \square

Observação 3.15. A Proposição 3.8 não é verdade para espaços topológicos gerais, ou seja, se X é um espaço topológico conexo por caminhos então não é verdade em geral que $X - F$ seja um espaço topológico conexo por caminhos, onde $F \subseteq M$ finito. Por exemplo, o espaço wedge $S^2 \vee S^2 := S^2 \times \{x_0\} \cup \{x_0\} \times S^2$, subespaço de $S^2 \times S^2$, para algum ponto base $x_0 \in S^2$, não é uma variedade topológica e note que $S^2 \vee S^2 - \{(x_0, x_0)\}$ não é conexo por caminhos.

Um outro exemplo é o grafo conexo por caminhos Y , o qual não é uma 1-variedade topológica. Temos que $Y - \{y_0\}$ não é conexo por caminhos, onde $y_0 \in Y$ não é um vértice do grafo Y . Este exemplo mostra uma das dificuldades em se trabalhar com grafos, os quais são os espaços topológicos mais usados em robótica (vide (KURLIN et al., 2012)).

3.2 Espaços de configurações para variedades com bordo

Nesta seção, mostraremos que o bordo de uma variedade topológica é irrelevante para os espaços de configurações, a menos de homotopia. Este fato foi afirmado por Bötigheimer, C.F. ; Cohen, F. e Taylor, L. em (BÖDIGHEIMER et al., 1989), Section 2, pg. 113.

Primeiramente, apresentamos o conceito de variedade com bordo. Pontos nestes espaços terão vizinhanças modeladas ou sobre subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n ou sobre subconjuntos abertos do n -dimensional semi-espaço superior fechado:

$$\mathbb{H}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Definição 3.10. ((LEE, 2012), Chapter 1, pg. 25) Uma n -dimensional variedade topológica com bordo, ou simplesmente, uma n -variedade com bordo é um espaço topológico M que é Hausdorff, segundo enumerável e satisfaz a seguinte condição: para todo $x \in M$, existe um subconjunto $U \subseteq M$ aberto em M , com $x \in U$, tal que U é homeomorfo ou a um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n ou a um subconjunto aberto (relativo à topologia de sub-espaço) do n -dimensional semi-espaço superior fechado \mathbb{H}^n , considerando \mathbb{H}^n munido da topologia de subespaço do \mathbb{R}^n (equipado com a topologia usual). Um par (U, φ) , no qual $U \subset M$ é um subconjunto aberto, junto com uma aplicação $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, que é um homeomorfismo sobre um subconjunto aberto V de \mathbb{R}^n ou de \mathbb{H}^n será chamado uma *carta* para M .

Usaremos as notações $Fr(\mathbb{H}^n)$ e $int(\mathbb{H}^n)$ para denotar a fronteira e o interior (topológicos) de \mathbb{H}^n , respectivamente, considerando \mathbb{H}^n como um subconjunto de \mathbb{R}^n . Quando $n > 0$, isso significa:

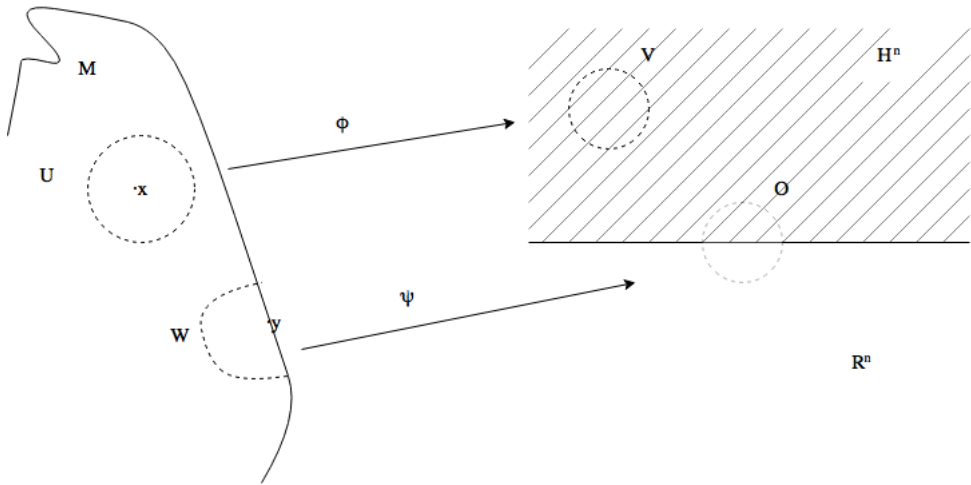
$$Fr(\mathbb{H}^n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\} \text{ (homeomorfo a } \mathbb{R}^{n-1}\text{)}.$$

$$int(\mathbb{H}^n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\} \text{ (homeomorfo a } \mathbb{R}^n\text{)}.$$

No caso $n = 0$, $\mathbb{H}^0 = \mathbb{R}^0 = \{0\}$, então $int(\mathbb{H}^0) = \mathbb{H}^0$ e $Fr(\mathbb{H}^0) = \emptyset$. Segue que 0-dimensionais variedades com bordo não são diferentes de 0-variedades. Se M é uma n -variedade com bordo:

1. Chamaremos (U, φ) uma carta interior se $\varphi(U)$ é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n (o que inclui o caso de um subconjunto aberto de \mathbb{H}^n que não intersecta $Fr(\mathbb{H}^n)$). Um ponto $x \in M$ é chamado um *ponto interior* de M se x pertence ao domínio de alguma carta interior. O

Figura 3.5: Variedade com bordo.



conjunto

$$\text{int}M := \{x \in M : x \text{ é ponto interior de } M\}$$

é chamado o *interior* da variedade M . Na Figura 3.5, x representa um ponto interior da variedade M .

2. Chamaremos (U, φ) uma carta de bordo se $\varphi(U)$ é um subconjunto aberto de \mathbb{H}^n tal que $\varphi(U) \cap \text{Fr}(\mathbb{H}^n) \neq \emptyset$. Um ponto $y \in M$ é chamado um *ponto de bordo* de M se y está no domínio de uma carta de bordo que leva y em $\text{Fr}(\mathbb{H}^n)$. O conjunto

$$\partial M := \{y \in M : y \text{ é ponto de bordo de } M\}$$

é chamado o *bordo* da variedade M . Na Figura 3.5, y representa um ponto de bordo da variedade M .

Exemplo 3.6. O n -dimensional semi-espço superior fechado \mathbb{H}^n e o n -disco unitário D^n são n -variedades topológicas com bordo, assim como toda bola fechada do \mathbb{R}^n . Os intervalos fechados em \mathbb{R} são 1-variedades com bordo.

Observação 3.16. Apesar do seu nome, variedades com bordo não são, em geral, variedades topológicas (no sentido da Definição 3.4), pois pontos de bordo não possuem vizinhanças localmente Euclidianas. Isso é uma consequência do Teorema da Invariância do Bordo, o qual afirma que ∂M e $\text{int } M$ são subconjuntos disjuntos cuja reunião é M (vide (LEE, 2012), Theorem 1.37, pg. 26). Mais ainda, uma variedade com bordo, pode ter bordo vazio. Por outro lado, uma variedade topológica é também uma variedade topológica com bordo, cujo bordo é vazio. Assim, toda variedade topológica é uma variedade topológica com bordo. Mas uma variedade topológica com bordo M será uma variedade topológica se, e somente se, $\partial M = \emptyset$ (vide (LEE, 2012), Proposition 1.38-(c)). Usaremos a frase: **variedade topológica sem bordo**, se quisermos enfatizar que estamos nos referindo a uma variedade topológica (no sentido original da Definição 3.4). E diremos: **variedade topológica com ou sem bordo** para nos referirmos a uma variedade topológica com bordo, se quisermos enfatizar que o seu bordo pode ser vazio. Portanto, o termo **variedade topológica**, sem nenhuma outra qualificação, sempre significará uma **variedade topológica sem bordo**. Se M é uma n -variedade topológica com bordo, segue de (LEE, 2012), Proposition 1.38-(a),(b),(d), pg. 27) que:

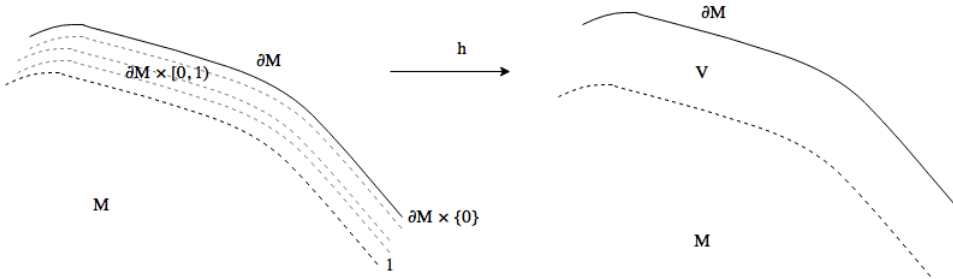
- (i) $\text{int } M$ é um subconjunto aberto de M , o qual é uma n -variedade topológica sem bordo.
- (ii) ∂M é um subconjunto fechado de M , o qual é uma $(n - 1)$ -variedade sem bordo.
- (iii) Se $n = 0$, então $\partial M = \emptyset$ e M é uma 0-variedade topológica sem bordo.

Definição 3.11. ((LEE, 2012), Chapter 1, pg. 27) Uma *variedade fechada* é uma variedade topológica compacta conexa e sem bordo. Uma *variedade aberta* é uma variedade topológica não compacta e sem bordo.

A seguir, apresentamos as principais ferramentas para esta seção.

Definição 3.12. ((BROWN, 1962), Section II, pg. 332) Sejam X um espaço topológico e B um subconjunto de X . Dizemos que B tem a *propriedade do colarinho* em X , se existe um homeomorfismo f levando $B \times [0, 1)$ sobre uma vizinhança aberta V de B tal que $f(b, 0) = b, \forall b \in B$.

Figura 3.6: Vizinhança colarinho.



Proposição 3.9. (Teorema da vizinhança colarinho) (BROWN, 1962, Section IV, Theorem 2, pg. 339) Seja M uma variedade topológica com bordo, conexa e metrizável. Então, ∂M tem a *propriedade do colarinho* em M , ou seja, existe um homeomorfismo f levando $\partial M \times [0, 1)$ sobre uma vizinhança aberta V do bordo ∂M , tal que $f(b, 0) = b, \forall b \in \partial M$.

Definição 3.13. Um espaço topológico X é chamado um *Retrato de uma Vizinhança Euclideana* ou ENR se, para algum n , existe um mergulho $i : X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $i(X)$ é um retrato^a de alguma vizinhança aberta em \mathbb{R}^n .

^aDados X um espaço topológico e $i : A \hookrightarrow X$ a inclusão de um subespaço $A \subset X$, dizemos que A é um retrato de X , se existe uma função contínua $r : X \rightarrow A$ tal que $r \circ i = Id_A$.

Observação 3.17. Seja M uma variedade topológica compacta, com ou sem bordo. Então, M é um Retrato de uma Vizinhança Euclideana (ENR). Em particular, M é metrizável (vide (HATCHER, 2002), Appendix A, Corollary A.9, pg. 527).

Podemos considerar as seguintes versões alternativas da Definição 3.12 e da Proposição 3.9, as quais serão usadas nesta seção.

Definição 3.14. Sejam X um espaço topológico e B um subconjunto de X . Dizemos que B tem a *propriedade do colarinho* em X , se existe um homeomorfismo h levando $B \times (-1, 1]$ sobre uma vizinhança aberta V de B , tal que $h(b, 1) = b, \forall b \in B$.

Proposição 3.10. (Teorema da vizinhança colarinho) Seja M uma variedade topológica com bordo, compacta e conexa. Então, ∂M possui a propriedade do colarinho em M , ou seja, existe um homeomorfismo h levando $\partial M \times (-1, 1]$ sobre uma vizinhança aberta V do bordo ∂M tal que $h(b, 1) = b, \forall b \in \partial M$.

Demonstração. Como M é uma variedade topológica compacta, segue da Observação 3.17 que M é metrizável. Assim, sendo M uma variedade com bordo conexa e metrizável temos, pela Proposição 3.9, que existe um homeomorfismo $f : \partial M \times [0, 1) \rightarrow V \subseteq M$ levando $\partial M \times [0, 1)$ sobre uma vizinhança aberta V do bordo ∂M , tal que $f(b, 0) = b, \forall b \in \partial M$. Consideremos o homeomorfismo $g : (-1, 1] \rightarrow [0, 1), x \mapsto g(x) := -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$. Então,

$$h := f \circ (\text{Id} \times g) : \partial M \times (-1, 1] \rightarrow V \subseteq M,$$

é um homeomorfismo satisfazendo as condições desejadas. □

Exemplo 3.7. Seja \mathbb{H}^n o n -dimensional semi-espaço superior fechado. Então, $\partial \mathbb{H}^n$ tem a propriedade do colarinho em \mathbb{H}^n . Basta considerar o homeomorfismo

$$h := \text{Id} \times g : \partial \mathbb{H}^n \times (-1, 1] \rightarrow V \subseteq \mathbb{H}^n,$$

onde $g : (-1, 1] \rightarrow [0, 1)$ é o homeomorfismo definido por: $t \mapsto g(t) := -\frac{t}{2} + \frac{1}{2}$ e $V := h(\partial \mathbb{H}^n \times (-1, 1]) = \partial \mathbb{H}^n \times [0, 1)$ é aberto em \mathbb{H}^n .

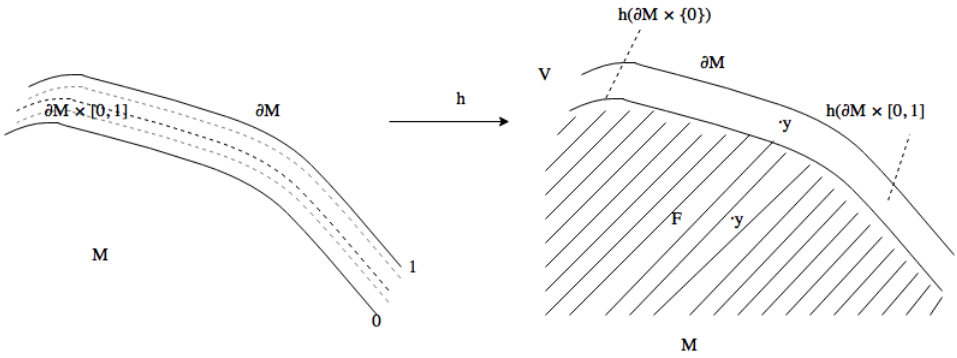
Proposição 3.11. Seja M uma variedade topológica com bordo, compacta e conexa. Então, a inclusão $i : \text{int } M \hookrightarrow M$ é uma equivalência de homotopia, com inversa homotópica que denotaremos por $p : M \rightarrow \text{int } M$ (ou seja, $H : i \circ p \simeq 1_M$ e $G : p \circ i \simeq 1_{\text{int } M}$). Além disso, p é injetora e as homotopias H e G são isotopias.

Demonstração. Pela Proposição 3.10, ∂M possui a propriedade do colarinho em M . Seja h um homeomorfismo levando $\partial M \times (-1, 1]$ em uma vizinhança aberta V de ∂M em M e tal que $h(b, 1) = b, \forall b \in \partial M$. Consideremos o conjunto

$$F := M - h(\partial M \times (0, 1]) \subseteq \text{Int } M,$$

o qual é fechado em M , pois $h(\partial M \times (0, 1])$ é aberto em V , que é aberto em M .

Figura 3.7: Vizinhança colarinho



Definimos a aplicação $p : M \rightarrow \text{int } M$ por:

$$\forall y \in M, \quad p(y) := \begin{cases} h(x, \frac{1}{2}t), & \text{se } y = h(x, t), \quad 0 \leq t \leq 1. \\ y, & \text{se } y \in F. \end{cases}$$

Observemos que $h(\partial M \times [0, 1])$ é um subconjunto fechado em M , pois $\partial M \times [0, 1]$ é compacto e h é contínua. Como as funções que definem p são contínuas (mais ainda, injetoras) sobre os conjuntos fechados $h(\partial M \times [0, 1])$ e F , respectivamente, e coincidem na intersecção:

$$h(\partial M \times [0, 1]) \cap F = h(\partial M \times \{0\}),$$

segue que p é bem definida, contínua e injetora. Mostremos que existe uma homotopia $H : M \times [0, 1] \rightarrow M$ entre $i \circ p$ e a aplicação identidade 1_M tal que H_s é injetora, para cada $s \in [0, 1]$. Consideremos a aplicação $H : M \times [0, 1] \rightarrow M$ definida por:

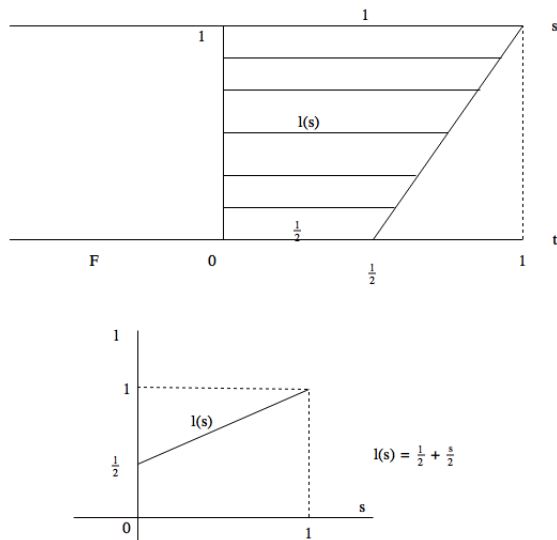
$$\forall y \in M, \quad \forall s \in [0, 1], \quad H(y, s) := \begin{cases} h(x, (\frac{1}{2} + \frac{s}{2})t), & \text{se } y = h(x, t), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ y, & \text{se } y \in F; \end{cases}$$

onde $\frac{1}{2} + \frac{s}{2} = l(s)$ é o comprimento do segmento de reta horizontal na altura s , como representado na Figura 3.8.

Segue da definição de H que $\forall y \in M, H(y, 0) = (i \circ p)(y)$ e $H(y, 1) = 1_M(y)$. Além disso, H_s é injetora, para cada $s \in [0, 1]$. Portanto, H é uma isotopia entre $i \circ p$ e 1_M . Note que, restringindo H a $(\text{int } M) \times [0, 1]$, obtemos uma isotopia G entre $p \circ i$ e $1_{\text{int } M}$. \square

Apresentamos a seguir o resultado principal desta seção.

Figura 3.8: Isotopia entre $i \circ p$ e 1_M .



Teorema 3.6. (BÖDIGHEIMER et al., 1989, Section 2, pg. 113) Seja M uma variedade topológica com bordo, compacta e conexa, com $k \geq 1$. Então, a inclusão $i : \text{int } M \hookrightarrow M$ induz equivalências de homotopia:

$$F(i) : F(\text{Int } M, k) \hookrightarrow F(M, k) \quad \text{e} \quad SF(i) : SF(\text{Int } M, k) \hookrightarrow SF(M, k).$$

Demonstração. Pela Observação 3.6, para cada $k \geq 1$, temos um funtor covariante:

$$F(-, k) : \mathfrak{Top}_i \rightarrow \mathfrak{Top}_i.$$

Assim, com as mesmas notações da Proposição 3.11,

$$F(i) : F(\text{int } M, k) \hookrightarrow F(M, k) \quad \text{e} \quad F(p) : F(M, k) \rightarrow F(\text{int } M, k)$$

são funções contínuas e injetoras. Além disso, as isotopias

$$G : \text{int } M \times [0, 1] \rightarrow \text{int } M \quad \text{e} \quad H : M \times [0, 1] \rightarrow M,$$

entre $p \circ i$, $1_{\text{int } M}$ e $i \circ p$, 1_M , respectivamente, induzem homotopias:

$$F(G) : F(\text{int } M, k) \times [0, 1] \rightarrow F(\text{int } M, k) \quad \text{e} \quad F(H) : F(M, k) \times [0, 1] \rightarrow F(M, k),$$

entre $F(p \circ i)$, $F(1_{\text{int } M})$ e $F(i \circ p)$, $F(1_M)$, respectivamente, ou seja:

$$F(p) \circ F(i) = F(p \circ i) \stackrel{F(G)}{\simeq} F(1_{\text{int } M}) = 1_{F(\text{int } M, k)},$$

$$F(i) \circ F(p) = F(i \circ p) \stackrel{F(H)}{\simeq} F(1_M) = 1_{F(M, k)}.$$

Portanto, $F(i)$ é uma equivalência de homotopia, com inversa homotópica $F(p)$. Analogamente, mostra-se que o resultado é válido para o caso não ordenado. \square

Observação 3.18. O Teorema 3.6 mostra que o bordo de uma variedade topológica compacta e conexa é irrelevante para os espaços de configurações, a menos de homotopia. Isto significa dizer que é suficiente calcular os espaços de configurações para variedades topológicas sem bordo.

Exemplo 3.8. Como $S^n \times \mathbb{R}$ é homeomorfo a $S^n \times (0, 1)$, segue da Proposição 3.2 (2) que $F(S^n \times \mathbb{R}, k)$ é homeomorfo a $F(S^n \times (0, 1), k)$, $\forall k \geq 1$. Por outro lado, pelo Teorema 3.6, os espaços de configurações

$$F(\underbrace{S^n \times (0, 1)}_{\text{int}(S^n \times [0, 1])}, k) \text{ e } F(S^n \times [0, 1], k)$$

possuem o mesmo tipo de homotopia, $\forall k \geq 1$. Portanto, concluímos que $\forall k \geq 1$,

$$F(S^n \times \mathbb{R}, k) \text{ e } F(S^n \times [0, 1], k)$$

possuem o mesmo tipo de homotopia. Note que $S^n \times \mathbb{R}$ é uma variedade não compacta e $S^n \times [0, 1]$ é uma variedade compacta. De maneira análoga, mostra-se que o resultado é válido para o caso não ordenado.

Exemplo 3.9. Seja \mathbb{H}^n o n -dimensional semi-espço superior fechado. Com as mesmas notações do Exemplo 3.7, como $\partial\mathbb{H}^n$ possui a propriedade do colarinho em \mathbb{H}^n , seja h o homeomorfismo levando $\partial\mathbb{H}^n \times (-1, 1]$ sobre a vizinhança aberta $V := h(\partial\mathbb{H}^n \times (-1, 1]) = \partial\mathbb{H}^n \times [0, 1)$ do bordo $\partial\mathbb{H}^n$, tal que $h(b, 1) = b$, $\forall b \in \partial\mathbb{H}^n$. Então,

$$h(\partial\mathbb{H}^n \times [0, 1]) = \partial\mathbb{H}^n \times [0, 1/2],$$

é fechado em \mathbb{H}^n . Assim, podemos usar os mesmos argumentos apresentados na demonstração da Proposição 3.11 para a variedade não compacta \mathbb{H}^n . Note que neste caso, não precisamos da hipótese de

compacidade para concluir que a inclusão $i : \text{int}\mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{H}^n$ é uma equivalência de homotopia. Dessa forma, usando as propriedades funtoriais de $F(-, k) : \mathfrak{Top}_i \rightarrow \mathfrak{Top}_i$, concluímos que $F(\text{int}\mathbb{H}^n, k)$ tem o mesmo tipo de homotopia de $F(\mathbb{H}^n, k)$, $\forall k \geq 1$. Por outro lado, como $\text{int}\mathbb{H}^n$ é homeomorfo ao \mathbb{R}^n , temos da Proposição 3.2-(2) que $F(\text{int}\mathbb{H}^n, k)$ é homeomorfo a $F(\mathbb{R}^n, k)$, $\forall k \geq 1$. Portanto,

$$F(\mathbb{H}^n, k) \simeq F(\mathbb{R}^n, k), \quad \forall k \geq 1.$$

Similarmente, mostra-se que

$$SF(\mathbb{H}^n, k) \simeq SF(\mathbb{R}^n, k), \quad \forall k \geq 1.$$

3.3 Espaço de configurações para superfícies

Nesta seção, apresentamos os resultados e as notações básicas para o estudo dos espaços de configurações para superfícies¹. Tais espaços serão interessantes para definir os grupos de tranças e os grupos de tranças puras de uma superfície.

Definição 3.15. Para um espaço topológico M , consideremos $Top(M)$ o espaço dos homeomorfismos $h : M \rightarrow M$, o qual é munido da topologia compacto-aberta (vide Definições 2.11 e 2.16). $(Top(M), \circ)$ é um grupo com a operação \circ de composição de funções, chamado o grupo dos homeomorfismos de M .

Definição 3.16. ((FADELL; HUSSEINI, 2001), Part I, Section I.1, pg.6) Seja M uma variedade topológica. Um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ é chamado *estável*, se existe um subconjunto fechado próprio $F \subset M$, tal que $h(x) = x$, $\forall x \in M - F$.

Exemplo 3.10. Como exemplo de um homeomorfismo estável temos a aplicação identidade $1_M : M \rightarrow M$, com $F = \emptyset$.

¹Estaremos considerando uma superfície (topológica) como sendo uma 2-dimensional variedade topológica conexa.

Observação 3.19. Os homeomorfismos estáveis geram um subgrupo de $Top(M)$, o qual denotaremos por $Top_s(M)$. Assim, um elemento h do subgrupo $Top_s(M)$ é da forma:

$$h = h_1^{m_1} \circ \dots \circ h_k^{m_k}, \text{ com } h_i \text{ homeomorfismo estável e } m_i \in \mathbb{Z}.$$

Definição 3.17. Para cada $x = (x_1, \dots, x_k) \in F(M, k)$, consideremos o conjunto:

$$Q_r^x := \{x_1, \dots, x_r\}, \text{ onde } 1 \leq r \leq k.$$

Quando x é o ponto base $q = (q_1, \dots, q_k)$, o conjunto Q_r^q será denotado simplesmente por Q_r . Por convenção, Q_0 denotará o conjunto vazio \emptyset .

