Notas do Curso de SMA307 - Análise I

Prof. Wagner Vieira Leite Nunes

São Carlos

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O objetivo destas notas é ser um texto de apoio para a disciplina SMA307 Análise I, que trata de conceitos relacionados com a construção do conjunto dos números reais, assim como as noções de limites, continuidade, diferenciabilidade de funções reais ou complexas de uma variável real. Trataremos também da convergência de sequências numéricas, séries numéricas e alguns tópicos relacionados com séries de potências.

Capítulo 2

Números Reais e Complexos

2.1 Os conjuntos dos números inteiros e racionais

Iniciaremos fixando a notação dos elementos que serão utilizados ao longo das notas.

Notação 2.1.1

$$\begin{aligned} &\mathbb{N} \doteq \{1, 2, 3, \cdots\} && \textit{(conjunto dos números naturais)} \\ &\mathbb{Z} \doteq \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} && \textit{(conjunto dos números inteiros)} \\ &\mathbb{Q} \doteq \left\{\frac{p}{q}\ ;\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\} && \textit{(conjunto dos números racionais)} \end{aligned}$$

Deixaremos a cargo do leitor o seguinte exercício.

Exercício 2.1.1 *Os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis.*

2.2 Um exemplo importante e consequências

Um exemplo importante que motivará a introdução dos números irracionais é dado pelo:

Exemplo 2.2.1 *A equação*

$$x^2 = 2. \tag{2.1}$$

NÃO *tem solução no conjunto $\mathbb{Q}$.*

Demonstração:
De fato, se existisse, esta solução em $\mathbb{Q}$ ela devferia ser da forma

$$\frac{p}{q}, \quad \text{onde} \quad p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que os números inteiros p e q são primos entre si, ou seja, que a fração $\frac{p}{q}$ é irredutível.

Isto é equivalente a dizer que p e q não são ambos pares, pois se fossem a fração $\frac{p}{q}$ seria redutível, o que seria um absurdo.

Fazendo

$$x \doteq \frac{p}{q}$$

e substituindo-se na equação (2.1) obteremos

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = 2q^2. \tag{2.2}$$

Logo p^2 será um número par.

Afirmamos que o número p deverá ser um número par.

De fato, pois se o número inteiro p fosse ímpar então poderíamos escrevê-lo da seguinte forma:

$$p = 2m + 1, \quad \text{para algum} \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Deste modo teríamos

$$p^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1,$$

o que implicaria que o número p^2 seria ímpar, o que contraria o fato que p^2 é um número par.

Portanto p é um número par.

Como o número p é um número par, segue que o número p^2 será divisível por 4 o que implicará, por (2.2), que $2q^2$ é divisível por 4, ou ainda, que q^2 é divisível por 2.

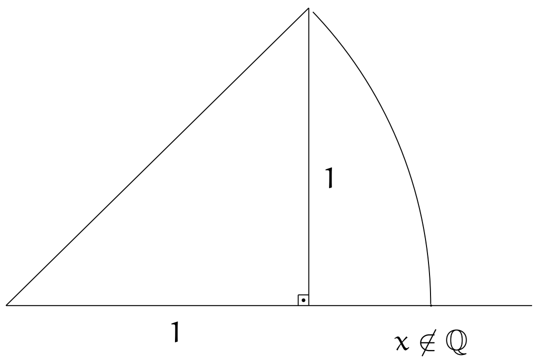
Logo teremos que q^2 será um número par, que pela afirmação acima, implicará q é um número par.

Conclusão, os números p e q são ambos pares, o que implicará que a fração $\frac{p}{q}$ não é irredutível, o que contrairia o fato que ela foi tomada irredutível.

Portanto, a equação $x^2 = 2$ não tem solução no conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 2.2.1 *O exemplo acima nos diz que o comprimento hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos de comprimentos unitários* **<u>NÃO</u>** *é um valor racional.*



$$A = \left\{ p \in \mathbb{Q} \; : \; 0 \leq p \text{ e } p^2 < 2 \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ p \in \mathbb{Q} \; : \; 0 \leq p \text{ e } p^2 > 2 \right\}. \tag{2.3}$$

*Os conjuntos A e B **não** têm máximo e mínimo em $\mathbb{Q}$, respectivamente.*

Resolução:

Iniciaremos mostrando que para todo $p \in A$, podemos encontrar $q \in A$ tal que $p < q$.

Para isto associaremos a cada rational p o número

$$q \doteq p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{p^2 + 2p - (p^2 - 2)}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2}. \tag{2.4}$$

Notemos que $q \in \mathbb{Q}$ e além disso, como $p \in A$, segue que

$$q = p - \underbrace{\frac{\overbrace{p^2 - 2}^{\overset{p \in A}{<} 0}}{p + 2}}_{>0} > p.$$

Por outro lado

$$q^2 \overset{(2.4)}{=} \frac{(2p + 2)^2}{(p + 2)^2} = \frac{4p^2 + 8p + 4}{(p + 2)^2} = \frac{2(p^2 - 2) + 2(p + 2)^2}{(p + 2)^2} = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2} + 2, \tag{2.5}$$

ou seja,

$$q^2 - 2 = \frac{2\overbrace{(p^2 - 2)}^{\overset{p \in A}{<} 0}}{\underbrace{(p + 2)^2}_{>0}} < 0. \tag{2.6}$$

Logo

$$p < q, \quad q \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad q^2 < 2,$$

ou seja,

$$q \in A \quad \text{e} \quad p < q,$$

mostrando que o conjunto A não tem máximo em $\mathbb{Q}$.

Mostraremos a seguir que para todo $p \in B$, podemos encontrar $q \in B$ tal que $q < p$.

Notemsoq que se $p \in B$ então $p^2 - 2 > 0$, assim teremos

$$q = p - \underbrace{\frac{\overbrace{p^2 - 2}^{>0}}{p + 2}}_{<0} < p \quad \text{e} \quad q^2 - 2 \overset{(2.5)}{=} \frac{2\overbrace{(p^2 - 2)}^{\overset{p \in B}{>} 0}}{(p + 2)^2} > 0.$$

o que implicará que

$$q \in \mathbb{Q}, \quad q < p \quad \text{e} \quad q^2 > 2,$$

ou seja,

$$q \in B \quad \text{e} \quad q < p,$$

mostrando que o conjunto B não tem mínimo em $\mathbb{Q}$.

Observação 2.2.2 *Os exemplos acima nos mostram que o conjunto dos números racionais tem alguns "buracos", mesmo tendo a propriedade que entre dois raionais sempre tem um racional, mais precisamante se*

$$p, q \in \mathbb{Q} \quad \textit{e} \quad p < q \quad \textit{então} \quad \frac{p + q}{2} \in \mathbb{Q} \quad \textit{e} \quad p < \frac{p + q}{2} < q.$$

Como veremos mais adiante o conjunto dos números reais virá para "tapar esses buracos".

O que faremos é construir um conjunto (que será o conjunto dos números reais) que venha a resolver, entre outros, os problemas acima.

2.3 Conjuntos Ordenados

Para resolvermos os problemas acima (isto é, construir o conjunto dos números reais) precisaremos de algumas definições, a saber:

Definição 2.3.1 *Seja S um conjunto não vazio.*

Uma **ordem total** *em S é uma relação, que indicaremos por $<$, que tem as seguintes propriedades:*

(i) *Se $x, y \in S$ então uma, e somente uma, das situações poderá ocorrer:*

$$\text{ou} \quad x < y, \quad \text{ou} \quad x = y, \quad \text{ou} \quad y < x.$$

(ii) *Se $x, y, z \in S$ satisfazem $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.*

Observação 2.3.1

1. *A relação "$x < y$" pode ser lida como "x é menor que y".*
2. *Dados $x, y \in S$, diremos que* **x é menor ou igual a y**, *denotando por $x \leq y$, se $x < y$ ou se $x = y$.*

Definição 2.3.2 *Um conjunto S munido uma ordem total será dito* **conjunto totalmente ordenado**.

Observação 2.3.2 *Lembremos do* **Axioma da existência dos números positivos***:*

Exite um conjunto não vazio $P \subseteq \mathbb{Q}$ que tem as seguintes propriedades:

1. *Se $x \in \mathbb{Q}$ ou $x \in P$, ou $-x \in P$ ou $x = 0$;*
2. *Se $x, y \in P$ então $(x + y) \in P$;*
3. *Se $x, y \in P$ então $(x \cdot y) \in P$.*

O conjunto P será denominado **conjunto dos números positivos de $\mathbb{Q}$**.

Exercício 2.3.1 *O conjunto $\mathbb{Q}$ é um conjunto totalmente ordenado com a ordem $p < q$ se, e somente se, $q - p \in P$.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Podemos agora introduzir a:

Definição 2.3.3 *Sejam $(S, <)$ um conjunto totalmente ordenado e $E \subseteq S$, não vazio.*

Se existir $s \in S$ tal que

$$e \leq s, \quad \text{para todo} \quad e \in E,$$

diremos que o conjunto E é **limitado superiormente**.

Neste caso o elemento $\underline{s}$ será dito **limitante(ou cota) superior** *do conjunto E .*

De modo semelhante, se existir $s \in S$ tal que

$$e \geq s, \quad \text{para todo} \quad e \in E,$$

diremos que o conjunto E é **limitado inferiormente**.

Neste caso o elemento $\underline{s}$ será dito **limitante (ou cota) inferior** *do conjunto E .*

Diremos que E é **limitado** *se for limitado superiormente e inferiormente.*

Exemplo 2.3.1 *Os conjuntos A e B do Exemplo (2.2.2) são limitados superiormente e inferiormente, respectivamente.*

Resolução:

De fato, no caso do conjunto A temos que $s = 2$ é um limitante superior e no caso do conjunto B, teremos que $s = 1$ é um limitante inferior.

Observação 2.3.3 *Observemos que no Exemplo (2.2.2), o conjunto formado por todos os limitantes superiores de A é o conjunto B.*

Por outro lado, o conjunto formado por todos os limitantes inferiores de B são é o conjunto A.

Definição 2.3.4 *Sejam $(S, <)$ um conjunto totalmente ordenado e $E \subseteq S$, um subconjunto limitado superiormente.*

Suponhamos que exista $s_o \in S$ com as seguintes propriedades:

(i) *s_o é um limitante superior do conjunto E;*

(ii) *s_o é o menor com a propriedade acima, isto é, se $s < s_o$ então $\underline{s}$ não será limitante superior do conjunto E.*

Neste caso diremos que s_o é o <u>**menor limitante superior**</u> *do conjunto E, ou ainda, que ele é o* <u>**supremo**</u> *do conjunto E e será denotado por $\sup(E)$, isto é,*

$$\sup(E) \doteq s_o.$$

De modo análogo, suponhamos que $E \subseteq S$ seja um subconjunto limitado inferiormente e que exista $s_1 \in S$ com as seguintes propriedades:

(i) *s_1 é um limitante inferior do conjunto E;*

(ii) *s_1 é o maior com a propriedade acima, isto é, se $s_1 < s$ então $\underline{s}$ não será limitante inferior do conjunto E.*

Neste caso diremos que s_1 é o <u>**maior limitante inferior**</u> *do conjunto E, ou ainda, que ele é o* <u>**ínfimo**</u> *do conjunto E e será denotado por $\inf(E)$, isto é,*

$$\inf(E) \doteq s_1.$$

Observação 2.3.4 *Um modo equivalente de reescrever as definições acima é:*

1. *$s_o = \sup(E)$ se, e somente se,*

   (i) *s_o é um limitante superior do conjunto E;*

   (ii) *Se $s \in S$ é um limitante superior do conjunto E então*

   $$s_o \leq s.$$

2. *$s_1 = \inf(E)$ se, e somente se,*

   (i) *s_1 é um limitante inferior do conjunto E;*

   (ii) *Se $s \in S$ é um limitante inferior do conjunto E então*

   $$s \leq s_1.$$

Exemplo 2.3.2 *Os conjuntos* A *e* B *do Exemplo* (2.2.2) *não possuem supremo e ínfimo em* $\mathbb{Q}$*, respectivamente, pois o menor e o maior limitantes superior e inferior dos conjuntos* A *e* B*, respectivamente, não existem (ou melhor não estarão em* $\mathbb{Q}$ *quando construirmos o conjunto dos números reais).*

Podemos agora considerar conjuntos que têm a seguinte propriedade:

Definição 2.3.5 *Diremos que o conjunto totalmente ordenado* $(S, <)$ *tem a* **propriedade do menor limitante superior** *se todo subconjunto* $E \subseteq S$*, não vazio, limitado superiomente admite a existência do supremo em* S*, isto é, existe* $\sup(E) \in S$.

De modo análogo, diremos que o conjunto totalmente ordenado $(S, <)$ *tem a* **propriedade do maior limitante inferior** *se todo subconjunto* $E \subseteq S$*, não vazio, limitado inferiormente admite a existência do ínfimo em* S*, isto é, existe* $\inf(E) \in S$.

Observação 2.3.5

1. *O conjunto* $\mathbb{Q}$ *não possui nenhuma das duas propriedades acima.*

   Para ver isto basta considerar os conjuntos A *e* B *do Exemplo* (2.2.2) *que não tem supremo ou ínfimo em* $\mathbb{Q}$*, respectivamente.*

2. *Na situação da Definição* (2.3.4)*, se existe* $s_0 = \sup(E)$*, este* **não precisa, necessariamente***, pertencer ao conjunto* E.

   De modo semelhante, se existe $s_1 = \inf(E)$*, este* **não precisa, necessariamente***, pertencer ao conjunto* E.

   Para ver isto basta tomar, por exemlo, $E \doteq \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ *(com* $S \doteq \mathbb{Q}$*).*

   Neste caso $\sup(E) = 0$ *(verifique!) e* 0 **não** *pertence ao conjunto* E.

3. *Por outro lado, see considerarmos, por exemplo,* $E \doteq \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$ *(com* $S \doteq \mathbb{Q}$*) então* $\sup(E) = 0$ *e neste caso* 0 *pertence ao conjunto* E.

Exercício 2.3.2 *Sejam* $S \doteq \mathbb{Q}$ *munido da ordem total usual de* $\mathbb{Q}$ *e* $E \doteq \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Mostre que $\sup(E) = 1 \in E$ *e* $\inf(E) = 0 \notin E$.

Podemos agora enunciar e demonstrar o:

Teorema 2.3.1 *Suponhamos que* $(S, <)$ *é um conjunto totalmente ordenado que possue a propriedade do menor limitante superior e um subconjunto* $B \subseteq S$*, não vazio e limitado inferiormente.*

Considere L *o conjunto formado por todos os limitantes inferiores do conjunto* B.

Então $\sup(L)$ *e* $\inf(B)$ *existem em* S *e*

$$\sup(L) = \inf(B).$$

Em particular, S *também possui a propriedade do maior limitante inferior.*

Demonstração:

Como B é limitado inferiormente temos que o conjunto L é não vazio.

Lembremos que

$$L = \{l \in S \ : \ l \leq b, \text{ para todo } b \in B\}.$$

Assim $b \in B$ é um limitante superior de L, ou seja, o conjunto L é limitado superiormente.

Da hipótese sobre S segue que existe $\sup(L)$ em S.

Mostremos que o conjunto B possue ínfimo e que este é igual a $\sup(L)$, isto é,

$$\inf(B) = \sup(L).$$

Observemos que se $x < \sup(L)$, então $\underline{x}$ não poderá ser um limitante superior do conjunto L, pois $\sup(L)$ é o menor limitante superior do conjunto L.

Assim $x \notin B$. (*)

De fato, caso contrário, se $x \in B$ então $\underline{x}$ seria limitante superior do conjunto L, o que seria um absurdo!

Com isto segue que

$$\sup(L) \leq b \quad \text{para todo} \quad b \in B.$$

Logo, da definição do conjunto L segue que $\sup(L) \in L$, isto é, $\sup(L)$ é um limitante superior do conjunto L que pertence a L, ou seja,

$$\sup(L) \leq b, \quad \text{para todo} \quad b \in B,$$

isto é, $\sup(L)$ é limitante inferior do conjunto B.

Notemos que se $y > \sup(L)$ teremos que $y \notin L$, isto é, então y não será limitante inferior de B.

Portanto $\sup(L)$ é o maior limitante inferior do conjunto B, isto é,

$$\inf(B) = \sup(L),$$

completando a demonstração do resultado.

□

2.4 Corpos

A seguir relembraremos algumas noções de Álgebra que serão úteis no decorrer desta seção.

Definição 2.4.1 *Um* **corpo** *é um conjunto não vazio* F, *munido de duas operações, que indicaremos por*

$$+ : F \times F \to F \quad e \quad \cdot : F \times F \to F,$$

que chamaremos de **adição e multiplicação**, *respectivamente, que têm as seguintes propriedades:*

(A1) *Fechamento (da adição): se* $x, y \in F$ *então*

$$x + y \doteq +(x, y) \in F.$$

(A2) *Comutativa (da adição): se* $x, y \in F$ *teremos*

$$x + y = y + x.$$

(A3) *Associativa (da adição): se* $x, y, z \in F$ *teremos*

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(A4) *Elemento neutro (da adição): existe um elemento, denominado* **elemento neutro da adição** *e indicado por* 0, *que pertence a* F, *de modo que para todo* $x \in F$ *teremos*

$$x + 0 = x\,.$$

(A5) *Elemento oposto (da adição): dado* $x \in F$ *existe um elemento, denominado* **elemento oposto de** x *e indicado por* $-x$, *que pertence a* F, *tal que*

$$x + (-x) = 0\,.$$

(M1) *Fechamento (da multiplicação): Se* $x, y \in F$ *então*

$$x \cdot y \doteq \cdot(x\,, y) \in F\,.$$

(M2) *Comutativa (da multiplicação): se* $x, y \in F$ *teremos*

$$x \cdot y = y \cdot x\,.$$

(M3) *Associativa (da multiplicação): se* $x, y, z \in F$ *teremos*

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\,.$$

(M4) *Elemento neutro (da multiplicação): existe um elemento, denominado* **elemento neutro da multiplicação** *e indicado por* 1, *que pertence a* F, *tal que, se* $x \in F$ *teremos*

$$x \cdot 1 = x\,.$$

(M5) *Elemento inverso (da multiplicação): dado* $x \in F$, $x \neq 0$ *existe um elemento, denominado* **elemento inverso de** x *e indicado por* x^{-1}, *pertencente a* F, *tal que*

$$x \cdot (x^{-1}) = 1\,.$$

(D) *Distributiva (da multiplicação em relação à adição): se* $x, y, z \in F$ *teremos*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\,.$$

Neste caso denotaremos o corpo por $(F, +, \cdot)$.

Notação 2.4.1

1. *Se* $(F, +, \cdot)$ *é um corpo, denotaremos por:*

$$\begin{aligned} & x - y \doteq x + (-y) \\ & x^2 \doteq x \cdot x, \quad x^3 \doteq x \cdot x \cdot x, \cdots \\ & 2x \doteq x + x, \quad 3x \doteq x + x + x, \cdots \\ & \frac{x}{y} \doteq x \cdot y^{-1}, \quad \text{se} \quad y \neq 0. \end{aligned}$$

2. *O conjunto dos números racionais* $\mathbb{Q}$ *é um corpo com as operações usuais de adição e multiplicação de números racionais.*

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor

3. *Notemos que soma e multiplicação, oposto e inverso (se for não nulo) de números racionais é um número racional.*

Para um corpo em geral temos as seguintes propriedades:

Proposição 2.4.1 *Se* $(F, +, \cdot)$ *é um corpo temos as seguintes as propriedades para a adição:*

(a) *Lei do cancelamento da adição: se* $x, y \in F$ *e*

$$x + y = x + z, \quad \textit{então} \quad y = z\,.$$

(b) *Unicidade do elemento neutro da adição: se* $x, y \in F$ *são tais*

$$x + y = x, \quad \textit{então} \quad y = 0\,.$$

(c) *Unicidade do elemento oposto da adição: se* $x, y \in F$ *são tais que*

$$x + y = 0, \quad \textit{então} \quad y = -x.$$

(d) *Se* $x \in F$ *então*

$$-(-x) = x\,.$$

Demonstração:

De **(a)**:

Se $x + y = x + z$ então, dos axiomas da adição, segue que:

$$y = 0 + y = (-x + x) + y = -x + \underbrace{(x + y)}_{=x+z} = -x + (x + z) = (-x + x) + z = 0 + z = z,$$

ou seja, $y = z$, como queríamos mostrar.

De **(b)**:

Basta tomar $z = 0$ em (a) (verifique!).

De **(c)**:

Basta tomar $z = -x$ em (a) (verifique!).

De **(d)**:

Como $-x + x = 0$, tomando-se $x = -x$ e $y = x$ em (c) obtemos (d) (verifique!).

□

Observação 2.4.1 *Notemos que na demostração da Proposição acima só utilizamos os axiomas (A1) até (A5).*

Para a multiplicação temos a:

Proposição 2.4.2 *Se* $(F, +, \cdot)$ *é um corpo temos as seguinte propriedades da multiplicação:*

(a) *Lei do cancelamento da multiplicação: se* $x, y \in F$*, com* $x \neq 0$*, são tais que*

$$x \cdot y = x \cdot z, \quad \textit{então} \quad y = z\,;$$

(b) *Unicidade do elemento neutro da multiplicação: se* $x, y \in F$ *são tais que* $x \neq 0$ *e*

$$x \cdot y = x, \quad \textit{então} \quad y = 1\,;$$

(c) *Unicidade do elemento inverso da multiplicação: se* $x, y \in F$ *são tais que* $x, y \neq 0$ *e*

$$x \cdot y = 1, \quad \textit{então} \quad y = x^{-1};$$

(d) *Se* $x \neq 0$*, temos*

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x.$$

Demonstração:

A demonstração é semelhante a da Proposição anterior e será deixada como exercício para o leitor.

□

Temos também a:

Proposição 2.4.3 *Se* $(F, +, \cdot)$ *é um corpo então:*

(a) *Para todo* $x \in F$ *teremos*

$$0 \cdot x = 0.$$

(b) *Se* $x, y \in F$ *são tais que* $x, y \neq 0$ *então*

$$x \cdot y \neq 0,$$

isto é, o corpo $(F, +, \cdot)$ *não tem divisores de zero.*

(c) *Se* $x, y \in F$ *teremos*

$$(-x) \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y).$$

(d) *Se* $x, y \in F$ *então*

$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

Demonstração:

De **(a)**:

Como

$$0 \cdot x + 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x,$$

segue, da Proposição (2.4.1) item (b) (unicidade do elemento neutro da adição), que

$$0 \cdot x = 0,$$

como queríamos mostrar.

De **(b)**:

Suponhamos, por absurdo, que

$$x \cdot y = 0 \quad \text{com} \quad x, y \neq 0.$$

Logo, das propriedades associativa e comutativa da multiplicação, segue que:

$$1 = \left(\overbrace{x^{-1} \cdot x}^{=1}\right) \cdot \left(\overbrace{y^{-1} \cdot y}^{=1}\right) = \left(y^{-1} \cdot x^{-1}\right) \cdot (\overbrace{x \cdot y}^{=0}) = \left(y^{-1} \cdot x^{-1}\right) \cdot 0 = 0,$$

onde na última igualdade utilizamos (a), ou seja, $1 = 0$, o que é um absurdo.

Logo $x \cdot y \neq 0$, como queríamos mostrar.

De (c):
Da propriedade distributiva e do item (a) teremos que

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = (-x + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

Logo, da Proposição (2.4.1) item (c) segue que

$$(-x) \cdot y = -(x \cdot y),$$

como queríamos mostrar.
A outra igualdade segue de modo análogo e será deixada como exercício para o leitor.
De (d):
Observemos que, do item (c) e da Proposição (2.4.1) item (d), teremos

$$(-x) \cdot (-y) = -[x \cdot (-y)] = -[-(x \cdot y)] = x \cdot y,$$

como queríamos mostrar, completando a demonstração do resultado.

□

Definição 2.4.2 *Definimos um* **corpo ordenado** *como sendo um corpo* $(F, +, \cdot)$ *que também é um conjunto totalmente ordenado por uma relação de ordem total, que indicaremos por* $<$*, que satisfaz as seguintes condições:*

(i) *Se* $y, z \in F$ *são tais que*

$$y < z, \quad \textit{então} \quad x + y < x + z \ \textit{para todo} \ x \in F;$$

(ii) *Se* $x, y \in F$ *satisfazem*

$$x, y > 0, \quad \textit{então} \quad x \cdot y > 0.$$

Se $x \in F$ *é tal que* $x > 0$ *diremos que* x *é* **positivo***, por outro lado, se* $x < 0$ *diremos que* x *é* **negativo***.*

Exemplo 2.4.1 *Um exemplo de corpo ordenado é o conjunto dos números racionais* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *munido da relação de ordem usual.*

Com isto temos a:

Proposição 2.4.4 *Seja* $(F, +, \cdot, <)$ *um corpo ordenado. Então:*

(a) *Se* $x \in F$ *satisfaz*

$$x > 0, \quad \textit{se, e somente se,} \quad -x < 0.$$

Por outro lado, se

$$x < 0, \quad \textit{se, e somente se,} \quad -x > 0.$$

(b) *Se* $x, y, z \in F$ *satisfazem*

$$x > 0 \quad e \quad y < z, \quad \textit{então} \quad x \cdot y < x \cdot z.$$

(c) *Se* $x, y, z \in F$ *satisfazem*

$$x < 0 \quad e \quad y < z, \quad \textit{então} \quad x \cdot y > x \cdot z.$$

(d) *Se* $x \in F$ *satisfaz*

$$x \neq 0, \quad \textit{então} \quad x^2 > 0\,.$$

Em particular, $1 > 0$*;*

(e) *Se* $x, y \in F$ *satisfazem*

$$0 < x < y, \quad \textit{então} \quad 0 < y^{-1} < x^{-1}\,.$$

Demonstração:

De **(a):**

Se $x > 0$ então, da Definição de corpo ordenado item (i), segue que

$$0 = -x + x \overset{x>0}{>} -x + 0 = -x,$$

ou seja, $-x < 0$.

A recíproca é semelhante e será deixada como exercício para o leitor.

Por outro lado, se $x < 0$, também da Definição de corpo ordenado item (i), segue que

$$0 = -x + x \overset{x<0}{<} -x + 0 = -x,$$

isto é,

$$-x > 0.$$

A recíproca é semelhante e será deixada como exercício para o leitor.

Como isto completamos a demonstração do item.

De **(b):**

Como $z > y$, da Definição de corpo ordenado item (i), segue que

$$z - y \overset{z>y}{>} y - y = 0.$$

Como $x > 0$, da Definição de corpo ordenado item (ii), segue que

$$x \cdot (z - y) > 0. \tag{2.7}$$

Portanto, da Definição de corpo ordenado item (i), teremos

$$\begin{aligned} x \cdot z = x \cdot z + 0 = x \cdot z + (\overbrace{-x \cdot y + x \cdot y}^{=0}) &= (x \cdot z - x \cdot y) + x \cdot y \\ = x \cdot (z - y) + x \cdot y &\overset{(2.7)}{>} 0 + x \cdot y = x \cdot y, \end{aligned} \tag{2.8}$$

ou seja,

$$x \cdot z > x \cdot y,$$

completando a demonstração do item.

De **(c):**

Segue do item (b), da Proposição (2.4.3) item (c), do item que

$$-[x \cdot (z - y)] \overset{\text{Prop. (2.4.3) item (c)}}{=} (\underbrace{-x}_{\overset{\text{item (a)}}{>} 0}) \cdot (\underbrace{z - y}_{>0}) \overset{\text{item (b)}}{>} 0.$$

Logo, do item (a), segue que

$$\underbrace{x \cdot (z - y)}_{x \cdot z - x \cdot y} < 0, \qquad \text{ou ainda,} \qquad x \cdot z < x \cdot y,$$

completando a demonstração do item.

De **(d):**

Se $x > 0$, da definição de corpo ordenado item (ii), segue que

$$x^2 = x \cdot x > 0.$$

Se $x < 0$ então, do item (a), teremos que $-x > 0$ e assim, do que provamos acima, deveremos ter

$$(-x)^2 > 0.$$

Mas

$$(-x)^2 = x^2, \qquad \text{logo} \qquad x^2 > 0.$$

Notemos que, pelo que acabamos de demonstrar, teremos

$$1 = 1^2 > 0,$$

completando a demonstração do item.

De **(e):**

Lembremos que $y \cdot y^{-1} = 1 > 0$.

Logo

$$y^{-1} > 0.$$

De fato, se

$$y^{-1} \leq 0, \qquad \text{como} \qquad y > 0,$$

teríamos, pelo item (c), que

$$\overbrace{y \cdot y^{-1}}^{=1} \leq 0,$$

ou ainda $1 \leq 0$, um absurdo!.

De modo análogo, mostra-se que $x^{-1} > 0$.

Multiplicando-se ambos os lados da desigualdade

$$0 < x < y \qquad \text{por} \qquad x^{-1} \cdot y^{-1}$$

e utilizando-se o item (b), obteremos

$$\underbrace{(x^{-1} \cdot y^{-1}) \cdot 0}_{=0} < \underbrace{(x^{-1} \cdot y^{-1}) \cdot x}_{=y^{-1}} < \underbrace{(x^{-1} \cdot y^{-1}) \cdot y}_{=x^{-1}},$$

ou seja,

$$0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x},$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

Um outro modo equivalente de encontrarmos o supremo ou o ínfimo de um subconjunto de um corpo ordenado (caso eles existam) é dado pela:

Proposição 2.4.5 *Sejam* $(S, <)$ *um conjunto totalmente ordenado,* $E \subseteq S$ *um subconjunto limitado superiormente.*

Temos que

1. $s_o = \sup(E)$ *se, e somente se,*

   (i') s_o *é limitante superior do conjunto* E*;*

   (ii') *Dado* $0 < \varepsilon$*, podemos encontrar* $e \in E$ *tal que*

$$s_o - \varepsilon < e \leq s_o.$$

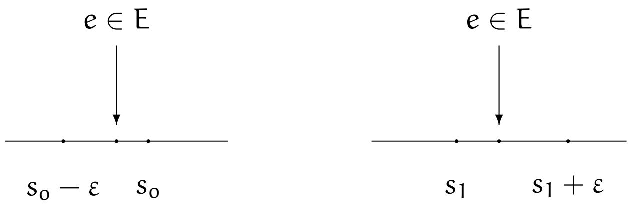
2. *De modo análogo,* $s_1 = \inf(E)$ *se, e somente se,*

   (i") s_1 *é limitante inferior do conjunto* E*;*

   (ii") *Dado* $0 < \varepsilon$*, podemos encontrar* $e \in E$ *tal que*

$$s_1 < e \leq s_1 + \varepsilon.$$

As figuras abaixo ilustrama as situações acima.



Demonstração:

Faremos a demonstração do caso do supremo.

A demonstração do caso do ínfimo é semelhante e será deixado como exercício para o leitor.

Notemos que (i') é o mesmo que (i).

Logo basta mostrar que valendo (i) (ou (i')), teremos que (ii) é equivalente a (ii').

Suponhamos que (ii) ocorrer.

Dado $0 < \varepsilon$ temos que

$$s \doteq s_o - \varepsilon < s_o.$$

Logo s **não poderá** ser limitante superior do conjunto E, pois s_o é o menor limitante superior do conjunto E.

Assim deve existir $e \in E$ tal que

$$s_o - \varepsilon < e$$

e $e \leq s_o$, ou seja vale (ii').

Suponhamos agora que (ii') ocorre e mostremos que (ii) ocorrerá.

Para isto seja $s \in S$ tal que $s < s_o$.

Mostraremos que s **não poderá** ser limitante superior do conjunto E e assim s_o será o menor limitante superior do conjunto E, isto é,

$$s_o = \sup(E).$$

Consideremos

$$\varepsilon \doteq s_o - s > 0.$$

De (ii') segue que existe $e \in E$ tal que

$$s_o - \underbrace{\varepsilon}_{=s_o - s} < e \leq s_o,$$

ou seja,

$$\overbrace{s_o - (s_o - s)}^{=s} < e,$$

para algum $e \in E$, ou ainda,

$$s < e, \quad \text{para algum} \quad e \in E.$$

Logo $\underline{s}$ não poderá ser limitante superior do conjunto E, ou seja, s_o é o menor limitante inferior do conjunto E, isto é, (ii) ocorrerá, completando a demonstração.

□

2.5 O Corpo dos Números Reais

O objetivo desta seção é estabelecer um resultado que garanta a existência de um corpo ordenado (que será indicado por $\mathbb{R}$) que contenha o conjunto dos racionais e que resolva o problema dos "buracos" encontrados no conjunto dos números racionais, isto é, em $\mathbb{Q}$, exibidos no início do capítulo.

Os elementos de $\mathbb{R}$ serão certos subconjuntos de $\mathbb{Q}$ denominados por <u>cortes</u>, mais precisamente:

Definição 2.5.1 *Um <u>corte</u> de $\mathbb{Q}$ é um subconjunto $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ que tem as seguintes propriedades:*

(I) $\alpha \neq \emptyset$ *e* $\alpha \neq \mathbb{Q}$*;*

(II) *Se* $a \in \alpha$ *e* $q \in \mathbb{Q}$ *satisfaz*

$$q < a, \quad \textit{então} \quad q \in \alpha.$$

;

(III) *Se* $a \in \alpha$ *então existe*

$$b \in \alpha \quad \textit{tal que} \quad a < b.$$

Observação 2.5.1

1. *Observemos que dado* $a \in \mathbb{Q}$*,*

$$\alpha \doteq \{p \in \mathbb{Q} \ ; \ p < a\}$$

é um corte em $\mathbb{Q}$*, isto é, o conjunto formado por todos os cortes de* $\mathbb{Q}$ *é não vazio.*

2. *Se* α *é um corte de* $\mathbb{Q}$*,* $w \in \mathbb{Q}$ *com* $w > 0$*, afirmamos que existe* $n \in \mathbb{Z}^+$ *tal que*

$$n \cdot w \in \alpha \quad e \quad (n+1) \cdot w \notin \alpha,$$

isto é, existe um maior múltiplo inteiro de $\underline{w}$ *que pertence a* α*, a saber,* $n \cdot w$*, e um menor múltiplo de* $\underline{w}$ *que não pertence a* α*, a saber,* $(n+1) \cdot w$*.*

A demonstração desse fato será deixada como exercício para o leitor.

3. *A propriedade acima segue do fato que o conjunto dos racionais é um* **<u>corpo arquimediano</u>***, ou seja, é um corpo totalmente ordenado, que indicaremos por* $(F, +, \cdot, <)$*, que satisfaz uma das três afirmações equivalentes:*

(i) F *não é limitado superiormente;*

(ii) *dados* $a, b \in F$, *com* $a > 0$, *podemos encontrar* $n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n \cdot a > b;$$

(iii) *dado* $a > 0$ *em* F, *podemos encontrar* $n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$0 < n^{-1} < a.$$

4. *Observemos que, em particular, (i) é simples de mostrar para o corpo ordenado dos números racionais* $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$.

Notação 2.5.1 *No que segue, as letras* $p, q, r, \cdots$ *denotarão* **números racionais** *e as letras gregas* $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ *denotarão os* **cortes de** $\mathbb{Q}$.

Com isto temos o seguinte resultado que garante a existência do conjunto dos números reais, a saber:

Teorema 2.5.1 *Existe um corpo totalmente ordenado, que indicaremos por* $\mathbb{R}$, *denominado* **corpo dos números reais**, *que tem a propriedade do menor limitante superior e que contém* $\mathbb{Q}$ *como um sub-corpo.*

Demonstração:

Consideremos o conjunto formado por todos os cortes de $\mathbb{Q}$, que denotaremos por $\mathbb{R}$.

Vimos, na Observação acima item 1., que $\mathbb{R} \neq \emptyset$.

A demonstração da existência do corpo ordenado $\mathbb{R}$ à partir do conjunto $\mathbb{Q}$ será dividida em 9 etapas.

Vamos descrever cada uma das etapas:

1.a: Enunciaremos e provaremos duas propriedades de cortes que serão úteis;

2.a: Definiremos uma relação de ordem total, que indicaremos por $<$, em $\mathbb{R}$;

3.a: Mostraremos que $(\mathbb{R}, <)$ terá a propriedade do menor limitante superior;

4.a: Definiremos uma operação de adição, que indicaremos por $\underline{+}$, em $\mathbb{R}$ que satisfaz as propriedades (A1) até (A5);

5.a: Observaremos que, neste caso, valerão as propriedades da Proposição (2.4.1) em $\mathbb{R}$, com a operação de adição definida acima, bem como a propriedade (i) da Definição (2.4.2) de corpo ordenado;

6.a: Definiremos uma operação de multiplicação, que indicaremos por $\underline{\cdot}$, em

$$\mathbb{R}^+ \doteq \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > O^*\}$$

que irá satisfazer as propriedades (M1) até (M5) e (D), onde $O^* \in \mathbb{R}$ será o elemento neutro da adição;

7.a: Completaremos a definição da operação de multiplicação em $\mathbb{R}$ e verificaremos que a mesma irá satisfazer as propriedades (M1) até (M5) e (D).

Neste ponto teremos que $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ será um corpo ordenado que possue a propriedade do menor limitante superior.

8.a: Mostraremos que a cada $r \in \mathbb{Q}$ podemos associar um único elemento $r^* \in \mathbb{R}$, isto é, teremos uma aplicação

$$I : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

que será injetora.

Portanto será bijetora sobre a imagem da mesma.

Denotaremos o conjunto imagem desta aplicação por $\mathbb{Q}^*$, ou seja,

$$\mathbb{Q}^* \doteq I(\mathbb{Q}) = \{r^* \; ; \; r \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Mostraremos também que a aplicação $I : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^*$ preservará as respectivas ordens totais, e as correspondentes operações de adição e multiplicação de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{R}$;

9.a : Provaremos que o conjunto $\mathbb{Q}$ é isomorfo ao conjunto $\mathbb{Q}^*$, que é um subcorpo de $\mathbb{R}$, completando a demonstração do resultado.

Vamos a demonstração de cada um das etapas acima enumeradas:

1.ª Etapa:

Duas propriedades importante que serão utilizadas mais adianate.

Antes de estabelecer as duas propriedades, notemos que a propriedade (III) da definição de cortes nos diz que se α é um corte de $\mathbb{Q}$ então o conjunto α **não** terá um máximo, ou seja, não existe um elemento em α que seja maior ou igual a todos os outros elementos de α.

Além disso, a propriedade (II) da definição de cortes implicará nas seguintes propriedades:

1. Se

$$a \in \alpha \quad e \quad q \notin \alpha, \quad \text{então} \quad a < q. \tag{2.9}$$

De fato, suponhamos, por absurdo, que $q \leq a$.

Se $q = a \in \alpha$ teríamos $q \in \alpha$, o que é um absurdo, pois $q \notin \alpha$.

Logo deveríamos ter $q < a$.

Então, da propriedade (II) da definição de cortes, deveríamos ter $q \in \alpha$, o que contradiz o fato que $q \notin \alpha$.

Portanto podemos concluir que $a < q$.

2. Se

$$r \notin \alpha \quad e \quad r < s, \quad \text{então} \quad s \notin \alpha. \tag{2.10}$$

De fato, suponhamos, por absurdo, que $s \in \alpha$.

Como $r < s$, da propriedade (II) da definição de cortes, deveríamos ter $r \in \alpha$, o que contradiz o fato que $r \notin \alpha$.

Portanto podemos concuir que $s \notin \alpha$.

Com isto completamos a 1.a etapa da demonstração do resultado.

2.ª Etapa:

Introuziremos uma relação de ordem total em $\mathbb{R}$.

Definição 2.5.2 *Se α e β são dois crotes de $\mathbb{Q}$, isto é, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, diremos que* **$\alpha$ é menor que β**, *denotando por $\alpha < \beta$, se o conjunto α é um subconjunto próprio do conjunto β, isto é,*

$$\alpha \subset \beta \quad e \quad \alpha \neq \beta.$$

Afirmamos que a relação $<$ é uma relação de ordem total no conjunto dos cortes de $\mathbb{Q}$, isto é, em $\mathbb{R}$.

De fato,

(i) Devemos mostrar que se α e $\beta \in \mathbb{R}$, isto é, são cortes de $\mathbb{Q}$, uma, e somente uma, das possibilidades abaixo poderá ocorrer:

(i.1) ou $\alpha \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$, isto é, $\alpha < \beta$;

(i.2) ou $\beta \subset \alpha$ e $\beta \neq \alpha$, isto é, $\beta < \alpha$;

(i.3) ou $\alpha = \beta$.

Notemos que possibilidades acima são excludentes, ou seja, no máximo uma, e somente uma, das situações acima ocorrerá, ou ainda, se uma delas ocorrer, nehuma das duas outras poderá ocorrer:

$$\text{ou} \quad \alpha < \beta, \quad \text{ou} \quad \beta < \alpha, \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta.$$

Precisamos mostrar agora que uma delas sempre ocorre.

Para isto notemos, primeiramente, que se (i.1) (respectivamente, (i.2)) não ocorrer, devemos mostrar que ou (i.2) (respectivamente, (i.1)) ocorrerá ou (i.3) ocorrerá.

Notemos também que se (i.3) ocorrer então (i.2) e (i.1) não ocorrerá, pois se $\alpha = \beta$ então $\alpha \neq \beta$ não ocorrerá.

Logo basta demonstramos que:

(a) se (i.1) e (i.3) não ocorrer então (i.2) deverá ocorrer.

(b) se (i.2) e (i.3) não ocorrer então (i.2) deverá ocorrer.

(c) se (i.1) e (i.2) não ocorrer então (i.3) deverá ocorrer.

A prova para o item (b) é, essencialmente, a mesma do item (a) (que será feita a seguir) e será deixada como exercício para o leitor.

Mostremos o item (a).:

Suponhamos que (i.1) e (i.3) não ocorrem, isto é, o conjunto α não é subconjunto próprio do conjunto β e $\alpha \neq \beta$.

Mostremos que (i.2) deverá ocorrer, ou seja, que o conjunto β deverá ser subconjunto próprio do conjunto α.

Para isto notemos que como o conjunto α não é um subconjunto próprio do conjunto β e $\alpha \neq \beta$, deverá existir

$$a \in \alpha \quad \text{tal que} \quad a \notin \beta.$$

Como $\beta \neq \emptyset$, existe $b \in \beta$.

Logo, como $a \notin \beta$ e $b \in \beta$, por (2.9), segue que

$$b < a.$$

Logo, pela propriedade (II) da definição de cortes, segue que

$$b \in \alpha, \quad \text{ou seja,} \quad \beta \subseteq \alpha.$$

Como $\beta \neq \alpha$, segue que β é subconjunto próprio de α, isto é, $\beta < \alpha$, ou seja, (i.2) deverá ocorrer, como afirmamos acima.

Mostremos o item (c):

Mostremos que se (i.1) ou (i.2) não ocorrerem então (i.3) deverá.

Suponhamos, por absurdo, que $\alpha \neq \beta$.

Assim segue que existe

$$a \in \alpha \quad \text{tal que} \quad a \notin \beta, \quad \text{ou existe} \quad b \in \beta \quad \text{tal que} \quad b \notin \alpha.$$

Vamos supor que existe

$$a \in \alpha \quad \text{tal que} \quad a \notin \beta.$$

O caso em que existe

$$b \in \beta \quad \text{tal que} \quad b \notin \alpha$$

é semelhante e será deixado como exercício para o leitor.

Como $\beta \neq \emptyset$, existe $b \in \beta$.

Logo, se $b \in \beta$ como $a \notin \beta$, de (2.9), segue que

$$b < a.$$

Logo, pela propriedade (II) da definição de cortes, segue que $b \in \alpha$, ou seja,

$$\beta \subseteq \alpha \quad \text{e} \quad \beta \neq \alpha,$$

isto é, $\beta < \alpha$, ou ainda, vale (i.2), o que é um absurdo!

Portanto deveremos ter $\alpha = \beta$, completando a demonstração do item (i).

(ii) Devemos mostrar que se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ então devermos ter $\alpha < \gamma$.

Isto ocorre pois um subconjunto próprio de subconjunto próprio é um subcojunto próprio, completando a demonstração do item (ii).

Com isto, pela Definição (2.3.1) segue que a relação $<$ introduzida na Definição (2.5.2) é um relação de ordem total em $\mathbb{R}$.

Observação 2.5.2 *Logo $(\mathbb{R}, <)$ é um conjunto totalmente ordenado (mais tarde mostraremos que na verdade é um corpo totalmente ordenado).*

Com isto completamos a 2.a etapa da demonstração do resultado.

3.ª Etapa:

Com a relação de ordem total introduzida acima, $(\mathbb{R}, <)$ terá a propriedade que todo conjunto limitado superiormente possuirá supremo.

Para isto consideremos $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto, não vazio e limitado superiormente, isto é, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha \leq \beta, \quad \text{para todo} \quad \alpha \in \mathcal{A},$$

onde a notação $\alpha \leq \beta$ é entendida como sendo

$$\alpha \subseteq \beta, \quad \text{isto é}, \quad \alpha \subset \beta \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta.$$

Defina γ como sendo a união de todos os $\alpha \in \mathcal{A}$, isto é,

$$g \in \gamma \quad \text{se, e somente se,} \quad g \in \alpha, \quad \text{para algum} \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

Afirmamos que $\gamma \in \mathbb{R}$, ou seja, γ é um corte de $\mathbb{Q}$ e além disso

$$\sup(\mathcal{A}) = \gamma.$$

Primeiramente mostraremos que $\gamma \in \mathbb{R}$.
Para isto mostremos que:

(i) γ satisfaz a condição (I) da definição de corte, isto é,

$$\gamma \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \gamma \neq \mathbb{Q}.$$

De fato, como $\mathcal{A} \neq \emptyset$, deverá existir $\alpha_o \in \mathcal{A}$, onde α_o é um corte de $\mathbb{Q}$.

Em particular,
$$\alpha_o \neq \emptyset.$$

Como γ é a união de todos os elementos de $\mathcal{A}$, segue que

$$\alpha_o \subseteq \gamma, \quad \text{logo} \quad \gamma \neq \emptyset.$$

Por outro lado, o corte β é um limitante superior do conjunto $\mathcal{A}$, assim deveremos ter $\gamma \leq \beta$, ou seja,
$$\gamma \subseteq \beta.$$

Em particular, como β é um corte de $\mathbb{Q}$, segue que

$$\beta \neq \mathbb{Q}, \quad \text{assim } \gamma \neq \mathbb{Q}.$$

Logo γ satisfaz a condição (I) da definição de corte (ver Definição (2.5.1));

(ii) γ satisfaz a condição (II) da definição de corte, isto é,

$$\text{se} \quad g \in \gamma \quad \text{e} \quad q \in \mathbb{Q} \quad \text{satisfazendo} \quad q < g, \quad \text{então deveremos ter} \quad q \in \gamma.$$

De fato, consideremos
$$g \in \gamma \quad \text{e} \quad q \in \mathbb{Q} \quad \text{satisfazendo} \quad q < g.$$

Mostremos que $q \in \gamma$.

Para isto notemos que, como

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha, \quad \text{deverá existir} \quad \alpha \in \mathcal{A}, \quad \text{de modo que} \quad g \in \alpha.$$

Mas $q \in \mathbb{Q}$ é tal que $q < g$ e como α é um corte, da propriedade (II) de corte, segue que $q \in \alpha$.

Como $\alpha \subseteq \gamma$ teremos $q \in \gamma$, provando que γ satisfaz a condição (II) de corte (ver Definição (2.5.1));

(iii) γ satisfaz a condição (III) da definição de corte, isto é,

$$\text{se} \quad g \in \gamma, \quad \text{existe} \quad h \in \gamma \quad \text{de modo que} \quad g < h.$$

De fato, se $g \in \gamma$, como

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha, \quad \text{deverá existir} \quad \alpha \in \mathcal{A} \quad \text{de modo que} \quad g \in \alpha.$$

Como α é um corte, da propriedade (III) de corte, segue que deverá existir $h \in \alpha$ tal que $g < h$.

Como $\alpha \subseteq \gamma$, mostramos que existe $h \in \gamma$ tal que $g < h$, provando que γ satisfaz a condição (III) de corte (ver Definição (2.5.1)).

De (i), (ii) e (iii) segue que γ é um corte de $\mathbb{Q}$, ou seja, $\gamma \in \mathbb{R}$.
Mostremos agora que

$$\gamma = \sup(\mathcal{A}).$$

Notemos que, como γ é a reunião de todos os cortes de $\mathcal{A}$, segue que

$$\alpha \leq \gamma = \bigcup_{\beta \in \mathcal{A}} \beta, \quad \text{para todo} \quad \alpha \in \mathcal{A},$$

ou seja,

$$\gamma \in \mathbb{R} \quad \text{é um limitante superior do conjunto} \quad \mathcal{A}.$$

Mostremos que γ é o menor corte de $\mathbb{Q}$ com essa propriedade.
Para isto consideremos $\delta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\delta < \gamma,$$

isto é, existe

$$g \in \gamma, \quad \text{tal que} \quad g \notin \delta.$$

Como

$$g \in \gamma = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}}, \alpha \quad \text{deverá existir} \quad \alpha \in \mathcal{A}, \quad \text{de modo que} \quad g \in \alpha.$$

Logo o corte δ não pode ser um limitante superior de $\mathcal{A}$, pois

$$g \in \alpha \in \mathcal{A}, \quad \text{mas} \quad g \notin \delta.$$

Portanto, γ é o menor dos limitantes superiores do conjunto $\mathcal{A}$ em $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\gamma = \sup(\mathcal{A}),$$

completando a demonstração da 3.a etapa.

4.^{a} Etapa:

Introduziremos uma operação de adição em $\mathbb{R}$ que irá satisfazer as propriedades (A1)-(A5) da Definição (2.4.1).

Definiremos a operação de adição em $\mathbb{R}$ da seguinte forma:

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, definiremos a **adição de α com β**, que será indicada por $\alpha + \beta$, como sendo o conjunto formado por todas as somas $a + b$, onde $a \in \alpha$ e $b \in \beta$, isto é,

$$\alpha + \beta \doteq \{a + b \; ; \; a \in \alpha, \, b \in \beta\}.$$

Mostremos que as (A1)-(A5) estão satisfeitas.

(A1) (Fechamento da adição): mostremos que

$$\text{se} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{teremos} \quad (\alpha + \beta) \in \mathbb{R}.$$

Para isto precisamos verificar (I), (II) e (III) da definição de corte (ver Definição (2.5.1)).

(i) Verifiquemos que o conjunto $(\alpha + \beta)$ satisfaz a propriedade (I) da definição de cortes, isto é,

$$\alpha + \beta \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \alpha + \beta \neq \mathbb{Q}.$$

Para isto notemos como α e β são subconjuntos de $\mathbb{Q}$, não vazios (pois são cortes em $\mathbb{Q}$), segue que existe $a \in \alpha$ e $b \in \beta$, ou seja, $(a + b) \in (\alpha + \beta)$, isto é

$$\alpha + \beta \neq \emptyset.$$

Por outro lado, como $\alpha, \beta \neq \mathbb{Q}$ existem

$$a' \notin \alpha \quad \text{e} \quad b' \notin \beta \quad \text{tais que} \quad a', b' \in \mathbb{Q}.$$

Afirmamos que

$$a' + b' > a + b, \quad \text{para todo} \quad a \in \alpha, \ b \in \beta.$$

De fato, como $a \in \alpha$ e $a' \notin \alpha$, segue de (2.9) que $a < a'$ e de modo análogo deveremos ter $b < b'$, ou seja,

$$a < a' \quad \text{e} \quad b' < b.$$

Como $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ é um corpo totalmente ordenado segue que

$$a' + b' > a + b, \quad \text{para todo} \quad a \in \alpha, \ b \in \beta.$$

como afirmamos.
Portanto

$$a' + b' \notin \alpha + \beta, \quad \text{em particular,} \quad \alpha + \beta \neq \mathbb{Q},$$

, mostrando que o conjunto $(\alpha + \beta)$ satisfaz a propriedade (I) da definição de cortes.

(ii) Verifiquemos que o conjunto $(\alpha + \beta)$ satisfaz a propriedade (II) da definição de cortes, isto é,

$$\text{se} \quad p \in (\alpha + \beta) \quad \text{e} \quad q \in \mathbb{Q} \quad \text{é tal que} \quad q < p \quad \text{então teremos} \quad q \in (\alpha + \beta).$$

Para isto seja $p \in (\alpha + \beta)$ e $q \in \mathbb{Q}$ satisfazendo $q < p$.
Afirmamos que $q \in (\alpha + \beta)$.
De fato, notemos que

$$p = a + b, \quad \text{para algum} \quad a \in \alpha \quad \text{e} \quad b \in \beta.$$

Como

$$q < p = a + b, \quad \text{segue que} \quad q - b < a.$$

Como α é corte em $\mathbb{Q}$, pela propriedade (II) da definição de cortes, deveremos ter $q - b \in \alpha$.
Notemos também que,

$$q = \underbrace{(q - b)}_{\in \alpha} + \underbrace{b}_{\in \beta}, \quad \text{assim} \quad q \in (\alpha + \beta).$$

Portanto o conjunto $(\alpha + \beta)$ satisfaz a propriedade (II) da definição de cortes;

(iii) Verifiquemos que o conjunto $(\alpha+\beta)$ satisfaz a propriedade (III) da definição de cortes, isto é,

$$\text{se} \quad p \in (\alpha+\beta), \quad \text{podemos encontrar} \quad q \in \alpha \quad \text{tal que} \quad p < q.$$

De fato, seja $p \in (\alpha+\beta)$, ou seja

$$p = a + b, \quad \text{onde} \quad a \in \alpha, \; b \in \beta.$$

Como $a \in \alpha$ e α é um corte de $\mathbb{Q}$, pela propriedade (III) da definição de cortes, podemos encontrar $t \in \alpha$ tal que $a < t$.

Logo

$$p = a + b < t + b \quad \text{e} \quad \underbrace{t}_{\in\alpha} + \underbrace{b}_{\in\beta} \in (\alpha+\beta),$$

ou seja, o conjunto $(\alpha+\beta)$ satisfaz a propriedade (III) da definição de cortes.

Portanto de (i), (ii) e (iii) segue que $\alpha+\beta$ é um corte de $\mathbb{Q}$, ou ainda, $\alpha+\beta \in \mathbb{R}$, ou seja, a operação de adição definida acima satisfaz a propriedade (A1) da Definição (2.5.1).

(A2) (Comutativa da adição): mostremos que se α, $\beta \in \mathbb{R}$ teremos

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Para isto, sejam α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Lembremos que

$$\alpha + \beta \doteq \{a + b \; ; \; a \in \alpha, \, b \in \beta\} \quad \text{e} \quad \beta + \alpha \doteq \{b + a \; ; \; b \in \beta, \, a \in \alpha\}.$$

Como

$$a + b = b + a \quad \text{para todo} \quad a, \; b \in \mathbb{Q},$$

segue que

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

ou seja, a operação de adição definida acima satisfaz a propriedade (A2) da Definição (2.5.1).

(A3) (Associativa da adição): mostremos que se α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ teremos

$$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha + (\beta+\gamma).$$

Para isto, sejam α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Notemos que, da propriedade (A3) para o o corpo $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, segue que:

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)+\gamma &\doteq \{c + g \; ; \; c \in \alpha+\beta, \, g \in \gamma\} \overset{c=a+b\,;\, \underline{a}\in\alpha,\, b\in\beta}{=} \{(a+b)+g \; ; \; a \in \alpha, b \in \beta, \, g \in \gamma\} \\
&\overset{(\mathbb{Q},+,\cdot)\text{ é corpo (ver (*) abaixo)}}{=} \{a + (b+g) \; ; \; a \in \alpha, b \in \beta, \, g \in \gamma\} \\
&\overset{d\doteq b+g\in\beta+\gamma}{=} \{a + d \; ; \; a \in \alpha, d \in \beta+\gamma\} \doteq \alpha + (\beta+\gamma),
\end{aligned}$$

ou seja, a operação de adição definida acima satisfaz a propriedade (A3) da Definição (2.5.1).

Observação 2.5.3 *Na verdade, só utilizamos, em (*), o fato que a operação de adição em $\mathbb{Q}$ é associativa, isto é,*

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad \textit{para todo} \quad a,\, b,\, c \in \mathbb{Q}.$$

(A4) (Elemento neutro da adição): mostremos que existe um corte de $\mathbb{Q}$, que denotaremos por $O^* \in \mathbb{R}$, de modo que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ teremos

$$\alpha + O^* = \alpha.$$

De fato, definamos

$$O^* \doteq \{s \in \mathbb{Q}\,;\ s < 0\}. \tag{2.11}$$

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que O^* é um corte em $\mathbb{Q}$.

Mostremos que ele é o elemento neutro da adição definida acima, isto é,

$$\alpha + O^* = \alpha, \quad \text{ou seja,} \quad \alpha + O^* \subset \alpha \quad \text{e} \quad \alpha \subset \alpha + O^*.$$

Para isto sejam, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $a \in \alpha$.

Observemos que se $a \in \alpha$ e $s \in O^*$ então, do fato que $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ é um corpo totalmente ordenado, segue que

$$a + s \overset{s<0}{<} a + 0 = a.$$

Logo, da propriedade (II) da definição de cortes, aplicada ao corte α, teremos que

$$a + s \in \alpha, \quad \text{para todo} \quad a \in \alpha \quad \text{e} \quad s \in O^*,$$

ou seja,

$$\alpha + O^* \subset \alpha. \tag{2.12}$$

Por outro lado, se $a \in \alpha$, da propriedade (III) da definição de cortes, aplicada a α, segue que existirá $r \in \alpha$ tal que $a < r$, que implicará em

$$a - r < 0, \quad \text{ou seja,} \quad a - r \in O^*.$$

Assim

$$a = \underbrace{r}_{\in \alpha} + \underbrace{(a - r)}_{\in O^*} \in \alpha + O^*, \quad \text{para todo} \quad a \in \alpha,$$

ou seja

$$\alpha \subset \alpha + O^*. \tag{2.13}$$

Portanto, de (2.12) e (2.13), segue que

$$\alpha + O^* = \alpha,$$

mostrando que a operação de adição definida acima satisfaz a propriedade (A4) da Definição (2.5.1).

(A5) (Elemento oposto da adição): mostremos que dado $\alpha \in \mathbb{R}$ podemos encontrar um corte β (isto é, um elemento $\beta \in \mathbb{R}$) de tal modo que

$$\alpha + \beta = O^*.$$

Este elemento será indicado por $-\alpha$.

De fato, consideremos β o conjunto formado pelos $p \in \mathbb{Q}$ que têm a seguinte propriedade:

Existe $r > 0$ tal que

$$-p - r \notin \alpha,$$

isto é, existem números racionais menores que $-p$, que não pertencem a α (no caso $-p-r$).

Observação 2.5.4 *Para ilustrar, suponhamos que* $\alpha \doteq \{b \in Q\,;\, b < 1\} \in \mathbb{R}$.
Então

$$\beta \doteq \{b \in Q\,;\, b < -1\} \in \mathbb{R}$$

tem a propriedade acima.
De fato, pois se $p \in \beta$, *teremos* $p < -1$.
Assim $-p > 1$, *o que implicará que existirá* $r > 0$ *em* $\mathbb{Q}$ *tal que*

$$-p - r > 1, \quad \text{ou seja,} \quad -p - r \notin \alpha.$$

Para ver isto basta tomar

$$r \doteq -\frac{1+p}{2} > 0$$

que obteremos

$$-p - r = -p + \frac{1+p}{2} = \frac{1-p}{2} \overset{-p>1}{>} \frac{1+1}{2} = 1,$$

ou seja, $-p - r \notin \alpha$.

Mostremos que $\beta \in \mathbb{R}$ e que

$$\alpha + \beta = 0^*.$$

Para mostrar que $\beta \in \mathbb{R}$ temos:

(i) Mostremos que o conjunto β satisfaz a propriedade (I) de corte, isto é,

$$\beta \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \beta \neq \mathbb{Q}.$$

Afirmamos que:

$$\beta \neq \emptyset.$$

De fato, sabemos que existe $s \notin \alpha$, pois $\alpha \neq \mathbb{Q}$.
Seja

$$p \doteq -s - 1.$$

Logo

$$-p - 1 = s \notin \alpha,$$

o que implicará que $p \in \beta$ (neste caso tomamo $r \doteq 1$) implicando que β é não vazio.

Afirmamos que:

$$\beta \neq \mathbb{Q}.$$

Para mostrar isto afirmamos que que se

$$a \in \alpha \quad \text{teremos que} \quad -a \notin \beta. \tag{2.14}$$

De fato, se $a \in \alpha$,

$$\text{para todo} \quad r > 0, \quad \text{teremos} \quad a - r < a.$$

Logo, da propriedade (II) da definição de cortes, teremos

$$\underbrace{a - r}_{=-(-a)-r} \in \alpha, \quad \text{para todo} \quad r > 0, \quad \text{mostrando que} \quad -a \notin \beta,$$

como afirmamos.

Logo $\beta \neq \mathbb{Q}$, mostrando que o conjunto β satisfaz a propriedade (I) da definição de cortes;

(ii) Mostremos que o conjunto β satisfaz a propriedade (II) de corte, ou seja,

$$\text{se} \quad b \in \beta \quad \text{e} \quad q \in \mathbb{Q} \quad \text{satisfaz} \quad q < b, \quad \text{então teremos} \quad q \in \beta.$$

De fato, notemos que se $b \in \beta$, da definição do conjunto β, existirá $r > 0$ tal que

$$-b - r \notin \alpha.$$

Logo se

$$q < b, \quad \text{segue que} \quad -b < -q, \quad \text{assim teremos} \quad \underbrace{-b-r}_{\notin \alpha} < -q - r.$$

Logo, de (2.10), deveremos ter

$$-q - r \notin \alpha,$$

o que implicará que $q \in \beta$, isto é, o conjunto β satisfaz a propriedade (II) da definição cortes.

(iii) Mostremos que o conjunto β satisfaz a propriedade (III) de corte, ou seja,

$$\text{se} \quad b \in \beta, \quad \text{podemos encontrar} \quad t \in \beta \quad \text{tal que} \quad b < t.$$

De fato, se $b \in \beta$, da definição do conjunto β, que existirá $r_1 > 0$ tal que

$$-b - r_1 \notin \alpha.$$

Consideremos

$$t \doteq b + \frac{r_1}{2}.$$

Com isto teremos que

$$t = b + \underbrace{\frac{r_1}{2}}_{>0} > b \quad \text{e} \quad -t - \frac{r_1}{2} = -\left(b + \frac{r_1}{2}\right) - \frac{r_1}{2} = -b - r_1 \notin \alpha,$$

ou seja, $t \in \beta$ $\left(\text{neste caso tomamos } r \doteq \dfrac{r_1}{2}\right)$.

Logo existe $t \in \beta$ tal que $b < t$, mostrando que o conjunto β satisfaz a propriedade (III) da definição de cortes.

Portanto β é um corte em $\mathbb{Q}$, isto é, $\beta \in \mathbb{R}$.

Mostremos agora que
$$\alpha + \beta = O^*.$$

Para isto, afirmamos que se
$$b \in \beta, \quad \text{então} \quad -b \notin \alpha.$$

De fato, suponhamos por absurdo, que $-b \in \alpha$.

Logo, de (2.14), teríamos que
$$b = -(-b) \notin \beta,$$
o que seria um absurdo, pois $b \in \beta$.

Sejam $a \in \alpha$ e $b \in \beta$, ou seja, $-b \notin \alpha$.

Logo $a \in \alpha$ e $-b \notin \alpha$ assim, de (2.9), segue que
$$a < -b, \quad \text{ou ainda,} \quad a + b < 0,$$
mostrando que
$$(\alpha + \beta) \subset O^*. \tag{2.15}$$

Para mostrar a inclusão
$$O^* \subset (\alpha + \beta).$$

Para isto consideremos $v \in O^*$ e definamos
$$w \doteq -\frac{v}{2}.$$

Como
$$v < 0 \quad \text{segue que} \quad w > 0.$$

Logo, da Observação (2.5.1) item 2., segue que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que
$$n \cdot w \in \alpha \quad \text{mas} \quad (n+1) \cdot w \notin \alpha.$$

Consideremos
$$b \doteq -(n+2) \cdot w. \tag{2.16}$$

Afirmamos que $b \in \beta$.

De fato, como
$$-b - w = -[-(n+2)w] - w = (n+1)w \notin \alpha,$$
segue que $b \in \beta$ (neste caso tomamos $r \doteq w$).

A identidade (2.16) garante que
$$-2w = n \cdot w + b. \tag{2.17}$$

Assim
$$v = -2 \cdot w \overset{(2.17)}{=} \underbrace{n \cdot w}_{\in \alpha} + \underbrace{b}_{\in \beta} \in (\alpha + \beta),$$
ou seja,
$$O^* \subset (\alpha + \beta), \quad \text{que, juntamente com (2.15), implicará que} \quad \alpha + \beta = O^*.$$

Com isto completamos a demonstração que o oposto do corte α é o corte β, completando a demonstração da propriedade (A5) e da 4.a etapa.

5.ª Etapa:

Tendo provado que adição, definida acima, satisfaz as condições de (A1)-(A5) segue que a Proposição (2.4.1) será válida em $\mathbb{R}$ (veja a Observação (2.4.1)).

Com isto podemos provar a condição (i) da Definição (2.4.2) de corpo ordenado (notemos que, ainda, não temos definido em $\mathbb{R}$ uma operação de multiplicação!), a saber:

$$\text{se} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \beta < \gamma, \quad \text{então} \quad (\alpha + \beta) < (\alpha + \gamma).$$

De fato, como o conjunto β é subconjunto (próprio) do conjunto γ, da definição da operação de adição, segue que

$$(\alpha + \beta) \subset (\alpha + \gamma).$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma.$$

Segue da Proposição (2.4.1) item (a) (isto é, da lei do cancelamento da adição) que teríamos

$$\beta = \gamma,$$

o que é um absurdo, pois o conjunto β é subconjunto próprio de γ.

Assim o conjunto $(\alpha + \beta)$ será subconjunto próprio do conjunto $(\alpha + \gamma)$ e portanto

$$(\alpha + \beta) < (\alpha + \gamma),$$

ou seja, vale a propriedade (i) da Definição (2.4.2) de corpo ordenado.

Observação 2.5.5 *Vale observar que, da demonstração da Proposição (2.4.4) item (a), segue que*

$$\alpha > O^* \quad \textit{se, e somente se,} \quad -\alpha < O^*.$$

6.ª Etapa:

A seguir introduziremos uma operação multiplicação em $\mathbb{R}$.

Começaremos definindo uma operação de multiplicação em

$$\mathbb{R}^+ \doteq \{\alpha \in \mathbb{R} \,;\, \alpha > O^*\}.$$

Observação 2.5.6 *Observemos que se $\alpha \in \mathbb{R}^+$ segue que*

$$O^* \overset{(2.11)}{=} \{q \in \mathbb{Q} \,;\, q < 0\} \subseteq \alpha \quad e \quad \{q \in \mathbb{Q} \,;\, q < 0\} \neq \alpha,$$

ou seja, existe $a \in \alpha$ tal que $a \geq 0$.

Como α é um corte em $\mathbb{Q}$, segue da propriedade (III) que existe

$$a_o \in \alpha \quad \textit{tal que} \quad 0 \leq a < a_o. \tag{2.18}$$

Portanto, se $\alpha > 0^*$ segue que existe

$$a_o \in \alpha \quad \textit{tal que} \quad a_o > 0.$$

Se α, $\beta \in \mathbb{R}^+$ definiremos o **produto de α por β**, que será indicado por $\alpha \cdot \beta$, como sendo o conjunto de todos os $p \in \mathbb{Q}$ tais que

$$p \leq a\,b,$$

para alguma escolha de $a \in \alpha$ e $b \in \beta$, sendo a, $b > 0$ (que existem por (2.18)), isto é,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &\doteq \{p \in \mathbb{Q} \,;\, \text{existem } a \in \alpha \text{ e } b \in \beta,\ a, b > 0 \text{ tal que } p \leq a\,b\} \\ &= \{p \in \mathbb{Q}; p \leq 0\} \cup \{a\,b; a \in \alpha, b \in \beta \text{ e } a\,b > 0\} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Observação 2.5.7 *Colocaremos a seguinte questão: por que não definimos*

$$\alpha \cdot \beta = \{a \cdot b \; ; \; a \in \alpha, b \in \beta\} \, ?$$

Definiremos 1^* como sendo o conjunto de todos os $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q < 1$, ou seja,

$$1^* \doteq \{q \in \mathbb{Q} \; ; \; q < 1\}. \tag{2.20}$$

Este corte fará o papel da unidade na multiplicação definida acima.

Observação 2.5.8 *Colocaremos também a seguinte questão: se $\alpha \in \mathbb{R}^+$ quem será o corte que é inverso dele em $\mathbb{R}^+$?*

Mostremos que vale a propriedade (M1), isto é, $(\alpha \cdot \beta) \in \mathbb{R}^+$ (ou ainda, $(\alpha \cdot \beta)$ é um corte em $\mathbb{Q}$). Para isto, precisamos mostrar que:

(i) Mostremos que o conjunto $(\alpha \cdot \beta)$ satisfaz a propriedade (I) da definição corte, isto é,

$$(\alpha \cdot \beta) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad (\alpha \cdot \beta) \neq \mathbb{Q}.$$

Afirmamos que:

$$(\alpha \cdot \beta) \neq \emptyset.$$

De fato, como $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, existem $a \in \alpha$, com $a > 0$ e $b \in \beta$, com $b > 0$.

Seja

$$p \doteq a\,b.$$

Notemos que

$$p \leq \underbrace{a}_{\in \alpha} \; \underbrace{b}_{\in \beta}, \quad \text{ou seja,} \quad p \in (\alpha \cdot \beta),$$

mostrando que $(\alpha \cdot \beta) \neq \emptyset$.

Afirmamos que

$$(\alpha \cdot \beta) \neq \mathbb{Q}.$$

De fato, como $\alpha, \beta \neq \mathbb{Q}$, segue que existem $c, d \in \mathbb{Q}$ tais que

$$c \notin \alpha \quad \text{e} \quad d \notin \beta.$$

Logo, de (2.9), segue que para todo $a \in \alpha$ e $b \in \beta$ teremos

$$a < c \quad \text{e} \quad b < d. \tag{2.21}$$

Em particular, para todo $a \in \alpha$ e $b \in \beta$ tais que

$$0 < a \quad \text{e} \quad 0 < b, \quad \text{segue que} \quad 0 < a < c \quad \text{e} \quad 0 < b < d. \tag{2.22}$$

Seja

$$e \doteq c\,d \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad 0 \overset{(2.22)}{<} e.$$

Com isto, de (2.22), segue que para todo $a \in \alpha$ e $b \in \beta$ satisfazendo

$$0 < a \quad \text{e} \quad 0 < b, \quad \text{teremos} \quad a\,b \overset{0<a}{<} ad \overset{0<d}{<} c\,d = e,$$

ou seja, $e \notin (\alpha \cdot \beta)$, mostrando que $(\alpha \cdot \beta) \neq \mathbb{Q}$.

Com isto mostramos que o conjunto $(\alpha \cdot \beta)$ satisfaz a propriedade (I) da definição de cortes;

(ii) Mostremos que o conjunto $(\alpha \cdot \beta)$ satisfaz a propriedade (II) da definição corte, ou seja,

$$\text{se} \quad p \in (\alpha \cdot \beta) \quad \text{e} \quad q \in \mathbb{Q} \quad \text{satisfaz} \quad q < p, \quad \text{então teremos} \quad q \in (\alpha \cdot \beta).$$

De fato, notemos que se $p \in (\alpha \cdot \beta)$, da definição do conjunto $(\alpha \cdot \beta)$, existirão $a \in \alpha$ e $b \in \beta$, com $a, b > 0$ tais que

$$p \leq a\,b.$$

Como

$$q < p \leq a\,b\,, \quad \text{segue que,} \quad q < a\,b\,, \quad \text{em particular,} \quad q < a\,b,$$

o que implicará que $q \in (\alpha \cdot \beta)$, isto é, o conjunto $(\alpha \cdot \beta)$ satisfaz a propriedade (II) da definição cortes.

(iii) Mostremos que o conjunto $(\alpha \cdot \beta)$ satisfaz a propriedade (III) da definição corte, ou seja,

$$\text{se} \quad p \in (\alpha \cdot \beta), \quad \text{podemos encontrar} \quad t \in (\alpha \cdot \beta) \quad \text{tal que} \quad p < t.$$

De fato, se $p \in (\alpha \cdot \beta)$, da definição do conjunto $(\alpha \cdot \beta)$, que existirão $a \in \alpha$ e $b \in \beta$, $a, b > 0$ tais que

$$p \leq a\,b\,. \tag{2.23}$$

Como $a \in \alpha$, e α é um corte de $\mathbb{Q}$, segue, da propriedade (III) da definição de corte, que existe

$$a_o \in \alpha, \quad \text{tal que} \quad a < a_o.$$

Como

$$0 < a \quad \text{e} \quad a < a_o, \quad \text{segue que,} \quad 0 < a_o,$$

ou seja

$$0 < a < a_o. \tag{2.24}$$

Mas

$$0 < b, \quad \text{assim, de (2.24), segue que} \quad ab \overset{0<b}{<} a_o b. \tag{2.25}$$

De modo semelhante, como $b \in \alpha$, e β é um corte de $\mathbb{Q}$, segue, da propriedade (III) da definição de corte, que existe

$$b_o \in \alpha, \quad \text{tal que} \quad b < b_o.$$

Assim

$$0 < b \quad \text{e} \quad b < b_o, \quad \text{teremos que,} \quad 0 < b_o.$$

Logo, como

$$0 < b < b_o \quad \text{e} \quad 0 < a_o, \quad \text{teremos} \quad ab \overset{(2.25)}{<} a_o\,b \overset{0<a_o}{<} a_o\,b_o. \tag{2.26}$$

Seja

$$q \doteq a_o b_o \overset{(2.26)}{>} 0. \tag{2.27}$$

Notemos que

$$q \overset{(2.26)}{\leq} a_o\,b_o, \quad p \overset{(2.23)}{\leq} a\,b \overset{(2.25)}{<} a_o\,b = q \quad a_o \in \alpha, \ b \in \beta \quad \text{e} \quad 0 < a_o, b,$$

ou seja, $q \in (\alpha \cdot \beta)$ e $p < q$, mostrando que o conjunto β satisfaz a propriedade (III) da definição de cortes.

Portanto $(\alpha \cdot \beta)$ é um corte em $\mathbb{Q}$.
Finalmente mostremos que se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ então $(\alpha \cdot \beta) \in \mathbb{R}^+$, ou seja,

$$\text{se} \quad \alpha, \beta > O^* \quad \text{teremos} \quad (\alpha \cdot \beta) > O^*.$$

Notemos que, de (2.27), temos

$$q \in (\alpha \cdot \beta) \quad \text{e} \quad q > 0,$$

ou seja,

$$O^* \subseteq (\alpha \cdot \beta) \quad \text{e} \quad O^* \neq (\alpha \cdot \beta), \quad \text{o implicará que} \quad (\alpha \cdot \beta) > O^*.$$

Afirmamos que as propriedades (M2)-(M5) e (D) estão satisfeitas para a operação de multiplicação definida acima em $\mathbb{R}^+$.

Isto será a deixado como exercício para o leitor.

Observação 2.5.9

1. *Observemos que, em particular, a 2.a condição da definição de corpo ordenado estará satisfeita em* $\mathbb{R}^+$, *isto é,*

$$\text{se} \quad \alpha, \beta > O^*, \quad \text{então} \quad \alpha \cdot \beta > O^*,$$

   que é o que diz a propriedade (M1).

2. *Se* $\alpha \neq O^*$, *definimos*

$$\alpha^{-1} \doteq \{b \in Q\,;\, b \leq 0\} \cup \{p \in \mathbb{Q}^+\,;\, \textit{existe } q \in \mathbb{Q}, q > p \textit{ com } q^{-1} \notin \alpha\} \in \mathbb{R}$$

   ou seja,

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1^*.$$

<u>**7.ª Etapa:**</u>

Completaremos a definição da operação de multiplicação para todo $\mathbb{R}$, da seguinte forma:
Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, definiremos:

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} O^* & \text{, se} \quad \alpha = O^* \quad \text{ou} \quad \beta = O^* \\ \alpha \cdot \beta & \text{, se} \quad \alpha, \beta > O^* \\ (-\alpha) \cdot (-\beta) & \text{, se} \quad \alpha < O^* \quad \text{e} \quad \beta < O^* \\ -[(-\alpha) \cdot \beta] & \text{, se} \quad \alpha < O^* \quad \text{e} \quad \beta > O^* \\ -[\alpha \cdot (-\beta)] & \text{, se} \quad \alpha > O^* \quad \text{e} \quad \beta < O^* \end{cases} . \tag{2.28}$$

onde $\underline{\cdot}$ é a operação de multiplicação definida em $\mathbb{R}^+$ introduzida na 6.a etapa (notemos que todos os elementos envolvidos nas multiplicações à direita acima pertencem a $\mathbb{R}^+$).

Tendo provado que (M1)-(M5) valem para a multiplicação em $\mathbb{R}^+$, deixaremos como exercício para o leitor provar que as mesmas serão válidas para a multiplicação acima em $\mathbb{R}$.

Observação 2.5.10 *Notemos que poderemos usar o fato que*

$$\alpha = -(-\alpha),$$

que é o item (d) da Proposição (2.4.1).

Faremos a demonstração que a propriedade (D) (lei distributiva da multiplicação) ocorre.
Faremos a demonstração que a propriedade (D) (lei distributiva da multiplicação) ocorre.
Dividiremos a prova em vários casos, a saber:

1. $\alpha > O^*, \quad \beta > O^*$.
2. $\alpha < O^*, \quad \beta < O^*$.
3. $\alpha > O^*, \quad \beta < O^* \quad \text{e} \quad \beta + \gamma > O^*$.
4. $\alpha > O^*, \quad \beta < O^* \quad \text{e} \quad \beta + \gamma = O^*$.
5. $\alpha > O^*, \quad \beta < O^* \quad \text{e} \quad \beta + \gamma < O^*$.
6. $\alpha < O^*, \quad \beta > O^* \quad \text{e} \quad \beta + \gamma > O^*$.
7. $\alpha < O^*, \quad \beta > O^* \quad \text{e} \quad \beta + \gamma = O^*$.
8. $\alpha < O^*, \quad \beta > O^* \quad \text{e} \quad \beta + \gamma < O^*$.

O caso 1. segue foi obtido na 6.a etapa.

Observemos que os casos 6., 7. e 8. são análogos aos casos 3., 4. e 5., respectivamente (basta trocar α com β).

Faremos a demonstração do caso 3. .

Os casos 2., 4. e 5. serão deixados como exercício para o leitor.

Notemos que, das propridades (A1)-(A5), segue que

$$\gamma = (\beta + \gamma) + (-\beta)$$

e como

$$\beta + \gamma > 0^* \quad \text{e} \quad -\beta > 0^*,$$

da 5.a etapa, segue que teremos

$$\gamma > O^*.$$

Assim, como vale a propriedade (D) em $\mathbb{R}^+$, segue que

$$\underbrace{\alpha}_{>O^*} \cdot \underbrace{\gamma}_{>O^*} = \underbrace{\alpha}_{>O^*} \cdot \left[\underbrace{(\beta + \gamma)}_{>O^*} + \underbrace{(-\beta)}_{>O^*} \right] \stackrel{\text{Prop. (D) em } \mathbb{R}^+}{=} \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \cdot (-\beta). \tag{2.29}$$

Da definição da multiplicação introduzida em (2.28), segue que (caso que $\alpha > O^*$ e $\beta < O^*$):

$$\alpha \cdot \beta = -\left[\alpha \cdot (-\beta)\right].$$

Mas, da Proposição (2.4.1) item (d), segue que

$$-(\alpha \cdot \beta) = \alpha \cdot (-\beta). \tag{2.30}$$

Assim

$$\alpha \cdot \gamma \stackrel{(2.29)}{=} \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \cdot (-\beta) \stackrel{(2.30)}{=} \alpha \cdot (\beta + \gamma) - (\alpha \cdot \beta).$$

Logo, da Proposição (2.4.1) item (a), segue que

$$\alpha . \beta + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma).$$

Deste modo concluímos a demonstração da propriedade (D) para a multiplicação definida em (2.28).

Com isto mostramos que o conjunto dos cortes sobre os racionais munido da relação de ordem, das operações de adição e multiplicação definidas acima, isto é, $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, é um corpo totalmente ordenado que tem a propriedade do menor limitante superior, ou seja, a primeira parte da demonstração do Teorema.

A seguir veremos como podemos ver que o corpo $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ como um um subcorpo do corpo $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$.

8.^{a} Etapa:

Mostraremos que existe uma aplicação injetora de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ que preseva as respectivas ordens totais e as operações de adição e de multiplicação de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{R}$.

Para tanto, para cada $r \in \mathbb{Q}$ associamos o conjunto r^* que é formado por todos os $p \in \mathbb{Q}$ tais que $p < r$, isto é

$$r^* \doteq \{p \in \mathbb{Q}\ ;\ p < r\}. \tag{2.31}$$

É fácil ver que r^* é um corte de $\mathbb{Q}$, isto é, $r^* \in \mathbb{R}$ (verifique!).

Com isto temos a aplicação $I : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por

$$I(r) \doteq r^*, \quad r \in \mathbb{Q}.$$

Definiremos

$$\mathbb{Q}^* \doteq \{r^*\ ; r \in \mathbb{Q}\}.$$

Os elementos de $(\mathbb{Q}^*, +, \cdot, <)$ (como subconjunto de $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$) satisfazem as seguintes propriedades:

Dados r^*, $s^* \in \mathbb{Q}^*$ teremos:

(i) $r^* + s^* = (r + s)^*$.

Observação 2.5.11

(a) *Notemos que a operação de adição do lado esquerdo da identidade acima é a operação de adição em* $\mathbb{R}$ *enquanto do lado direito fazemos a operação de adição em* $\mathbb{Q}$ *e depois tomamos o respectivo elemento em* $\mathbb{Q}^*$.

(b) *Em partiular, teremos*

$$I(r + s) = I(r) + I(s), \quad r, s \in \mathbb{Q},$$

ou seja, a aplicação I *preserva as correspondentes operações de adição de* $\mathbb{Q}$ *e de* $\mathbb{R}$.

(ii) $r^* \cdot s^* = (r \cdot s)^*$

Observação 2.5.12

(a) *Notemos que a operação de multiplicação do lado esquerdo da identidade acima é a operação de muliplicação em* $\mathbb{R}$ *enquanto do lado direito fazemos a operação de multiplicação em* $\mathbb{Q}$ *e depois tomamos o respectivo elemento em* $\mathbb{Q}^*$.

(b) *Em partiular, teremos*

$$I(r \cdot s) = I(r) \cdot I(s), \quad r, s \in \mathbb{Q},$$

ou seja, a aplicação I *preserva as correspondentes operações de multiplicação de* $\mathbb{Q}$ *e de* $\mathbb{R}$.

(iii) $r^* < s^*$ se, e somente se, $r < s$.

Observação 2.5.13

(a) Notemos que a relação de ordem total do lado esquerdo da identidade acima é a relação de ordem total em $\mathbb{R}$ enquanto do lado direito é a relação de ordem total em $\mathbb{Q}$.

(b) Em partiular, teremos

$$I(r) < I(s) \quad \textit{se, e somente se} \quad r < s, \quad \textit{onde} \quad r, s \in \mathbb{Q},$$

ou seja, a aplicação I preserva as correspondentes relações de ordem totais de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{R}$.

A seguir exibiremos as demonstrações das três afirmações acima.
Para mostrar (i) devemos mostrar que

$$r^* + s^* \subseteq (r+s)^* \quad \text{e que} \quad (r+s)^* \subseteq r^* + s^*.$$

Seja $p \in r^* + s^*$, isto é,

$$p = u + v, \quad \text{onde} \quad u \in r^* \quad \text{e} \quad v \in s^*,$$

o que implicará em

$$u < r \quad \text{e} \quad v < s.$$

Com isto teremos que

$$p = u + s < r + s, \quad \text{ou seja,} \quad p \in (r+s)^*,$$

mostrando que

$$r^* + p^* \subseteq (r+s)^*.$$

Reciprocamente,

$$\text{se} \quad p \in (r+s)^*, \quad \text{segue que} \quad p < r + s.$$

Escolha $t \in \mathbb{Q}$ tal que

$$t \doteq \frac{r+s-p}{2}. \tag{2.32}$$

Notemos que, $t > 0$.
Consideremos

$$r' \doteq r - t \quad \text{e} \quad s' \doteq s - t.$$

Como

$$t > 0 \quad \text{segue que} \quad r' < r \quad \text{e} \quad s' < s,$$

que implicará em

$$r' \in r^* \quad \text{e} \quad s' \in s^*.$$

Além disso

$$r' + s' = (r - t) + (s - t) = r + s - \underbrace{2t}_{\overset{(2.32)}{=} r+s-p} = p,$$

isto é,

$$p = r' + s', \quad \text{onde} \quad r' \in r^* \quad \text{e} \quad s' \in s^*.$$

Portanto

$$p \in r^* + s^*, \quad \text{mostrando que} \quad (r+s)^* \subseteq r^* + s^*,$$

isto é , a propriedade (i) ocorre.

De modo semelhante mostra-se (ii).

A elaboração da demonstração da mesma será deixada como execício para o leitor.

Para mostrar (iii) suponhamos, primeiramente, $r < s$.

Com isto teremos

$$r \in s^*, \quad \text{mas} \quad r \notin r^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < r\}.$$

Logo r^* está contido propriamente em s^*, ou seja,

$$r^* < s^*.$$

Reciprocamente,

$$\text{se} \quad r^* < s^*, \quad \text{então existe} \quad p \in s^* \quad \text{tal que} \quad p \notin r^*,$$

ou seja,

$$r \leq p < s, \quad \text{em particular}, \quad r < s,$$

completando a verificação da propriedade (iii).

9.ª Etapa:

Na 8.ª etapa mostramos que a cada $r \in \mathbb{Q}$ podemos associar $r^* \in Q^* \subseteq \mathbb{R}$ de tal modo que essa associação preserva as respectivas operações de adição, de multiplicação e de ordens totais.

Isto pode ser expresso dizendo-se que o corpo totalmente ordenado $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ é **isomorfo** (no sentido de corpo) ao corpo totalmente ordenado $(\mathbb{Q}^*, +, \cdot, <)$ (cujos elementos são cortes dos racionais do tipo $(-\infty, p)$ tal que $p \in \mathbb{Q}$).

Observemos que $\mathbb{Q}^*$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$, ou seja, é um corpo com as operações de adição e multiplicação induzidas de $\mathbb{R}$ (verifique!).

A identificação de $\mathbb{Q}$ com $\mathbb{Q}^*$ permite-nos ver o corpo totalmente ordenado $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ como um subcorpo do corpo totalmente ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ e é neste sentido que é entendida a segunda parte da conclusão do Teorema, finalizando a sua demonstração.

□

Observação 2.5.14

1. *Notemos que a identificação do corpo totalmente ordenado $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ com o corpo totalmente ordenado $(\mathbb{Q}^* < +, \cdot, <)$ é semelhante à que nos faz ver o corpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ como um subcorpo do corpo formado pelos números complexos, que é denotado por $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.*

2. *A primeira e segunda afirmações, relativas à 8.a etapa na demonstração do Teorema acima, nos dizem que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ e as operações de adição e multiplicação de $\mathbb{R}$, quando restritas a $\mathbb{Q}$, coincidem com as operações de adição e multiplicação de $\mathbb{Q}$ (este é o significado de subcorpo).*

3. *Os cortes de $\mathbb{Q}$ que utilizamos na demostração do Teorema acima foram criados por Richard Dedekind e denominados de* **cortes de Dedekind**.

4. *A construção de $\mathbb{R}$, partindo de $\mathbb{Q}$, utilizando sequências de Cauchy é devido a Cantor.*

5. *Ambos publicaram suas construções em 1872.*

6. *Definiremos o conjunto formado pelos irracionais, denotado por $\mathbb{I}$, como sendo:*

$$\mathbb{I} \doteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

7. *Se $\alpha \in \mathbb{R}$, definiremos*

$$|\alpha| \doteq \alpha \cup (-\alpha).$$

Com isto teremos:

(a) $|\alpha| \in \mathbb{R}$ *;*

(b) $|\alpha| \geq O^*$ *;*

(c) $|\alpha| \geq \alpha$ *e* $|\alpha| \geq -\alpha$ *;*

(d) $|\alpha| = \begin{cases} \alpha\,, & se\ \alpha \geq O^* \\ -\alpha\,, & se\ \alpha \leq O^* \end{cases}$

Podemos enunciar e demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 2.5.2

(a) *(Propriedade Archimediana de $\mathbb{R}$) Se $x, y \in \mathbb{R}$, com $x > 0$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \cdot x > y.$$

(b) *(Densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$) Se $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, então deve existir $p \in \mathbb{Q}$ tal que*

$$x < p < y.$$

(c) *(Densidade de $\mathbb{I}$ em $\mathbb{R}$) Se $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, então deve existir $i \in \mathbb{I}$ tal que*

$$x < i < y.$$

Demonstração:

De **(a):**

Seja $\mathcal{A}$ o conjunto formado pelos números reais $m \cdot x$, onde $m \in \mathbb{N}$, isto é:

$$\mathcal{A} \doteq \{m \cdot x \in \mathbb{R}\ ;\ m \in \mathbb{N}\}.$$

Suponhamos, por absurdo, que propriedade (a) seja falsa, ou seja,

$$m \cdot x \leq y \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{N},$$

isto é, y é limitante superior do conjunto $\mathcal{A}$.

Como $\mathbb{R}$ tem a propriedade do menor limitante superior, existirá

$$\alpha \doteq \sup(\mathcal{A}).$$

Observemos que

$$\text{se} \quad x > 0, \quad \text{então} \quad \alpha - x < \alpha$$

e assim $(\alpha - x)$ **não poderá** ser um limitante superior do conjunto $\mathcal{A}$ (pois α é o supremo de $\mathcal{A}$, logo é o menor limitante superior do conjunto $\mathcal{A}$).

Assim, da definição do conjunto $\mathcal{A}$ e do fato que $(\alpha - x)$ não é limitante superior de $\mathcal{A}$, segue que deverá existir $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha - x < m \cdot x.$$

Com isto podemos concluir que

$$\alpha < (m+1) \cdot x \in \mathcal{A},$$

o que é um absurdo, pois α é um limitante superior de $\mathcal{A}$.

Logo o conjunto $\mathcal{A}$, não pode ser limitado superiormente, ou seja, dado $y \in \mathbb{R}$, deverá existir $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$y \leq n \cdot x,$$

mostrando que a propriedade (a) ocorre.

De **(b):**

Basta encontrarmos $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$n x < m < n x .$$

Como

$$x < y, \quad \text{segue que} \quad y - x > 0$$

e, da propriedade (a), sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \cdot (y - x) > 1, \quad \text{ou seja,} \quad n \cdot x + 1 < n \cdot y. \tag{2.33}$$

Para ver isto, basta considerar

$$x \doteq y - x \quad \text{e} \quad y \doteq 1$$

e aplicar a propriedade (a).

Aplicando novamente a propriedade (a), podemos obter m_1, $m_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$m_1 > n \cdot x,$$

bastando para isto tomar

$$x \doteq 1 \quad \text{e} \quad y \doteq n.x$$

e aplicar a propriedade (a) e

$$m_2 > -n \cdot x,$$

bastando para isto tomar

$$x \doteq 1 \quad \text{e} \quad y \doteq -n \cdot x$$

e aplicar a propriedade (a).

Assim teremos

$$-m_2 < n \cdot x < m_1.$$

Com isto pode-se provar a existência de $m \in \mathbb{Z}$, com

$$-m_2 \leq m \leq m_1,$$

de modo que

$$(m-1) \leq n \cdot x < m. \tag{2.34}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Combinando-se as desigualdades (2.33) e (2.34) obteremos:

$$n \cdot x < m \leq 1 + n \cdot x < n \cdot y, \quad \text{ou seja,} \quad n \cdot x < m < n \cdot y.$$

Como

$$n > 0, \quad \text{da desigualdade acima segue que} \quad x < \frac{m}{n} < y,$$

o que prova a propriedade (b), bastanto para isto tomar

$$p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q},$$

mostrando que a propriedade (b) ocorre.

De **(c)**:

Pelo item (b), existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < t < \frac{s}{\sqrt{2}},$$

assim

$$x < t\sqrt{2} < s.$$

Se $t \neq 0$, segue que

$$i \doteq t\sqrt{2} \in \mathbb{I}.$$

Se $t = 0$, teremos

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < 0 < \frac{s}{\sqrt{2}},$$

Logo, de (b), podemos encontrar $p \in \mathbb{Q}$, de modo que

$$0 < p < \frac{y}{\sqrt{2}},$$

ou seja, existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < 0 < p < \frac{s}{\sqrt{2}}, \quad \text{ou seja,} \quad x < p\sqrt{2} < y,$$

e assim, como $p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$,

$$i \doteq p\sqrt{2}$$

satisfaz a propriedade requerida, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 2.5.15

1. *A parte (a) do Teorema acima é conhecida como* **propriedade arquimediana** *dos números reais.*

2. *A parte (b) do Teorema nos diz que entre dois números reais distintos existe, pelo menos, um número racional (propriedade de densidade dos números racionais no conjunto $\mathbb{R}$).*

Como consequência dos resultado acima temos o:

Corolário 2.5.1

$$\inf\left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\} = O^*.$$

Resolução:

Para tanto, basta utilizar a propriedade (a) da Proposição acima.

□

Mostraremos a seguir a existência da n-ésima raiz de um número real positivo.

Esta demonstração mostrará como a dificuldade do início (a respeito da irracionalidade de $\sqrt{2}$) pode ser tratada em $\mathbb{R}$.

Teorema 2.5.3 *Para todo $x > 0$ em $\mathbb{R}$ e todo $n \in \{2, 3, 4 \cdots\}$ existe um, e somente um, número real $y > 0$ tal que*

$$y^n = x.$$

Demonstração:

<u>**Unicidade:**</u>

Que existe no máximo um $y > 0$, com a propriedade acima, segue do fato que, se existirem $y_1, y_2 > 0$ distintos que satifazem a igualdade, poderemos supor, sem perda de generalidade, que

$$0 < y_1 < y_2.$$

Logo teremos

$$x = \underbrace{y_1^n}_{=x} = \underbrace{y_1 \cdots y_1}_{n\text{-fatores}} \overset{0<y_1<y_2}{<} \underbrace{y_2 \cdots y_2}_{n\text{-fatores}} = \underbrace{y_2^n}_{=x}, \tag{2.35}$$

o que seria um absurdo.

Logo se existir a raiz n-ésima de $\underline{x}$, ela deverá ser única.

<u>**Existência:**</u>

Seja E o conjunto formado pelos números reais positivos, que indicaremos por $\underline{t}$, tal que

$$t^n < x,$$

isto é:

$$E \doteq \{t > 0 \; ; \; t^n < x\}. \tag{2.36}$$

Notemos que se

$$t_o \doteq \frac{x}{1+x} \tag{2.37}$$

então

$$0 < t_o \overset{1<1+x, \text{ logo } 0<\frac{1}{1+x}<1}{<} x, \quad \text{ou seja,} \quad 0 < t_o < x \tag{2.38}$$

e

$$0 < t_o \overset{0<x<1+x, \text{ logo } 0<\frac{x}{1+x}<1}{<} 1.$$

Assim

$$\frac{t_o^n}{t_o} = t_o^{n-1} \overset{0<t_o<1, \text{ e como em (2.35)}}{<} 1^n = 1, \quad \overbrace{\text{ou seja,}}^{0<t_o} \quad t_o^n \overset{0<t_o<1}{<} t_o \overset{(2.38)}{<} x.$$

Logo $t_o \in E$ e portanto o conjunto E é não vazio.

Por outro lado se

$$t_1 \geq 1 + x > 1, \quad \text{segue que} \quad t_1^n = \overbrace{t_1^{n-1}}^{\overset{t_1>1 \text{ e } (2.35)}{>} 1} t_1 > t_1 \geq 1 + x > x,$$

ou seja,

$$t_1^n > x\,, \quad \text{assim} \quad t_1 \notin E,$$

o que implicará que $(1+x)$ é um limitante superior de E.

Como $\mathbb{R}$ tem propriedade do menor limitante superior, segue que existe

$$y \doteq \sup(E).$$

Vale observar que

$$0 \overset{(2.38)}{<} t_o \overset{t_o \in E \text{ e } y = \sup(E)}{\leq} y.$$

Para mostrar que

$$y^n = x,$$

provaremos que as desigualdades

$$y^n < x\,, \quad \text{ou} \quad y^n > x$$

não poderão ocorrer.

Para isto, observemos, primeiramente, que para $a,\, b \in \mathbb{R}$ teremos

$$b^n - a^n = (b-a)\cdot(\underbrace{b^{n-1} + b^{n-2}\cdot a + \cdots + b\cdot a^{n-2} + a^{n-1}}_{n-\text{parcelas}}).$$

Para ver isto, basta fazer a multiplicação do lado direito da igualdade acima que obteremos o membro à esquerda da mesma.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

Com isto teremos que a igualdade acima implicará em

$$b^n - a^n = (b-a)\cdot(\overbrace{b^{n-1} + \underbrace{b^{n-2}\cdot \underbrace{a}_{<b}}_{<b^{n-1}} + \cdots + \underbrace{b\cdot \underbrace{a^{n-2}}_{\overset{(2.35)}{<} b^{n-2}}}_{<b^{n-1}} + \underbrace{a^{n-1}}_{\overset{(2.35)}{<} b^{n-1}}}^{n-\text{parcelas}}) \overset{a<b}{<} (b-a)\cdot n\cdot b^{n-1}. \quad (2.39)$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$y^n < x.$$

Como

$$\frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}} > 0,$$

podemos escolher um número real $\underline{h}$ satisfzendo:

$$0 < h < 1 \quad \text{e} \quad h < \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}.$$

Consideremos

$$a \doteq y \quad \text{e} \quad b = y + h.$$

Observe que

$$0 < a < b$$

e assim podemos aplicar (2.39), que implicará em:

$$(y+h)^n - y^n < h\cdot n\cdot (y+h)^{n-1} \overset{y+h \overset{h<1}{<} y+1}{<} h\cdot n\cdot (y+1)^{n-1} \overset{h<\frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}}{<} x - y^n,$$

ou seja,

$$(y+h)^n < x,$$

implicando que

$$(y+h) \in E,$$

o que é um absurdo, pois

$$y+h > y$$

e $\underline{y}$ é um limitante superior do conjunto E (na verdade ele é o supremo do conjunto E).

Portanto deveremos ter

$$y^n \geq x.$$

Suponhamos agora, por absurdo, que

$$y^n > x.$$

Escolhamos

$$k \doteq \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}.$$

Notemos que

$$0 < k = \frac{y^n}{ny^{n-1}} - \frac{x}{ny^{n-1}} = \frac{y}{n} \underbrace{- \frac{x}{ny^{n-1}}}_{<0} < y.$$

Logo

$$0 < k < y, \quad \text{o que implicará que} \quad 0 < y - k.$$

Consideremos

$$b \doteq y \quad \text{e} \quad a \doteq y - k.$$

Assim

$$0 < a < b,$$

e aplicando-se (2.39) segue que:

$$y^n - (y-k)^n < k \cdot n \cdot y^{n-1} \overset{k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}}{=} y^n - x, \quad \text{ou seja,} \quad x < (y-k)^n,$$

o que implicará que

$$(y-k) \notin E.$$

Como

$$y - k > 0,$$

segue que este será um limitante superior de E, o que é um absurdo, $\underline{y}$ é o menor limitante superior (pois, $y = \sup(E)$).

Portanto

$$y^n = x,$$

completando a demosntração do resultado.

□

Notação 2.5.2 *Este número real y será indicado por $x^{\frac{1}{n}}$, ou seja,*

$$x^{\frac{1}{n}} \doteq y.$$

Como consequência temos o:

Corolário 2.5.2 *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *são positivos e* $n \in \{2, 3, 4, \cdots\}$ *então*

$$(a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}.$$

Demonstração:

Consideremos

$$\alpha \doteq a^{\frac{1}{n}} \quad \text{e} \quad \beta \doteq b^{\frac{1}{n}}.$$

Então

$$a \cdot b = \alpha^n \cdot \beta^n = (\alpha \cdot \beta)^n,$$

pois a operação de multiplicação é associativa e comutativa em $\mathbb{R}$.

A unicidade do Teorema (2.5.3) garante que

$$(a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \alpha \cdot \beta = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}},$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 2.5.16

1. *Existe uma relação entre números reais e números que possuem representação decimal.*

   Para ver isto, consideremos $x > 0$ *um número real.*

   Do Teorema (2.5.2) item (a) segue que existe um maior inteiro, não negativo, n_o *tal que*

   $$n_o \leq x.$$

   Os detalhes da demonstração deste fato serão deixados como exercício para o leitor.

   De modo análogo, podemos encontrar um maior inteiro n_1 *tal que*

   $$n_1 \leq 10 \cdot (x - n_o), \quad \textit{isto é}, \quad n_o + \frac{n_1}{10} \leq x.$$

   Prosseguindo no argumento acima (isto é, por indução), para cada $k = 0, 1, 2, \cdots$*, podemos encontrar números inteiros* $n_o, n_1, \cdots, n_{k-1}, n_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$*, os maiores inteiros, tais que*

   $$n_o + \frac{n_1}{10} + \cdots \frac{n_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{n_k}{10^k} \leq x.$$

   Seja E *o conjunto formado pelos números decimais*

   $$n_o + \frac{n_1}{10} + \cdots \frac{n_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{n_k}{10^k}, \quad k = 0, 1, 2 \cdots. \tag{2.40}$$

   Afirmamos que

   $$x = \sup(E).$$

   A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Com isto podemos definir a* **expansão decimal do número real** x*, como sendo o número:*

   $$n_o, n_1 n_2 n_3 \cdots. \tag{2.41}$$

Reciprocamente, para toda expansão decimal do tipo (2.41) representa um número real x.

Basta para isto notar que o conjunto E *formado pelos números da forma (2.40) é limitado superiormente (por, por exemplo,* $n_o + 1$*).*

Logo existe

$$x \doteq \sup(E) \in \mathbb{R},$$

que terá como expansão decimal (2.41).

Deixaremos como exercício para o leitor:

Exercício 2.5.1 *Mostre que* $x \in \mathbb{Q}^+$ *se, e somente se, sua expansão decimal é finita ou infinita e periódica.*

2.6 O Conjunto dos Números Reais Estendido

Definição 2.6.1 *Definimos o* **conjunto dos números reais estendido***, indicado por* $\mathbb{R}^*$*, como sendo o conjunto formado pelos números reais e pelos dois símbolos* $+\infty$ *e* $-\infty$*.*

Observação 2.6.1

1. *Podemos introduzir uma ordem total em* $\mathbb{R}^*$*, que estende a ordem total de* $\mathbb{R}$*, da seguinte maneira: se* $x, y \in \mathbb{R}^*$ *diremos que* x **é menor que** y*, indicando por* $x \overset{*}{<} y$*, por*

$$x \overset{*}{<} y \doteq \begin{cases} x < y, & \textit{para} \quad x, y \in \mathbb{R} \\ x = -\infty & e \quad y \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ y = +\infty & e \quad x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \end{cases} .$$

   Deste modo temos que $\overset{*}{<}$ *será uma relação de ordem total em* $\mathbb{R}^*$*.*

   A verificação deste fato é simples é será deixada como exercício para o leitor.

2. *Notemos que todo subconjunto de* $(\mathbb{R}^*, \overset{*}{<})$ *será limitado superiormente (por exemplo, por* $+\infty$*) e inferiormente (por exemplo, por* $-\infty$*).*

3. *Observemos que se* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não é limitado superiormente em* $\mathbb{R}$ *então*

$$\sup(E) = +\infty \quad \textit{em} \quad \mathbb{R}^*.$$

   O mesmo é válido para um subconjunto de $\mathbb{R}$ *não limitado inferiormente em* $\mathbb{R}$*.*

   Neste caso teremos

$$\inf(E) = -\infty \quad \textit{em} \quad \mathbb{R}^*.$$

4. *Notemos que não conseguiremos introduzir operações de adição e multiplicação em* $\mathbb{R}^*$*, que estendam as operações de adição e multiplicação de* $\mathbb{R}$*, de modo que este torne-se um um corpo (por que?).*

   Porém podemos introduzir as seguinte operações como os elementos $-\infty$ *e* $+\infty$ *de* $\mathbb{R}^*$*:*

   (i) *Se* $x \in \mathbb{R}$*, definiremos:*

$$x + \infty \doteq +\infty, \qquad x + (-\infty) \doteq -\infty, \qquad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} \doteq 0;$$

(ii) *Definiremos:*
$$+\infty + (+\infty) \doteq +\infty, \qquad -\infty + (-\infty) \doteq -\infty;$$

(iii) *Se $x > 0$, definiremos:*
$$x \cdot (+\infty) \doteq +\infty, \qquad x \cdot (-\infty) \doteq -\infty;$$

(iv) *Se $x < 0$, definiremos:*
$$x \cdot (+\infty) \doteq -\infty, \qquad x \cdot (-\infty) \doteq +\infty;$$

(v) *Definiremos:*
$$(+\infty) \cdot (+\infty) \doteq +\infty, \qquad (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) \doteq -\infty, \qquad (-\infty) \cdot (-\infty) \doteq +\infty.$$

2.7 Os Números Complexos

Definição 2.7.1 *Um* **número complexo** *é um par ordenado formado por números reais, isto é,*
$$(a, b) \quad \textit{com} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Observação 2.7.1 *A palavra "ordenado" significa que se*
$$a \neq b \quad \textit{então} \quad (a, b) \quad e \quad (b, a)$$
são pares ordenados distintos.

Definição 2.7.2 *Dados*
$$x = (a, b) \quad e \quad y = (c, d)$$
números complexos, diremos que **x é igual a y**, *escrevendo $x = y$, se, e somente se,*
$$a = c \quad e \quad b = d.$$

Definiremos a operação de **adição de x com y**, *indicada por $x + y$, como sendo o par ordenado $(a + c, b + d)$, isto é,*
$$x + y \doteq (a + c, b + d).$$

Definiremos a o peração de **multiplicação de x com y**, *indicada por $x.y$, como sendo o par ordenado $(a.c - b.d, a.d + b.c)$, isto é*
$$x \cdot y \doteq (a\,c - b\,d\,,\ a\,d + b\,c).$$

Teorema 2.7.1 *Com as operações de adição e multiplicação acima definidas o conjunto formado por todos os números complexos torna-se-á um corpo e será denotado por $\mathbb{C}$ (ou seja, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo).*

Notemos que o elemento neutro da adição será o par ordenado $(0, 0)$ e o elemento neutro da multiplicação será o par ordenado $(1, 0)$.

Demonstração:

Sejam
$$x = (a, b), \quad y = (c, d) \quad \text{e} \quad z = (e, f)$$
três números complexos.

Então:

(a1) Vale a propriedade do fechamento da adição:

De fato, temos, da propriedade do fechamento da adição de números reais, que

$$x + y = (\underbrace{a + c}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{b + d}_{\in\mathbb{R}}),$$

logo um par ordenado formado por números reais, ou seja, um número complexo.

Logo, vale a propriedade do fechamento para a operação $+$ definida acima;

(a2) Vale a propriedade comutativa da adição:

De fato, temos da propriedade comutativa da adição de números reais,

$$x + y = (\underbrace{a + c}_{=c+a}, \underbrace{b + d}_{=d+b}) = (c + a\,,\ d + b) = y + x,$$

logo a operação $+$ é comutativa;

(a3) Vale a propriedade associativa da adição:

De fato, temos, da propriedade associatida da adição de números reais, que

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= (a + c\,,\ b + d) + (e, f) = (\underbrace{(a + c) + e}_{a+(c+e)}, \underbrace{(b + d) + f}_{=b+(d+f)}) = (a + (c + e)\,,\ b + (d + f)) \\ &= (a, b) + (c + e\,,\ d + f) = x + (y + z).\end{aligned}$$

Logo, vale a propriedade associativa para a operação $+$ definida acima;

(a4) Vale a propriedade da existência do elemento neutro da adição:

Definamos $O \doteq (0, 0)$, que é um número complexo.

Com isto teremos

$$x + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a + 0\,,\ b + 0) = (a, b) = x,$$

ou seja, O é o ellmento neutro da operação $+$ definida acima;

(a5) Vale a propriedade da existência do elemento oposto da adição:

Dado $x = (a, b) \in \mathbb{C}$ defina

$$-x \doteq (-a, -b),$$

que é um número complexo.

Observemos que

$$x + (-x) = (a, b) + (-a, -b) = (a + (-a)\,,\ b + (-b)) = (0, 0) = 0,$$

ou seja, todo número complexo admite um oposto, no caso, $-x = (-a, -b)$, isto é, vale a propriedade da existência do elemento oposto da operação $+$ definida acima;

(m1) Vale a propriedade do fechamento da fechamento da multiplicação:

De fato, temos que

$$x \cdot y = (a, b) \cdot (c, d) = (\underbrace{a\,c - b\,d}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{a\,d + b\,c}_{\in\mathbb{R}}).$$

Logo um par ordenado formado por números reais, ou seja, um número complexo

Assim, vale a propriedade do fechamento para a operação $\cdot$ definida acima;

(m2) Vale a propriedade comutativa da multiplicação:

De fato, temos, das propriedades comutativa da multiplicação e da adição de números reais, que

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (a, b) \cdot (c, d) = (\underbrace{a\,c - b\,d}_{c\,a - d\,b}\,,\ \underbrace{a \cdot d + b \cdot c}_{= c\,b + d\,a}) = (c\,a - d\,b\,,\ c\,b + d\,a) \\ &= (c, d) \cdot (a, b) = y \cdot x. \end{aligned}$$

Logo a operação . sastisfaz a propriedade comutativa;

(m3) Vale a propriedade associativa da multiplicação:

De fato, temos, das propriedades comutativa, distributiva da multiplicação e da adição de números reais, que

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot z &= (a\,c - d\,b\,,\ a\,d + b\,c) \cdot (e, f) \\ &= ((a\,c - d\,tb)\,e - (a\,d + b\,c))\,f\,,\ (a\,c - d\,b)\,f + (a\,d + b\,c)\,e) \\ &= (a\,(c\,e - d\,f) - b\,(c\,f + d\,e)\,,\ a\,(c\,f + d\,e) + b\,(c\,e - d\,f)) \\ &= (a, b) \cdot (c\,e - d\,f\,,\ c\,f + d\,e) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] = x \cdot (y \cdot z). \end{aligned}$$

Logo a operação . satisfaz a propriedade associativa;

(m4) Vale a propriedade da existência do elemento neutro da multiplicação:

Definamos

$$1 \doteq (1, 0),$$

que é um número complexo.

Com isto teremos:

$$1 \cdot x = (1, 0) \cdot (a, b) = (\underbrace{1\,a}_{=a} - \underbrace{b\,0}_{=0}\,,\ \underbrace{a\,0}_{=0} + \underbrace{b\,1}_{=b}) = (a, b) = x,$$

ou seja 1, definido acima, é o elemento neutro da operação .;

(m5) Vale a propriedade da existência do elemento elemento inverso da multiplicação:

De fato, se

$$x = (a, b) \neq O = (0, 0)$$

então deveremos ter ou $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, ou seja, $a^2 + b^2 > 0$.

Deste modo podemos definir

$$x^{-1} \doteq \left(\underbrace{\frac{a}{a^2 + b^2}}_{\in \mathbb{R}}\,,\ \underbrace{\frac{-b}{a^2 + b^2}}_{\in \mathbb{R}} \right),$$

que é um número complexo.

Notemos que

$$\begin{aligned} x \cdot x^{-1} &= (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\,,\ \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left(a.\frac{a}{a^2 + b^2} - b.\frac{-b}{a^2 + b^2}\,,\ a.\frac{-b}{a^2 + b^2} + b.\frac{a}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}\,,\ 0 \right) = (1, 0) = 1, \end{aligned}$$

ou seja, todo número complexo diferente de $O = (0, 0)$ admite um número inverso (complexo);

(d) Vale a propriedade distributiva da multiplicação pela adição:

De fato, temos, das propriedades comutativa, distributiva da multiplicação e da adição de números reais, que

$$\begin{aligned} x \cdot (y+z) &= (a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)] = (a,b)\cdot(c+e, d+f) \\ &= (a\,(c+e) - b\,(d+f)\ ,\ a\,(d+f) + b\,(c+e)) \\ &= (a\,c - b\,d\ ,\ a\,d + b\,c) + (a\,e - b\,f\ ,\ a\,f + b\,e) = x\cdot y + x\cdot z \end{aligned}$$

, ou seja, vale a distributiva da operação $\cdot$ pela operação $+$.

Como as operações $+$ e . têm as propriedades acima o conjunto dos número complexos tornar-se-á um corpo.

□

Observação 2.7.2 *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *então*

$$\begin{aligned} (a,0)+(b,0) &= (a+b\ ,\ 0+0) = (a+b\ ,\ 0) \\ (a,0)\cdot(b,0) &= (a.b - \underbrace{0.0}_{=0}\ ,\ \underbrace{a.0}_{=0} + \underbrace{b.0}_{=0}) = (a.b, 0). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Ou seja os números complexos da forma $(a,0)$ *têm as mesmas propriedades relativamente às operações* $+$ *e . correspondentes aos números reais.*

Deste modo podemos identificar os números complexos da forma $(a,0)$ *com o número real* $\underline{a}$.

Mais explicitamente, notemos que todo número real $\underline{a}$ *pode ser identificado com o número complexo* $(a,0)$, *ou seja, temos uma aplicação*

$$T: \quad \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ a \mapsto (a,0) \end{array}.$$

Reciprocamente, todo número complexo da forma $(a,0)$ *pode ser identificado com o número real* $\underline{a}$, *ou seja, temos uma aplicação*

$$S: \quad \begin{array}{r} \{(a,0)\in\mathbb{C};\, a\in\mathbb{R}\} \to \mathbb{R} \\ (a,0) \mapsto a \end{array}.$$

Assim, de (2.42), *segue que as aplicações* T *e* S *preservam as operações em* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$, *ou de* $\{(a,0)\in\mathbb{C};\, a\in\mathbb{R}\}$ *e* $\mathbb{R}$, *respectivamente.*

Desta forma entenderemos a inclusão:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Na verdade esta inclusão é uma identificação que, por abuso de notação, escrevemos como acima.

Definição 2.7.3 *Denotemos o número complexo* $(0,1)$ *por* $\underline{i}$, *isto é,*

$$i \doteq (0,1).$$

Observação 2.7.3

1. *Observemos que*

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0.0 - 1.1\,,\, 0.1 + 1.0) = (-1,0) = -(1,0) \overset{item\ acima}{=} -1,$$

ou seja,

$$i^2 = -1.$$

2. *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *então*

$$\begin{aligned}(a,b) &= (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b.0 - 0.1\,,\, b.1 + 0.0) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) \\ &= a + b \cdot i,\end{aligned}$$

isto é,

$$(a,b) = a + b \cdot i.$$

__Conclusão:__ *todo número complexo pode ser colocado na forma*

$$a + b \cdot i,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $i^2 = -1$.

2. *Nesta situação, se*

$$z = a + b \cdot i \quad e \quad w = c + d \cdot i,$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *teremos*

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c\,,\, b + d) = (a + c) + (b + d) \cdot i \\ z \cdot w &= (a\,c - b\,d\,,\, a\,d + b\,c) = (a\,c - b\,d) + (a\,d + b\,c) \cdot i. \end{aligned}$$

3. *Das propriedades das operações* $+$ *e* $\cdot$ *para números complexos, teremos que:*

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) = a \cdot c + a \cdot (d \cdot i) + b \cdot (c \cdot i) + (b \cdot i) \cdot (d \cdot i) \\ &\overset{i^2=-1}{=} (a\,c - b\,d) + (a\,d + b\,c) \cdot i, \end{aligned}$$

que é como foi definido o produto de dois números complexos inicialmente.

Definição 2.7.4 *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $z = a + b \cdot i$ *um número complexo.*
Definimos o __conjugado de__ z, *indicado por* $\overline{z}$, *como sendo o número complexo*

$$\overline{z} \doteq a - b \cdot i.$$

No caso, diremos que o número real $\underline{a}$ *é a* __parte real__ *e o número real* $\underline{b}$ *é a* __parte imaginária__ *do número complexo* $\underline{z}$, *que serão indicadas por* $\Re(z)$ *e* $\Im(z)$, *respectivamente, isto é,*

$$\Re(z) = a \quad e \quad \Im(z) = b.$$

Um número complexo $\underline{z}$ *será dito* __imaginário puro__ *se*

$$\Re(z) = 0.$$

Observação 2.7.4 *Seja* $z = a + b \cdot i$.

1. *Se* $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ *então*
$$\bar{z} = (a, -b).$$

2. *O número complexo* $\underline{z}$ *será imaginário puro (isto é,* $\Re(z) = 0$*) se, e somente se,*
$$a = 0, \quad \textit{ou seja}, \quad z = b \cdot i, \quad \textit{ou ainda}, \quad z = (0, b).$$

3. *Por outro lado, o número complexo* $\underline{z}$ *será um número real(isto é,* $z \in \mathbb{R}$*) se, e somente se,*
$$b = 0, \quad \textit{ou seja}, \quad \Im(z) = 0, \quad \textit{isto é}, \quad z = z + 0 \cdot i, \quad \textit{ou ainda}, \quad z = (z, 0)$$
ou, equivalentemente,
$$\bar{z} = z.$$

Com isto temos a:

Proposição 2.7.1 *Se* z *e* w *são números complexos então:*

(a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$*;*

(b) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \overline{w}$*;*

(c) $z + \bar{z} = 2 \cdot \Re(z)$ *e* $z - \bar{z} = 2 \cdot i \cdot \Im(z)$*;*

(d) $z \cdot \bar{z}$ *é um número real maior ou igual a zero, ou ainda ,*
$$z \cdot z \geq 0 \quad e \quad z \cdot z = 0 \quad \textit{se, e somente se}, \quad z = 0.$$

Demonstração:
Suponhamos que
$$z = a + b \cdot i \quad \text{e} \quad w = c + d \cdot i.$$
Com isto teremos
$$\Re(z) = a \quad \text{e} \quad \Im(z) = b.$$
Então
$$z + w = (a + c) + (b + d) \cdot i \quad \text{e} \quad z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i.$$
Com isto teremos:
<u>De (a):</u>
$$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + (b + d) \cdot i} = (a + c) - (b + d) \cdot i = (a - b \cdot i) + (c - d \cdot i) = \bar{z} + \bar{w}.$$

<u>De (b):</u>
$$\overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc) \cdot i} = (ac - bd) - (ad + bc) \cdot i = (a - b \cdot i) \cdot (c - d \cdot i) = \bar{z} \cdot \overline{w}.$$

<u>De (c):</u>
$$z + \bar{z} = (a + b \cdot i) + (a - b \cdot i) = 2 \cdot a = 2 \cdot \Re(z),$$
$$z - \bar{z} = (a + b \cdot i) - (a - b \cdot i) = 2 \cdot b \cdot i = 2 \cdot \Im(z) \cdot i.$$

De **(d)**:

$$z \cdot \bar{z} = (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 - a \cdot b \cdot i + b \cdot a \cdot i + (b \cdot i) \cdot (-b \cdot i) \overset{i^2=-1}{=} a^2 + b^2,$$

ou seja,

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \geq 0.$$

Além disso, notemos que

$$z \cdot \bar{z} = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad a^2 + b^2 = 0$$

ou, equivalentemente,

$$a = b = 0, \quad \text{ou seja,} \quad z = 0,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Devido a parte (d) do resultado acima podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 2.7.5 *Se $z \in \mathbb{C}$ definimos o* **módulo** *de z, indicado por $|z|$, como sendo*

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}\ ,$$

onde estamos considerando a raiz quadrada de números reais, não negativos.