Observação 3.20. ((FADELL; HUSSEINI, 2001), Part I, Section I.1, pg. 6) Note que o subgrupo $Top_s(M)$ age *naturalmente pela ação diagonal* sobre o espaço de configurações $F(M, k)$, como segue:

$$\varphi : Top_s(M) \times F(M, k) \rightarrow F(M, k), \text{ onde } \varphi(h, (x_1, \dots, x_k)) := (h(x_1), \dots, h(x_k)).$$

Esta ação induz um homomorfismo de grupos, chamado uma representação:

$$\rho : Top_s(M) \rightarrow Top(F(M, k)) \text{ dado por } \rho(h)(x_1, \dots, x_k) := (h(x_1), \dots, h(x_k)),$$

o qual é injetor, ou seja, a ação é fiel. De fato, para quaisquer $h, f \in Top_s(M)$ tais que $\rho(h) = \rho(f)$, temos que para cada $m \in M$:

$$\begin{aligned} (h(m), h(m_2), \dots, h(m_k)) &= \rho(h)(m, m_2, \dots, m_k) \\ &= \rho(f)(m, m_2, \dots, m_k) \\ &= (f(m), f(m_2), \dots, f(m_k)), \end{aligned}$$

onde $m_2, \dots, m_k \in M$ são escolhidos de tal forma que $(m, m_2, \dots, m_k) \in F(M, k)$. Logo, $h(m) = f(m), \forall m \in M$, ou seja, $h = f$. Assim, $Top_s(M)$ é isomorfo ao subgrupo $\rho(Top_s(M)) \subset Top(F(M, k))$. Portanto, $Top_s(M)$ é naturalmente um subgrupo do grupo dos homeomorfismos de $F(M, k)$, $\forall k$.

Definição 3.18. ((FADELL; HUSSEINI, 2001), Part I, Section I.1, pg. 6) Consideremos

$$\text{Top}_{sr}(\mathbb{M}) := \{h \in \text{Top}_s(\mathbb{M}) : h(q_i) = q_i, \forall 1 \leq i \leq r\},$$

o qual é um subgrupo de $\text{Top}_s(\mathbb{M})$.

Definição 3.19. Sejam $D^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m; \sum x_i^2 \leq 1\}$ o n -disco unitário fechado em \mathbb{R}^m e denotemos por B^m o seu interior. Consideremos o subconjunto:

$$G_0(D^m) := \{h \in \text{Top}(D^m) : h(x) = x, \forall x \in \partial D^m = S^{m-1}\}.$$

Temos que $1_{D^m} \in G_0(D^m)$, assim $G_0(D^m) \neq \emptyset$. Além disso, se $h, f \in G_0(D^m)$, então $h \circ f^{-1} \in \text{Top}(D^m)$ e satisfaz $(h \circ f^{-1})(x) = h(x) = x$, para qualquer $x \in \partial D^m$. Portanto, $G_0(D^m)$ é um subgrupo de $\text{Top}(D^m)$, o qual será equipado com a topologia compacta aberta.

Antes de enunciarmos o Teorema de Fadell e Neuwirth, um dos teoremas principais para os espaços de configurações, apresentamos o resultado a seguir, o qual será a base para a prova deste Teorema.

Lema 3.2. (FADELL; HUSSEINI, 2001, Lemma 1.1, pg. 6) Existe uma aplicação contínua $\gamma : B^m \rightarrow G_0(D^m)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $\gamma(x)(x) = 0, \forall x \in B^m$.
- (ii) $\gamma(x)(y) = y, \forall y \in \partial D^m$.

Demonstração. Sejam $g : B^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^m \rightarrow B^m$ definidas como segue:

$$g(y) = \frac{y}{1 - |y|}, \quad y \in B^m \text{ e}$$

$$h(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Note que g e h são homeomorfismos com $g^{-1} = h$. Definimos $\gamma' : B^m \times D^m \rightarrow D^m$ por:

$$\gamma'(x, y) = \begin{cases} h(g(y) - g(x)), & \forall y \in B^m, \\ y, & \forall y \in \partial D^m. \end{cases}$$

Temos que γ' é contínua, pois para qualquer $y_0 \in \partial D^m$ fixado e para todo $x \in B^m$:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} h(g(y) - g(x)) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(x)}{1 + |g(y) - g(x)|} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\frac{y}{1-|y|} - \frac{x}{1-|x|}}{1 + \left| \frac{y}{1-|y|} - \frac{x}{1-|x|} \right|} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{(1-|x|)y - (1-|y|x)}{(1-|y|)(1-|x|) + |(1-|x|)y - (1-|y|x)|} \\ &= y_0. \end{aligned}$$

Além disso, para cada $x \in B^m$ fixado, a aplicação contínua

$$\gamma'_x : D^m \rightarrow D^m, \quad y \mapsto \gamma'_x(y) := \gamma'(x, y)$$

é um homeomorfismo, desde que ela é uma bijeção contínua e D^m é um espaço compacto Hausdorff. Além disso, para cada $x \in B^m$, γ'_x satisfaz:

$$\gamma'_x(y) = \gamma'(x, y) = y, \quad \forall y \in \partial D^m = S^{m-1}.$$

Assim,

$$\gamma'_x \in G_0(D^m) \tag{3.3}$$

Usando a aplicação associação²:

$$\varphi : \text{Map}(B^m \times D^m, D^m) \rightarrow \text{Map}(B^m, \text{Map}(D^m, D^m)),$$

consideramos a aplicação $\gamma : B^m \rightarrow G_0(D^m)$ definida por

$$\gamma := \varphi(\gamma') \in \text{Map}(B^m, \text{Map}(D^m, D^m)),$$

a qual é bem definida, pois para cada $x \in B^m$, $\gamma(x) = \gamma'_x$ (pela definição de φ) e de (3.3), obtemos $\gamma(x) \in G_0(D^m)$, para cada $x \in B^m$. Além disso, γ satisfaz as propriedades:

(a) Para cada $x \in B^m$:

$$\begin{aligned} \gamma(x)(x) &= \gamma'(x, x) \\ &= h(g(x) - g(x)) \\ &= h(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

²Vide Definição 2.5.

(b) Para cada $x \in B^m$ e para cada $y \in \partial D^m = S^{m-1}$:

$$\begin{aligned}\gamma(x)(y) &= \gamma'(x, y) \\ &= y.\end{aligned}$$

□

Observação 3.21. Para uma m -variedade topológica M , fixe $x_0 \in M$ e escolha U um subconjunto aberto próprio de M , com $x_0 \in U$, cujo fecho \bar{U} seja homeomorfo a D^m ; mediante um homeomorfismo $\varphi : \bar{U} \rightarrow D^m$; de tal forma que B^m corresponde a U , ou seja, $\varphi(U) = B^m$ e $\varphi(x_0) = 0$. O conjunto \bar{U} é chamado uma *vizinhança de disco* ou *disco fechado em M* , para $x_0 \in M$.

Com as mesmas notações da Observação 3.21, consideramos o resultado a seguir, o qual é uma consequência do Lema 3.2.

Corolário 3.3. ((FADELL; HUSSEINI, 2001), Corollary 1.1, pg. 7) Existe uma aplicação contínua $\gamma^* : U \rightarrow Top_s(M)$ com as seguintes propriedades:

- (i) $\gamma^*(x)(x) = x_0, \forall x \in U$.
- (ii) $\gamma^*(x)(y) = y, \forall x \in U$ e $\forall y \in M - U$.

Demonstração. Primeiramente, definimos a aplicação:

$$\theta : G_0(D^m) \rightarrow Top_s(M)$$

a qual leva $h \in G_0(D^m)$ em $\theta(h)$, onde $\theta(h)$ é definido como segue:

$$\theta(h)(y) = \begin{cases} (\varphi^{-1} \circ h \circ \varphi)(y), & \text{quando } y \in \bar{U}. \\ y, & \text{quando } y \in M - U. \end{cases}$$

Note que as duas funções usadas para definir $\theta(h)$ são homeomorfismos nos fechados \bar{U} e $M - U$, respectivamente. Além disso, para y na interseção $\bar{U} \cap (M - U)$,

$$\varphi^{-1} \circ h \circ \underbrace{\varphi(y)}_{\in \partial D^m} = \varphi^{-1} \circ \varphi(y) = y.$$

Então, o Lema da Colagem implica que $\theta(h)$ é contínua. Na verdade, $\theta(h)$ é um homeomorfismo estável. Assim, θ fica bem definida. A continuidade de θ segue

de resultados relativos à topologia compacta aberta (Seção 2.2), como segue. Para $(K, W) \subseteq Top_s(M)$ aberto sub-básico, temos:

$$\theta^{-1}(K, W) = \theta^{-1}(K \cap \bar{U}, W) \cap \theta^{-1}(K \cap (M - U), W)$$

pois

$$(K, W) = (K \cap \bar{U}, W) \cap (K \cap (M - U), W).$$

De fato,

$$\begin{aligned} f \in (K, W) &\iff f(K) \subseteq W \\ &\iff f(K \cap M) \subseteq W \\ &\iff f(K \cap (\bar{U} \cup (M - U))) \subseteq W \\ &\iff f((K \cap \bar{U}) \cup (K \cap (M - U))) \subseteq W \\ &\iff f(K \cap \bar{U}) \subseteq W \text{ e } f(K \cap (M - U)) \subseteq W \\ &\iff f \in (K \cap \bar{U}, W) \text{ e } f \in (K \cap (M - U), W) \\ &\iff f \in (K \cap \bar{U}, W) \cap (K \cap (M - U), W). \end{aligned}$$

Note ainda que:

$$\theta^{-1}(K \cap \bar{U}, W) = (\varphi(K \cap \bar{U}), \varphi(W \cap U)) \text{ e } \theta^{-1}(K \cap (M - U), W) = \emptyset \text{ ou } G_0(D^m).$$

De fato,

(a)

$$\begin{aligned} h \in \theta^{-1}(K \cap \bar{U}, W) &\iff \theta(h) \in (K \cap \bar{U}, W) \\ &\iff \theta(h)(K \cap \bar{U}) \subseteq W \\ &\iff h(\varphi(K \cap \bar{U})) \subseteq \varphi(W \cap U) \\ &\iff h \in (\varphi(K \cap \bar{U}), \varphi(W \cap U)). \end{aligned}$$

(b) Se $\theta^{-1}(K \cap (M - U), W) \neq \emptyset$, vejamos que $\theta^{-1}(K \cap (M - U), W) = G_0(D^m)$. Pelo fato que $\theta^{-1}(K \cap (M - U), W) \neq \emptyset$, obtemos $K \cap (M - U) \subseteq W$. Agora, para qualquer $h \in G_0(D^m)$, temos:

$$\theta(h)(K \cap (M - U)) = K \cap (M - U) \subseteq W,$$

logo $h \in \theta^{-1}(K \cap (M - U), W)$. Assim, $\theta^{-1}(K \cap (M - U), W) = G_0(D^m)$.

Agora, considerando a aplicação $\gamma : B^m \rightarrow G_0(D^m)$ obtida no Lema 3.2, definimos $\gamma^* : U \rightarrow Top_s(M)$ como sendo a seguinte composição:

$$U \xrightarrow{\varphi} B^m \xrightarrow{\gamma} G_0(D^m) \xrightarrow{\theta} Top_s(M), \text{ ou seja, } \gamma^* := \theta \circ \gamma \circ \varphi.$$

Assim, γ^* é contínua e, para todo $x \in U$, denotando $\varphi(x) = y \in B^m$, temos:

$$\begin{aligned} \gamma^*(x)(x) &= (\theta \circ \gamma) \circ \underbrace{\varphi(x)}_{:=y}(x) \\ &= \theta(\gamma(y))(x) \\ &= \varphi^{-1} \circ \gamma(y) \circ \underbrace{\varphi(x)}_y \\ &= \varphi^{-1}(\underbrace{\gamma(y)}_0)(y) \\ &= x_0. \end{aligned}$$

Analogamente, para $y \in M - U$:

$$\begin{aligned} \gamma^*(x)(y) &= \theta \circ \gamma \circ \underbrace{\varphi(x)}_{:=z}(y) \\ &= \theta(\gamma(z))(y) \\ &= y. \end{aligned}$$

□

A seguir, consideramos o conceito de fibrados localmente triviais. Informalmente, um fibrado localmente trivial é um espaço que localmente se comporta como um espaço produto (no mesmo sentido em que uma variedade é localmente Euclideana), mas que globalmente pode possuir uma estrutura topológica diferente. Especificamente, a similaridade entre um espaço E e um espaço produto $B \times F$ é definida usando-se uma aplicação contínua e sobrejetora $p : E \rightarrow B$, a qual localmente se comporta como uma projeção, como segue.

Definição 3.20. ((AGUILAR et al., 2002), Definition 4.5.1. pg. 126) Uma função contínua e sobrejetora $p : E \rightarrow B$ é chamada um *fibrado localmente trivial*^a se para todo ponto $b \in B$, existem um aberto $U \subset B$, com $b \in U$, e um homeomorfismo $\varphi_U : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ satisfazendo a condição que a composição:

$$U \times F \xrightarrow{\varphi_U} p^{-1}(U) \xrightarrow{p_U} U$$

é a projeção no primeiro fator, ou seja,

$$(p_U \circ \varphi_U)(x, y) = P_1(x, y) = x, \quad \forall (x, y) \in U \times F,$$

onde $p_U = p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \rightarrow U$ e P_1 é a projeção sobre U .

^aOu ainda, um *fibrado* com fibra F , como em (HATCHER, 2002), Chapter 4, Section 4.2, pg. 376.

Observação 3.22. Se $p : E \rightarrow B$ é um fibrado localmente trivial, então E é chamado o espaço total, B o espaço base e, para cada $b \in B$, o espaço $F_b := p^{-1}(b)$, homeomorfo a F , é chamado a fibra sobre b (todas as fibras são homeomorfas).

Exemplo 3.11. Se considerarmos $U = B$, ou seja, se $E \cong B \times F$, então $p : E \rightarrow B$ é chamada um *fibrado trivial*. Em particular, se $E = B \times F$, então p (a projeção sobre B) é um fibrado trivial.

Exemplo 3.12. ((HATCHER, 2002), Chapter 4, Section 4.2, pg. 377) Toda aplicação de recobrimento $p : E \rightarrow B$, sobre um espaço base conexo B , é um fibrado localmente trivial.

Observação 3.23. A fibração de Fadell e Neuwirth é a ferramenta central no estudo da topologia e geometria dos espaços de configurações. Em topologia, uma fibração é uma generalização da noção de fibrado localmente trivial. No caso de uma fibração, as fibras não precisam ser o mesmo espaço, mas elas serão homotopicamente equivalentes. Fibrações não possuem necessariamente a estrutura local de um espaço produto que define um fibrado, mas uma fibração deve satisfazer uma condição adicional: a Propriedade do Levantamento de Homotopia.

Definição 3.21. (DAVIS; KIRK, 2001, Definition 6.7, pg. 115) Sejam E, B, X espaços topológicos e $p : E \rightarrow B$ uma aplicação contínua. Dizemos que p possui a Propriedade do Levantamento de Homotopia (P.L.H) com respeito ao espaço X :

- se para qualquer homotopia $F : X \times [0, 1] \rightarrow B$,
- e se para toda função contínua $\tilde{f}_0 : X \rightarrow E$, tal que $p \circ \tilde{f}_0 = F \circ i_0$, onde $i_0(x) = (x, 0)$,

existe uma homotopia $\tilde{F} : X \times [0, 1] \rightarrow E$ que é um levantamento de F , ou seja, $F = p \circ \tilde{F}$, satisfazendo $\tilde{f}_0 = \tilde{F} \circ i_0$.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & E \\
 \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\
 X \times [0, 1] & \xrightarrow{F} & B
 \end{array}$$

Definição 3.22. (DAVIS; KIRK, 2001, Definition 6.7, pg.115) Uma função contínua $p : E \rightarrow B$ satisfazendo a Propriedade do Levantamento de Homotopia (P.L.H) com respeito a qualquer espaço topológico X é chamada uma *fibração de Hurewicz* ou simplesmente uma *fibração*.

Observação 3.24. Se $p : E \rightarrow B$ uma fibração de Hurewicz, então, B será chamado espaço base, E será chamado espaço total da fibração e, para cada $b \in B$, $F_b = p^{-1}(b)$ será chamado a fibra de p sobre b . Embora F_b possa variar para diferentes escolhas de $b \in B$, se B for conexo por caminhos, a Propriedade do Levantamento de Homotopia restringe o tipo de homotopia de F_b , ou seja, se B for conexo por caminhos, então todas as fibras $F_b = p^{-1}(b)$ são homotopicamente equivalentes (vide (DAVIS; KIRK, 2001, Theorem 6.12, pg. 117)).

Definição 3.23. (HATCHER, 2002, pg. 376) Uma função contínua $p : E \rightarrow B$ satisfazendo a Propriedade do Levantamento de Homotopia com respeito a k -discos D^k , para todo $k \geq 0^a$, é chamada uma *fibração de Serre*^b.

^aOu equivalentemente, com respeito a n cubos $I^n = I \times \dots \times [0, 1]$, ou equivalentemente, CW complexos.

^bEm homenagem ao importante papel desempenhado por este conceito na tese de Jean-Pierre Serre. Este trabalho estabeleceu em Topologia Algébrica o uso das chamadas seqüências espectrais e claramente separou as noções de fibrados e fibrações da noção de feixes (ambos estes conceitos tratados implicitamente no trabalho pioneiro de Jean Leray).

Observação 3.25. Em relação ao conceito de fibrados localmente triviais e fibrações, são válidas as seguintes propriedades:

- (a) Todo fibrado trivial e uma *fibração de Hurewicz* (vide (AGUILAR et al., 2002), Lemma 4.5.4, pg. 126). E todo fibrado localmente trivial é

uma *fibração de Serre* (vide (AGUILAR et al., 2002), Theorem 4.5.6, pg. 127).

- (b) Hatcher ((HATCHER, 2002), Proposition 4.48, pg. 379) mostrou que todo fibrado localmente trivial possui a propriedade do levantamento de homotopia com respeito a todos os pares CW (X, A) . Além disso, a propriedade do levantamento de homotopia com respeito a todos os pares CW (X, A) é equivalente à propriedade do levantamento de homotopia para discos (equivalentemente para cubos).
- (c) Desde que fibrados localmente triviais $p : E \rightarrow B$ possuem trivializações locais, ou seja, produtos cartesianos existem localmente sobre B , quando o espaço base B for paracompacto, isto é suficiente para mostrar que todo fibrado localmente trivial é uma *fibração de Hurewicz* (vide (SPANIER, 1966), Section 2.7, Corollary 14, pg. 96).

A seguir, apresentamos a sequência exata longa dos grupos de homotopia associada a uma *fibração*.

Teorema 3.7. ((HOVEY, 1999), Lemma 2.4.16 pg. 55) Sejam $p : E \rightarrow B$ uma *fibração de Serre* com fibra $F := p^{-1}(b_0) \subseteq E$, para algum ponto base $b_0 = p(x) \in B$ e $x \in F$. Então, existe uma sequência exata longa:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_n(F, x) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, x) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(E, x) \rightarrow \dots \\ \rightarrow \pi_1(F, x) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, x) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, x) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, x) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b_0) \end{aligned}$$

onde $\partial : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x)$ é um homomorfismo de grupos, quando $n > 1$, chamado *homomorfismo conectante*. Essa sequência é natural com respeito a quadrados comutativos, conforme o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ E' & \xrightarrow{p'} & B' \end{array}$$

onde p e p' denotam *fibrações de Serre*.

Observação 3.26. No seguinte trecho da sequência exata obtida no Teorema 3.7:

$$\cdots \rightarrow \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, x) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, x) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b_0),$$

as aplicações envolvendo os conjuntos $\pi_0(F, x)$, $\pi_0(E, x)$ e $\pi_0(B, b_0)$ não são, naturalmente, homomorfismos de grupos. Mas podemos pensar em definir um certo “núcleo” destas aplicações, considerando o “elemento neutro” como sendo a componente conexa contendo o ponto base em questão. Neste caso, a “exatidão” significa simplesmente que a imagem de uma aplicação é igual a este “núcleo” da aplicação subsequente. Assim, para este trecho da sequência estamos pensando em “exatidão” neste sentido.

Observação 3.27. Seja X um espaço topológico.

(i) Para $k \geq r \geq 1$, existe uma aplicação natural:

$$\begin{aligned} \pi_{k,r} : \quad F(X, k) &\rightarrow F(X, r) \\ (x_1, \dots, x_r, \dots, x_k) &\mapsto F(x_1, \dots, x_r, \dots, x_k) := (x_1, \dots, x_r) \end{aligned}$$

obtida pela *projeção* sobre os primeiros r -fatores ((COHEN; PAKIATHAN,), Section 2, pg.3).

(ii) Se X é um G -espaço, então G age pela ação diagonal sobre $F(X, k)$, como segue:

$$\begin{aligned} : \quad G \times F(X, k) &\rightarrow F(X, k) \\ (g, (x_1, \dots, x_k)) &\mapsto g(x_1, \dots, x_k) := (gx_1, \dots, gx_k), \end{aligned}$$

a qual é bem definida, pois, se $gx_i = gx_j$ então $x_i = g^{-1}(gx_i) = g^{-1}(gx_j) = x_j$.

(iii) $\pi_{k,r} : F(X, k) \rightarrow F(X, r)$ é G -equivariante. De fato,

$$\begin{aligned} \pi_{k,r}(g(x_1, \dots, x_r, \dots, x_k)) &= \pi_{k,r}(gx_1, \dots, gx_r, \dots, gx_k) \\ &= (gx_1, \dots, gx_r) \\ &= g(x_1, \dots, x_r) \\ &= g\pi_{k,r}(x_1, \dots, x_r, \dots, x_k). \end{aligned}$$

A aplicação $\pi_{k,r} : F(X, k) \rightarrow F(X, r)$ com $k > r \geq 1$, dada na Observação 3.27 é muito útil para o estudo da natureza do espaço de configurações $F(X, k)$,

especialmente quando X é uma variedade sem bordo conexa, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 3.8 (Fibração de Fadell e Neuwirth). (COHEN; PAKIANATHAN, , Theorem 2.5, pg. 3) e (FADELL; HUSSEINI, 2001, Theorem 1.1, pg. 6) Seja M uma m -variedade topológica sem bordo conexa (não necessariamente compacta), onde $m \geq 2$. Então, a aplicação:

$$\pi_{k,r} : F(M, k) \rightarrow F(M, r), \quad k > r \geq 1$$

é um fibrado localmente trivial, com fibra $F(M - Q_r, k - r)$.

Demonstração. Seja $x := (x_1, \dots, x_r) \in F(M, r)$ uma r -upla fixada. Como M é uma m -variedade sem bordo, escolha vizinhanças de discos fechados mutuamente disjuntas $\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_r$ em M tais que $x_i \in U_i = \text{int}\bar{U}_i, \forall 1 \leq i \leq r$. Para cada i , seja:

$$\gamma_i^* : U_i \rightarrow \text{Top}_s(M)$$

a aplicação obtida no Corolário 3.3, a qual denotaremos simplesmente por γ_i , satisfazendo:

- (i) $\gamma_i(x)(x) = x_i, \forall x \in U_i$.
- (ii) $\gamma_i(x)(y) = y, \forall x \in U_i$ e $y \in M - U_i$.

Seja $Q_r^x = \{x_1, \dots, x_r\}$. Podemos identificar a fibra de $\pi_{k,r} : F(M, k) \rightarrow F(M, r)$ sobre o ponto $x = (x_1, \dots, x_r)$, com o espaço $F(M - Q_r^x, k - r)$, pois

$$\begin{aligned} \pi_{k,r}^{-1}(x) &= \{(y_1, \dots, y_r, \dots, y_k) \in F(M, k) \mid \pi_{k,r}(y_1, \dots, y_r, \dots, y_k) = (x_1, \dots, x_r)\} \\ &= \{(y_1, \dots, y_r, \dots, y_k) \in F(M, k) \mid (y_1, \dots, y_r) = (x_1, \dots, x_r)\} \\ &\cong F(M - Q_r^x, k - r) \text{ (homeomorfismo)}. \end{aligned}$$

Agora, considerando $U := U_1 \times \dots \times U_r$, definimos uma trivialização local ψ_U :

$$\begin{array}{ccc} U \times F(M - Q_r^x, k - r) & \xrightarrow{\psi_U} & \pi_{k,r}^{-1}(U) \\ & \searrow P_1 & \swarrow \pi_{k,r} \\ & & U \end{array}$$

Para cada $(x'_1, \dots, x'_r) \in U$ e $y = (y_1, \dots, y_{k-r}) \in F(M - Q_r^x, k - r)$, temos:

$$\begin{aligned} \psi_U((x'_1, \dots, x'_r), y) &= \left(x'_1, \dots, x'_r, \underbrace{\left((\gamma_1(x'_1))^{-1} \circ \dots \circ (\gamma_r(x'_r))^{-1} \right)}_{=\Delta \in \text{Top}_s(M)}(y) \right) \\ &= (x'_1, \dots, x'_r, \Delta(y_1), \dots, \Delta(y_{k-r})). \end{aligned}$$

Como $y = (y_1, \dots, y_{k-r}) \in F(M - Q_r^x, k - r)$, $y_j \neq x_i$, $\forall j = 1, \dots, k - r$ e $\forall i = 1, \dots, r$ e

$\Delta(x_i) = ((\gamma_1(x'_1))^{-1} \circ \dots \circ (\gamma_r(x'_r))^{-1})(x_i) = x'_i$ para todo $1 \leq i \leq r$, pois :

$$(\gamma_r(x'_r))^{-1}(x_i) = \begin{cases} x'_i, & \text{se } i = r, \\ x_i, & \text{se } i \neq r, \end{cases}$$

concluimos que $\Delta(y_j) \neq x'_i$, $\forall j = 1, \dots, k - r$ e $\forall i = 1, \dots, r$. Logo,

$$\psi_U((x'_1, \dots, x'_r), y) \in \pi_{k,r}^{-1}(U) \subset F(M, k)$$

e, assim, ψ_U é bem definida e é contínua.

Observemos que a fibra $F(M - Q_r^x, k - r)$ depende da escolha do ponto $x = (x_1, \dots, x_r)$.

Por outro lado, como toda m -variedade conexa M , com $m \geq 2$, é r -homogênea, $\forall r \geq 1$, existe $h_x \in \text{Top}_s(M)$ tal que $h_x(q_i) = x_i$, $\forall 1 \leq i \leq r$ (vide Teorema B.5), onde $q = (q_1, \dots, q_r)$ é o ponto base escolhido em $F(M, r)$. Assim, h_x induz um homeomorfismo:

$$h'_x : F(M - Q_r, k - r) \rightarrow F(M - Q_r^x, k - r), \text{ onde } Q_r = \{q_1, \dots, q_r\}.$$

Agora, definimos $\varphi_U := \psi_U \circ (1_U \times h'_x)$. Então, φ_U é uma trivialização local sobre U :

$$\begin{array}{ccc} U \times F(M - Q_r, k - r) & \xrightarrow{\varphi_U} & \pi_{k,r}^{-1}(U) \\ & \searrow P_1 & \swarrow \pi_{k,r} \\ & & U \end{array}$$

onde a fibra agora é fixada, ou seja, independente do ponto x . □

Observação 3.28. Observemos que se M é uma variedade topológica conexa (sem bordo) então, segue da Proposição 3.5, que o espaço de configurações $F(M, k)$ é uma variedade topológica, logo é um espaço paracompacto, pelo Teorema 3.1. Portanto, o fibrado localmente trivial $\pi_{k,r} : F(M, k) \rightarrow F(M, r)$ obtido no Teorema 3.8 é uma fibração de Hurewicz (vide Observação 3.25-(c)).