Observação 2.7.5 *Vale observar que se $x \in \mathbb{R}$ então*

$$|x| = \sqrt{x \cdot \bar{x}} \overset{\bar{x}=x}{=} \sqrt{x^2},$$

ou seja,

$$|x| = \begin{cases} x, & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}.$$

Portanto a função módulo definida em $\mathbb{C}$ quando restrita aos números reais coincide com a função valor absoluto de $\mathbb{R}$.

A seguir daremos algumas propriedades da função valor absoluto.

Proposição 2.7.2 *Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ onde $z = a + b \cdot i$. Então:*

(a) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;

(b) $|z| \geq 0$ *e* $|z| = 0$ *se, e somente se,* $z = 0$;

(c) $|\bar{z}| = |z|$;

(d) $|z \cdot w| = |z|\,|w|$;

(e) $|\Re(z)| \leq |z|$ *e* $|\Im(z)| \leq |z|$;

(f) *(Desigualdade triangular)* $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Demonstração:

De **(a)**:

Observemos que

$$z \cdot \overline{z} = (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 - a \cdot b \cdot i + b \cdot a \cdot i - b^2 \cdot \underbrace{(i)^2}_{=-1} = a^2 + b^2.$$

Logo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

como queríamos mostrar.

De **(b)**:

Do item (a) temos que

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0.$$

Além disso,

$$|0| = 0$$

e se $|z| = 0$ então, sendo

$$z = a + b \cdot i,$$

teremos

$$\sqrt{a^2 + b^2} = |z| = 0,$$

o que implicará

$$a = b = 0, \quad \text{ou seja,} \quad z = O,$$

como queríamos mostrar.

De **(c)**:

Notemos que se

$$z = a + b \cdot i,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$, então

$$|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} \overset{(-b)^2 = b^2}{=} \sqrt{a^2 + b^2} = |z|,$$

como queríamos mostrar.

De **(d)**:

Observemos que se

$$z = a + b \cdot i \quad \text{e} \quad w = c + d \cdot i,$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, então

$$|z \cdot w|^2 = |(a\,c - b\,d) + (a\,d + b\,c) \cdot i|^2 = (a\,c - b\,d)^2 + (a\,d + b\,c)$$
$$\overset{\text{Exercício}}{=} (a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2) = |z|^2\,|w|^2,$$

assim

$$|z \cdot w| = |z|\,|w|,$$

como queríamos mostrar.

De **(e)**:

Notemos que

$$|\Re(z)|^2 = a^2 \leq a^2 + b^2 = |z|^2.$$

De modo análogo, segue que

$$|\Im(z)|^2 = b^2 \leq a^2 + b^2 = |z|^2,$$

ou seja,

$$|\Re(z)|,\ |\Im(z)| \leq |z|,$$

como queríamos mostrar.

De $(\mathbf{f})$:

Observemos que

$$z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot w \overset{\overline{\overline{z} \cdot w} = z \cdot \overline{w}}{=} \overline{(z \cdot \overline{w})} + (\overline{z} \cdot w) = 2 \cdot \Re(z \cdot \overline{w}).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w) \cdot \overline{(z+w)} \overset{\text{Prop. (2.7.1) item (a)}}{=} (z+w) \cdot (\overline{z} + \overline{w}) = z \cdot \overline{z} + z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z} + w \cdot \overline{w} \\
&= |z|^2 + 2 \cdot \underbrace{\Re(z \cdot \overline{w})}_{\leq |\Re(z \cdot \overline{w})| \overset{\text{item (e) acima}}{\leq} |z \cdot \overline{w}|} + |w|^2 \leq |z|^2 + 2 \cdot \underbrace{|z \cdot \overline{w}|}_{\overset{\text{item (c) acima}}{=} |z| \cdot |\overline{w}|} + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2 \cdot |z| \cdot \underbrace{|\overline{w}|}_{\overset{\text{item (b) acima}}{=} |w|} + |w|^2 = |z|^2 + 2 \cdot |z| \cdot |w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|z + w| \leq |z| + |w|,$$

completando a demonstração do item e do resultado.

□

Notação 2.7.1 *Utilizaremos com freqüência o somatório para abreviar somas, mais explicitamente: se* $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{C}$ *então denotaremos por:*

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \doteq x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Terminaremos esta seção com a seguinte importante desigualdade, denominda **desigualdade de Cauchy-Schwarz** (em $\mathbb{C}^n$):

Teorema 2.7.2 *Sejam* $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{C}$. *Então*

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \overline{b_j} \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.43}$$

Demonstração:

Definamos

$$A \doteq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \ , \ B \doteq \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \quad \text{e} \quad C = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \overline{b_j}.$$

Com isto basta mostrarmos que

$$|C| \leq A^2 \cdot B^2.$$

Para isto observemos, inicialmente, que $A,\ B \in \mathbb{R}^+$.

Notemos também que se

$$B = 0, \quad \text{deveremos ter} \quad b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$$

e a desigualdade (2.43) tornar-se-á uma igualdade, pois neste caso o lado direito e o lado esquerdo da desigualdade acima serão zero.

Por outro lado se $B > 0$ teremos:

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{j=1}^{n} |B \cdot a_j - C \cdot b_j|^2 &= \sum_{j=1}^{n} (B \cdot a_j - C \cdot b_j)\overline{(B \cdot a_j - C \cdot b_j)} \\
&\overset{\text{Prop. (2.7.1) (a)}}{=} \sum_{j=1}^{n} (B \cdot a_j - C \cdot b_j)\,(\overline{B \cdot a_j} - \overline{C \cdot b_j}) \\
&\overset{\text{Prop. (2.7.1) (a)}}{=} \sum_{j=1}^{n} (B \cdot a_j - C \cdot b_j)(\overline{B} \cdot \overline{a_j} - \overline{C} \cdot \overline{b_j}) \\
&\overset{(B \text{ é real assim } \overline{B}=B)}{=} \sum_{j=1}^{n} (B \cdot a_j - C \cdot b_j)(B \cdot \overline{a_j} - \overline{C} \cdot \overline{b_j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (B \cdot a_j \cdot B \cdot \overline{a_j} - B \cdot a_j \cdot \overline{C} \cdot \overline{b_j} - C \cdot b_j \cdot B \cdot \overline{a_j} + C \cdot b_j \cdot \overline{C} \cdot \overline{b_j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (B^2 \cdot |a_j|^2 - B \cdot \overline{C} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \overline{b_j} - B \cdot C \cdot \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} \cdot b_j + |C|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \\
&= B^2 \cdot A - B \cdot \overline{C} \cdot C - B \cdot C \cdot \overline{C} + |C|^2 \cdot B = B^2 \cdot A - B \cdot |C|^2 = B \cdot (A \cdot B - |C|^2).
\end{aligned}$$

Mas o lado esquerdo da desigualdade acima é não negativo, logo deveremos ter

$$B \cdot (A \cdot B - |C|^2) \geq 0.$$

Como $B > 0$ segue que

$$A \cdot B - |C|^2 \geq 0, \quad \text{ou seja,} \quad A \cdot B \geq |C|^2$$

ou, equivalentemente,

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \overline{b_j} \right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \right),$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 2.7.6 *A partir deste momento deixaremos de colocar* $\cdot$ *para indicar a multiplicação de números reais ou complexos.*

2.8 Espaços Euclideanos

Definição 2.8.1 *Para* $k \in \mathbb{N}$ *definiremos o conjunto* $\mathbb{R}^k$ *como sendo o conjunto formado por todas as* k*-uplas ordenadas,*

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_k),$$

onde $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2 \cdots, k$ *que serão ditas* **coordenadas de** x, *isto é,*

$$\mathbb{R}^k \doteq \{(x_1, \cdots, x_k) \; ; \; x_j \in \mathbb{R}, \, j = 1, \cdots, k\}.$$

Podemos introduzir duas operações no conjunto $\mathbb{R}^k$, a saber:

Definição 2.8.2 *Se* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *definiremos a* **adição das k-uplas x com y**, *indicada por* $x + y$, *como sendo:*

$$x + y \doteq (x_1 + y_1\,,\, x_2 + y_2\,, \cdots,\, x_k + y_k)$$

e definiremos a **multiplicação do número real α pela k-upla x**, *que será indicada por* $\alpha \cdot x$, *como sendo:*

$$\alpha \cdot x \doteq (\alpha x_1\,,\, \alpha x_2\,, \cdots,\, \alpha x_k).$$

Observação 2.8.1

1. *Notemos que se* $x, y \in \mathbb{R}^k$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *então*

$$x + y,\ \ \alpha \cdot x \in \mathbb{R}^k.$$

2. *Com estas operações* $\left(\mathbb{R}^k, +, \cdot\right)$ *tornar-se-á um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$.

   A verificação disto será deixada como exercício para o leitor.

   Os elementos de $(\mathbb{R}^k, +, \cdot)$ *serão denominados* **vetores**.

   O vetor nulo, O, *será a* k*-upla nula, isto é,*

$$O \doteq (0, 0, \cdots, 0)$$

   e o vetor oposto associado ao vetor $x = (x_1\,, x_2\,, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ *será o vetor*

$$-x \doteq (-x_1\,, -x_2\,, \cdots, -x_k).$$

3. *Podemos também introduzir um* **produto interno** *em* $(\mathbb{R}^k, +, \cdot)$ *da seguinte forma: se*

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_k),\ \ y = (y_1, y_2, \cdots, y_k) \in \mathbb{R}^k,$$

   definimos o **produto interno do vetor x pel vetor y**, *que será indicado por* $x \bullet y$, *como sendo:*

$$x \bullet y \doteq \sum_{j=1}^{k} x_j\, y_j. \tag{2.44}$$

   A verificação deste será deixada como exercício para o leitor.

4. *Com este podemos definir uma* **norma** *em* $(\mathbb{R}^k, +, \cdot, \bullet)$ *do seguinte modo: se*

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k,$$

   definimos a **norma do vetor x**, *que será indicada por* $\|x\|$, *como sendo:*

$$\|x\| \doteq \sqrt{x \bullet x} = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} x_j^2}. \tag{2.45}$$

5. $(\mathbb{R}^k, +, \cdot, \bullet)$ *será denominado* **k-espaço euclideano ou espaço euclideano de dimensão k**.

O espaço euclideano $(\mathbb{R}^k, +, \cdot, \bullet)$ possuem as seguintes propriedades:

Proposição 2.8.1 *Sejam* x, y, $z \in \mathbb{R}^k$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então:*

(PI-1) $(x+y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$ *e* $(\alpha x) \bullet z = \alpha(x \bullet z)$;

(PI-2) $x \bullet y = y \bullet x$;

(PI-3) $x \bullet x \geq 0$ *e* $x \bullet x = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

(N-1) $\|x\| \geq 0$ *e* $\|x\| = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

(N-2) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \, \|x\|$;

(N-3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

(N-4) $\|x \bullet y\| \leq \|x\| \, \|y\|$ *(desigualdade de Cauchy-Schwarz)*;

(N-5) $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$.

Demonstração:
A demonstração será deixada como excercício para o leitor.

□

Observação 2.8.2 *As três primeiras propriedades são as que definem um produto interno.*

As três propriedaeds seguintes são as que definem uma norma.

Lembremos que sendo $(\mathbb{R}^k, +, \cdot, \bullet)$ *um espaço com produto interno (logo normado) será um* **espaço métrico**.

A distância será a distância associada à norma $\|.\|$, *isto é dada por*

$$d(x, y) \doteq \|x - y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^k.$$

A verificação destes fatos serão deixados como exercício para o leitor.

Capítulo 3

Alguns Elementos de Topologia

Neste capítulo trataremos de alguns elementos importantes da Topologia, a saber: conjuntos finitos, enumeráveis, não enumeráveis; espaços métricos; conjuntos compactos; conjuntos perfeitos e conjuntos conexos.

O nosso foco principal será a reta $\mathbb{R}$, munida da métrica usual.

3.1 Conjuntos Finitos, Enumeráveis e Não Enumeráveis

A seguir lembraremos algumas definições importantes que serão utilizadas ao longo deste capítulo.

Observação 3.1.1

1. *Dados dois conjuntos* A *e* B *não vazios, suponhamos que a cada elemento de* $x \in A$ *está associado um único elemento* $y \in B$*, que denotaremos por* $f(x)$*.*

   Neste caso diremos que essa relação entre A *e* B *é uma* **função***, que será denotada por*

   $$f : A \to B.$$

   O conjunto A *será dito* **domínio** *da função* $\underline{f}$ *e o conjunto* B *será dito* **contra-domínio** *da função* $\underline{f}$*.*

   O elemento $f(x) \in B$ *será dito* **valor** *da função* $\underline{f}$ *em* $x \in A$*.*

   O subconjunto do conjunto B *formado por todos os valores assumidos pela função* $\underline{f}$ *será dito* **imagem** *da função* $\underline{f}$ *e indicado por* $I(f)$*, isto é,*

   $$I(f) \doteq \{f(x)\,;\, x \in A\}.$$

2. *Se* $E \subseteq A$ *então denotaremos por* $f(E)$*, o conjunto formado por todos os* $f(x)$*, para* $x \in E$*, isto é,*

   $$f(E) \doteq \{f(x)\,;\, x \in E\}.$$

   Neste caso, a imagem da função $\underline{f}$ *será o subconjunto* $f(A) \subseteq B$*, isto é,*

   $$I(f) = f(A).$$

3. *Se* $f(A) = B$ *diremos que a função* $\underline{f}$ *é uma função* **sobrejetora***.*

4. *Se para todo* $x, y \in A$ *tal que*

   $$x \neq y \quad \textit{temos} \quad f(x) \neq f(y),$$

   diremos que a função $\underline{f}$ *é uma função* **injetora***.*

5. *Se a função* $\underline{f}$ *for sobrejetora e injetora então ela será dita função* **bijetora**.

6. *Se* $F \subseteq B$, *denotaremos por* $f^{-1}(F)$, *o conjunto dos* $x \in A$ *tal que* $f(x) \in F$, *que será denominado* **imagem inversa** *do conjunto* F *pela função* $\underline{f}$, *isto é,*

$$f^{-1}(F) \doteq \{x \in A : f(x) \in F\}.$$

Logo, se $y \in B$ *então* $f^{-1}(\{y\})$ *denotará o conjunto formado por todos os* $x \in A$ *tal que* $f(x) = y$, *isto é,*

$$f^{-1}(\{y\}) \doteq \{x \in A : f(x) = y\}.$$

7. *Observemos que se para cada* $y \in B$, $f^{-1}(\{y\})$ *tem, pelo menos, um elemento, então a função* $\underline{f}$ *será uma função sobrejetora.*

8. *Observemos que se para cada* $y \in B$, $f^{-1}(\{y\})$ *tem, no máximo, um elemento, então a função* $\underline{f}$ *será uma função injetora.*

Baseado nas considerações acima podemos estabelecer a:

Definição 3.1.1 *Sejam* A *e* B *dois conjuntos.*

Se existir uma função bijetora de A *em* B, $f : A \to B$, *diremos que o conjunto* **A têm a mesma cardinalidade do conjunto B**, *de maneira abreviada escreveremos* $A \sim B$, *que leremos como:*

$$o \text{ conjunto } A \quad \text{é equivalente ao conjunto } B.$$

Neste caso escreveremos

$$\#(A) = \#(B).$$

Com isto temos a:

Proposição 3.1.1 *A relação* $\sim$ *é uma* **relação de equivalência** *sobre o conjunto formado por todos os conjuntos, isto é, a relação* $\sim$ *satisfaz as seguintes propriedades: sejam* A, B, C *conjuntos, então*

(a) *Reflexiva:* $A \sim A$;

(b) *Simétrica: se* $A \sim B$ *então* $B \sim A$;

(c) *Transitiva: se* $A \sim B$ *e* $B \sim C$ *então* $A \sim C$.

Demonstração:

A demonstração é simples e será deixada como exercício para o leitor.

□

Definição 3.1.2 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *defina* J_n *como sendo o conjunto formado pelos números naturais* $1, 2, \cdots, n$, *isto é,*

$$J_n \doteq \{1, 2, \cdots, n\}$$

e J *formado por todos os números inteiros positivos, isto é,*

$$J \doteq \mathbb{N}.$$

Seja A *um subconjunto qualquer.*

Diremos que:

(a) *o conjunto* A *é* **finito** *se*

$$A \sim J_n,$$

para algum $n \in \mathbb{N}$.

O conjunto vazio é, por definição, finito;

(b) *o conjunto* A *é* **infinito** *se não for finito;*

(c) *o conjunto* A *é* **enumerável** *se*

$$A \sim J;$$

(d) *o conjunto* A *é* **não enumerável** *se* A *não for finito e também não for enumerável ;*

(e) *o conjunto* A *é* **no máximo enumerável** *se for finito ou enumerável .*

Observação 3.1.2 *Para dois conjuntos finitos* A *e* B *temos que* $A \sim B$ *se, e somente se,* A *e* B *têm o mesmo número de elementos.*

Para conjuntos infinitos a idéia de ter o mesmo número de elementos tornar-se-á vaga, ou melhor, não precisa.

Neste contexto a idéia de construir uma correspondência bijetora entre os dois conjuntos deixa a situação mais clara.

Exemplo 3.1.1 *Seja* $A \doteq \mathbb{Z}$ *o conjunto dos inteiros. Mostre que o conjunto* A *é enumerável.*

Resolução:

Para isto basta considerar a seguinte correspondência entre J e A:

$$\begin{array}{cccccccccc} J: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ A: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots \end{array}$$

Podemos dar uma fórmula explícita para a função $f : J \to A$, acima, da seguinte maneira:

$$f(n) \doteq \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par;} \\ -\dfrac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Observemos que a função $\underline{f}$ é uma função bijetora.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Portanto

$$A \sim J,$$

ou seja, o conjunto A é enumerável.

Observação 3.1.3

1. *Um conjunto finito* **não** *poderá ser equivalente a um subconjunto próprio seu, isto é, se* A *é finito,*

$$\underline{\textbf{não}} \textit{ existe} \quad B \subseteq A, \quad B \neq A \quad \textit{tal que} \quad B \sim A.$$

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Porém isto pode acontecer se o conjunto é infinito, como mostra o Exemplo (3.1.1) acima.*

   No Exemplo acima o conjunto J é subconjunto próprio do conjunto A e tem a mesma cardinalidade do conjunto A.

3. *Na verdade poderíamos trocar a condição (b) da Definição (3.1.2) pela seguinte: um conjunto A é infinito se for equivalente a um subconjunto próprio seu.*

   A demonstração deste fato será deixada a cargo do leitor.

Definição 3.1.3 *Uma* **sequência numérica** *em um conjunto E é uma aplicação $\underline{f}$ definida no conjunto enumerável I com valores em E, isto é,*

$$f : I \to E.$$

Como $I \sim \mathbb{N}$, se indicarmos

$$x_n \doteq f(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

denotaremos a sequência por:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad ou \quad \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad ou \quad (x_n), \quad ou \quad \{x_n\}, \quad ou\ ainda, \quad x_1, x_2, x_3, \cdots.$$

Os valores da função $\underline{f}$, isto é, os elementos $x_n = f(n)$, $n \in N$, serão ditos **termos da sequência**.

Se na situação acima $f : \mathbb{N} \to A$, diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma **sequência de elementos do conjunto A** *ou uma* **sequência no conjunto A**.

Observação 3.1.4

1. *Os termos da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (isto é, $x_1, x_2, x_3, \cdots$) não precisam ser, necessariamente, distintos.*

2. *Como todo conjunto enumerável é imagem de uma aplicação bijetora definida em $\mathbb{N}$, podemos olhar um conjunto enumerável como o conjunto dos termos de uma sequência de termos distintos.*

   Formalmente, podemos dizer que os termos de um conjunto enumerável podem ser "arranjados em uma sequência".

3. *Em algumas situações podemos trocar*

   $$\mathbb{N} \doteq \{1, 2, 3 \cdots\}$$

   pelo conjuto dos números inteiros não negativos, isto é, por

   $$\mathbb{Z}^+ \doteq \{0, 1, 2, 3 \cdots\},$$

   isto significa que em vez de começarmos o arranjo por 1 começaremos por 0, o que dá no mesmo pois ambos os conjunto $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}^+$ são enumeráveis (verifique!).

Com isto temos a:

Teorema 3.1.1 *Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável A é um conjunto enumerável.*

Demonstração:

Suponhamos que $E \subseteq A$ é infinito.

Arranjemos os elementos do conjunto A como uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termos distintos.

Construamos uma sequência $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dos números naturais da seguinte forma:

(i) Seja n_1 o menor inteiro positivo, tal que $x_{n_1} \in E$;

(ii) Como E é infinito, temos que

$$E \setminus \{x_{n_1}\} \neq \emptyset.$$

Logo podemos encontrar n_2, o menor inteiro positivo, satisfazendo

$$n_2 > n_1 \quad \text{e} \quad x_{n_2} \in E;$$

(iii) Repetindo o processo acima, tendo escolhido $n_1, n_2, \cdots, n_{k-1}$, para $k = 2, 3, \cdots$, podemos escolher $n_k \in \mathbb{N}$, o menor inteiro positivo, satisfazendo

$$n_k > n_{k-1} \quad \text{e} \quad x_{n_k} \in E.$$

Definamos a função $f : \mathbb{N} \to E$ da seguinte forma:

$$f(k) \doteq x_{n_k}.$$

Observemos que a função $\underline{f}$ é uma função bijetora entre os conjuntos $\mathbb{N}$ e E (verifique!), ou seja, $E \sim J$, mostrando que o conjunto E é um conjunto enumerável, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.1.5 *A grosso modo, o resultado acima nos diz que os conjuntos enumeráveis representam o menor conjunto infinito.*

*Mais rigorosamente, nenhum conjunto infinito, **não** enumerável, pode ser subconjunto de um conjunto enumerável, pois se fosse, do Teorema acima, este deveria ser enumerável.*

Definição 3.1.4 *Sejam A e Ω conjuntos, não vazios, e suponhamos que a cada elemento $\alpha \in A$ está associado um subconjunto de Ω, que indicaremos por E_α, isto é, temos uma aplicação:*

$$\begin{array}{ccc} A & \to & \mathcal{P}(\Omega) \\ \alpha & \mapsto & E_\alpha \end{array},$$

onde $\mathcal{P}(\Omega)$ é o conjunto das partes de Ω, isto é, o conjunto formado por todos os subconjuntos de Ω.

A aplicação acima será indicada por:

$$\{E_\alpha\}, \quad ou \quad \{E_\alpha\,;\, \alpha \in A\}, \quad ou\ ainda \quad \{E_\alpha\}_{\alpha\in A}\,.$$

Com esta podemos introduzir a:

Definição 3.1.5 *Na situação acima, definimos a **união** dos conjuntos E_α, sobre todos os α pertencentes ao conjunto A, que será indicada por*

$$S = \bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha,$$

como sendo o conjunto formado pelos x *tal que* $x \in E_\alpha$ *para algum* $\alpha \in A$, *isto é,*

$$\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \doteq \{x\,;\ \textit{existe}\ \alpha \in A\ \textit{tal que}\ x \in E_\alpha\}.$$

Se $A \doteq \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ *então escreveremos*

$$S = \bigcup_{m=1}^{n} E_m \quad , \textit{ ou seja,} \quad S = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m.$$

Se $A \doteq \mathbb{N}$ *escreveremos*

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Podemos também definir a **intersecção** *dos conjuntos* E_α, *sobre todos os* α *pertencentes ao conjunto* A, *que será indicada por*

$$P = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha,$$

como sendo o conjunto formado pelos x *tal que* $x \in E_\alpha$ *para todo* $\alpha \in A$, , *isto é,*

$$\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \doteq \{x\,;\ x \in E_\alpha,\ \textit{para todo}\ \alpha \in A\}.$$

De modo análogo ao caso da união, se $A \doteq \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ *então escreveremos*

$$S = \bigcap_{m=1}^{n} E_m \quad , \textit{ ou seja,} \quad S = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_m$$

e se $A \doteq \mathbb{N}$ *escreveremos*

$$S = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Observação 3.1.6 *O símbolo "∞" que aperece em algumas das situações acima, indicada somente que a união, ou a intersecção, dos conjuntos é tomada sobre um conjunto enumerável.*

Temos também a

Definição 3.1.6 *Dados os conjuntos* A *e* B, *se*

$$A \cap B \neq \emptyset,$$

diremos que **o conjunto A intercepta o conjunto B**, *caso contrário, isto é, se*

$$A \cap B = \emptyset,$$

diremos que os conjuntos A *e* B *são* **disjuntos**.

Podemos também definir a **diferença do conjunto A pelo conjunto B**, *que será indicada por* $A \setminus B$ *ou* $A - B$, *como sendo os pontos do conjunto* A *que não estão no conjunto* B, *isto é,*

$$A \setminus B \doteq \{a \in A\,;\ a \notin B\}.$$

Para completar temos a

Definição 3.1.7 *Dado* $E \subseteq X$ *definimos o* **complementar do conjunto** E **(no conjunto** X**)**, *que será indicado por* E^c, *como sendo os elementos do conjunto* X *que não pertecem ao conjunto* E, *isto é,*

$$E^c \doteq \{x \in X\,;\, x \notin E\} = X \setminus E.$$

Exemplo 3.1.2

1. *Suponhamos que*

$$E_1 \doteq \{1, 2, 3\} \quad e \quad E_2 \doteq \{2, 3, 4\}.$$

Então é imediato que

$$E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 3, 4\} \quad e \quad E_1 \cap E_2 = \{2, 3\}.$$

2. *Seja*

$$A \doteq (0, 1] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, 0 < x \leq 1\}.$$

Para cada $x \in A$ *definamos*

$$E_x \doteq (0, x) = \{y \in \mathbb{R}\,;\, 0 < y < x\}.$$

Então:

(i) $E_x \subseteq E_z$ *se , e somente se,* $0 < x \leq z \leq 1$;

(ii) $\bigcup_{x \in A} E_x = E_1 = (0, 1)$;

(iii) $\bigcap_{x \in A} E_x = \emptyset$.

De fato, notemos que as propriedades (i) e (ii) podem ser obtidas observando-se que

$$E_x = (0, x), \quad E_z = (0, z) \quad e \quad E_1 = (0, 1).$$

Para mostrar (iii) notemos que se $y > 0$ *então*

$$y \notin E_x = (0, x) \quad se \quad x < y.$$

Logo

$$y \notin \bigcap_{x \in A} E_x,$$

mostrando a afirmação.

Observação 3.1.7 *Muitas propriedades da reunião e da intersecção são similares às correspondentes da adição e multiplicação, isto é, podemos, em várias situações, trocar os símbolos* $\sum$ *e* $\prod$, *relacionados com as propriedades básicas da adição e da multiplicação pelos símbolos* $\bigcup$ *e* $\bigcap$, *respectivamente.*

Por exemplo, valem as seguintes propriedades relacionadas com a reunião e a interseção de conjuntos:

Proposição 3.1.2

1. *vale a propriedade comutativa para a reunião ou a interseção de conjuntos, isto é,*

$$A \cup B = B \cup A \quad e \quad A \cap B = B \cap A;$$

2. *vale a propriedade associativa para a reunião ou a interseção de conjuntos, isto é,*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad e \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

3. *vale a propriedade distributiva da interseção em relação a reunião de conjuntos e vice-versa, isto é,*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad e \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

4. *Temos que:*

$$A \subseteq A \cup B \quad e \quad A \cap B \subseteq A \text{ (ou } B);$$

$$A \cup \emptyset = A \quad e \quad A \cap \emptyset = \emptyset;$$

5. *Se* $A \subseteq B$ *então*

$$A \cup B = B \quad e \quad A \cap B = A;$$

6. *Temos também que*

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{se, e somente se,} \quad A \subseteq B^c.$$

Demonstração:

Faremos a demonstração da primeira identidade do item 3. .

As outras propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

Definamos

$$E \doteq A \cap (B \cup C) \quad \text{e} \quad F \doteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Suponhamos que $x \in E$.

Então $x \in A$ e $x \in B \cup C$, isto é, $x \in B$ ou $x \in C$.

Logo

$$x \in A \cap B \quad \text{ou} \quad x \in A \cap C, \quad \text{isto é,} \quad x \in (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad \text{ou seja,} \quad E \subseteq F.$$

Por outro lado, se $x \in F$ então $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$.

Logo

$$x \in A \quad \text{e} \quad x \in B \cup C, \quad \text{isto é,} \quad x \in A \cap (B \cup C) \quad \text{, ou seja} \quad F \subseteq E.$$

Portanto

$$E = F,$$

como queríamos mostrar.

□

A seguir exibiremos uma outra propriedade da teoria dos conjuntos que será importante no que virá mais adiante:

Proposição 3.1.3 *Seja* $\{E_\alpha \; ; \; \alpha \in \mathcal{A}\}$ *uma coleção (finita ou infinita) de subconjuntos de um conjunto* E. *Então*

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} E_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} E_\alpha^c.$$

Como consequência temos que

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} E_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} E_\alpha^c.$$

Demonstração:

Mostraremos a primeira identidade.

A demonstração da segunda é semelhante e será deixada como exercício para o leitor.

Sejam

$$B \doteq \left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} E_\alpha\right)^c \quad \text{e} \quad C \doteq \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} E_\alpha^c.$$

Observemos que se

$$x \in B, \quad \text{segue que} \quad x \notin \bigcup_{\alpha} E_\alpha,$$

o que implicará que

$$x \notin E_\alpha, \quad \text{para todo} \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

Logo

$$x \in E_\alpha^c, \quad \text{para todo } \alpha \in \mathcal{A}, \quad \text{ou seja,} \quad x \in \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} E_\alpha^c,$$

isto é,

$$B \subseteq C. \tag{3.1}$$

Por outro lado, se $x \in C$ então segue que

$$x \in E_\alpha^c, \quad \text{para todo} \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

Logo

$$x \notin E_\alpha, \quad \text{para todo } \alpha \in \mathcal{A}, \quad \text{ou seja,} \quad x \notin \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} E_\alpha.$$

Logo

$$x \in \left(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} E_\alpha\right)^c, \quad \text{isto é,} \quad C \subseteq B. \tag{3.2}$$

Portanto, de (3.1) e (3.2), segue que $B = C$, completando a demonstração do resultado.

□

Podemos agora enunciar e demonstrar o:

Teorema 3.1.2 *Seja* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de conjuntos enumeráveis. Definamos*

$$S \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Então o conjunto S *será um conjunto enumerável.*

Demonstração:

Suponhamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto E_n esteja arranjado como uma sequência $(x_{nk})_{k\in N}$ (que é possível, pois o conjunto E_n é enumerável).

Consideremos a "matriz infinita":

$$\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{3.3}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, os elementos do conjunto E_n (que é a sequência numérica $(x_{nk})_{k\in N}$) formam a n-ésima linha desta "matriz infinita".

Essa matriz contém todos os elementos do conjunto S, pois cada elemento de S está em um conjunto E_n, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Os elementos dessa "matrix infinita" podem ser arranjados da seguinte forma:

$$x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}, \cdots,$$

isto é, tomamos os elementos da seguinte forma: começando pelo elemento x_{11}, "andaremos" por diagonais, de baixo para cima, e da esquerda para à direita.

Nesse processo, se dois elementos de dois conjuntos E_{n_i} e E_{n_j} são comuns, para $n_i \neq n_j$ (isto é, aparecem duas ou mais vezes na "matriz infinita" acima), então o eliminamos na ordenação acima, à partir da segunda aparição.

Deste modo existe um subconjunto T do conjunto $\mathbb{N}$, de modo que $S \sim T$, o que mostra S é no máximo enumerável.

Notemos que como, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto E_n é infinito, então o conjunto S será infinito o que mostrará que ele é um conjunto enumerável, finalizando a demonstração.

□

Como consequência temos o:

Corolário 3.1.1 *Sejam A um conjunto enumerável e para cada $\alpha \in A$ suponhamos que o conjunto B_α é no máximo enumerável. Definamos*

$$T \doteq \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha.$$

Então o conjunto T é no máximo enumerável.

Demonstração:

Como o conjunto A é enumerável, segue do Teorema (3.1.2) que o conjunto T, isto é, a reunião acima, é uma reunião enumerável de conjuntos no máximo enumeráveis, logo será, no máximo, um conjunto enumerável, como queríamos demonstrar.

□

Corolário 3.1.2 *Sejam A um conjunto enumerável, $n \in \mathbb{N}$ e consideremos o conjunto B_n o conjunto formado pelas n-uplas,*

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad \textit{onde} \quad a_k \in A, \quad \textit{para} \quad k = 1, 2 \cdots, n,$$

isto é,

$$B_n \doteq \{(a_1, \cdots, a_n\,;\, a_i \in A \textit{ para } i \in \{1, \cdots, n\}\}.$$

Então B_n é enumerável.

Demonstração:

A prova será feita por indição sobre n:

Para $n = 1$:

Neste caso temos que que $B_1 = A$ que, por hipótese, é um conjunto enumerável.

Suponhamos que, para $n \in \{2, 3, \cdots\}$, o conjunto B_{n-1} é um conjunto enumerável e mostremos que o conjunto B_n é um conjunto enumerável.

Observemos que

$$B_n = B_{n-1} \times A, \quad \text{ou seja,} \quad B_n = \{(b, a) : b \in B_{n-1}, \, a \in A\}.$$

Para cada $b \in B_{n-1}$ temos que o conjunto dos pares ordenados (b, a) com $a \in A$ é um conjunto enumerável (pois o conjunto A é um conjunto enumerável).

Logo o conjunto B_n é a união enumerável de conjuntos enumeráveis, isto é,

$$B_n = \bigcup_{b \in B_{n-1}} \bigcup_{a \in A} \{(b, a)\}.$$

Portanto, do Teorema (3.1.2), segue que o conjunto B_n é um conjunto enumerável, completando a demonstração.

□

Observação 3.1.8

1. *Notemos que os elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$ não são, necessariamente, distintos.*

2. *Em particular, o resultado acima nos diz que produto cartesiano de um conjunto enumerável A é um conjunto enumerável pois, para $n \in \mathbb{N}$, temos que*

$$B_n = \overbrace{A \times A \times \cdots \times A}^{n-vezes}.$$

Como consequência temos o:

Corolário 3.1.3 *O conjunto dos números racionais é enumerável.*

Demonstração:

Observemos que todo número racional pode ser colocado na forma

$$\frac{a}{b}, \quad \text{onde} \quad a \in \mathbb{Z}, \; b \in \mathbb{Z}^*,$$

ou seja, pode ser identificado com o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Como os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}^*$ são enumeráveis segue, do Corolário (3.1.2), que o conjunto $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, completando a demonstração.

□

Observação 3.1.9

1. *Consideremos o conjunto formado pelos $z \in \mathbb{C}$ tal que existem $a_o, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$, não todos nulos, tal que*

$$a_o \cdot z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + a_2 \cdot z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot z + a_n = 0.$$

Tal conjunto será denominado **conjunto dos números algébricos**.

Pode-se mostrar que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

2. *Vale observar que nem todo conjunto infinito é um conjunto enumerável, como mostra o próximo resultado.*

Teorema 3.1.3 *Seja A o conjunto formado pelas sequências cujos elementos são formados pelos dígitos 0 e 1, dispostos de modo aleatório, ou seja,*

$$A \doteq \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,;\ \textit{para cada } n \in \mathbb{N},\ \textit{temos que}\quad a_n = \begin{cases} 0 \\ \textit{ou} \\ 1 \end{cases} \right\}$$

Então o conjunto A é um conjunto não enumerável.

Demonstração:

Seja E um subconjunto enumerável do conjunto A, que podemos supor ser a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou seja, uma sequência onde cada termo da mesma é uma sequência (cujos termos são zero ou um).

Consideremos a sequência $\underline{s}$ dada da seguinte forma:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se o n-ésimo dígito da sequência s_n for 1, definiremos o n-ésimo termo da sequência $\underline{s}$ com sendo 0 e vice-versa.

Observação 3.1.10 *Para ilustrar, suponhamos que o primeiro termo da sequência é s_1 que é 0.*

Neste caso definiremos o primeiro termo da sequência $\underline{s}$ como sendo 1; se o segundo termo da sequência é s_2 for 1, definiremos o segundo termo da sequência $\underline{s}$ como sendo 0 e assim por diante.

Deste modo a sequência $\underline{s}$ difere de todos os elementos de E em, no mínimo, uma posição.

Notemos que $s \in A$, pois é uma sequência numérica cujos termos são 0 ou 1.

Deste modo temos que $s \notin E$, mas $s \in A$.

Assim o conjunto E é um subconjunto próprio do conjunto A, ou seja, todo subconjunto enumerável do conjunto A é um subconjunto próprio do conjunto A.

Afirmamos que o conjunto A é um conjunto não enumerável.

De fato, suponhamos, por absurdo, que o conjunto A é um conjunto enumerável.

Como todo subconjunto enuméravel de A é subconjunto próprio dele, teríamos que o conjunto A, que estamos supondo ser enumerável, seria um subconjunto próprio dele mesmo, o que seria um absurdo.

Logo o conjunto A não é um conjunto enumerável, como queríamos demonstrar.

$\square$

Corolário 3.1.4 *O conjunto $\mathbb{R}$ é não enumerável.*

Observação 3.1.11

1. *A idéia da demonstração do resultado acima é devido a Cantor, denominada processo de diagonalização de Cantor.*

   Suponhamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, s_n é umasequência numérica.

   Logo, se a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for colocada na "matriz infinita" (3.3), ou seja,

$$\begin{matrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & \cdots \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & \cdots \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & \cdots \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix},$$

os elementos da "diagonal" dessa "matriz infinita" formarão uma novasequência numérica.

2. *Os leitores familiarizados com representação binária de números reais (base 2 em vez da base 10) observarão que o Teorema implicará que o conjunto dos números reais será um conjunto não enumerável.*

   Mais adiante daremos uma outra demonstração de que os números reais formam um conjunto não enumerável.

Para finalizar temos a seguinte noção:

Definição 3.1.8 *Sejam* A *e* B *conjuntos não vazios.*

- *Se o conjunto* A *for finito definimos a* **cardinalidade do conjunto** A, *que será indicada por* $\#(A)$, *como sendo o número de elementos de conjunto* A.
- *Se existir uma uma função injetora* $f : A \to B$, *diremos que a* **cardinalidade do conjunto** A **será menor ou igual que a cardinalidade do conjunto** B *e escreveremos*
$$\#(A) \leq \#(B).$$
- *Se existir uma uma função sobrejetora* $f : A \to B$, *diremos a* **cardinalidade do conjunto** A **será maior que a cardinalidade do conjunto** B *e escreveremos*
$$\#(A) \geq \#(B).$$
- *se não existir uma função* $f : A \to B$ *injetora, diremos que* **cardinalidade do conjunto** A **será maior do que a cardinalidade do conjunto** B *e escreveremos*
$$\#(A) > \#(B).$$
- *se não existir uma função* $f : A \to B$ *sobrejetora, diremos que* **cardinalidade do conjunto** A **será maior do que a cardinalidade do conjunto** B *e escreveremos*
$$\#(A) < \#(B).$$

3.2 Espaços Métricos

Começaremos introduzindo a:

Definição 3.2.1 *Sejam* X *um conjunto não vazio e uma função*
$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$
que satisfaz a seguintes propriedades:

1. *a função* $\underline{d}$ *é uma função definida positiva, isto é,*
$$d(p, q) > 0, \quad \textit{para todo} \quad p, q \in X, \quad \textit{com} \quad p \neq q$$
   e
$$d(p, q) = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad p = q;$$

2. *a função* $\underline{d}$ *é uma função simétrica, isto é,*

$$d(p,q) = d(q,p), \quad \textit{para todo} \quad p,q \in X;$$

3. *a função* $\underline{d}$ *satisfaz a* **desigualdade triangular**, *isto é,*

$$d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q), \quad \textit{para todo} \quad p,q,r \in X.$$

Neste caso diremos de a função $\underline{d}$ *é uma* **métrica (ou distância)** *em* X *e o par* (X,d) *será dito* **espaço métrico**.

Se $p,q \in X$*, o número real* $d(p,q)$ *será dito* **distância do ponto** $\underline{p}$ **ao ponto** $\underline{q}$.

Exemplo 3.2.1 *Uma classe de exemplos importantes de espaços métricos é dada pelos espaços euclideanos* $\mathbb{R}^k$ *(em particular,* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R}^2$*).*

Neste caso definimos a distância (ou métrica) em $\mathbb{R}^k$ *da seguinte maneira:*

$$d : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

dada por:

$$d(x,y) \doteq \|x - y\|, \quad x,y \in \mathbb{R}^k, \tag{3.4}$$

onde $\|.\|$ *denota a norma usual do* $\mathbb{R}^k$*, definida em* (2.45)*, a saber*

$$\|x\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2},$$

onde

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificação que a função $\underline{d}$*, definida em* (3.4)*, satisfaz as condições da Definição (3.2.1).*

Observação 3.2.1

1. *Observemos que todo subconjunto* Y*, não vazio, de um espaço métrico* (X,d) *também é um espaço métrico com a distância induzida de* X*, ou seja,* (Y,d) *também é um espaço métrico.*

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Em particular, todo subconjunto, não vazio, de um espaço euclideano será um espaço métrico.*

Com isto temos a:

Definição 3.2.2 *Sejam* (X,d) *um espaço métrico,* $x_o \in X$ *e* $r > 0$.

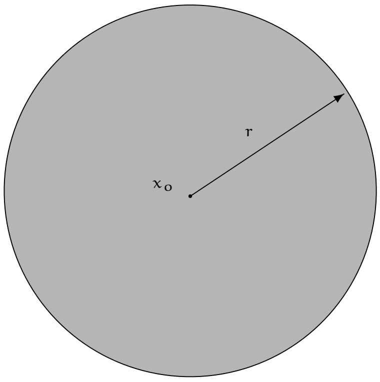
Definimos a **bola aberta de centro em** x_o **e raio** r*, que será denotada por* $B(x_o; r)$ *como sendo*

$$B(x_o; r) \doteq \{y \in X;\ d(y, x_o) < r\}.$$

De modo semelhante, definimos a **bola fechada de centro em** x_o **e raio** r*, que será denotada por* $B[x_o; r]$ *como sendo*

$$B[x_o; r] \doteq \{y \in X;\ d(y, x_o) \leq r\}.$$

Observação 3.2.2 *No espaço euclideano* $\mathbb{R}^2$ *(munido da métrica induzida pela norma* $\|.\|$ *definida em (3.4)), a figura abaixo nos fornece a representação geométrica para a bola* $B(x_o; r)$.



Em $\mathbb{R}$ temos uma coleção de subconjuntos especialmente importantes introduzidos na definição abaixo.

Definição 3.2.3 *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$, *com* $a < b$. *Com isto temos:*

1. *o* **intervalo aberto de extremos em a e b**, *denotado por* (a, b), *como sendo o subconjunto de* $\mathbb{R}$ *definido por:*
$$(a, b) \doteq \{x \in \mathbb{R};\, a < x < b\};$$

2. *o* **intervalo fechado de extremos em a e b**, *denotado por* $[a, b]$, *como sendo o subconjunto de* $\mathbb{R}$ *definido por:*
$$[a, b] \doteq \{x \in \mathbb{R};\, a \leq x \leq b\};$$

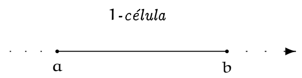
3. *o* **intervalo semi-aberto à direita de extremos em a e b**, *denotado por* $[a, b)$, *como sendo o subconjunto de* $\mathbb{R}$ *definido por:*
$$[a, b) \doteq \{x \in \mathbb{R};\, a \leq x < b\};$$

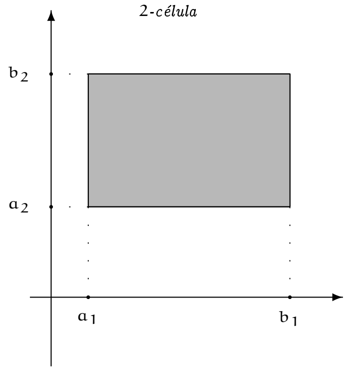
4. *o* **intervalo semi-aberto à esquerda de extremos em a e b**, *denotado por* $(a, b]$, *como sendo o subconjunto de* $\mathbb{R}$ *definido por:*
$$(a, b] \doteq \{x \in \mathbb{R};\, a < x \leq b\};$$

Com esta podemos introduzir a:

Definição 3.2.4 *Sejam* $a_i < b_i$ *para* $i = 1, \cdots, k$.
O conjunto dos pontos $x = (x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ *tais que*
$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad para \quad i = 1, \cdots, k$$
será denominado **k-célula** *e denotado por* I_k, *isto é,*
$$I_k \doteq \{(x_1, \cdots, x_k);\, a_i \leq x_i \leq b_i, \quad para \quad i = 1, \cdots, k\}.$$

Observação 3.2.3 *Notemos que uma* 1*-célula será um intervalo fechado (ver figura abaxo).*
Por outro lado, uma 2*-célula será um retângulo (ver figura abaxo) e assim por diante.*



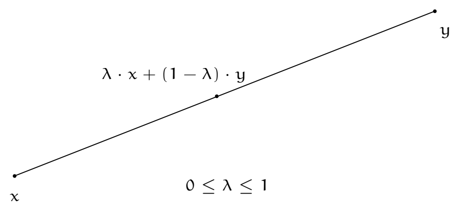


Uma noção importante para espaços vetoriais é dada pela:

Definição 3.2.5 *Diremos que um subconjunto* E *de espaço vetorial* $(V, +\cdot)$ *é um* **conjunto convexo** *se dados* $x, y \in E$ *temos que*

$$\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y \in E, \qquad \textit{para} \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

isto é, o segmento de reta que une os pontos $\underline{x}$ *a* $\underline{y}$ *deve pertencer ao conjunto* E *se os pontos* $\underline{x}$ *e* $\underline{y}$ *pertencem ao conjunto* E *(ver figura abaixo).*



Com isto temos a

Proposição 3.2.1 *Todas as bolas abertas ou fechadas de um espaço vetorial normado são conjuntos convexos.*

Demonstração:

Faremos a demonstração para o caso da bola aberta.

A demonstração do caso da bola fechada é análoga e será deixada como exercício para o leitor.

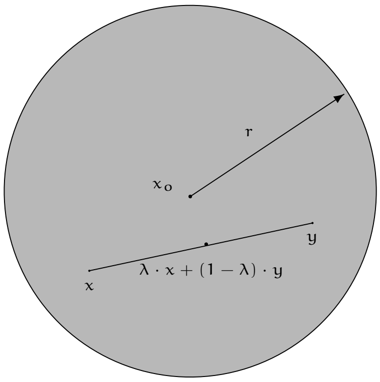
Se $x, y \in B(x_o; r)$ então, para $\lambda \in [0, 1]$, teremos:

$$\begin{aligned} \|(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) - x_o\| &= \|\lambda \cdot (x - x_o) + (1-\lambda) \cdot (y - x_o)\| \leq \|\lambda \cdot (x - x_o)\| + \|(1-\lambda) \cdot (y - x_o)\| \\ &= \lambda \underbrace{\|x - x_o\|}_{\overset{x \in B(x_o;r)}{<} r} + (1-\lambda) \underbrace{\|y - x_o\|}_{\overset{y \in B(x_o;r)}{<} r} < \lambda r + (1-\lambda) r = r \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) - x_o\| < r \quad \text{, ou seja,} \quad \lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y \in B,$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$ (ver figura abaixo) mostrando que a bola aberta em um espaço vetorial normado é um conjunto convexo.



□

Observação 3.2.4 *De modo semelhante podemos mostrar que as* k*-células no espaço euclideano* $\mathbb{R}^k$ *são conjuntos convexos em* $\mathbb{R}^k$*.*

A seguir introduziremos uma lista de definições que serão importantes no decorrer destas notas.

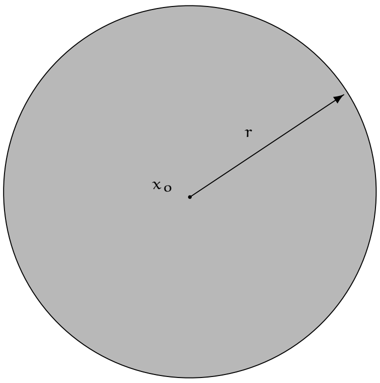
Definição 3.2.6 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico,* $x_o \in X$*,* $r > 0$ *e* $E \subseteq X$ *um conjunto não vazio. Com isto teremos:*

1. *o conjunto formado pelos*

$$x \in X \quad \text{tais que} \quad d(x, x_o) < r,$$

será denominado **vizinhança de** x_o *e indicada por* $N_r(x_o)$ *(ver figura abaixo), isto é,*

$$N_r(x_o) \doteq \{x \in X;\, d(x, x_o) < r\};$$



2. *Diremos que o ponto* $x_o \in X$ *é um* **ponto de acumulação do conjunto** E *se toda vizinhança de* x_o *possui, pelo menos, um ponto do conjunto* E*, distinto do ponto* x_o*, isto é, para todo* $r > 0$ *devemos ter*

$$(N_r(x_o) \cap E) \setminus \{x_o\} \neq \emptyset;$$

3. *Diremos que o conjunto* E *é um* **conjunto fechado (em** (X, d)**)** *se o conjunto* E *contém todos os seus pontos de acumulação;*

4. *Diremos que o ponto* $e \in E$ *é um* **ponto isolado do conjunto** E *se existir uma vizinhança do ponto* $\underline{e}$ *que só intercepta o conjunto* E *no ponto* $\underline{e}$*, isto é, deverá existir* $r > 0$ *tal que*
$$N_r(e) \cap E = \{e\},$$
ou ainda, o ponto $\underline{e}$ *não é ponto de acumulação do conjunto* E*;*

5. *Diremos que o ponto* $e \in E$ *é um* **ponto interior do conjunto** E *se existir uma vizinhança do ponto* $\underline{e}$*, que esteja inteiramente contida no conjunto* E*, isto é, deverá existir* $r = r(e) > 0$ *tal que*
$$N_r(e) \subseteq E;$$

6. *Diremos que* E *é um* **conjunto aberto em** (X, d) *se todo ponto do conjunto* E *for ponto interior do conjunto* E*, isto é, para cada* $e \in E$ *deverá existir* $r = r(e) > 0$ *tal que*
$$N_r(e) \subseteq E;$$

7. *Diremos que o conjunto* E *é um* **conjunto perfeito em** (X, d) *se ele for um conjunto fechado em* (X, d) *e se todo ponto do conjunto* E *é ponto de acumulação do conjunto* E*;*

8. *Diremos que o conjunto* E *é um* **conjunto limitado em** (X, d) *se existirem* $M > 0$ *e um ponto* $x_o \in X$ *tal que* $d(e, x_o) < M$*, para todo* $e \in E$*, isto é,*
$$E \subseteq N_M(x_o),$$
para algum $x_o \in X$ *e* $M > 0$*;*

9. *Diremos que o conjunto* E *é um* **subconjunto denso em** (X, d) *se todo ponto do conjunto* X *é um ponto de acumulação do conjunto* E *ou um ponto de* E*, isto é, para todo* $x \in X$ *e* $r > 0$ *teremos*
$$N_r(x) \cap E \neq \emptyset.$$

Observação 3.2.5 *Observemos que considerando-se as respectiva métricas em* $\mathbb{R}$*,* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$ *induzidas pelas respectivas normas dadas por* (3.4)*, que indicaremos por* d_1, d_2 *e* d_3*, as vizinhanças em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *são os intervalos abertos; em* $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *as vizinhanças são os círculos abertos e em* $(\mathbb{R}^3, d_3)$ *as vizinhanças são as bolas abertas.*

Com isto temos a:

Proposição 3.2.2 *Seja* (X, d) *um espaço métrico.*
Então, toda vizinhança de (X, d) *é um conjunto aberto em* (X, d)*.*

Demonstração:
Sejam $x_o \in X$ e $r > 0$.
Mostremos que o conjunto
$$E \doteq N_r(x_o)$$
é um conjunto aberto em (X, d).
Precisamos mostrar que cada $e \in E$ é ponto interior do conjunto E, isto é, existe $s = s(e) > 0$ tal que
$$N_s(e) \subseteq E.$$

Observemos que se

$$e = x_o,$$

teremos que, para $0 < s \leq r$, que

$$N_s(e) \subseteq E \overset{e=x_o}{=} N_r(x_o).$$

Logo podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$e \in E \quad \text{e} \quad e \neq x_o.$$

Assim

$$0 < h \doteq d(e, x_o) < r.$$

Consideremos

$$s \doteq r - h.$$

Afirmamos que

$$N_s(y) \subseteq E. \tag{3.5}$$

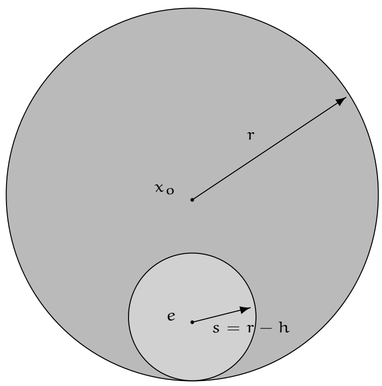
De fato, se $x \in N_s(e)$ então

$$d(x, e) < s = r - h, \quad \text{logo} \quad d(x, x_o) \leq d(x, e) + d(e, x_o) < (r - h) + h = r,$$

ou seja,

$$d(x, x_o) < r, \quad \text{implicando que} \quad x \in E.$$

Logo vale (3.5), ou ainda, que o conjunto $N_r(x_o)$ é um conjunto aberto em (X, d) (ver figura abaixo), completando a demonstração do resultado.



□

Temos também a

Proposição 3.2.3 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico,* $E \subseteq X$ *e* x_o *é ponto de acumulação de* E.
Então em cada vizinhança do ponto x_o *existem infinitos pontos do conjunto* E, *distintos* x_o, *e distintos entre si.*

Demonstração:
Suponhamos, por absurdo, que exista uma vizinhança do ponto x_o, que denotaremos por $N_r(x_o)$, que contenha somente um número finito de pontos distintos de x_o em E, que serão indicados por

$$y_1, y_2, \cdots, y_n \neq x_o, \quad \text{isto é,} \quad (N_r(x) \cap E) \setminus \{x_o\} = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}.$$

Seja

$$s \doteq \min_{1 \leq k \leq n} d(x_o, y_k),$$

que existe pois temos somente um número finito de y_k's tais que $y_k \neq x_o$ (na verdade, temos que $k = 1, \cdots, n$).

Observemos também que

$$0 < s < r.$$

De fato, para $k = 1, 2, \cdots, n$ temos que $y_k \in N_r(x_o)$ e assim

$$0 < s \leq d(x_o, y_k) \overset{y_k \in N_r(x_o)}{<} r.$$

Com isto

$$N_s(x_o) \subseteq N_r(x_o)$$

e a vizinhança $N_s(x_o)$ não contém nenhum ponto do conjunto E diferente do ponto x_o, pois, para todo $k = 1, 2, \cdots, n$ teremos

$$s \leq d(x_o, y_k), \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

ou seja,

$$y_k \notin N_s(x_o).$$

Logo o ponto x_o não será ponto de acumulação do conjunto E, o que é um absurdo.

Portanto cada vizinhança do ponto x_o possui infinitos pontos do conjunto E, diferentes de x_o, e diferentes entre si, completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência imediata do resultado acima é o:

Corolário 3.2.1 *Seja (X, d) um espaço métrico.*

Um subconjunto finito do conjunto X não possui pontos de acumulação.

Demonstração:

Seja E subconjunto finito do conjunto X.

Suponhamos, por absurdo, que o conjunto E tem ponto de acumulação em (X, d).

Então, segue da Proposição (3.2.3), que o conjunto E tem que ser infinito, o que é um absurdo.

Logo o conjunto E não tem ponto de acumulação em (X, d), completando a demonstração do resultado.

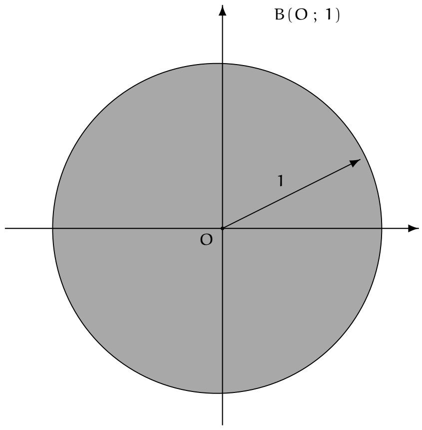
□

A seguir consideraremos alguns exemplos interessantes:

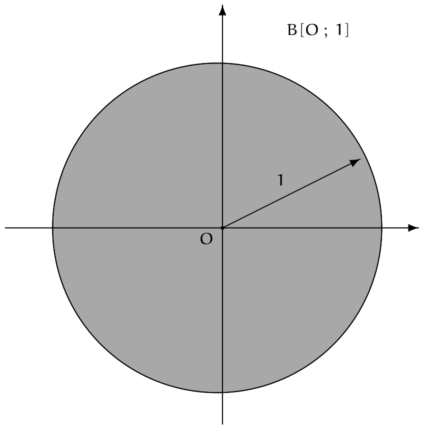
Exemplo 3.2.2 *Consideremos os seguintes subconjuntos dos conjuntos dados:*

1. *Consideremos o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ munido da métrica d_2 (definida em (3.4)) e os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:*

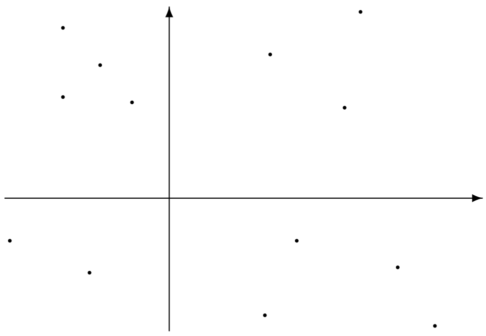
   1.a $B(O\,; 1) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; \|(x, y)\| < 1\right\};$



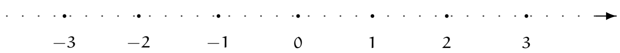
1.b $B[O\,;\,1] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ \|(x, y)\| \leq 1\right\}.$



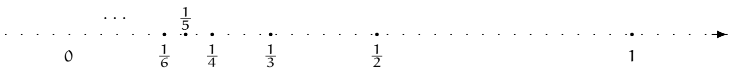
2. *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *munido da métrica* d_2 *(definida em* (3.4)*) e o subconjunto finito em* $\mathbb{R}^2$ *dado pela figura abaixo.*



3. *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *munido da métrica* d_1 *(definida em* (3.4)*) e* $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ *(figura abaixo);*



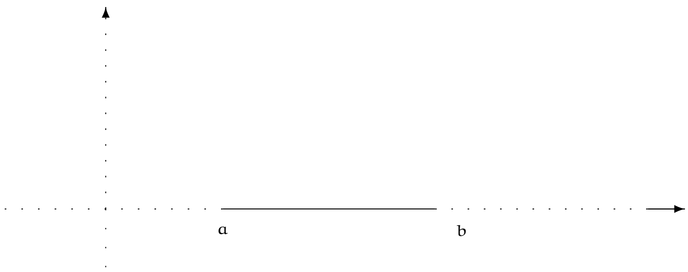
4. *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *munido da métrica* d_1 *(definida em* (3.4)*) e o subconjunto* $\left\{\dfrac{1}{n} \ ;\ n \in \mathbb{N}\right\}$ *(ver figura abaixo);*



5. *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}, + \cdot)$ *munido da métrica* d_2 *(definida em* (3.4)*) e o conjunto* $\mathbb{R}^2$*;*

6. *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *munido da métrica* d_1 *(definida em* (3.4)*) e o intervalo aberto* $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ *(ver figura abaixo);*

7. *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *munido da métrica* d_2 *(definida em* (3.4)*) e o intervalo* $(a, b) \subseteq \mathbb{R}^2$ *(ou seja,* $(a, b) \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$*).*



Com isto afirmamos que os subconjuntos acima têm as seguintes propriedades:

	Fechado	**Aberto**	**Perfeito**	**Limitado**
(1.a)	*Não*	*Sim*	*Não*	*Sim*
(1.b)	*Sim*	*Não*	*Sim*	*Sim*
(2)	*Sim*	*Não*	*Não*	*Sim*
(3)	*Sim*	*Não*	*Não*	*Não*
(4)	*Não*	*Não*	*Não*	*Sim*
(5)	*Sim*	*Sim*	*Sim*	*Não*
(6)	*Não*	*Sim*	*Não*	*Sim*
(7)	*Não*	*Não*	*Não*	*Sim*

Resolução:

A verificação de cada um dos itens da tabela acima serão deixados como exercício para o leitor.

Temos a:

Proposição 3.2.4 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* $E \subseteq X$*.*

Então o conjunto E *é um subconjunto aberto em* (X, d) *se, e somente se, o conjunto* E^c *é um subconjunto fechado em* (X, d)*.*

Demonstração:

Suponhamos que o conjunto E é um subconjunto aberto em (X, d).

Mostremos que o conjunto E^c é um subconjunto fechado em (X, d), ou seja, que todo ponto de acumulação do conjunto E^c pertence ao conjunto E^c.

Para isto consideremos $x \in X$, ponto de acumulação do conjunto E^c, isto é, toda vizinhança do ponto $\underline{x}$ contém, pelo menos, um ponto do conjunto E^c, diferente do ponto $\underline{x}$, ou ainda,

$$(N_r(x) \cap E^c) \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Portanto o ponto $\underline{x}$ não poderá ser ponto interior do conjunto E, pois toda vizinhança do ponto $\underline{x}$ contém, pelo menos, um ponto que não está no conjunto E (a saber, um ponto de E^c).

Como o conjunto E é um conjunto aberto em (X, d), segue que $x \notin E$, isto é, $x \in E^c$, ou seja, o conjunto E^c contém todos os seus pontos de acumulação.

Portanto, o conjunto E^c é um subconjunto fechado em (X, d).

Reciprocamente, suponhamos que o conjunto E^c é um subconjunto fechado em (X, d).

Mostremos que o conjunto E é um subconjunto aberto em (X, d).

Para isto observemos que, se

$$x \in E \quad \text{então} \quad x \notin E^c.$$

Assim, o ponto $\underline{x}$ não é ponto de acumulação de E^c pois, caso contrário, deveria pertencer ao conjunto E^c, pois este é um subconjunto fechado em (X, d).

Logo, deverá existir $r > 0$, tal que a vizinhança $N_r(x)$, do ponto $\underline{x}$, é tal que

$$N_r(x) \cap E^c = \emptyset, \quad \text{ou seja,} \quad N_r(x) \subseteq E.$$

Portanto, todo $x \in E$ é ponto interior do conjunto E, o que implicará que o conjunto E é um subconjunto aberto em (X, d), completando a demonstração.

□

Como consequência imediata temos o:

Corolário 3.2.2 *Seja* (X, d) *um espaço métrico e* $F \subseteq X$.

Então o conjunto F *é um subconjunto fechado em* (X, d) *se, e somente se, o conjunto* F^c *é um subconjunto aberto em* (X, d).

Demonstração:

Basta aplicar a Proposição (3.2.4) ao conjunto F^c.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

□

Para algumas propriedades relacionadas com coleções de abertos e fechados temos a:

Proposição 3.2.5 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico,* $\{G_\alpha\,;\,\alpha \in \mathcal{A}\}$ *e* $\{F_\beta\,;\,\beta \in \mathcal{B}\}$ *coleções de subconjuntos abertos e de subconjuntos fechados de* (X, d)*, respectivamente. Então:*

1. *o conjunto* $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha$ *é um subconjunto aberto em* (X, d)*, isto é, reunião qualquer de subconjuntos abertos em* (X, d) *é um subconjunto aberto em* (X, d)*;*
2. *o conjunto* $\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} F_\beta$ *é um subconjunto fechado em* (X, d)*, isto é, intersecção qualquer de subconjuntos fechados em* (X, d) *é um subconjunto fechado em* (X, d)*;*
3. *o conjunto* $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ *é um subconjunto aberto em* (X, d)*, isto é, intersecção* <u>*finita*</u> *de suconjuntos abertos em* (X, d) *é um subconjunto aberto em* (X, d)*;*

4. *o conjunto* $\bigcup_{j=1}^{n} F_j$ *é um subconjunto fechado em* (X, d), *isto é, reunião* *finita* *de subconjuntos fechados em* (X, d) *é um subconjunto fechado em* (X, d).

Demonstração:

De **1.**

Defina

$$G \doteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha.$$

Mostremos que todo ponto do conjunto G é ponto interior do conjunto G.

Para isto notemos que se $x \in G$ então

$$x \in G_{\alpha_o}, \quad \text{para algum} \quad \alpha_o \in \mathcal{A}.$$

Como, por hipótese, o conjunto G_{α_o} é um subconjunto aberto em (X, d), segue que o ponto $\underline{x}$ deverá ser ponto interior do conjunto G_{α_o}, ou seja, deverá existir $r > 0$ tal que

$$N_r(x) \subseteq G_{\alpha_o} \subseteq G, \quad \text{ou seja,} \quad N_r(x) \subseteq G,$$

ou ainda, o ponto $\underline{x}$ é ponto interior do conjunto G, mostrando que o conjunto G é um subconjunto aberto em (X, d).

De **2.:**

Segue, da Proposição (3.1.3), que

$$\left(\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} F_\beta \right)^c = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} (F_\beta)^c. \tag{3.6}$$

Como, para cada $\beta \in \mathcal{B}$, o conjunto F_β é um subconjunto fechado em (X, d) segue, da Proposição (3.2.4), que o conjunto $(F_\beta)^c$ é um subconjunto aberto em (X, d).

Logo do item 1. segue que o conjunto

$$\left(\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} F_\beta \right)^c = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} (F_\beta)^c$$

é um subconjunto aberto em (X, d).

Novamente, de (3.6) e da Proposição (3.2.4), segue que o conjunto $\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} F_\beta$ é um subconjunto fechado em (X, d).

De **3.:**

Consideremos

$$G \doteq \bigcap_{i=1}^{n} G_i.$$

Mostremos que todo ponto do conjunto G é ponto interior do conjunto G.

Para isto, notemos que se $x \in G$ então

$$x \in G_i, \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Como, por hipótese, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, o conjunto G_i é um subconjunto aberto em (X, d), segue que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, deverá existir $r_i > 0$ tal que

$$N_{r_i}(x) \subseteq G_i.$$

Seja
$$r \doteq \min\{r_i\,;\, i \in \{1, 2, \cdots, n\}\} > 0,$$
pois temos somente um número finito de r_i's e cada um deles é maior que zero.

Deste modo, como
$$0 < r \leq r_i, \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\},$$
segue que
$$N_r(x) \subseteq N_{r_i}(x) \subseteq G_i, \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n, \}$$
isto é,
$$N_r(x) \subseteq G_i, \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Portanto
$$N_r(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} G_i = G,$$
mostrando que o conjunto G é um subconjunto aberto em (X, d).

<u>De **4.**:</u>

Observemos que, da Proposição (3.1.3), segue que
$$\left(\bigcup_{j=1}^{n} F_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{n} (F_j)^c. \tag{3.7}$$

Como, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, o conjunto F_j é um subconjunto fechado em (X, d), segue, da Proposição (3.2.4), que o conjunto $(F_j)^c$ é um subconjunto aberto em (X, d).

Logo do item 3. acima, segue que o conjunto
$$\left(\bigcup_{j=1}^{n} F_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{n} (F_j)^c$$
é um subconjunto aberto em (X, d).

Novamente, de (3.7) e da Proposição (3.2.4), segue que o conjunto $\bigcup_{j=1}^{n} F_j$ é um subconjunto fechado em (X, d), completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.2.6 *Nos itens 3. e 4. da Proposição acima a* ***<u>finitude</u>*** *da coleção é essencial.*

1. *O exemplo a seguir mostra que se no item 3.* ***<u>não</u>*** *tivermos a finitude o resultado pode ser falso.*

   Para ver isto, consideremos o espaço métrico $(\mathbb{R}, d_1)$ (onde d_1 é definida em (3.4)) e para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos
   $$G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

   Temos que o conjunto G_n é um subconjunto aberto em $(\mathbb{R}, d_1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ (pois é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$).

   Definamos
   $$G \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Então podemos mostrar que

$$G = \{0\}$$

e este conjunto **não** *é um subconjunto aberto em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

A verificação destes fatos serão deixados como exercício para o leitor.

2. *De modo semelhante podemos construir uma coleção infinita de subconjuntos fechados,* F_j, *com* $j \in \mathbb{N}$, *em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *de modo que o conjunto* $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ **não** *será um subconjunto fechado em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

   Deixaremos a construção de tal exemplo como exercício para o leitor.

Definição 3.2.7 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* $E \subseteq X$.

Definimos o **derivado** *do conjunto* E, *indicado por* E', *como sendo o conjunto formado por todos os pontos de acumulação do conjunto* E *em* (X, d).

Definimos o **fecho** *do conjunto* E, *indicado por* $\overline{E}$, *como sendo*

$$\overline{E} \doteq E \cup E',$$

isto é, o conjunto formado por todos os pontos do conjunto E, *juntamente com os pontos de acumulação do conjunto* E.

Definimos o **interior** *do conjunto* E, *indicado por* $\overset{\circ}{E}$, *como sendo o conjunto formado por todos os pontos interiores do conjunto* E *em* (X, d), *isto é,*

$$\overset{\circ}{E} \doteq \{x \in E\,;\, x \text{ é ponto interior do conjunto } E \text{ em } (X, d)\}.$$

Exemplo 3.2.3 *Para cada um dos itens abaixo encontrar o conjunto interior, o conjunto derivado e o fecho do conjunto* E.

1. *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}, d_1)$ *e*

$$E \doteq (1, 5] \cup \{8\}.$$

2. *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}, d_1)$ *e*

$$E \doteq \left\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

3. *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}, d_1)$ *e*

$$E \doteq (0, 1).$$

4. *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}, d_2)$ *e*

$$E = (0, 1] \times \{0\}.$$

Resolução:

De **1.**:

Neste caso teremos:

1.a $\overset{\circ}{E} = (1, 5)$;

1.b $E' = [1, 5]$;

1.c $\overline{E} = [1, 5] \cup \{8\}$;

<u>De **2.**:</u>

Neste caso teremos:

2.a $\overset{\circ}{E} = \emptyset$;

2.b $E' = \{0\}$;

2.c $\overline{E} = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$.

<u>De **3.**:</u>

Neste caso teremos:

3.a $\overset{\circ}{E} = (0, 1)$;

3.b $E' = [0, 1]$;

3.c $\overline{E} = [0, 1]$.

<u>De **4.**:</u>

Neste caso teremos:

4.a $\overset{\circ}{E} = \emptyset$;

4.b $E' = [0, 1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$;

4.c $\overline{E} = [0, 1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

A explicação para a obtenção de cada itens acima será deixada como exercício para o leitor.
Temos agora a:

Proposição 3.2.6 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* $E \subseteq X$. *Então:*

1. $E \subseteq \overline{E}$;

2. *o conjunto* $\overline{E}$ *é um subconjunto fechado em* (X, d);

3. $E = \overline{E}$ *se, e somente se, o conjunto* E *é um subconjunto fechado em* (X, d);

4. *Se o conjunto* $F \subseteq X$ *é um subconjunto fechado em* (X, d) *e* $E \subseteq F$ *então*
$$\overline{E} \subseteq F,$$
isto é, o conjunto $\overline{E}$ *é o menor subconjunto fechado em* (X, d) *que contém o conjunto* E.

5. *Se* $A, B \subseteq X$ *são tais que* $A \subseteq B$ *então teremos*
$$\overline{A} \subseteq \overline{B}.$$

6. *Se* $A \subseteq X$ *então*
$$\overline{\left(\overline{A}\right)} = A.$$

Demonstração:

De **1.:**

Da definição de fecho de um conjunto (ver Definição (3.2.7)) segue, em particular que,

$$E \subseteq \overline{E} \overset{\text{Definição}}{=} E' \cup E,$$

completando a demonstração deste item.

De **2.:**

Mostremos que o conjunto $\left(\overline{E}\right)^c$ é um subconjunto aberto em (X, d).

Para isto consideremos $p \in \left(\overline{E}\right)^c$.

Logo, como

$$\overline{E} = E \cup E',$$

segue que

$$p \notin E \quad \text{e} \quad p \notin E'. \tag{3.8}$$

Assim, existirá uma vizinhança do ponto $\underline{p}$, que não contém pontos do conjunto E (pois $p \notin E$ e também não é ponto de acumulação de E).

Ou seja, existe $r > 0$ tal que

$$N_r(p) \cap E = \emptyset. \tag{3.9}$$

Notemos também que

$$N_r(p) \cap E' = \emptyset. \tag{3.10}$$

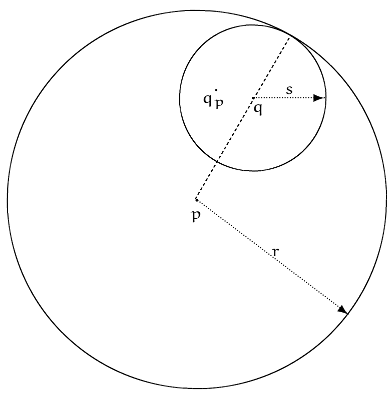
De fato, suponhamos, por absurdo, que existe $q \in N_r(p) \cap E'$, para todo $r > 0$.

Como $q \in E'$ e $p \notin E'$ (pois $p \in \left(\overline{E}\right)^c = (E \cup E')^c$) segue que

$$s \doteq \min\{r - d(p, q), d(p, q)\} > 0.$$

Logo (veja figura abaixo)

$$N_s(q) \overset{s<r-d(p,q)}{\subseteq} N_r(p) \quad \text{e} \quad p \overset{s<d(p,q)}{\notin} N_s(q).$$



Como $q \in E'$, podemos encontrar

$$q_p \in N_s(q) \cap E, \quad \text{em particular}, \quad q_p \in N_r(q) \cap E,$$

isto é, $p \in E'$, o que contraria (3.8).

Logo, de (3.9) e (3.10), segue que

$$N_r(p) \cap \overline{E} = \emptyset,$$

ou seja,

$$N_r(p) \subseteq \left(\overline{E}\right)^c,$$

o ainda, existe uma vizinhança estará inteiramente contida em $(E)^c$.

Logo o ponto $p \in \left(\overline{E}\right)^c$ será ponto interior do conjunto E, ou seja, o conjunto $\left(\overline{E}\right)^c$ é um subconjunto aberto em (X, d) e portanto, da Proposição (3.2.4), temos que o conjunto $\overline{E}$ é um subconjunto fechado em (X, d), completando a demonstração deste item.

De **3.:**

Se

$$E = \overline{E},$$

então, do item 2. acima, segue que o conjunto E será um subconjunto fechado em (X, d) (pois $\overline{E}$ é um subconjunto fechado de (X, d)).

Reciprocamente, se o conjunto E é um subconjunto fechado em (X, d) então ele conterá todos os seus pontos de acumulação, isto é,

$$E' \subseteq E$$

e portanto, da definição de fecho (ver Definição (3.2.7)), segue que

$$\overline{E} \overset{\text{Definição}}{=} E \cup \underbrace{E'}_{\subseteq E} = E, \quad \text{ou seja,} \quad E = \overline{E},$$

completando a demonstração deste item.

De **4.:**

Se o conjunto F é um subconjunto fechado em (X, d) então, do item 3., teremos

$$F' \overset{\text{Definição}}{\subseteq} \overline{F} \overset{\text{item 3.}}{=} F. \tag{3.11}$$

Como

$$E \subseteq F$$

segue que, todo ponto de acumulação do conjunto E, será ponto de acumulação do conjunto F, isto é,

$$E' \subseteq F'. \tag{3.12}$$

Assim

$$E' \overset{(3.12)}{\subseteq} F' \overset{(3.11)}{\subseteq} F, \tag{3.13}$$

o que implicará em

$$\overline{E} \overset{\text{Definição}}{=} E \cup E' \overset{(3.13)}{\subseteq} F \cup F' \overset{\text{Definição}}{=} \overline{F} \overset{\text{item 3.}}{=} F,$$

ou seja,

$$\overline{E} \subseteq F,$$

completando a demonstração deste item.

De **5.:**

Do item 1. acima temos que

$$B \subseteq \overline{B}.$$

Assim, como

$$A \subseteq B, \quad \text{segue que} \quad A \subseteq B \subseteq B \cup B' \stackrel{\text{Definição}}{=} \overline{B},$$

ou seja

$$A \subseteq \overline{B} \tag{3.14}$$

Do item 2. acima, segue que o conjunto $\overline{B}$ é um subconjunto fechado em (X, d).

Portanto, de (3.14) e do item 4. acima, segue que

$$\overline{A} \stackrel{(3.14), \text{ do item 2. e do item 4.}}{\subseteq} \overline{B},$$

completando a demonstração do item e do resultado.

De **6.:**

Do item 2. temos que o conjunto $\overline{A}$ é um conjunto fechado em (X, d).

Logo, do item 3. (tomando-se $E \doteq \overline{A}$), segue que

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{A},$$

completando a demonstração do item e do resultado.

□

Na reta $\mathbb{R}$, podemos relacionar o fato de um subconjunto de $\mathbb{R}$ ser fechado e limitado superiormente com a existência do máximo do subconjunto em questão, mais precisamente, temos a:

Proposição 3.2.7 *Sejam* $(\mathbb{R}, d_1)$, *onde* d_1 *é a métrica usual de* $\mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$ *um conjunto limitado superiormente e* $y \doteq \sup(E)$.

Então

$$y \in \overline{E}.$$

Em particular, se o conjunto E *é um subconjunto limitado superiormente e fechado em* $(\mathbb{R}, d_1)$, *segue que*

$$\sup(E) \in E, \quad \textit{ou seja}, \quad \max(E) = \sup(E).$$

Demonstração:

Se $y \in E$, da Proposição acima item 1., como

$$E \subseteq \overline{E}, \quad \text{teremos} \quad y \in \overline{E}.$$

Suponhamos, que

$$y \notin E.$$

Mostremos que, neste caso, deveremos ter

$$y \in E',$$

ou seja, y é um ponto de acumulação do conjunto E em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Como $y = \sup(E)$, da Proposição (2.4.5) (ii'), temos que dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $x \in E$ de modo que

$$y - \varepsilon < x < y, \quad \text{em particular}, \quad x \in N_\varepsilon(y) \cap E.$$

Como

$$x < y \quad \text{e} \quad y \notin E, \quad \text{segue que} \quad x \in (N_\varepsilon(y) \cap E) \setminus \{y\},$$

ou seja, o ponto y é um ponto de acumulação do conjunto E, ou ainda, $y \in \overline{E}$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.2.7

1. *O resultado acima nos diz que se um subconjunto* E *do espaço métrico* $(\mathbb{R}, d_1)$ *é limitado superiormente e fechado ele possuirá máximo e o máximo do conjunto* E *será o supremo do conjunto* E*, isto é,*
$$\max(E) = \sup(E).$$

2. *Vale o análogo para subconjuntos limitados inferiormente em* $(\mathbb{R}, d_1)$*, isto é: sejam* $(\mathbb{R}, d_1)$*, onde* d_1 *é amétrica usual de* $\mathbb{R}$*,* $F \subseteq \mathbb{R}$ *um conjunto limitado inferiormente e* $z \doteq \inf(E)$*.*

   Então
$$z \in \overline{F}.$$

   Em particular se o conjunto F *é um subconjunto limitado inferiormente e fechado em* $(\mathbb{R}, d_1)$*, segue que* $\inf(F) \in F$*, ou ainda, um subconjunto* F *de* $(\mathbb{R}, d_1)$*, é limitado inferiormente e fechado possuirá mínimo e o mínimo do conjunto* F *será o ínfimo do conjunto* F*, isto é,*
$$\min(F) = \inf(F).$$

   A demonstração desse fato é análogo a do resultado acima e será deixada como exercício para o leitor.

Como isto podemos obter o seguinte resultado:

Corolário 3.2.3 *Sejam* E *um subconjunto de limitado em* $(\mathbb{R}, d_1)$*,* $y \doteq \sup(E)$ *e* $z \doteq \inf(E)$*.*
Então
$$y, z \in \bar{E}.$$

Em particular, se o conjunto E *é um subconjunto é limitado e fechado em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *então* $\sup(E), \inf(E) \in E$*, ou seja,*
$$\min(E) = \inf(E) \quad e \quad \max(E) = \sup(E).$$

Demonstração:
A demostração desse fato segue como consequência imediata da Proposição e da Observação acima.
□

Relacionado com o interior de um conjunto temos a:

Proposição 3.2.8 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* $E \subseteq X$*. Então:*

1. $\overset{\circ}{E} \subseteq E$*;*

2. *O conjunto* $\overset{\circ}{E}$ *é um subconjunto aberto em* (X, d)*;*

3. $E = \overset{\circ}{E}$ *se, e somente se, o conjunto* E *é um subconjunto aberto em* (X, d)*;*

4. *Se o conjunto* $G \subseteq X$ *é um subconjunto aberto em* (X, d) *com* $G \subseteq E$*, então*
$$G \subseteq \overset{\circ}{E},$$
   istó é, $\overset{\circ}{E}$ *é o maior subconjunto aberto em* (X, d) *que está contido no conjunto* E*.*

5. *Se* $A, B \subseteq X$ *são tais que* $A \subseteq B$ *teremos*

$$\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B} .$$

6. *Se* $A \subseteq X$ *então*

$$\overset{\circ}{\left(\overset{\circ}{A}\right)} = \overset{\circ}{A} .$$

Demonstração:

De **1.**:

Segue da Definição de interior que

$$\overset{\circ}{E} \subseteq E.$$

De **2.**:

Se

$$\overset{\circ}{E} = \emptyset$$

nada temos a fazer e o assim o conjunto E será um subconjunto aberto em (X, d).

Logo podemos supor, sem perda da generalidade, que

$$\overset{\circ}{E} \neq \emptyset.$$

Para mostrar que o conjunto $\overset{\circ}{E}$ é um subconjunto aberto de (X, d), precisamos mostrar que todo ponto do conjunto $\overset{\circ}{E}$ é ponto interior do conjunto $\overset{\circ}{E}$.

Para isto seja $p \in \overset{\circ}{E}$, isto é, o ponto $\underline{p}$ um ponto interior do conjunto E.

Como o ponto $\underline{p}$ é ponto interior do conjunto E, deverá existir uma vizinhança de p, $N_r(p)$, tal que

$$N_r(p) \subseteq E.$$

Mostremos que

$$N_r(p) \subseteq \overset{\circ}{E},$$

isto é, todo ponto da vizinhança $N_r(p)$ é ponto interior do conjunto E.

Para isto basta mostrar que se

$$q \in N_r(p)\,, \quad \text{então o ponto } \underline{q} \text{ é ponto interior do conjunto } E.$$

.

Notemos que se

$$q = p\,, \quad \text{segue que} \quad N_r(q) = N_r(p) \subseteq E,$$

ou seja, o ponto $\underline{q}$ é ponto interior do conjunto E, isto é, $q \in \overset{\circ}{E}$.

Por outro lado, se $q \neq p$, consideremos

$$s \doteq r - d(p, q).$$

Como

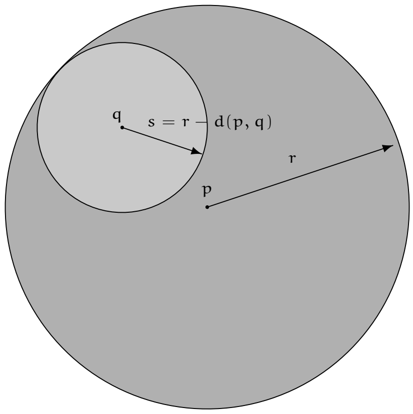
$$q \in N_r(p), \quad \text{segue que} \quad d(p, q) < r, \quad \text{logo} \quad s > 0.$$

Deste modo teremos que

$$N_s(q) \subseteq N_r(p) \subseteq E,$$

ou seja, o ponto $\underline{q}$ é ponto interior de E, isto é, $q \in \overset{\circ}{E}$, ou ainda, (ver figura abaixo)

$$N_r(p) \subseteq \overset{\circ}{E} .$$



Portanto o conjunto $\overset{\circ}{E}$ é um subconjunto aberto em (X, d), completando a demonstração do item.

De **3.:**

Se

$$E = \overset{\circ}{E}$$

então, do item 2., segue que o conjunto E é subconjunto aberto em (X, d).

Reciprocamente, se o conjunto E é um subconjunto aberto em (X, d), então teremos que todos os pontos do conjunto E serão pontos interiores do conjunto E, isto é,

$$E \subseteq \overset{\circ}{E},$$

que, juntamente com o item 1. (ou seja, $\overset{\circ}{E} \subseteq E$), implicarão que

$$\overset{\circ}{E} = E,$$

completando a demonstração do item.

De **4.:**

Se o conjunto G é um subconjunto aberto em (X, d) então, do item 3., teremos

$$\overset{\circ}{G} = G. \tag{3.15}$$

Como

$$G \subseteq E,$$

segue que, todo ponto de interior do conjunto G, será ponto interior do conjunto E, isto é,

$$\overset{\circ}{G} \subseteq \overset{\circ}{E}. \tag{3.16}$$

Assim

$$G \overset{(3.15)}{=} \overset{\circ}{G} \overset{(3.16)}{\subseteq} \overset{\circ}{E},$$

ou seja,

$$G \subseteq \overset{\circ}{E},$$

completando a demonstração deste item.

De **5.:**

Como

$$A \subseteq B,$$

segue que, todo ponto de interior do conjunto A, será ponto interior do conjunto B, isto é,

$$\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B},$$

completando a demonstração do item e do resultado.

De **6.:**

Do item 2. temos que o conjunto $\overset{\circ}{A}$ é um conjunto aberto em (X, d).

Logo, do item 3. (tomando-se $E \doteq \overset{\circ}{A}$), segue que

$$\overset{\circ}{\left(\overset{\circ}{A}\right)} = \overset{\circ}{A},$$

completando a demonstração do item e do resultado.

□

Uma outra observação importante é:

Observação 3.2.8 *Suponhamos que* (X, d_X) *é um espaço métrico e* $E \subseteq Y \subseteq X$.

Lembremos que o conjunto E *é um subconjunto aberto em* (X, d_X) *se, e somente se, para cada ponto* $e \in E$ *deverá existir* $r > 0$ *tal que*

$$N_r^X(e) \subseteq E,$$

ou seja, se

$$q \in X \quad e \quad d_X(q, p) < r, \quad \textit{implicará que} \quad q \in E.$$

Observemos que Y *pode ser visto como um espaço métrico, com a métrica induzida por* (X, d_X)*, isto é,* (Y, d_X) *é um espaço métrico.*

Logo o conjunto E *será um subconjunto aberto em* (Y, d_X) *se, e somente se, para cada ponto* $e \in E$ *existe* $r > 0$ *tal que*

$$N_r^Y(e) \subseteq E,$$

ou seja, se

$$q \in Y \quad e \quad d_X(q, p) < r, \quad \textit{implicará que} \quad q \in E.$$

Deste modo, um conjunto ser um subconjunto aberto em (X, d_X) *pode ser* **diferente** *de um conjunto ser um subconjunto aberto em* (Y, d_X).

Por exemplo, no Exemplo (3.2.2) item 7., temos que o conjunto

$$E = (a, b) \times \{0\}$$

é um subconjunto aberto em (Y, d_2)*, onde*

$$Y \doteq \mathbb{R} \times \{0\},$$

com a métrica usual d_2 *induzida em* Y *(que coincide com a métrica* d_1*, verifique!), mas* **não** *é um subconjunto aberto em* (X, d_2)*, onde* $X \doteq \mathbb{R}^2$.

Para resolver esta questão introduziremos a:

Definição 3.2.8 *Sejam* (Y, d) *espaço métrico e* $E \subseteq Y$*. Diremos que o conjunto* E *é* **subconjunto aberto relativamente em** (Y, d) **(ou simplesmente um subconjunto aberto em** (Y, d)**)** *se para cada ponto* $e \in E$*, podemos encontrar* $r = r(e) > 0$ *de modo que*

$$\text{se} \quad q \in Y \quad \text{satisfaz} \quad d(q, e) < r, \quad \text{implicar que} \quad q \in E,$$

isto é, se

$$N_r^Y(e) \subseteq E.$$

Temos uma maneira simples de caracterizar os subconjuntos abertos relativos, a saber:

Proposição 3.2.9 *Sejam* (X, d_X) *um espaço métrico e* $E \subseteq Y \subseteq X$*.*

O conjunto E *é um subconjunto aberto em* (Y, d_X) *se, e somente se, existe um conjunto* G*, que é um subconjunto aberto em* (X, d_X)*, tal que*

$$E = G \cap Y,$$

ou seja, todo subconjunto aberto em (Y, d_X)*, deve ser um subconjunto aberto em* (X, d_X) *intersecção com o conjunto* Y *e reciprocamente.*

Demonstração:

Suponhamos que o conjunto E é um subconjunto aberto em (Y, d_X).

Logo para cada $e \in E$ deverá existir $r_e > 0$ de modo que

$$\text{se} \quad y \in Y \quad \text{satisfaz} \quad d_X(y, e) < r_e, \quad \text{deveremos ter} \quad y \in E,$$

isto é, a vizinhança do ponto $\underline{e}$ em (Y, d_X), de raio r_e, estará contida em E, que denotaremos por $N_{r_e}^Y(e)$, ou seja,

$$N_{r_e}^Y(e) \subseteq E.$$

Definamos

$$V_e^X \doteq N_{r_e}^X(e) = \{x \in X \,;\; d_X(x, e) < r_e\},$$

isto é, a vizinhança do ponto $\underline{e}$ em (X, d_X), de raio r_e, e o conjunto

$$G \doteq \bigcup_{e \in E} V_e^X.$$

Para cada $e \in E$, temos que V_e^X é uma vizinhança do ponto $\underline{e}$ em (X, d_X), assim, da Proposição (3.2.2), segue que o conjunto V_e^X é um subconjunto aberto em (X, d_X).

Logo, da Proposição (3.2.5) item 1., segue que o conjunto G é um subconjunto aberto em (X, d_X).

Notemos que para cada $e \in E$ temos que $e \in V_e^X$, assim segue que

$$E \subseteq G.$$

Além disso, como $E \subseteq Y$ deveremos ter

$$E \subseteq G \cap Y. \tag{3.17}$$

Por outro lado, para cada $e \in E$, da definição de V_e, segue que

$$V_e^X \cap Y = N_{r_e}^X(e) \cap Y = \{x \in X \,;\; d_X(x, e) < r_e\} \cap Y = \{x \in Y \,;\; d_X(x, e) < r_e\} = N_{r_e}^Y(e) \subseteq E, \tag{3.18}$$

logo

$$G \cap Y = \left(\bigcup_{e \in E} V_e^X \right) \cap Y = \bigcup_{e \in E} \left(\underbrace{V_e^X \cap Y}_{\overset{(3.18)}{\subseteq} E} \right) \subseteq E,$$

que juntamente com (3.17) implicará em

$$E = G \cap Y,$$

onde o conjunto G é um subconjunto aberto em (X, d_X).

Reciprocamente, se o conjunto G é um subconjunto aberto em (X, d_X), mostremos que o conjunto

$$E \doteq G \cap Y$$

é um subconjunto aberto em (Y, d_X).

Para isto observemos que se $e \in E$, como $E \subseteq G$ e o conjunto G é um subconjunto aberto em (X, d_X) deverá existir $r_e > 0$ tal que

$$N_{r_e}^X(e) = \{x \in X\,;\ d_X(x, e) < r_e\} \subseteq G.$$

Logo

$$\underbrace{N_{r_e}^X(e) \cap Y}_{=N_{r_e}^Y(e)} \subseteq G \cap Y = E,$$

isto é,

$$N_{r_e}^Y(e) = \{y \in Y\,;\ d_X(y, e) < r_e\} \subseteq E,$$

isto é, o conjunto E é um subconjunto aberto em (Y, d_X), completando a demonstração.

□

Observação 3.2.9 *Notemos que Exemplo (3.2.2) item 7. temos que o conjunto*

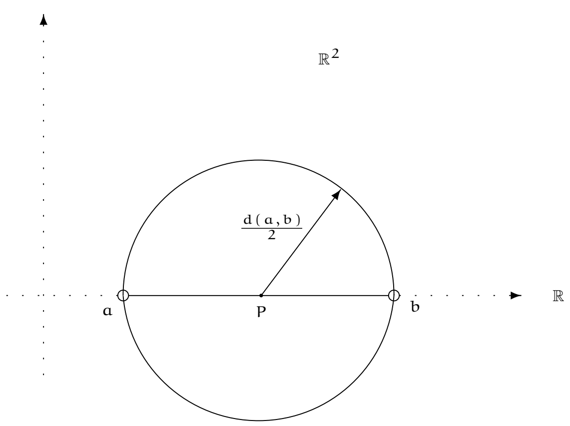
$$E \doteq (a, b) \times \{0\}$$

é um subconjunto aberto em (Y, d_2), *onde* $Y \doteq \mathbb{R} \times \{0\}$ *mas* **<u>não</u>** *é um subconjunto aberto em* (X, d_2), *onde* $X \doteq \mathbb{R}^2$.

Porém notemos que

$$E = (a, b) \times \{0\} = B\left(P\,;\ \frac{d(a, b)}{2}\right) \cap \mathbb{R},$$

onde P *é o ponto médio do segmento* $(a, b) \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *e sabemos que a bola aberta* $B\left(P\,;\ \dfrac{d(a, b)}{2}\right)$ *é um subconjunto aberto em* $(\mathbb{R}^2, d_2)$.



Como consequência deste resultado temos o

Corolário 3.2.4 *Sejam* (X, d_X) *um espaço métrico e* $F \subseteq Y \subseteq X$.

O conjunto F *é um subconjunto fechado em* (Y, d_X) *se, e somente se, existe um conjunto* H, *que é um subconjunto fechado em* (X, d_X), *tal que*

$$F = H \cap Y,$$

ou seja, todo subconjunto fechado em (Y, d_X) *deve ser um subconjunto fechado em* (X, d_X) *intersecção com o conjunto* Y *e reciprocamente.*

Demonstração:

Deixaremos os detalhes desta demonstração como exercício para o leitor.

□

3.3 Conjuntos Compactos

A seguir introduziremos uma classe de conjuntos que desempenharão um papel importante em várias situações, como veremos mais adiante.

Começaremos com a:

Definição 3.3.1 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* $E \subseteq X$.

Definimos uma **cobertura aberta do conjunto** E *como sendo uma coleção* $\{G_\alpha\,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}$ *formada por subconjuntos abertos em* (X, d) *de modo que*

$$E \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha.$$

Neste caso diremos que a coleção $\{G_\alpha\,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}$ **cobre o conjunto** E.

Uma **subcobertura da cobertura** $\{G_\alpha\,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}$ *é uma subcoleção,* $\{G_\beta\,;\, \beta \in \mathcal{B}\}$, *da coleção* $\{G_\alpha\,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}$, *isto é,* $\{G_\beta\,;\, \beta \in \mathcal{B}\} \subseteq \{G_\alpha\,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}$, *ou ainda,* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *e*

$$E \subseteq \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} G_\beta\,.$$

Com isto podemos introduzir o seguinte conceito:

Definição 3.3.2 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* $K \subseteq X$.

Diremos que o conjunto K *é* **subconjunto compacto em** (X, d) *se toda cobertura aberta do conjunto* K *possui uma subcobertura finita, que ainda cobre o conjunto* K.

Mais explicitamente, se $\{G_\alpha\,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}$ *é cobertura aberta do conjunto* K *em* (X, d), *deverá existir um número finito de índices, que denotaremos por* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathcal{A}$, *de modo que*

$$K \subseteq G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}.$$

Observação 3.3.1

1. *Todo conjunto finito de um espaço métrico será um subconjunto compacto desse espaço métrico.*

   A demonstração deste fato será deixada como exercíco para o leitor.

2. *Diferentemente da propriedade de um conjunto ser aberto a propriedade de ser compacto* **não** *é relativa, como afirma a:*

Proposição 3.3.1 *Sejam* (X, d_X) *um espaço métrico e* $K \subseteq Y \subseteq X$.

O conjunto K *é um subconjunto compacto, relativamente ao espaço métrico* (X, d_X)*, se, e somente se, o conjunto* K *é um subconjunto compacto, relativamente ao espaço métrico* (Y, d_X).

Demonstração:

Suponhamos que o conjunto K é um subconjunto compacto em (X, d_X).

Mostremos que o conjunto K é um subconjunto compacto em (Y, d_X).

Para isto consideremos $\{Y_\alpha\,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}$ uma cobertura aberta do conjunto K em (Y, d_X), isto é,

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha,$$

onde, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, temos que Y_α é um subconjunto aberto em (Y, d_X).

Logo, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, da Proposição (3.2.9), segue que, existe um subconjunto, que indicaremos por X_α, que é um subconjunto aberto em (X, d_X), de modo que

$$Y_\alpha = X_\alpha \cap Y. \tag{3.19}$$

Observemos que

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha,$$

pois

$$Y_\alpha = X_\alpha \cap Y \subseteq X_\alpha, \quad \text{para cada} \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

Como o conjunto K é um subconjunto compacto em (X, d_X), deve existir um número finito de índices, que denotaremos por $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathcal{A}$, de modo que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} X_{\alpha_i}.$$

Mas

$$K \subseteq Y, \quad \text{logo} \quad K \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_{\alpha_i}\right) \cap Y = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{(X_{\alpha_i} \cap Y)}_{\overset{(3.19)}{=} Y_{\alpha_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} Y_{\alpha_i},$$

ou seja, podemos extrair uma subcobertura finita, a saber, $\{Y_{\alpha_i}\,;\, i = 1, 2 \cdots, n\}$, da cobertura $\{Y_\alpha\,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}$ aberta em (Y, d_X), que ainda cobre o conjunto K.

Logo o conjunto K é um subconjunto compacto (ou, relativamente a) em (Y, d_X).

Reciprocamente, suponhamos que o conjunto K é um subconjunto compacto (ou, relativamente a) em (Y, d_X).

Mostremos que o conjunto K é um subconjunto compacto em (X, d_X).

Para isto seja $\{X_\alpha\,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}$ uma cobertura aberta do conjunto K em (X, d_X), isto é,

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha,$$

onde, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, temos que X_α é um subconjunto aberto em (X, d_X).

Observemos que, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, da Proposição (3.2.9), segue que o conjunto

$$Y_\alpha \doteq X_\alpha \cap Y \tag{3.20}$$

será um subconjunto aberto em (Y, d_X).

Como

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha \quad \text{e} \quad K \subseteq Y,$$

segue que

$$K \subseteq \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha \right) \cap Y = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (X_\alpha \cap Y) \overset{(3.20)}{=} \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha,$$

ou ainda, $\{Y_\alpha ; \alpha \in A\}$ é uma cobertura aberta do conjunto K em (Y, d_X).

Como o conjunto K é um subconjunto compacto (ou relativamente a) em (Y, d_X), segue que deverá existir um número finito de índices, que indicaremos por $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathcal{A}$, de modo que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Y_{\alpha_i} \overset{(3.20)}{=} \bigcup_{i=1}^{n} (X_{\alpha_i} \cap Y) \overset{K \subseteq Y}{=} \bigcup_{i=1}^{n} X_{\alpha_i},$$

ou seja, podemos extrair uma subcobertura finita, a saber, $\{X_{\alpha_i} ; i = 1, 2 \cdots, n\}$, da cobertura aberta $\{X_\alpha ; \alpha \in \mathcal{A}\}$ em (X, d_X) que ainda cobre o conjunto K.

Portanto o conjunto K é um subconjunto compacto (ou, relativamente a) em (X, d_X), completando a demonstração do resultado.

□

A seguir daremos algumas propriedades gerais de conjuntos compactos.

Proposição 3.3.2 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* K *um subconjunto compacto em* (X, d).
Então o conjunto K *é um subconjunto fechado e limitado em* (X, d).

Demonstração:

Para mostrar que o conjunto K é um subconjunto fechado em (X, d) basta mostrarmos que o conjunto K^c é um subconjunto aberto em (X, d).

Para isto, seja $x \in X$ tal que $x \notin K$, isto é,

$$x \in K^c.$$

Mostremos que existe uma vizinhança, que indicaremos por $N_{r_x}(x)$, do ponto $\underline{x}$ em (X, d), de modo que

$$V_{r_x}(x) \subseteq K^c$$

e assim o conjunto K^c será um subconjunto aberto de (X, d).

Para isto notemos que, para cada $y \in K$, como $x \in K^c$, segue que

$$y \neq x, \quad \text{assim} \quad d(x, y) > 0.$$

Consideremos

$$V_y \doteq N_{r_y}(x) \quad \text{e} \quad W_y \doteq N_{r_y}(y)$$

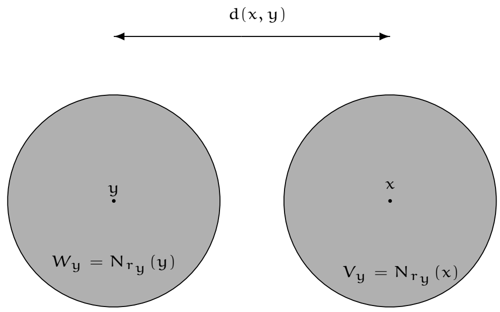
vizinhanças dos pontos $\underline{x}$ e $\underline{y}$ em (X, d), respectivamente, de modo que

$$0 < r_y < \frac{1}{2} d(x, y). \tag{3.21}$$

Notemos que, de (3.21), segue as vizinhanças V_y e W_y são disjuntas, isto é,

$$V_y \cap W_y = \emptyset. \tag{3.22}$$

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor (ver figura abaixo).



Notemos também que a coleção $\{W_y\,;\, y \in K\}$ é uma cobertura aberta do conjunto K (lembremos que mostramos anteriormente que as vizinhanças de um ponto são conjuntos abertos em (X, d)), ou seja,

$$K \subseteq \bigcup_{y \in K} W_y.$$

Como o conjunto K é um subconjunto compacto em (X, d), deverá existir um número finito de pontos, que denotaremos por $y_1, y_2, \cdots, y_n \in K$, de modo que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i} \doteq W. \tag{3.23}$$

Definamos

$$V_x \doteq \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}. \tag{3.24}$$

Afirmamos que os conjuntos V_x e W são disjuntos, isto é,

$$V_x \cap W = \emptyset. \tag{3.25}$$

De fato, suponhamos, por absurdo, que isto não ocorra, isto é, que existisse

$$y \in V_x \cap W.$$

Logo, de (3.23) e (3.24), deveríamos ter $y \in W_{y_{i_o}}$, para algum $i_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e $y \in V_{y_i}$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Em particular, teríamos

$$y \in Y_{y_{i_o}} \cap W_{y_{i_o}},$$

o que seria um absurdo, pois, de (3.22), as vizinhaças V_y e W_y são disjuntas, para cada $y \in K$.

Além disso, o conjunto V_x é um subconjunto aberto em (X, d), pois é intersecção finita de vizinhanças que são subconjuntos abertos em (X, d), e contém o ponto $\underline{x}$, ou seja, é uma vizinhança de $\underline{x}$ em (X, d).

Logo, existe uma vizinhança do ponto $\underline{x}$ em (X, d), que indicaremos por $N_r(x)$, contida em V_x, isto é,

$$N_r(x) \subseteq V_x.$$

Como os conjuntos V_x e W são disjuntos e $K \subseteq W$ segue que

$$(N_r(x) \cap K) \subseteq N_r(x) \cap W = \emptyset, \quad \text{ou seja,} \quad N_r(x) \subseteq K^c.$$

Portanto, cada ponto $x \in K^c$ é ponto interior do conjunto K^c, o que implicará que o conjunto K^c é um subconjunto aberto em (X, d), implicando que o conjunto K é um subconjunto fechado em (X, d).

Para mostrar que o conjunto K é um subconjunto limitado em (X, d), observamos que a coleção

$$\{N_1(p) ; p \in K\}$$

é uma cobertura aberta do conjunto K em (X, d), ou seja, cada ponto do conjunto K está dentro da vizinhança desse ponto de raio igual a 1.

Da compacidade do conjunto K em (X, d), segue que deverá existir um número finito de pontos, que denotaremos por $p_1, p_2, \cdots, p_n \in K$, de modo que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_1(p_i).$$

Seja

$$r \doteq \max\{d(p_i, p_j) ; i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}\} \quad \text{e} \quad M \doteq r + 2.$$

Notemos que se $p, q \in K$, deverão existir $i_o, j_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$ de modo que

$$p \in V_1(p_{i_o}) \quad \text{e} \quad q \in V_1(p_{j_o}).$$

.

Logo

$$d(p, q) \leq d(p, p_{i_o}) + d(p_{i_o}, p_{j_o}) + d(p_{j_o}, q) < 1 + r + 1 = M,$$

ou seja,

$$d(p, q) < M, \quad \text{para todo} \quad p, q \in K,$$

ou ainda,

$$K \subseteq N_M(p),$$

onde $p \in K$ é um ponto qualquer escolhido em K, mostrando que o conjunto K é um subconjunto limitado em (X, d), completando a demonstração do resultado.

□

Outra propriedade importante de compacidade é:

Proposição 3.3.3 *Sejam* (X, d) *espaço métrico e* K *um subconjunto compacto em* (X, d).

Se $F \subseteq K$ *é um subconjunto fechado em* (X, d) *então o conjunto* F *será um subconjunto compacto em* (X, d)*, ou seja, um subconjunto fechado de um subconjunto compacto em* (X, d) *será subconjunto compacto em* (X, d).

Demonstração:

Seja $\{V_\alpha ; \alpha \in \mathcal{A}\}$ uma cobertura aberta do conjunto F em (X, d).

Como o conjunto F é um subconjunto fechado (X, d) segue que o conjunto F^c será um subconjunto aberto em (X, d).

Com isto segue que $\{V_\alpha ; \alpha \in \mathcal{A}\} \cup \{F^c\}$ será uma cobertura aberta do conjunto K em (X, d).

Como o conjunto K é um subconjunto compacto em (X, d) segue que deverá existir uma subcobertura finita, que denotaremos por $\{V_{\alpha_i} ; i \in \{1, 2, \cdots, n\}\} \cup \{F^c\}$, da cobertura aberta $\{V_\alpha ; \alpha \in \mathcal{A}\} \cup \{F^c\}$, que ainda cobre o conjunto K.

Observemos que se o conjunto F^c aparece na lista $\{V_\alpha ; \alpha \in \mathcal{A}\}$, poderemos removê-lo que o resultado ainda nos fornecerá uma cobertura do conjunto F, pois a cobertura finita acima cobre K e $F \subseteq K$.

Logo a cobertura $\{V_\alpha ; \alpha \in \mathcal{A}\}$ possui uma subcobertura finita, a saber, $\{V_{\alpha_i} ; i = 1, 2, \cdots, n\}$, que ainda cobre o conjunto F, mostrando que o conjunto F é um subconjunto compacto em (X, d), completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos os:

Corolário 3.3.1 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico,* $F, K \subseteq X$*, onde o conjunto* F *é um subconjunto fechado em* (X, d) *e o conjunto* K *um subconjunto compacto em* (X, d)*.*

Então o conjunto $F \cap K$ *é um subconjunto compacto em* (X, d)*.*

Demonstração:

Com o conjunto K é um subconjunto compacto em (X, d), segue da Proposição (3.3.2) que o conjunto K é um subconjunto fechado em (X, d).

Logo, da Proposição (3.2.5) item 2., segue que o conjunto $F \cap K$ é um subconjunto fechado em (X, d).

Como $F \cap K \subseteq K$, da Proposição (3.3.3), segue que o conjunto fechado $K \cap F$ é um subconjunto compacto em (X, d), completando a demonstração.

□

Como consequência temos os:

Corolário 3.3.2 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico,* $K_1, K_2 \subseteq X$ *subconjuntos compactos em* (X, d)*.*

Então o conjunto $K_1 \cap K_2$ *é um conjunto compacto em* (X, d)*.*

Demonstração:

Com os conjuntos K_1 e K_2 são subconjuntos compactos em (X, d), da Proposição (3.3.2), segue que os conjuntos K_1, K_2 são subconjuntos fechados em (X, d).

Logo, da Proposição (3.2.5) item 2., segue que o conjunto $K_1 \cap K_2$ é um subconjunto fechado em (X, d).

Além disso temos que $K_1 \cap K_2 \subseteq K_1$ e o conjunto K_1 é um subconjunto compacto em (X, d).

Assim, da Proposição (3.3.3), segue que o conjunto $K_1 \cap K_2$ é um subconjunto compacto em (X, d), completando a demonstração do resultado.

□

Mais geralmente temos o:

Corolário 3.3.3 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico,* $K_\alpha \subseteq X$ *um subconjunto compacto em* (X, d)*, para cada* $\alpha \in \mathcal{A}$*.*

Então o conjunto $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$ *é um subconjunto compacto em* (X, d)*.*

Demonstração:

Como o conjunto K_α é um subconjunto compacto em (X, d) segue, da Proposição (3.3.2), que o conjunto K_α é um subconjunto fechado em (X, d).

Logo, da Proposição (3.2.5) item 2., segue que o conjunto $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} K_\alpha$ é um subconjunto fechado em (X, d).

Além disso, se $\alpha_o \in \mathcal{A}$, temos que $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} K_\alpha \subseteq K_{\alpha_o}$ e o conjunto K_{α_o} é um subconjunto compacto em (X, d).

Assim, da Proposição (3.3.3), segue que o conjunto $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$ é um subconjunto compacto em (X, d), completando a demonstração do resultado.

Um outro resultado interessante é dado pelo:

Teorema 3.3.1 *Sejam* (X, d) *espaço métrico e* $\{K_\alpha ; \alpha \in \mathcal{A}\}$ *coleção de conjuntos compactos não vazios em* (X, d)*.*

Suponhamos que a coleção $\{K_\alpha\,;\,\alpha\in\mathcal{A}\}$ tem a propriedade que a intersecção de qualquer subcoleção finita de elementos de $\{K_\alpha\,;\,\alpha\in\mathcal{A}\}$ é não vazia, isto é, para todo $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$, onde $\mathcal{B}$ é um conjunto finito, devemos ter

$$\bigcap_{\beta\in\mathcal{B}} K_\beta \neq \emptyset. \tag{3.26}$$

Então

$$\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} K_\alpha \neq \emptyset. \tag{3.27}$$

Demonstração:

Fixemos K_{α_o} um elemento da coleção $\{K_\alpha\,;\,\alpha\in\mathcal{A}\}$ e definamos, para cada $\alpha\in\mathcal{A}$,

$$G_\alpha \doteq K_\alpha^c. \tag{3.28}$$

Para cada $\alpha\in\mathcal{A}$, da Proposição (3.3.2), segue que o conjunto K_α é um subconjunto fechado em (X,d), assim o conjunto G_α será um subconjunto aberto em (X,d).

Suponhamos, por absurdo, que

$$\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} K_\alpha = \emptyset,$$

ou seja, nenhum ponto de K_{α_o} pertence K_α, para $\alpha\neq\alpha_o$, isto é,

$$K_{\alpha_o}\cap\left(\bigcap_{\alpha\neq\alpha_o} K_\alpha\right)=\emptyset,$$

ou seja,

$$K_{\alpha_o}\subseteq\left(\bigcap_{\alpha\neq\alpha_o} K_\alpha\right)^c,$$

ou ainda,

$$K_{\alpha_o}\subseteq\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A},\,\alpha\neq\alpha_o} K_\alpha^c=\bigcup_{\alpha\neq\alpha_o} G_\alpha.$$

Logo a coleção $\{G_\alpha\,;\,\alpha\in\mathcal{A},\ \alpha\neq\alpha_o\}$ é uma cobertura aberta do conjunto K_{α_o}.

Como o conjunto K_{α_o} é um subconjunto compacto em (X,d), deverá existir uma coleção finita de índices, que indicaremos por $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathcal{A}$, de modo que

$$K_{\alpha_o}\subseteq G_{\alpha_1}\cup G_{\alpha_1}\cup\cdots\cup G_{\alpha_n}\overset{(3.28)}{=}K_{\alpha_1}^c\cup K_{\alpha_2}^c\cup\cdots\cup K_{\alpha_n}^c=(K_{\alpha_1}\cap K_{\alpha_2}\cap\cdots\cap K_{\alpha_n})^c,$$

isto é,

$$K_{\alpha_o}\subseteq(K_{\alpha_1}\cap K_{\alpha_2}\cap\cdots\cap K_{\alpha_n})^c.$$

Isto implicará que

$$K_{\alpha_o}\cap(K_{\alpha_1}\cap K_{\alpha_2}\cap\cdots\cap K_{\alpha_n})=\emptyset,$$

isto é, existe uma intersecção finita de elementos da coleção $\{K_\alpha\,;\,\alpha\in\mathcal{A}\}$ que é vazia, o que contraria nossa hipósete (3.26).

Logo, algum ponto de K_{α_o} pertencerá a todo K_α, para $\alpha\in\mathcal{A}$ e $\alpha\neq\alpha_o$, isto é,

$$\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha\neq\emptyset,$$

pois contém, pelo menos um ponto de K_{α_o}, completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o:

Corolário 3.3.4 *Sejam* (X, d) *espaço métrico,* $\{K_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ *uma coleção formada por subconjuntos compactos de* (X, d)*, não vazios e que são encaixantes, isto é,*

$$K_{n+1} \subseteq K_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset. \tag{3.29}$$

Demonstração:

Observemos que a intersecção finita de elementos da coleção $\{K_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é sempre o menor conjunto da intersecção que é não vazio, pois as coleção é encaixante, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\bigcap_{i=1}^{n} K_i = K_n \neq \emptyset.$$

Com isto podemos aplicar o Teorema acima e concluir que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição 3.3.4 *Sejam* (X, d) *espaço metrico,* K *um subconjunto compacto em* (X, d) *e* E *subconjunto infinito de* K.

Então o conjunto E *tem, pelo menos, um ponto de acumulação que pertecerá ao conjunto* K*, isto é,*

$$E' \cap K \neq \emptyset.$$

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que nenhum ponto do conjunto K seja ponto de acumulação do conjunto E, ou seja, para cada $p \in K$, deverá existir $r_p > 0$ tal que a vizinhança $V_p \doteq V_{r_p}(p)$ contém, no máximo, um ponto do conjunto E, isto é, no máximo, o ponto $\underline{p}$, se este pertencer ao conjunto E.

Assim nenhuma coleção finita da coleção $\{V_p \,;\, p \in K\}$ cobrirá o conjunto E, pois o conjunto E é infinito e cada V_p tem, no máximo, um número finito de elementos do conjunto E.

Notemos que, por construção, a família de abertos $\{V_p \,;\, p \in K\}$ é uma cobertura de K.

Como $E \subseteq K$, nenhuma subcoleção finita da coleção de conjuntos abertos $\{V_p \,;\, p \in K\}$ poderá cobrir o conjunto K (pois não cobrirá o conjunto E), ou seja, nenhuma subcobertura aberta finita da cobertura aberta $\{V_p \,;\, p \in K\}$ do conjunto K, cobrirá o conjunto K, o que é um absurdo, pois o conjunto K é um subconjunto compacto em (X, d).

Logo o conjunto E tem, pelo menos, um ponto de acumulação que pertencerá ao conjunto K em (X, d), completando a demonstração do resultado.

□

No espaço métrico $(\mathbb{R}, d_1)$ temos a seguinte caracterização para os resultados acima por meio de intervalos fechados e limitados, a saber:

Proposição 3.3.5 *Sejam* $I_n \doteq [a_n, b_n]$, *para* $n \in \mathbb{N}$, *intervalos limitados e fechados em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *encaixantes, isto é,*

$$I_{n+1} \subseteq I_n, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

Demonstração:

Observemos que se $m, n \in \mathbb{N}$ então, como os intervalos são encaixantes, deveremos ter

$$a_n \leq a_{n+m} \leq b_{n+m} \leq b_m.$$

Seja E a coleção de todos os a_n, $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$E \doteq \{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Logo o conjunto E é não vazio, pois $a_1 \in E$, e é limitado superiormente, pois b_1 é um limitante superior do conjunto E (já que $a_n \leq b_n \leq b_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois intervalos I_n são encaixantes).

Seja

$$x \doteq \sup(E).$$

Notemos que

$$x \leq b_m, \quad \text{para cada} \quad m \in \mathbb{N},$$

pois $a_n \leq b_m$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, b_m é limitante superior do conjunto E, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Além disso,

$$a_m \leq x,$$

pois $\underline{x}$ é o supremo do conjunto E, logo é limitante superior do conjunto E.

Conclusão

$$x \in [a_m, b_m] = I_m \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{N},$$

mostrando que

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m, \quad \text{ou seja,} \quad \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m \neq \emptyset,$$

completando a demonstração do resultado.

□

De um modo mais geral temos a:

Proposição 3.3.6 *Sejam* $k \in \mathbb{N}$ *e* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de* k*-células em* $\mathbb{R}^k$ *encaixantes, isto é,*

$$I_{n+1} \subseteq I_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

Demonstração:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam a_{nj}, b_{nj}, $j \in \{1, \cdots, k\}$, tais que

$$I_n \doteq \{(x_1, x_2, \cdots, x_k)\,;\, a_{nj} \leq x_j \leq b_{nj},\ j \in \{1, 2, \cdots, k\}\}, \quad \text{isto é,} \quad I_n = \prod_{j=1}^{k} [a_{nj}, b_{nj}]$$

e

$$I_{nj} \doteq [a_{nj}, b_{nj}], \quad j \in \{1, 2, \cdots, k\},$$

ou seja,

$$I_n = \prod_{j=1}^{k} I_{nj}. \tag{3.30}$$

Para cada $j \in \{1, 2 \cdots, k\}$, notemos que a sequência $\{I_{nj}\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz as hipótese da Proposição acima, isto é, é umasequência numérica de intervalos fechados, limitados e encaixantes (pois as k-células que os definem são encaixantes - verifique!).

Logo, da Proposição acima, segue que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{nj} \neq \emptyset, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2 \cdots, k\}.$$

Logo, para cada $j \in \{1, 2 \cdots, k\}$, existe

$$x_j^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{nj},$$

ou seja, para cada $j \in \{1, 2 \cdots, k\}$, teremos

$$a_{nj} \leq x_j^* \leq b_{nj}, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Seja

$$x^* \doteq (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_k^*).$$

Como, para cada $j \in \{1, 2 \cdots, k\}$, temos

$$x_j^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{nj},$$

segue, de (3.30), que $x^* \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.3.2 *Na verdade, como*

$$I_n = \prod_{j=1}^{k} I_{nj} = \prod_{j=1}^{k} [a_{nj}, b_{nj}],$$

segue que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} [a_{nj}, b_{nj}] = \prod_{j=1}^{k} \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_{nj}, b_{nj}].$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Uma outra propriedade importante das k-células é dada pelo:

Teorema 3.3.2 *Toda* k*-célula é um subconjunto compacto em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$.
Em particular, o intervalo fechado $[a, b]$ *é um subconjunto compacto em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Demonstração:
Seja I uma k-célula, isto é,

$$I \doteq \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_k)\ ;\ a_j \leq x_j \leq b_j,\ j \in \{1, 2 \cdots, k\}\}.$$

Consideremos

$$\delta \doteq \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)^2}, \tag{3.31}$$

isto é, a distância, em $(\mathbb{R}^k, d_k)$, entre os pontos

$$a \doteq (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathbb{R}^k \quad \text{e} \quad b \doteq (b_1, b_2, \cdots, b_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Observemos que se

$$x = (x_1, \cdots, x_k),\ y = (y_1, \cdots, y_k) \in I, \quad \text{então} \quad \|y - x\| \leq \delta. \tag{3.32}$$

De fato, pois como $x, y \in I$, segue que

$$a_j \leq x_j,\ y_j \leq b_j, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2 \cdots, k\}.$$

Assim

$$\underbrace{a_j - b_j}_{-(b_j - a_j) = -|b_j - a_j|} \leq x_j - y_j \leq \underbrace{b_j - a_j}_{|b_j - a_j|}, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2 \cdots, k\},$$

ou seja,

$$-|b_j - a_j| \leq x_j - y_j \leq |b_j - a_j|, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2 \cdots, k\},$$

ou ainda,

$$|y_j - x_j| = |x_j - y_j| \leq |b_j - a_j|, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2 \cdots, k\}. \tag{3.33}$$

Logo

$$\|y - x\|^2 = \sum_{j=1}^{k} (y_j - x_j)^2 \overset{(3.33)}{\leq} \sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)^2 \overset{(3.31)}{=} \delta^2, \quad \text{ou seja,} \quad \|y - x\| \leq \delta,$$

como afirmamos em (3.32).