O próximo resultado fornece condições que garantem quando um espaço de configurações é r -conexo. A sua demonstração seguirá do Teorema 3.8.

Teorema 3.9. Seja M uma variedade r -conexa^a sem bordo tal que M permanece r -conexa quando é perfurada em $k - 1 \geq 0$ pontos. Então, $F(M, k)$ é r -conexo.

^aVide Capítulo 1, Definição 2.34 e Observação 2.28.

Demonstração. A prova será feita por indução sobre k . Quando $k = 1$, o resultado segue da hipótese. Suponhamos que $F(M, l)$ seja r -conexo, para todo $1 \leq l \leq k - 1$ e para toda variedade (sem bordo) r -conexa M , tal que M permanece r -conexa quando é perfurada em $l - 1 \geq 0$ pontos. Então, pelo Teorema 3.8,

$$\pi_{k,1} : F(M, k) \rightarrow F(M, 1)$$

é uma fibração com fibra $F(M - Q_1, k - 1)$, com $M - Q_1$ variedade (sem bordo) r -conexa tal que $M - Q_1$ permanece r -conexa quando é perfurada em $k - 2 \geq 0$ pontos. Logo, usando a sequência exata longa associada à fibração (3.1) (vide Teorema 3.7), temos:

$$\cdots \rightarrow \pi_q(F(M - Q_1, k - 1)) \rightarrow \pi_q(F(M, k)) \rightarrow \pi_q(F(M, 1)) \rightarrow \cdots$$

Assim, segue por indução que o espaço base e a fibra são ambos r -conexos e, portanto, o espaço total $F(M, k)$ da fibração (3.1) também é r -conexo. \square

Corolário 3.4. ((COHEN; PAKIANATHAN,), Lemma 2.8, pg. 4). Seja M uma m -variedade topológica conexa (sem bordo) tal que M permanece conexa quando é perfurada em $k - 1 \geq 0$ pontos. Então, $F(M, k)$ é conexo por caminhos (o que implicará que $SF(M, k)$ também é conexo por caminhos).

Observação 3.29. Segue do Corolário 3.4, que se M for uma variedade conexa (sem bordo) de dimensão pelo menos 2, então todos seus espaços de configurações serão conexos por caminhos (vide Proposição 3.8).

Exemplo 3.13. Lembremos que, quando \mathbb{R}^n é perfurado em $(k-1)$ pontos, obtemos um espaço que tem o mesmo tipo de homotopia de um buquê de $(k-1)$ cópias de $(n-1)$ -esferas:

$$\mathbb{R}^n - \{Q_{k-1}\} \simeq \bigvee^{k-1} S^{n-1}, \quad Q_{k-1} = \{q_1, \dots, q_{k-1}\}, \quad (\text{vide Corolário B.3}).$$

Mas, se $n \geq 2$, segue de (FUCHS; VIRO, 2003), Corollary F, pg. 86, que:

$$\pi_i(\bigvee^{k-1} S^{n-1}) \text{ é trivial, } \forall i < n-1 \text{ e}$$

$\pi_{n-1}(\bigvee^{k-1} S^{n-1})$ é um grupo abeliano livre, tendo como base as classes de homotopia de inclusões

$$S_\alpha^{n-1} \rightarrow \bigvee_\alpha S_\alpha^{n-1}$$

Assim, $\mathbb{R}^n - \{Q_{k-1}\}$ é $(n-2)$ -conexo, para todo $n \geq 2$. Portanto, pelo Teorema 3.9, $F(\mathbb{R}^n, k)$ é $(n-2)$ -conexo, para todo $n \geq 2$ e para todo $k \geq 1$. Em particular, $F(\mathbb{R}^n, k)$ é simplesmente conexo, $\forall n \geq 3$.

Exemplo 3.14. Observemos que $S^n - Q_{k-1}$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n - Q_{k-2}$, onde Q_k denota um subconjunto com k -elementos. Assim, quando S^n é perfurada em $(k-1)$ pontos, obtemos um espaço que tem o mesmo tipo de homotopia de um buquê de $(k-2)$ cópias de $(n-1)$ -esferas:

$$S^n - \{Q_{k-1}\} \cong \mathbb{R}^n - \{Q_{k-2}\} \simeq \bigvee^{k-2} S^{n-1},$$

(vide Corolário B.3). Logo, usando os mesmos argumento do Exemplo 3.13, temos que $S^n - \{Q_{k-1}\}$ é $(n-2)$ -conexa, se $n \geq 2$. Portanto, pelo Teorema 3.9, segue que $F(S^n, k)$ é $(n-2)$ -conexo, $\forall n \geq 2, \forall k$. Em particular, $F(S^n, k)$ é simplesmente conexo, $\forall n \geq 3$.

Exemplo 3.15. O espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ é 1-conexo, para todo n (vide (MCCLEARY, 2001, Part II, Section 5, pag. 144)). Além disso, $\mathbb{C}P^n - \{pto\}$ tem mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{C}P^{n-1}$, o qual é 1-conexo. Assim, segue do Teorema 3.9 que o espaço de configurações $F(\mathbb{C}P^n, 2)$ é 1-conexo.

No caso de variedades com buracos, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.5. (FADELL; NEUWIRTH, 1962, Theorem 3, pg. 114) Seja M uma variedade topológica (sem bordo) conexa (não necessariamente compacta), com $\dim M \geq 2$. Então, a aplicação

$$\pi_{k,r} : F(M - Q_m, k) \rightarrow F(M - Q_m, r)$$

é um fibrado localmente trivial, com fibra $F(M - Q_{m+r}, k - r)$, com $m \geq 0$ e $k \geq r$.

Demonstração. Pela Proposição 3.8, $M - Q_m$ é uma variedade topológica conexa de dimensão maior ou igual a 2. Assim, o resultado segue do Teorema 3.8. \square

Definição 3.24. Sejam π um grupo e X um espaço topológico conexo por caminhos satisfazendo as seguintes condições, para algum natural n fixado:

$$\pi_i(X) = 0, \quad \forall i \neq n, \quad \text{e} \quad \pi_n(X) \cong \pi.$$

Então, X é chamado espaço de *Eilenberg-MacLane* ou simplesmente um $K(\pi, n)$ -espaço (vide (HATCHER, 2002, Chapter 4, Section 4.2, pg. 365)).

Exemplo 3.16. (HATCHER, 2002, Example 1B.1, pg. 88) A esfera S^1 é um $K(\mathbb{Z}, 1)$ -espaço. Mais geralmente, um grafo conexo é um $K(\pi, 1)$ -espaço, com π um grupo livre. \mathbb{R}^m é um $K(0, n)$ -espaço, $\forall n \geq 1$.

Observação 3.30. Observemos que a 2-esfera S^2 e o plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ não são espaços do tipo $K(\pi, 1)$, pois $\pi_2(\mathbb{R}P^2) \cong \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Isso segue da sequência exata longa de homotopia associada ao recobrimento a duas folhas $\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ e de (HATCHER, 2002, Corollary 4.25, pg. 361).

Observação 3.31. Recordemos que, para qualquer superfície fechada M , orientável ou não, diferente da 2-esfera S^2 e do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$, existe um recobrimento universal $\mathbb{R}^2 \rightarrow M$. Como \mathbb{R}^2 é contrátil, todos os grupos de homotopia superiores de M são triviais. Assim, M é um $K(\pi, 1)$ -espaço ((HATCHER, 2002), Example 1B.2, pg. 88). Além disso, para qualquer superfície fechada M , orientável ou não, diferente de S^2 e do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$, com $m \geq 1$ buracos, tem o mesmo tipo de

homotopia de um buquê de 1-esferas. Por outro lado, a 2-esfera S^2 com $m \geq 2$ buracos também possui o mesmo tipo de homotopia de um buquê de 1-esferas. Assim, o grupo fundamental de tais espaços é um grupo livre e os grupos de homotopia superiores são triviais (vide (FUCHS; VIRO, 2003), 11.4, pg. 84). As únicas superfícies simplesmente conexas sem bordo são S^2 e \mathbb{R}^2 . Superfícies não fechadas retraem-se por deformação sobre grafos, assim tais superfícies são $K(\pi, 1)$ -espaços, com π um grupo livre.

Uma outra aplicação do Teorema 3.8 é o resultado a seguir, o qual descreve os espaços de configurações para variedades topológicas fechadas conexas de dimensão 2 como $K(\pi, 1)$ -espaços (vide (COHEN; PAKIANATHAN, , Theorem 2.7, pg. 4) e (FADELL; NEUWIRTH, 1962, Section II, Corollary 2.2, pg. 113)).

Teorema 3.10. Suponhamos que $M = \mathbb{R}^2$ ou que M seja uma superfície fechada (compacta, conexa e sem bordo), orientável ou não.

- (1) Então, $F(M - Q_m, k)$ é um $K(\pi, 1)$ -espaço, o que implicará que $SF(M - Q_m, k)$ também é um $K(\pi, 1)$ -espaço, para todo $m \geq 1$ e para todo $k \geq 1$.
- (2) Se M é diferente de S^2 e do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$, então $F(M, k)$ e $SF(M, k)$ são $K(\pi, 1)$ -espaços, para todo $k \geq 1$.

Demonstração. A prova será feita por indução sobre k .

Consideremos, primeiramente, o caso $k = 1$. Observemos que:

- (a) $\mathbb{R}^2 - Q_m$ tem o mesmo tipo de homotopia de um buquê de 1-esferas, $\forall m \geq 1$ e, portanto, $\mathbb{R}^2 - Q_m = F(\mathbb{R}^2 - Q_m, 1)$ é um $K(\pi, 1)$ -espaço, para todo $m \geq 1$.
- (b) Sabemos que $S^2 - Q_1$ é homeomorfa a \mathbb{R}^2 . Além disso, se $m \geq 2$, $S^2 - Q_m$ tem o mesmo tipo de homotopia de um buquê de 1-esferas. Portanto, segue do Exemplo 3.16 e da Observação 3.31 que $S^2 - Q_m = F(S^2 - Q_m, 1)$ é um $K(\pi, 1)$ -espaço, para todo $m \geq 1$.
- (c) Um espaço de recobrimento a duas folhas para $\mathbb{R}P^2 - Q_m$, com $m \geq 1$, é $S^2 - Q_{2m}$, que possui o mesmo tipo de homotopia de um buquê de 1-esferas. Portanto, usando a sequência exata longa de homotopia associada a este recobrimento concluímos que $\mathbb{R}P^2 - Q_m = F(\mathbb{R}P^2 - Q_m, 1)$ é um $K(\pi, 1)$ -espaço, para todo $m \geq 1$.
- (d) Se M é diferente de S^2 e do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ e se $m \geq 1$, então $M - Q_m$ tem o mesmo tipo de homotopia de um buquê de 1-esferas, logo $M - Q_m = F(M - Q_m, 1)$ é um $K(\pi, 1)$ -espaço, pela Observação 3.31, onde π é um grupo livre de posto finito.

(e) \mathbb{R}^2 é um $K(\pi, 1)$ -espaço e, portanto, $\mathbb{R}^2 = F(\mathbb{R}^2, 1)$ é um $K(\pi, 1)$ -espaço.

(f) Para qualquer superfície fechada M diferente de S^2 e de $\mathbb{R}P^2$, temos da Observação 3.31 que $M = F(M, 1)$ é um $K(\pi, 1)$ -espaço.

Suponhamos agora $k > 1$ e que o resultado seja válido para todos os valores $1 \leq l \leq k - 1$. Pelo Teorema 3.8, aplicado à variedade conexa sem bordo $M - Q_m$, a aplicação

$$\pi_{k,1} : F(M - Q_m, k) \rightarrow F(M - Q_m, 1)$$

é uma fibração com fibra $F(M - Q_{m+1}, k - 1)$. Deste modo, pela hipótese de indução, o espaço base e a fibra desta fibração são $K(\pi, 1)$ -espaços e, pela sequência exata longa dos grupos de homotopia de uma fibração, concluímos que o espaço total é um $K(\pi, 1)$ -espaço. De fato, para $q \geq 2$ obtemos:

$$0 = \pi_q(F(M - Q_{m+1}, k - 1)) \xrightarrow{i_*} \pi_q(F(M - Q_m, k)) \xrightarrow{p_*} \pi_q(F(M - Q_m, 1)) = 0$$

e pela exatidão em $\pi_q(F(M - Q_m, k))$, segue

$$\pi_q(F(M - Q_m, k)) = 0.$$

Além disso, $F(M - Q_m, k)$ é conexo por caminhos (vide Observação 3.29). Assim, o espaço total $F(M - Q_m, k)$ é um $K(\pi, 1)$ -espaço. □

Exemplo 3.17. Considere as superfícies fechadas (compactas, conexas e sem bordo) e orientáveis: o toro $T = S^1 \times S^1$ e o toro duplo $T\#T$. Pelo Teorema 3.10, seus espaços de configurações $F(T, k)$, $SF(T, k)$ e $F(T\#T, k)$, $SF(T\#T, k)$ são $K(\pi, 1)$ -espaços, $\forall k \geq 1$.

Exemplo 3.18. A garrafa de Klein \mathbb{K} é uma superfície fechada não-orientável. Assim, pelo Teorema 3.10, seus espaços de configurações $F(\mathbb{K}, k)$ e $SF(\mathbb{K}, k)$ são $K(\pi, 1)$ -espaços, $\forall k \geq 1$.

Observação 3.32. Segue do Teorema 3.10, que se $M = \mathbb{R}^2$ ou M é qualquer superfície fechada, exceto a 2-esfera S^2 e o plano projetivo $\mathbb{R}P^2$, o tipo de homotopia de $F(M, k)$ e $SF(M, k)$ é completamente determinado por seu grupo fundamental (HATCHER, 2002, Theorem 1B.8, pg. 90). Por essa razão, um interessante problema em Topologia Algébrica consiste em se calcular tais grupos de homotopia, os quais são definidos como

grupos de tranças de superfícies (COHEN; PAKIANATHAN, , Section 2, pg. 4).

Teorema 3.11. (BIRMAN, 1969, Theorem 1, pg.42) Seja M uma variedade suave fechada (compacta, conexa e sem bordo). Então, para cada $s \geq 1$ a aplicação inclusão

$$i : F(M, k) \hookrightarrow \prod_{j=1}^k M$$

induz um homomorfismo

$$i_* : \pi_s(F(M, k)) \rightarrow \prod_{j=1}^k \pi_s(M),$$

o qual é sobrejetor, se $\dim(M) > s$ e também injetor, se $\dim(M) > s + 1$.

No caso particular $s = 1$, temos o seguinte

Corolário 3.6. (COHEN, 2010, Remark 8.2, pg. 200) Para uma variedade M suave fechada, a inclusão

$$i : F(M, k) \hookrightarrow \prod_{j=1}^k M$$

induz um homomorfismo

$$i_* : \pi_1(F(M, k)) \rightarrow \prod_{i=1}^k \pi_1(M),$$

o qual é isomorfismo, se $\dim(M) \geq 3$ e sobrejetor, se $\dim(M) = 2$.

Corolário 3.7. Seja M uma variedade suave fechada, com $\dim(M) \geq 3$. Então:

$F(M, k)$ é simplesmente conexa se, e somente se, M é simplesmente conexa.

3.4 Grupos de Tranças e Espaços de Configurações

Nesta seção, definiremos o conceito de grupos de tranças para uma variedade, em termos do grupo fundamental de seus espaços de configurações.

Definição 3.25. (BIRMAN, 1974) Seja M uma variedade topológica de dimensão $\dim M \geq 2$. Para todo $k \geq 1$, definimos o grupo de tranças puras em k -cordas sobre M , denotado por $PB_k(M)$ como sendo o grupo fundamental do espaço de configurações $F(M, k)$. Analogamente, definimos o grupo de tranças em k -cordas sobre M , denotado por $B_k(M)$, como sendo o grupo fundamental do espaço de configurações $SF(M, k)$, ou seja:

$$PB_k(M) := \pi_1(F(M, k), x_0) \text{ e } B_k(M) := \pi_1(SF(M, k), y_0), \quad \forall k \geq 1.$$

Observação 3.33. Quando M for o 2-dimensional espaço Euclideano \mathbb{R}^2 usaremos simplesmente as notações:

$$B_k(\mathbb{R}^2) = B_k \text{ e } PB_k(\mathbb{R}^2) = PB_k, \quad \forall k \geq 1,$$

os quais são conhecidos como o *grupo de tranças de Artin* e o *grupo de tranças puras de Artin*, respectivamente (vide (COHEN; PAKIANATHAN, , Definition 3.6, pg. 7)).

Observação 3.34. Segue do Teorema 3.10 e da Definição 3.25, que os espaços de configurações $F(\mathbb{R}^2, k)$ e $SF(\mathbb{R}^2, k)$ são espaços do tipo $K(\pi, 1)$, para todo $k \geq 1$, onde:

$$F(\mathbb{R}^2, k) = K(PB_k, 1) \text{ e } SF(\mathbb{R}^2, k) = K(B_k, 1), \quad \forall k \geq 1.$$

(Vide (COHEN; PAKIANATHAN, , Section 3, pg. 7)).

Observação 3.35. Note que, pelo Corolário 3.6, para uma variedade suave fechada M , com $\dim M \geq 3$, temos:

$$PB_k(M) := \pi_1(F(M, k)) \cong \prod_{i=1}^k \pi_1(M), \quad \forall k \geq 1,$$

ou seja, o grupo de tranças puras $PB_k(M)$ é determinado pelo grupo fundamental $\pi_1(M)$. Em particular, se M for simplesmente conexa, segue

do Corolário 3.7 que $F(M, k)$ será simplesmente conexo, ou seja,

$$PB_k(M) := \pi_1(F(M, k)) = 1, \quad \forall k \geq 1.$$

Consequentemente, do Teorema B.6, concluímos que:

$$B_k(M) := \pi_1(SF(M, k)) = \pi_1(F(M, k)/S_k) \cong S_k, \quad \forall k \geq 1.$$

(Vide (FADELL; NEUWIRTH, 1962, Theorem 9, pg. 118)). Por essa razão, o estudo dos grupos de tranças possui relevância no caso de variedades de dimensão igual a 2, as chamadas superfícies.

Exemplo 3.19. Segue do Exemplo 3.14, que $F(\mathbb{R}^n, k)$ é simplesmente conexo, $\forall n \geq 3$. Logo, pela Observação 3.35, os grupos de tranças para o n -dimensional espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , com $n \geq 3$ são:

$$PB_k(\mathbb{R}^n) := \pi_1(F(\mathbb{R}^n, k)) = 1 \quad \text{e} \quad B_k(\mathbb{R}^n) = \pi_1(SF(\mathbb{R}^n, k)) \cong S_k, \quad \forall k \geq 1.$$

Exemplo 3.20. Segue do Exemplo 3.13 que $F(S^n, k)$ é simplesmente conexo, $\forall n \geq 3$. Assim, da Observação 3.35, os grupos de tranças para a n -esfera, S^n , com $n \geq 3$ são:

$$PB_k(S^n) := \pi_1(F(S^n, k)) = 1 \quad \text{e} \quad B_k(S^n) = \pi_1(SF(S^n, k)) \cong \Sigma_k, \quad \forall k \geq 1.$$

3.5 Grupos de homotopia

Nosso principal objetivo, nesta seção, é obter os grupos de homotopia dos espaços de configurações $F(M \times \mathbb{R}^n, k)$, para todo $k \geq 1$, no qual M é uma variedade topológica conexa.

Definição 3.26. ((ROBINSON, 2003), pg. 75) Sejam H e N dois grupos e consideremos:

$$\begin{aligned} \varphi : H &\rightarrow \text{Aut}(N) \\ h &\mapsto \varphi_h : N \rightarrow N \end{aligned}$$

um homomorfismo do grupo H ao grupo dos automorfismos de N . O *produto semi-direto* (externo) de H e N , com respeito ao homomorfismo φ , o qual será denotado por $N \rtimes_{\varphi} H$, é o conjunto $N \times H$, equipado com a

seguinte operação:

$$\begin{aligned} \cdot : (\mathbf{N} \times \mathbf{H}) \times (\mathbf{N} \times \mathbf{H}) &\rightarrow (\mathbf{N} \times \mathbf{H}) \\ ((n_1, h_1), (n_2, h_2)) &\mapsto (n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) := (n_1 \varphi_{h_1}(n_2), h_1 h_2). \end{aligned}$$

Observação 3.36. Mostra-se que o produto semi-direto $\mathbf{N} \rtimes_{\varphi} \mathbf{H}$ é um grupo, com elemento identidade $(1_{\mathbf{N}}, 1_{\mathbf{H}}) \in \mathbf{N} \times \mathbf{H}$ e, para cada $(n, h) \in \mathbf{N} \rtimes_{\varphi} \mathbf{H}$, seu inverso é dado por $(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$ (vide (ROBINSON, 2003), pg. 75).

Observação 3.37. Suponhamos que $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{N})$ seja o homomorfismo trivial $h \mapsto \varphi_h = 1_{\mathbf{N}}$, para todo $h \in \mathbf{H}$. Então:

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) := (n_1 \varphi_{h_1}(n_2), h_1 h_2) = (n_1 n_2, h_1 h_2).$$

Neste caso, o produto semi-direto coincide com o produto direto:

$$\mathbf{N} \rtimes_{\varphi} \mathbf{H} = \mathbf{N} \oplus \mathbf{H} = \mathbf{N} \times \mathbf{H}.$$

Observação 3.38. Note que, se $\text{Aut}(\mathbf{N}) = \{1_{\mathbf{N}}\}$, então

$$\mathbf{N} \rtimes_{\varphi} \mathbf{H} = \mathbf{N} \oplus \mathbf{H} = \mathbf{N} \times \mathbf{H}.$$

Definição 3.27. Uma sequência exata curta de grupos e homomorfismos de grupos

$$1 \rightarrow \mathbf{N} \xrightarrow{\beta} \mathbf{G} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{H} \rightarrow 1$$

cinde, se existe um homomorfismo de grupos $\gamma : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}$ tal que $\alpha \circ \gamma = 1_{\mathbf{H}}$, ou seja, α possui inversa à direita.

Exemplo 3.21. O grupo G definido pelo produto semi-direto de H e N , ou seja, $G = N \rtimes_{\varphi} H$, se encaixa em uma seqüência exata curta que cinde:

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i_1} G \xrightarrow[\quad]{\pi} H \rightarrow 1,$$

na qual $i_1(n) = (n, 1_H)$, $\pi(n, h) = h$ e $i_2(h) = (1_N, h)$, $\forall n \in N$ e $\forall h \in H$. Além disso,

$$(\pi \circ i_2)(h) = \pi(1_N, h) = h = 1_H(h), \quad \forall h \in H.$$

Lema 3.3. Dada uma seqüência exata curta de grupos e homomorfismos de grupos

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H \rightarrow 1, \quad (3.3)$$

as seguintes condições são equivalentes:

- (i) A seqüência cinde.
- (ii) Existe um homomorfismo $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ e um isomorfismo $\Omega : N \rtimes_{\varphi} H \rightarrow G$ que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_1} & N \rtimes_{\varphi} H & \xrightarrow{\pi} & H & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \Omega & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\beta} & G & \xrightarrow{\alpha} & H & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

comutativo. No qual, a seqüência de acima é a seqüência exata curta dada no Exemplo 3.21, a qual cinde.

Demonstração. Vejamos que (i) \rightarrow (ii). Seja $\gamma : H \rightarrow G$ tal que $\alpha \circ \gamma = 1_H$. Definimos

$$\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N), \quad \varphi(h) := \varphi_h,$$

onde $\varphi_h : N \rightarrow N$ é definida por

$$\varphi_h(n) = \beta^{-1}(\gamma(h)\beta(n)\gamma(h^{-1})), \quad \forall n \in N. \quad (3.5)$$

Note que, $\gamma(h)\beta(n)\gamma(h^{-1}) \in \text{Ker}(\alpha) = \text{Im}(\beta)$, pois

$$\alpha(\gamma(h)\beta(n)\gamma(h^{-1})) = \underbrace{\alpha(\gamma(h))}_h \underbrace{\alpha(\beta(n))}_{1_H} \underbrace{\alpha(\gamma(h^{-1}))}_{h^{-1}} = h \cdot 1_H \cdot h^{-1} = 1_H,$$

e $\beta|_{Im(\beta)}$ é um isomorfismo. Assim, φ_h é um automorfismo com inversa $\varphi_{h^{-1}}$. Além disso, φ é um homomorfismo de grupos.

Vejamos que existe um isomorfismo $\Omega : N \rtimes_{\varphi} H \rightarrow G$. Definimos $\Omega : N \rtimes_{\varphi} H \rightarrow G$ por:

$$\Omega(n, h) = \beta(n)\gamma(h).$$

Ω é um homomorfismo de grupos, pois:

$$\begin{aligned} \Omega((n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2)) &= \Omega(n_1\varphi_{h_1}(n_2), h_1h_2) \\ &= \beta(n_1\varphi(h_1)(n_2))\gamma(h_1h_2) \\ &= \beta(n_1)\underbrace{\beta(\varphi(h_1)(n_2))}_{\text{por (3.5)}}\gamma(h_1)\gamma(h_2) \\ &= \beta(n_1)\gamma(h_1)\beta(n_2)\underbrace{\gamma(h_1^{-1})\gamma(h_1)}_{1_G}\gamma(h_2) \\ &= \beta(n_1)\gamma(h_1)\beta(n_2)\gamma(h_2) \\ &= \Omega(n_1, h_1)\Omega(n_2, h_2). \end{aligned}$$

Vejamos que Ω é injetivo. De fato, se $\Omega(n, h) = 1$, então $\beta(n)\gamma(h) = 1$. Aplicando α a ambos lados, desta igualdade obtemos,

$$\underbrace{\alpha(\beta(n))}_{1_H} \underbrace{\alpha(\gamma(h))}_h = \alpha(1) = 1_H,$$

assim, $h = 1_H$. Então, $\beta(n) \cdot 1 = 1$, assim $n = 1_N$, pois β é injetor.

Agora, mostremos que Ω é sobrejetor. Seja $g \in G$ e considere $h := \alpha(g) \in H$. Note que $g \cdot \gamma(\alpha(g^{-1})) \in Ker(\alpha) = im(\beta)$, pois

$$\alpha(g \cdot \gamma(\alpha(g^{-1}))) = \alpha(g)\alpha(\gamma(\alpha(g^{-1}))) = \alpha(g)\alpha(g^{-1}) = 1_H.$$

Assim, defina $n := \beta^{-1}(g \cdot \gamma(\alpha(g^{-1}))) \in N$. Então,

$$\begin{aligned} \Omega(n, h) &= \beta(n)\gamma(h) \\ &= g \cdot \underbrace{\gamma(\alpha(g^{-1}))\gamma(\alpha(g))}_1 \\ &= g. \end{aligned}$$

Portanto $\Omega : N \rtimes_{\varphi} H \rightarrow G$ é um isomorfismo.

Mostremos agora que o diagrama é comutativo.

- Comutatividade do quadrado à esquerda. Para qualquer $n \in N$:

$$\begin{aligned} \Omega \circ i_1(n) &= \Omega(n, 1) \\ &= \beta(n)\gamma(1) \\ &= \beta(n), \end{aligned}$$

assim $\Omega \circ i_1 = \beta$.

- Comutatividade do quadrado à direita. Para qualquer $(n, h) \in N \rtimes_{\varphi} H$:

$$\begin{aligned} \alpha \circ \Omega(n, h) &= \alpha(\beta(n)\gamma(h)) \\ &= \underbrace{\alpha(\beta(n))}_1 \alpha(\gamma(h)) \\ &= \alpha(\gamma(h)) \\ &= h \\ &= \pi(n, h), \end{aligned}$$

assim $\alpha \circ \Omega = \pi$.

Mostremos que (ii) \rightarrow (i). Definimos o homomorfismo $\gamma := \Omega \circ i_2 : H \rightarrow G$ satisfazendo:

$$\begin{aligned} \alpha \circ \gamma &= \alpha \circ \Omega \circ i_2 \\ &= \pi \circ i_2 \\ &= 1_H. \end{aligned}$$

Assim, a sequência (3.3) cinde. □

Observação 3.39. Note que, se no Lema 3.3, consideramos a categoria de grupos abelianos, então o homomorfismo $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ é trivial, pois:

$$\varphi_h(n) = \beta^{-1}(\underbrace{\gamma(h)\beta(n)\gamma(h^{-1})}_{\text{em } G \text{ que é abeliano}}) = n, \quad \forall h \in H.$$

Assim, pela Observação 3.37

$$N \rtimes_{\varphi} H = N \oplus H = N \times H,$$

e obtemos o conhecido “Lema da cisão”.

Lema 3.4 (Lema da cisão). (SELICK, 2008, Chapter 4, Section 1, Proposition 4.14, pg. 22) Dada uma sequência exata curta de grupos abelianos e homomorfismos de grupos

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H \rightarrow 0,$$

as seguintes condições são equivalentes:

- (i) A sequência cinde.
- (ii) Existe um isomorfismo $\theta : N \oplus H \rightarrow G$.

Proposição 3.12. Dados grupos M, N e $f : N \rightarrow M$ um isomorfismo de grupos.

$$\begin{aligned} \text{Aut}(f) : \text{Aut}(N) &\rightarrow \text{Aut}(M) \\ \varphi &\mapsto \text{Aut}(f)(\varphi) := f \circ \varphi \circ f^{-1}, \quad \forall \varphi \in \text{Aut}(N) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos.

Demonstração. $\text{Aut}(f)$ é bem definido. Além disso, é um homomorfismo de grupos, pois:

$$\begin{aligned} \text{Aut}(f)(\varphi \circ \psi) &= f \circ (\varphi \circ \psi) \circ f^{-1} \\ &= (f \circ \varphi \circ f^{-1}) \circ (f \circ \psi \circ f^{-1}) \\ &= \text{Aut}(f)(\varphi) \circ \text{Aut}(f)(\psi). \end{aligned}$$

Mais ainda, $\text{Aut}(f)$ possui inversa $\text{Aut}(f^{-1})$, pois:

$$\begin{aligned} (\text{Aut}(f) \circ \text{Aut}(f^{-1}))(\varphi) &= \text{Aut}(f)(f^{-1} \circ \varphi \circ f) \\ &= f \circ (f^{-1} \circ \varphi \circ f) \circ f^{-1} \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{Aut}(f^{-1}) \circ \text{Aut}(f))(\varphi) &= \text{Aut}(f^{-1})(f \circ \varphi \circ f^{-1}) \\ &= f^{-1} \circ (f \circ \varphi \circ f^{-1}) \circ f \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

Portanto, $\text{Aut}(f) : \text{Aut}(N) \rightarrow \text{Aut}(M)$ é um isomorfismo de grupos. □

Proposição 3.13. Seja $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ um homomorfismo de grupos. Se $f : N \rightarrow N'$ e $g : H \rightarrow H'$ são isomorfismos de grupos, então:

$$N \rtimes_{\varphi} H \cong N' \rtimes_{\varphi'} H',$$

onde $\varphi' : H' \rightarrow \text{Aut}(N')$ é definida pela composição:

$$H' \xrightarrow{g^{-1}} H \xrightarrow{\varphi} \text{Aut}(N) \xrightarrow{\text{Aut}(f)} \text{Aut}(N'), \text{ ou seja } \varphi' := \text{Aut}(f) \circ \varphi \circ g^{-1}.$$

Demonstração. Definimos:

$$\begin{aligned} \mu : N \times H &\rightarrow N' \times H' \\ (n, h) &\mapsto \mu(n, h) := (f(n), g(h)). \end{aligned}$$

Vejamus que μ é um homomorfismo de grupos. Para todo $(n_1, h_1), (n_2, h_2) \in N \times H$:

$$\begin{aligned} \mu((n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2)) &= \mu(n_1 \varphi_{h_1}(n_2), h_1 h_2) \\ &= (f(n_1 \varphi_{h_1}(n_2)), g(h_1 h_2)) \\ &= (f(n_1) \underbrace{f(\varphi_{h_1}(n_2))}_{= f(\varphi(h_1)(n_2))}, g(h_1)g(h_2)) \\ &= (f(n_1) \underbrace{f(\varphi(h_1)(n_2))}_{= (f \circ \varphi(h_1) \circ f^{-1})(f(n_2))}, g(h_1)g(h_2)) \\ &= (f(n_1) \underbrace{(\text{Aut}(f)(\varphi(h_1)))}_{= \varphi'(g(h_1))}(f(n_2)), g(h_1)g(h_2)) \\ &= (f(n_1) \varphi'_{g(h_1)}(f(n_2)), g(h_1)g(h_2)) \\ &= (f(n_1), g(h_1)) \cdot (f(n_2), g(h_2)) \\ &= \mu(n_1, h_1) \cdot \mu(n_2, h_2). \end{aligned}$$

Consideremos o seguinte homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \nu : N' \times H' &\rightarrow N \times H \\ (n', h') &\mapsto \nu(n', h') := (f^{-1}(n'), g^{-1}(h')). \end{aligned}$$

Então, para todo $(n, h), (n', h')$:

$$\begin{aligned} \mu \circ \nu(n', h') &= \mu(f^{-1}(n'), g^{-1}(h')) \\ &= (f \circ f^{-1}(n'), g \circ g^{-1}(h')) \\ &= (n', h'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu \circ \mu(n, h) &= \nu(f(n), g(h)) \\ &= (f^{-1} \circ f(n), g^{-1} \circ g(h)) \\ &= (n, h). \end{aligned}$$

Portanto, $\mu : N \rtimes_{\varphi} H \rightarrow N' \rtimes_{\varphi'} H'$ é um isomorfismo de grupos. □

Observação 3.40. Quando não for essencial no contexto ressaltar qual é o homomorfismo φ , o produto semi-direito $N \rtimes_{\varphi} H$ será denotado simplesmente por $N \rtimes H$.

Definição 3.28. (KAWAKUBO, 1991, Section 2.3, pg. 87) Dizemos que uma função contínua $p : E \rightarrow B$ possui uma *seção* contínua^a, se existe uma função contínua $s : B \rightarrow E$ tal que $p \circ s = 1_B$. Dizemos ainda que p possui uma *seção local* em um ponto $b \in B$, se existem uma vizinhança aberta U de b e uma função contínua $s_b : U \rightarrow E$ tal que $p \circ s_b = \text{incl}_U$, onde $\text{incl} : U \rightarrow B$ é a inclusão.

^aOu, uma “cross-section” contínua.

A seguir, mostraremos propriedades importantes de uma fibração, no caso de existência de uma seção. No resultado a seguir, por simplicidade de notação, não especificaremos os pontos bases.

Proposição 3.14. Seja $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ uma fibração e suponhamos que exista uma seção contínua $s : B \rightarrow E$. Então:

- (a) $\partial : \pi_{i+1}(B) \rightarrow \pi_i(F)$ é trivial, $\forall i \geq 0$.
- (b) $\pi_i(E) \cong \pi_i(F) \oplus \pi_i(B)$, $\forall i \geq 2$.
- (c) $\pi_1(E) \cong \pi_1(F) \rtimes \pi_1(B)$.

Demonstração. Seja $s : B \rightarrow E$ uma seção contínua para $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$.

(a) Da seqüência exata longa em homotopia da fibração (vide Teorema 3.7)

$$\cdots \rightarrow \pi_{i+1}(E) \xrightarrow[p_{\#}]{s_{\#}} \pi_{i+1}(B) \xrightarrow{\partial} \pi_i(F) \rightarrow \cdots \quad (3.5)$$

segue que $p_{\#} \circ s_{\#} = 1_{\pi_{i+1}(B)}$, o que implica que $p_{\#}$ é sobrejetor e $s_{\#}$ é injetor. Assim, pela exatidão da seqüência (3.5) temos:

$$\text{Ker}(\partial) = \text{Im}(p_{\#}) = \pi_{i+1}(B),$$

e, portanto, ∂ é o homomorfismo trivial, $\forall i \geq 0$.

(b) Pelo item (a), na sequência (3.5), para todo $i \geq 2$:

$$\cdots \rightarrow \pi_{i+1}(B) \xrightarrow{\partial \equiv 0} \pi_i(F) \rightarrow \pi_i(E) \rightarrow \pi_i(B) \xrightarrow{\partial \equiv 0} \pi_{i-1}(F) \rightarrow \cdots$$

obtemos a sequência exata curta de grupos abelianos

$$0 \rightarrow \pi_i(F) \rightarrow \pi_i(E) \xrightarrow[p_{\#}]{s_{\#}} \pi_i(B) \rightarrow 0$$

a qual cinde. Portanto, pelo Lema 3.4, $\pi_i(E) \cong \pi_i(F) \oplus \pi_i(B)$, $\forall i \geq 2$.

(c) Pelo item (a), na sequência (3.5)

$$\cdots \rightarrow \pi_2(B) \xrightarrow{\partial \equiv 0} \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(E) \rightarrow \pi_1(B) \xrightarrow{\partial \equiv 0} \pi_0(F) \rightarrow \cdots,$$

obtemos a sequência exata curta de grupos

$$1 \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(E) \xrightarrow[p_{\#}]{s_{\#}} \pi_1(B) \rightarrow 1$$

a qual cinde. Portanto, pelo Lema 3.3, $\pi_1(E) \cong \pi_1(F) \times \pi_1(B)$.

□

Observação 3.41. Se $\text{Aut}(\pi_1(F)) = \{1_{\pi_1(F)}\}$, segue da Observação 3.38 que:

$$\pi_1(E) \cong \pi_1(F) \oplus \pi_1(B).$$

Exemplo 3.22. (COHEN, 2010, Example 4.1, pg. 192) Sejam M um espaço topológico arbitrário e $n \geq 1$ um natural. A aplicação

$$\pi_{k,k-1} : F(M \times \mathbb{R}^n, k) \rightarrow F(M \times \mathbb{R}^n, k-1)$$

possui uma seção contínua

$$s : F(M \times \mathbb{R}^n, k-1) \rightarrow F(M \times \mathbb{R}^n, k),$$

definida por

$$s((m_1, x_1), \dots, (m_{k-1}, x_{k-1})) := ((m_1, x_1), \dots, (m_{k-1}, x_{k-1}), (m_1, L\vec{e}_1)), \text{ onde}$$

$$L = 1 + \max_{1 \leq i \leq k-1} \|x_i\| \quad e \quad \vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Observemos que $x_j \neq L\vec{e}_1, \forall j = 1, \dots, k-1$. De fato, se $x_j = L\vec{e}_1$, para algum $j = 1, \dots, k-1$, então:

$$\|x_j\| = L = 1 + \max_{1 \leq i \leq k-1} \|x_i\| \geq 1 + \|x_j\| > \|x_j\|,$$

o que é uma contradição.

Portanto, s é bem definida. Além disso, s é contínua e $\pi_{k,k-1} \circ s = 1_{F(M \times \mathbb{R}^n, k-1)}$.

Observação 3.42. Segue do Exemplo 3.22, no caso particular em que $M = \{pto\}$, que a aplicação

$$\pi_{k,k-1} : F(\mathbb{R}^n, k) \rightarrow F(\mathbb{R}^n, k-1)$$

possui uma seção contínua

$$s : F(\mathbb{R}^n, k-1) \rightarrow F(\mathbb{R}^n, k).$$

Proposição 3.15. Para M uma variedade topológica conexa arbitrária e $n \geq 2, k \geq 1$:

$$\pi_i(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1)) \cong \bigoplus_{r=0}^k \pi_i((M \times \mathbb{R}^n) - Q_r), \forall i \geq 2.$$

Demonstração. Pelo Exemplo 3.22, sabemos que a fibração

$$(M \times \mathbb{R}^n) - Q_k \hookrightarrow F(M \times \mathbb{R}^n, k+1) \xrightarrow{\pi_{k+1,k}} F(M \times \mathbb{R}^n, k)$$

possui uma seção contínua. Logo, pela Proposição 3.14-(b)

$$\pi_i(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1)) \cong \pi_i((M \times \mathbb{R}^n) - Q_k) \oplus \pi_i(F(M \times \mathbb{R}^n, k)), \forall i \geq 2 \quad (3.3)$$

Usando este fato, o resultado seguirá por indução sobre $k \geq 1$. Para $k = 1$ segue de (3.3). Suponhamos que o resultado seja válido para qualquer $1 \leq l \leq k$ (*). Novamente, de (3.3) e usando a hipótese de indução, segue que:

$$\pi_i(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1)) \cong \pi_i((M \times \mathbb{R}^n) - Q_k) \oplus \underbrace{\pi_i(F(M \times \mathbb{R}^n, k))}_{(*)}$$

$$\cong \pi_i((M \times \mathbb{R}^n) - Q_k) \oplus \left(\bigoplus_{r=0}^{k-1} \pi_i((M \times \mathbb{R}^n) - Q_r) \right) \cong \bigoplus_{r=0}^k \pi_i((M \times \mathbb{R}^n) - Q_r), \forall i \geq 2.$$

Portanto,

$$\pi_i(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1)) \cong \bigoplus_{r=0}^k \pi_i((M \times \mathbb{R}^n) - Q_r), \forall i \geq 2.$$

□

Proposição 3.16. Para M uma variedade topológica conexa com $\dim(M) \geq 1$ e para naturais $n \geq 2$ e $k \geq 1$:

$$\pi_1(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1)) \cong \underbrace{\pi_1(M) \times (\pi_1(M) \times (\dots \times (\pi_1(M) \times \pi_1(M)) \dots))}_{k+1}.$$

Demonstração. Pelo Exemplo 3.22, sabemos que a fibração

$$(M \times \mathbb{R}^n) - Q_k \hookrightarrow F(M \times \mathbb{R}^n, k+1) \xrightarrow{\pi_{k+1,k}} F(M \times \mathbb{R}^n, k)$$

possui uma seção. Logo, pela Proposição 3.14-(c)

$$\pi_1(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1)) \cong \pi_1((M \times \mathbb{R}^n) - Q_k) \rtimes \pi_1(F(M \times \mathbb{R}^n, k)).$$

Aplicando este mesmo argumento de forma iterada, obtemos:

$$\begin{aligned} \pi_1(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1)) &\cong \pi_1((M \times \mathbb{R}^n) - Q_k) \rtimes (\pi_1((M \times \mathbb{R}^n) - Q_{k-1}) \rtimes \\ &(\dots \rtimes (\pi_1((M \times \mathbb{R}^n) - Q_1) \rtimes \pi_1(M \times \mathbb{R}^n)) \dots)). \end{aligned}$$

Agora, como $\dim(M \times \mathbb{R}^n) \geq 3$, segue do Exemplo B.1 que

$$\pi_1((M \times \mathbb{R}^n) - Q_i) \cong \pi_1(M \times \mathbb{R}^n), \forall i.$$

Além disso, $M \times \mathbb{R}^n$ tem o mesmo tipo de homotopia de M , logo:

$$\pi_1(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1)) \cong \underbrace{\pi_1(M) \times (\pi_1(M) \times (\dots \times (\pi_1(M) \times \pi_1(M)) \dots))}_{k+1}.$$

□

Observação 3.43. Consideremos o produto semi-direto $G := N \rtimes_{\varphi} H$ e sejam

$$g_1 = (n_1, h_1), \quad g_2 = (n_2, h_2) \in G.$$

Então, o comutador de g_1, g_2 , $[g_1, g_2] := g_1^{-1} \cdot g_2^{-1} \cdot g_1 \cdot g_2$, é dado por:

$$\left(\underbrace{\varphi_{h_1^{-1}}(n_1^{-1}) \cdot \varphi_{h_1^{-1}h_2^{-1}}(n_2^{-1}) \cdot \varphi_{h_1^{-1}h_2^{-1}}(n_1\varphi_{h_1}(n_2))}_{:=g}, [h_1, h_2] \right) \quad (\Delta).$$

Assim, se H for um grupo abeliano não trivial, então $[g_1, g_2] = (g, 1_H)$, onde g é como em (Δ) . Portanto, o subgrupo comutador

$$[G, G] := \langle S \rangle, \quad \text{com } S := \{[g, h] : g, h \in G\}$$

é tal que $[G, G] \neq G$, ou seja, o grupo quociente $G/[G, G]$ é não trivial. Dessa forma, a abelianização $G/[G, G]$ do grupo G é não trivial.

Observação 3.44. Consideremos o produto semi-direto iterado:

$$G := N_1 \rtimes (N_2 \rtimes (N_3 \rtimes \dots (N_k \rtimes N_{k+1}) \dots)) = (N_1 \times \dots \times N_{k+1}, \cdot)$$

e sejam $g = (g_1, \dots, g_k, g_{k+1})$, $h = (h_1, \dots, h_k, h_{k+1}) \in G$. Então, aplicando os mesmos cálculos apresentados na Observação 3.43, o comutador de g e h tem a forma:

$$[g, h] = (m_1, \dots, m_k, [g_{k+1}, h_{k+1}]).$$

Assim, se N_{k+1} for um grupo abeliano não trivial, então $[g, h] = (m_1, \dots, m_k, 1_{k+1})$, onde $m_i \in N_i$. Portanto, o subgrupo comutador

$$[G, G] := \langle S \rangle, \quad \text{com } S := \{[g, h] : g, h \in G\}$$

é tal que $[G, G] \neq G$, ou seja, o grupo quociente $G/[G, G]$ é não trivial. Dessa forma, a abelianização $G/[G, G]$ do grupo G é não trivial.

Neste sentido, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.8. Sejam M uma variedade topológica conexa, com $\dim(M) \geq 1$ e naturais $n \geq 2$ e $k \geq 1$. Se $\pi_1(M)$ for um grupo abeliano não trivial, então:

(i) $H_1(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1))$ é não trivial.

(ii) $\pi_1(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1))$ é não trivial.

Demonstração. Para a variedade conexa M e para quaisquer $n \geq 2$ e $k \geq 1$, temos pela Proposição 3.16 o seguinte isomorfismo:

$$\pi_1(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1)) \cong \underbrace{\pi_1(M) \rtimes (\pi_1(M) \rtimes (\cdots \rtimes (\pi_1(M) \rtimes \pi_1(M)) \cdots))}_{k+1}.$$

(i) Sabemos da Observação 3.29 que $F(M \times \mathbb{R}^n, k+1)$ é 0-conexo. Como $\pi_1(M)$ é um grupo abeliano não trivial, segue da Observação 3.43 e do Teorema de Hurewicz (vide Teorema B.4(b)) que:

$$H_1(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1)) \cong G/[G, G] \neq 0, \text{ com } G = \pi_1(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1)).$$

(ii) Como $\pi_1(M)$ é não trivial, existe $g \in \pi_1(M)$ tal que $g \neq 1$. Então,

$$(g, 1, \dots, 1) \neq 1 \in \underbrace{\pi_1(M) \rtimes (\pi_1(M) \rtimes (\cdots \rtimes (\pi_1(M) \rtimes \pi_1(M)) \cdots))}_{k+1} \cong G,$$

com $G = \pi_1(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1))$. Portanto, $\pi_1(F(M \times \mathbb{R}^n, k+1))$ é não trivial. □

Exemplo 3.23. Se M é a 1-esfera S^1 , pela Proposição 3.16 temos que:

$$\begin{aligned} \pi_1(F(S^1 \times \mathbb{R}^2, k+1)) &\cong \underbrace{\pi_1(S^1) \rtimes (\pi_1(S^1) \rtimes (\cdots \rtimes (\pi_1(S^1) \rtimes \pi_1(S^1)) \cdots))}_{k+1} \\ &\cong \underbrace{\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z} \rtimes (\cdots \rtimes (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) \cdots))}_{k+1}, \text{ pois } \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Definição 3.29. O grupo ortogonal $O(n)$ é o grupo das matrizes ortogonais com entradas reais. O grupo ortogonal especial $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$, onde $SL(n, \mathbb{R})$ denota o grupo linear especial das matrizes com entradas reais e com determinante igual a 1, ou seja, $SO(n)$ é o subgrupo de $O(n)$ das matrizes ortogonais com entradas reais e determinante igual a 1. (vide (DIECK, 1987), Chapter 1, Section 2, pg. 11).

Exemplo 3.24. Mostremos que se M é o grupo ortogonal especial $SO(n)$, então:

$$H_1(F(SO(n) \times \mathbb{R}^n, k+1), \mathbb{Z}) \cong \pi_1(F(SO(n) \times \mathbb{R}^n, k+1)) \cong \bigoplus_1^{k+1} \mathbb{Z}_2, \quad \forall n \geq 3,$$

De fato, pela Proposição 3.16, o grupo fundamental $\pi_1(F(SO(n) \times \mathbb{R}^n, k+1))$ é isomorfo ao produto semidireito

$$\underbrace{\pi_1(SO(n)) \rtimes (\pi_1(SO(n)) \rtimes (\dots \rtimes (\pi_1(SO(n)) \rtimes \pi_1(SO(n))) \dots))}_{k+1}.$$

Como $\pi_1(SO(n)) \cong \mathbb{Z}_2, \forall n \geq 3$, (vide (HATCHER, 2002), Chapter 3, Section 3.D, Exercise 2, pg. 302) isso implica que $Aut(\pi_1(SO(n))) = \{Id\}$. Assim, da Observação 3.38:

$$\pi_1(F(SO(n) \times \mathbb{R}^n, k+1)) \cong \bigoplus_1^{k+1} \mathbb{Z}_2 \quad (\text{grupo abeliano}).$$

Portanto, pelo Teorema de Hurewicz (vide Teorema B.4):

$$H_1(F(SO(n) \times \mathbb{R}^n, k+1), \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_1^{k+1} \mathbb{Z}_2.$$

No resultado a seguir, mostraremos que o grupo de tranças puras de Artin PB_{k+1} é isomorfo a um produto semidireito iterado de grupos livres. Este fato é muito interessante para se obter uma ordenação sobre PB_{k+1} .

Proposição 3.17. ((DEHORNOY et al., 2008), Chapter XV, Section 2, Proposition 2.4, pg. 264) Para cada $k \geq 1$, o grupo de tranças puras de Artin é isomorfo um produto semi-direto iterado de grupos livres, ou seja:

$$PB_{k+1} \cong F_k \rtimes (F_{k-1} \rtimes (\dots \rtimes F_1 \dots)),$$

onde F_k é um grupo livre de posto k .

Demonstração. Pelo Teorema 3.10, $F(\mathbb{R}^2, k+1)$ é um $K(\pi, 1)$ -espaço. Seja

$$\mathbb{R}^2 - \{k \text{ pontos}\} \rightarrow F(\mathbb{R}^2, k+1) \xrightarrow{\pi_{k+1, k}} F(\mathbb{R}^2, k).$$

a fibração de Fadell e Neuwirth, na qual a fibra $\mathbb{R}^2 - \{k \text{ pontos}\}$ tem o mesmo tipo de homotopia de um buquê de esferas $\bigvee^k S^1$ (vide Corolário B.3). Consideremos

a sequência exata longa em homotopia associada a esta fibração:

$$\cdots \rightarrow \underbrace{\pi_2(F(\mathbb{R}^2, k))}_1 \rightarrow \pi_1(\bigvee^k S^1) \rightarrow \pi_1(F(\mathbb{R}^2, k+1)) \rightarrow \pi_1(F(\mathbb{R}^2, k)) \rightarrow \underbrace{\pi_0(\bigvee^k S^1)}_1 \rightarrow \cdots$$

Lembrando que $\pi_1(\bigvee^k S^1) \cong F_k$ é um grupo livre de posto k e que, pela Definição 3.25,

$$\pi_1(F(\mathbb{R}^2, k+1)) = \text{PB}_{k+1} \text{ e } \pi_1(F(\mathbb{R}^2, k)) = \text{PB}_k,$$

obtemos uma sequência exata curta de grupos fundamentais:

$$1 \rightarrow F_k \rightarrow \text{PB}_{k+1} \rightarrow \text{PB}_k \rightarrow 1, \quad (3.6)$$

Pelo Exemplo 3.22, temos que a projeção $\pi_{k+1,k} : F(\mathbb{R}^2, k+1) \rightarrow F(\mathbb{R}^2, k)$ possui uma seção contínua $s : F(\mathbb{R}^2, k) \rightarrow F(\mathbb{R}^2, k+1)$, ou seja, $\pi_{k+1,k} \circ s = 1$. Logo, da Definição 3.27, a sequência (3.6) cinde. Assim, pelo Lema 3.3,

$$\text{PB}_{k+1} \cong F_k \rtimes \text{PB}_k.$$

Aplicando este mesmo argumento de forma iterada, concluímos que

$$\text{PB}_{k+1} \cong F_k \rtimes (F_{k-1} \rtimes (\cdots \rtimes F_1 \cdots)).$$

□

Os resultados obtidos anteriormente, revelam a importância em se conhecer se uma fibração admite seções contínuas. Por essa razão, estudaremos a seguir condições que garantem quando a fibração de Fadell e Neuwirth admite seções contínuas. Seguindo a mesma notação de (FADELL; NEUWIRTH, 1962), denotaremos a projeção $\pi_{n,1}$ simplesmente por π .