Suponhamos, por absurdo, que exista uma cobertura aberta $\{G_\alpha\ ;\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ do conjunto I que **não** possua uma subecobertura finita que ainda cubra o conjunto I.

Para cada $j \in \{1, 2 \cdots, k\}$, definamos

$$c_j \doteq \frac{a_j + b_j}{2}. \tag{3.34}$$

A coleção formada pelos intervalos fechados e limitados

$$[a_j, c_j] \quad \text{e} \quad [c_j, b_j], \quad \text{para } j \in \{1, 2, \cdots, k\},$$

determinam 2^k-células, que denotaremos por I_i, para $i \in \{1, 2, \cdots, 2^k\}$, cuja reunião, por construção, será o conjunto I, isto é,

$$I = \bigcup_{i=1}^{2^k} I_i.$$

Observemos que, pelo menos um desses intervalos, que sem perdade de generalidade, podemos chamar de

$$I_1 \subseteq I,$$

não poderá ser coberto por qualquer subcobertura finita da cobertura $\{G_\alpha\,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}$.

De fato, caso contrário, como temos somente um número finito de conjuntos I_i (são exatamente 2^k conjuntos), teríamos que todos seriam cobertos por alguma subcobertura finita da cobertura aberta $\{G_\alpha\,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}$, e assim, I seria coberto por uma subcobertura finita da cobertura aberta $\{G_\alpha\,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}$.

Portanto I_1 **não** pode ser coberto por qualquer subcobertura finita da cobertura aberta $\{G_\alpha\,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}$.

Notemos que,

$$\text{se} \quad x, y \in I_1 \quad \text{então} \quad \|y - x\| \leq \frac{1}{2}\delta. \tag{3.35}$$

De fato, podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$I_1 = \prod_{j=1}^{k} [a_j, c_j].$$

Notemos que, os outros casos são análogos e serão deixados como exercício para o leitor.

Se

$$x, y \in I_1, \quad \text{então} \quad a_j \leq x_j\,,\, y_j \leq c_j, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2 \cdots, k\}$$

e com isto teremos

$$\underbrace{a_j - c_j}_{=-(c_j - a_j)} \leq x_j - y_j \leq c_j - a_j, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2 \cdots, k\},$$

isto é,

$$|x_j - y_j| = |y_j - x_j| \leq |c_j - a_j|, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2 \cdots, k\}. \tag{3.36}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|y - x\|^2 &= \sum_{j=1}^{k} (y_j - x_j)^2 \overset{(3.36)}{\leq} \sum_{j=1}^{k} (c_j - a_j)^2 \overset{(3.34)}{=} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{a_j + b_j}{2} - a_j\right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{b_j - a_j}{2}\right)^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(b_j - a_j)^2}{4} \overset{(3.31)}{=} \frac{\delta^2}{4},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|y - x\| \leq \frac{1}{2}\delta,$$

como afirmamos em (3.35).

Definamos

$$I_o \doteq I.$$

Trocando-se k-célula $I_o = I$ pela k-célula I_1, na construção acima, podemos repetir o processo acima e obter uma outra k-célula, que chamaremos de I_2, de modo que está também tenha as mesmas propriedades que I_1, a saber:

- $I_2 \subseteq I_1 \subseteq I_o = I$;
- a k-célula I_2, **não** poderá ser coberta por uma subcobertura finita da cobertura aberta $\{G_\alpha ; \alpha \in \mathcal{A}\}$;
- se
$$x, y \in I_2, \quad \text{teremos} \quad \|x - y\| \leq \frac{1}{2^2}\delta.$$

Deste modo, repetindo o processo acima, obteremos uma sequência formada por k-células, que indicaremos por $\{I_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$, que têm as seguintes propriedades:

(a) por construção, são encaixantes, isto é,
$$I_{n+1} \subseteq I_n, \quad \text{para cada} \quad n \in \{0, 1, 2, \cdots\};$$

(b) para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, temos que a k-célula I_n, **não** poderá ser coberta por uma subcobertura finita da cobertura aberta $\{G_\alpha ; \alpha \in \mathcal{A}\}$;

(c) para cada $n \in \mathbb{Z}^+$,
$$\text{se} \quad x, y \in I_n, \quad \text{teremos} \quad \|x - y\| \leq \frac{1}{2^n}\delta.$$

Da Proposição (3.3.5), segue que
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset,$$
isto é, existe
$$x^* \in I_n, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Como $\{G_\alpha ; \alpha \in \mathcal{A}\}$ é cobertura aberta do conjunto I (e portanto de cada um dos conjuntos I_n, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$), segue que
$$x^* \in G_{\alpha_o}, \quad \text{para algum} \quad \alpha_o \in \mathcal{A}.$$

Mas o conjunto G_{α_o} é um subconjunto aberto em $(\mathbb{R}^k, d_k)$, logo deverá existir $r > 0$ tal que a vizinhança $N_r(x^*)$ está contida em G_{α_o}, ou seja, se
$$d(y, x^*) = \|y - x^*\| < r, \quad \text{segue que} \quad y \in G_{\alpha_o}. \tag{3.37}$$

Seja $n_o \in \mathbb{N}$ tal que
$$\frac{1}{2^{n_o}}\delta < r, \tag{3.38}$$
que existe pois $\mathbb{R}$ é arquimediano.

Então, da propriedade (c) acima, segue que
$$I_{n_o} \subseteq G_{\alpha_o}.$$

De fato, pois se $y \in I_n$ então
$$\|y - x^*\| \leq \frac{1}{2^{n_o}}\delta \overset{(3.37)}{<} r, \quad \text{assim} \quad y \overset{(3.38)}{\in} \in N_r(x^*) \subseteq G_{\alpha_o}.$$

Isto contraria a propriedade (b) acima, pois, neste caso, I_{n_o} seria coberto por G_{α_o}, assim teríamos um absurdo.

Logo toda conbertura aberta da k-célula I possui uma subcobertura que ainda cobre a k-célula I, ou seja, a k-célula I é um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^k, d_k)$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.3.3 *Em particular, segue do resultado acima que todo intervalo fechado e limitada* $[a, b]$ *de* $(\mathbb{R}, d_1)$ *é um subconjunto compacto de* $(\mathbb{R}, d_1)$.

A seguir daremos uma caracterização importante dos conjuntos compactos em $\mathbb{R}^k$, a saber:

Teorema 3.3.3 *Seja* E *um subconjunto do espaço métrico* $(\mathbb{R}^k, d_k)$.
São equivalentes:

1. *o conjunto* E *é um subconjunto fechado e limitado em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$*;*
2. *o conjunto* E *é um subconjunto compacto em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$*;*
3. *Todo subconjunto infinito do conjunto* E *tem, pelo menos, um ponto de acumulação em* E.

Demonstração:
1. $\Rightarrow$ 2.:
Suponhamos que 1. ocorra.
Como o conjunto E é um subconjunto limitado em $(\mathbb{R}^k, d_k)$ segue $E \subseteq I$, para alguma k-célula I de $(\mathbb{R}^k, d_k)$.
Do Teorema acima, segue que a k-célula I é um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^k, d_k)$.
Logo, da Proposição (3.3.3), segue que o conjunto E é um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^k, d_k)$, ou seja, vale 2..
2. $\Rightarrow$ 3.:
A Proposição (3.3.4) afirma que 2. implica 3. .
3. $\Rightarrow$ 1.:
Suponhamos que 3. ocorra.
Suponhamos, por absurdo, que o conjunto E **<u>não</u>** é um subconjunto limitado de $(\mathbb{R}^k, d_k)$.
Então para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar

$$x_n \in E, \quad \text{tal que} \quad \|x_n\| > n.$$

Seja S o conjunto formado pelos pontos x_n, ou seja,

$$S \doteq \{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Notemos que o conjunto S é infinito e não possue ponto de acumulação em $(\mathbb{R}^k, d_k)$ (verifique!).
Portanto o conjunto infinito S não terá ponto de acumulação em E, o que contraria o item 3. .
Logo o conjunto E deverá ser um subconjunto limitado de $(\mathbb{R}^k, d_k)$.
Suponhamos, por absurdo, que o conjunto E **<u>não</u>** é um subconjunto fechado de $(\mathbb{R}^k, d_k)$, isto é, existe um ponto $x_o \in \mathbb{R}^k$, que é ponto de acumulação do conjunto E, mas que **<u>não</u>** pertence ao conjunto E, ou seja,

$$x_o \notin E. \tag{3.39}$$

Como x_o é ponto de acumulação de E, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe

$$x_n \in E\,, \quad \text{tal que} \quad \|x_n - x_o\| < \frac{1}{n}.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que todos x_n's são diferentes (caso contrário eliminamos da lista os que forem iguais).
Consideremos

$$S \doteq \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E.$$

Observemos que o conjunto S é infinito, x_o é um ponto de acumulação de E e não existe nenhum outro ponto de acumulação do conjunto E em $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

De fato, se tivesse outro ponto de acumulação do conjunto E, que denotaremos por y_o, deveríamos ter

$$\|y_o - x_o\| \leq \underbrace{\|y_o - x_n\|}_{y_o \text{ é ponto de acumulação de } E \; < \frac{1}{n}} + \underbrace{\|x_o - x_n\|}_{x_o \text{ é ponto de acumulação de } E \; < \frac{1}{n}} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n},$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, o que implicaria que

$$y_o = x_o.$$

Assim o conjunto S é um conjunto infinito que tem o ponto x_o como seu único ponto de acumulação do conjunto E em $(\mathbb{R}^k, d_k)$ e este não pertence a E (ver (3.39)).

Logo o conjunto E contém um subconjunto infinito S, que não possui um ponto de acumulação em E, contrariando o item 3. .

Logo o conjunto E é um subconjunto fechado em $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

Portanto o conjunto E é um subconjunto é fechado e limitado $(\mathbb{R}^k, d_k)$, ou seja, 2. ocorre, completando a demonstração do resultado

□

Observação 3.3.4 *A equivalência entre 1. e 2. é conhecido como* **Teorema de Heine-Borel**.

Finalizando esta seção, enunciaremos e demonstraremos o denominado **Teorema de Weierstrass**, a saber:

Teorema 3.3.4 *Todo subconjunto infinito e limitado E do espaço métrico $(\mathbb{R}^k, d_k)$ tem, pelo menos, um ponto de acumulação em $(\mathbb{R}^k, d_k)$.*

Demonstração:

De fato, como o conjunto E é um subconjunto limitado em $(\mathbb{R}^k, d_k)$ segue que $E \subseteq I$, onde I é uma k-célula de $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

Mas, do Teorema (3.3.2), temos que o conjunto I é um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

Como o conjunto E e infinito e está contido em um comapcto de $(\mathbb{R}^k, d_k)$ segue, da Proposição (3.3.4), que o conjunto E tem um ponto de acumulação em (I, d_k), ou seja, em $(\mathbb{R}^k, d_k)$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.3.5

1. *A equivalência entre 1. e 2. no Teorema acima pode ser provada para um espaço vetorial normado de dimensão finita.*

2. *Na verdade a equivalência entre 1. e 2. no Teorema acima* **só ocorre** *se o espaço vetorial normado em questão tem dimensão finita, isto é, pode-se provar o seguinte resultado (no curso de Análise Funcional):*

   Seja $(V, +, \cdot, \|.\|)$ um espaço vetorial normado, munido da métrica $\underline{d}$ induzida pela norma.

   A bola fechada, $\overline{B(O\,;1)}$ é um subconjunto compacto de (V, d) se, e somente se, V tem dimensão finita.

3.4 Conjuntos Perfeitos

Começaremos a seção com o seguinte reusltado:

Teorema 3.4.1 *Seja P um subconjunto perfeito e não vazio do espaço métrico $(\mathbb{R}^k, d_k)$. Então o conjunto P é não enumerável.*

Demonstração:
Como o conjunto P é um subconjunto perfeito em $(\mathbb{R}^k, d_k)$, segue que ele será um subconjunto fechado em $(\mathbb{R}^k, d_k)$ e todos os seus pontos, são pontos de acumulação dele mesmo, isto é,

$$P' = P.$$

Em particular, o conjunto P deve ser infinito, pois se fosse finito teríamos

$$P' \overset{\text{Corolário } (3.2.1)}{=} \emptyset, \quad \text{e assim} \quad P = P' = \emptyset,$$

o que seria um absurdo.
Suponhamos, por absurdo, que o conjunto P é enumerável, isto é,

$$P \doteq \{x_1, x_2, \cdots\}.$$

(i) Seja

$$V_1 \doteq V_r(x_1) \tag{3.40}$$

uma vizinhança qualquer do ponto x_1 em (X, d), onde $r > 0$.

(ii) Como x_1 é um ponto de acumulação do conjunto P, segue que

$$\left[V_{\frac{r}{2}}(x_1) \cap P\right] \setminus \{x_1\} \neq \emptyset.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$x_2 \in \left[V_{\frac{r}{2}}(x_1) \cap P\right] \setminus \{x_1\}, \quad \text{em particular,} \quad 0 < \|x_2 - x_1\| < \frac{r}{2}.$$

Consideremos a vizinhança $V_2 \doteq V_{r_2}(x_2)$, onde

$$r_2 \doteq \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|\right\} > 0. \tag{3.41}$$

Observemos que:

(ii-1) Temos que

$$\overline{V_2} \subseteq V_1. \tag{3.42}$$

De fato, se

$$x \in \overline{V_2}, \quad \text{segue que} \quad \|x - x_2\| \le r_2,$$

assim

$$\|x - x_1\| = \|(x - x_2) + (x_2 - x_1)\| \le \underbrace{\|x - x_2\|}_{\overset{x \in \overline{V_2}}{\le} r_2} + \underbrace{\|x_2 - x_1\|}_{\overset{x_2 \in V_{\frac{r}{2}}(x_1)}{<} \frac{r}{2}} < \underbrace{r_2}_{\overset{(3.41)}{\le} \frac{r}{2}} + \frac{r}{2}$$

$$\le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

ou seja,

$$\|x - x_1\| < r, \quad \overset{(3.40)}{\text{isto é},} \quad x \in V_1.$$

Assim $\overline{V_2} \subseteq V_1$, como afirmamos.

(ii-2) Notemos que

$$x_1 \notin \overline{V_2}. \tag{3.43}$$

De fato, pois

$$\|x_1 - x_2\| > \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \overset{(3.41)}{\geq} r_2, \quad \text{ou seja,} \quad \|x_1 - x_2\| > r_2,$$

assim $x_1 \notin \overline{V_2}$ (pois $x \in \overline{V_2}$ se, e somente se, $\|x - x_2\| \leq r_2$), como afirmamos.

(iii) Como o ponto x_2 é ponto de acumulação do conjunto P, podemos repetir o processo acima para obter

$$x_3 \in (V_2 \cap P) \setminus \{x_2\}$$

e uma vizinhança $V_3 \doteq V_{r_3}(x_3)$, onde

$$r_3 \doteq \min\left\{\frac{r_2}{2}, \frac{1}{2}\|x_2 - x_3\|\right\} > 0,$$

que terá as seguintes propriedades:

$$\overline{V_3} \subseteq V_2 \quad \text{e} \quad x_2 \notin \overline{V_3}.$$

(iv) Prosseguindo o processo acima (isto é, por indução), obtemos uma coleção de vizinhanças dos pontos x_n, que serão indicadas por $\{V_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$, tais que:

(iv-1) $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$;

(iv-2) $x_n \notin \overline{V_{n+1}}$

(iv-2) $V_{n+1} \cap P \neq \emptyset$.

Definamos

$$K_n \doteq \overline{V_n} \cap P.$$

Como, por construção

$$\overline{V_n} \cap P \subseteq V_{n-1} \cap P \neq \emptyset,$$

segue que

$$K_n \neq \emptyset, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, como o conjunto $\overline{V_n}$ é um subconjunto fechado e limitado em $(\mathbb{R}^k, d_k)$ segue, do Teorema (3.3.3), que o conjunto $\overline{V_n}$ é um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

Logo, como o conjunto $\overline{V_n}$ é um subconjunto compacto e o conjunto P é um conjunto fechado em $(\mathbb{R}^k, d_k)$, segue, do Corolário (3.3.1), que o conjunto

$$K_n = \overline{V_n} \cap P$$

é um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

Além disso, como, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n,$$

segue que

$$K_{n+1} = \overline{V_{n+1}} \cap P \overset{\text{(iv-1)}}{\subseteq} V_n \cap P \subseteq \overline{V_n} \cap P = K_n, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por construção, como para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$x_n \notin \overline{V_{n+1}}, \quad \text{segue que} \quad x_n \notin K_{n+1} = \overline{V_{n+1}} \cap P.$$

Portanto, nenhum ponto do conjunto $P = \{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ estará em $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, ou seja,

$$P \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \right) = \emptyset.$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$K_n = \overline{V_n} \cap P \subseteq P, \quad \text{ou seja,} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subseteq P,$$

que juntamente com a conclusão acima, implicarão que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset,$$

contrariando a conclusão do Corolário (3.3.4).

Portanto o conjunto P não pode ser finito ou enumerável, logo só poderá ser não enumerável, completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o:

Corolário 3.4.1 *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Então o intervalo limitado fechado $[a, b]$ *em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *é um conjunto não enumerável.*

Em particular, o conjunto $\mathbb{R}$ *é um conjunto não enumerável (pois contém como subconjunto o intervalo* $[a, b]$ *que é um conjunto não enumerável).*

Demonstração:

Basta observar que o intervalo $[a, b]$ é não vazio, é um subconjunto fechado de $(\mathbb{R}, d_1)$ e todo o ponto de $[a, b]$ é ponto de acumulação de $[a, b]$, isto é, o intervalo $[a, b]$ é um conjunto perfeito em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Logo, do Teorema acima, segue que $[a, b]$ é um conjunto não enumerável, como queríamos demonstrar.

□

A seguir vamos exibir um exemplo de um conjunto compacto e perfeito de $(\mathbb{R}, d_1)$ que **não** contém um intervalo fechado (não trivial) ou intervalo aberto de $(\mathbb{R}, d_1)$.

Este exemplo deve-se a George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (São Petersburgo, Rússia, 3/03/1845 a 6/01/1918).

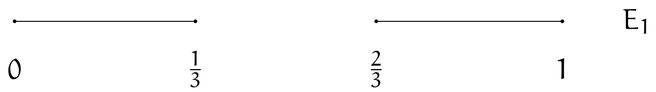
3.5 O Conjunto de Cantor

Consideremos o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$ (figura abaixo):

$$E_o \doteq [0,1] \subseteq \mathbb{R}.$$

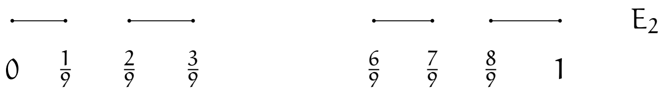
Removendo-se o intervalo aberto e limitado $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ obteremos o subconjunto de $\mathbb{R}$, que denotaremos por E_1 (figura abaixo), a saber:

$$E_1 \doteq \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$



Removendo-se os "terços médios" de cada um dos subintervalos que compõe E_1, isto é, retirando-se os intervalos abertos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ obteremos o subconjunto de $\mathbb{R}$, que denotaremos por E_2 (figura abaixo), a saber:

$$E_2 \doteq \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$



Continuando o processo, obtemos uma sequência de subconjuntos de $\mathbb{R}$, que indicaremos por $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$, que têm as seguintes propriedades:

(i) $E_o \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$.

(ii) para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, o conjunto E_n é a reunião de 2^n intervalos fechados e limitados, cada um deles de comprimento $\frac{1}{3^n}$.

A verificação desta última afirmação será deixada como exercício para o leitor.

Observação 3.5.1

1. *Observemos que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *os intervalos*

$$J_n \doteq \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right), \quad k = 0, 1, 2 \cdots \leq n \quad com \quad k \leq 3^{n-1} - 1. \tag{3.44}$$

contidos no intervalo

$$E_o = [0,1]$$

<u>**não**</u> *tem ponto em comum com o conjunto* P, *ou seja,*

$$J_n \cap P = \emptyset, \quad n \in \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

A demonstração da afirmação acima será deixada como exercício para o leitor.

2. *Para ilustrar a afirmação acimas, notemos que:*

   - *para* $n = 1$, *o intervalo* $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, *que corresponde a* $k = 0$.
   - *para* $n = 2$, *o intervalo* $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, *que corresponde a* $k = 0$ *em* (3.44), *o intervalo* $\left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$, *que corresponde a* $k = 1$ *em* (3.44), *e o intervalo* $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, *que corresponde a* $k = 2$ *em* (3.44), *não estarão contidos em* $E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$.

3. *Observemos também que para cada* $n \in \mathbb{N}$, E_n *é reunião finita de intervalos fechados em* $(\mathbb{R}, d_1)$, *logo será um subconjunto fechado em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *e está contido em* $[0, 1]$, *que é um subconjunto compacto em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

   Logo, da Proposição (3.3.3), segue que, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, *o conjunto* E_n *é um subconjunto compacto em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Definição 3.5.1 *Seja*

$$P \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

O conjunto acima é denominado **conjunto de Cantor**.

Observemos que, por construção, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, os extremos do intervalo E_n estarão no conjunto P.

Além disso:

1. o conjunto P é um subconjunto compacto em $(\mathbb{R}, d_1)$.

   De fato, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, o conjunto E_n é um subconjunto fechado em $(\mathbb{R}, d_1)$, segue que o conjunto P é um conjunto fechado em $(\mathbb{R}, d_1)$ (pois é interseção de fechados) e está contido no conjunto compacto $[0, 1]$ em $(\mathbb{R}, d_1)$.

   Logo será o conjunto P é um conjunto compacto em $(\mathbb{R}, d_1)$, ou seja

   $$\boxed{\text{O conjunto } P \text{ é um subconjunto compacto de } (\mathbb{R}, d_1)}$$

2. Observemos que a sequência $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de compactos encaixantes em $(\mathbb{R}, d_1)$, assim a intersecção finita de membros da sequência será o menor, logo não vazia.

   Portanto, da Proposição (3.3.4), segue que o conjunto P é não vazio, ou seja,

   $$\boxed{P \neq \emptyset}$$

3. Não existe um intervalo aberto contido no conjunto P.

   Observemos que, para cada $k, n \in \mathbb{N}$, **nenhum** intervalo do tipo (3.44) estará contido em P (pois eles foram retirados).

   Assim, dado um intervalo aberto $(a, b) \subseteq [0, 1]$, afirmamos que podemos construir um intervalo aberto, como em (3.44), inteiramente contido no intervalo (a, b) e como tal intervalo não está contido em P seguirá que o intervalo (a, b) não estará contido em P.

Para isto, basta escolher $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{3^n} < \frac{b-a}{6}$$

(que existe por que o conjunto $\mathbb{R}$ é arquimedeano), isto é,

$$(b-a)3^n > 6,$$

ou ainda,

$$6 + a\,3^n < b\,3^n,$$

ou seja, o comprimento do intervalo $(a\,3^n, b\,3^n)$ será maior que 6.

Isto, juntamente com o fato que o conjunto $\mathbb{R}$ é arquimedeano, implicará que existe $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ tal que

$$a\,3^n < 3k+1 < 3k+2 < b\,3^n,$$

ou seja,

$$a < \frac{3k+1}{3^n} < \frac{3k+2}{3^n} < b,$$

mostrando que existe um intervalo da forma (3.44) contido no intervalo (a, b).

Como $J_n \cap P = \emptyset$, segue que o conjunto P não contém nenhum intervalo aberto (a, b).

$$\boxed{\text{O conjunto P não contém nenhum intervalo aberto}}$$

4. P é um conjunto perfeito (em particular, é não enumerável).

   Já sabemos que o conjunto P é fechado (pois ele é um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}, d_1)$).

   Logo basta mostrar que o conjunto P não contém nenhum ponto isolado, ou seja, todo ponto do conjunto P é ponto de acumulação do conjunto P.

   Para isto, sejam $p \in P$ e $N_r(p)$ uma vizinhança do ponto p (isto é, um intervalo aberto).

   Consideremos I_{n_o} um intervalo de E_{n_o} que contenha o ponto p, que existe, pois

$$p \in P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

   Escolha $n_o \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, de modo que

$$I_{n_o} \subseteq N_r(p),$$

   que existe pois os intervalos I_n tem comprimento tendendo a zero, quando $\underline{n}$ tende a infinito, e $p \in I_{n_o}$.

   Seja x_{n_o} um extremo do intervalo fechado I_{n_o} tal que

$$x_{n_o} \neq p.$$

   Notemos que, no máximo, o ponto $\underline{p}$ poderá ser um dos extremos do intervalo I_{n_o}.

   Da construção do conjunto P, segue que

$$x_{n_o} \in [P \cap N_r(p)] \setminus \{p\},$$

   ou seja, $p \in P$ é ponto de acumulação do conjunto P, isto é, o conjunto P é um conjunto perfeito.

$$\boxed{\text{O conjunto } P \text{ é um subconjunto perfeito de } (\mathbb{R}, d_1)}$$

5. No curso de Teoria da Medida será mostrado que o conjunto P tem medida zero, ou seja,

$$\boxed{\text{O conjunto } P \text{ tem medida zero}}$$

<u>**Conclusão:**</u> o conjunto de Cantor P tem as seguintes propriedades:

- é não enumerável;
- é compacto em $(\mathbb{R}, d_1)$;
- não contém nenhum intervalo aberto de $(\mathbb{R}, d_1)$;
- é perfeito em $(\mathbb{R}, d_1)$;
- tem medida zero.

3.6 Conjuntos Conexos

Inciaremos esta seção introduzindo o seguinte conceito:

Definição 3.6.1 *Sejam (X, d) espaço métrico e $A, B, E \subseteq X$.*

- *Diremos que os conjunto A e B são <u>**conjuntos separados**</u> se $\overline{A} \cap B$ e $A \cap \overline{B}$ são vazios, ou seja*
$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset,$$
ou ainda, nenhum ponto do fecho do conjunto A está no conjunto B e nenhum ponto do fecho do conjunto B está no conjunto A.

- *Diremos que $E \subseteq X$ é um conjunto <u>conexo</u> em (X, d), se o conjunto E <u>**não**</u> puder ser escrito como a reunião de dois conjuntos não vazios que são separados, isto é,*
$$\text{se} \quad E = A \cup B, \quad \text{com} \quad A, B \quad \text{conjuntos separados, então} \quad A = \emptyset \quad \text{ou} \quad B = \emptyset.$$

Observação 3.6.1 *Conjuntos separados são disjuntos mas nem todos conjuntos disjuntos são conjuntos separados, como mostra o exemplo a seguir.*

Exemplo 3.6.1 *O intervalo fechado $A = [0, 1]$ e o intervalo aberto $B = (1, 2)$ em $(\mathbb{R}, d_1)$, são conjuntos disjuntos mas <u>**não**</u> são conjuntos separados em $(\mathbb{R}, d_1)$.*

Resolução:

De fato, pois
$$\overline{A} \cap B = [0, 1] \cap (1, 2) = \emptyset$$
mas
$$A \cap \overline{B} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\} \neq \emptyset.$$

Os subconjuntos conexos de $(\mathbb{R}, d_1)$ têm a seguinte importante propriedade:

Teorema 3.6.1 *Consideremos o espaço métrico $(\mathbb{R}, d_1)$ e $E \subseteq X$.*

O conjunto E é um subconjunto conexo em $(\mathbb{R}, d_1)$ se, e somente se, tem a seguinte propriedade:
$$\text{dados} \quad x, y \in E, \quad \text{com} \quad x < y, \quad \text{se} \quad z \in (x, y) \quad \text{deveremos ter} \quad z \in E,$$
ou seja, o conjunto E deverá ser um intervalo de $\mathbb{R}$.

Demonstração:

Consideremos E um subconjunto conexo em $(\mathbb{R}, d)$.

Suponhamos, por absurdo, que dados

$$x, y \in E \quad \text{com} \quad x < y, \quad \text{exista} \quad z \in (x, y), \quad \text{tal que} \quad z \notin E.$$

Sejam

$$A_z \doteq E \cap (-\infty, z) \quad \text{e} \quad B_z \doteq E \cap (z, \infty).$$

Como $z \notin E$, teremos que

$$E = A_z \cup B_z.$$

Como

$$x < z < y$$

segue que

$$x \in A_z \quad \text{e} \quad y \in B_z, \quad \text{logo} \quad A_z, B_z \neq \emptyset.$$

Além disso, os conjuntos A_z e B_z são conjuntos separados em $(\mathbb{R}, d_1)$.

De fato, pois

$$A_z \subseteq (-\infty, z) \quad \text{e} \quad B_z \subseteq (z, \infty),$$

assim

$$\overline{A_z} \subseteq (-\infty, z] \quad \text{e} \quad \overline{B_z} \subseteq [z, \infty),$$

implicando que

$$\overline{A} \cap B \subseteq (-\infty, z] \cap (z, \infty) = \emptyset \quad \text{e} \quad A \cap \overline{B} \subseteq (-\infty, z) \cap [z, \infty) = \emptyset,$$

ou seja,

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \quad \text{e} \quad A \cap \overline{B} = \emptyset,$$

mostrando que o conjunto E **não** é um subconjunto conexo de $(\mathbb{R}, d_1)$, o que contraria nossa hipótese.

Portanto dados

$$x, y \in E, \quad \text{com} \quad x < y, \quad \text{se} \quad z \in (x, y) \quad \text{deveremos ter} \quad z \in E.$$

Reciprocamente, nossa hipótese é que o conjunto E tenha a propriedade:

$$\text{dados} \quad x, y \in E, \quad \text{com} \quad x < y \quad \text{se} \quad z \in (x, y) \quad \text{então} \quad z \in E, \tag{3.45}$$

Suponhamos, por absurdo, que o conjunto E **não** seja um subconjunto conexo em $(\mathbb{R}, d_1)$, isto é, existem subconjuntos A e B de $\mathbb{R}$, não vazios, conjuntos separados de modo que

$$E = A \cup B. \tag{3.46}$$

Em particular, teremos

$$A, B \neq \emptyset \quad \text{e} \quad A \cap B = \emptyset,$$

logo existirão

$$x \in A \setminus B \quad \text{e} \quad y \in B \setminus A. \tag{3.47}$$

Com isto deveremos ter $x \neq y$, e podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$x < y.$$

Definamos

$$z \doteq \sup\{A \cap [x,y]\}$$

que existe pois, $A \cap [x,y] \neq \emptyset$, já que $x \in A \cap [x,y]$, e o intervalo $[x,y]$ é um intervalo limitado (em particular, limitado superiormente) em $\mathbb{R}$.

Logo, da Proposição (3.2.7), segue que

$$z \in \overline{A \cap [x,y]} \subseteq \overline{A} \cap \underbrace{\overline{[x,y]}}_{=[x,y]} = \overline{A} \cap [x,y],$$

ou seja,

$$z \in \overline{A} \quad \text{e} \quad z \in [x,y]. \tag{3.48}$$

Além disso, do fato que os conjuntos A e B são conjuntos separados (na verdade do fato que $\overline{A} \cap B = \emptyset$) teremos que

$$z \notin B. \tag{3.49}$$

Logo, de (3.48), (3.49) e de (3.47), segue que

$$z \in [x,y). \tag{3.50}$$

Afirmamos que

$$z \in A. \tag{3.51}$$

De fato, suponhamos, por absurdo, que

$$z \notin A. \tag{3.52}$$

Assim teremos, de (3.50), (3.52), (3.49) e (3.46), que

$$z \in (x,y), \quad z \notin A, \quad z \notin B, \quad \text{implicando que} \quad z \notin E = A \cup B,$$

o que contraria a propriedade (3.45) que o conjunto E satisfaz.

Portanto teremos $z \in A$.

Como os conjuntos A e B são conjuntos separados (na verdade do fato que $A \cap \overline{B} = \emptyset$) e $z \in A$, segue que

$$z \notin \overline{B}.$$

Logo, como $z \notin \overline{B}$, isto é, o ponto $\underline{z}$ não pode ser um ponto de acumulação do conjunto B, deverá existir

$$z_1 \in (z,y), \quad \text{tal que} \quad z_1 \notin B. \tag{3.53}$$

Assim

$$z_1 \notin B, \quad x < z = \sup\{A \cap [x,y]\} < z_1 \quad \text{e} \quad z_1 < y,$$

o que implicará que

$$z_1 \notin A. \tag{3.54}$$

Portanto, de (3.53) e (3.54), segue que

$$z_1 \in (x,y), \quad z_1 \notin A \cap B, \qquad \text{logo} \quad z_1 \notin E,$$

o que será um absurdo pela propriedade (3.45) que o conjunto E satisfaz.

Portanto o conjunto E é um subconjunto conexo em $(\mathbb{R}, d_1)$, completando a demonstração do resultado.

□

Capítulo 4

Aequência e Séries Numéricas

Trataremos neste capítulo de sequências em espaços métricos, em geral, e de séries numéricas de números complexos.

Começaremos estudando sequências em espaços métricos (nas três primeiras seções) e depois trataremos das séries numéricas.

4.1 Sequências Convergentes

Inciaremos com a:

Definição 4.1.1 *Seja* (X, d) *um espaço métrico.*

Diremos que uma sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* X *é uma* **sequência convergente em** (X, d)*, se existir* $p \in X$ *de modo que, dado* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $N_o \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\text{se} \quad n \geq N_o \quad \text{deveremos ter} \quad d(p_n, p) < \varepsilon.$$

Neste caso escreveremos:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \quad \text{ou} \quad p_n \to p \ (\text{quando } n \to \infty).$$

Se a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não for convergente em* (X, d)*, diremos que ela é uma* **sequência divergente em** (X, d).

Observação 4.1.1

1. *Observemos que a definição de "sequência convergente em* (X, d)*" depende, não somente da sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em questão, mas também do espaço métrico* (X, d)*, como mostra o seguinte exemplo:*

   A sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente no espaço métrico* $(\mathbb{R}, d_1)$ *para* $p = 0$.

   Porém ela **não** *será convergente no espaço métrico* $((0, \infty), d_1)$ *(olhado como um subsepaço do espaço métrico* $(\mathbb{R}, d_1)$*) pois* $p = 0 \notin (0, \infty)$.

2. *Quando não houver motivo para confusão, diremos apenas que a "sequência é convergente" em vez de dizer que ela é uma "sequência convergente em* (X, d)*".*

3. *Os elementos da sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, a saber* p_n*, como* $n \in \mathbb{N}$*, serão ditos* **termos da sequência** $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definição 4.1.2 *Dada uma sequência* $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *definimos seu* **conjunto imagem**, *como sendo o conjunto formado por todos os* p_n, $n \in \mathbb{N}$, *ou seja,*

$$\{p_n \, ; \, n \in \mathbb{N}\}.$$

Diremos que uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *num espaço métrico* (X, d) *é uma* **sequência limitada em** (X, d), *se existirem* $M > 0$ *e* $x_o \in X$ *tal que*

$$d(p_n, x_o) < M, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N},$$

ou seja, seu conjunto imagem é um conjunto limitado do espaço métrico (X, d).

Nos próximos exemplos, consideremos o espaço métrico $(\mathbb{R}, d_1)$ e a sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dada por:

Exemplo 4.1.1

(a) *Seja*

$$p_n \doteq \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então:

(a_1) o conjunto imagem da sequência numérica $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é infinito, a saber, será igual a*

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}.$$

(a_2) a sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é uma sequência convergente para zero em* $(\mathbb{R}, d_1)$, *isto é,*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

(a_3) a sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é uma sequência limitada em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

De fato, para mostrar isto, basta tomar, por exemplo, $x_o \doteq 0$, $M \doteq 1$*e com isto teremos*

$$d(p_n, x_o) = |p_n - 0| = \frac{1}{n} \leq 1, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) *Seja*

$$p_n \doteq n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então:

(b_1) o conjunto imagem da sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é infinito, a saber, é igual a*

$$\left\{1, 2^2, 3^2, \cdots\right\}.$$

(b_2) a sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é uma sequência divergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

(b_3) a sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *não é uma sequência limitada em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

De fato, pois para todo $M > 0$ *e todo* $x_o \in \mathbb{R}$ *temos que*

$$d(p_n, x_o) = |p_n - x_o| = |n^2 - x_o| \geq n^2 - |x_o| \geq M, \quad \textit{para} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \textit{suficientemente grande},$$

mostrando que a sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *não é uma sequência limitada em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

(c) *Seja*

$$p_n \doteq 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então:

(c_1) o conjunto imagem da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é infinito, a saber, é igual a

$$\left\{0, 1 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, \cdots\right\}.$$

(c_2) a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente para 1 em $(\mathbb{R}, d_1)$.

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

(c_3) a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $(\mathbb{R}, d_1)$.

De fato, pois se $M \doteq 2$ e $x_o \doteq 0$ temos que

$$d(p_n, x_o) = |p_n - 0| = \left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 0\right| \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2 = M, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(d) *Seja*

$$p_n \doteq (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então:

(d_1) o conjunto imagem da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é finito, a saber, é igual a

$$\{-1, 1\}.$$

(d_2) a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência divergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

(d_3) a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $(\mathbb{R}, d_1)$.

De fato, pois se $M \doteq 2$ e $x_o \doteq 0$ temos que

$$d(p_n, x_o) = |p_n - 0| = |(-1)^n - 0| = |-1|^n = 1 \leq M, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(e) *Seja*

$$p_n \doteq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então:

(e_1) o conjunto imagem da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é finito, a saber, é igual a

$$\{1\}.$$

(e_2) a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente para 1 em $(\mathbb{R}, d_1)$.

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

(e_3) a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $(\mathbb{R}, d_1)$.

De fato, pois se $M \doteq 1$ e $x_o \doteq 0$ temos que

$$d(p_n, x_o) = |p_n - 0| = |1 - 0| = 1 \leq M, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para espaços métricos, em geral, temos as seguintes propriedades básicas de sequência convergentes:

Proposição 4.1.1 *Seja* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência no espaço métrico* (X, d). *Então:*

1. *A sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $\underline{p}$ *em* (X, d) *se, e somente se, toda vizinhança do ponto* $\underline{p}$ *em* (X, d), *contém todos os termos da sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *exceto um número finito destes.*

2. *(Unicidade do limite) Sejam* $p, p' \in X$ *e suponhamos que a sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $\underline{p}$ *e para* $\underline{p'}$ *em* (X, d). *Então*
$$p' = p.$$

3. *Se a sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $\underline{p}$ *em* (X, d), *então ela será uma sequência limitada em* (X, d).

4. *Se* $E \subseteq X$ *e o ponto* $\underline{p}$ *é um ponto de acumulação de* E *em* (X, d), *então existe uma sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* E, *que converge para* $\underline{p}$ *em* (X, d), *isto é,*
$$\lim_{n\to\infty} p_n = p, \quad \textit{com} \quad p_n \in E, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. *Suponhamos que o conjunto* F *é um subconjunto fechado em* (X, d) *e que a sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* F, *seja convergente em* (X, d), *isto é,*
$$p_n \in F, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \quad \textit{e} \quad p_n \to p \quad \textit{em} \quad (X, d).$$
Então $p \in F$.

Demonstração:

<u>De **1.**:</u>

Suponhamos que
$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \quad \text{e} \quad V \doteq V_r(p)$$
é uma vizinhança do ponto $\underline{p}$ (ou seja, $r > 0$).

Como $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$, tomando-se
$$\varepsilon \doteq r > 0,$$
podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$ de modo que, se
$$n \geq N_o \quad \text{segue que} \quad d(p_n, p) < \varepsilon = r,$$
isto é,
$$p_n \in V \quad \text{se} \quad n \geq N_o\,, \quad \text{ou seja,} \quad p_n \in V,$$
exceto (eventualmente) para $n = 1, 2, \cdots, N_o - 1$, isto é, exceto para um número finito de termos da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Reciprocamente, dado $\varepsilon > 0$, se considerarmos a vizinhança $V \doteq V_\varepsilon(p)$ temos, por hipótese, que a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está contida em V, exceto um número finito de termos, ou seja, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$ tal que
$$\{p_n\,;\, n \geq N_o\} \subseteq V,$$
isto é, se
$$n \geq N_o, \quad \text{teremos} \quad d(p_n, p) < \varepsilon,$$

mostrando que $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = p$, completando a demonstração do item.

De **2.:**

Como

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p \quad \text{e} \quad \lim_{n \to \infty} p_n = p',$$

dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar N_o, $N_1 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\text{se} \quad n \geq N_o \quad \text{teremos} \quad d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.1}$$

$$\text{se} \quad n \geq N_1 \quad \text{teremos} \quad d(p_n, p') < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2}$$

Seja

$$N \geq \max\{N_o, N_1\}.$$

Então

$$d(p, p') \leq \underbrace{d(p, p_N)}_{\stackrel{(4.1)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(p', p_N)}_{\stackrel{(4.2)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{ou seja,} \quad d(p, p') < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$d(p, p') = 0, \quad \text{isto é,} \quad p' = p,$$

completando a demonstração do item.

De **3.:**

Se $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = p$ então, dado

$$\varepsilon \doteq 1 > 0,$$

podemos encontrar $N_o, \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\text{se} \quad n \geq N_o, \quad \text{teremos} \quad d(p_n, p) < \varepsilon = 1.$$

Seja

$$M \doteq \max\{d(p_1, p)\,,\, d(p_2, p)\,, \cdots\,,\, d(p_{N_o - 1}, p)\,,\, 1\} \quad \text{e} \quad x_o \doteq p.$$

Então para todo $n \in \mathbb{N}$ teremos

$$d(p_n, x_o) = d(p_n, p) \leq M, \quad \text{ou seja, a sequência } (p_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } (X, d),$$

completando a demonstração do item.

De **4.:**

Como o ponto $\underline{p}$ é ponto de acumulação de E, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tomarmos

$$r \doteq \frac{1}{n} > 0,$$

segue que a vizinhança $V_n \doteq V_{\frac{1}{n}}(p)$ contém um ponto de E, diferente do ponto $\underline{p}$, que será indicado por $p_n \in E$, ou seja

$$p_n \in E\,, \quad d(p_n, p) < \frac{1}{n} \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $N_o \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\frac{1}{N_o} < \varepsilon,$$

que existe pois $\mathbb{R}$ é arquimedeano.

Como isto, se $n \geq N_o$ teremos

$$d(p_n, p) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon, \quad \text{ou seja,} \quad \lim_{n\to\infty} p_n = p \quad \text{como} \quad p_n \in E, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N},$$

completando a demonstração do item.

De **5.**:

Como o conjunto F é um subconjunto fechado em (X, d), ele contém todos os seus pontos de acumulação.

Se existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $p_{n_o} = p$ segue que $p \in F$.

Caso contrário, se $p_n \neq p$ para todo $n \in \mathbb{N}$, afirmamos que o ponto $\underline{p}$ é um ponto de acumulação do conjunto F.

De fato, como $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ em (X, d), dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$ de modo que,

$$\text{se} \quad n \geq N_o, \quad \text{teremos} \quad d(p, p_n) < \varepsilon \quad \text{e} \quad p_n \neq p, \quad \text{pois} \quad p_n \in F \quad \text{e} \quad p \notin F.$$

Em particular, para cada $\varepsilon > 0$, teremos

$$p_{N_o} \in (V_\varepsilon(p) \cap F) \setminus \{p\},$$

mostrando que $p \in F' \overset{F \text{ é fechado}}{\subseteq} F$, ou ainda, $p \in F$, completando a demonstração do item e do resutado.

$\square$

Observação 4.1.2 *Denotaremos por $\underline{d}$ a métrica em $\mathbb{C}$ dada por:*

$$d(z, w) \doteq |z - w|, \quad z, w \in \mathbb{C},$$

onde $|\cdot|$ denota o módulo de um número complexo.

Para o espaço métrico formado pelos números complexos temos a:

Proposição 4.1.2 *Suponhamos que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências em $\mathbb{C}$, que são convergentes para $\underline{p}$ e $\underline{q}$ em $(\mathbb{C}, d)$, respectivamente, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \quad e \quad \lim_{n\to\infty} q_n = q \quad em \quad (\mathbb{C}, d).$$

Então:

(a) *A sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\underline{p}$ em $(\mathbb{C}, d)$ se, e somente se, a sequência $(p_n - p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $(\mathbb{C}, d)$, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \quad em \quad (\mathbb{C}, d) \quad \text{se, e somente se,} \quad \lim_{n\to\infty} (p_n - p) = 0 \quad em \quad (\mathbb{C}, d).$$

(b) *A sequência $(p_n + q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $(p + q)$ em $(\mathbb{C}, d)$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} (p_n + q_n) = p + q$ em $(\mathbb{C}, d)$, ou ainda,*

$$\lim_{n\to\infty} (p_n + q_n) = \left(\lim_{n\to\infty} p_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) \quad em \quad (\mathbb{C}, d).$$

(c) *Se* $c \in \mathbb{C}$ *então as sequências* $(c.p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(c+p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são convergentes para* $(c.p)$ *e* $(c+p)$ *em* $(\mathbb{C}, d)$, *respectivamente , isto é,* $\lim_{n\to\infty}(c.p_n) = c.p$ *e* $\lim_{n\to\infty}(c+p_n) = c+p$ *em* $(\mathbb{C}, d)$, *ou ainda,*

$$\lim_{n\to\infty}(c.p_n) = c.\left(\lim_{n\to\infty} p_n\right)$$

e

$$\lim_{n\to\infty}(c+p_n) = c + \left(\lim_{n\to\infty} p_n\right) \quad em \quad (\mathbb{C}, d).$$

(d) *A sequência* $(p_n.q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $(p.q)$ *em* $(\mathbb{C}, d)$, *isto é,* $\lim_{n\to\infty}(p_n.q_n) = p.q$ *em* $(\mathbb{C}, d)$, *ou ainda*

$$\lim_{n\to\infty}(p_n.q_n) = \left(\lim_{n\to\infty} p_n\right).\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) \quad em \quad (\mathbb{C}, d).$$

(e) *Se* $p_n \neq 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $p \neq 0$ *então a sequência* $\left(\frac{1}{p_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $\frac{1}{p}$ *em* $(\mathbb{C}, d)$, *isto é,* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p_n}\right) = \frac{1}{p}$ *em* $(\mathbb{C}, d)$, *ou ainda*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p_n}\right) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} p_n} \quad em \quad (\mathbb{C}, d).$$

Demonstração:

De **(a):**

Observemos que:

$\lim_{n\to\infty} p_n = p$ se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que se

$$n \geq N_o \quad \text{teremos} \quad |p_n - p| < \varepsilon,$$

que é equivalente a escrever

$$|(p_n - p) - 0| = |p_n - p| < \varepsilon, \quad \text{ou seja,} \quad \lim_{n\to\infty}(p_n - p) = 0,$$

completando a demonstração do item.

De **(b)**:

Como $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$, de modo que se

$$n \geq N_1 \quad \text{teremos} \quad |p_n - p| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.3}$$

De modo análogo, como $\lim_{n\to\infty} q_n = q$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_2 \in \mathbb{N}$, de modo que se

$$n \geq N_2 \quad \text{teremos} \quad |q_n - q| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4}$$

Logo, se

$$N_o \doteq \max\{N_1, N_2\}$$

então, para $n \geq N_o \geq N_1, N_2$ teremos:

$$|(p_n + q_n) - (p+q)| = |(p_n - p) + (q_n - q)| \leq \overbrace{|p_n - p|}^{\overset{(4.3)}{<}\frac{\varepsilon}{2}} + \overbrace{|q_n - q|}^{\overset{(4.4)}{<}\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, $\lim_{n\to\infty}(p_n + q_n) = p + q$, completando a demonstração do item.

De $(\mathbf{c})$:

Serão deixadas como exercício para o leitor.

De $(\mathbf{d})$:

Observemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$p_n.q_n - p.q = (p_n - p).(q_n - q) + q.(p_n - p) + p.(q_n - q). \tag{4.5}$$

Como $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$, de modo que que se

$$n \geq N_1 \quad \text{teremos} \quad |p_n - p| < \sqrt{\varepsilon}. \tag{4.6}$$

De modo análogo, como $\lim_{n\to\infty} q_n = q$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_2 \in \mathbb{N}$, de modo que se

$$n \geq N_2 \quad \text{teremos} \quad |q_n - q| < \sqrt{\varepsilon}. \tag{4.7}$$

Logo, se

$$N_o \doteq \max\{N_1, \mathbb{N}_2\},$$

para $n \geq N_o \geq N_1, N_2$ teremos:

$$|(p_n - p).(q_n - q)| = \underbrace{|p_n - p|}_{\overset{(4.6)}{<}\sqrt{\varepsilon}} . \underbrace{|q_n - q|}_{\overset{(4.7)}{<}\sqrt{\varepsilon}} < \sqrt{\varepsilon}.\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon,$$

ou seja, $\lim_{n\to\infty}[(p_n - p).(q_n - q)] = 0$.

Dos itens (a), (b) e (c) segue que

$$\lim_{n\to\infty}[q.(p_n - p)] = q.\left[\lim_{n\to\infty}(p_n - p)\right] = q.0 = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty}[p.(q_n - q)] = p.\left[\lim_{n\to\infty}(q_n - q)\right] = p.0 = 0.$$

Logo de (4.5) segue que

$$\lim_{n\to\infty}[p_n.q_n - p.q] = 0.$$

Assim, do item (a), segue que $\lim_{n\to\infty}(p_n.q_n) = p.q$, completando a demonstração do item.

De $(\mathbf{e})$:

Como $\lim_{n\to\infty} p_n = p \neq 0$, dado $\varepsilon \doteq \frac{1}{2}|p| > 0$, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$, de modo que se

$$n \geq N_1 \quad \text{teremos} \quad |p_n - p| < \varepsilon = \frac{1}{2}|p|. \tag{4.8}$$

Com isto temos, se $n \geq N_1$ teremos

$$|p| - |p_n| \leq |p - p_n| = |p_n - p| \overset{(4.8)}{<} \frac{1}{2}|p|,$$

assim

$$\frac{1}{2}|p| < |p_n| \quad \text{se} \quad n \geq N_1 \quad \text{ou seja,} \quad \frac{1}{|p_n|} < \frac{2}{|p|} \quad \text{se} \quad n \geq N_1. \tag{4.9}$$

De modo semelhante, dado $\varepsilon > 0$ considerando-se $\varepsilon' \doteq \frac{1}{2}|p|^2\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_2 \in \mathbb{N}$, de modo que se

$$n \geq N_2 \quad \text{teremos} \quad |p_n - p| < \varepsilon' = \frac{1}{2}|p|^2\varepsilon. \tag{4.10}$$

Seja

$$N_o \doteq \max\{N_1, N_2\}.$$

Se $n \geq N_o \geq N_1, N_2$ segue que:

$$\left|\frac{1}{p_n} - \frac{1}{p}\right| = \left|\frac{p_n - p}{p_n p}\right| = \frac{\overbrace{|p_n - p|}^{\overset{(4.10)}{<} \frac{1}{2}|p|^2\varepsilon}}{\underbrace{|p_n|}_{\overset{(4.10)}{>} \frac{1}{2}|p|}\,|p|} < \frac{\frac{1}{2}|p|^2\varepsilon}{\frac{1}{2}|p|\,|p|} = \varepsilon,$$

ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{p}$, , completando a demonstração do item e do resultado.

□

Para sequências em $\mathbb{R}^k$ temos a:

Proposição 4.1.3

(a) *Suponhamos que para cada* $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{R}^k$, *com* $x_n \doteq (x_{1,n}, x_{2,n}, \cdots, x_{k,n})$.

Então a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^k$ *em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$ *se, e somente se, para cada* $j \in \{1, \cdots, k\}$, *temos que a sequência* $(x_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* x_j *em* $(\mathbb{R}, d_1)$, *ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ em } (\mathbb{R}^k, d_k) \text{ se, e somente se } \lim_{n\to\infty} x_{j,n} = x_j \text{ em } (\mathbb{R}, d_1), \text{ para cada } j \in \{1, 2, \cdots k\}.$$

(b) *Suponhamos que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são sequências em* $\mathbb{R}^k$ *e* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência em* $\mathbb{R}$ *que são convergentes para* $x, y \in \mathbb{R}^k$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$ *e em* $(\mathbb{R}, d_1)$, *respectivamente, isto é,* $x_n \to x$, $y_n \to y$ *em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$ *e* $\alpha_n \to \alpha$ *em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Então a sequência $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $(x + y)$ *em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$, *a sequência* $(x_n \bullet y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $(x \bullet y)$ *em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *(onde* $\bullet$ *é o produto escalar de* $\mathbb{R}^k$*) e a sequência* $(\alpha_n \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $\alpha \cdot x$ *em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$, *isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) \quad \text{em } (\mathbb{R}^k, d_k);$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \bullet y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \bullet \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) \quad \text{em } (\mathbb{R}, d_1);$$

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n \cdot x_n) = \left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \quad \text{em } (\mathbb{R}^k, d_k).$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = O$ *em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$ *se , e somente se,* $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ *em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Demonstração:

De (a):

Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ em $(\mathbb{R}^k, d_k)$ então dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que se

$$n \geq N_o \quad \text{teremos} \quad \|x_n - x\| < \varepsilon. \tag{4.11}$$

Observemos que, para cada $j = 1, 2, \cdots, k$ teremos

$$|x_{j,n} - x_j| = \sqrt{(x_{j,n} - x_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_{i,n} - x_i)^2} = \|x_n - x\|.$$

Logo, para $n \geq N_o$ segue que

$$|x_{j,n} - x_j| \leq \|x_n - x\| < \varepsilon,$$

mostrando que, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ teremos

$$\lim_{n \to \infty} x_{j,n} = x_j \quad \text{em} \quad (\mathbb{R}, d_1).$$

Reciprocamente, se, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, temos

$$\lim_{n \to \infty} x_{j,n} \to x_j \quad \text{em} \quad (\mathbb{R}, d_1)$$

então, dado $\varepsilon > 0$, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, poderemos encontrar $N_j \in \mathbb{N}$, de modo que se

$$n \geq N_j \quad \text{teremos} \quad |x_{j,n} - x_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}. \tag{4.12}$$

Seja

$$N_o \doteq \max\{N_1, N_2, \cdots, N_k\}.$$

Logo, se $n \geq N_o \geq N_j$, para cada $j = 1, 2, \cdots, k$, segue que:

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{(x_{j,n} - x_j)^2}_{\overset{(4.12)}{<} \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}} < \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}\right)^2}_{= \frac{\varepsilon}{k}} = k \frac{\varepsilon^2}{k} = \varepsilon^2,$$

ou seja, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ em $(\mathbb{R}^k, d_k)$, completando a demonstração do item.

<u>De **(b)**</u>:

Seguem do item (a) e dos itens (a), (b) e (c) da Proposição (4.1.2) e serão deixadas como exercício para o leitor.

<u>De **(c)**</u>:

Temos que $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ se , e somente se, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que se

$$n \geq N_o \quad \text{teremos} \quad \|x_n - 0\| < \varepsilon,$$

ou seja, $|\,\|x_n\| - 0\,| < \varepsilon$, para $n \geq N_o$, que é equivalente a escrever que $\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = 0$, completando a demonstração do item e do resultado.

□

4.2 Subsequências de uma sequência

Temos a:

Definição 4.2.1 *Dada uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ consideremos a sequência de números naturais, que denotaremos por $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, de modo que*

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots .$$

A sequência $(p_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ será denominada <u>**subsequência da sequência** $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$</u>.

Exemplo 4.2.1 *Consideremos a sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde*

$$p_n \doteq (-1)^n, \quad para \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então $(p_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ *é uma subsequência da sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Neste caso, teremos

$$p_{2k} = (-1)^{2k} = 1, \quad k \in \mathbb{N},$$

isto é, os termos da subsequência $(p_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ *serão constante igual a* 1.

Se considerarmos $(p_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ *então ela também será uma subsequência da sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Neste caso

$$p_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1, \quad k \in \mathbb{N},$$

isto é, os termos da subsequência $(p_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ *serão constante igual a* -1.

Um resultado simples é dado pela:

Proposição 4.2.1 *Seja* (X, d) *um espaço métrico.*

Uma sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para* $\underline{p}$ *em* (X, d) *se, e somente se, toda subsequência da sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, for convergente para* $\underline{p}$ *em* (X, d).

Demonstração:

Se toda subsequência da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente para $\underline{p}$ em (X, d), como ela própria é uma subsequência dela mesma, teremos que a própria sequência será convergente para $\underline{p}$ em (X, d).

Reciprocamente, se $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{p}$ em (X, d), então dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$ tal que se

$$n \geq N_o \quad \text{teremos} \quad d(p_n, p) < \varepsilon. \tag{4.13}$$

Seja $(p_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsequência da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Logo se

$$n_k \geq N_o \quad \text{teremos} \quad d(p_{n_k}, p) \overset{(4.13)}{<} \varepsilon,$$

isto é, a subsequência $(p_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, será convergente para $\underline{p}$, completando a demonstração do resultado.

□

Seguem alguns resultados gerais relacionados com convergência de subsequências de uma sequência dada:

Proposição 4.2.2 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* X.

(a) *Se a sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *está contida em um subconjunto compacto* K *de* (X, d) *então existe, pelo menos, uma subsequência da sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que é convergente em* (X, d).

(b) *(Teorema de Bolzano -Weierstrass) Toda sequência limitada em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$ *possui, pelo menos, uma subsequência convergente em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

Demonstração:

De **(a)**:

Seja

$$E \doteq \{p_n \,;\, n \in \mathbb{N}\},$$

o conjunto imagem da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Se o conjunto E é finito, existirão $p \in E$ e uma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de modo que

$$p_{n_1} = p_{n_2} = \cdots = p.$$

Logo a subsequência $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente para $\underline{p}$ em (X, d) (na verdade esta subsequência será constante igual a $\underline{p}$).

Se o conjunto E é infinito, como ele está contido em um subconjunto compacto de (X, d), da Proposição (3.3.3) (c), segue que o conjunto E deverá ter um ponto de acumulação $p \in K$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ segue que

$$(E \cap N_\varepsilon(p)) \setminus \{p\} \neq \emptyset.$$

Em particular, se considerarmos

$$\varepsilon_1 = 1 > 0,$$

segue que

$$[E \cap N_{\varepsilon_1}(p)] \setminus \{p\} \neq \emptyset,$$

isto é, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_{n_1} \in E, \quad p_{n_1} \neq p \quad \text{e} \quad d(p_{n_1}, p) < \varepsilon_1 = 1.$$

De modo análogo, se considerarmos

$$\varepsilon_2 = \min\left\{\frac{1}{2}\,,\ d(p, p_{n_1})\right\} > 0, \tag{4.14}$$

segue que

$$[E \cap N_\varepsilon(p)] \setminus \{p\} \neq \emptyset.$$

Logo existirá $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_{n_2} \in E, \quad p_{n_2} \neq p \quad \text{e} \quad d(p_{n_2}, p) < \varepsilon_2,$$

o que implicará, por (4.14), que $p_{n_2} \neq p_{n_1}$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$n_2 > n_1.$$

Se isso não fosse possível, isto é, se para todo $n \geq n_1$ tivéssemos

$$d(p_n, p) \geq \varepsilon,$$

então o ponto $\underline{p}$ **não** poderia ser ponto de acumulação de E em X.

Repetindo o processo acima, obtemos uma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$ teremos

$$n_{k+1} > n_k \quad \text{e} \quad d(p_{n_k}, p) < \frac{1}{k},$$

isto é, $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que é convergente para $\underline{p}$ em (X, d), completando a demonstração do item.