Teorema 3.12. ((FADELL; NEUWIRTH, 1962), Theorem 1, pg. 112) Seja M uma variedade topológica conexa, com $\dim M \geq 2$. Se $m \geq 1$, então a projeção:

$$\pi : F(M - Q_m, n) \rightarrow M - Q_m, \text{ onde } Q_m := \{q_1, \dots, q_m\}$$

admite uma seção contínua.

Demonstração. Consideremos (\bar{V}, φ) uma carta para M tal que \bar{V} é vizinhança de disco³ em M para $q_1 \in V$, de tal forma que $q_j \notin \bar{V}$, $\forall 2 \leq j \leq m$. Denotemos por $W = B[0, 1/2]$ o disco fechado de centro 0 e raio 1/2, e consideremos $y_2, \dots, y_n \in \partial W$, $n - 1$ pontos distintos no bordo de W .

³Vide Observação 3.21.

Para cada $i = 2, \dots, n$ definimos as aplicações $f_i : M - Q_m \rightarrow M - Q_m$, pela expressão:

$$x \mapsto f_i(x) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\|x\| y_i), & \text{se } x \in \bar{V} - \{q_1\}. \\ \varphi^{-1}(y_i), & \text{se } x \notin V. \end{cases}$$

Note que $\bar{V} - \{q_1\}$ e $(M - Q_m) - V$ são ambos fechados em $M - Q_m$, pois:

$$\begin{aligned} \bar{V} - \{q_1\} &= \bar{V} \cap (M - Q_m) \\ (M - Q_m) - [(M - Q_m) - V] &= V \cap (M - Q_m), \text{ é aberto em } M - Q_m. \end{aligned}$$

Cada f_i é bem definida sobre o fechado $\bar{V} - \{q_1\}$ de $M - Q_m$. De fato, para cada $x \in \bar{V} - \{q_1\}$:

$$\| \|x\| y_i \| = \underbrace{\|x\|}_{\leq 1} \underbrace{\|y_i\|}_{=1/2} \leq 1/2 \leq 1.$$

Note também que cada f_i sobre $(M - Q_m) - V$ é a constante $\varphi^{-1}(y_i)$, ou seja,

$$f_i(x) = \varphi^{-1}(y_i), \quad \forall x \in (M - Q_m) - V.$$

Agora, como $y_i \in \partial W$, então $\varphi^{-1}(y_i) \in M - Q_m$. Assim, f_i é bem definida sobre o fechado $(M - Q_m) - V$ de $M - Q_m$.

Além disso, na intersecção

$$(\bar{V} - \{q_1\}) \cap ((M - Q_m) - V) = \partial V, \text{ onde } \partial V \text{ denota o bordo de } V,$$

as duas funções que definem f_i são iguais, pois

$$\| \varphi(x) \| = 1, \quad \forall x \in \partial V.$$

Portanto, f_i é uma aplicação contínua.

Seja $f_1 = 1$ a aplicação identidade em $M - Q_m$ e note que para cada $x \in M - Q_m$,

$$(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \in F(M - Q_m, n),$$

pois as aplicações f_2, \dots, f_n são livres de pontos fixos e não são coincidentes. Portanto,

$$f : M - Q_m \rightarrow F(M - Q_m, n), \quad x \mapsto f(x) = (x, f_2(x), \dots, f_n(x))$$

é uma seção contínua para π . □

Da prova do Teorema 3.12 podemos obter o seguinte resultado.

Proposição 3.18. (FADELL; NEUWIRTH, 1962, Observation, pg. 113) A projeção $\pi : F(M - Q_m, n) \rightarrow M - Q_m$ admite uma seção contínua se, e somente se, existem $(n - 1)$ aplicações livres de pontos fixos:

$$f_2, \dots, f_n : M - Q_m \rightarrow M - Q_m,$$

as quais *não são coincidentes*, ou seja, $f_i(x) \neq f_j(x)$, $\forall i \neq j$ e $\forall x \in M - Q_m$.

Demonstração. A condição suficiente segue da prova do Teorema 3.12 e a condição necessária segue da definição de seção contínua (vide Definição 3.28). \square

Corolário 3.9. (FADELL; NEUWIRTH, 1962, Section II, pg.113) Se uma variedade topológica M possui a *propriedade do ponto fixo*, ou seja, para qualquer aplicação contínua $f : M \rightarrow M$, existe $x \in M$ tal que $f(x) = x$. Então, a projeção $\pi : F(M, n) \rightarrow M$ não admite uma seção contínua.

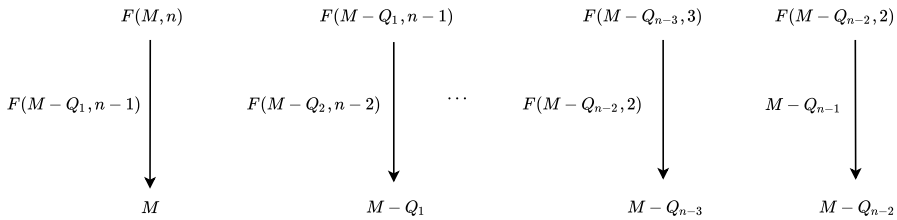
Exemplo 3.25. (FADELL; NEUWIRTH, 1962, Section II, pg. 113) O plano projetivo real \mathbb{RP}^2 possui a propriedade do ponto fixo.

Corolário 3.10. (FADELL; NEUWIRTH, 1962, Section II, pg. 113) Seja M uma variedade topológica conexa com $\dim M \geq 2$. Se $m \geq 1$, então a variedade $M - Q_m$ não tem a propriedade do ponto fixo.

Considerando a sequência fundamental de fibrações representada no diagrama da Figura 3.9, obtemos o Corolário 3.11.

Corolário 3.11. (FADELL; NEUWIRTH, 1962, Theorem 2, pg. 113) Seja M uma variedade topológica conexa M arbitrária, com $\dim M \geq 2$. Então,

Figura 3.9: Sequência fundamental de fibrações.



para todo $i \geq 2$:

$$\pi_i(F(M - Q_1, n - 1)) \cong \bigoplus_{k=1}^{n-1} \pi_i(M - Q_k) \text{ (soma direta).}$$

Se $\pi : F(M, n) \rightarrow M$, com fibra $F(M - Q_1, n - 1)$, admite uma seção contínua, então

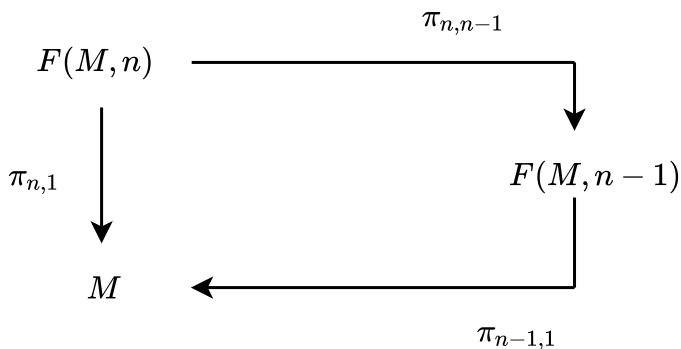
$$\pi_i(F(M, n)) \cong \bigoplus_{k=0}^{n-1} \pi_i(M - Q_k), \quad \forall i \geq 2.$$

Demonstração. O resultado segue do Teorema 3.12 e da hipótese que $\pi : F(M, n) \rightarrow M$ admite seção, aplicando sucessivamente a Proposição 3.14-(b) à sequência fundamental de fibrações da Figura 3.9. □

A seguir, vamos relacionar as seções das aplicações $\pi_{n,1} : F(M, n) \rightarrow M$ e $\pi_{n,n-1} : F(M, n) \rightarrow F(M, n - 1)$. Para isso, consideremos o diagrama comutativo dado na Figura 3.10.

A ideia do resultado a seguir foi obtida em (FADELL; NEUWIRTH, 1962, pg. 116).

Figura 3.10: Relação de seções



Proposição 3.19. Consideremos as aplicações:

$$\pi_{n,1} : F(M, n) \rightarrow M \quad \text{e} \quad \pi_{n,n-1} : F(M, n) \rightarrow F(M, n-1).$$

1. Se $\pi_{n,1}$ admite uma seção contínua, então $\pi_{n-1,1}$ admite uma seção contínua.
2. Se $\pi_{n,n-1}$ admite uma seção contínua, para cada $n \geq 2$, então $\pi_{n,1}$ admite uma seção contínua, $\forall n \geq 2$.

Demonstração. Para o item (1), suponhamos que $\pi_{n,1} : F(M, n) \rightarrow M$ admite uma seção contínua $\sigma : M \rightarrow F(M, n)$. Então,

$$\pi_{n-1,1} \circ (\pi_{n,n-1} \circ \sigma) = (\pi_{n-1,1} \circ \pi_{n,n-1}) \circ \sigma = \pi_{n,1} \circ \sigma = 1.$$

O item (2) segue por indução sobre n . □

3.6 Variedades distintas com os mesmos espaços de configurações

Uma questão natural que surge sobre os espaços de configurações é formulada como segue.

“Sejam M e N espaços topológicos arbitrários não vazios. Se $F(M, k)$ e $F(N, k)$ são *do mesmo tipo*, $\forall k \geq 2$ (ou seja, são homeomorfos, ou possuem o mesmo

tipo de homotopia, ou possuem o mesmo tipo de homotopia fraca), então M e N são do mesmo tipo?"

Uma resposta trivial a essa questão, é obtida quando consideramos os espaços $\{pto\}$ e $\{pto, pto\}$. Para tais espaços, claramente não homeomorfos, tem-se:

$$F(\{pto\}, k) = \emptyset = F(\{pto, pto\}, k), \quad \forall k \geq 3.$$

Observemos ainda que: $F(X, 2) = \emptyset$, implica que $X = \emptyset$ ou $X = \{pto\}$.

Vamos analisar o caso em que $F(M, 2)$ e $F(N, 2)$ são do mesmo tipo, para espaços topológicos não vazios M e N . Uma resposta não trivial neste caso será dada pelos exemplos que apresentaremos na sequência. A seguir, definimos o conceito de equivalência de homotopia fraca.

Definição 3.30. (HATCHER, 2002, Chapter 4, Section 4.1, pg. 352) Uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ é chamada uma *equivalência de homotopia fraca* se f induz isomorfismos entre os grupos de homotopia:

$$f_{\#} : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0)),$$

para $\forall n \geq 0$ e para todas as escolhas de pontos base $x_0 \in X$.

Pelo Exercício 3.1, temos que $SF(S^n, 2) \simeq \mathbb{R}P^n \simeq SF(\mathbb{R}^{n+1}, 2)$, para todo $n \geq 1$.

Uma outra resposta parcial para a questão formulada inicialmente pode ser obtida para variedades abertas. E fica ainda o problema em aberto para variedades fechadas.

Lema 3.5. Sejam W uma n -variedade contrátil, sem bordo e $O \subseteq W$ um aberto homeomorfo a \mathbb{R}^n , com $n \geq 3$. Seja Q qualquer subconjunto finito de O . Então, a inclusão

$$i : O - Q \hookrightarrow W - Q$$

é uma equivalência de homotopia fraca.

Demonstração. Temos que $O, W - Q$ são conexos por caminhos e $O \cap (W - Q) = O - Q$ é simplesmente conexo, pois tem o mesmo tipo de homotopia de um wedge de $(n - 1)$ -esferas, com $n - 1 \geq 2$. Assim, aplicando o teorema de Seifert-van Kampen (vide Teorema B.2) para a cobertura aberta de

$$W = O \cup (W - Q),$$

segue que

$$1 \cong \pi_1(W) \cong \pi_1(W - Q) * \pi_1(O) \cong \pi_1(W - Q),$$

onde $*$ denota o produto livre. Logo, $W - Q$ é simplesmente conexo.

Por outro lado, aplicando a sequência de Mayer-Vietoris (vide Teorema B.3), para a mesma cobertura de W pelos abertos O e $W - Q$, a contratibilidade de W e O implica que a inclusão $i_1 : O - Q \hookrightarrow W - Q$ induz isomorfismo em homologia, para $p \geq 1$:

$$\cdots \rightarrow \underbrace{H_{p+1}(W)}_0 \xrightarrow{\Delta} H_p(O - Q) \xrightarrow{(i_{1\#}, -i_{1\#})} H_p(W - Q) \oplus \underbrace{H_p(O)}_0 \xrightarrow{k_{1\#} + k_{2\#}} \underbrace{H_p(W)}_0 \rightarrow \cdots$$

Como $O - Q$ e $W - Q$ são ambos simplesmente conexos, esta inclusão é também uma equivalência de homotopia fraca (vide (HATCHER, 2002), Corollary 4.33, pg. 367). \square

Proposição 3.20. Sejam W uma n -variedade contrátil, sem bordo e $O \subseteq W$ aberto homeomorfo a \mathbb{R}^n , com $n \geq 3$. Então, a inclusão $i : O \hookrightarrow W$ induz equivalência de homotopia fraca em todos os espaços de configurações ordenados e não ordenados.

Demonstração. Vejamos que a aplicação induzida sobre os espaços de configurações

$$F(i, k) : F(O, k) \rightarrow F(W, k)$$

é uma equivalência de homotopia fraca, para qualquer $k \geq 1$. A prova será feita por indução sobre k . Quando $k = 1$, segue do Lema 3.5, considerando $Q = \emptyset$. Agora, suponhamos que o resultado seja válido para qualquer $1 \leq l \leq k - 1$. Note que pelo Teorema 3.8, temos uma *aplicação de seqüências de fibrações*

$$\begin{array}{ccccc} O - Q & \longrightarrow & F(O, k) & \longrightarrow & F(O, k - 1) \\ \downarrow i & & \downarrow F(i, k) & & \downarrow F(i, k-1) \\ W - O & \longrightarrow & F(W, k) & \longrightarrow & F(W, k - 1) \end{array}$$

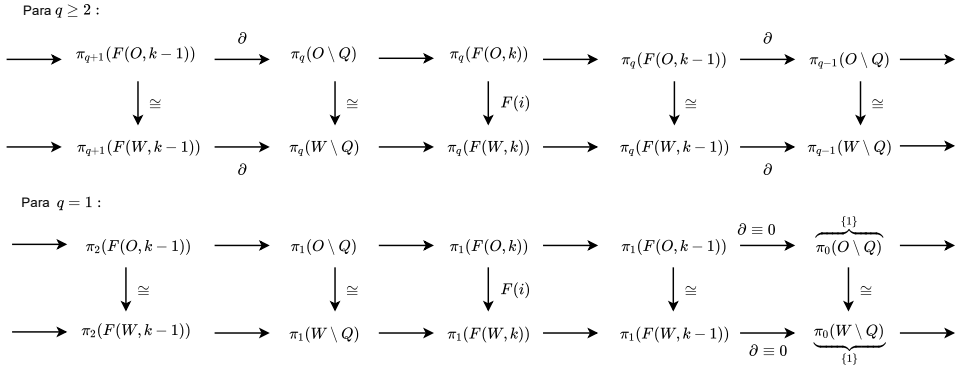
onde Q é um subconjunto finito de O com $k - 1$ elementos.

O Lema 3.5 afirma que a aplicação entre as fibras é uma equivalência de homotopia fraca e, por indução, a aplicação entre os espaços bases é uma equivalência de homotopia fraca, logo concluímos que a aplicação entre os espaços totais

$$F(i, k) : F(O, k) \rightarrow F(W, k)$$

é uma equivalência de homotopia fraca, usando a naturalidade da sequência exata longa dos grupos de homotopia da fibração (Teorema 3.7) e o Lema dos cinco (Corolário A.1), como mostra a Figura 3.11.

Figura 3.11: Naturalidade da sequência exata longa da fibração.



Agora, o resultado para espaços de configurações não ordenados, segue do fato que também temos uma aplicação de seqüências de fibrações

$$\begin{array}{ccccc}
 \Sigma_k & \longrightarrow & F(O, k) & \longrightarrow & SF(O, k) \\
 & & \downarrow F(i, k) & & \downarrow SF(i, k) \\
 \Sigma_k & \longrightarrow & F(W, k) & \longrightarrow & SF(W, k)
 \end{array}$$

a qual, pelo passo precedente, é uma equivalência de homotopia fraca sobre os espaços totais. Concluímos da Proposição B.2-(2), que a aplicação sobre os espaços base também é uma equivalência de homotopia fraca. □

Corolário 3.12. Para $n \geq 3$.

1. Um mergulho $f : V \rightarrow W$ entre n -variedades contráteis, sem bordo, induz uma equivalência de homotopia fraca sobre todos os espaços de configurações ordenados e não ordenados.
2. Se V e W são n -variedades contráteis, sem bordo, então existem equivalências de homotopia fraca entre seus espaços de configura-

ções ordenados,

$$F(V, k) \stackrel{w}{\cong} F(\mathbb{R}^n, k) \stackrel{w}{\cong} F(W, k),$$

e entre seus espaços de configurações não ordenados,

$$SF(V, k) \stackrel{w}{\cong} SF(\mathbb{R}^n, k) \stackrel{w}{\cong} SF(W, k).$$

Demonstração. (1) Pelo Teorema da invariância do Domínio (Corolário B.1), temos que f é uma aplicação aberta. Seja $O \subseteq V$ um subconjunto aberto homeomorfo ao \mathbb{R}^n . Então, $\tilde{O} := f(O) \subseteq W$ é um subconjunto aberto homeomorfo ao \mathbb{R}^n , pois f é aberta. Assim, se $i : O \hookrightarrow V$ e $j : \tilde{O} \hookrightarrow W$ denotam as inclusões naturais, segue da Proposição 3.20 que:

$$\begin{aligned} F(i) : F(O, k) &\rightarrow F(V, k), & SF(i) : SF(O, k) &\rightarrow SF(V, k), \\ F(j) : F(\tilde{O}, k) &\rightarrow F(W, k), & SF(j) : SF(\tilde{O}, k) &\rightarrow SF(W, k) \end{aligned}$$

são equivalências de homotopia fraca. Dessa forma, considerando os digramas comutativos representados na Figura 3.12,

Figura 3.12: Diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \uparrow i & & \uparrow j \\ O & \xrightarrow{f} & \tilde{O} \end{array} & \xrightarrow{F} & \begin{array}{ccc} F(V, k) & \xrightarrow{F(f)} & F(W, k) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ F(O, k) & \xrightarrow{F(f)} & F(\tilde{O}, k) \end{array} & \xrightarrow{\pi_i} & \begin{array}{ccc} \pi_i(F(V, k)) & \xrightarrow{\pi_i(F(f))} & \pi_i(F(W, k)) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ \pi_i(F(O, k)) & \xrightarrow{\cong} & \pi_i(F(\tilde{O}, k)) \end{array} \end{array}$$

concluimos que $F(f) : F(V, k) \rightarrow F(W, k)$ é uma equivalência de homotopia fraca. O caso não ordenado segue de maneira análoga.

(2) Sejam $O \subseteq V$ e $\tilde{O} \subseteq W$ subconjuntos abertos homeomorfos ao \mathbb{R}^n . Então, pelas Proposições 3.2-(2) e 3.20, concluimos que:

$$F(V, k) \stackrel{w}{\cong} F(O, k) \approx F(\mathbb{R}^n, k) \approx F(\tilde{O}, k) \stackrel{w}{\cong} F(W, k),$$

onde \approx significa homeomorfismo. O caso não ordenado segue de maneira análoga. \square

Observação 3.45. Se V for uma n -variedade contrátil, sem bordo, com $n \geq 3$, pelo Corolário 3.12, seus espaços de configurações, ordenados e não ordenados, possuem o mesmo tipo de homotopia fraca que os correspondentes espaços de configurações do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Em particular, toda n -variedade contrátil, sem bordo possui o mesmo tipo de homotopia fraca que o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , ou seja,

$$V = F(V, 1) \stackrel{w}{\simeq} F(\mathbb{R}^n, 1) = \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 3.26. A variedade de Whitehead é um exemplo de uma 3-variedade aberta que é contrátil, mas não é homeomorfa ao espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Para detalhes sobre a construção de tal variedade vide (WHITEHEAD, 1935) e (KIRBY, 1989, Chapter XII, Section 4, pg. 81).

Assim, em particular, temos nosso resultado desejado, como segue.

Teorema 3.13. Os espaços de configurações, ordenados e não ordenados, da variedade de Whitehead possuem o mesmo tipo de homotopia fraca que os correspondentes espaços de configurações do espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Isto implica, em particular, que a variedade de Whitehead tem o mesmo tipo de homotopia fraca que o \mathbb{R}^3 , porém a variedade de Whitehead não é homeomorfa a \mathbb{R}^3 .

3.7 Espaços de configurações Euclidianos

Nesta seção, nosso objetivo é obter o espaço de configurações Euclidiano $F(\mathbb{R}^n, k)$, para todo $k \geq 1$. Tal espaço aparece no problema do k -corpo, em teoria de homotopia de espaços de laços iterados (vide (SEGAL, 1973)), em teoria de nós e na teoria de deformação (vide (KONTSEVICH, 1999)).

Proposição 3.21. ((WESTERLAND, 2012, Example 1, pg. 279) e (ROTH, 2008, Section 4, pg. 456)) O espaço de configurações $F(\mathbb{R}, k)$ possui $k!$ componentes contráteis e $SF(\mathbb{R}, k)$ é contrátil.

Demonstração. Basta provar para $F(I, k)$, onde $I := (0, 1)$ denota o intervalo aberto em \mathbb{R} . De fato, note que a menos da ordenação, k pontos distintos em I são dados por uma sequência crescente de números reais da forma:

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < 1.$$

A coleção de todas as k -uplas (t_1, \dots, t_k) é chamada um k -simplexo aberto. Por exemplo, para $k = 1, 2, 3$, teríamos o intervalo I , um triângulo aberto e um tetraedro aberto, respectivamente. Assim, $SF(I, k)$ é um simplexo aberto, logo é contrátil e $F(I, k)$ é uma união disjunta de $k!$ cópias deste simplexo aberto, pois existem exatamente $k!$ reordenamentos distintos dos t_i 's. Explicitamente,

$$F(I, k) = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma_k} \Delta_\sigma \quad (\text{união disjunta})$$

onde $\Delta_\sigma := \{(t_1, \dots, t_k) \in I^k : 0 < t_{\sigma(1)} < t_{\sigma(2)} < \dots < t_{\sigma(k)} < 1\} \approx \mathbb{R}^k$ é um k -simplexo aberto, o qual é contrátil, pois é convexo. Na verdade, é homeomorfo ao k -espaço Euclidiano \mathbb{R}^k . \square

Observação 3.46. Uma consequência imediata da Proposição 3.21 é que os funtores

$$F(-, k), F(-, l) : \mathfrak{Top}_i \rightarrow \mathfrak{Top}_i,$$

apresentados na Observação 3.6 são isomorfos, ou seja, existe um isomorfismo natural (vide Definição 2.5) $\eta : F(-, k) \rightarrow F(-, l)$ se, e somente se, $k = l$.

Corolário 3.13. $F(-, k)$ é isomorfo a $F(-, l)$ se, e somente se, $k = l$.

Demonstração. Se $k = l$, então $F(-, k) \cong F(-, l)$. Reciprocamente, se $F(-, k) \cong F(-, l)$, então $F(\mathbb{R}, k) \cong F(\mathbb{R}, l)$. Pela Proposição 3.21, $F(\mathbb{R}, k)$ tem $k!$ componentes contráteis e $F(\mathbb{R}, l)$ tem $l!$ componentes contráteis. Assim, $k! = l!$ e, portanto, $k = l$. \square

Proposição 3.22. Consideremos os grupos de tranças e os grupos de tranças puras de Artin, equipados com a topologia discreta. Então, $F(\mathbb{R}^2, k)$ é o espaço classificante do grupo de tranças puras de Artin sobre k cordas e $SF(\mathbb{R}^2, k)$ é o espaço classificante do grupo de tranças de Artin sobre k cordas, para todo $k \geq 1$ (vide (SALVATORE, 2001, pg. 161) e (FUKS, 1970, Section 1, pg. 143)).

Demonstração. Como $F(\mathbb{R}^2, k)$ e $SF(\mathbb{R}^2, k)$ são complexos CW, pelo Corolário 3.2, o resultado segue do Exemplo 3.34 e do Corolário 2.19. \square

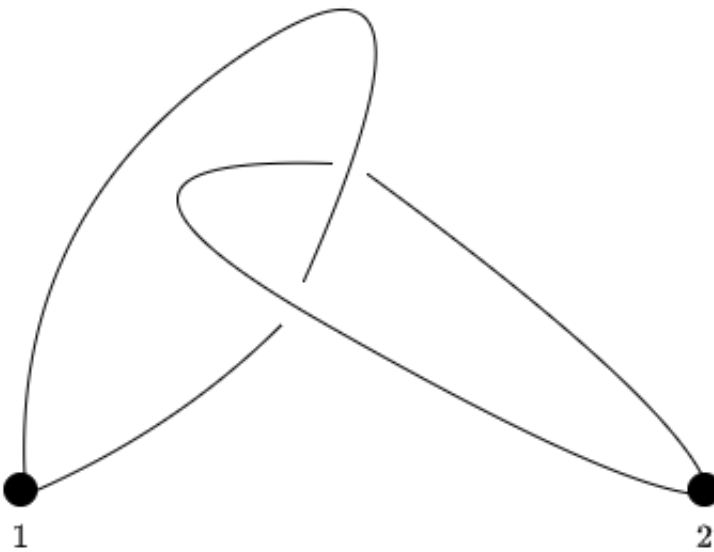
Proposição 3.23. ((COHEN, 2010), Example 2.3, pg. 185)

$$F(\mathbb{R}^n, 2) \simeq S^{n-1}$$

Demonstração. Vide Exemplo 3.1-(2). □

Observação 3.47. Como o espaço de configurações $F(\mathbb{R}^n, 2)$ é simplesmente conexo, para qualquer $n \geq 3$, então, o laço dado na Figura 3.13 pode ser deformado em $F(\mathbb{R}^3, 2)$ no laço constante. Note que, tal deformação não existe em \mathbb{R}^3 , porém existe em $F(\mathbb{R}^3, 2)$ (o qual é um espaço de dimensão 6).

Figura 3.13: Laço trivial.



Teorema 3.14. (FADELL; NEUWIRTH, 1962, Section II, Corollary 2.1, pg. 113) Para todo $n \geq 2$ e para todo $i \geq 0$, temos um isomorfismo:

$$\pi_i(F(\mathbb{R}^{n+1}, k)) \cong \bigoplus_{r=1}^{k-1} \pi_i(\bigvee^r S^n).$$

Demonstração. Pela Proposição 3.15, considerando $M = \{pto\}$, obtemos para $i \geq 2$:

$$\pi_i(F(\mathbb{R}^{n+1}, k)) \cong \bigoplus_{r=0}^{k-1} \pi_i(\mathbb{R}^{n+1} - Q_r).$$

Note que $\pi_i(\mathbb{R}^{n+1} - \underbrace{Q_0}_{\emptyset}) = 0$, além disso, do Corolário B.3, $\pi_i(\mathbb{R}^{n+1} - Q_r) \cong \pi_i(\bigvee^r S^n)$ com $r \geq 1$. Assim, em (3.7), obtemos

$$\pi_i(F(\mathbb{R}^{n+1}, k)) \cong \bigoplus_{r=1}^{k-1} \pi_i\left(\bigvee^r S^n\right), \quad \forall i \geq 2.$$

Por outro lado, pelo Exemplo 3.13, $F(\mathbb{R}^{n+1}, k)$ é simplesmente conexo, para $n \geq 2$, e como $\bigvee^r S^n$ também é simplesmente conexo, para $n \geq 2$, concluímos que

$$\pi_i(F(\mathbb{R}^{n+1}, k)) \cong 1 \cong \underbrace{\bigoplus_{r=1}^{k-1} \pi_i\left(\bigvee^r S^n\right)}_1, \quad i = 0, 1.$$

Portanto

$$\pi_i(F(\mathbb{R}^{n+1}, k)) \cong \bigoplus_{r=1}^{k-1} \pi_i\left(\bigvee^r S^n\right), \quad \forall i \geq 0.$$

□

Corolário 3.14. (COHEN, 1995, Section I, pg. 20) Os espaços de configurações $F(\mathbb{R}^{n+1}, k)$ e $SF(\mathbb{R}^{n+1}, k)$ não são $K(\pi, 1)$ -espaços, para todo $n \geq 2$ e para todo $k \geq 2$.

Corolário 3.15. Para todo $n \geq 2$ e para todo $k \geq 2$, temos:

$$\tilde{H}_q(F(\mathbb{R}^{n+1}, k), \mathbb{Z}) = 0, \quad \forall q < n \quad \text{e} \quad H_n(F(\mathbb{R}^{n+1}, k), \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{r=1}^{k-1} \pi_n\left(\bigvee^r S^n\right),$$

onde \tilde{H}_q denota o q -ésimo grupo de homologia singular reduzido e H_n denota o n -ésimo grupo de homologia singular de $F(\mathbb{R}^{n+1}, k)$.

Demonstração. Sabemos do Exemplo 3.13, que $F(\mathbb{R}^{n+1}, k)$ é $(n-1)$ -conexo, para todo $n \geq 2$. Logo, pelo Teorema de Hurewicz (Teorema B.4), concluímos que:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_q(F(\mathbb{R}^{n+1}, k), \mathbb{Z}) &= 0, \quad \forall q < n \text{ e} \\ H_n(F(\mathbb{R}^{n+1}, k), \mathbb{Z}) &\cong \pi_n(F(\mathbb{R}^{n+1}, k)) \cong \bigoplus_{r=1}^{k-1} \pi_n\left(\bigvee^r S^n\right). \end{aligned}$$

□

3.8 Homologia de alguns espaços de configurações

Em toda esta seção, denotaremos por R um anel comutativo com identidade e $H_q(X; R)$ denotará o q -ésimo R -módulo de homologia singular de um espaço topológico X com coeficientes no anel R . Em particular, quando $R = \mathbb{Z}$ usaremos em alguns casos simplesmente a notação $H_q(X)$. O resultado a seguir mostra que, para q suficientemente grande, os R -módulos de homologia singular $H_q(X, R)$ dos espaços de configurações de variedades topológicas conexas são triviais.

Proposição 3.24. Seja M uma m -variedade topológica conexa. Então:

$$H_{q+1}(F(M, k); R) = 0, \quad \forall q \geq mk \text{ e } H_{q+1}(SF(M, k); R) = 0, \quad \forall q \geq mk.$$

Demonstração. Segue da Observação 3.11 e do Corolário 3.5. □

Apresentamos a seguir o cálculo dos grupos de homologia singular de certos espaços de configurações.

Proposição 3.25 (Homologia de $F(\mathbb{R}^n, 3)$, $n \geq 3$). Para todo $n \geq 3$, temos:

$$H_q(F(\mathbb{R}^n, 3); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0; \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = n - 1; \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = 2n - 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. De fato, pelo Teorema de Fadell e Neuwirth (Teorema 3.8), temos a fibração:

$$\mathbb{R}^n - \{p_1, p_2\} \rightarrow F(\mathbb{R}^n, 3) \rightarrow F(\mathbb{R}^n, 2) \simeq S^{n-1}$$

com fibra $F = \mathbb{R}^n - \{p_1, p_2\}$. Usando a sequência de Mayer Vietoris, tem-se:

$$H_q(F) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0; \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = n - 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Denotemos por $E = F(\mathbb{R}^n, 3)$ o espaço total e por $B = S^{n-1}$ o espaço base desta fibração, o qual é simplesmente conexo, pois $n \geq 3$. Assim, o E_2 -termo da sequência espectral de Leray-Serre para esta fibração (vide Proposição 2.15) é da forma:

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B) \otimes H_q(F).$$

Logo, os únicos termos não nulos para $E_{*,*}^2$ são representados na Figura 3.14.

Figura 3.14: $E_{*,*}^2$

q	E_{**}^2						
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
n	0	$0 \cdots$	0	0	0	$0 \cdots$	
$n - 1$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$0 \cdots$	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	0	$0 \cdots$	
$n - 2$	0	$0 \cdots$	0	0	0	$0 \cdots$	
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
1	0	$0 \cdots$	0	0	0	$0 \cdots$	
0	\mathbb{Z}	$0 \cdots$	0	\mathbb{Z}	0	$0 \cdots$	p
	0	$1 \cdots$	$n - 2$	$n - 1$	n	\cdots	

Note que todos os diferenciais são nulos, assim, $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^2$. O espaço total E é conexo por caminhos, logo $H_0(E) \cong \mathbb{Z}$. Para H_{n-1} , existe a filtração com

n -termos:

$$0 = F_{-1}H_{n-1} \subseteq F_0H_{n-1} \subseteq \dots \subseteq F_{n-3}H_{n-1} \subseteq F_{n-2}H_{n-1} \subseteq F_{n-1}H_{n-1} = H_{n-1}.$$

Assim,

$$H_{n-1}/F_{n-2}H_{n-1} = F_{n-1}H_{n-1}/F_{n-2}H_{n-1} \cong E_{n-1,0}^\infty \cong \mathbb{Z}.$$

Como \mathbb{Z} é um \mathbb{Z} -módulo livre, isso implica que

$$H_{n-1} \cong F_{n-2}H_{n-1} \oplus \mathbb{Z}.$$

Por outro lado,

$$F_{n-2}H_{n-1}/F_{n-3}H_{n-1} \cong E_{n-2,1}^\infty \cong 0, \text{ então } F_{n-2}H_{n-1} = F_{n-3}H_{n-1}.$$

Continuando este processo, obtemos o quociente

$$F_0H_{n-1} = F_0H_{n-1}/F_{-1}H_{n-1} \cong E_{0,n-1}^\infty \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Assim,

$$F_{n-2}H_{n-1} = F_{n-3}H_{n-1} = \dots = F_1H_{n-1} = F_0H_{n-1} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$H_{n-1}(E) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

De maneira análoga, conclui-se que

$$H_{2n-2}(E) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

□

Observação 3.48. Da Proposição 3.25, temos os *números de Betti* de $F(\mathbb{R}^n, 3)$, $n \geq 3$:

$$\beta_q := \beta_q(F(\mathbb{R}^n, 3)) := \text{rank}(H_q(F(\mathbb{R}^n, 3))) = \begin{cases} 1, & q = 0; \\ 3, & q = n - 1; \\ 2, & q = 2n - 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, a *Característica de Euler* de $F(\mathbb{R}^n, 3)$ tem a forma:

$$\chi(F(\mathbb{R}^n, 3)) := \sum_{q \geq 0} (-1)^q \beta_q = 3(1 + (-1)^{n-1}),$$

e seu *Polinômio de Poincaré* tem a forma:

$$P(F(\mathbb{R}^n, 3))(t) := \sum_{q \geq 0} \beta_q t^q = 1 + 3t^{n-1} + 2t^{2n-2}.$$

Proposição 3.26 (Homologia de $F(\mathbb{R}^n, 4)$, $n \geq 3$). Para todo $n \geq 3$, temos:

$$H_q(F(\mathbb{R}^n, 4); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0; \\ \mathbb{Z}^{\oplus 6}, & q = n - 1; \\ \mathbb{Z}^{\oplus 11}, & q = 2n - 2; \\ \mathbb{Z}^{\oplus 6}, & q = 3n - 3; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Pelo teorema de Fadell e Neuwirth (Teorema 3.8), temos a fibração:

$$\mathbb{R}^n - \{p_1, p_2, p_3\} \rightarrow F(\mathbb{R}^n, 4) \rightarrow F(\mathbb{R}^n, 3)$$

com fibra $F = \mathbb{R}^n - \{p_1, p_2, p_3\}$. Usando a sequência de Mayer Vietoris, tem-se:

$$H_q(F) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0; \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = n - 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Denotemos por $E = F(\mathbb{R}^n, 4)$ o espaço total e por $B = F(\mathbb{R}^n, 3)$ o espaço base desta fibração, o qual é simplesmente conexo, pois $n \geq 3$ (Teorema 3.14). Assim, o E_2 -termo da sequência espectral de Leray-Serre para esta fibração (vide Proposição 2.15), é dado por:

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B) \otimes H_q(F).$$

Logo, os únicos termos não nulos para $E_{*,*}^2$ são representados na Figura 3.15. Note que todos os diferenciais são nulos, assim, $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^2$. O espaço total E é conexo por caminhos, logo $H_0(E) \cong \mathbb{Z}$. Usando a mesma estratégia do Exemplo 3.25, concluímos:

$$\begin{aligned} H_{n-1}(E) &\cong \mathbb{Z}^{\oplus 3} \oplus \mathbb{Z}^{\oplus 3} = \mathbb{Z}^{\oplus 6}, \\ H_{2n-2}(E) &\cong \mathbb{Z}^{\oplus 9} \oplus \mathbb{Z}^{\oplus 2} = \mathbb{Z}^{\oplus 11}, \\ H_{3n-3}(E) &\cong \mathbb{Z}^{\oplus 6}. \end{aligned}$$

□

Figura 3.15: Sequência espectral do espaço de configurações $F(\mathbb{R}^n, 4)$.

q	E_{**}^2							
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
n	0	$0 \cdots$	0	0	$0 \cdots$	0	0	
$n-1$	$\mathbb{Z}^{\oplus 3}$	$0 \cdots$	0	$\mathbb{Z}^{\oplus 9}$	$0 \cdots$	$\mathbb{Z}^{\oplus 6}$	0	
$n-2$	0	$0 \cdots$	0	0	$0 \cdots$	0	0	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
1	0	$0 \cdots$	0	0	$0 \cdots$	0	0	
0	\mathbb{Z}	$0 \cdots$	0	$\mathbb{Z}^{\oplus 3}$	$0 \cdots$	$\mathbb{Z}^{\oplus 2}$	0	p
	0	$1 \cdots$	$n-2$	$n-1$	n	\cdots	$2(n-1)$	

Observação 3.49. Da Proposição 3.26, temos os números de Betti para $F(\mathbb{R}^n, 4)$, $n \geq 3$:

$$\beta_q := \beta_q(F(\mathbb{R}^n, 4)) := \text{rank}(H_q(F(\mathbb{R}^n, 4))) = \begin{cases} 1, & q = 0; \\ 6, & q = n - 1; \\ 11, & q = 2n - 2; \\ 6, & q = 3n - 3; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, a Característica de Euler de $F(\mathbb{R}^n, 4)$ tem a forma:

$$\begin{aligned} \chi(F(\mathbb{R}^n, 4)) &:= \sum_{q \geq 0} (-1)^q \beta_q \\ &= 1 + 6(-1)^{n-1} + 11 + 6(-1)^{3n-3} \\ &= 6(2 + (-1)^{n-1} + (-1)^{3n-3}), \end{aligned}$$

e o seu Polinômio de Poincaré tem a forma:

$$P(F(\mathbb{R}^n, 3))(t) := \sum_{q \geq 0} \beta_q t^q = 1 + 6t^{n-1} + 11t^{2n-2} + 6t^{3n-3}.$$

Proposição 3.27 (Homologia de $F(\mathbb{C}P^n, 2)$, $n \geq 1$). (ZAPATA, 2019, Lemma 2.1, pg. 105) Para todo $n \geq 1$, temos:

$$H_q(F(\mathbb{C}P^n, 2); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{\oplus(\frac{q}{2}+1)}, & q = 0, 2, 4, \dots, 2(n-1); \\ \mathbb{Z}^{\oplus(2n-\frac{q}{2})}, & q = 2n, 2n+2, 2n+4, \dots, 2n+2(n-1); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. O espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ é uma variedade compacta sem bordo. Pelo teorema de Fadell e Neuwirth (Teorema 3.8), temos a fibração

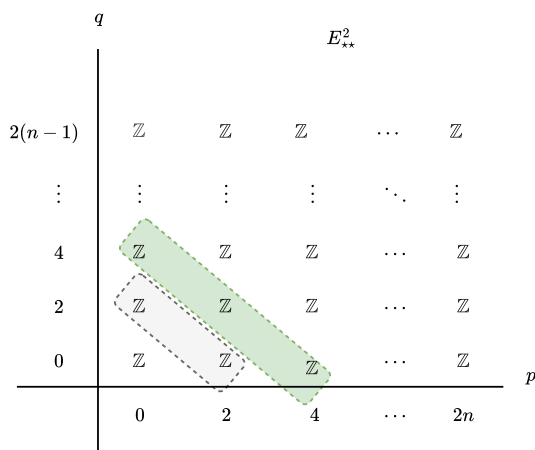
$$\mathbb{C}P^{n-1} \simeq \mathbb{C}P^n - \{\star\} \rightarrow F(\mathbb{C}P^n, 2) \rightarrow \mathbb{C}P^n$$

com fibra $F = \mathbb{C}P^{n-1}$, espaço total $E = F(\mathbb{C}P^n, 2)$ e espaço base $B = \mathbb{C}P^n$, o qual é simplesmente conexo (lembramos do fibrado $S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$). Assim o E_2 -termo da sequência espectral de Leray-Serre para esta fibração (vide Proposição 2.15) tem a forma:

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B) \otimes H_q(F) \cong H_p(\mathbb{C}P^n) \otimes H_q(\mathbb{C}P^{n-1}).$$

Logo, os únicos termos não nulos para $E_{*,*}^2$ são representados na Figura 3.16.

Figura 3.16: Sequência espectral do espaço de configurações $F(\mathbb{C}P^n, 2)$.



Note que todos seus diferenciais são nulos, assim, $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^2$. O resultado segue usando a mesma estratégia das Proposições 3.25 e 3.26. \square

Observação 3.50. Da Proposição 3.27, os números de Betti para $F(\mathbb{C}P^n, 2)$, $n \geq 1$ são:

$$\begin{aligned} \beta_q &:= \beta_q(F(\mathbb{C}P^n, 2)) \\ &:= \text{rank}(H_q(F(\mathbb{C}P^n, 2))) \\ &= \begin{cases} j + 1, & q = 2j, j = 0, 1, 2, \dots, n - 1; \\ 2n - j, & q = 2j, j = n, n + 1, n + 2, \dots, n + (n - 1); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, a característica de Euler de $F(\mathbb{C}P^n, 2)$ tem a forma:

$$\begin{aligned} \chi(F(\mathbb{C}P^n, 2)) &:= \sum_{q \geq 0} (-1)^q \beta_q \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (j + 1) + \sum_{j=n}^{n+n-1} (2n - j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (j + 1) + \sum_{j=0}^{n-1} (n - j) \\ &= n + n^2, \end{aligned}$$

e seu Polinômio de Poincaré tem a forma:

$$P(F(\mathbb{C}P^n, 2))(t) := \sum_{q \geq 0} \beta_q t^q = \sum_{j=0}^{n-1} (j + 1) t^{2j} + \sum_{j=n}^{n+(n-1)} (2n - j) t^{2j}.$$

Uma das razões importantes de se conhecer os grupos de homologia de um espaço topológico é dada na seguinte aplicação.

Proposição 3.28. (HATCHER, 2002, Proposition 4C.1, pg. 439) Um CW complexo simplesmente conexo, cujos grupos de homologia são finitamente gerados, tem o mesmo tipo de homotopia de um CW complexo tendo um número mínimo de células consistentes com seus grupos de homologia, isto é, uma n -célula para cada somando \mathbb{Z} de H_n , e um par de células de dimensões n e $n + 1$, para cada somando \mathbb{Z}_k de H_n .

Exemplo 3.27. Para o caso da n -esfera S^n ($n \geq 2$), seus grupos de homologia são:

$$H_q(S^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, n; \\ 0, & q \neq 0, n. \end{cases}$$

Então, pela Proposição 3.28, a esfera S^n tem o mesmo tipo de homotopia de um CW complexo formado por uma 0-célula e uma n -célula.

Exemplo 3.28. Da Proposição 3.25, obtemos que o espaço de configurações $F(\mathbb{R}^n, 3)$ ($n \geq 3$) tem o tipo de homotopia de um CW complexo formado por uma 0-célula, três $(n - 1)$ -células e duas $2(n - 1)$ -células. Assim, $F(\mathbb{R}^n, 3)$ tem o mesmo tipo de homotopia de um $2(n - 1)$ -dimensional CW complexo finito. Analogamente, da Proposição 3.26, obtemos que o espaço de configurações $F(\mathbb{R}^n, 4)$ ($n \geq 3$) tem o mesmo tipo de homotopia de um $3(n - 1)$ -dimensional CW complexo finito.

Exemplo 3.29. Da Proposição 3.27, obtemos que o espaço de configurações $F(\mathbb{C}P^n, 2)$ tem o mesmo tipo de homotopia de um $2(2n - 1)$ -dimensional CW complexo finito (ZAPATA, 2019, Corollary 2.2, pg. 105). $F(\mathbb{C}P^n, 2)$ é simplesmente conexo, pelo Exemplo 3.15.

3.9 Espaços de configurações da esfera S^n

Nesta seção, apresentamos algumas propriedades elementares dos espaços de configurações da n -esfera $F(S^n, k)$, para todo $n \geq 1$.

Usando a Proposição 3.21, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.29. O espaço de configurações da 1-esfera S^1 , $F(S^1, k + 1)$ é homeomorfo a $S^1 \times F(I, k)$, onde $I = (0, 1)$. Assim, $F(S^1, k + 1)$ possui $k!$ componentes conexas por caminhos, as quais tem o mesmo tipo de homotopia de S^1 .

Demonstração. Sabemos que S^1 é um grupo topológico com elemento identidade 1. Assim, do Exemplo 3.1-(5),

$$F(S^1, k + 1) \approx S^1 \times F(S^1 - \{1\}, k) \approx S^1 \times F(\mathbb{R}, k),$$

onde \approx significa homeomorfismo. Pela Proposição 3.21, concluímos que $F(S^1, k + 1)$ é o produto da 1-esfera S^1 com uma união disjunta de $k!$ simplexos abertos. \square

Proposição 3.30. (COHEN, 2010, Example 2.4, pg. 186) O espaço de configurações $F(S^n, 2)$ tem o mesmo tipo de homotopia da n -esfera S^n .

Demonstração. Vide Example 3.1-(6). □

Proposição 3.31. O espaço de configurações $F(S^n, k)$ é $(n - 2)$ -conexo, para todo $n \geq 2$

Demonstração. Consideremos a fibração

$$F(\mathbb{R}^n, k - 1) \approx F(S^n - \{\star\}, k - 1) \rightarrow F(S^n, k) \xrightarrow{\pi_{k,1}} S^n,$$

com fibra $F(\mathbb{R}^n, k - 1)$, a qual é $(n - 2)$ -conexa (vide Teorema 3.14) e espaço base S^n , o qual é $(n - 1)$ -conexo. Então, o espaço total $F(S^n, k)$ é $(n - 2)$ -conexo. Outra prova foi apresentada no Exemplo 3.14. □

Observação 3.51. Como um caso particular da Proposição 3.31, temos que $F(S^n, k)$ é simplesmente conexo, $\forall n \geq 3$. Logo, os grupos de tranças puras e os grupos de tranças de Artin para a n -esfera S^n , com $n \geq 3$ são:

$$PB_k(S^n) = \pi_1(F(S^n, k)) = 0 \quad \text{e} \quad B_k(S^n) = \pi_1(SF(S^n, k)) \cong \Sigma_k, \quad \forall k.$$

Proposição 3.32 (Homologia de $F(S^m, 3)$, $m \geq 3$). Para todo $m \geq 3$, temos:

$$H_q(F(S^m, 3); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0, m - 1, m, 2m - 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. A esfera S^m é uma variedade compacta sem bordo. Pelo teorema de Fadell e Neuwirth (Teorema 3.8), temos a fibração

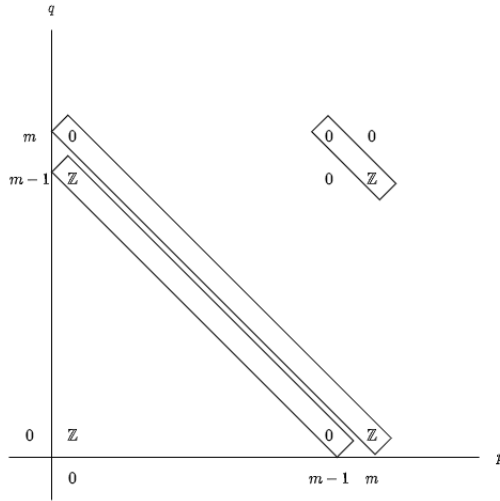
$$S^{m-1} \simeq S^m - Q_2 \rightarrow F(S^m, 3) \rightarrow F(S^m, 2) \simeq S^m$$

com fibra $F = S^{m-1}$, espaço total $E = F(S^m, 3)$ e espaço base $B = S^m$, o qual é simplesmente conexo. Assim o E^2 -termo da sequência espectral de Leray-Serre para esta fibração (vide Proposição 2.15) tem a forma:

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B) \otimes H_q(F) \cong H_p(S^m) \otimes H_q(S^{m-1}).$$

Logo, os únicos termos não nulos para $E_{*,*}^2$ são representados na Figura 3.17.

Figura 3.17: Sequência espectral do espaço de configurações $F(S^m, 3)$.



Note que todos seus diferenciais são nulos, assim, $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^2$. O resultado segue usando a mesma estratégia das Proposições 3.25 e 3.26. \square

Observação 3.52. Da Proposição 3.32, os números de Betti para $F(S^m, 3)$, $m \geq 3$ são:

$$\begin{aligned} \beta_q &:= \beta_q(F(S^m, 3)) \\ &:= \text{rank}(H_q(F(S^m, 3))) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } q = 0, m-1, m, 2m-1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, a característica de Euler de $F(S^m, 3)$ tem a forma:

$$\begin{aligned} \chi(F(S^m, 3)) &:= \sum_{q \geq 0} (-1)^q \beta_q \\ &= 1 + (-1)^{m-1} + (-1)^m - 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

e seu Polinômio de Poincaré tem a forma:

$$P(F(S^m, 3))(t) := \sum_{q \geq 0} \beta_q t^q = 1 + t^{m-1} + t^m + t^{2m-1}.$$

APÊNDICE A

Fatos Algébricos

Neste apêndice, apresentamos dois resultados básicos de Álgebra Homológica: o Lema dos Quatro e o Lema dos Cinco. Estaremos considerando os objetos e os morfismos na categoria Grp (grupos e homomorfismos de grupos).

Teorema A.1 (Lema dos Quatro). Suponhamos que no diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ \downarrow l & & \downarrow m & & \downarrow n & & \downarrow p \\ A' & \xrightarrow{r} & B' & \xrightarrow{s} & C' & \xrightarrow{t} & D' \end{array}$$

as duas linhas sejam seqüências exatas e os três quadrados sejam comutativos. Tem-se:

1. Se l e n são epimorfismos e se p for um monomorfismo, então, m é um epimorfismo.
2. Se m e p são monomorfismos e se l for um epimorfismo, então n é um monomorfismo.

Demonstração. 1. Seja $b' \in B'$. Temos que $t(s(b')) = 0$. Por outro lado, existe $c \in C$ tal que $n(c) = s(b')$. Logo, $p(h(c)) = 0$ e assim $c \in \text{Ker}(h)$. Então, existe $b \in B$ tal que $c = g(b)$. Assim, $m(b) - b' \in \text{Ker}(s)$, o qual implica que existe $a' \in A'$ tal que $r(a') = m(b) - b'$. Seja $a \in A$ tal que $l(a) = a'$. Logo, $m(f(a)) = m(b) - b'$ e assim $b' = m(b - f(a))$.

2. Se $c \in \text{Ker}(n)$, então $c \in \text{Ker}(h)$ e assim existe $b \in B$ tal que $c = g(b)$. Logo, $m(b) \in \text{Ker}(s)$ e assim existe $a' \in A'$ tal que $r(a') = m(b)$. Seja $a \in A$ com $l(a) = a'$. Então, $f(a) - b \in \text{Ker}(m)$ e assim $b = f(a)$. Portanto, $c = 0$.

□

Corolário A.1 (Lema dos Cinco). (SELICK, 2008, Chapter 4, Section 1, Lemma 4.1.6, pg. 22) Suponhamos que no diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{j} & E \\
 \downarrow l & & \downarrow m & & \downarrow n & & \downarrow p & & \downarrow q \\
 A' & \xrightarrow{r} & B' & \xrightarrow{s} & C' & \xrightarrow{t} & D' & \xrightarrow{u} & E'
 \end{array}$$

as duas linhas sejam seqüências exatas e os quatro quadrados sejam comutativos. Se m e p são isomorfismos, l é um epimorfismo e q é um monomorfismo, então n é um isomorfismo.