De **(b)**:

Se a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $(\mathbb{R}^k, d_k)$ então podemos encontrar

$$M > 0 \quad \text{e} \quad x_o \in \mathbb{R}^k \quad \text{de modo que} \quad \|p_n - x_o\| \leq M.$$

Seja

$$K \doteq \left\{q \in \mathbb{R}^k ;\, \|q - x_o\| \leq M\right\}.$$

Então a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está contida no conjunto K que é um subconjunto fechado e limitado em $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

Do Teorema (3.3.3) segue que o conjunto K é um subconjunto compacto em $(\mathbb{R}^k, d_k)$ (pois é limitado e fechado em $(\mathbb{R}^k, d_k)$).

Logo a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está contida num conjunto compacto em $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

Logo, do item (a), segue que existe uma subsequência da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que é convergente em $(\mathbb{R}^k, d_k)$, completando a demonstração do item e do resultado.

□

Finalizando a seção temos a:

Proposição 4.2.3 *Sejam (X, d) um espaço métrico e $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X.*

Então o conjunto formado por todos os limites das subsequências convergentes da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formam um conjunto fechado de (X, d).

Demonstração:

Sejam E^* o conjunto formado por todos os limites das subsequências convergentes da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, isto é, $p \in E^*$ se, e somente se, existe uma subsequência $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que converge para p em (X, d).

Se $E^* = \emptyset$, segue que E^* é um subconjunto fechado de (X, d).

Por outro lado, se $E^* \neq \emptyset$, vamos mostrar quese q é um ponto de acumulação de E^* então deveremos ter $q \in E^*$, o que implicará que o conjunto E^* é um subconjunto fechado em (X, d), pois possui todos os seus pontos de acumulação em (X, d).

Escolhamos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $p_{n_1} \neq q$.

Se não existir $n_1 \in \mathbb{N}$ com essa propriedade, então deveremos ter $p_n = q$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (a sequência é constante e igual a $\underline{q}$), o que implicará que

$$E^* = \{q\},$$

e portanto é ele será um subconjunto fechado em (X, d).

Consideremos

$$\delta \doteq d(q, p_{n_1}) > 0.$$

Como o ponto $\underline{q}$ é ponto de acumulação do conjunto E^* em (X, d), podemos encontrar $x_1 \in E^*$ tal que

$$d(x_1, q) < \frac{\delta}{2}.$$

Mas $x_1 \in E^*$, podemos encontra $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$, de modo que

$$d(x_1, p_{n_2}) < \frac{\delta}{2}.$$

De fato, caso contrário, isto é, se para todo $n > n_1$ tivermos

$$d(x_1, p_n) \geq \frac{\delta}{2}, \quad \text{isto implicará que} \quad x_1 \notin E^*,$$

pois, pela definição do conjunto E^*, cada vizinhança do ponto x_1 deverá possuir infinitos pontos do conjunto E (pois existe uma subsequência da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que é convergente para x_1).

Prosseguindo o processo, para cada $i \in \{2, 3, \cdots\}$, podemos encontrar $x_i \in E^*$ de modo que

$$d(x_i, q) < \frac{\delta}{2^i}.$$

Como $x_i \in E^*$, podemos encontrar $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_i > n_{i-1} \quad \text{e} \quad d(x_i, p_{n_i}) < \frac{\delta}{2^i}.$$

Logo

$$d(q, p_{n_i}) \leq d(q, x_i) + d(x_i, p_{n_i}) < \frac{\delta}{2^i} + \frac{\delta}{2^i} = \frac{\delta}{2^{i-1}}, \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$d(q, p_{n_i}) < \frac{\delta}{2^{i-1}}, \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{N},$$

ou ainda, a subsequência $(p_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, será convergente para o ponto $\underline{q}$ em (X, d), ou seja $q \in E^*$, portanto o conjunto E^* é um subconjunto fechado em (X, d), completando a demonstração do resultado.

□

4.3 sequência de Cauchy

Uma outra classe de sequência importantes são dadas pela:

Definição 4.3.1 *Seja* (X, d) *espaço métrico.*

Diremos que a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma* <u>**sequência de Cauchy em** (X, d)</u> *se dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $N_o \in \mathbb{N}$, *de modo que se*

$$n, m \geq N_o \quad \textit{teremos} \quad d(p_n, p_m) < \varepsilon.$$

Antes de estudarmos as sequência que têm a propriedade acima introduziremos a:

Definição 4.3.2 *Sejam* (X, d) *espaço métrico ,* $E \subseteq X$ *e consideremos*

$$S \doteq \{d(p, q)\,;\, p, q \in E\}.$$

Definimos o <u>**diâmetro de** E</u>, *que será indicado por* $\text{diam}(E)$, *como sendo* $\sup(S)$ *(que pode ser infinito).*

Observação 4.3.1

1. *Observemos que se* $A \subseteq B$ *então*

$$\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B).$$

2. *Observemos que um conjunto* E *é subconjunto limitado em* (X, d) *se, e somente se,* $\text{diam}(E) < \infty$.

   As demonstrações destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Proposição 4.3.1 *Seja* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência no espaço métrico* (X,d) *e definamos*

$$E_N \doteq \{p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \cdots\}.$$

Então $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy em* (X,d) *se, e somente se,*

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam}(E_N) = 0 \quad em \quad (\mathbb{R}, d_1).$$

Em particular, toda sequência de Cauchy em (X,d) *é limitada em* (X,d).

Demonstração:

Observemos que se

$$N \geq M \quad \text{teremos} \quad E_N \subseteq E_M.$$

Notemos que se $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (X,d) então, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n, m \geq N_o \quad \text{teremos} \quad d(p_n, p_m) < \varepsilon,$$

isto é,

$$\text{se} \quad p_n, p_m \in E_{N_o}, \quad \text{implicará que} \quad d(p_n, p_m) < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\operatorname{diam}(E_{N_o}) \leq \varepsilon.$$

Logo, se $N \geq N_o$ teremos

$$E_N \subseteq E_{N_o}, \quad \text{logo} \quad \operatorname{diam}(E_N) \leq \operatorname{diam}(E_{N_o}).$$

Portanto, para

$$N \geq N_o, \quad \text{segue que} \quad \operatorname{diam}(E_N) < \varepsilon,$$

mostrando que $\lim\limits_{N\to\infty} \operatorname{diam}(E_N) = 0$, em $(\mathbb{R}, d)$ e comletando a demonstração da 1.a parte da equivalência.

Reciprocamente, se $\lim\limits_{N\to\infty} \operatorname{diam}(E_N) = 0$ então, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$ de modo que,

$$\text{se} \quad n \geq N_o, \quad \text{teremos} \quad \operatorname{diam}(E_n) < \varepsilon.$$

Em particular, segue que

$$\operatorname{diam}(E_{N_o}) < \varepsilon.$$

Observemos que para $n, m \geq N_o$, segue que

$$p_n, p_m \in E_{N_o},$$

pois E_n, $E_m \subseteq E_{N_o}$, assim

$$d(p_n, p_m) \leq \operatorname{diam}(E_{N_o}) < \varepsilon,$$

mostrando que a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (X,d), completando da 2.a parte da equivalência e do resultado.

$\square$

Proposição 4.3.2 *Seja* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de Cauchy no espaço métrico* (X,d).

Se a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possui uma subsequência que é convergente para* $\underline{p}$ *em* (X,d) *então a sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será uma sequência convergente para* $\underline{p}$ *em* (X,d).

Demonstração:

Como a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (X, d), dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n, m \geq N_1 \quad \text{teremos} \quad d(p_n, p_m) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.15}$$

Suponhamos que a subsequência $(p_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{p}$ em (X, d).

Logo, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontar $N_2 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n_j \geq N_2 \quad \text{teremos} \quad d(p_{n_j}, p) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.16}$$

Seja

$$N_o \doteq \max\{N_1, N_2\}.$$

Observemos que, para $n, n_j \geq N_o$, teremos:

1. como $n, n_j \geq N_1$, de (4.15), segue que
$$d(p_n, p_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.17}$$
2. por outro lado, $n_j \geq N_o \geq N_2$, de (4.16), segue que
$$d(p_{n_j}, p) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.18}$$

Portanto, para $n \geq N_o$, tomando-se $n_j \geq N_o$ teremos:

$$d(p_n, p) \leq \underbrace{d(p_n, p_{n_j})}_{\stackrel{(4.17)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(p_{n_j}, p)}_{\stackrel{(4.18)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

mostrando que a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{p}$ em (X, d), completando a demonstração do resultado.

□

Relacionado com o diâmetro de subconjuntos de um espaço métrico temos a:

Proposição 4.3.3 *Seja* (X, d) *espaço métrico. Então:*

(a) *Se* $E \subseteq X$ *então*
$$\operatorname{diam}(\overline{E}) = \operatorname{diam}(E).$$

(b) *Se* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de compactos encaixantes, não-vazios, em* (X, d) *(isto é,* $K_{n+1} \subseteq K_n$, $n \in \mathbb{N}$*) satisfazendo*
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0,$$
então $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ *é formado por um único ponto, ou seja,*
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{p\}.$$

Demonstração:

De **(a)**:

Observemos que

$$E \subseteq \overline{E}, \quad \text{logo} \quad \text{diam}(E) \leq \text{diam}(\overline{E}).$$

Para mostrar a outra desigualdade, consideremos $p, q \in \overline{E}$.

Dado $\varepsilon > 0$, da definição do conjunto $\overline{E}$, podemos encontrar $p', q' \in E$ de modo que

$$d(p, p') < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad d(q, q') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo

$$d(p, q) \leq \underbrace{d(p, p')}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(p', q')}_{\leq \text{diam}(E)} + \underbrace{d(q', q)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \text{diam}(E) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon + \text{diam}(E).$$

Tomando-se o supremo do lado esquerdo da desigualdade acima, obtemos:

$$\text{diam}(\overline{E}) \leq \varepsilon + \text{diam}(E), \quad \text{para cada} \quad \varepsilon > 0.$$

Portanto,

$$\text{diam}(\overline{E}) \leq \text{diam}(E), \quad \text{ou seja,} \quad \text{diam}(\overline{E}) = \text{diam}(E),$$

mostrando que $\text{diam}(\overline{E}) = \text{diam}(E)$, completando a demonstração do item.

De **(b)**:

Consideremos

$$K \doteq \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m.$$

Do Corolário (3.3.4) segue que

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} K_m \neq \emptyset,$$

pois os conjunto K_n são subconjunto compactos em (X, d) e qualquer intersecção finita deles é não vazia, pois será o menor conjunto na intersecção finita considerada.

Suponhamos, por absurdo, que existam

$$p, \ q \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n, \quad \text{de modo que} \quad p \neq q.$$

Como

$$\text{diam}(K) \geq d(p, q) > 0, \quad \text{segue que} \quad \text{diam}(K) > 0.$$

Por outro lado, como a sequência $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um sequência de conjuntos encaixantes, teremos que $K \subseteq K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e, da Observação (4.3.1) item 1., segue que

$$\text{diam}(K_n) \geq \text{diam}(K) > 0.$$

Logo

$$\lim_{n \to \infty} \text{diam}(K_n) \geq \text{diam}(K) > 0,$$

um absurdo, pois $\lim\limits_{n \to \infty} \text{diam}(K_n) = 0$.

Portanto o conjunto $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ tem, exatamente, um ponto, completando a demonstração do item e do resultado.

□

A seguir daremos algumas propriedades de sequência de Cauchy em um espaço métrico em geral:

Proposição 4.3.4 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* $K \subseteq X$.

(a) *Toda sequência convergente em* (X, d) *é uma sequência de Cauchy em* (X, d).

(b) *Se o conjunto* K *é um subconjunto compacto em* (X, d) *e* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência em* K *que é uma sequência de Cauchy em* (X, d) *então ela será convergente em* (K, d)*, isto é, existe* $p \in K$ *tal que* $p_n \to p$ *em* (K, d).

(c) *Se* $(X, d) = (\mathbb{R}^k, d_k)$ *e* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$ *então ela será convergente em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$*, isto é, existe* $p \in \mathbb{R}^k$ *tal que* $p_n \to p$ *em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

Em particular, uma sequência em $\mathbb{R}^k$ *é uma sequência convergente em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$ *se, e somente se, ela é uma sequência de Cauchy em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

Isto é conhecido como **Critério de Cauchy para convergência de sequências em** $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

Demonstração:

De **(a)**:

Se $p_n \to p$ em (X, d), dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$ de modo que,

$$\text{se} \quad n \geq N_o, \quad \text{teremos} \quad d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.19}$$

Logo, para $n,\ m \geq N_o$, de (4.19), segue que,

$$d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p) + d(p, p_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (X, d), completando a demonstração do item.

De **(b)**:

Como o conjunto K é um subconjunto compacto em (X, d), da Proposição (4.2.2) item (a), segue que a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente em (X, d).

Logo, pela Proposição (4.3.2), segue que a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente em (X, d).

Como o conjunto K é um subconjunto fechado em (X, d), $p_n \in K$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $p_n \to p$ em (X, d), da Proposição (4.1.1), segue que $p \in K$, ou seja, a $p_n \to p$ em (K, d), completando a demonstração do item.

De **(c)**:

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

Logo, da Observação (4.3.1), teremos a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $(\mathbb{R}^k, d_k)$, isto é,

$$\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq E \doteq V_r(x_o),$$

para algum $r > 0$ e $x_o \in \mathbb{R}^k$.

Do Teorema (3.3.3) (b), segue o conjunto $\overline{E}$ é um subconjunto compacto em $(\mathbb{R}^k, d_k)$ (pois é um subconjunto fechado e limitado em $(\mathbb{R}^k, d_k)$).

Assim a sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $(\mathbb{R}^k, d_k)$ está contido num subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

Logo, do item (b) acima, segue que ela será uma sequência convergente em $(\mathbb{R}^k, d_k)$, completando a demonstração do item e do resultado.

□

Podemos introduzir uma nova classe de espaços métricos, a saber:

Definição 4.3.3 *Seja* (X,d) *um espaço métrico.*

Diremos que (X,d) *é um* **espaço métrico completo** *se toda sequência de Cauchy em* (X,d) *for uma sequência convergente em* (X,d)*, isto é, se* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy em* (X,d)*, então existirá* $p \in X$ *tal que*

$$p_n \to p \quad \textit{em} \quad (X,d).$$

Exemplo 4.3.1

1. $(\mathbb{R}, d_1)$ *é um espaço métrico completo.*

   Isto segue da Proposição (4.3.4) item (c) com $k = 1$.

2. $(X,d) = ((0,1], d_1)$ **não** *é um espaço métrico completo (onde* d_1 *é a métrica usual de* $\mathbb{R}$*).*

   De fato, pois a sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *é um sequência de Cauchy em* (X,d) *(verifique!) e* **não** *é convergente em* (X,d) *(pois ela é convergente para* 0 *em* $(\mathbb{R}, d_1)$*, e* 0 **não** *pertence a* $X = (0,1]$*).*

Observação 4.3.2

(a) *A Proposição (4.3.4) (b) e (c) nos diz que todo espaço métrico compacto e todos os espaços Euclideanos são completos.*

(c) *Um exemplo de um espaço métrico que* **não** *é completo é* $(\mathbb{Q}, d_1)$*, onde* d_1 *é a métrica usual de* $\mathbb{R}$ *(a saber* $d_1(p,q) = |p-q|$*,* $p, q \in \mathbb{Q}$*).*

A demonstração desse fato será deixada como exercício para o leitor.

Proposição 4.3.5 *Sejam* (X,d) *um espaço métrico completo e* F *um subconjunto fechado em* (X,d).

Então (F,d) *é um espaço métrico completo.*

Demonstração:

Dada uma sequência de Cauchy, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, em (F,d) então ela será uma sequência de Cauchy em (X,d).

Como (X,d) é um espaço métrcio completo, poderemos encontrar $p \in X$ tal que $p_n \to p$ em (X,d).

Mas o conjunto F é um subconjunto fechado em (X,d).

Logo, da Proposição (4.1.1) (f), teremos que

$$p \in F, \quad \text{ou seja}, \quad p_n \to p \quad \text{em} \quad (F,d),$$

isto é, o espaço métrico (F,d) é um espaço métrico completo, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.3.3 *Da Proposição (4.1.1) (c) temos que toda sequência convergente em* (X,d) *será um sequência limitada em* (X,d).

Vale observar que **não** *vale a recíproca deste fato, isto é, existem sequência limitadas em* (X,d)*, que* **não** *são convergentes em* (X,d).

Por exemplo, em $(\mathbb{R}, d_1)$*, a sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por*

$$p_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

é uma sequência limitada em $(\mathbb{R}, d_1)$ *que não é uma sequência convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Logo podemos concluir que uma condição **<u>necessária</u>** *para que uma sequência seja convergente em um espaço métrico é que ela seja uma sequência limitada neste espaço métrico, mas esta condição* **<u>não é suficiente</u>** *para garantir a convergência de uma sequência em um espaço métrico.*

Veremos, a seguir, que em uma certa classe de sequências em $(\mathbb{R}, d_1)$, *esta condição será suficiente, a saber:*

Definição 4.3.4 *Seja* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números reais.*

Diremos que sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é:*

(a) **<u>crescente</u>** *se*

$$s_n \leq s_{n+1}, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N};$$

(b) **<u>decrescente</u>** *se*

$$s_n \geq s_{n+1} \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N};$$

(c) **<u>monótona</u>** *se ela for crescente ou decrescente.*

Exemplo 4.3.2

(a) *A sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por*

$$s_n \doteq \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

é uma sequência monótona decrescente, pois

$$s_{n+1} = \frac{1}{n+1} \overset{n+1>n}{<} \frac{1}{n} = s_n, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) *A sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por*

$$s_n \doteq n, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

é uma sequência monótona crescente, pois

$$s_{n+1} = n + 1 > n = s_n, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(c) *A sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por*

$$s_n \doteq (-1)^n \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

não é uma sequência monótona crescente, nem monótona decrescente.

Com isto temos o:

Teorema 4.3.1 *Suponhamos que a sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{R}$ *é uma sequência monótona.*

A sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *se, e somente se, a sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Demonstração:

Sabemos que toda sequência convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ é uma sequência limitada em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Precisamos mostrar a recíproca.

Para isto, vamos exibir a demonstração do caso em que sequência é uma sequência monótona crescente.

O caso em que sequência é uma sequência monótona decrescente será deixado como exercício para o leitor.

Temos que

$$s_n \leq s_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Seja

$$E \doteq \{s_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Como a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $(\mathbb{R}, d_1)$, segue que o conjunto E é um conjunto limitado em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Logo existe

$$s \doteq \sup(E).$$

Mostremos que

$$s_n \to s \quad \text{em} \quad (\mathbb{R}, d_1),$$

ou seja, a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ e converge para $s = \sup(E)$.

Observemos primeiramente que

$$s_n \leq s, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N},$$

pois $\underline{s}$ é o supremo do conjunto E.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$s - \varepsilon < s_{N_o} \leq s,$$

pois $\underline{s}$ é o supremo de E, logo é o menor limitante superior do conjunto E.

Logo, se $n \geq N_o$ segue que

$$s_{N_o} \overset{\text{seq. mon. crescente}}{\leq} s_n \leq s, \quad \text{ou seja,} \quad s - \varepsilon < s_{N_o} \leq s_n \leq s,$$

ou ainda, para $n \geq N_o$ teremos

$$s - \varepsilon < s_n \leq s.$$

Isto implicará que, para $n \geq N_o$, teremos

$$s - \varepsilon < s_n < s + \varepsilon, \quad \text{ou ainda,} \quad -\varepsilon < s_n - s \leq \varepsilon,$$

isto é,

$$|s_n - s| < \varepsilon,$$

mostrando que $s_n \to s$ em $(\mathbb{R}, d_1)$, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 4.3.4 *Ser limitada em $(\mathbb{R}, d_1)$ é uma condição* **necessária** *para que uma sequência seja convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ (porém não é suficiente!).*

No caso da sequência ser limitada em $(\mathbb{R}, d_1)$ e monótona será convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, ou seja, sendo limitada uma condição **suficiente** *para que ela seja convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ é que ela seja monótona.*

Notemos que esta condição de ser monótona **não** *é necessária, como mostra o exemplo $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ que é uma convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ para zero e que não é monótona.*

4.4 Limite Superior e Inferior

Começaremos esta seção com a:

Definição 4.4.1 *Suponhamos que sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{R}$ *que tem a seguinte propriedade: dado* $M > 0$ *existe* $N_o \in \mathbb{N}$, *de modo que*

$$\textit{se} \quad n \geq N_o, \quad \textit{teremos} \quad s_n \geq M.$$

Neste caso diremos que a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tende a** $+\infty$ *e escreveremos*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty \quad \textit{ou} \quad s_n \to +\infty.$$

De modo análogo, se dado $M > 0$ *existe* $N_o \in \mathbb{N}$, *de modo que*

$$\textit{se} \quad n \geq N_o, \quad \textit{teremos} \quad s_n \leq -M,$$

diremos que a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tende a** $-\infty$ *e escreveremos*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty \quad \textit{ou} \quad s_n \to -\infty.$$

Observação 4.4.1 *A definição acima pode ser interpretada da seguinte forma:*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$$

se, e somente, dado $M > 0$, *no máximo, um número finito de termos da sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *fica abaixo do valor* M.

De modo semelhante:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$$

se, e somente, dado $M > 0$, *no máximo, um número finito de termos da sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *fica acima do valor* $-M$.

Podemos agora estabelecer a seguinte definição:

Definição 4.4.2 *Dada uma sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{R}$, *consideremos* E *o conjunto dos* $a \in \mathbb{R}^*$ *(a reta estendida, isto é,* $\mathbb{R}^* = [-\infty, \infty]$*) tais que existe uma subsequência* $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *da sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *de modo que* $s_{n_k} \to a$, *isto é,*

$$E \doteq \{a \in \mathbb{R}^* \; ; \; s_{n_k} \to a\} \neq \emptyset.$$

Defina

$$s^* \doteq \sup(E) \qquad s_* \doteq \inf(E),$$

considerados em $\mathbb{R}^*$.

Neste caso, diremos que s^* *e* s_* *são os* **limites superior e inferior da sequência** $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *respectivamente e escreveremos*

$$\limsup_{n\to\infty} s_n \doteq s^* = \sup(E) \qquad \liminf_{n\to\infty} s_n \doteq s_* = \inf(E).$$

Observação 4.4.2

1. *Observemos que o conjunto* E *contém todos os limites das subsequências, da sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, que são convergentes para um número real ou tendem à* $+\infty$ *ou* $-\infty$*.*

2. *Sempre teremos*
$$s_* \leq s^*, \qquad \textit{isto é}, \quad \liminf_{n\to\infty} s_n \leq \limsup_{n\to\infty} s_n.$$
De fato, pois
$$s_* = \inf(E) \leq \sup(E) = s^*.$$

3. *Notemos que*
$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} s_n\right)$$
$$\liminf_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} s_n\right)$$

4. *a sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ *se, e somente se,*
$$-\infty < \liminf_{nto\infty} s_n < \limsup_{nto\infty} s_n < \infty$$

A verificação deste fatos será deixada como exercício para o leitor.

Com isto temos a:

Proposição 4.4.1 *Dada uma sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{R}$ *sejam* E, s^*, s_* *como na definição acima. Então* s^* *tem as seguintes propriedades:*

(a$_1$) $s^* \in E$*;*

(a$_2$) *Se* $s^* \in [-\infty, \infty)$ *(isto é,* $s^* < \infty$*) e* $x \in (s^*, \infty)$*, então podemos encontrar* $N_o \in \mathbb{N}$*, de modo que*
$$\textit{se} \quad n \geq N_o, \qquad \textit{teremos} \quad s_n < x,$$
isto é, somente um número finito de termos da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são maiores que* $\underline{x}$*.*

De modo análogo, s_* *tem as seguintes propriedades:*

(b$_1$) $s_* \in E$*;*

(b$_2$) *Se* $s_* \in (-\infty, \infty]$ *(isto é,* $-\infty < s_*$*)* $y \in (-\infty, s_*)$*, então podemos encontrar* $N_o \in \mathbb{N}$ *de modo que*
$$\textit{para} \quad n \geq N_o, \qquad \textit{teremos} \quad y < s_n,$$
isto é, somente um número finito de termos da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são menores que* $\underline{y}$*.*

Além disso, s^* *e* s_* *são os únicos com as propriedades (a$_1$)-(a$_2$) e (b$_1$)-(b$_2$), respectivamente.*

Demonstração:
Mostremos as propriedades para s^*.
As correspondentes para s_* serão deixadas como exercício para o leitor.
De (**a$_1$**):
1.o caso: Caso que
$$s^* = \infty, \qquad \text{isto é}, \quad \sup(E) = \infty.$$

Neste caso teremos que o conjunto E será um subconjunto não limitado superiormente em $\mathbb{R}$, pois se fosse limitado superiormente deveríamos ter

$$\sup(E) < \infty,$$

o que não ocorre.

Logo a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não poderá ser limitada superiormente em $(\mathbb{R}, d_1)$, pois se fosse o conjunto E seria limitado superiormente em $\mathbb{R}$.

Logo, dado $k = 1$, podemos encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$s_{n_1} \geq k = 1.$$

De modo análogo, dado $k = 2$, poderemos encontrar $n_2 \in \mathbb{N}$, que podemos supor $n_2 > n_1$, de modo que

$$s_{n_2} \geq k = 2.$$

Repetindo o processo acima, teremos que, para cada $j = 2, 3, \cdots$, poderemos encontrar $n_k \in \mathbb{N}$, com $n_k > n_{k-1}$, de modo que

$$s_{n_k} \geq k.$$

Ou seja, podemos encontrar uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de modo que

$$s_{n_k} \to \infty,$$

mostrando que

$$s^* = \infty \in E.$$

<u>**2.o caso:**</u> Caso que

$$s^* = -\infty, \quad \text{isto é,} \quad \sup(E) = -\infty.$$

Neste caso teremos

$$E = \{-\infty\},$$

ou seja, toda subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deverá tender a $-\infty$, isto é,

$$s^* \in E.$$

<u>**3.o caso:**</u> Caso que

$$s^* \in \mathbb{R}, \quad \text{ou seja, } s^* \text{ é finito.}$$

Neste caso, teremos que o conjunto E será limitado superiormente por $s^* = \sup(E)$.

Logo, da Proposição (4.2.3), segue que o conjunto E é um subconjunto fechado em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Por outro lado, da Proposição (3.2.7), temos que

$$s^* = \sup(E) \in \bar{E} \overset{E \text{ é fechado em } (\mathbb{R}, d_1)}{=} E, \quad \text{ou seja} \quad s^* \in E.$$

Dos três casos acima segue a afirmação (a_1).

<u>De (a_2):</u>

Suponhamos, por absurdo, que exite $x_o > s^*$ de modo que

$$s_n \geq x_o,$$

para infinitos $n \in \mathbb{N}$, ou seja, existe uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que ou é convergente para um número real maior ou igual x_o ou tenderá para ∞, isto é,

$$s_{n_k} \to s, \quad \text{onde} \quad s \in [x_o, \infty].$$

Assim

$$s_{n_k} \to s \geq x_o, \quad \text{ou ainda,} \quad s \geq x_o > s^* = \sup(E).$$

Com isto teríamos uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que tende para $\underline{s}$, ou seja, $s \in E$.

Por outro lado $s > s^*$, o que é um absurdo, pois $s^* = \sup(E)$.

A unicidade de s^* e s_* satisfazendo as propriedades (a_1)-(a_2) e (b_1)-(b_2), respectivamente, será deixada como exercício para o leitor.

□

Consideremos os seguintes exemplos:

Exemplo 4.4.1

(a) *Consideremos a sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por:*

$$s_n \doteq \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neste caso teremos

$$E = \{0\},$$

pois toda subsequência da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será convergente para zero em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Logo

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = s^* = \sup(E) = 0 \quad e \quad \liminf_{n\to\infty} s_n = s_* = \inf(E) = 0,$$

ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \liminf_{n\to\infty} s_n = 0.$$

Além disso, notemos que a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para zero em* $(\mathbb{R}, d_1)$, *isto é,*

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \liminf_{n\to\infty} s_n = 0 = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

(b) *Consideremos a sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por:*

$$s_n \doteq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$E = \{+\infty\},$$

pois toda subsequência da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tende para* $+\infty$ *em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Logo

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = s^* = \sup(E) = +\infty \quad e \quad \liminf_{n\to\infty} s_n = s_* = \inf(E) = +\infty,$$

ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \liminf_{n\to\infty} s_n = +\infty.$$

Além disso, notemos que a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tende para* $+\infty$ *em* $(\mathbb{R}, d_1)$, *isto é,*

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \liminf_{n\to\infty} s_n = +\infty = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

(c) *Conisderemos a sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por*

$$s_n \doteq (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$E = \{-1, 1\},$$

pois toda subsequência da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou converge para* -1 *ou para* 1 *em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Logo

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = s^* = \sup(E) = 1 \quad e \quad \liminf_{n\to\infty} s_n = s_* = \inf(E) = -1,$$

ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty} s_n \neq \liminf_{n\to\infty} s_n$$

e a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **não** *é uma sequência convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

(d) *Consideremos uma sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que contém todos os números racionais.*

Então

$$E = [-\infty, \infty],$$

pois para todo $a \in \mathbb{R}$, *existe uma sequência formada por números racionais que converge para* $\underline{a}$ *em* $(\mathbb{R}, d_1)$, *ou ainda , uma subsequência da sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *que converge para* a *em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Logo

$$s^* = \sup(E) = \infty \quad e \quad s_* = \inf(E) = -\infty.$$

Os exemplos acima nos indicam que:

Proposição 4.4.2 *Seja* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequência de números reais.*
$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *se, e somente se,*

$$s^* = s_* \in \mathbb{R}.$$

Neste caso

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s^* = s_*.$$

Demonstração:

Será deixada como exercício para o leitor.

□

Finalizamos esta secção com a:

Proposição 4.4.3 *Suponhamos que* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são sequências de números reais satisfazendo*

$$s_n \leq t_n, \quad para \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \leq \liminf_{n\to\infty} t_n \quad e \quad \limsup_{n\to\infty} s_n \leq \limsup_{n\to\infty} t_n.$$

Demonstração:

Será deixada como exercício para o leitor.

□

4.5 Algumas sequências Especiais

A seguir exibiremos algumas sequências convergentes que serão importantes posteriormente.

Antes porém, trataremos do Teorema do Confronto (ou Sanduiche):

Teorema 4.5.1 *Suponhamos que* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são sequências de números reais satisfazendo*

$$s_n \leq r_n \leq t_n, \quad \textit{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n \doteq L \in [-\infty\,\infty]$$

em $(\mathbb{R}, d_1)$, *então a sequência* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será convergente para* L *em* $(\mathbb{R}, d_1)$, *isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = L, \quad \textit{em} \quad (\mathbb{R}, d_1).$$

Demonstração:

Faremos a demonstração para o caso $L \in \mathbb{R}$.

Os casos $L = -\infty$ ou $L = \infty$, serão deixados como exercício para o leitor.

Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$ em $(\mathbb{R}, d_1)$, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq N_1, \quad \text{teremos} \quad |s_n - L| < \varepsilon, \quad \text{ou seja,} \quad -\varepsilon \overset{(*)}{<} s_n - L < \varepsilon. \tag{4.20}$$

De modo análogo, como $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = L$ em $(\mathbb{R}, d_1)$, podemos encontrar $N_s \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq N_2, \quad \text{teremos} \quad |t_n - L| < \varepsilon, \quad \text{ou seja,} \quad -\varepsilon < t_n - L \overset{(**)}{<} \varepsilon. \tag{4.21}$$

Seja

$$N_o \doteq \max\{N_1, N_2\}.$$

Se $n \geq N_o \geq N_1, N_2$ teremos

$$-\varepsilon \overset{\text{de } (*) \text{ em } (4.20)}{<} s_n - L \overset{s_n \leq r_n}{\leq} r_n - L \overset{r_n \leq t_n}{\leq} t_n - L \overset{\text{de } (**) \text{ em } (4.21)}{<} \varepsilon, \quad \text{ou ainda} \quad -\varepsilon < r_n - L < \varepsilon,$$

ou seja, $|r_n - L| < \varepsilon$, mostrando que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = L$ em $(\mathbb{R}, d_1)$, completando a demonstração do resultado.

□

Temos também o Teorema do Binomial, a saber:

Proposição 4.5.1 *Se* $a, b > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *então*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

onde

$$\binom{n}{k} \doteq \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Demonstração:

Será deixada como exercício para o leitor.

□

Como consequência temos o:

Corolário 4.5.1 *Se* $s > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *então*

$$1 + ns \leq (1+s)^n \quad e \quad \frac{n(n-1)}{2} s^2 \leq (1+s)^n. \tag{4.22}$$

Demonstração:

Da Proposição acima, como $a = 1$ e $b = s$, segue que:

$$\begin{aligned}(1+s)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^{n-k} = \underbrace{\binom{n}{n} s^{n-n}}_{k=n} + \underbrace{\binom{n}{n-1} s^{n-(n-1)}}_{k=n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} s^{n-k} \\ &= 1 + ns + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} s^{n-k} \geq 1 + ns,\end{aligned}$$

mostrando que a desigualdade à esquerda acima é verdadeira.

De modo semelhante temos:

$$\begin{aligned}(1+s)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^{n-k} = \underbrace{\binom{n}{n-2} s^{n-(n-2)}}_{k=n-2} + \sum_{k=0,\, k\neq(n-2)}^{n} \binom{n}{k} s^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-2)!2!} s^2 + \sum_{k=0,\, k\neq(n-2)}^{n} \binom{n}{k} s^{n-k} \geq \frac{n!}{(n-2)!2!} s^2 = \frac{n(n-1)}{2} s^2,\end{aligned}$$

mostrando que a desigualdade à direita acima é verdadeira, completando a demonstração do resultado.

□

Com isto temos a:

Proposição 4.5.2 *Temos:*

(a) *Se* $p > 0$ *então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0.$$

(b) *Se* $p > 0$ *então*

$$\lim_{n\to\infty} p^{\frac{1}{n}} = 1.$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

(d) *Se* $p > 0$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0.$$

(e) *Se* $|x| < 1$ *então*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

Demonstração:

De **(a)**:

Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$ de modo que

$$N_o > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}, \tag{4.23}$$

que existe pois $\mathbb{R}$ é arquimedeano.

Logo se $n \geq N_o$, teremos

$$\left|\frac{1}{n^p} - 0\right| \overset{n\geq 0}{=} \frac{1}{n^p} \overset{n\geq N_o}{\leq} \frac{1}{(N_o)^p} \overset{(4.23)}{<} \varepsilon, \quad \text{ou seja,} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0,$$

completando a demonstração do item.

De **(b)**:

Dividiremos a demonstração em três casos, a saber:

1.o caso: Caso que $p = 1$.

Neste caso nada temos a demonstrar.

2.o caso: Caso que $p > 1$.

Considerando-se a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$s_n \doteq p^{\frac{1}{n}} - 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.24}$$

teremos que

$$s_n > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

e, do Corolário (4.5.1), segue que

$$1 + n s_n \overset{(4.22)}{\leq} (1 + s_n)^n \overset{(4.24)}{=} p.$$

Assim

$$0 < s_n \leq \frac{p-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Do item (a), segue que

$$\frac{p-1}{n} \to 0$$

e portanto, do Teorema do confronto, segue que

$$s_n \to 0, \quad \text{ou seja,} \quad p^{\frac{1}{n}} - 1 = s_n \to 0, \quad \text{ou ainda,} \quad p^{\frac{1}{n}} \to 1.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} p^{\frac{1}{n}} = 1.$$

3.o caso: Caso que $0 < p < 1$.

Se considerarmos

$$q \doteq \frac{1}{p},$$

teremos $q > 1$.

Assim, do 2.o caso, segue que

$$\lim_{n\to\infty} q^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \text{ou seja,} \quad 1 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} p^{\frac{1}{n}}},$$

implicando que

$$\lim_{n\to\infty} p^{\frac{1}{n}} = 1,$$

completando a demonstração do item.

De **(c)**:

Consideremos a sequência $(s_n)_{n\in}$ dada por:

$$s_n \doteq n^{\frac{1}{n}} - 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.25}$$

Como

$$s_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

do Corolário (4.5.1), segue que

$$\frac{n(n-1)}{2} s_n^2 \overset{(4.22)}{\leq} (1+s_n)^n \overset{(4.22)}{=} n,$$

que implicará em

$$0 \leq s_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad \text{para} \quad n \in \{2,3,4,\cdots\}.$$

Afirmamos que

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0,$$

cuja prova será deixada como exercício para o leitor.

Assim, do Teorema do confronto, segue que

$$s_n \to 0, \text{ quando } n \to \infty, \quad \text{ou seja ,} \quad n^{\frac{1}{n}} \to 1 \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1,$$

completando a demonstração do item.

De **(d)**:

Seja $k \in \mathbb{N}$ de modo que $k > \alpha$, que existe pois $\mathbb{R}$ é arquimedeano.

Para $n > 2k$ temos que

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) > \frac{n^k}{2^k}$$

cuja demonstração será deixada como exercício para o leitor.

Assim, do binômio de Newton, segue que

$$(1+p)^n > \binom{n}{k} p^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!}.$$

Logo,

$$0 < \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha-k}, \quad \text{para} \quad n > 2k.$$

Como

$$\alpha - k < 0, \quad \text{teremos} \quad n^{\alpha-k} \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Logo, do Teorema do confronto, segue que

$$\frac{n^\alpha}{(1+p)^n} \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0,$$

completando a demonstração do item.

De (e):

Se $x = 0$ nada temos a fazer, pois $x^n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se $0 < |x| < 1$, então considerando-se

$$p \doteq \frac{1}{|x|} - 1, \quad \text{teremos} \quad p > 0. \tag{4.26}$$

Logo do item (d) acima , com $\alpha = 0$, segue que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+p)^n} \overset{(4.26)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{|x|}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} |x|^n.$$

Mas

$$\lim_{n\to\infty} |x|^n = 0,$$

implicará, pela Proposição (4.1.3) (c), que $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, completando a demonstração do item e do resultado. □

4.6 Séries Numéricas

Nesta seção trataremos de um classe especial de sequências denominadas séries.

Mais precisamente temos a:

Definição 4.6.1 *Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $a_n \in \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por:*

$$s_n \doteq \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

A sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será denominada **série numérica** *associada a sequência numércia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e indicada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Os números a_n, $n \in \mathbb{N}$, serão denominados **termos da série numérica** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Os números s_n, $n \in \mathbb{N}$, serão denominados **soma parcial de ordem n** *da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Diremos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente** *para $\underline{s}$ em $(\mathbb{C}, d)$, se a sequência numércia $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente para $\underline{s}$ em $(\mathbb{C}, d)$, isto é,*

$$s_n \to s \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = s \quad \text{em} \quad (\mathbb{C}, d).$$

Neste caso, diremos $s \in \mathbb{C}$ *é a* **soma da série numérica** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e escreveremos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \doteq s.$$

Caso contrário, diremos que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* **divergente** *em* $(\mathbb{C}, d)$.

Observação 4.6.1

(a) *Utilizaremos a mesma notação para a série (isto é, a sequência das somas parciais) e para sua soma (isto é, o limite, quando existir, da sequência das somas parciais).*

(b) *Em algumas situações consideraremos séries do tipo* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *(o primeiro termo será* a_o*).*

(c) *Quando não houver possibilidade de confusão, escreveremos apenas* $\sum a_n$ *em vez de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ou* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(d) *Todos os resultados relacionados com o estudo de sequências numéricas, vista nas primeiras seções deste capítulo, se aplicam ao estudo das séries numéricas, já que estas são casos particulares das primeiras.*

Como exemplo exibiremos a seguir o Critério de Cauchy para séries numéricas, a saber:

Teorema 4.6.1 ***(Critério de Cauchy para Séries Numéricas)***

A série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *se, e somente se, dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $N_o \in \mathbb{N}$*, de modo que*

$$\textit{para} \quad m \geq n \geq N_o, \qquad \textit{teremos} \quad \left|\sum_{k=n}^{m} a_n\right| < \varepsilon.$$

Demonstração:

Observemos que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ se, e somente se, a sequência numéricas das somas parciais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Logo, do Critério de Cauchy para sequências numéricas em $(\mathbb{R}, d_1)$, isto é equivalente a, dado $\varepsilon > 0$, podermos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad m \geq n \geq N_o, \quad \text{teremos} \quad |\underbrace{\underbrace{s_m}_{=\sum_{k=1}^{m} a_k} - \underbrace{s_{n-1}}_{=\sum_{k=1}^{n-1} a_k}}_{=\sum_{k=n}^{m} a_k}| < \varepsilon,$$

ou seja $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$, como queríamos demonstrar.

□

Como consequência temos o:

Teorema 4.6.2 *(Critério de Divergência para Séries Numéricas).*

Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *então*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad em \quad (\mathbb{R}, d_1).$$

Demonstração:

Do resultado anterior temos que, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad m \geq n \geq N_o, \quad \left|\sum_{k=n}^{m} a_n\right| < \varepsilon.$$

Em particular, se $m = n \geq N_o$ teremos

$$|a_n| = \left|\sum_{k=n}^{n} a_k\right| < \varepsilon, \quad \text{ou seja ,} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.6.2 *O resultado acima nos diz que a condição*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

é **necessária** *para que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *seja convegente.*

Mas ela **não** *é suficiente.*

Veremos, mais adiante, que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente mas*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

A série acima é conhecida como **série harmônica**.

4.7 Séries com Termos Não Negativos

A seguir trataremos de alguns exemplos de séries numéricas que serão importantes no estudo que virá mais adiante.

Como consequência imediata do Teorema (4.3.1) temos o:

Teorema 4.7.1 *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série numérica de termos não negativos (isto é,* $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$*).*

Então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *se, e somente se, a sequência das somas parciais* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for limitada em* $(\mathbb{R}, d_1)$*.*

Demonstração:

Observemos que se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge em $(\mathbb{R}, d_1)$ então a sequência das somas parciais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, logo limitada em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Por outro lado, se a sequência das somas parciais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (que é monótona crescente) for limitada em $(\mathbb{R}, d_1)$, do Teorema (4.3.1) será convergente, isto é, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge em $(\mathbb{R}, d_1)$, completando a demosntração do resutado.

□

Um outro resultado importante é o:

Teorema 4.7.2 *(Critério da Comparação para Séries Numéricas) Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências numéricas tais que existe $N_1 \in \mathbb{N}$, de modo que*

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad n \geq N_1.$$

(a) *Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.*

(b) *Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.*

Demonstração:

<u>De **(a)**:</u>

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, do Critério de Cauchy para séries numéricas (isto é, Teorema (4.6.1)) segue dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_2 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\text{para} \quad m \geq n \geq N_2, \quad \text{teremos} \quad \left|\sum_{k=n}^{m} b_k\right| \overset{b_k\geq 0,\ \forall k\in\mathbb{N}}{=} \sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon. \tag{4.27}$$

Seja

$$N_o \doteq \max\{N_1, N_2\}.$$

Logo, se $m \geq n \geq N_o$ teremos

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \overset{a_k\geq 0,\ \forall k\in\mathbb{N}}{=} \sum_{k=n}^{m} a_k \overset{a_k\leq b_k,\ k\geq n\geq N_o\geq N_1}{\leq} \sum_{k=n}^{m} b_k \overset{N_o\geq N_2 \text{ e } (4.27)}{<} \varepsilon,$$

mostrando que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, completando a demonstração do item.

<u>De **(b)**:</u>

Suponhamos, por absurdo, que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Então, do item (a), teríamos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, o que contraria nossa hipótese.

Portanto a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, completando a demonstração do item e do resultado.

$\square$

Observação 4.7.1 *No item (a) do Teorema acima, podemos substituir a hipótese*

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad n \geq N_1$$

por

$$0 \leq |a_n| \leq b_n, \quad n \geq N_1$$

que a conclusão continuará válida, mesmo no caso em que a sequência $(a_n)_{n \text{ in} \mathbb{N}}$ *seja complexa.*

Para ver isto, basta ver na demonstração do item (a), que se $n \geq N_o$ *teremos:*

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} \sum_{k=n}^{m} |a_k| \overset{|a_k| \leq b_k,\ k \geq n \geq N_o \geq N_1}{\leq} \sum_{k=n}^{m} b_k \overset{N_o \geq N_2 \text{ e } (4.27)}{<} \varepsilon,$$

mostrando, pelo Critério de Cauchy para séries numéricas (isto é, Teorema (4.6.1)), que as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *são convergentes em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Temos também a:

Proposição 4.7.1 *Seja* $x \in (0,1)$ *fixado. Então a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *e sua soma será* $\frac{1}{1-x}$, *isto é,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{para cada} \quad x \in (0,1).$$

Se $x \in [1, \infty)$ *está fixado, então a série numérica acima será divergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Demonstração:

Observemos que se $x_o \in (0,1)$ está fixado, temos que a sequência das somas parciais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associada à série $\sum_{n=0}^{\infty} x_o^n$ terá os seguintes termos:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_o^k \overset{\text{soma dos } \underline{n} \text{ primeiros termos de uma P.G. de razão } x_o \in (0,\infty)\setminus\{1\}}{=} \frac{1 - x_o^{n+1}}{1 - x_o}. \tag{4.28}$$

Para ver isto basta verificar que (verifique!)

$$(1 - x_o)\,(1 + x_o + x_o^2 + \cdots + x_o^n) = 1 - x_o^{n+1}.$$

Como $x_o \in (0,1)$, fazendo $n \to \infty$, segue da Proposição (4.5.2) item (e), que

$$x_o^{n+1} \to 0.$$

Logo, fazendo $n \to \infty$ em (4.28), teremos

$$s_n \to \frac{1}{1-x_o},$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_o^n = \frac{1}{1-x_o}, \quad \text{para cada} \quad x_o \in (0,1),$$

ou seja, a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} x_o^n$ é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ e sua soma será $\frac{1}{1-x_o}$. Se $x_o = 1$ temos que

$$s_n = n, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

assim

$$s_n \to \infty, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

ou seja, a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1,$$

será divergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Finalmente, para $x_o \in (1, \infty)$ fixado, segue

$$1 = 1^n \leq x_o^n, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

é divergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ segue, do Critério da Comparação item (b), segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} x_o^n$ será divergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ se $x_o \in (1, \infty)$, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 4.7.2 *Considerando séries numéricas de termos* **não negativos**, *o resultado acima nos diz que a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *se, e somente se,* $x \in (0,1)$.

A série acima será denominada **série geométrica de razão** $x \in (0,1)$.

Para a convergência de uma série numérica em $(\mathbb{R}, d_1)$, cujos termos da sequência que a define são decrescentes e não negativos, temos a:

Teorema 4.7.3 *(**Teorema de Cauchy**) Suponhamos que a sequência* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *satisfaz*

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0, \tag{4.29}$$

isto é, a sequência numérica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é monótona decrescente e cujos termos são não negativos.*

A série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *se, e somente se, série numérica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \tag{4.30}$$

é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Demonstração:

Pelo Teorema (4.7.1), basta mostrar que a respectiva sequência da somas parciais é limitada em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos:

$$s_n \doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,, \quad \text{soma parcial de ordem } \underline{n} \text{ associada a série numérica } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$t_k \doteq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}\,, \quad \text{soma parcial de ordem } \underline{k} \text{ associada a série numérica } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}.$$

Observemos que

$$2^{k+1} - 2^k = 2^k(2-1) = 2^k > 1, \quad \text{ou seja,} \quad 2^k < 2^{k+1} - 1. \tag{4.31}$$

Logo, para

$$n \le 2^k \overset{(4.31)}{<} 2^{k+1} - 1, \tag{4.32}$$

teremos

$$\begin{aligned}
s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n &\overset{a_k \ge 0,\, \forall k \in \mathbb{N} \text{ e } (4.32)}{\le} a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \cdots + a_{2^{k+1}-1} \\
&= a_1 + (a_2 + \underbrace{a_3}_{\le a_2}) + (a_4 + \underbrace{a_5}_{\le a_4} + \underbrace{a_6}_{\le a_4} + \underbrace{a_7}_{\le a_4}) + \cdots + \underbrace{(a_{2^k} + \cdots + \overbrace{a_{2^{k+1}-1}}^{\le a_{2^k}})}_{2^k\text{-parcelas}} \\
&\overset{a_{m+k} \overset{(4.29)}{\le} a_m,\, \forall k \in \mathbb{N}}{\le} a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \cdots + \underbrace{(a_{2^k} + \cdots + a_{2^k})}_{2^k\text{-parcelas}} \\
&\le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$s_n \le t_k, \quad \text{se} \quad n \le 2^k.$$

Por outro lado, para

$$n > 2^k \tag{4.33}$$

teremos:

$$\begin{aligned}
s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n &\overset{(4.33)}{\ge} a_1 + a_2 + \cdots + \cdots + a_{2^k} \\
&= a_1 + a_2 + (\underbrace{a_3}_{\ge a_4} + a_4) + (\underbrace{a_5}_{\ge a_8} + \underbrace{a_6}_{\ge a_8} + \underbrace{a_7}_{\ge a_8} + a_8) + \cdots + \underbrace{(\overbrace{a_{2^{k-1}+1}}^{\ge a_{2^k}} + \cdots + a_{2^k})}_{2^{k-1}\text{-parcelas}} \\
&\overset{a_m \overset{(4.29)}{\ge} a_{m+k},\, \forall k \in \mathbb{N}}{\ge} a_1 + a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + \cdots + \underbrace{(a_{2^k} + \cdots + a_{2^k})}_{2^{k-1}\text{-parcelas}} \\
&\ge \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2}\left(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^k a_{2^k}\right) = \frac{1}{2} t_k,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$2s_n \ge t_k, \quad \text{se} \quad n > 2^k.$$

Portanto a sequência das somas parciais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será limitada em $(\mathbb{R}, d_1)$ se, e somente se, sequência das somas parciais $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ for limitada em $(\mathbb{R}, d_1)$, ou seja, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ se, e somente se, série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.7.3 *Observemos que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots .$$

Um exemplo importante é dado pela:

Proposição 4.7.2 *A série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ *se* $p \in (1, \infty)$ *e divergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *se* $p \in (-\infty, 1]$.

Demonstração:

Notemos que se

$$p \in (-\infty, 0],$$

segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{-p} \overset{-p\geq 0}{\neq} 0,$$

ou ainda, será igual a $+\infty$ se $p \in (-\infty, 0)$ e será 1 se $p = 0$.

Logo, do Critério da Divergência (isto é, Teorema (4.6.2)), segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é divergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Se

$$p \in (0, \infty)$$

podemos aplicar o Teorema de Cauchy (isto é, Teorema (4.7.3)) a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde

$$a_n \doteq \frac{1}{n^p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Notemos que a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será decrescente (pois $p \in (0, \infty)$) e não negativa.

Observemos também que

$$a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^p} = \frac{1}{2^{np}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.34}$$

Assim a série numérica que temos que estudar a convergência em $(\mathbb{R}, d_1)$ será a série numérica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \overset{(4.34)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{(1-p)n}.$$

Logo a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \tag{4.35}$$

será convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ se, e somente se, a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(p-1)n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{(p-1)}}\right)^n$$

for convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Mas esta última é uma série geométrica de razão

$$x \doteq \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Logo, da Proposição (4.7.1), a série (4.35) será convergente (é uma série cujos termos são não negativos) se, e somente se,

$$\frac{1}{2^{p-1}} \doteq x \in (0,1), \quad \text{ou seja} \quad p-1 \in (0,\infty), \quad \text{ou ainda,} \quad p \in (1,\infty).$$

Assim, do Teorema de Cauchy, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

será convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ se, e somente se, $p \in (1, \infty)$, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 4.7.4 *A série numérica acima é denominada uma* <u>p-série</u>.

Um outro exemplo importante é dado pela:

Proposição 4.7.3 *Se $p \in (1,\infty)$ fixado. Então a série numérica*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,[\ln n]^p} \tag{4.36}$$

é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Se $p \in (-\infty, 1]$ a série numérica (4.36) será divergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Demonstração:

Notemos que se $n \geq 3$ segue que

$$\ln(n) \geq \ln(3) \geq \ln(e) = 1. \tag{4.37}$$

Com isto para

$$p \in (-\infty, 0]$$

fixado, teremos

$$\frac{1}{n[\ln(n)]^p} = \frac{\overbrace{[\ln(n)]^{-p}}^{\overset{(4.37)}{\geq} 1}}{n} \geq \frac{1}{n}, \quad \text{se} \quad n \geq 3.$$

Como a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ (veja a Proposição (4.7.2) com $p = 1$), do Teorema da comparação para séries numéricas (isto é, o Teorema (4.7.2) (b)), segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[\ln n]^p}$ é divergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ se $p \in (-\infty, 0]$.

Para $p \in [0, \infty)$ fixado, observamos que a função

$$y = x\,[\ln(x)]^p\,, \quad x \in (0, \infty)$$

é uma função crescente em $(0, \infty)$ (verifique!).

Assim a sequência numérica $(n(\ln(n))^p)_{n\in\mathbb{N}}$ será uma sequência monótona crescente e portanto a sequência numérica $\left(\dfrac{1}{n[\ln(n)]^p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ será uma sequência monótona decrescente.

Logo, podemos aplicar o Teorema de Cauchy (isto é, o Teorema (4.7.3)) para a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$a_n \doteq \frac{1}{n[\ln n]^p}, \quad n \geq 2.$$

Logo estudar a convergência da série numérica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[\ln n]^p}$ em $(\mathbb{R}, d_1)$, será equivalente a estudar a convergência da série numérica

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k[\ln(2^k)]^p} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k\ln 2)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Notemos que, da Proposição (4.7.2), segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ será convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ se, e somente se, $p \in (1, \infty)$.

Portanto a série numérica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[\ln n]^p}$ será convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ se, e somente se, $p \in (1, \infty)$.

Em particular, a série numérica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[\ln n]^p}$ será divergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ se, e somente se, $p \in (-\infty, 1]$, completando a demonstração do resultado.

□

4.8 O Número de Euler, e

Começaremos a seção definindo o número de Euler. Para isto observemos que:

Observação 4.8.1 *A série numérica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

De fato,

Observemos que

$$0 \leq s_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{\underbrace{2.1}_{\geq 2}} + \frac{1}{\underbrace{3.2.1}_{\geq 2.2}} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{n.(n-1)\cdots 2.1}_{\geq \underbrace{2.2\cdots 2}_{(n-1)-fatores}}}$$

$$< \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{2\cdots 2}_{(n-1)-fatores}}}_{<1} < 3.$$

Logo a sequência das somas parciais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é crescente (pois* $a_n = \dfrac{1}{n!} \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$*) e limitada em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Logo, do Teorema (4.3.1), segue que a sequência numérica $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Portanto a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Com isto temos a:

Definição 4.8.1 *Definamos o* **número de Euler**, *indicado por* $\underline{e}$, *como sendo o número real maior que zero,*

$$e \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{4.38}$$

Podemos obter o número de Euler, $\underline{e}$, de outro modo, como mostra a:

Proposição 4.8.1 *Temos que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{4.39}$$

Demonstração:

De fato, sejam

$$s_n \doteq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{e} \quad t_n \doteq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O binômio de Newton implicará que

$$\begin{aligned}
t_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}.\left(\frac{1}{n}\right)^k = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{=n}\frac{1}{n} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{=\frac{n(n-1)}{2!}}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1}\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n^2-n}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n^3-3n^2+2n}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
&\overset{1-\frac{k}{n}\leq 1,\, k\in\mathbb{N}}{\leq} 1 + 1 + \frac{1}{2!} + + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n.
\end{aligned}$$

Logo

$$t_n \leq s_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

assim, da Proposição (4.4.3), segue que

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \leq \limsup_{n\to\infty} s_n \overset{\text{Proposição (4.4.2)}}{=} \lim_{n\to\infty} s_n \overset{(4.38)}{=} e,$$

isto é,

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \leq e. \tag{4.40}$$

Por outro lado, se $n \geq m$ temos, como na identidade acima, que:

$$\begin{aligned}
t_n &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)++\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)++\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)+\\
&\quad+\frac{1}{(m+1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{(m+1)-1}{n}\right)+\\
&\quad+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\
&\geq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Logo fazendo $n \to \infty$, e mantendo $m \in \mathbb{N}$ fixado acima, obteremos

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} t_n \geq \liminf_{n\to\infty} &\left[1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\right.\\
&\left.+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right]\\
&= 1+1+\frac{1}{2!}++\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}=s_m,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$s_m \leq \liminf_{n\to\infty} t_n, \quad \text{para cada} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $m \to \infty$ na desigualdade acima obteremos

$$e \overset{(4.38)}{=} \lim_{m\to\infty} s_m \leq \liminf_{n\to\infty} t_n,$$

isto é,

$$e \leq \liminf_{n\to\infty} t_n \overset{\text{Observação (4.4.2)}}{\leq} \limsup_{n\to\infty} t_n \overset{(4.40)}{=} e.$$

Portanto

$$\limsup_{n\to\infty} t_n = \liminf_{n\to\infty} t_n = e.$$

Logo, da Pproposição (4.4.2), segue que a sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{e}$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = e,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.8.2

(a) *O limite (4.39) é conhecido como* **<u>2.º Limite Fundamental</u>**.

(b) *Podemos determinar o erro em aproximar* $\underline{e}$ *por* s_n, $n \in \mathbb{N}$.

Para ver isto, observemos que

$$0 \leq s_n \leq e, \quad n \in \mathbb{N},$$

pois a sequência numérica $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é estritamente cerscente.*

Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}
e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\
&= \frac{1}{(n+1)!}[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+3)(n+2)} + \frac{1}{(n+4)(n+3)(n+2)} \cdots \\
&\overset{n+k>n,\,\forall k\in\mathbb{N}}{<} \frac{1}{(n+1)!}\left(\underbrace{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots}_{P.G.\ de\ razão\ \frac{1}{n+1}<1}\right) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{n+1}{(n+1)!n} = \frac{1}{n!\,n}.
\end{aligned}$$

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!\,n}. \tag{4.41}$$

Deste modo podemos estimar o erro de aproximação s_n *para* $\underline{e}$*, para* $n \in \mathbb{N}$.

Por exemplo s_{10} *é uma aproximação de* $\underline{e}$*, com erro inferior a* $\dfrac{1}{10!\,10}$.

A equação (4.41) implica que o número $\underline{e}$ é irracional, como nos diz a:

Proposição 4.8.2 *O número* $\underline{e}$ *é um número irracional.*

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que o número $\underline{e}$ é um número racional, isto é,

$$e = \frac{p}{q}, \quad \text{onde} \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Segue, de (4.41), que

$$0 < e - s_q < \frac{1}{q!\,q},$$

isto é,

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q}. \tag{4.42}$$

Sabemos que

$$q!\,e = [q.(q-1)\cdots 2]\frac{p}{q} = [(q-1)\cdots 2]\,.p \in \mathbb{N},$$

isto é, o número real $\underline{q!\,e}$ é um número inteiro, não negativo.

Além disso

$$\begin{aligned}
q!\,s_q = q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) &= q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{(q-1)!} + \frac{q!}{q!} \\
&= q! + q! + q.(q-1).(q-2)\cdots 3 + q.(q-1).(q-2)\cdots 4 + \cdots + q + 1 \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

ou seja

$$q!\,s_q \in \mathbb{N},$$

isto é, o número real $\underline{q!\,s_q}$ é um número inteiro, não negativo.

Assim

$$q!\,(e - s_q) = \underbrace{q!\,e}_{\in\mathbb{N}} - \underbrace{q!\,s_q}_{\in\mathbb{N}} \overset{s_q<e}{\in} \mathbb{N}.$$

Como $q \geq 1$, logo $\dfrac{1}{q} \leq 1$, a equação (4.42) implicará na existência de um número inteiro no intervalo

$$\left(0, \frac{1}{q}\right) \subseteq (0, 1],$$

o que é um absurdo.

Logo o número real e não é um número racional, isto é, é um número irracional, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 4.8.3 *Pode-se mostrar que o número e **não** é um número algébrico, isto é, não existe nenhum polinômio com coeficientes inteiros de modo que o número e seja uma raiz.*

A prova deste fato será omitida (ver I.N. Herstein - Topics in Algebra (1964)).

4.9 Testes da Raiz e da Razão para Séries Numéricas

A seguir exibiremos dois critérios importantes no estudo das séries numéricas, a saber:

Teorema 4.9.1 *(**Teste da Raiz**) Dada a série numérica (complexa)* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *considere*

$$\alpha \doteq \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \geq 0.$$

Então:

(a) *Se* $\alpha < 1$, *a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *será convergente em* $(\mathbb{C}, d_2)$.

(b) *Se* $\alpha > 1$, *a a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *será divergente em* $(\mathbb{C}, d_2)$.

Demonstração:

De **(a):**

Se $0 \leq \alpha < 1$ podemos escolher $\beta \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\beta \in (\alpha, 1).$$

Como $\beta > \alpha$, da Proposição (4.4.1) (a_2), segue que podemos encontar $N_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se} \quad n \geq N_o, \qquad \text{teremos} \quad |a_n|^{\frac{1}{n}} < \beta,$$

ou seja,

$$|a_n| < \beta^n, \quad \text{para} \quad n \geq N_o.$$

Como $\beta \in (0, 1)$, segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n$ será convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ (pois é uma série geométrica de razão $\beta \in (0, 1)$).

Logo, do critério da comparação (veja Observação (4.7.1)), segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ será convergente em $(\mathbb{C}, d_2)$, completando a demonstração do item.

De **(b):**

Se

$$1 < \alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

então, da definição de lim sup, segue que existe uma subsequência $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de modo que

$$|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} \to \alpha > 1.$$

Logo, podemos encontar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n_k \geq N_o, \quad \text{teremos} \quad |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} > 1, \quad \text{ou seja,} \quad |a_{n_k}| > 1.$$

Portanto a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não convergirá para zero, pois se isso ocorresse, toda subsequência sua seria convergente para zero e a subsequência $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ não tem essa propriedade.

Logo do critério da divergência (isto é, Teorema (4.6.2)), segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ será divergente em $(\mathbb{C}, d_2)$, completando a demonstração do item e do resultado.

□

Observação 4.9.1 *Se no Teorema acima, tivermos* $\alpha = 1$, **nada podemos concluir**, *isto é, pode ocorrer da série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *ser convergente ou divergente em* $(\mathbb{C}, d_2)$.

Para ver isto consideremos as séries numéricas

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Da Proposição (4.7.2), segue que a primeira diverge (pois $p = 1$*) e a segunda converge (pois* $p = 2$*) em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Observemos que

$$\alpha_1 \doteq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\right|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}} \overset{\text{Proposição (4.5.2) (c)}}{=} 1$$

e

$$\alpha_2 \doteq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n^2}\right|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}}} = \frac{1}{\left(\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}}\right)} = \frac{1}{\left(\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}\right)^2} \overset{\text{Proposição (4.5.2) (c)}}{=} 1,$$

isto é,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1,$$

e a primeira série numérica é divergente e a segunda é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Um outro teste importante é dado pelo:

Teorema 4.9.2 *(**Teste da Razão**) Consideremos a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *onde* $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Então:*

(a) *se*

$$\alpha \doteq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

então a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *será convergente em* $(\mathbb{C}, d_2)$.

(b) *se pudermos encontrar* $N_o \in \mathbb{N}$, *de modo que*

$$\textit{para} \quad n \geq N_o, \qquad \textit{temos} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1,$$

então a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *será divergente em* $(\mathbb{C}, d_2)$.

Demonstração:

De (a):

Como $\alpha \in [0, 1)$, podemos encontar $\beta \in \mathbb{R}$ é tal que

$$\beta \in (\alpha, 1)$$

.

Logo, da Proposição (4.4.1) (a_2) (como β é maior que α, que é o $\limsup$), podemos encontar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq N_o, \qquad \text{teremos} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta,$$

ou seja

$$|a_{n+1}| < \beta\, |a_n|, \quad n \geq N_o,$$

ou ainda,

$$|a_{N_o+k+1}| < \beta\, |a_{N_o+k}|, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.43}$$

Com isto afirmamos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, teremos

$$|a_{N_o+m}| < \beta^m |a_{N_o}|, \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4.44}$$

Para mostrar isso usaremos indução.

Observemos que para $m = 1$ a afirmação (4.44) é verdadeira (basta tomar $k = 0$ em (4.43)).

Suponhamos que a afirmação (4.44) ocorre para $m = n$, isto é,

$$|a_{N_o+n}| < \beta^n\, |a_{N_o}|$$

e mostremos que ela ocorrerá para $m = n + 1$.

Para isto notemos que:

$$|a_{N_o+n+1}| \overset{(4.43)}{\leq} \beta\, |a_{N_o+n}| \overset{\text{hipótese de indução que vale para } m=n}{\leq} \beta\,(\beta^n\, |a_{N_o}|) = \beta^{n+1}\, |a_{N_o}|,$$

isto é, a afirmação (4.44) é verdadeira para $m = n + 1$.

Logo será verdadeira para todo $m \in \mathbb{N}$.

Assim se $n \geq N_o$, segue que $n = N_o + k$, para algum $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$, logo:

$$|a_n| = |a_{N_o+k}| \leq \beta^k |a_{N_o}| \overset{(k=n-N_o)}{\leq} \left(\beta^{-N_o}|a_{N_o}|\right) \beta^n. \tag{4.45}$$

Como $\beta \in (\alpha, 1) \subseteq [0, 1)$, segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$ será convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ (pois é uma série geométrica de razão $\beta \in (0, 1)$).

Portanto, de (4.45) e do critério da comparação (mais precisamente da Observação (4.7.1)), segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente em $(\mathbb{C}, d_2)$, completando a demonstração do item.

De **(b)**:

Como

$$\text{para} \quad n \geq N_o, \quad \text{teremos} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1,$$

então

$$|a_{n+1}| \geq |a_n|, \quad \text{para} \quad n \geq N_o.$$

Em particular,

$$|a_n| \geq |a_{N_o}| > 0, \quad \text{para} \quad n \geq N_o,$$

assim

$$\liminf_{n \to \infty} |a_n| \geq |a_{N_o}| > 0.$$

Logo a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se for convergente, não convergirá para zero em $(\mathbb{C}, d_2)$.

Portanto, do critério da divergência (isto é, Teorema (4.6.2)), segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente em $(\mathbb{C}, d_2)$, completando a demonstração do item e do resultado.

□

Observação 4.9.2 *Se no Teorema acima tivermos $\alpha = 1$,* **nada poderemos concluir**, *isto é, pode ocorrer da série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ser convergente ou divergente em $(\mathbb{C}, d_2)$.*

Para ver isto consideremos as séries numéricas

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Da Proposição (4.7.2), segue que a primeira séria numérica acima diverge (pois $p = 1$) e a segunda converge (pois $p = 2$) em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Observemos que

$$\alpha_1 \doteq \limsup_{n \to \infty} \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \limsup_{n \to \infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

e

$$\alpha_2 \doteq \limsup_{n \to \infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| = \limsup_{n \to \infty} \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

isto é,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1,$$

a primeira série numérica é divergente e a segunda é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

A seguir consideraremos dois exemplo interessantes:

Exemplo 4.9.1

1. *Consideremos a série numérica*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots .$$

Temos que os termos a_n *da série acima são tais que* $a_n > 0$ *, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que os termos da sequência $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *serão dados por:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{3^{\frac{n+1}{2}}}}{\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \\ \dfrac{\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}}}{\frac{1}{3^{\frac{n}{2}}}}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2^{\frac{n+1}{2}}}{3^{\frac{n+1}{2}}}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \\ \dfrac{3^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}+1}}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases},$$

ou seja, a sequência

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{(2n+1)+1}{2}}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{4.46}$$

é uma subsequência da sequência $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Logo

$$0 \le \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(4.46)}{\le} \lim_{n\to\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{2}{3}}_{\in(0,1)}\Bigg)^{n+1} = 0,$$

isto é,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

Por outro lado, a sequência

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2n}{2}} \frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n} \frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{4.47}$$

também é uma subsequência da sequência $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Logo

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(4.47)}{\geq} \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{3}{2}}_{\in(1,\infty)} \right)^n \frac{1}{2} = \infty,$$

isto é,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty.$$

Então **não** *podemos aplicar o teste da razão à série numérica acima.*

1. *Observemos que sequência*

$$\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{4.48}$$

também é uma subsequência da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

De fato, pois ela corresponde a subsequência $(a_{2m})_{m\in\mathbb{N}}$, *pois*

$$a_{2m} = \frac{1}{3^m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Logo

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \overset{(4.48)}{\leq} \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{3^m}\right)^{\frac{1}{2m}} = \lim_{m\to\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{m}{m}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

isto é,

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} < 1.$$

Por outro lado, a sequência

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{4.49}$$

também é uma subsequência da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

De fato, ela corresponde a subsequência $(a_{2m-1})_{m\in\mathbb{N}}$ *onde*

$$a_{2m-1} = \frac{1}{2^m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Assim

$$\alpha \doteq \limsup_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \overset{(4.49)}{\geq} \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{2^m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} = \lim_{m\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2m-1}{2m-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Assim $\alpha \in (0,1)$ *e, do teste da raiz, segue a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

2. *Consideremos a série numérica*

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots.$$

Temos que os termos a_n, *para* $n \in \mathbb{N}$, *da série acima são tais que*

$$a_n > 0, \quad \textit{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Será deixado como exercício para o leitor mostrar que:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{8}, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 2 \quad e \quad \limsup_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Logo, neste exemplo, **não** *podemos aplicar o teste da razão, mas podemos aplicar o teste da raiz para, concluir que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

2. O teste da razão é mais simples de ser aplicado do que teste da raiz.

Porém, vale observar que, quando o teste da razão pode se aplicado o teste da raiz também poderá.

O mesmo não ocorre com a recíproca, isto é, existem situações (como as dos dois exemplos acima) que o teste da razão **não** *pode ser aplicado mas o teste da raiz pode.*

Isto na verdade é consequência do seguinte resultado:

Teorema 4.9.3 *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números reais positivos. Então*

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}$$
$$\limsup_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Demonstração:

Provaremos a segunda desigualdade.

A primeira será deixada como exercício para o leitor.

Consideremos

$$\alpha \doteq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Dividiremos a demonstração em casos, a saber:

1.o Caso: quando $\alpha = \infty$.

Neste caso não temos nada temos a demonstrar pois

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \infty = \alpha = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

2 .o Caso: quando $\alpha \in [0, \infty)$.

Neste caso, escolhendo $\beta \in (\alpha, \infty)$, da Proposição (4.4.1) (a_2), podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq N_o, \quad \text{temos} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \beta.$$

Em particular, para todo $k \in \mathbb{N}$ teremos

$$a_{N_o+k+1} \leq \beta\, a_{N_o+k}.$$

Assim

$$a_{N_o+1} \leq \beta\, a_{N_o}\,, \quad \underbrace{a_{N_o+2}}_{\leq \beta\, a_{N_o+1}} \leq \beta\, \underbrace{a_{N_o+1}}_{\leq \beta\, a_{N_o}} \leq \beta\,(\beta\, a_{N_o}) = \beta^2\, a_{N_o}.$$

Será deixado como exercício para o leitor mostrar, por indução, que

$$a_{N_o+p} \leq \beta^p\, a_{N_o}. \tag{4.50}$$

Com isto, se $n \geq N_o$, segue que

$$n = N_o + p, \quad \text{para algum} \quad p \in \mathbb{N}.$$

Logo

$$a_n = a_{N_o+p} \overset{(4.50)}{\leq} \beta^p\, a_{N_o} = \beta^{n-N_o}\, a_{N_o} = \beta^{-N_o}\, a_{N_o}\beta^n.$$

Logo

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\beta^{-N_o} a_{N_o} \beta^n\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\beta^{-N_o} a_{N_o}\right)^{\frac{1}{n}} \beta.$$

Notemos que, da Proposição (4.4.3) (tomando-se $t_n \doteq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$) e da Proposição (4.5.2) (b) (tomando-se $p = \beta^{-N_o} a_{N_o} > 0$), segue que

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \left[\left(\beta^{-N_o} a_{N_o}\right)^{\frac{1}{n}} \beta\right] \overset{\beta>0}{=} \beta \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \left[\beta^{-N_o} a_{N_o}\right]^{\frac{1}{n}}}_{\text{Prop. (4.5.2) (b)} \atop = 1} \overset{p \doteq \beta^{-N_o} a_{N_o} > 0}{=} \beta.$$

Como isto ocorre para todo $\beta \in (\alpha, \infty)$, segue que $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}$ não pode ser maior que α, ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \alpha,$$

ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

completando a demonstração do resultado.

□

4.10 Séries de Potências

Definição 4.10.1 *Dada uma sequência de números complexos* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.51}$$

será denominada **série de potências***.*

Os números complexos c_n *serão ditos* **coeficientes da série de potência** (4.51).

A seguir exibiremos alguns exemplos de séries de potências.

Exemplo 4.10.1

(a) *A série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

é uma série de potências.

Neste caso

$$c_n = 1, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

é uma série de potências.

Neste caso

$$c_n = \frac{1}{n}, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(c) *A série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{sen}(nz), \quad z \in \mathbb{C}$$

não *é uma série de potências.*

Observação 4.10.1 *Em geral, a série de potências (4.51) poderá ser convergente ou divergente, dependendo da escolha de $z \in \mathbb{C}$.*

A seguir daremos um resultado importante no estudo da convergência das séries de potências (4.51).

Teorema 4.10.1 *Dada a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

considere

$$\alpha \doteq \limsup_{n\to\infty} (|c_n|)^{\frac{1}{n}}, \qquad e \qquad R \doteq \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}, & se \quad 0 < \alpha < \infty \\ 0, & se \quad \alpha = \infty \\ \infty, & se \quad \alpha = 0 \end{cases}.$$

Então a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad \begin{cases} \textit{converge para} \quad |z| < R, \quad \textit{em} \quad (\mathbb{C}, d_2) \\ \textit{diverge para} \quad |z| > R, \quad \textit{em} \quad (\mathbb{C}, d_2) \end{cases}.$$

No caso que $R = 0$ a série de potências só será convergente em $z = 0$.

Demonstração:

Para cada $z_o \in \mathbb{C}$ fixado, consideremos

$$a_n \doteq c_n\, z_o^n, \quad n \in \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

Com isto teremos:

$$\limsup_{n\to\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} (|c_n\, z_o^n|)^{\frac{1}{n}} \overset{|z_o|\geq 0}{=} |z_o| \limsup_{n\to\infty} (|c_n|)^{\frac{1}{n}} = \alpha\, |z_o|.$$

Logo aplicando o teste da raiz (isto é, o Teorema (4.9.1)) à série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, z_o^n$, segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, z_o^n$ será:

$$\begin{cases} \text{convergente, se} \quad \alpha\, |z_o| < 1\,, \quad \text{em} \quad (\mathbb{C}, d_2) \\ \text{divergente, se} \quad \alpha\, |z_o| > 1\,, \quad \text{em} \quad (\mathbb{C}, d_2) \end{cases}.$$

Logo, se $\alpha \in (0, \infty)$, do critério da raiz (isto é, teorema (4.9.1)) segue que a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ será:

$$\begin{cases} \text{convergente se, e somente se,} \quad \alpha\, |z| < 1\,, \quad \text{em} \quad (\mathbb{C}, d_2) \\ \text{divergente se, e somente se,} \quad \alpha\, |z| > 1\,, \quad \text{em} \quad (\mathbb{C}, d_2), \end{cases}$$

isto é, série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ será:

$$\begin{cases} \text{convergente se, e somente se,} \quad |z| < \dfrac{1}{\alpha} = R\,, \quad \text{em} \quad (\mathbb{C}, d_2) \\ \text{divergente se, e somente se,} \quad |z| > \dfrac{1}{\alpha} = R\,, \quad \text{em} \quad (\mathbb{C}, d_2). \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$, teremos

$$\alpha |z| = 0 < 1.$$

Logo a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ será convergente para todo $z \in \mathbb{C}$, em $(\mathbb{C}, d_2)$.

Se $\alpha = \infty$ teremos

$$\alpha |z| = \infty > 1, \quad \text{para} \quad z \neq 0.$$

Neste caso a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ será divergente para todo $z \in \mathbb{C}^*$, em $(\mathbb{C}, d_2)$, ou ainda, só será convergente se $z = 0$ em $(\mathbb{C}, d_2)$, completando a demonstração do resultado.

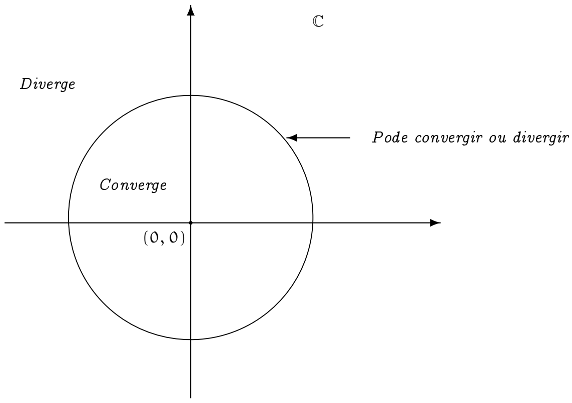
□

Observação 4.10.2 *No caso que*

$$R \in (0, \infty),$$

o Teorema acima nos diz que a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ *será convergente, dentro de uma circunferência, de centro na origem e raio* R*, do plano complexo e será divergente em* $(\mathbb{C}, d_2)$ *fora do mesmo, em* $(\mathbb{C}, d_2)$.

Sobre a circunferência $|z| = R$*, podemos ter pontos onde a série de potências converge e pontos onde ela diverge, relativamente a* $(\mathbb{C}, d_2)$.



Definição 4.10.2 *O número real estendido $R \in [0, \infty]$, obtido no Teorema acima, será denominado* **raio de convergência** *da série de potências* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$.

Consideremos os seguintes exemplos:

Exemplo 4.10.2

(a) *A série de potências* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ *tem raio de convergência* $R = 0$.

De fato, pois

$$\alpha \doteq \limsup_{n\to\infty} (|c_n|)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} (|n^n|)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Logo, do Teorema (4.10.1), *segue que*

$$R = 0.$$

Portanto, a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ *só converge para* $z = 0$ *em* $(\mathbb{C}, d_2)$.

(b) *A série de potências* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ *tem raio de convergência* $R = \infty$.

De fato, pois

$$\alpha \doteq \limsup_{n\to\infty} (|c_n|)^{\frac{1}{n}} \overset{\text{Teorema (4.9.3)}}{\leq} \limsup_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{1}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{1}{n!}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Logo, do Teorema (4.10.1), *segue que*

$$R = \infty.$$

Logo a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ *será convergente em* $\mathbb{C}$, *relativamente a* $(\mathbb{C}, d_2)$.

(c) *A série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *tem raio de convergência* $R = 1$.

De fato, pois

$$\alpha \doteq \limsup_{n\to\infty} (|c_n|)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} (|1|)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Logo, do Teorema (4.10.1), *segue que*

$$R = 1.$$

Observemos que se

$$|z_o| = 1 \quad \text{então} \quad \lim_{n\to\infty} z_o^n \neq 0.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} z_o^n$ *será divergente para* $|z_o| = 1$, *relativamente a* $(\mathbb{C}, d_2)$.

Portanto, a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ *será convergente, se* $|z| < 1$, *e divergente caso contrário, relativamente a* $(\mathbb{C}, d_2)$.

(d) *A série de potências* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ *tem raio de convergência* $R = 1$.

De fato, pois

$$\alpha \doteq \limsup_{n\to\infty} (|c_n|)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \overset{\text{Prop. (4.5.2)}}{=} 1.$$

Logo, do Teorema (4.10.1), *segue que*

$$R = 1.$$

Observemos que se $z = 1$ *a série de potências* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ *será divergente (pois será a série harmônica), relativamente a* $(\mathbb{C}, d_2)$.

Veremos mais adiante que se

$$|z| \leq 1 \quad \text{e} \quad z \neq 1,$$

então a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ *será convergente, relativamente a* $(\mathbb{C}, d_2)$, *isto é, ela será convergente em*

$$\{z \in \mathbb{C};\, |z| \leq 1,\, z \neq 1\},$$

e será divergente no complementar deste conjunto em $\mathbb{C}$, *relativamente a* $(\mathbb{C}, d_2)$.

(e) *A série de potências* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ *tem raio de convergência* $R = 1$.

De fato, pois

$$\alpha \doteq \limsup_{n\to\infty} (|c_n|)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \overset{\text{Prop. (4.5.2)}}{=} 1.$$

Logo, do Teorema (4.10.1), *segue que*

$$R = 1.$$

Observemos que se $|z| \leq 1$ *então*

$$\left|\frac{1}{n^2} z^n\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente (ver Teorema (4.7.2) com* $p = 2 > 1$*) em* $(\mathbb{R}, d_1)$*, segue, do Teorema da comparação (isto é, Teorema (4.7.2) (a)) que se* $|z| \leq 1$ *a série de potências* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ *será convergente, relativamente a* $(\mathbb{C}, d_2)$.

Portanto a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ *será convergente se* $|z| \leq 1$ *e divergente no complementar deste conjunto em* $\mathbb{C}$ *(isto é, se* $|z| > 1$*), relativamente a* $(\mathbb{C}, d_2)$.

Observação 4.10.3 *A série de potência do item (c) acima é conhecida como* **série geométrica de razão** $z \in \mathbb{C}$.

4.11 Séries Alternadas

O objetivo desta seção é estudar séries numéricas que possuam infinitos termos positivos e negativos (se tiver um número finito de algum destes tipos podemos tentar estudá-la utilizando os testes anteriores).

Para este fim começaremos com a:

Proposição 4.11.1 *Dadas duas sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$*, definindo-se*

$$A_n \doteq \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad \textit{para} \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

e

$$A_{-1} \doteq 0,$$

então para $0 \leq p \leq q$ *teremos*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p. \tag{4.52}$$

Demonstração:

Observemos que:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n \overset{a_n = A_n - A_{n-1}}{=} \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q} A_{n-1} b_n \overset{(m=n-1)}{=} \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{m=p-1}^{q-1} A_m b_{m+1}$$

$$= \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n + A_q b_q - \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_{n+1} - A_{p-1} b_p = \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p,$$

, como queríamos demonstrar.

□

Observação 4.11.1

1. *Na identidade acima as sequências numéricas* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *podem ser formada por números complexos.*

2. *A expressão (4.52) é denominada* **fórmula da soma parcial da série produto de duas séries** *e será útil no estudo da convergência da série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_n)$*, quando a sequência numérica* $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *é formada por números reais e for decrescente, como veremos a seguir.*

Proposição 4.11.2 *Na situação da Proposição (4.11.1) se:*

(a) *a sequência numérica* $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$*, das somas parciais da série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*, for limitada em* $(\mathbb{C}, d_2)$*;*

(b) *a sequência* $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *for decrescente, isto é, for formada por números reais e*

$$b_o \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots;$$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *em* $(\mathbb{R}, d_1)$*,*

então a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *é convergente, relativamente a* $(\mathbb{C}, d_2)$*.*

Demonstração:

Como a sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ é limitada em $(\mathbb{C}, d_2)$, podemos encontrar $M > 0$ de modo que

$$|A_n| \leq M, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ em $(\mathbb{R}, d_1)$, e a sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ é decrescente, segue que

$$b_n \geq 0 \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Por outro lado, como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq N_o, \quad \text{teremos} \quad 0 \leq b_n \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Logo, para $p \geq q \geq N_o$, teremos:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| &\overset{(4.52)}{=} \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p\right| \\
&\overset{b_n \geq b_{n+1} \geq 0}{\leq} \sum_{n=p}^{q-1} |A_n|\,(b_n - b_{n+1}) + |A_q| b_q + |A_{p-1}| b_p \overset{|A_n|\leq M}{\leq} M\left(\sum_{n=p}^{q-1}(b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p\right) \\
&= M\big[(b_p - b_{p+1}) + (b_{p+1} - b_{(p+1)+1}) + \cdots \\
&\qquad + (b_{q-2} - b_{(q-2)+1}) + (b_{q-1} - b_{(q-1)+1}) + b_q + b_p\big] \\
&= M\left[(b_p - b_q) + b_q + b_p\right] = 2M b_p \overset{p \geq N_o,\ \text{logo}\ b_p \leq \frac{\varepsilon}{2M}}{\leq} 2M.\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, do critério de Cauchy para séries numéricas (isto é, o Teorema (4.6.1)), segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ é convergente em $(\mathbb{C}, d_2)$, completando a demonstração do resultado.

□

Como uma consequência imediata temos o:

Teorema 4.11.1 ***(Critério de Leibnitz ou da Série Alternada)*** *Suponhamos que a sequência de números reais $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz:*

(a) $|c_1| \geq |c_2| \geq |c_3| \geq \cdots$, *isto é, a a sequência numérica $(|c_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente;*

(b) $c_{2n-1} \geq 0$ *e* $c_{2n} \leq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Neste caso série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} |c_n| \tag{4.53}$$

será dita **<u>série alternada</u>**;

(c) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ *em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Então a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ será convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Demonstração:

Aplicaremos a Proposição (4.11.2) para

$$a_n \doteq (-1)^{n+1}, \quad b_o \doteq 0 \quad \text{e} \quad b_n \doteq |c_n|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Com isto teremos que

$$A_n = \sum_{m=0}^{n} a_m = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots (-1)^{n+1} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} .$$

Logo será a sequência numérica $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ será uma sequência limitada em $(\mathbb{R}, d_1)$ e, pelas hipóteses (a) e (c), a sequência numérica $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de números reais será decrescente e terá limite igual a zero.

Logo da Proposição (4.11.2) segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_n)$ será convergente, relativamente a $(\mathbb{R}, d_1)$.

Observemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

pois

$$c_n = (-1)^{n+1} |c_n| = a_n b_n, \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N},$$

e assim a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ será em $(\mathbb{R}, d_1)$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.11.2 *Podemos colocar a série numérica (4.53) na forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,$$

onde

$$a_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

onde a sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *é decrescente e* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*, em* $(\mathbb{R}, d_1)$*, que é o conhecido Cirtério de Leibnitz estudado no curso de Cálculo III.*

Com isto teremos a:

Proposição 4.11.3 *Suponhamos que o raio de convergência da série de potências* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *é* $R = 1$ *e que a sequência de números reais* $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *satisfaz:*

(a) $c_o \geq c_1 \geq c_2 \geq \cdots$*, isto é, a sequência numérica* $(c_n)_{n=0,1,2,\cdots}$ *é decrescente;*

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ *em* $(\mathbb{R}, d_1)$*.*

Então a série de potências $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *converge no círculo* $|z| \leq 1$ *exceto, eventualmente, em* $z = 1$*, em* $(\mathbb{C}, d_2)$*.*

Demonstração:

Como o raio de convergência da série de potências $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ é $R = 1$, sabemos que a série converge para $|z| < 1$ e diverge para $|z| > 1$, em $(\mathbb{C}, d_2)$.

Sejam

$$a_n \doteq z^n \quad \text{e} \quad b_n \doteq c_n, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Temos que sequência de números reais $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ é decrescente e tem limite igual a zero, em $(\mathbb{C}, d_2)$.

Além disso, observemos que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ e $|z| = 1$, com $z \neq 1$, teremos:

$$|A_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| \overset{\text{P.G. de razão } z\neq 1}{=} \left|\frac{1 - z^{k+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{1 + |z|^{k+1}}{|1 - z|} \overset{|z|=1}{=} \frac{2}{|1 - z|} \doteq M.$$

ou seja, a sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ será limitada em $(\mathbb{C}, d_2)$, para $|z| = 1$ e $z \neq 1$.

Logo podemos aplicar a Proposição (4.11.2) e com isto concluir que a série numérica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ é convergente para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq 1$, com $z \neq 1$, em $(\mathbb{C}, d_2)$, ou seja, a série de potências $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge na circunferência $|z| = 1$ e $z \neq 1$, em $(\mathbb{C}, d_2)$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.11.3 *Em particular, a série de potências* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ *converge na circunferência* $|z| = 1$*, exceto quando* $z = 1$*, em* $(\mathbb{C}, d_2)$*.*

De fato, seu raio de convergência é $R = 1$ *e sendo*

$$c_n \doteq \frac{1}{n}, \quad \textit{para} \quad n \in \mathbb{N},$$

teremos que as hipóteses da Proposição (4.11.3) para mostrar a afirmação acima.

Em particular, a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

será convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Para mostra isto, basta considerar $z = -1$ *na série de potência dada.*

Esta série numérica é conhecida com **série harmônica alternada**.

4.12 Convergência Absoluta

Definição 4.12.1 *Diremos que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* **absolutamente convergente** *se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *for convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Exemplo 4.12.1

(a) *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ *é absolutamente convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

De fato,

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mas a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente (veja Proposição (4.7.2) com* $p = 2$*) em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Logo, do critério da comparação (isto é, o Teorema (4.7.2) item (a)), segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)}{n^2} \right|$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$*, ou seja, a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ *é absolutamente convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

(b) *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *é não absolutamente convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

De fato, $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Mas a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente (veja Proposição (4.7.2) com* $p = 1$*) em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Logo a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *não é absolutamente convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Observação 4.12.1 *Observemos que no Exemplo (b) acima a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *é convergente mas* **não** *é absolutamente convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Tais séries numéricas são denominadas **condicionalmente convergentes**.

Com isto temos o:

Teorema 4.12.1 *Se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente.*

Demonstração:

Observemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$ teremos

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|$$

.

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ segue, do critério de Cauchy para convergência de séries numéricas (veja o Teorema (4.7.3) e da desigualdade acima, que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente, completando a demonstração.

□

Observação 4.12.2 *O Exemplo (4.12.1) item (b) nos mostra que* **não** *vale a recíproca do resultado acima (isto é, existem séries numéricas que convergem mas não convergem absolutamente).*

4.13 Adição e Multiplicação de Séries Numéricas

Começaremos pelo:

Teorema 4.13.1 *Suponhamos que as séries numéricas* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são convergentes em* $(\mathbb{C}, d_2)$, *com somas* A *e* B, *respectivamente e* $c \in \mathbb{C}$.

Então as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *e séries numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} (c a_n)$ *são convergentes em* $(\mathbb{C}, d_2)$, *com somas* $(A + B)$ *e* cA, *respectivamente, isto é,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} (c a_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Demonstração:

Para $n \in \mathbb{N}$ definamos:

$$A_n \doteq \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{e} \quad B_n \doteq \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Então

$$A_n + B_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k), \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes em $(\mathbb{C}, d_2)$, com somas A e B, respectivamente, segue que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} B_n = B, \quad \text{em} \quad (\mathbb{C}, d_2).$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = A + B, \quad \text{em} \quad (\mathbb{C}, d_2)$$

ou seja, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é convergente em $(\mathbb{C}, d_2)$ e posuirá soma igual a $A + B$.

Observemos que

$$\sum_{k=1}^{n} (c a_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k = c A_n, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mas

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A, \quad \text{em} \quad (\mathbb{C}, d_2)$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} (c A_n) = c \lim_{n\to\infty} A_n = cA, \quad \text{em} \quad (\mathbb{C}, d_2)$$

isto é, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} (c a_n)$ é convergente em $(\mathbb{C}, d_2)$, como soma igual a cA, completando a demonstração do resultado.

□

A seguir trataremos da convergência do produto de duas séries numéricas.

Antes porém vamos dar significado ao produto de duas séries numéricas, conhecido como **produto de Cauchy**.

Definição 4.13.1 *Dadas as séries numéricas* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, definamos:*

$$c_n \doteq \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_o b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_o. \tag{4.54}$$

A série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *será denominada* **produto das séries numéricas** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *e indicada por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Observação 4.13.1 *Para entender o porque do modo de definir o produto de duas séries numéricas como acima, basta lembramos da fórmula do produto de dois polinômios.*

Se, por exemplo,

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad e \quad q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}$$

então, supondo que $n \geq m$, *podemos definir*

$$b_j = 0 \quad \textit{para} \quad j \in \{m+1, m+2, \cdots, n\},$$

deste modo o produto dos dois polinômios será o polinômio

$$r(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i z^i = a_o b_o + (a_o b_1 + a_1 b_o)z + (a_o b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_o)z + \cdots + a_n b_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.55)$$

ou seja, para cada $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ *teremos:*

$$c_i \doteq \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}.$$

Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, *tomando-se* $z = 1$ *em* (4.55), *obtemos o coeficiente* c_i *de (4.54).*

Observação 4.13.2 *A seguir exibiremos um exemplo de uma série numérica convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$, *cujo produto com ela mesmo* **não** *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$, *ou seja, em geral, o produto de séries numéricas convergentes pode* **não** *ser convergente.*

Consideremos a série numérica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

Observemos que, do critério de Leibnitz (isto é, o Teorema (4.11.1)), que a série numérica é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ *(verifique!).*

Para mostrar isto, basta considerar

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \quad n \ \in \mathbb{Z}^+$$

e aplicar o Critério de Leibnitz (verifique!).

Da definicão de produto de séries numéricas teremos que a série produto $\sum_{k=0}^{\infty} a_n . \sum_{k=0}^{\infty} a_n$ *será dada pela série numérica* $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$, *onde:*

$$\begin{aligned}
c_o &= a_o a_o = 1 \\
c_1 &= a_o a_1 + a_1 a_o = 2a_o a_1 = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
c_2 &= a_o a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_o = 2a_o a_2 + a_1^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\
c_3 &= a_o a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_o = 2a_o a_3 + 2a_1 a_2 = -\left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right),
\end{aligned}$$

em geral teremos:

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}., \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

A verificação deste fato será deixado como exercício para o leitor.

Observemos que

$$(n-k+1)(k+1) \overset{Exercício}{=} \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 \underbrace{-\left(\frac{n}{2}-k\right)^2}_{\leq 0} \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 = \left(\frac{n+2}{2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

logo

$$\frac{1}{(n-k+1)(k+1)} \geq \left(\frac{2}{n+2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Assim

$$|c_n| = \left|(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}\right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$
$$\geq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2}{n+2}(n+1).$$

Logo a sequência $(|c_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ **não** *converge para zero em* $(\mathbb{R}, d_1)$*, pois*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n+2} = 2.$$

Logo, do critério da comparação para sequências numéricas (isto é, da Proposição (4.4.3)) segue que $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n| \geq 2$*, portanto a sequência* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *também* **não** *converge para zero em* $(\mathbb{R}, d_1)$*.*

Portanto, do critério da divergência (ou seja, o Teorema (4.6.2)) segue que a série $\sum_{k=0}^{\infty} c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_n . \sum_{k=0}^{\infty} a_n$ **não** *será convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$*.*

O próximo resultado nos dá uma **condição suficiente** para que o produto de duas séries numéricas convergentes seja convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Este resultado é devido a Mertens.

Teorema 4.13.2 *Suponhamos que*

(a) *a série numérica* $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente e*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n = A;$$

(b) *a série numérica* $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ *é convergente e*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_n = B.$$

Então a série numérica $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$ *é convergente, onde*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ e \tag{4.56}$$

além disso

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_n = AB.$$

Demonstração:

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, consideremos

$$A_n \doteq \sum_{k=0}^{n} a_k, \tag{4.57}$$

$$B_n \doteq \sum_{k=0}^{n} b_k, \tag{4.58}$$

$$C_n \doteq \sum_{k=0}^{n} c_k, \tag{4.59}$$

$$\beta_n \doteq B_n - B. \tag{4.60}$$

Sabemos que

$$A_n \to A, \quad B_n \to B \quad \text{e} \quad \beta_n \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Queremos mostrar que

$$C_n \to A\,B \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Então, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, teremos

$$\begin{aligned}
C_n &\overset{(4.59)}{=} c_o + c_1 + \cdots + c_n \\
&= a_o b_o + (a_o b_1 + a_1 b_o) + \cdots + (a_o b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_o) \\
&\overset{(4.69)}{=} a_o(b_o + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_o + b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots a_{n-1}(b_o + b_1) + a_n b_o \\
&\overset{(4.58)}{=} a_o B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots a_{n-1} B_1 + a_n B_o \\
&\overset{(4.60)}{=} a_o(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_o) \\
&= (a_o + a_1 + \cdots + a_n)B + a_o\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_o \\
&\overset{(4.57)}{=} A_n B + a_o\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1}\beta_1 + a_{n-1}\beta_1 + a_n\beta_o.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Consideremos, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\gamma_n \doteq a_o\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1}\beta_1 + a_n\beta_o. \tag{4.62}$$

Logo, de (4.61), segue que

$$C_n = A_n B + \gamma_n, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{4.63}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} (A_n B) = A\,B, \quad \text{em} \quad (\mathbb{R}, d_1),$$

se mostrarmos que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$ então, de (4.63) e do fato $A_n \to A$, quando $n \to \infty$, teremos

$$\lim_{n\to\infty} C_n = AB$$

e completaríamos a demonstração do resultado.

Como a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, podemos considerar

$$\alpha \doteq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}. \tag{4.64}$$

Como a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq N_o \quad \text{teremos} \quad |\beta_n| = |B_n - B| < \varepsilon. \tag{4.65}$$

Deste modo, para $n \geq N_o$, segue que s

$$\begin{aligned}
|\gamma_n| &\overset{(4.62)}{=} |(\beta_o a_n + \cdots + \beta_{N_o} a_{n-N_o}) + (\beta_{N_o+1} a_{n-N_o-1} + \cdots + \beta_n a_o)| \\
&\leq |\beta_o a_n + \cdots + \beta_{N_o} a_{n-N_o}| + |\beta_{N_o+1} a_{n-N_o-1} + \cdots + \beta_n a_o| \\
&\leq |\beta_o a_n + \cdots + \beta_{N_o} a_{n-N_o}| + (|\beta_{N_o+1}||a_{n-N_o-1}| + \cdots + |\beta_n||a_o|) \\
&\overset{(4.65)}{\leq} |\beta_o a_n + \cdots + \beta_{N_o} a_{n-N_o}| + (\varepsilon|a_{n-N_o-1}| + \cdots + \varepsilon|a_o|) \\
&= |\beta_o a_n + \cdots + \beta_{N_o} a_{n-N_o}| + \varepsilon \underbrace{(|a_{n-N_o-1}| + \cdots + |a_o|)}_{\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \alpha < \infty} \\
&\leq |\underbrace{\beta_o a_n + \cdots + \beta_{N_o} a_{n-N_o}}_{N_o+1 \text{ parcelas}}| + \varepsilon\alpha.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Como a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, do Teorema (4.12.1), segue que ela será convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Logo, do critério da divergência (isto é, o Teorema (4.6.2)) segue que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{em} \quad (\mathbb{R}, d_1).$$

Portanto, tomando-se o lim sup, quando $n \to \infty$, na desigualdade (4.66), obteremos

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon\alpha,$$

para todo $\varepsilon > 0$, isto é,

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| = 0. \tag{4.67}$$

Como

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} |\gamma_n| \leq \limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \overset{(4.67)}{=} 0,$$

ou seja,

$$\liminf_{n\to\infty} |\gamma_n| = \limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| = 0.$$

Portanto, da Proposição (4.4.2), segue que

$$\lim_{n\to\infty} |\gamma_n| = 0,$$

o que implicará que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0,$$

completando a demonstração.

□

Observação 4.13.3

(a) *Em particular, o resultado acima nos diz que uma* **condição suficiente** *para que o produto de duas séries numéricas convergentes seja convergente é que uma das duas séries numéricas seja absolutamente convergente.*

(b) *Uma outra questão importante é saber se a série numérica produto das séries convergentes*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n \quad e \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_n,$$

cujas somas são A *e* B*, respectivamente, isto é, a série numérica* $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$*, for convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *se, necessariamente, sua soma tem que ser* AB*.*

O matemático Niels Henrik Abel (norueguês - 1802 a 1829) mostrou que isto é verdade.

Uma demonstração desse fato pode ser feita utilizando-se resultados de convergência de séries de potências.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

4.14 Reagrupamento de Séries Numéricas

Definição 4.14.1 *Dadas uma série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e uma sequência de naturais* $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *tal que cada natural aparace na sequência uma, e somente uma, vez, isto é, uma aplicação de* $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, onde* $k(m) \doteq k_m$*,* $m \in \mathbb{N}$ *bijetora, podemos construir a série numérica* $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$*, onde*

$$b_m \doteq a_{k_m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

A série numérica $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ *será dita* **reagrupamento da série numérica** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Observação 4.14.1 *Na situação acima, se denotarmos por* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *as correspondentes sequências das somas parciais das séries numéricas* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *teremos, em geral, que estas duas sequências numéricas serão diferentes e podem convergir, eventualmente, para valores distintos, como veremos nos exemplos abaixo.*

Exemplo 4.14.1 *Consideremos a série numérica harmônica alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

isto é,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Um reagrupamento $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *da série hamônica alternada é a série numérica*

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots .$$

Sejam $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *e* $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *as correspondentes somas parciais das séries numéricas acima.*
Seja A *a soma da série harmônica alternada.*
Pode-se mostrar (visto no curso de Cálculo III) que

$$A = \ln(2).$$

Então

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \underbrace{-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{<0} \underbrace{-\frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{<0} \cdots < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

pois

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N},$$

logo

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < 0 \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$, *teremos*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} &= \frac{2k(4k-1) + 2k(4k-3) - (4k-3)(4k-1)}{(4k-3)(4k-1)2k} \\
&= \frac{8k^2 - 2k + 8k^2 - 6k - 16k^2 + 16k - 3}{(4k-3)(4k-1)2k} \\
&= \frac{8k-3}{(4k-3)(4k-1)2k} > 0,
\end{aligned}$$

isto é,

$$0 < \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Mas

$$B_3 \overset{k=2 na\ desigualdade\ acima}{<} B_3 + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}}_{>0} = B_6$$

$$B_6 \overset{k=3\ na\ desigualdade\ acima}{<} B_6 + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}} > 0 = B_9$$

$$\cdots$$

$$B_{3(k-1)} \overset{k=3na\ desigualdade\ acima}{<} B_{3(k-1)} + \underbrace{\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}}_{>0} = B_{3k}, \quad k \in \{2, 3, \cdots\}.$$

Assim

$$B_3 < B_6 < B_9 < \cdots .$$

Logo

$$\limsup_{n\to\infty} B_n > B_3 \overset{Exercício}{=} \frac{5}{6} > A = \lim_{n\to\infty} A_n\,, \quad \text{ou seja,} \quad \limsup_{n\to\infty} B_n > A = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Portanto o reagrupamento acima da série hamônica alternada (se convergir) **não** *convergirá para o valor* A *em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Conclusão: *um reagrupamento de uma série numérica convergente pode ter soma diferente da série numérica original.*

Como veremos, poderá até ser divergente!

O exemplo acima ilustra o seguinte resultado devido a Riemann:

Teorema 4.14.1 *Suponhamos que uma série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *seja convergente mas* **não** *absolutamente convergente (denominada* **condicionalmente convergente***).*

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ *tais que*

$$-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty.$$

Então existe um reagrupamento, que indicaremos por $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$*, da série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, de modo que*

$$\liminf_{m\to\infty} B_m = \alpha \quad e \quad \limsup_{m\to\infty} B_m = \beta, \tag{4.68}$$

onde a sequência numérica $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *é a sequência numérica das somas parciais associada à séries numérica* $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$.

Demonstração:

Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n \doteq \frac{|a_n| + a_n}{2} \quad \text{e} \quad q_n \doteq \frac{|a_n| - a_n}{2}. \tag{4.69}$$

Com isto teremos

$$p_n - q_n = a_n, \tag{4.70}$$
$$p_n + q_n = |a_n|, \tag{4.71}$$
$$p_n \geq 0 \quad \text{e} \quad q_n \geq 0, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que as séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

são divergentes em $(\mathbb{R}, d_1)$.

De fato, suponhamos, por absurdo, que ambas as series numéricas acima fossem convergentes em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \stackrel{(4.71)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n) = \underbrace{\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} p_n}_{\text{convergente}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} q_n}_{\text{convergente}}}_{\text{convergente}},$$

teríamos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ seria convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, isto é, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seria absolutamente convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, o que contraria a hipótese que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Por outro lado, se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ fosse divergente em $(\mathbb{R}, d_1)$ e a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ fosse convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \stackrel{(4.70)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - q_n) = \underbrace{\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} p_n}_{\text{divergente}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} q_n}_{\text{convergente}}}_{\text{divergente}},$$

teríamos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seria divergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, o que contraria o fato que é a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Portanto as duas séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ são divergentes em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Consideremos

$$P_1, P_2, P_3, \cdots$$

os termos não negativos da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, na ordem em que eles aparecem na mesma, e

$$Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$$

os **valores absolutos** dos termos negativos da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, na ordem em que eles aparecem na mesma.

Observemos que:

- se $a_n \geq 0$ então

$$p_n \stackrel{(4.69)}{=} \frac{|a_n| + a_n}{2} = \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$$

  , isto é,

$$P_n = p_n, \quad \text{se} \quad a_n \geq 0.$$

- se $a_n < 0$ então

$$q_n \stackrel{(4.69)}{=} \frac{|a_n| - a_n}{2} = \frac{-a_n - a_n}{2} = -a_n = |a_n|,$$

  isto é,

$$Q_n = q_n, \quad \text{se} \quad a_n < 0.$$

Deste modo sabemos que as séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n \in \mathbb{N} \text{ tais que } a_n \geq 0}^{\infty} p_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} Q_n = \sum_{n \in \mathbb{N} \text{ tais que } a_n < 0}^{\infty} q_n$$

são ambas divergentes, para $+\infty$, em $(\mathbb{R}, d_1)$ (pois são formadas por termos positivos).

Além disso

$$P_n\,,\ Q_n \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty, \tag{4.72}$$

pois a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ é convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Iremos construir sequências de números naturais $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de modo que a série numérica

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} + \cdots + Q_{k_2} + \cdots\,, \tag{4.73}$$

que é um reagrupamento da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, irá satisfazer (4.68).

Para isto, escolhamos sequências numéricas

$$(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

de modo que

$$\alpha_n \to \alpha \quad \text{e} \quad \beta_n \to \beta, \tag{4.74}$$

com

$$\alpha_n < \beta_n, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \beta_1 > 0.$$

Escolhamos $m_1, k_1 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} > \beta_1 \quad \text{e} \quad P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} < \alpha_1.$$

Notemos que isto é sempre possível pois as sequências numéricas das somas parciais das séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ são divergentes para $+\infty$, em $(\mathbb{R}, d_1)$, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n = +\infty.$$

A seguir, consideremos $m_2, k_2 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} > \beta_2$$

e

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \cdots - Q_{k_2} < \alpha_2.$$

Prosseguindo o processo acima, construíremos duas sequências formadas por números naturais, a saber, $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de modo que

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + \cdots + P_{m_{n-1}} + \cdots + P_{m_n} > \beta_n \tag{4.75}$$

e

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + \cdots + P_{m_{n-1}} + \cdots + P_{m_n} - Q_{k_{n-1}} - \cdots - Q_{k_n} < \alpha_n. \tag{4.76}$$

Consideremos as sequência numéricas $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que são as sequências somas parciais das séries numérica (4.73), cujos últimos termos são

$$P_{m_n} \quad \text{e} \quad -Q_{k_n},$$

respectivamente, isto é, como sendo os lados esquerdos de (4.75) e (4.76), respectivamente.

Pode-se mostrar que

$$|X_n - \beta_n| \leq P_{m_n} \quad \text{e} \quad |Y_n - \alpha_n| \leq Q_{k_n}, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

A verificação deste fato será deixadá como exercício para o leitor.

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} |X_n - \beta| &\leq |X_n - \beta_n| + |\beta_n - \beta| \leq P_{m_n} + |\beta_n - \beta| \\ |Y_n - \alpha| &\leq |Y_n - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha| \leq Q_{k_n} + |\alpha_n - \alpha|. \end{aligned} \tag{4.77}$$

Logo, de (4.72) e (4.74), quando $n \to +\infty$, segue que

$$P_{m_n} \to 0 \quad \text{e} \quad Q_{k_n} \to 0$$

e

$$\beta_n \to \beta \quad \text{e} \quad \alpha_n \to \alpha,$$

assim, de (4.77), teremos

$$X_n \to \beta \quad \text{e} \quad Y_n \to \beta.$$

Notemos que as sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são subsequências da sequência da somas parciais da série $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$, ou seja,

$$\liminf_{m\to\infty} B_m \leq \alpha \quad \text{e} \quad \limsup_{m\to\infty} B_m \geq \beta.$$

Para finalizar, notemos que o limite de nenhuma subsequência da sequência das somas parciais da série numérica dada por (4.73) pode ser menor que α ou maior do que β.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Portanto

$$\liminf_{m\to\infty} B_m = \alpha \quad \text{e} \quad \limsup_{m\to\infty} B_m = \beta.$$

concluindo a demostração.

□

Para séries numéricas absolutamente convergentes temos o:

Teorema 4.14.2 *Suponhamos que uma série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente em* $(\mathbb{C}, d_2)$ *e sua soma é igual a* A.

Então qualquer reagrupamento dela será convergente em $(\mathbb{C}, d_2)$ *e sua soma também será igual* A.

Demonstração:

Suponhamos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é um reagrupamento da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, como na Definição (4.14.1) e $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as respectivas sequências das somas parciais associadas a cada uma dessas séries numéricas.

Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $k_n \in \mathbb{N}$ de modo que

$$b_n = a_{k_n}.$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, ela será convergente, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq N_1, \quad \text{teremos} \quad |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.78}$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente em $(\mathbb{R}, d_1)$, do critério de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_2 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq m \geq N_2 \quad \text{teremos} \quad \sum_{i=m}^{n} |a_i| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.79}$$

Seja

$$N_o \doteq \max\{N_1, N_2\}.$$

Podemos encontrar $p_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$1, 2, \cdots, N_o \in \{k_1, k_2, \cdots, k_{p_o}\}.$$

Logo, se $n > p_o$, segue que

$$a_1, a_2, \cdots, a_{N_o} \in \{a_{k_j} \; ; \; j = 1, \cdots, n\},$$

Deste modo, para $n > \max\{p_o, N_o\}$, os números

$$a_1, a_2, \cdots, a_{N_o}$$

serão cancelados na diferença $A_n - B_n$, ou seja, se $n \geq N_o$, podemos encontrar

$$N = N(n) > N_o + 1,$$

de modo que

$$|A_n - B_n| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{n} a_{k_i} \right| \leq \sum_{m=N_o+1}^{N} |a_m| \overset{(4.79)}{<} \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.80}$$

Logo, para $n \geq \max\{N_o, p_o\}$, teremos:

$$|B_n - A| \leq \underbrace{|B_n - A_n|}_{\overset{(4.80)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|A_n - A|}_{\overset{(4.78)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} = \varepsilon,$$

mostrando que a sequência numérica $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente para A em $(\mathbb{C}, d_2)$, completando a demonstração.

□

Capítulo 5

Funções Contínuas

Estudaremos neste capítulo uma classe importante de funções definidas em espaços métricos denominadas funções contínuas.

Para isto precisaremos introduzir o conceito de:

5.1 Limites de Funções

Definição 5.1.1 *Sejam* (X, d_X), (Y, d_Y) *espaços métricos,* $E \subseteq X$, $f : E \to Y$ *e* $\underline{p}$ *ponto de acumulação de* E *em* (X, d_X).

Diremos que o **limite da função $\underline{f}$, quando $\underline{x}$ tende a $\underline{p}$** *é* $q \in Y$ *se, e somente se, dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $\delta > 0$, *de modo se*

$$x \in E, \quad 0 < d_X(x, p) < \delta, \quad \textit{implicar em} \quad d_Y(f(x), q) < \varepsilon.$$

Neste caso escreveremos

$$f(x) \to q \quad \textit{quando} \quad x \to p, \qquad \textit{ou} \qquad \lim_{x \to p} f(x) = q.$$

Observação 5.1.1

(a) *Os símbolos* d_X *e* d_Y *denotam as respectivas distâncias em* X *e* Y.

(b) *Se* (X, d_X) *ou* (Y, d_Y) *for um dos espaços euclideanos* $\mathbb{R}^k$, *as distâncias serão as provenientes das respectivas normas nos mesmos, isto é,* d_k.

(c) *O ponto* $\underline{p}$ *na definição acima* **não** *precisa, necessariamente, ser um ponto do conjunto* E, *isto é, um ponto do domínio da função* $\underline{f}$.

Basta que ele seja um ponto de acumulação do conjunto E *em* (X, d_X).

Além disso, na definição acima, como

$$0 < d_X(x, p), \quad \textit{deveremos ter} \quad x \neq p.$$

1. *Mesmo que a função* $\underline{f}$ *esteja definida no ponto* $\underline{p}$ *(isto é,* $p \in E$*)* **não** *teremos, necessariamente, que*

$$f(p) = q,$$

como veremos nos exemplos que virão a seguir.

Exemplo 5.1.1

(a) *Se* $X = Y = \mathbb{R}$, $d_X = d_Y = d_1$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então teremos

$$\lim_{x \to p} f(x) = p^2,$$

ou seja, será igual a $f(p)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

(b) *Se* $X = Y = \mathbb{R}$, $d_X = d_Y = d_1$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então, **<u>não</u>** *existe*

$$\lim_{x \to 1} f(x).$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

(c) *Se* $X = \mathbb{R}^*$, $Y = \mathbb{R}$, $d_X = d_Y = d_1$ *e* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

Então teremos

$$\lim_{x \to 0} f(x) \overset{1.^{\circ}\ \text{Limite Fundamental}}{=} 1.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Observemos que a função <u>f</u> **<u>não</u>** *está definida em* $x = 0$.

Observação 5.1.2

1. *Dadas duas funções complexas* $f, g : E \to \mathbb{C}$ *e* $c \in \mathbb{C}$ *podemos definir as funções* $f + g$, $f - g$, $f.g$, $c.f : E \to \mathbb{C}$ *como sendo:*

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &\doteq f(x) + g(x), \\ (f-g)(x) &\doteq f(x) - g(x), \\ (f.g)(x) &\doteq f(x).g(x), \\ (c.f)(x) &\doteq c.f(x)), \quad \text{para cada} \quad x \in E. \end{aligned}$$

Podemos também definir a função $\dfrac{f}{g}$; $E \setminus \{x \in E : g(x) = 0\} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \doteq \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{para} \quad x \in E \setminus \{x \in E : g(x) = 0\}.$$

2. *Se as funções* f, g *forem funções a valores reais, isto é,* $f, g : E \to \mathbb{R}$ *e* $f(x) \geq g(x)$ *para todo* $x \in E$, *escreveremos*

$$f \geq g.$$

3. *Se* $f, g : E \to \mathbb{R}^k$ *e* $c \in \mathbb{R}$, *podemos definir* $f + g$, $f - g$, $c.f$, $f \bullet g$, *onde esta última é dado por*

$$(f \bullet g)(x) \doteq f(x) \bullet g(x), \quad \textit{para} \quad x \in E,$$

onde $\bullet$ *indica o produto escalar usual em* $\mathbb{R}^k$.

Com isto temos a:

Proposição 5.1.1 *Suponhamos que* (X, d) *é um espaço métrico,* $E \subseteq X$, *o ponto* $\underline{p}$ *é um ponto de acumulação de* E *em* (X, d), $c \in \mathbb{C}$, $f, g : E \to \mathbb{C}$ *são tais que*

$$\lim_{x \to p} f(x) = F \quad e \quad \lim_{x \to p} g(x) = G.$$

Então

(a) $\lim_{x \to p}(f \pm g)(x) = F \pm G$, *isto é,*

$$\lim_{x \to p}(f \pm g)(x) = \lim_{x \to p} f(x) \pm \lim_{x \to p} g(x).$$

(b) $\lim_{x \to p}(f.g)(x) = F.G$, *isto é,*

$$\lim_{x \to p}(f.g)(x) = \lim_{x \to p} f(x). \lim_{x \to p} g(x).$$

(c) $\lim_{x \to p}(c.f)(x) = c.F$, *isto é,*

$$\lim_{x \to p}(c.f)(x) = c. \lim_{x \to p} f(x).$$

(d) *Se* $G \neq 0$, $\lim_{x \to p} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{F}{G}$, *isto é,*

$$\lim_{x \to p} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to p} f(x)}{\lim_{x \to p} g(x)}.$$

(e) *Se* $f, g : E \to \mathbb{R}^k$ *então* $\lim_{x \to p}(f \bullet g)(x) = F \bullet G$, *onde . denota o produto escalar em* $\mathbb{R}^k$, *isto é,*

$$\lim_{x \to p}(f \bullet g)(x) = \lim_{x \to p} f(x) \bullet \lim_{x \to p} g(x).$$

Demonstração:

A demonstração de cada um dos itens acima segue das propriedades análogas para sequências e serão deixadas como exercício para o leitor.

□

Para funções a valores vetoriais temos a:

Proposição 5.1.2 *Sejam* (X, d) *espaço métrico,* $E \subseteq X$, $f_1, f_2, \cdots f_k : E \to \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}^k$ *dada por*

$$f(x) \doteq (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)), \quad x \in E,$$

o ponto $\underline{p}$ *um ponto de acumulação do conjunto* E *em* (X, d) *e*

$$L = (L_1, L_2, \cdots, L_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Então

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

se, somente se,

$$\lim_{x \to p} f_j(x) = L_j, \quad \textit{para} \quad j \in \{1, 2, \cdots, k\}.$$

Demonstração:

A demonstração é semelhante a demonstração da Proposição (4.1.3) (a).

Suponhamos que
$$\lim_{x \to p} f(x) = L.$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{x \to p} f(x) = L$, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que
$$\text{se} \quad x \in E \;\; \text{e} \;\; 0 < d_X(x,p) < \delta \quad \text{teremos} \quad \|f(x) - L\| = d_{\mathbb{R}^k}(f(x), L) < \varepsilon \tag{5.1}$$

Logo, para cada $j \in \{1, 2, \cdots k\}$,
$$\text{se} \quad x \in E \;\; \text{e} \;\; 0 < d_X(x,p) < \delta,$$

teremos:
$$d_{\mathbb{R}}\left(f_j(x), L_j\right) = |f_j(x) - L_j| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - L_i|^2} = \|f(x) - L\| = d_{\mathbb{R}^k}(f(x), L) \overset{(5.1)}{<} \varepsilon,$$

mostrando que
$$\lim_{x \to p} f_j(x) = L_j, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2, \cdots k\},$$

completando a primeira parte da demonstração do resultado.

Suponhamos que
$$\lim_{x \to p} f_j(x) = L_j, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2, \cdots k\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, como, para cada $j = 1, \cdots, k$, temos $\lim_{x \to p} f_j(x) = L_j$, segue que podemos encontrar $\delta_j > 0$, de modo que
$$\text{se} \quad x \in E \;\; \text{e} \;\; 0 < d_X(x,p) < \delta_j \quad \text{teremos} \quad |f_j(x) - L_j| = d_{\mathbb{R}}(f_j(x), L_j) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}. \tag{5.2}$$

Seja
$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k\} > 0.$$

Logo
$$\text{se} \quad x \in E, \; \text{satisfaz} \; 0 < d_X(x,p) < \delta,$$

segue que
$$0 < d_X(x,p) < \delta_j, \quad \text{para todo} \quad j \in \{1, 2, \cdots k\}.$$

Assim
$$d_{\mathbb{R}^k}(f(x), L) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - L_i|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} [d_{\mathbb{R}}(f_j(x), L_j)]^2} \overset{(5.2)}{<} \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}\right)^2} = \varepsilon,$$

mostrando que $\lim_{x \to p} f(x) = L$, completando a segunda parte da demonstração do resultado.