APÊNDICE B

Fatos Topológicos

Neste apêndice, destacamos teoremas importantes que serão usados neste trabalho. Dentre eles estão: o Teorema da Invariância do Domínio, a Sequência de Mayer-Vietoris e o Teorema de Hurewicz. Além disso, apresentamos uma demonstração de que toda variedade topológica conexa M , com $\dim M \geq 2$, é m -homogênea, para todo m . Este resultado foi afirmado por Fadell e Neuwirth em (FADELL; NEUWIRTH, 1962, Section II, pg. 111) (vide Seção B.1).

Teorema B.1 (Teorema da Invariância do Domínio). (DIECK, 2008, pg. 251, Theorem 10.3.7) Sejam U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e injetora. Então, f é uma aplicação aberta e $f : U \rightarrow f(U)$ é um homeomorfismo.

Observação B.1. Mais geralmente, é possível mostrar que todo mergulho entre variedades topológicas de mesma dimensão é uma aplicação aberta, como mostra o resultado a seguir.

Corolário B.1. Sejam M e N n -variedades topológicas sem bordo e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua e injetora. Então f , é uma aplicação aberta.

Demonstração. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua e injetora entre n -variedades topológicas M e N . Observemos primeiramente que se $\mathcal{V} = \bigcup\{V\}$ é uma cobertura aberta para N , então:

$$f : M \rightarrow N \text{ é aberta} \iff f|_{f^{-1}(V)} : f^{-1}(V) \rightarrow V \text{ é aberta,}$$

para qualquer subconjunto $V \in \mathcal{V}$. De fato, dado qualquer subconjunto $W \subset M$, sabemos que

$$f(W) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} f(W \cap f^{-1}(V)).$$

Em particular, se W for aberto em M , então $f(W)$ será aberto em N . Analogamente, dada uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \bigcup\{U\}$ para M , então:

$$f : M \rightarrow N \text{ é aberta} \iff f|_U : U \rightarrow N \text{ é aberta,}$$

para qualquer subconjunto $U \in \mathcal{U}$. De fato, dado qualquer subconjunto $W \subset M$, sabemos que

$$f(W) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f(W \cap U).$$

Em particular, se W for aberto em M , então $f(W)$ será aberto em N . Assim, nosso problema se reduz a mostrar que para quaisquer subconjuntos abertos $U \subset M$ e $V \subset N$, ambos homeomorfos ao \mathbb{R}^n e $f(U) \subset V$, a aplicação $f : U \rightarrow V$ é aberta. Isso segue aplicando-se o Teorema B.1 para a composição:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n,$$

onde φ e ψ são homeomorfismos. □

Uma técnica eficiente para se calcular o grupo fundamental de espaços com ponto base é dada pelo famoso Teorema de Seifert-van Kampen, como segue.

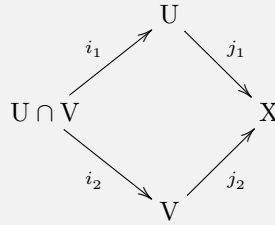
Teorema B.2 (Teorema de Seifert-van Kampen). (LEE, 2010, Theorem 10.1, pg. 252) Seja (X, x_0) um espaço com ponto base tal que $X = U \cup V$ é uma cobertura aberta, com U, V e $U \cap V$ conexos por caminhos e tais que $x_0 \in U \cap V$. Então,

$$\pi_1(X, x_0) \cong \frac{\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)}{N},$$

onde N é o fecho normal no produto livre $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ gerado pela palavra:

$$i_{1*}([\alpha])(i_{2*}([\alpha]))^{-1}, \quad \forall [\alpha] \in \pi_1(U \cap V, x_0),$$

onde $i_1 : U \cap V \hookrightarrow U$ e $i_2 : U \cap V \hookrightarrow V$ são as inclusões naturais.



Exemplo B.1. Se M é um m -variedade topológica conexa, com $m \geq 3$. Então, para todo $k \geq 1$:

$$\pi_1(M - Q_k) \cong \pi_1(M),$$

onde Q_k é um subconjunto finito de M contendo k elementos.

Demonstração. A prova será feita por indução sobre k . Para $k = 1$, usaremos o Teorema de Seifert-van Kampen. Consideremos os subconjuntos $U := M - Q_1$, onde $Q_1 = \{q\}$ e $V := U_q$ uma vizinhança aberta para q homeomorfa ao \mathbb{R}^m . Observemos que:

$$U \cup V = M \text{ e } U \cap V = U_q - \{q\} \cong \mathbb{R}^m - \{0\} \simeq S^{m-1},$$

onde \cong significa homeomorfismo e \simeq tipo de homotopia. Temos que $M = U \cup V$ é uma cobertura aberta, com U, V e $U \cap V$ conexos por caminhos e consideremos um ponto $x_0 \in U \cap V$. Além disso:

$$\begin{aligned} \pi_1(U, x_0) &= \pi_1(M - Q_1, x_0) \\ \pi_1(V, x_0) &\cong \pi_1(\mathbb{R}^m, \varphi(x_0)) = 0, \\ \pi_1(U \cap V, x_0) &\cong \pi_1(S^{m-1}, y_0) = 0, \text{ se } m - 1 \geq 2, \end{aligned}$$

onde $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo. Segue do Teorema B.2 que $\pi_1(M - Q_1) \cong \pi_1(M)$.

Suponhamos que o resultado seja válido para quaisquer $1 \leq l \leq k - 1$. Consideremos os subconjuntos finitos de M , $Q_k = \{q_1, \dots, q_{k-1}, q_k\}$ e $Q_{k-1} = \{q_1, \dots, q_{k-1}\}$. Note que $M - Q_k = (M - Q_{k-1}) - \{q_k\}$. Pela Proposição 3.8, $M - Q_{k-1}$ é uma m -variedade conexa. Então, pelo passo inicial da indução, obtemos:

$$\pi_1(M - Q_k) \cong \pi_1(M - Q_{k-1}).$$

Agora, usando a hipótese de indução, concluímos que: $\pi_1(M - Q_k) \cong \pi_1(M)$. \square

Uma técnica essencial para se calcular os grupos de homologia de certos espaços topológicos é a existência de uma sequência exata longa em homologia, chamada a *sequência de Mayer-Vietoris*, como segue.

Teorema B.3 (Sequência de Mayer-Vietoris). (VICK, 1994, Chapter 1, pg. 21) Sejam X um espaço topológico e $A \cup B$ uma cobertura aberta de X , com $A \cap B \neq \emptyset$. Então, existe uma sequência exata longa de grupos de homologia (com coeficientes em \mathbb{Z}),

$$\dots \rightarrow H_p(A \cap B) \xrightarrow{(i_{1*}, -i_{2*})} H_p(A) \oplus H_p(B) \xrightarrow{k_{1*} + k_{2*}} H_p(X) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

na qual $i_1 : A \cap B \hookrightarrow A$, $i_2 : A \cap B \hookrightarrow B$, $k_1 : A \hookrightarrow X$ e $k_2 : B \hookrightarrow X$ são inclusões. O homomorfismo $\Delta : H_p(X) \rightarrow H_{p-1}(A \cap B)$ é chamado o homomorfismo conectante.

A seguir, definimos o homomorfismo de Hurewicz, o qual conecta os grupos de homotopia e os grupos de homologia de um espaço topológico.

Definição B.1. (HATCHER, 2002, Chapter 4, Section 4.2, pg. 370) Para qualquer natural $q \geq 1$, existe um homomorfismo:

$$h : \pi_q(X, x_0) \rightarrow H_q(X; \mathbb{Z}), \quad [\alpha] \mapsto h([\alpha]) := \alpha_*(\iota),$$

chamado o homomorfismo de Hurewicz, onde $\alpha_* : H_q(S^q; \mathbb{Z}) \rightarrow H_q(X; \mathbb{Z})$ é o homomorfismo induzido pela função contínua $\alpha : (S^q, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ e $\iota \in H_q(S^q; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ é um gerador.

Observação B.2. (HATCHER, 2002, Chapter 4, Section 4.2, pg. 370) O homomorfismo de Hurewicz satisfaz a propriedade da naturalidade, ou seja, uma função contínua $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induz um diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_{\#}} & \pi_1(Y, y_0) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ H_1(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_*} & H_1(Y; \mathbb{Z}) \end{array}$$

comutativo.

Teorema B.4 (Teorema de Hurewicz). (HATCHER, 2002, Chapter 4, Section 4.2, Theorem 4.37, pg. 371) e (MASSEY, 1991, Chapter VIII, Section 7, Theorem 7.1, pg. 219)

(a) Se X é $(n-1)$ -conexo, com $n \geq 2$, então, o homomorfismo de Hurewicz

$$h : \pi_q(X, x_0) \rightarrow H_q(X; \mathbb{Z})$$

é um isomorfismo, para todo $1 \leq q \leq n$. Além disso,

$$h : \pi_{n+1}(X, x_0) \rightarrow H_{n+1}(X; \mathbb{Z})$$

é um epimorfismo.

(b) Se X é 0-conexo, então

$$\pi_1(X, x_0) / [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \cong H_1(X; \mathbb{Z}),$$

onde $[\ ,]$ denota o subgrupo comutador de $\pi_1(X, x_0)$.

B.1 Variedades m -homogêneas

Esta seção foi motivada pela afirmação enunciada por Fadell e Neuwirth em (FADELL; NEUWIRTH, 1962, Section II, pg. 111), de que toda variedade topológica conexa M , com $\dim M \geq 2$, é m -homogênea, para todo m . Apresentaremos uma prova deste resultado, o qual é fundamental na demonstração de um dos principais teoremas deste trabalho (Teorema 3.8), garantindo que o espaço de configurações $F(M - Q_m, n)$ é essencialmente independente da escolha do conjunto Q_m .

Definição B.2. (UNGAR, 1978, Definition 2.2, pg. 155) Seja $m \geq 1$ um natural. Um espaço topológico M é chamado *fortemente m -homogêneo* se dadas quaisquer duas m -uplas (x_1, \dots, x_m) e (y_1, \dots, y_m) de pontos distintos de M , existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que $h(x_i) = y_i$, para todo $i = 1, \dots, m$.

Observação B.3. Note que na Definição B.2, para as m -uplas (x_1, \dots, x_m) e (y_1, \dots, y_m) se tem $x_i \neq x_j$ e $y_i \neq y_j$, para todo $i \neq j$, com $i, j = 1, \dots, m$. Na linguagem adotada por Fadell e Neuwirth em (FADELL; NEUWIRTH, 1962, Section II, pg. 111), tais espaços são chamados, simplesmente, m -homogêneos.

Observação B.4. (i) Se M é m -homogêneo, então M é k -homogêneo, $\forall 1 \leq k \leq m$.

(ii) Se M é m -homogêneo, então $M - \{pto\}$ é $(m - 1)$ -homogêneo.

Exemplo B.2. Podemos mostrar que \mathbb{R} é 1 e 2-homogêneo. Mas, provaremos que \mathbb{R} não é m -homogêneo, $\forall m \geq 3$. Pela Observação B.4-(i), basta provar que \mathbb{R} não é 3-homogêneo. Consideremos x_1, x_2, x_3 e $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3$ números reais tal que $x_1 < x_2 < x_3$ e $y_1 < y_3 < y_2$ e suponha que exista um homeomorfismo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que leva x_i em y_i , $i = 1, 2, 3$. Então, como $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua e injetora, segue que h é ou crescente ou decrescente. Se h for crescente, então $x_2 < y_3$, o que é uma contradição, pois $y_3 < x_2$. Se h for decrescente, então $x_2 < x_1$, o que é uma contradição, pois $x_1 < x_2$. Logo, tal h não existe. Portanto, \mathbb{R} não é 3-homogêneo.

A propriedade de um espaço ser m -homogêneo é um invariante topológico, como mostra o seguinte resultado.

Proposição B.1. Sejam M, N espaços homeomorfos. Se M é m -homogêneo então N também é m -homogêneo.

Demonstração. Considere um homeomorfismo $\varphi : N \rightarrow M$ e suponha M m -homogêneo. Provaremos que N também é m -homogêneo. De fato, sejam a_1, \dots, a_m e b_1, \dots, b_m seqüências de pontos distintos de N e denotemos $x_i := \varphi(a_i)$ e $y_i := \varphi(b_i)$, para cada $i = 1, \dots, m$. Assim, x_1, \dots, x_m e y_1, \dots, y_m são pares de pontos distintos de M , logo existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que $h(x_i) = y_i$, $\forall i = 1, \dots, m$. Para concluir, definamos o homeomorfismo $g : N \rightarrow N$ como a composta $g := \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$ e segue que g satisfaz,

$$\begin{aligned} g(a_i) &= \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi(a_i) \\ &= \varphi^{-1} \circ h(x_i) \\ &= \varphi^{-1}(y_i) = b_i, \end{aligned}$$

para cada $i = 1, \dots, m$. □

Exemplo B.3. Podemos mostrar que S^1 é 1, 2 e 3-homogênea. Mas, provaremos que S^1 não é m -homogênea, $\forall m \geq 4$. Novamente pela Observação B.4-(i), basta provar que S^1 não é 4-homogênea. Suponha que S^1 seja 4-homogênea, então pela Observação B.4-(ii), $S^1 - \{pto\}$ é 3-homogêneo, mas $S^1 - \{pto\} \cong \mathbb{R}$ não é 3-homogêneo. Portanto, S^1 não é 4-homogênea.

Observação B.5. Usando o fato (vide (ROKHLIN; FUKS, 1977, Chapter 3, Section 1, pg. 140,141)) que toda 1-variedade topológica conexa, se é compacta, então é homeomorfa a S^1 , e se não é compacta, então é homeomorfa a \mathbb{R} (vide também Observação 3.3), e pelos Exemplos B.2,B.3 e a Proposição B.1, concluímos que toda 1-variedade conexa compacta não é m -homogênea, $\forall m \geq 4$ e, que toda 1-variedade conexa não compacta não é m -homogênea, $\forall m \geq 3$.

Lema B.1. Toda n -variedade topológica M conexa, com $n \geq 2$, é 1-homogênea.

Demonstração. Consideremos o grupo $(Top(M), \circ)$, onde

$$Top(M) := \{h : M \rightarrow M \mid h \text{ é um homeomorfismo}\},$$

é o conjunto dos homeomorfismos de M , munido da composição usual " \circ " de funções. A aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : Top(M) \times M &\rightarrow M \\ (h, x) &\mapsto \varphi(h, x) := h(x) \end{aligned}$$

determina uma ação de $Top(M)$ em M (vide Definição 2.17) pois:

- (i) $\varphi(1_M, x) = 1_M(x) = x$, $\forall x \in M$ com $1_M \in Top(M)$ o homeomorfismo identidade.
- (ii) $\varphi(f, \varphi(g, x)) = \varphi(f, g(x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = \varphi(f \circ g, x)$, $\forall f, g \in Top(M)$ e $\forall x \in M$.

Então,

$$M = \bigcup_{x \in M} Top(M) \cdot x,$$

onde $Top(M) \cdot x := \{h(x) \in M \mid h \in Top(M)\}$ é a órbita de x .

Note que:

$$\text{Top}(M) \cdot x \subseteq M \text{ é aberto} \iff \exists U \subseteq M \text{ aberto tal que } x \in U \subseteq \text{Top}(M) \cdot x \quad (\text{B})$$

De fato, para a implicação (\rightarrow) basta considerar $U := \text{Top}(M) \cdot x$. Reciprocamente, seja $z \in \text{Top}(M) \cdot x$. Por hipótese, existe um aberto U tal que $x \in U \subseteq \text{Top}(M) \cdot x$. Seja $h \in \text{Top}(M)$ tal que $h(z) = x \in U$. Então, $z \in h^{-1}(U) \subseteq M$ aberto. Mostremos que $h^{-1}(U) \subseteq \text{Top}(M) \cdot x$. Se $y \in h^{-1}(U)$, então $h(y) \in U \subseteq \text{Top}(M) \cdot x$. Considere $f \in \text{Top}(M)$ tal que $h(y) = f(x)$. Logo

$$\begin{aligned} y &= \varphi(1_M, y) = \varphi(h^{-1} \circ h, y) \\ &= \varphi(h^{-1}, h(y)) \\ &= \varphi(h^{-1}, f(x)) \\ &= \varphi(h^{-1} \circ f, x) \in \text{Top}(M) \cdot x. \end{aligned}$$

Assim, $y \in \text{Top}(M) \cdot x$. Portanto, existe $h^{-1}(U)$ aberto tal que $z \in h^{-1}(U) \subseteq \text{Top}(M) \cdot x$, ou seja, $\text{Top}(M) \cdot x$ é aberto.

Agora, para cada $x \in M$ consideremos $\bar{U} \subseteq M$ vizinhança de disco para x e a aplicação $\gamma : U \rightarrow \text{Top}_s(M)$ dada no Corolário 3.3. Para $z \in U$, $\gamma(z) \in \text{Top}(M)$ e satisfaz $\gamma(z)(z) = x$, ou seja, $z = f(x)$, onde $f := (\gamma(z))^{-1} \in \text{Top}(M)$. Assim, $U \subseteq \text{Top}(M) \cdot x$. Portanto, de (B), $\text{Top}(M) \cdot x$ é aberto, $\forall x \in M$, o que implica que $\text{Top}(M) \cdot x$ é também fechado, $\forall x \in M$. Assim, como M é conexa, temos

$$M = \text{Top}(M) \cdot x, \quad \forall x \in M. \quad (\text{C})$$

Finalmente, para quaisquer $x, y \in M$, segue de (C), $y \in \text{Top}(M) \cdot x$, ou seja, $y = h(x)$, para algum $h \in \text{Top}(M)$. Portanto, M é 1-homogênea. \square

Teorema B.5. ((FADELL; NEUWIRTH, 1962), Section II, pg. 111) Toda n -variedade topológica M conexa, com $n \geq 2$, é m -homogênea para todo $m \geq 1$.

Demonstração. A prova será feita por indução sobre m . Quando $m = 1$ segue do Lema B.1. Suponhamos que M seja l -homogênea, $\forall 1 \leq l \leq m - 1$ e, provaremos que M é m -homogênea. Sejam x_1, \dots, x_m e y_1, \dots, y_m sequências de pontos distintos de M e consideremos o conjunto

$$\text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) := \{h \in \text{Top}(M) \mid h(x_i) = y_i, \quad \forall 1 \leq i \leq m - 1\},$$

o qual por hipótese de indução é não vazio, isto é,

$$\text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \neq \emptyset.$$

Provaremos que o conjunto não vazio

$$\text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m := \{h(x_m) \mid h \in \text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M)\} \subseteq M - \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$$

é aberto e fechado em $M - \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$. Vejamos que

$$\text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m$$

é aberto em M . Assim, em particular,

$$\text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m$$

é aberto em $M - \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$. De fato, seja

$$z \in \text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m.$$

Então, existe

$$h \in \text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M)$$

tal que

$$z = h(x_m) \in M - \{y_1, \dots, y_{m-1}\}.$$

Seja \bar{U} uma vizinhança de disco para $z \in U$, com $U \subseteq M - \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$. Mostremos que

$$U \subseteq \text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m.$$

Dado $z' \in U$, consideremos a aplicação

$$\gamma : U \rightarrow \text{Top}_s(M)$$

dada no Corolário 3.3. Temos que $\gamma(z')(z') = z$, em particular, $(\gamma(z'))^{-1} \in \text{Top}(M)$ leva z em z' . Agora a composição

$$(\gamma(z'))^{-1} \circ h \in \text{Top}(M)$$

satisfaz para cada $i = 1, \dots, m - 1$,

$$\begin{aligned} (\gamma(z'))^{-1} \circ h(x_i) &= (\gamma(z'))^{-1}(y_i) \\ &= y_i, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de uma das propriedades da aplicação γ (vide Corolário 3.3), pois $y_i \notin U$, $\forall i = 1 \dots, m - 1$. Assim,

$$(\gamma(z'))^{-1} \circ h \in \text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M).$$

Além disso,

$$(\gamma(z'))^{-1} \circ h(x_m) = (\gamma(z'))^{-1}(z) = z',$$

logo

$$z' = (\gamma(z'))^{-1} \circ h(x_m) \in \text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m.$$

Isto mostra que $U \subseteq \text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m$. Portanto,

$$z \in U \subseteq \text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m,$$

ou seja,

$$\text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m$$

é aberto em M . Agora, vejamos que

$$\text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m$$

é fechado em $M - \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$. Seja

$$z \in \overline{\text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m} \subseteq M - \{y_1, \dots, y_{m-1}\}.$$

Seja \bar{U} vizinhança de disco para $z \in U$, com $U \subseteq M - \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$. Assim, U é um aberto em $M - \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$ e $z \in U$, logo

$$\text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m \cap U \neq \emptyset.$$

Então, existe

$$z' \in \text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m \cap U.$$

Seja

$$h \in \text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M)$$

tal que $h(x_m) = z' \in U$. Considerando a aplicação

$$\gamma : U \rightarrow \text{Top}_s(M)$$

dada no Corolário 3.3, obtemos $\gamma(z') \in \text{Aut}(M)$ que leva z' em z . A composição,

$$\gamma(z') \circ h \in \text{Top}(M)$$

satisfaz para cada $i = 1, \dots, m - 1$,

$$\gamma(z') \circ h(x_i) = \gamma(z')(y_i) = y_i,$$

novamente, a última igualdade segue das propriedades da aplicação γ e, assim

$$\gamma(z') \circ h \in \text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M).$$

Além disso,

$$\gamma(z') \circ h(x_m) = \gamma(z')(z') = z.$$

Portanto,

$$z \in \text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m,$$

o que implica

$$\overline{\text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m} = \text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m,$$

ou seja,

$$\text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m$$

é fechado em $M - \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$. Assim, mostramos que

$$\text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m$$

é aberto e fechado não vazio em $M - \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$, e como $M - \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$ é conexa (pois $\dim(M) \geq 2$), segue que

$$\text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \cdot x_m = M - \{y_1, \dots, y_{m-1}\}.$$

Assim, como

$$y_m \in M - \{y_1, \dots, y_{m-1}\}, \text{ existe } h \in \text{Top}_{x_1, \dots, x_{m-1}}^{y_1, \dots, y_{m-1}}(M) \text{ tal que } h(x_m) = y_m.$$

Portanto, existe $h \in \text{Top}(M)$ tal que $h(x_i) = y_i, \forall i = 1, \dots, m$. □

B.2 Sequência exata curta para um recobrimento

O objetivo desta seção é provar que dado um G -espaço E e um recobrimento $p : E \rightarrow B$, sob certas condições, existe uma sequência exata curta

$$1 \rightarrow \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{q} G \rightarrow 1,$$

satisfazendo a condição de naturalidade (vide Teorema B.6). Além disso, mostraremos que dados G -espaços livres E_1 e E_2 tais que $p_1 : E_1 \rightarrow E_1/G$ e $p_2 : E_2 \rightarrow E_2/G$ são recobrimentos e uma aplicação G -equivariante $f : E_1 \rightarrow E_2$, se f for uma equivalência de homotopia fraca, então a aplicação $\bar{f} : E_1/G \rightarrow E_2/G$ entre os espaços de órbitas induzida por f também será uma equivalência de homotopia fraca (vide Proposição B.2). Tais resultados são interessantes para se calcular o grupo fundamental de espaços de configurações não ordenados e também serão usados na Seção 3.6.

Observação B.6. Seja E um G -espaço livre e denotemos o espaço de órbitas por $B = E/G$. Suponhamos que $p : E \rightarrow B$ seja um recobrimento. Consideremos pontos base $e_0 \in E$ e $b_0 = p(e_0) = Ge_0 \in B$, onde Ge_0 é a órbita do ponto e_0 pela ação de G , e a fibra:

$$\begin{aligned} p^{-1}(Ge_0) &= \{x \in E \mid p(x) = Ge_0\} \\ &= \{x \in E \mid Gx = Ge_0\} \\ &= \{x \in E \mid x \sim e_0\} \\ &= Ge_0, \end{aligned}$$

onde Gx denota a órbita de um ponto $x \in E$. Definimos a aplicação

$$q : \pi_1(B, b_0) \rightarrow G \text{ por } [\lambda] \mapsto g_\lambda,$$

onde $g_\lambda \in G$ é construído como segue. Para cada $[\lambda] \in \pi_1(B, b_0)$, como $\lambda : [0, 1] \rightarrow B$ é um laço baseado em b_0 , pelo Teorema do Levantamento de Caminhos^a, existe um único *levantamento* $\tilde{\lambda} : [0, 1] \rightarrow E$ para λ começando em e_0 , ou seja, $p \circ \tilde{\lambda} = \lambda$, com $\tilde{\lambda}(0) = e_0$. Note que, $\tilde{\lambda}(1) \in p^{-1}(Ge_0)$ e como a ação de G sobre E é livre, existe um único $g := g_\lambda \in G$ tal que $\tilde{\lambda}(1) = g_\lambda \cdot e_0$.

Vejamos que q é bem definida. Sejam $[\lambda], [\gamma] \in \pi_1(B, b_0)$ tais que $[\lambda] = [\gamma]$, ou seja, $\lambda, \gamma : [0, 1] \rightarrow B$ são laços em b_0 e $\lambda \simeq \gamma \text{ rel } \{0, 1\}$. Novamente, pelo fato de p ser um recobrimento, segue do *Teorema da Monodromia*^b que seus únicos levantamentos $\tilde{\lambda}, \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow E$ começando em e_0 possuem o mesmo ponto final e são caminhos homotópicos, ou seja,

$$\tilde{\lambda}(0) = \tilde{\gamma}(0) = e_0, \quad \tilde{\lambda} \simeq \tilde{\gamma} \text{ rel } \{0, 1\}, \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda}(1) = \tilde{\gamma}(1).$$

Assim, como a ação é livre, existem únicos $g_\lambda, g_\gamma \in G$ tais que $g_\lambda \cdot e_0 = \tilde{\lambda}(1) = \tilde{\gamma}(1) = g_\gamma \cdot e_0$. Portanto, $g_\lambda = g_\gamma$.

Mostraremos que q é um homomorfismo de grupos. Dados $[\gamma], [\lambda] \in \pi_1(B, b_0)$, então:

$$q([\gamma] * [\lambda]) = q[\gamma * \lambda] = g_{\gamma * \lambda}. \tag{B.4}$$

Consideremos o caminho $g_\gamma \cdot \tilde{\lambda} : [0, 1] \rightarrow E$, definido para todo $t \in [0, 1]$ por:

$$(g_\gamma \cdot \tilde{\lambda})(t) := g_\gamma \cdot \tilde{\lambda}(t).$$

Observemos que $g_\gamma \cdot \tilde{\lambda}$ é contínua, pois é dada pela composição:

$$\begin{aligned} [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{\lambda}} E \xrightarrow{\varphi_{g_\gamma}} E \\ t & \mapsto \tilde{\lambda}(t) \mapsto \varphi_{g_\gamma}(\tilde{\lambda}(t)) := g_\gamma \cdot \tilde{\lambda}(t) \end{aligned}$$

onde $\varphi : G \times E \rightarrow E$ é a ação livre de G sobre E , logo $\varphi_{g_\gamma} : E \rightarrow E$ é contínua. Por outro lado:

$$\begin{aligned} (g_\gamma \cdot \tilde{\lambda})(0) &= g_\gamma \cdot \tilde{\lambda}(0) \\ &= g_\gamma \cdot e_0 = \tilde{\gamma}(1). \\ (g_\gamma \cdot \tilde{\lambda})(1) &= g_\gamma \cdot \tilde{\lambda}(1) \\ &= (g_\gamma g_\lambda) \cdot e_0. \end{aligned}$$

Assim, como podemos considerar a concatenação dos caminhos $\tilde{\gamma}$ e $(g_\gamma \cdot \tilde{\lambda})$ e, dessa forma, obtemos o caminho:

$$\tilde{\gamma} * (g_\gamma \cdot \tilde{\lambda}) : [0, 1] \rightarrow E,$$

o qual satisfaz:

$$\tilde{\gamma} * (g_\gamma \cdot \tilde{\lambda})(0) = \tilde{\gamma}(0) = e_0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (p \circ (\tilde{\gamma} * (g_\gamma \cdot \tilde{\lambda}))) (t) &= \begin{cases} p \circ \tilde{\gamma}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}. \\ \underbrace{p \circ (g_\gamma \cdot \tilde{\lambda})(2t-1)}_{p(g \cdot x) = p(x)}, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} p \circ \tilde{\gamma}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}. \\ p \circ \tilde{\lambda}(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}. \\ \lambda(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \\ &= (\gamma * \lambda)(t). \end{aligned}$$

Assim, $\tilde{\gamma} * (g_\gamma \cdot \tilde{\lambda})$ é um levantamento para o caminho $\gamma * \lambda$ começando em e_0 . Pela unicidade do levantamento,

$$\widetilde{\gamma * \lambda} = \tilde{\gamma} * (g_\gamma \cdot \tilde{\lambda}).$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\gamma * \lambda}(1) &= (\tilde{\gamma} * (g_\gamma \cdot \tilde{\lambda}))(1) \\
 &= (g_\gamma \cdot \tilde{\lambda})(1) \\
 &= g_\gamma \cdot \tilde{\lambda}(1) \\
 &= g_\gamma(g_\lambda \cdot e_0) \\
 &= (g_\gamma g_\lambda) \cdot e_0.
 \end{aligned}$$

Logo, $g_{\gamma * \lambda} = g_\gamma g_\lambda$. De (B.4) obtemos:

$$\begin{aligned}
 q([\gamma] * [\lambda]) &= g_\gamma g_\lambda \\
 &= q[\gamma]q[\lambda].
 \end{aligned}$$

^aVide (MUNKRES, 2002), Capítulo 9, Section 54, Lema 54.1, pg. 342.

^bVide (MUNKRES, 2002), Capítulo 9, Section 54, Teorema 54.3, pg. 344.

Com as notações da Observação B.6. obtemos o seguinte resultado.

Teorema B.6. Seja E um G -espaço livre conexo por caminhos tal que a projeção $p : E \rightarrow B := E/G$ é um recobrimento. Então, existe uma seqüência exata curta

$$1 \rightarrow \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{q} G \rightarrow 1,$$

a qual é natural com respeito a quadrados comutativos, como no diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{p} & B \\
 f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\
 E' & \xrightarrow{p'} & B'
 \end{array} \tag{B.5}$$

onde p e p' são recobrimentos, com E' um G -espaço livre conexo por caminhos, $f : E \rightarrow E'$ é uma aplicação G -equivariante tal que $f(e_0) = e_1$ e

$$\bar{f} : B = E/G \rightarrow B' = E'/G$$

é a aplicação induzida por f nos espaços de órbitas. A naturalidade significa que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \pi_1(E, e_0) & \xrightarrow{p_{\#}} & \pi_1(B, b_0) & \xrightarrow{q} & G \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow \bar{f}_{\#} & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(E', e_1) & \xrightarrow{p'_{\#}} & \pi_1(B', b_1) & \xrightarrow{q'} & G \longrightarrow 1
 \end{array} \quad (\text{B.6})$$

é comutativo.

Demonstração. Vejamos que $p_{\#}$ é injetora. Seja $[\lambda] \in \pi_1(E, e_0)$ tal que $p_{\#}[\lambda] = [\bar{b}_0]$, ou seja, $[p \circ \lambda] = [\bar{b}_0]$, onde \bar{b}_0 denota o laço constante em b_0 . Assim

$$p \circ \lambda \simeq \bar{b}_0 \text{ rel}\{0, 1\} \text{ em } B.$$

Do Teorema do Levantamento de Caminhos e Monodromia, existem únicos levantamentos:

$$\widetilde{p \circ \lambda} \text{ e } \widetilde{\bar{b}_0},$$

para $p \circ \lambda$ e \bar{b}_0 , respectivamente, começando em e_0 . Além disso,

$$\widetilde{p \circ \lambda} \simeq \widetilde{\bar{b}_0} \text{ rel}\{0, 1\} \text{ em } E.$$

Mas, $\widetilde{p \circ \lambda} = \lambda$ e $\widetilde{\bar{b}_0} = \bar{e}_0$. Portanto, $[\lambda] = [\bar{e}_0]$.

Mostremos que q é sobrejetor. Dado $g \in G$, como E é conexo por caminhos, existe

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow E$$

um caminho em E unindo e_0 a $g \cdot e_0$. Então, a composição

$$\lambda := p \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow B$$

é um caminho em B , satisfazendo:

$$\begin{aligned}
 \lambda(0) &= (p \circ \gamma)(0) = p(e_0) = b_0 \text{ e} \\
 \lambda(1) &= (p \circ \gamma)(1) = p(ge_0) = G \cdot (ge_0) = G \cdot e_0 = b_0.
 \end{aligned}$$

Logo, λ é um laço em B com ponto base b_0 , ou seja, $[\lambda] \in \pi_1(B, b_0)$. Note que:

$$\widetilde{\lambda} = \widetilde{p \circ \gamma} = \gamma.$$

Então, $\widetilde{\lambda}(1) = \gamma(1) = g \cdot e_0$ e, portanto, $q[\lambda] = g$.

Resta provar que $\text{Ker}(q) = \text{Im}(p_{\#})$. Seja $[\lambda] \in \pi_1(E, e_0)$. Então:

$$(q \circ p_{\#})[\lambda] = q[p \circ \lambda] = g_{p \circ \lambda} = 1$$

A última igualdade é válida pois como $\widetilde{p \circ \lambda} = \lambda$, então:

$$(\widetilde{p \circ \lambda})(1) = \lambda(1) = e_0 = 1 \cdot e_0, \quad \text{assim, } g_{p \circ \lambda} = 1.$$

Portanto, $Im(p_{\#}) \subseteq Ker(q)$.

Por outro lado, dado $[\lambda] \in Ker(q) \subseteq \pi_1(B, b_0)$, então, $q[\lambda] = g_{\lambda} = 1$. Assim, o único levantamento $\tilde{\lambda}$ de λ começando em e_0 satisfaz

$$\tilde{\lambda}(1) = g_{\lambda} \cdot e_0 = 1 \cdot e_0 = e_0,$$

ou seja, $\tilde{\lambda}$ é um laço em E com ponto base e_0 , o que implica que

$$[\tilde{\lambda}] \in \pi_1(E, e_0) \quad \text{e} \quad p_{\#}[\tilde{\lambda}] = [p \circ \tilde{\lambda}] = [\lambda].$$

Portanto, $[\lambda] \in Im(p_{\#})$ e $Ker(q) \subset Im(p_{\#})$.

Finalmente, mostremos que vale a comutatividade do diagrama (B.6). A comutatividade do quadrado à esquerda segue da comutatividade do quadrado (B.5). Resta provar a comutatividade do quadrado à direita.

Se $\lambda : [0, 1] \rightarrow B$ é um laço em B com ponto base b_0 , ou seja, $[\lambda] \in \pi_1(B, b_0)$, então:

$$\bar{f}_{\#}[\lambda] = [\bar{f} \circ \lambda].$$

Note que se $\tilde{\lambda}$ é o único levantamento de λ começando em e_0 , então

$$f \circ \tilde{\lambda} : [0, 1] \rightarrow E'$$

é um caminho em E' com ponto base $f(e_0) = e_1$, ou seja,

$$(f \circ \tilde{\lambda})(0) = f(\tilde{\lambda}(0)) = f(e_0) = e_1.$$

Além disso,

$$\underbrace{p' \circ f \circ \tilde{\lambda}}_{\bar{f} \circ p} = \bar{f} \circ p \circ \tilde{\lambda} = \bar{f} \circ \lambda.$$

Assim, $f \circ \tilde{\lambda}$ é um levantamento para $\bar{f} \circ \lambda$, começando em e_1 . Segue da unicidade do levantamento de caminhos que

$$\widetilde{\bar{f} \circ \lambda} := f \circ \tilde{\lambda}.$$

Então, segue do fato de f ser uma aplicação G -equivariante, que:

$$g_{\bar{f} \circ \lambda} \cdot e_1 = (\widetilde{\bar{f} \circ \lambda})(1) = f \circ \tilde{\lambda}(1) = f(g_{\lambda} \cdot e_0) = g_{\lambda} \cdot f(e_0) = g_{\lambda} \cdot e_1,$$

Portanto,

$$(q' \circ \bar{f}_{\#})[\lambda] = q'[\bar{f} \circ \lambda] = g_{\bar{f} \circ \lambda} = g_{\lambda} = q[\lambda].$$

□

Corolário B.2. Seja E um G -espaço livre conexo por caminhos tal que a projeção ao quociente $p : E \rightarrow B := E/G$ é um recobrimento. Se E for simplesmente conexo, então

$$\pi_1(B) \cong G.$$

Proposição B.2. Sejam E_1, E_2 G -espaços com pontos base $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$ e $f : E_1 \rightarrow E_2$ uma aplicação G -equivariante que preserva pontos base.

(1) O diagrama

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{i_1} & E_1 & \xrightarrow{p_1} & B_1 \\ & & \downarrow f & & \downarrow \bar{f} \\ G & \xrightarrow{i_2} & E_2 & \xrightarrow{p_2} & B_2 \end{array} \quad (\text{B.7})$$

é comutativo, onde

$$i_k : G \rightarrow E_k, \quad i_k(g) := g \cdot e_k, \quad k = 1, 2$$

é a inclusão natural, $B_k := E_k/G$ é o espaço quociente, $p_k : E_k \rightarrow B_k$ é a projeção ao quociente e $\bar{f} : B_1 \rightarrow B_2$ é a induzida por f nos espaços quocientes.

(2) Suponhamos que a ação de G sobre os espaços E_1 e E_2 seja livre, com E_1 e E_2 conexos por caminhos tais que p_1 e p_2 são recobrimentos. Se f é uma equivalência de homotopia fraca, então \bar{f} também será uma equivalência de homotopia fraca.

Demonstração. Mostremos que são válidos (1) e (2).

(1) Usando a definição de i_k e o fato de f ser G -equivariante e preservar pontos base temos:

$$(f \circ i_1)(g) = f(g \cdot e_1) = g \cdot f(e_1) = g \cdot e_2 = i_2(g), \quad \forall g \in G.$$

Assim, $f \circ i_1 = i_2$ e o quadrado à esquerda do diagrama (B.7) é comutativo. Para mostrar que vale a comutatividade do quadrado à direita, dado $x \in E$,

$$(\bar{f} \circ p_1)(x) = \bar{f}(G \cdot x) = G \cdot f(x) = p_2(f(x)).$$

Assim, $\bar{f} \circ p_1 = p_2 \circ f$.

(2) Usando a naturalidade da sequência exata longa dos grupos de homotopia da fibração de Serre (Teorema 3.7), para $q \geq 2$, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \pi_q(E_1) & \xrightarrow{p_{1\#}} & \pi_q(B_1) & \xrightarrow{\partial} & 0 & \longrightarrow & \pi_{q-1}(E_1) & \longrightarrow \\
 & & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow \bar{f}_{\#} & & & & \downarrow f_{\#} & \\
 \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \pi_q(E_2) & \xrightarrow{p_{2\#}} & \pi_q(B_2) & \xrightarrow{\partial} & 0 & \longrightarrow & \pi_{q-1}(E_2) & \longrightarrow
 \end{array}$$

Aplicando o Lema dos Cinco (Corolário A.1), concluímos que $\bar{f}_{\#}$ é isomorfismo $\forall q \geq 2$.

Agora, usando a naturalidade da sequência exata curta em grupos fundamentais para um recobrimento (vide Teorema B.6), obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & \longrightarrow & \pi_1(E_1) & \xrightarrow{p_{1\#}} & \pi_1(B_1) & \xrightarrow{q_1} & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow \bar{f}_{\#} & & & & \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(E_2) & \xrightarrow{p_{2\#}} & \pi_1(B_2) & \xrightarrow{q_2} & G & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

Pelo Corolário A.1, \bar{f} induz isomorfismo entre grupos fundamentais. Além disso, como B_1 e B_2 são conexos por caminhos, então f também induz "isomorfismo" em π_0 .

Dessa forma, \bar{f} induz isomorfismos entre grupos de homotopia e, portanto, \bar{f} é uma equivalência de homotopia fraca. □

B.3 Variedades com buracos

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que o complementar de r pontos no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} tem o mesmo tipo de homotopia de um buquê de r n -esferas S^n , para todo $n + 1 \geq 2$ e para todo $r \geq 1$.

Proposição B.3. (vide (HUSSEINI, 2002, Proposition 3.1, pg. 27)) Sejam M uma variedade topológica de dimensão $n + 1 \geq 2$ e $Q_{r+1} \subseteq M$ um subconjunto discreto com $r + 1$ elementos tal que $Q_{r+1} \subseteq V \subseteq D \subseteq M$, onde D é um $(n + 1)$ -disco fechado em M e V denota seu interior. Então existe uma equivalência de homotopia

$$(M - V) \vee (S_1 \vee \dots \vee S_r) \rightarrow (M - Q_{r+1}),$$

onde S_1, \dots, S_r denotam esferas n -dimensionais.

Usando a Proposição B.3, podemos calcular o tipo de homotopia do complementar de r pontos no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} .

Corolário B.3. Para todo $n + 1 \geq 2$ e para todo $r \geq 1$,

$$\mathbb{R}^{n+1} - \{r \text{ pontos}\} \simeq \bigvee^r S^n.$$

Demonstração. Pela Proposição B.3, é suficiente mostrar que

$$\mathbb{R}^{n+1} - V \simeq S^n.$$

Definimos a aplicação $r : \mathbb{R}^{n+1} - V \rightarrow S^n$ pela expressão:

$$r(x) := \frac{x}{\|x\|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n+1} - V.$$

Assim, $r \circ i = 1_{S^n}$, onde $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - V$ é a inclusão natural. Além disso,

$$i \circ r \stackrel{H}{\simeq} 1_{\mathbb{R}^{n+1} - V},$$

com a homotopia linear $H : (\mathbb{R}^{n+1} - V) \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - V$ definida como segue:

$$H(x, t) := (1 - t) \frac{x}{\|x\|} + tx, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n+1} - V.$$

□

Referências Bibliográficas

- AGUILAR, M. et al. *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2002.
- ARNOL'D, V. I. The cohomology ring of the colored braid group. *Mathematical Notes*, Springer, v. 5, n. 2, p. 138–140, 1969.
- BENDERSKY, M. et al. The cohomology of certain function spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 326, n. 1, p. 423–440, 1991.
- M. BERGER L. KAUFFMAN, B. K. K. M. R. R. et al. *Lectures on topological fluid mechanics*. [S.l.]: Springer, 2009.
- BIRMAN, J. S. On braid groups. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Wiley Online Library, v. 22, n. 1, p. 41–72, 1969.
- BIRMAN, J. S. Braids, links and mapping class groups. Princeton Univ. Press, 1974.
- BIRMAN, J. S. et al. *Braids: Proceedings of a Summer Research Conference Held July 13-26, 1986*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1988. v. 78.
- BÖDIGHEIMER, C.-F. et al. On the homology of configuration spaces. *Topology*, Elsevier, v. 28, n. 1, p. 111–123, 1989.
- BREDON, G.-E. Introduction to compact transformation groups. Academic Press, Bolyai Janos Matematikai Tarsulat, 1976.
- BROWN, M. Locally flat imbeddings of topological manifolds. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 331–341, 1962.
- COHEN, F. et al. *Configuration Spaces and Braid Groups*. [S.l.]: Citeseer.
- COHEN, F. R. On configuration spaces, their homology, and lie algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Elsevier, v. 100, n. 1, p. 19–42, 1995.
- COHEN, F. R. Introduction to configuration spaces and their applications. In: WORLD SCIENTIFIC. *Braids*. [S.l.], 2010. p. 183–261.

- DAVIS, J. F. et al. *Lecture notes in algebraic topology*. [S.l.]: American Mathematical Society Providence, 2001. v. 35.
- DEHORNOY, P. et al. *Ordering braids*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2008.
- DIECK, T. tom. *Transformation groups*. [S.l.]: Walter de Gruyter, 1987. v. 8.
- DIECK, T. tom. *Algebraic topology*. [S.l.]: European Mathematical Society, 2008.
- FADELL, E. et al. Configuration spaces. *Math. Scand*, v. 10, n. 111-118, p. 4, 1962.
- FADELL, E. R. et al. *Geometry and topology of configuration spaces*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001.
- FOX, R. et al. The braid groups. *Mathematica Scandinavica*, JSTOR, v. 10, p. 119–126, 1962.
- FUCHS, D. et al. *Topology II: Homotopy and Homology. Classical Manifolds*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003. v. 24.
- FUKS, D. Cohomologies of the group $\cos \text{ mod } 2$. *Functional Analysis and its Applications*, Springer, v. 4, n. 2, p. 143–151, 1970.
- HATCHER, A. *Algebraic topology*. [S.l.: s.n.], 2002.
- HOVEY, M. *Model categories*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1999.
- HUSSEINI, E. F. Configuration spaces on punctured manifolds. *Journal of the Juliusz Schauder Center*, v. 20, p. 25–42, 2002.
- KAWAKUBO, K. *The theory of transformation groups*. [S.l.]: Oxford University Press, 1991.
- KIRBY, R. C. *The topology of 4-manifolds*. Springer, 1989.
- KONTSEVICH, M. Operads and motives in deformation quantization. *Letters in Mathematical Physics*, Springer, v. 48, n. 1, p. 35–72, 1999.
- KURLIN, V. et al. Computing braid groups of graphs with applications to robot motion planning. *Homology, Homotopy and Applications*, International Press of Boston, v. 14, n. 1, p. 159–180, 2012.
- LEE, J. *Introduction to topological manifolds*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. v. 940.
- LEE, J. *Introduction to Smooth Manifolds*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 218.
- LONGONI, R. et al. Configuration spaces are not homotopy invariant. *Topology*, Elsevier, v. 44, n. 2, p. 375–380, 2005.

-
- MACLANE, S. *Categories for the working mathematician*. Springer, 1971.
- MASSEY, W. S. *A basic course in algebraic topology*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1991.
- MCCLEARY, J. *A user's guide to spectral sequences*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001.
- MILGRAM, R. J. et al. The structure of deleted symmetric products. *Braids (Santa Cruz, CA, 1986)*, v. 78, p. 415–424, 1988.
- MILNOR, J. Construction of universal bundles, ii. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 430–436, 1956.
- MISHRA, R. et al. Knot theory in understanding proteins. *Journal of mathematical biology*, Springer, v. 65, n. 6, p. 1187–1213, 2012.
- MOISE, E. E. *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 47.
- MUNKRES, J. *Topologia 2E*. [S.l.: s.n.], 2002.
- MUNKRES, J. R. *Elements of algebraic topology*. [S.l.]: Addison-Wesley Reading, 1984. v. 2.
- ROBINSON, D. J. *An introduction to abstract algebra*. [S.l.]: Walter de Gruyter, 2003.
- ROKHLIN, V. et al. *Beginner's Course in Topology*. [S.l.]: Nauka, Moscow, 1977.
- ROTH, F. On the category of euclidean configuration spaces and associated fibrations. *Groups, homotopy and configuration spaces*, v. 13, p. 447–461, 2008.
- SALVATORE, P. Homotopy type of euclidean configuration spaces. *Proceedings of the 20th Winter School "Geometry and Physics"*, Circolo Matematico di Palermo, p. 161–164, 2001.
- SEGAL, G. Configuration-spaces and iterated loop-spaces. *Inventiones Mathematicae*, Springer, v. 21, n. 3, p. 213–221, 1973.
- SELICK, P. *Introduction to homotopy theory*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2008. v. 9.
- SHASTRI, A. R. *Elements of differential topology*. [S.l.]: CRC Press, 2011.
- SPANIER, E.-H. *Algebraic topology*. McGraw-Hill Book Co., Interscience John Wiley & Sons, 1966.
- STEENROD, N. E. *The topology of fibre bundles*. [S.l.]: Princeton University Press, 1951. v. 14.

THIFFEAULT, J.-L. et al. Topology, braids and mixing in fluids. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society London, v. 364, n. 1849, p. 3251–3266, 2006.

TOTARO, B. Configuration spaces of algebraic varieties. *Topology*, Elsevier, v. 35, n. 4, p. 1057–1067, 1996.

UNGAR, G. S. Countable dense homogeneity and n -homogeneity. *Fundamenta Mathematicae*, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, v. 99, n. 3, p. 155–160, 1978.

VICK, J. W. *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1994. v. 145.

WEIBEL, C. A. An introduction to homological algebra. Cambridge university press, 1994.

WESTERLAND, C. Configuration spaces in topology and geometry. *The Australian Mathematical Society*, p. 279, 2012.

WHITEHEAD, J. H. C. A certain open manifold whose group is unity. *The Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford Univ Press, n. 1, p. 268–279, 1935.

ZAPATA, C. A. I. Lusternik–schnirelmann category of the configuration space of complex projective space. In: *Topology Proceedings*. [S.l.: s.n.], 2019. v. 54, p. 103–108.

IPANAQUE ZAPATA, C. A. et al. Multitasking collision-free optimal motion planning algorithms in euclidean spaces. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, World Scientific, v. 12, n. 03, p. 2050040, 2020.

ZAPATA, C. A. I. et al. Sequential collision-free optimal motion planning algorithms in punctured euclidean spaces. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Cambridge University Press, v. 102, n. 3, p. 506–516, 2020.

ZARISKI, O. The topological discriminant group of a riemann surface of genus p . *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 59, n. 2, p. 335–358, 1937.

Índice Remissivo

- G-ação, 29
- G-conjunto, 30
- G-espaço, 30
- G-isomorfismo, 35
- R-módulo filtrado, 38
- k -esqueleto, 37
- n -ésimo functor derivado, 42
- n -conexo, 45

- aplicação G-equivariante, 35
- aplicação aberta, 34
- aplicação associação, 27
- aplicação avaliação, 23
- aplicação concatenação, 29
- aplicação de cadeias, 17
- aplicações não coincidentes, 115
- ação m -transitiva, 32
- ação efetiva, 32
- ação livre, 32
- ação propriamente descontínua, 33
- ação semi-livre, 32
- ação transitiva, 32
- ação trivial, 32

- bordo de uma variedade, 72

- característica de Euler, 128
- Categoria, 15
- categoria concreta, 20
- complexo de cadeias, 17
- conjunto G-invariante, 35
- conjunto dos pontos fixos de X pela ação de G , 31
- conjunto relativamente compacto, 24
- CW complexo, 37

- célula fechada, 36

- disco fechado em uma variedade, 83

- equivalência de categorias, 22
- equivalência de homotopia fraca, 118
- equivalência natural, 19
- espaço classificante, 45
- espaço de configurações clássicos, 50
- espaço de configurações não ordenado, 52
- Espaço de configurações ordenado, 50
- espaço de Eilenberg-MacLane, 44, 94
- espaço de órbitas, 33
- espaço localmente compacto, 24
- espaço localmente Euclideano, 60
- espaço topológico homogêneo, 143

- fibrado, 44
- fibrado n -universal, 45
- fibrado localmente trivial, 85
- fibrado principia, 45
- fibrado principal, 45
- fibrado universal, 45
- fibração, 87
- Fibração de Hurewicz, 87
- fibração de Hurewicz, 87
- Fibração de Serre, 87
- fibração de Serre, 88
- filtração crescente, 38
- filtração decrescente, 38
- functor fiel, 20
- functor inclusão, 21
- funtores de configurações, 18
- funtor, 17

- funtor completamente fiel, 21
 funtor completo, 21
 funtor contravariante, 18
 Funtor esquecimento, 20
 funtor identidade, 20
 grupo de isotropia, 31
 homeomorfismo estável, 79
 homomorfismo de Hurewicz, 142
 interior de uma variedade, 72
 isomorfismo, 16
 isomorfismo natural, 19
 isotopia, 57
 lema da cisão, 104
 levantamento de caminhos, 150
 localmente conexo por caminhos, 61
 monoide, 17
 morfismo de sequências espectrais, 40
 números de Betti, 128
 Polinômio de Poincaré, 129
 ponto de bordo, 72
 ponto fixo, 115
 ponto interior, 71
 produto semi-direto externo, 99
 propriedade do colarinho, 73, 74
 propriedade do ponto fixo, 115
 Retrato de uma Vizinhança Euclideana,
 74
 sequencia exata curta escinde, 100
 sequência de Mayer-Vietoris, 142
 sequência espectral convergente, 40
 Sequência espectral de Leray-Serre para
 Homologia, 42
 sequência espectral do primeiro qua-
 drante, 40
 sequência espectral limitada, 40
 sequência espectral do tipo homológica,
 38
 seção contínua, 106
 seção local, 106
 simplexo padrão, 37
 subcategoria, 21
 subcategoria completa, 21
 superfície topológica, 79
 suspensão não reduzida, 62
 Teorema
 de Seifert-Van Kampen, 140
 Teorema da Monodromia, 150
 Teorema dos Coeficientes Universais
 para Homologia, 43
 topologia admissível, 24
 topologia compacta-aberta, 22
 transformação natural, 19
 Variedade aberta, 73
 variedade de Whitehead, 122
 Variedade fechada, 73
 variedade topológica, 61
 variedade topológica com bordo, 71
 variedade topológica com ou sem bordo,
 73
 variedade topológica sem bordo, 73
 vizinhança de disco, 83
 órbita, 31