$\square$

Podemos reescrever a Definição (5.1.1) em termos de sequências, isto é:

Proposição 5.1.3 *Sejam* (X, d_X), (Y, d_Y), E, p, q *e* f *como na Definição (5.1.1).*
Então

$$\lim_{x \to p} f(x) = q$$

se, e somente se,

$$\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q,$$

para toda sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *em* E *satisfazendo*

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p.$$

Demonstração:
Suponhamos que

$$\lim_{x \to p} f(x) = q$$

e que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em E satisfaz

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p.$$

Mostremos que

$$\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q.$$

Como $\lim_{x \to p} f(x) = q$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$, de modo que

$$\text{se} \quad x \in E \;\; \text{e} \;\; d_X(x, p) < \delta \quad \text{então} \quad d_Y(f(x), q) < \varepsilon. \tag{5.3}$$

Por outro lado, como $p_n \to p$, poderemos encontar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\text{se} \quad n \geq N_o, \quad \text{teremos} \quad d_X(p_n, p) < \delta. \tag{5.4}$$

Logo, se $n \geq N_o$, de (5.4) e (5.3), segue que

$$d_Y(f(p_n), q) < \varepsilon, \quad \text{isto é,} \quad \lim_{n \to \infty} f(p_n) = q,$$

completando a primeira parte da demonstração do resultado.
Suponhamos, agora, que

$$\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q$$

para toda sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em E tal que

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p.$$

Mostremos que

$$\lim_{x \to p} f(x) = q.$$

Suponhamos, que a afirmação é falsa, isto é, existe $\varepsilon_o > 0$, de modo que, para cada $\delta > 0$, podemos encontrar $x_\delta \in E$ de modo que

$$d_X(x_\delta, p) < \delta, \quad \text{mas} \quad d_Y(f(x_\delta), q) \geq \varepsilon.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos

$$\delta_k \doteq \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad x_k \in E,$$

de modo que

$$d_X(x_k, p) < \delta_k = \frac{1}{k}.$$

Deste modo, segue que

$$p_k \in E \quad \text{e} \quad p_k \to p, \quad \text{mas} \quad d_Y(f(p_k), q) \geq \varepsilon_o,$$

isto é, a sequência $(f(p_k))_{k \in \mathbb{N}}$ não será convergente para o ponto $\underline{q}$, o que contraria nossa hipótese.

Logo deveremos ter

$$\lim_{x \to p} f(x) = q,$$

completando a segunda parte da demonstração do resultado.

□

5.2 Funções Contínuas

Definição 5.2.1 *Sejam* (X, d_X) *e* (Y, d_Y) *espaços métricos,* $E \subseteq X$, $p \in E$ *e* $f : E \to Y$ *uma função.*

Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **contínua em** $\underline{p}$ *se dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar*

$$\delta = \delta(p, \varepsilon) > 0,$$

de modo que

$$\text{se} \quad x \in E \quad \text{e} \quad d_X(x, p) < \delta, \quad \text{implicar em} \quad d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Se a função $\underline{f}$ *for contínua em todos os pontos do conjunto* E *diremos que a função* $\underline{f}$ *é* **contínua em** $\underline{E}$.

Observação 5.2.1

(a) *Para uma função* $\underline{f}$ *ser contínua em um ponto* $\underline{p}$ *é necessário que este ponto esteja no seu domínio (isto é, a função* $\underline{f}$ *deve estar definida no ponto* $\underline{p}$*).*

O mesmo não ocorre no caso do estudo do limite da função $\underline{f}$ *no ponto* $\underline{p}$ *(a função* $\underline{f}$ *não precisa estar definida no ponto* $\underline{p}$*).*

(b) *Suponhamos que* $p \in E$ *é ponto de acumulação do conjunto* E, *isto é,* $p \in E \cap E'$.

Então da definição (5.2.1) segue que a função $\underline{f}$ *é contínua no ponto* $\underline{p}$ *se, e somente se,*

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

(c) *Se o ponto* $\underline{p}$ *é um ponto isolado do conjunto* E, *então qualquer função* $\underline{f}$ *definida no conjunto* E *será contínua no ponto* $\underline{p}$.

De fato, como o ponto $\underline{p}$ *é ponto isolado do conjunto* E,*podemos encontrar* $r > 0$ *de modo que*

$$V_r(p) \cap E = \{p\} \tag{5.5}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, *consideremos*

$$\delta \doteq \frac{r}{2}.$$

Logo

$$\text{se} \quad x \in E \quad \text{e} \quad d_X(x,p) < \delta < r, \qquad \text{de (5.5), segue que} \quad x = p.$$

Assim, se $x \in E$ *e* $d_X(x,p) < \delta$ *teremos:*

$$d_Y(f(x), f(p)) = d_Y(f(p), f(p)) = 0 < \varepsilon,$$

isto é, a função $\underline{f}$ *é contínua no ponto* p.

(d) *Da Definição (5.2.1), uma função* $\underline{f}$ *é contínua em um ponto* $p \in E$ *se, e somente se, dado* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $\delta > 0$*, de modo que*

$$\text{se} \quad x \in E \quad \text{e} \quad d_X(x,p) < \delta, \qquad \text{deveremos ter} \quad d_y(f(x), f(p)) < \varepsilon,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $\delta > 0$ *de modo que*

$$\text{se} \quad x \in V_\delta(p) \cap E, \qquad \text{deveremos ter} \quad f(x) \in V_\varepsilon(f(p)),$$

ou ainda, dado $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $\delta > 0$*, de modo que*

$$f\left(V_\delta(p) \cap E\right) \subseteq V_\varepsilon\left(f(p)\right).$$

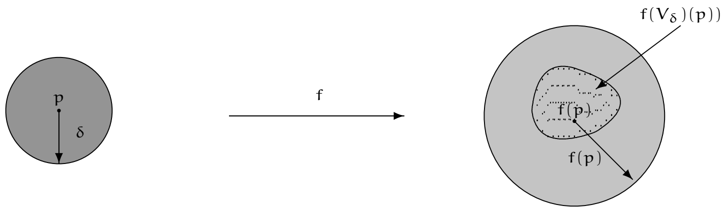
<u>Conclusão:</u>

Uma função $\underline{f}$ *é contínua em um ponto* p *se, e somente se, dada uma vizinhança do ponto* $f(p)$ *em* (Y, d_y) *(isto é,* $V_\varepsilon(f(p))$*), poderemos encontrar uma vizinhança do ponto* $\underline{p}$ *em* (X, d_X) *(ou seja,* $V_\delta(p)$*), de modo que*

$$f(V_\delta(p)) \subseteq V_\varepsilon(f(p)),$$

ou ainda (veja figura abaixo), $V_\delta(p)$ *tal que*

$$V_\delta(p) \subseteq f^{-1}\left(V_\varepsilon(f(p))\right),$$



Para a composição de funções contínuas temos a:

Proposição 5.2.1 *Sejam* (X, d_X), (Y, d_Y) *e* (Z, d_Z) *espaços métricos,* $E \subseteq X$ *e* $f : E \to Y$, $g : f(E) \to Z$ *contínuas nos pontos* $p \in E$ *e* $f(p) \in f(E)$*, respectivamente.*

Então a função composta $h \doteq g \circ f :\to Z$ *será contínua no ponto* p.

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como a função $\underline{g}$ é contínua no ponto $f(p) \in Y$, podemos encontar $\delta_o > 0$, de modo que

$$\text{se} \quad y \in f(E) \quad \text{e} \quad d_Y(y, f(p)) < \delta_o \quad \text{teremos} \quad d_Z\left(g(y), g(f(p))\right) < \varepsilon \tag{5.6}$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua no ponto $\underline{p}$, dado $0 < \delta_o$ (obtido acima), podemos encontrar $\delta > 0$, de modo que

$$\text{se} \quad x \in E \quad \text{e} \quad d_X(x,p) < \delta, \quad \text{teremos} \quad d_Y(f(x), f(p)) < \delta_o.$$

Logo, de (5.6), segue que

$$d_Y(g(f(x)), g(f(p))) < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to p} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to p} g(f(x)) = g(f(p)) = (g \circ f)(p),$$

mostrando que a função $h = g \circ f$ é contínua no ponto $\underline{p}$, completando a demonstração.

□

Observação 5.2.2 *Uma alternativa para a demonstração acima pode ser feita utilizando-se a Observação (5.2.1) item (d).*

Notemos que, pela Observação (5.2.1) item (d), dado $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que (veja figura abaixo)

$$(g \circ f)\,(V_\delta(p) \subseteq V_\varepsilon((g \circ f)(p)). \tag{5.7}$$

Observemos que, dado $\varepsilon > 0$, da continuidade da função $\underline{g}$ no ponto $f(p) \in Y$, podemos encontrar $\delta_o > 0$, de modo que

$$g(V_{\delta_o}(f(p)) \subseteq V_\varepsilon(g(f(p))) = V_\varepsilon((g \circ f)(p)). \tag{5.8}$$

Por outro lado, da continuidade da função $\underline{f}$ no ponto $\underline{p}$, podemos encontrar $\delta > 0$ (tomando-se na continuidade da função $\underline{f}$ no ponto $\underline{p}$, $\varepsilon = \delta_o > 0$, obtido em (5.8)) de modo que

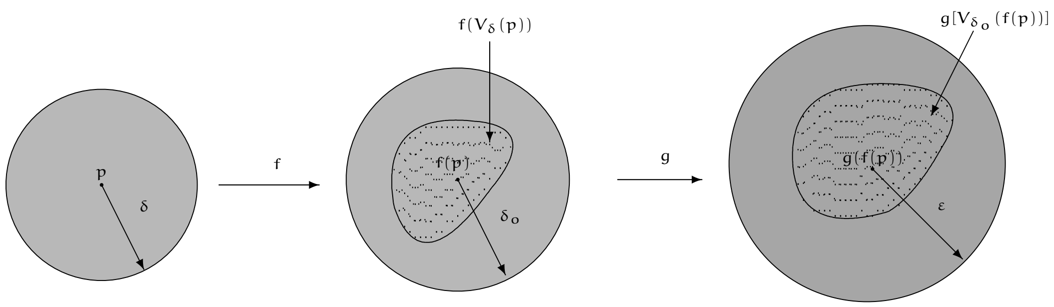
$$f(V_\delta(p)) \subseteq V_{\delta_o}(f(p)). \tag{5.9}$$

Logo

$$(g \circ f)(V_\delta(p)) = g\,[f(V_\delta(p))] \overset{(5.9)}{\subseteq} g\,[V_{\delta_o}(f(p))] \overset{(5.8)}{\subseteq} V_\varepsilon((g \circ f)(p)),$$

como queríamos demonstrar.

O diagrama abaixo ilustra a demonstração acima:



Uma outra caracterização muito importante para a continuidade de uma função é dada pela:

Teorema 5.2.1 *Sejam (X, d_X), (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função.*

A função $\underline{f}$ é contínua em (X, d_X) se, e somente se, o conjunto $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto em (X, d_X), para cada subconjunto V aberto em (Y, d_Y).

Demonstração:

Suponhamos que a função $\underline{f}$ é contínua em X e que o conjunto V é um subconjunto aberto em (Y, d_Y).

Notemos que se
$$f^{-1}(V) = \emptyset,$$
segue que este será um subconjunto aberto de (X, d_X).

Por outro lado, se
$$f^{-1}(V) \neq \emptyset,$$
provaremos que todo ponto do conjunto
$$f^{-1}(V) = \{x \in X\,;\ f(x) \in V\}$$
é ponto interior do mesmo, isto é, se $p \in f^{-1}(V)$, devemos encontrar $\delta > 0$, de modo que
$$V_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V).$$

Para isso, seja $p \in f^{-1}(V)$, isto é,
$$q \doteq f(p) \in V.$$

Como o conjunto V é um subconjunto aberto em (Y, d_Y) e $q \in V$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ de modo que
$$V_\varepsilon(f(p)) = V_\varepsilon(q) \subseteq V.$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua no ponto $\underline{p}$, poderemos encontar $\delta > 0$, de modo que
$$\text{se} \quad d_X(x, p) < \delta \quad \text{teremos} \quad d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon,$$
isto é,
$$\text{se} \quad x \in V_\delta(p)\,, \quad \text{deveremos ter} \quad f(x) \in V_\varepsilon(f(p)).$$

Logo,
$$\text{se} \quad x \in V_\delta(p)\,, \quad \text{segue que} \quad f(x) \in V_\varepsilon(f(p)) \subseteq V,$$
ou seja,
$$V_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V),$$
mostrando que o conjunto $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto em (X, d_X), completando a primeira parte da demonstração.

Suponhamos que o conjunto $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto em (X, d_X), para cada conjunto V que é um subconjunto aberto em (Y, d_Y).

Mostremos que se $p \in X$ então a função $\underline{f}$ é contínua no ponto $\underline{p}$.

Para isto, dado $\varepsilon > 0$, observamos que o conjunto
$$V_\varepsilon \doteq V_\varepsilon(f(p))$$
é um subconjunto aberto em (Y, d_Y) (pois é uma vizinhança do ponto $f(p)$ em (Y, d_Y)).

Logo, dado $\varepsilon > 0$ como o conjunto $V_\varepsilon \doteq V_\varepsilon(p)$ é um subconjunto aberto de (Y, d_Y), por hipótese, deveremos ter que o conjunto $f^{-1}(V_\varepsilon)$ deverá ser um subconjunto aberto em (X, d_X), ou seja, todo ponto do conjunto $f^{-1}(V_\varepsilon)$ é ponto interior do mesmo em (X, d_X).

Como $p \in f^{-1}(V_\varepsilon)$, segue que o ponto $\underline{p}$ deverá ser um ponto interior do mesmo (pois $f(p) \in V_\varepsilon$).

Logo, poderemos encontrar $\delta > 0$ de modo que

$$V_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V_\varepsilon),$$

isto é,

$$\text{se} \quad x \in V_\delta(p)), \quad \text{teremos} \quad f(x) \in V_\varepsilon(f(p)),$$

ou, equivalentemente

$$\text{se} \quad d_X(x,p) < \delta, \quad \text{teremos} \quad d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$, de modo que

$$\text{se} \quad d_X(x,p) < \delta \quad \text{teremos} \quad d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon,$$

ou seja, a função $\underline{f}$ será contínua em $p \in X$, completando a segunda parte da demonstração do resultado.

□

Observação 5.2.3 *Utilizando a Observação (5.2.1) item (d), pode-se obter uma demonstração alternativa para o resultado acima.*

De fato,

Suponhamos que a função $\underline{f}$ é contínua em X, isto é, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$de modo que

$$f(V_\delta(p)) \subseteq V_\varepsilon(f(p)).$$

Seja V é um subconjunto aberto em (Y, d_Y).

Então temos duas possibilidades:

(a) *Se $f^{-1}(V) = \emptyset$.*

Neste caso não temos nada a fazer pois o conjunto $\emptyset$ é aberto em Y, logo o conjunto $f^{-1}(V)$ será um subconjunto aberto em (X, d_X), como queríamos mostrar.

(b) *Se $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, então existe $p \in f^{-1}(V) \subseteq X$.*

Mostremos que todo ponto $p \in f^{-1}(V)$ é ponto interior do conjunto $f^{-1}(V)$ em (X, d_X).

Para isto seja $p \in f^{-1}(V)$, ou seja

$$f(p) \in V, \quad \textit{com} \quad p \in X.$$

Como o conjunto V é um subconjunto aberto em (Y, d_Y), poderemos encontrar $\varepsilon > 0$, de modo que

$$V_\varepsilon(f(p)) \subseteq V. \tag{5.10}$$

Por outro lado, como a função $\underline{f}$ é contínua no ponto $\underline{p}$, segue da Observação (5.2.1) item (d), que podemos encontrar $\delta > 0$, de modo que

$$f(V_\delta(p)) \subseteq V_\varepsilon(f(p)),$$

ou seja,

$$V_\delta(p) \subseteq f^{-1}[V_\varepsilon(f(p))]. \tag{5.11}$$

Logo, de (5.10) segue que

$$f^{-1}[V_\varepsilon(f(p))] \subseteq f^{-1}(V).$$

Portanto, de (5.11), teremos

$$V_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V),$$

ou seja, o conjunto $f^{-1}(V)$ *é um subconjunto aberto em* (X, d_X)*, como queríamos demonstrar.*

Por outro lado, suponhamos que o conjunto $f^{-1}(V)$ *é um subconjunto aberto em* (X, d_X)*, para cada conjunto* V *subconjunto aberto em* (Y, d_Y)*.*

Mostremos que se $p \in X$ *então a função* $\underline{f}$ *é contínua no ponto* $\underline{p}$*.*

Para isto, dado $\varepsilon > 0$*, como o conjunto* $V_\varepsilon(f(p))$ *é um subconjunto aberto em* (Y, d_Y) *(pois é uma vizinahnça de* $f(p)$ *em* (Y, d_Y)*) segue, por hipótese, que o conjunto* $f^{-1}(V_\varepsilon(f(p))$ *é um subconjunto aberto em* (X, d_X)*.*

Logo, podemos encontrar $\delta > 0$*, de modo que que*

$$V_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V_\varepsilon(f(p)) \quad \textit{ou, equivalentemente,} \quad f(V_\delta(p)) \subseteq V_\varepsilon(f(p)),$$

que pela Observação (5.2.1) item (d), implicará que a função $\underline{f}$ *será contínua no ponto* p*, como queríamos demonstrar.*

Como consequência temos o:

Corolário 5.2.1 *Suponhamos que as hipóteses do Teorema (5.2.1) esteja satisfeitas.*

A função $\underline{f}$ *é contínua em* X *se, e somente se, o conjunto* $f^{-1}(F)$ *é um subconjunto fechado em* (X, d_X)*, para cada conjunto* F *que é um subconjunto fechado em* (Y, d_Y)*.*

Demonstração:

Do Corolário (3.2.2) temos que o conjunto F é um subconjunto fechado em (Y, d_y) se, e somente se, o conjunto F^c é um subconjunto aberto em (Y, d_Y).

Logo, do Teorema (5.2.1), isto é equivalente ao conjunto $f^{-1}(F^c)$ ser um subconjunto aberto em (X, d_X). (*)

Observemos que

$$f^{-1}(F^c) = \left[f^{-1}(F)\right]^c, \tag{5.12}$$

cuja prova será deixada como exercício para o leitor.

Portanto, (5.12) e a afirmação (*) será equivalente ao conjunto $f^{-1}(F)$ ser um subconjunto fechado em (X, d_X), completando a demonstração do resultado.

□

Para funções tomando valores complexos temos a:

Proposição 5.2.2 *Sejam* (X, d_X) *e* $(\mathbb{C}, d_2)$ *espaços métricos e* $f, g : X \to \mathbb{C}$ *funções contínuas em* $p \in X$*.*

Então as funções $f + g$*,* $f\,g$ *e* $\dfrac{f}{g}$ *serão contínuas no ponto* $\underline{p}$*, no último caso deveremos ter* $g(p) \neq 0$*.*

Em particular, se as funções $f, g : X \to \mathbb{C}$ *são contínuas em* X *então as funções* $f+g$*,* $f\,g$ *e* $\dfrac{f}{g}$ *serão contínuas nos seus respectivos domínios (no último caso será em* $X \setminus \{x \in X\ ;\ g(x) = 0\}$*).*

Demonstração:

Se o ponto $\underline{p}$ é um ponto isolado de (X, d_X) nada temos a fezer.

Se o ponto $\underline{p}$ é um ponto de acumulação de (X, d_X) a demonstração segue da Proposição (5.1.1) e do fato que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são contínuas no ponto $\underline{p}$, completando a demonstração do resultado.

□

Para funções a valores vetoriais temos as:

Proposição 5.2.3 *Sejam* (X, d) *espaço métrico* $f_1, f_2, \cdots f_k : X \to \mathbb{R}$ *e* $f : X \to \mathbb{R}^k$ *dada por*

$$f(x) \doteq (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)), \ x \in X.$$

Então, a função $\underline{f}$ *é uma função contínua em* $p \in X$ *se, e somente se, para cada* $i = 1, 2, \cdots, k$, *a função* f_i *é uma função contínua em* p.

Em particular, a função $\underline{f}$ *é uma função contínua em* (X, d) *se, e somente se, para cada* $i = 1, 2, \cdots, k$, *a função* f_i *é uma função contínua em* (X, d).

Demonstração:

Segue da Proposição (5.1.2).

□

Proposição 5.2.4 *Sejam* (X, d), $(\mathbb{R}^k, d_k)$ *espaços métricos,* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $f, g : X \to \mathbb{R}^k$ *funções contínuas em* $p \in X$.

Então as funções $f + g$, $f \bullet g$, αf *são funções contínuas em* $\underline{p}$ *(onde* $\bullet$ *é o produto escalar em* $\mathbb{R}^k$*).*

Em particular, se $f, g : X \to \mathbb{R}^k$ *são funções contínuas em* (X, d) *então as funções* $f + g$, $f \bullet g$ *e* αf *são funções contínuas em* (X, d).

Demonstração:

Segue das Proposições (5.2.3) e (5.2.2).

□

Exemplo 5.2.1 *Suponhamos que* $(\mathbb{R}, d_1)$ *e* $(\mathbb{R}^k, d_k)$ *são espaços métricos munidos das respectivas distâncias provenientes das respectivas normas Euclideanas (isto é, de* $|\ |$ *em* $\mathbb{R}$ *e de* $\|\ \|$ *em* $\mathbb{R}^k$*).*

1) *Dado* $x \in \mathbb{R}^k$, *sejam* $x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathbb{R}$ *as coordenadas do ponto* $\underline{x}$ *(isto é,* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$*).*
   Com isto podemos definir, para cada $i = 1, 2, \cdots, k$, *a função* $\phi_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\phi_i(x) \doteq x_i, \quad x \in \mathbb{R}^k.$$

   Observemos que

$$|\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leq |x_i - y_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |x_j - y_j|^2} = \|x - y\|,$$

   isto é,

$$d_{\mathbb{R}}\left(\phi_i(x), \phi_i(y)\right) = |\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leq \|x - y\| = d_{\mathbb{R}^k}(x, y),$$

   para todo $x, y \in \mathbb{R}^k$.

Logo, segue que para cada $i = 1, 2, \cdots, k$*, a função* ϕ_i *é contínua em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$*.*

Para mostrar isto basta observar que, dado $\varepsilon > 0$ *podemos considerar* $\delta = \varepsilon$*.*

As funções ϕ_i*,* $i = 1, 2, \cdots, k$*, são denominadas* **funções coordenadas** *ou* **projeções** *(ou* **i-ésima projeção***).*

2) *Como consequência do Exemplo 1) e da Proposição (5.2.2) temos que as* **funções monomiais** *são contínuas em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$ *.*

De fato, pois uma função monomial é uma função do tipo $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k,$$

onde $n_i \in \mathbb{N}$*, para* $i = 1, \cdots, k$ *e assim temos que*

$$f(x) = [\phi_1(x)]^{n_1}\, [\phi_2(x)]^{n_2} \cdots [\phi_k(x)]^{n_k}, \quad x \in \mathbb{R}^k.$$

3) *Também como consequência Proposição (5.2.2) temos que as* **funções polinomiais** *, isto é,*

$$P(x) = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k \leq N} c_{n_1\cdots n_k}\, x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k,$$

onde $c_{n_1\cdots n_k} \in \mathbb{R}$*, para* $n_1 + n_2 + \cdots + n_k \leq N$*, com* $N \in \mathbb{N}$ *é fixo, também serão contínuas em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$*.*

3) *Uma vez mais, como consequência Proposição (5.2.2), temos que as* **funções racionais** *(isto é, funções do tipo* $f(x) \doteq \dfrac{P(x)}{Q(x)}$*, onde* P *e* Q *são funções polinomiais) são contínua nos seus respectivos domínios, isto é,* $\mathrm{Dom}\left(\dfrac{P}{Q}\right) \doteq \left\{x \in \mathbb{R}^k \;;\; Q(x) \neq 0\right\}$*.*

4) *A função* $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$h(x) \doteq \|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^k$$

é contínua em $(\mathbb{R}^k, d_k)$*.*

De fato, como

$$d_{\mathbb{R}}(h(x), h(y)) = |h(x) - h(y)| = |\,\|x\| - \|y\|\,| \overset{\textit{desigualdade triangular}}{\leq} \|x - y\| = d_{\mathbb{R}^k}(x, y),$$

segue a continuidade da função $\underline{h}$ *em* $(\mathbb{R}^k, d_k)$*.*

Para mostrar isto basta observar que, dado $\varepsilon > 0$ *podemos considerar* $\delta = \varepsilon$*.*

5) *Como consequência, se* (X, d) *é um espaço métrico,* $f : X \to \mathbb{R}^k$ *é uma função contínua em* (X, d) *então a função* $\phi : X \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\phi(p) \doteq \|f(p)\|, \quad p \in X$$

é uma função contínua em (X, d)*, pois é a função* ϕ *é uma função composta de funções contínuas.*

5.3 Continuidade e Compacidade

Iniciaremos a secção com a:

Definição 5.3.1 *Seja* (F, d_F) *um espaço métrico. Diremos que uma função* $f : E \to F$ *é* **limitada em** $\underline{E}$ *se existirem* $f \in F$ *e* $M > 0$ *tal que*

$$f(x) \in \mathcal{B}_M(f), \quad \textit{para todo} \quad x \in E,$$

onde $\mathcal{B}_M(f)$ *denota a bola aberta de centro em* $\underline{f}$ *e raio* $\underline{M}$, *em* (F, d_F).

Observação 5.3.1 *No caso que a função* $f : E \to \mathbb{R}^k$*, ela será limitada em* E *se existir* $M > 0$ *tal que*

$$\|f(x)\|_{\mathbb{R}^k} \leq M, \quad x \in E.$$

Com isto temos o:

Teorema 5.3.1 *Sejam* (X, d_X) *espaço métrico compacto,* (Y, d_Y) *espaço métrico e* $f : X \to Y$ *uma função contínua em* (X, d_X).

Então o conjunto $f(X)$ *é um subconjunto compacto em* (Y, d_Y).

Demonstração:

Seja $\{V_\alpha\,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}$ cobertura aberta de $f(X)$, em (Y, d_Y).

Como a função $\underline{f}$ é contínua em (X, d_X) e, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, temos que o conjunto V_α é um subconjunto aberto em (Y, d_Y), do Teorema (5.2.1), segue que o conjunto $f^{-1}(V_\alpha)$ é um subconjunto aberto em (X, d_X), para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, isto é,

$$\left\{f^{-1}(V_\alpha)\ ;\ \alpha \in \mathcal{A}\right\}$$

é uma cobertura aberta de X em (X, d_X).

Mas o conjunto X é um subconjunto compacto em (X, d_X), logo existem $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathcal{A}$, de modo que

$$X \subseteq f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup f^{-1}(V_{\alpha_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}),$$

ou seja,

$$f(X) \subseteq f\left(f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup f^{-1}(V_{\alpha_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n})\right). \tag{5.13}$$

Notemos que

$$f\left(f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup f^{-1}(V_{\alpha_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n})\right) = V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}, \tag{5.14}$$

cuja prova será deixada como exercício para o leitor.

Logo, de (5.13) e (5.14), segue que

$$f(X) \subseteq V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n},$$

isto é, a cobertura $\{V_\alpha\ ;\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ aberta de $f(X)$, em (Y, d_Y), possui uma subcobertura finita, a saber, $\{V_{\alpha_i}\ ;\ i = 1, 2, \cdots, n\}$, que ainda cobre o conjunto $f(X)$.

Portanto o conjunto $f(X)$ é um subconjunto compacto em (Y, d_Y), completando a demonstração.

□

Como consequência temos os:

Corolário 5.3.1 *Sejam* (X, d_X) *um espaço métrico compacto e* $f : X \to \mathbb{R}^k$ *é uma função contínua em* (X, d_X).

Então o conjunto $f(X)$ *é um subconjunto limitado e fechado em* (Y, d_Y).

Em particular, a função $\underline{f}$ *é uma função limitada em* (X, d_X).

Demonstração:

Do Teorema acima segue que o conjunto $f(X)$ é um subconjunto compacto em (Y, d_Y).

Logo, da Proposição (3.3.2), temos que o conjunto $f(X)$ um subconjunto limitado e fechado em (Y, d_Y), completando a demonstração do resultado.

□

No caso de funções reais temos o:

Corolário 5.3.2 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico compacto e* $f : X \to \mathbb{R}$ *contínua em* (X, d) *(onde em* $\mathbb{R}$ *estamos considerando a métrica* d_1*).*

Então existem

$$M \doteq \sup_{x \in X} f(x) \quad e \quad m \doteq \inf_{x \in X} f(x). \tag{5.15}$$

Além disso, existem $p, q \in X$ *de modo que*

$$f(p) = M \quad e \quad f(q) = m,$$

ou seja, a função $\underline{f}$ *assume seus valores máximo em mínimo (globais) em* (X, d).

Demonstração:

Observemos que, do Teorema (5.3.1), segue que o conjunto $f(X)$ é um subconjunto limitado em $(\mathbb{R}, d_1)$, logo existem $\underline{M}$ e $\underline{m}$ como em (5.15).

Por outro lado, o conjunto $f(X)$ é um subconjunto fechado em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Logo, da Proposição (3.2.7), segue que

$$\underbrace{\sup f(X)}_{=M}, \underbrace{\inf f(X)}_{=m} \in f(X),$$

isto é, existem $p, q \in X$ tais que

$$f(p) = M \quad \text{e} \quad f(q) = m,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 5.3.2 *O resultado acima nos diz que uma função contínua, a valores reais,* $f : X \to \mathbb{R}$, *definida num compacto* X *de um espaço métrico, assumirá máximo e mínimo (globais) em* X, *isto é, podemos encontrar* $p, q \in X$ *de modo que*

$$f(q) \leq f(x) \leq f(p), \quad \textit{para todo} \quad x \in X.$$

Para a função inversa temos o:

Teorema 5.3.2 *Sejam* (X, d_X) *espaço métrico compacto,* (Y, d_Y) *espaço métrico e* $f : X \to Y$ *uma função contínua em* (X, d_X) *e bijetora (logo existe a função inversa* $f^{-1} : Y \to X$*).*

Então a função inversa $f^{-1} : Y \to X$ *é contínua em* (Y, d_Y).

Resolução:

Notemos que, do Teorema (5.2.1), basta mostrar que se o conjunto U é um subconjunto aberto em (X, d_X) implicará que o conjunto $\left(f^{-1}\right)^{-1}(U)$ será um subconjunto aberto em (Y, d_Y).

Como a função $\underline{f}$ é bijetora temos que

$$\underbrace{\left(f^{-1}\right)^{-1}(U)}_{\text{imagem inversa do conjunto } U \text{ pela função inversa } f^{-1}} = f(U).$$

Logo basta mostrar que se o conjunto U é um subconjunto aberto em (X, d_X) então o conjunto $f(U)$ é um subconjunto aberto em (Y, d_Y).

Como o conjunto U é um subconjunto aberto em (X, d_X) segue, do Corolário (3.2.2) que o conjunto U^c é um subconjunto fechado em (X, d_X) que, por hipótese, é um subconjunto compacto em (X, d_X).

Logo, da Proposição (3.3.3), segue que o conjunto U^c é um subconjunto compacto em (X, d_X).

Assim, do Teorema (5.3.1), segue que o conjunto $f(U^c)$ é um subconjunto compacto em (Y, d_Y).

Portanto, a Proposição (3.3.2), implicará que o conjunto $f(U^c)$ é um subconjunto fechado em (Y, d_Y).

Mas

$$[f(U)]^c \overset{\text{Exercício}}{=} f(U^c),$$

que é um subconjunto fechado em (Y, d_Y).

Assim, do Corolário (3.2.2), teremos que o conjunto $f(U)$ é um subconjunto aberto em (Y, d_Y), mostrando que a função f^{-1} é uma função contínua em (Y, d_Y), completando a demonstração do resultado.

□

Observação 5.3.3

1. *Sejam* (X, d_X), (Y, d_Y) *espaços métricos e* $f : X \to Y$ *uma função.*

   Diremos que a função $\underline{f}$ **<u>é uma função aberta em (X, d_X)</u>** *se para cada conjunto* U *que é um subconjunto aberto em* (X, d_X) *tivermos que o conjunto* $f(U)$ *é um subconjunto aberto em* (Y, d_y).

2. *Com a noção acima segue, da demonstração do Teorema acima, que se* (X, d_X), (Y, d_Y) *espaços métricos e a função* $f : X \to Y$ *for bijetora, contínua e aberta em* (X, d_x) *então a função inversa* $f^{-1} : Y \to X$ *será contínua em* (Y, d_Y).

3. *De modo semelhante temos a:*

   Diremos que a função $\underline{f}$ **<u>é uma função fechada em (X, d_X)</u>** *se para cada conjunto* F *que é um subconjunto fechado em* (X, d_X) *tivermos que o conjunto* $f(F)$ *é um subconjunto fechado em* (Y, d_y).

4. *Com a noção acima, podemos demonstrar o seguinte resultado: se* (X, d_X), (Y, d_Y) *espaços métricos e a função* $f : X \to Y$ *for bijetora, contínua e fechada em* (X, d_x) *então a função inversa* $f^{-1} : Y \to X$ *será contínua em* (Y, d_Y).

   A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

A seguir exibiremos uma série de exemplos que ilustram que a hipótese de compacidade nos Teoremas (5.3.1), (5.3.2) e Corolários (5.3.1), (5.3.2) são essenciais para as conclusões dos mesmos.

Exemplo 5.3.1 *Para todos os exemplos a seguir o conjunto* E *é um subconjunto* **não** *compacto em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

1) *Existe uma função* $f : E \to \mathbb{R}$ *contínua em* (E, d_1), *que* **não** *é limitada em* (E, d_1).

Como o conjunto E **não** *é um subconjunto compacto em* $(\mathbb{R}, d_1)$, *ele poderá não ser fechado ou não ser limitado (ou não ser os dois).*

(a) Se o conjunto E *é limitado e não fechado em* $(\mathbb{R}, d_1)$:

Consideremos, por exemplo:

$$E \doteq (0, 1] \quad e \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in E.$$

Temos que a função $\underline{f}$ *é uma função contínua em* (E, d_1) *mas* **não** *é limitada em* (E, d_1), *pois*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty.$$

Observe que o conjunto $f(E) = [1, \infty)$ **não** *é um subconjunto compacto de* $(\mathbb{R}, d_1)$.

(b) Se o conjunto E *é um subconjunto fechado e não limitado em* $(\mathbb{R}, d_1)$:

Consideremos, por exemplo:

$$E \doteq [0, \infty) \quad e \quad f(x) = x, \quad x \in E.$$

Noteemos que a função $\underline{f}$ *é uma função contínua em* (E, d_1) *mas* **não** *é limitada em* (E, d_1), *pois*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Novamente, observemos que o conjunto $f(E) = [0, \infty)$ **não** *é um subconjunto compacto em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

2) *Existe uma função* $f : E \to \mathbb{R}$ *contínua e limitada em* (E, d_1) *que* **não** *tem máximo ou mínimo em* E.

Como o conjunto E **não** *é um subconjunto compacto em* $(\mathbb{R}, d_1)$, *poderá não ser fechado ou não ser limitado em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *(ou não ser os dois).*

(a) Se o conjunto E *é um subconjunto limitado e não fechado em* $(\mathbb{R}, d_1)$:

Consideremos, por exemplo:

$$E \doteq (0, 1) \quad e \quad f(x) = x, \quad x \in E.$$

Notemos que a função $\underline{f}$ *é uma função contínua e limitada em* (E, d_1) *(pois* $0 < f(x) < 1$ *para* $x \in E$*) mas* **não** *assume valor máximo ou valor mínimo em* E, *isto é, não existem* $x_o, x_1 \in E$, *de modo que*

$$f(x_o) \leq f(x) \leq f(x_1), \quad \textit{para todo} \quad x \in E.$$

Observemos que o conjunto $f(E) = (0, 1)$ **não** *é um subconjunto compacto em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

(b) *Se o conjunto* E *é um subconjunto fechado e não limitado em* $(\mathbb{R}, d_1)$*:*
Consideremos, por exemplo:

$$E \doteq [1, \infty) \quad e \quad f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x \in E.$$

Notemos que a função $\underline{f}$ *é uma função contínua e limitada em* (E, d_1) *(pois* $0 \leq f(x) < 1$ *para todo* $x \in E$*) e* **não** *assume valor máximo (global) em* E*.*
Observemos que o conjunto $f(E) = [0, 1)$ **não** *é um subconjunto compacto em* $(\mathbb{R}, d_1)$*.*

3) *Existe uma função* $f : E \to F$ *contínua em* (E, d_E)*, bijetora, cuja função inversa* **não** *é contínua em* (F, d_F)*.*

Consideremos, por exemplo:

$$E = [0, 2\pi) \quad e \quad f : E \to F \doteq S^1, \quad f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)), \quad t \in E,$$

onde

$$S^1 \doteq \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \|P\| = 1 \right\},$$

onde em S^1 *consideraremos a métrica* d_2*, induzida de* $(\mathbb{R}^2, d_2)$*.*

Observemos que a função $\underline{f}$ *é contínua em* (E, d_1) *(suas componentes são funções contínuas em* (E, d_E)*) e bijetora.*

Logo existe a função inversa $f^{-1} : S^1 \to E$ *mas esta função* **não** *é uma função contínua no ponto* $(1, 0) = f(0)$*.*

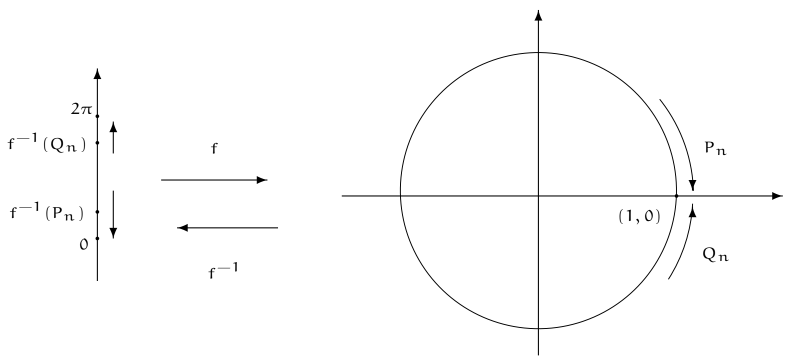
De fato, consideremos as sequências $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* S^1*, de modo que*

$$P_n \to (1, 0)$$

e está contida no semi-plano superior $y > 0$ *e*

$$Q_n \to (1, 0)$$

e está contida no semi-plano inferior $y < 0$ *(veja figura abaixo).*



Com isto teremos

$$f^{-1}(P_n) \to 0 \quad e \quad f^{-1}(Q_n) \to 2\pi,$$

mostrando que **não** *existe*

$$\lim_{x \to (1,0)} f^{-1}(x).$$

Em particular, a função f^{-1} **não** *é uma função contínua no ponto* $(1, 0)$*.*

Definição 5.3.2 *Sejam* (X, d_X), (Y, d_Y) *espaçoes métricos e* $f : X \to Y$ *uma função.*

Diremos que a função $f : X \to Y$ *é* **uniformemente contínua em** (X, d_X) *se dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *de modo que*

$$\textit{para todo} \quad p, q \in X \quad \textit{satisfazendo} \quad d_X(p, q) < \delta\,, \quad \textit{deveremos ter} \quad d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon.$$

Observação 5.3.4

(a) *A diferença entre a definição de continuidade e continuidade uniforme é que o* $\underline{\delta}$ *na última pode ser escolhido* **independente do ponto escolhido em** X, *ou seja, a continuidade uniforme é um conceito em um conjunto (no caso, o conjunto* X*) e a continuidade é um conceito em um único ponto (no caso, o ponto* $p \in X$*).*

(b) *Se a função* $\underline{f}$ *é uma função uniformemente contínua em* (X, d_X) *então a função* $\underline{f}$ *será uam função contínua em* (X, d_X).

A recíproca é falsa, isto é, existem funções que são contínuas em cada ponto de (X, d_X) *mas* **não** *são uniformemente contínuas em* (X, d_X).

Encontrar um tal exemplo será deixado como exercício para o leitor.

Quando o espaço métrico (X, d_X) é um espaço métrico compacto os dois conceitos são equivalentes, como mostra o:

Teorema 5.3.3 *Sejam* (X, d_X) *espaço métrico compacto,* (Y, d_Y) *espaço métrico e* $f : X \to Y$ *uma função.*

A função $\underline{f}$ *é contínua em* (X, d_X) *se, e somente se, a função* $\underline{f}$ *é uniformemente contínua em* (X, d_X).

Demonstração:

Se a função $\underline{f}$ é uniformemente contínua em (X, d_X), segue da Observação acima item (b), que ela será uma função contínua em (X, d_X)..

Suponhamos que a função $\underline{f}$ seja uma função contínua em (X, d_X), isto é, a função $\underline{f}$ seja uma função contínua em cada ponto $p \in X$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, para cada $p \in X$ fixado, podemos encontrar

$$\delta_p = \delta(p, \varepsilon) > 0,$$

de modo que

$$\text{se} \quad d_X(p, q) < \delta_p\,, \quad \text{teremos} \quad d_Y(f(p), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.16}$$

Para cada $p \in X$ consideremos o conjunto

$$V_p \doteq V_{\frac{\delta_p}{2}}(p) \tag{5.17}$$

que é um subconjunto aberto em (X, d_X).

Logo a família $\{V_p\ ;\ p \in X\}$ é uma cobertura aberta do conjunto X, em (X, d_X).

Como o conjunto X é um subconjunto compacto em (X, d_X), segue que, podemos encontrar $p_1, p_2, \cdots, p_n \in X$, de modo que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{p_i} \tag{5.18}$$

Logo, podemos concluir que se $p \in X$ satisfaz

$$d_X(p, p_k) < \delta_p\,, \quad \text{ou seja,} \quad p \in V_{p_k},$$

para algum $k \in \{1, 2, \cdots n\}$, então, de (5.16), teremos

$$d_Y\,(f(p), f(p_k)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.19}$$

Seja

$$\delta \doteq \frac{1}{2} \min\{\delta_{p_1}, \delta_{p_2}, \cdots, \delta_{p_n}\} > 0. \tag{5.20}$$

Observemos que δ **<u>não</u>** depende do ponto $p \in X$.

Sejam $p, q \in X$ são tais que

$$d_X(p, q) < \delta. \tag{5.21}$$

Logo, de (5.18), segue que

$$p \in V_{p_k}\,, \quad \text{para algum} \quad k \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Assim, de (5.17), segue que

$$d_X(p, p_k) < \frac{1}{2}\delta_{p_k} \tag{5.22}$$

e assim

$$d_X(q, p_k) \leq \underbrace{d_X(q, p)}_{\overset{(5.21)}{<}\delta} + \underbrace{d_X(p, p_k)}_{\overset{(5.22)}{<}\frac{1}{2}\delta_{p_k}} < \delta + \frac{1}{2}\delta_{p_k} \overset{(5.20)}{\leq} \frac{1}{2}\delta_{p_k} + \frac{1}{2}\delta_{p_k} = \delta_{p_k},$$

isto é,

$$p, q \in V_{p_k}.$$

Portanto

$$d_Y\,(f(p), f(q)) < d_Y(f(p), f(p_k)) + d_Y\,(f(p_k), f(q)) \overset{(5.19)}{<} \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é uniformemente contínua em (X, d_X), completando a demonstração do resultado.

$\square$

5.4 Continuidade e Conexidade

Começaremos pelo:

Teorema 5.4.1 *Sejam* (X, d_X), (Y, d_Y) *espaços métricos e* $f : X \to Y$ *uma função contínua em* (X, d_X).

Se o conjunto $E \subseteq X$ *é um subconjunto conexo em* (X, d_X) *então o conjunto* $f(E)$ *será um subconjunto conexo em* (Y, d_Y).

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que o conjunto $f(E)$ não seja um subconjunto conexo em (Y, d_Y), isto é, existem subconjuntos A e B contidos em Y, separados e não-vazios, de modo que

$$f(E) = A \cup B,$$

isto é,

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

Consideremos

$$G \doteq E \cap f^{-1}(A) \quad \text{e} \quad H \doteq E \cap f^{-1}(B).$$

Então

$$E = G \cup H$$

com G, H subconjuntos E.

Notemos que os conjunto G, H são subconjuntos não vazios, pois

$$A, B \subseteq f(E)$$

e A, B são conjuntos não vazios.

Mostremos que os conjunto G e H são separados em (X, d_x).

Para isto observemos que

$$G = E \cap f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}\left(\overline{A}\right),$$

pois

$$A \subseteq \overline{A}.$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua em (X, d_X) e o conjunto $\overline{A}$ é um subconjunto fechado em (Y, d_Y) (veja a Proposição (3.2.6) item (a)), segue que o conjunto $f^{-1}\left(\overline{A}\right)$ é um subconjunto fechado em (X, d_X) (veja o Corolário (5.2.1)) .

Assim, como

$$G \subseteq f^{-1}\left(\overline{A}\right),$$

segue que

$$\overline{G} \subseteq \overline{f^{-1}\left(\overline{A}\right)} \overset{f^{-1}\left(\overline{A}\right) \text{ é um subconj. fechado em } (X, d_X)}{=} f^{-1}\left(\overline{A}\right), \quad \text{implicando que} \quad f\left(\overline{G}\right) \subseteq \overline{A}.$$

Mas

$$f(H) \subseteq B \quad \text{e} \quad \overline{A} \cap B = \emptyset.$$

Logo

$$f\left(\overline{G}\right) \cap f(H) \subseteq \overline{A} \cap B = \emptyset, \quad \text{implicando que} \quad \overline{G} \cap H = \emptyset.$$

De modo análogo, mostra-se que (será deixado como exercício para o leitor)

$$G \cap \overline{H} = \emptyset,$$

ou seja,

$$E = G \cup H,$$

onde os conjunto G e H estão contidos no conjunto E, não vazios e separados em (X, d_X), isto é,

$$\overline{G} \cap H = G \cap \overline{H} = \emptyset,$$

o que é um absurdo, pois o conjunto E é um subconjunto conexo em (X, d_X).

Portanto o conjunto $f(E)$ é um subconjunto conexo em (Y, d_Y), completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o:

Teorema 5.4.2 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua em* $([a, b], d_1)$. *Suponhamos que*

$$f(a) < f(b) \quad e \quad c \in (f(a), f(b)).$$

Então existe $x_o \in (a, b)$ *tal que*

$$f(x_o) = c,$$

ou seja, a função $\underline{f}$ *assume todos os valores entre os valores* $f(a)$ *e* $f(b)$.

Demonstração:

Notemos que, do Teorema (3.6.1), segue que o conjunto $[a, b]$ é um subconjunto conexo em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Como a função $\underline{f}$ é uma função contínua em $([a, b], d_1)$ segue, do Teorema acima, que o conjunto $f([a, b])$ é um subconjunto conexo em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Portanto, do Teorema (3.6.1) segue $f([a, b])$ deverá ser um intervalo de $\mathbb{R}$, ou seja, a função $\underline{f}$, assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$, ou seja, existe $x_o \in [a, b]$ de modo que $f(x_o) = c$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 5.4.1 *O resultado acima é conhecido como Teorema do Valor Intermediário.*

A continuidade e a conexidade são necessárias para a conclusão do resultado acima, isto é, existem exemplos de funções **não contínuas** *em* (A, d_1) *definidas em um conjunto conexo* $A \subseteq \mathbb{R}$, *cuja imagem* **não** *é um conjunto conexo em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *e de funções contínuas em* (A, d_1), *definidas em conjuntos* A **não conexos** *em* $(\mathbb{R}, d_1)$, *cuja imagem* **não** *é um conjunto conexo.*

A construção de tais exemplos será deixado como exercício para o leitor.

5.5 Descontinuidade

Definição 5.5.1 *Sejam* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Diremos que o **limite da função $\underline{f}$, pela direita do ponto $c \in [a, b)$,** *é* $L \in \mathbb{R}$, *indicado por*

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \quad ou \quad f\left(c^+\right) = L,$$

se dado $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $\delta > 0$, *de modo que*

$$se \quad \underbrace{0 < x - c < \delta}_{c < x < c + \delta}, \quad teremos \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Diremos que o **limite da função $\underline{f}$, pela esquerda do ponto $c \in (a, b]$,** *é* $L \in \mathbb{R}$, *indicado por*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad ou \quad f\left(c^-\right) = L,$$

se dado $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $\delta > 0$, *de modo que*

$$se \quad \underbrace{-\delta < x - c < 0}_{-c - \delta < x < c}, \quad teremos \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Observação 5.5.1

a) *Observemos que, se* $c \in (a\,,b)$, *temos que*

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

se, e somente se,

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L,$$

ou ainda,

$$f\left(c^+\right) = f\left(c^-\right) = L.$$

A demonstração desse fato será deixada como exercício para o leitor.

b) *Poderíamos definir os limites laterais de uma função de uma variável real a valores reais, da seguinte forma:*

Se $c \in [a\,,b)$, *temos:*
$\mathrm{ds}\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ *se, e somente se, para uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$c < x_n < b, \quad x_n \to c \textit{ em } (\mathbb{R}, d_1)\,, \quad \textit{temos} \quad f(x_n) \to L \quad \textit{em} \quad (\mathbb{R}, d_1)\,.$$

De modo análogo, se $c \in (a\,,b]$, *temos:* $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$ *se, e somente se, para uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$a < x_n < c, \quad x_n \to c \textit{ em } (\mathbb{R}, d_1)\,, \quad \textit{temos} \quad f(x_n) \to L \textit{ em } (\mathbb{R}, d_1)\,.$$

Com isto temos a:

Definição 5.5.2 *Sejam* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *e* $c \in (a, b)$.

Diremos que a função f *tem uma* **descontinuidade de 1.a espécie no ponto c** *se existem* $f\left(c^+\right), f\left(c^-\right) \in \mathbb{R}$, *mas*

$$f\left(c^+\right) \neq f\left(c^-\right) \quad \textit{ou} \quad f\left(c^+\right) = f\left(c^-\right) \neq f(c).$$

Se não existe um dos limites laterais da função f *no ponto* c *diremos que a função* f *tem uma* **descontinuidade de 2.a espécie no ponto c** .

Observação 5.5.2 *Para que uma função* **não** *seja contínua no ponto* $c \in (a, b)$ *pode ocorrer de não existe limite da função no ponto* c, *mas existirem os limites laterais no ponto* c *(e são diferentes) ou existirem os limites laterais no ponto* c, *serem iguais (ou seja, existe o limite da função em* c*) mas forem diferentes do valor da função no ponto* c.

A seguir exibiremos alguns exemplos de funções reais descontínuas.

Exemplo 5.5.1

(a) *Consideremos* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} 1\,, & \textit{se } x \textit{ é racional} \\ 0\,, & \textit{se } x \textit{ é irracional.} \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Então, a função f *tem descontinuidades de 2.*^{a} *espécie em qualquer ponto de* $\mathbb{R}$, *pois para todo* $x \in \mathbb{R}$ **não** *existem* $f\left(x^+\right)$ *ou* $f\left(x^-\right)$.

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

(b) *Consideremos* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} x\,, & \textit{se } x \textit{ é racional} \\ 0\,, & \textit{se } x \textit{ é irracional.} \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Então, a função $\underline{f}$ *tem descontinuidades de 2.*^{a} *espécie em qualquer ponto de* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *pois para todo* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **não** *existem* $f\left(x^+\right)$ *ou* $f\left(x^-\right)$.

Mas a função $\underline{f}$ *é contínua em* $x = 0$.

A verificação destes fatos será deixado como exercício para o leitor.

(c) *Consideremos* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} x + 2\,, & -3 < x < -2 \\ -x - 2\,, & -2 \leq x < 0 \\ x + 2\,, & 0 \leq x < 1 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Então, a função $\underline{f}$ *tem descontinuidades de 1.*^{a} *espécie em* $x = 0$*, pois*

$$f\left(0^+\right) = 2 \quad e \quad f\left(0^-\right) = -2$$

e é contínua no conjunto $(-3, 1) \setminus \{0\}$.

A verificação destes fatos será deixado como exercício para o leitor.

(d) *Consideremos* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 1\,, & x = 0. \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Então, a função $\underline{f}$ *tem descontinuidades de 2.*^{a} *espécie em* $x = 0$*, pois* **não** *existem* $f\left(0^+\right)$ *e* $f\left(0^-\right)$.

Mas a função $\underline{f}$ *é contínua em* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A verificação destes fatos será deixado como exercício para o leitor.

5.6 Funções Monótonas

Definição 5.6.1 *Seja* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **crescente em** (a, b) *se para*

$$a < x < y < b \quad \textit{temos} \quad f(x) \leq f(y).$$

Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **decrescente em** (a, b) *se para*

$$a < x < y < b \quad \textit{temos} \quad f(x) \geq f(y).$$

Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **monótona em** (a, b) *se for monótona crescente ou monótona decrescente em* (a, b) .

Com isto temos a:

Proposição 5.6.1 *Suponhamos que* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *é monótona crescente em* (a,b).
Então para todo $x \in (a,b)$ *existem*

$$f\left(x^{+}\right) \quad e \quad f\left(x^{-}\right).$$

Mais precisamente,

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f\left(x^{-}\right) \leq f(x) \leq f\left(x^{+}\right) = \inf_{x<t<b} f(t). \tag{5.23}$$

Além disso, se

$$a < x < y < b \quad \textit{então} \quad f\left(x^{+}\right) \leq f\left(y^{-}\right).$$

Demonstração:

Dado $x \in (a,b)$, como a função é monótona crescente, segue que o conjunto

$$\{f(t) \ ; \ a < t < x\}$$

é limitado superiormente por $f(x)$, em $(\mathbb{R}, d_1)$.

Logo existe

$$A \doteq \sup\{f(t) \ ; \ a < t < x\}.$$

Como consequência temos que

$$A \leq f(x).$$

Mostremos que

$$A = f\left(x^{-}\right).$$

Para isto, dado $\varepsilon > 0$, como A é o supremo do conjunto

$$\{f(t) \ ; \ a < t < x\}$$

segue, da Proposição (2.4.5), que existe $z_o \in \{f(t) \ ; \ a < t < x\}$, de modo que

$$A - \varepsilon < z_o \leq A,$$

isto é, existe $t_o \in (a,x)$ tal que

$$A - \varepsilon < f(t_o) \leq A,$$

ou ainda, podemos encontrar $\delta > 0$, de modo que

$$a < x - \delta < x \quad \text{e} \quad A - \varepsilon < f(x - \delta) \leq A, \tag{5.24}$$

bastando tomar

$$\delta \doteq x - t_o.$$

Como a função $\underline{f}$ é monótona crescente segue que

$$f(x-\delta) \leq f(t) \leq A \,, \quad \text{para todo} \quad x - \delta < t < x. \tag{5.25}$$

Logo

$$A - \varepsilon \overset{(5.24)}{<} f(x-\delta) \overset{(5.25)}{\leq} f(t) \leq A < A + \varepsilon,$$

ou seja,

$$|f(t) - A| < \varepsilon, \quad \text{para} \quad x - \delta < t < x,$$

ou ainda,

$$\lim_{t\to x^-} f(t) = A, \quad \text{ou , equivalentemente} \quad A = f\left(x^-\right).$$

Portanto

$$f\left(x^-\right) = \sup_{a<t<x} f(t) \leq f(x).$$

De modo semelhante mostra-se que

$$f(x) \leq \inf_{x<t<b} f(t) = f\left(x^+\right).$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Assim segue a desigualdade (5.23).

Se

$$a < x < y < b,$$

segue que

$$f\left(x^+\right) \overset{(5.23)}{=} \inf_{x<t<b} f(t) \overset{(x,y)\subseteq(x,b)}{\leq} \inf_{x<t<y} f(t). \tag{5.26}$$

De modo semelhante, temos

$$f\left(y^-\right) \overset{(5.23)}{=} \sup_{a<t<y} f(t) \overset{f \text{ é monótona crescente}}{=} \sup_{x<t<y} f(t). \tag{5.27}$$

Portanto

$$f\left(x^+\right) \overset{(5.26)}{=} \inf_{x<t<y} f(t) \leq \sup_{x<t<y} f(t) \overset{(5.27)}{=} f\left(y^-\right),$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 5.6.1 *Vale um resultado análogo a Proposição acima para o caso em que a função é monótona decrescente, cuja demonstração será deixada como execício para o leitor.*

Neste caso teremos a seguinte desigualdade

$$\inf_{a<t<x} f(t) = f\left(x^-\right) \geq f(x) \geq f\left(x^+\right) = \sup_{x<t<b} f(t). \tag{5.28}$$

Além disso, se

$$a < x < y < b, \quad \textit{então} \quad f\left(x^+\right) \geq f\left(y^-\right).$$

Como consequência temos o:

Corolário 5.6.1 *Funções monótonas não tem descontinuidade de 2.ª espécie.*

Demonstração:

Se a função $\underline{f}$ é uma função monótona, da Proposição acima, segue que para todo $x \in (a,b)$, existem

$$f\left(x^+\right) \quad \text{e} \quad f\left(x^-\right),$$

isto é, se a função tiver ponto de descontinuidade, este deverá ser, necessariamente, de 1.ª espécie, completando a demonstração do resultado.

□

Com isto temos o:

Teorema 5.6.1 *Seja* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *monótona em* (a, b).

Então o conjunto formado pelos pontos de descontinuidade da função $\underline{f}$ *é, no máximo, enumerável.*

Demonstração:

Vamos fazer a demonstração para o caso em a função $\underline{f}$ é monótona crescente.

A demonstração do caso em que a função $\underline{f}$ é monótona decrescente será deixado como exercício para o leitor.

Seja E o conjunto formado pelos pontos de descontinuidade da função $\underline{f}$.

Observemos que, da Proposição (5.6.1), segue que se no ponto $x_o \in (a, b)$ a função $\underline{f}$ tem um ponto de descontinuidade então

$$f\left(x_o^-\right) < f\left(x_o^+\right).$$

De fato, caso contrário, se

$$f\left(x_o^-\right) \geq f\left(x_o^+\right),$$

então, da desigualdade (5.23), deveríamos ter

$$f\left(x_o^-\right) \leq f(x_o) \leq f\left(x_o^+\right) \leq f\left(x_o^-\right),$$

isto é,

$$f(x_o) = f\left(x_o^+\right) = f\left(x_o^-\right),$$

ou seja, a função $\underline{f}$ seria contínua em $\underline{x_o}$, o que contraria o fato da função ser descontínua em $\underline{x_o}$.

Para cada $x_o \in E$ associamos um número racional, $r(x_o) \in \mathbb{Q}$, de modo que

$$f\left(x_o^-\right) < r(x_o) < f\left(x_o^+\right).$$

Notemos que se $x_1 < x_2$ então, como a função $\underline{f}$ é monótona crescente, segue que

$$f(x_1) \leq f(x_2),$$

assim, teremos

$$f\left(x_1^+\right) \leq f\left(x_2^-\right).$$

Logo, da definição de $r(x)$ e da Proposição (5.6.1), segue que

$$r(x_1) < f\left(x_1^+\right) \leq f\left(x_2^-\right) < r(x_2).$$

Em particular, temos que

$$r(x_1) \neq r(x_2), \quad \text{para} \quad x_1 \neq x_2,$$

ou seja, a função $r : E \to \mathbb{Q}$ é injetora.

Deste modo estabelecemos uma relação bijetora entre o conjunto E e um subconjunto dos racionais, que a cada $x \in E$ associa $r(x) \in \mathbb{Q}$, de modo injetor, o que mostra que o conjunto E é no, máximo, enumerável, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 5.6.2

(a) *Vale observar que os pontos de descontinuidade de uma função monótona não precisam ser isolados.*

Na verdade, dado um conjunto enumerável E *de* (a, b)*, que pode ser escolhido denso em* (a, b) *(por exemplo* $E \doteq \mathbb{Q} \cap (a, b)$*), podemos construir uma função monótona em* (a, b) *de tal modo que os pontos de descontinuidade da função* $\underline{f}$ *são os elementos de* E*.*

Para ver isto, suponhamos que os elementos de E *estão dispostos em uma sequência* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$*.*

Seja $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência de números reais positivos tais que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_1)$*.*

Definamos a função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *por*

$$f(x) \doteq \sum_{x_n < x} c_n. \tag{5.29}$$

A soma acima é entendida da seguinte forma: soma sobre todos os índices $n \in \mathbb{N}$ *tais que* $x_n < x$*.*

Se não existir nenhum $x_n < x$ *a soma será feita sobre o conjunto vazio e neste caso definiremos*

$$f(x) \doteq 0.$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *converge absolutamente em* $(\mathbb{R}, d_1)$ *(pois* $c_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*) a ordem com que os termos são somados não é relevante (veja o Teorema (4.14.2)).*

Com isto temos:

(i) *a função* $\underline{f}$ *é monótona crescente em* (a, b)*;*

(ii) *a função* $\underline{f}$ *é descontínua em todo ponto de* E*.*
Na verdade teremos

$$f\left(x_n^+\right) - f\left(x_n^-\right) = c_n\,, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N};$$

(iii) *a função* $\underline{f}$ *é contínua em todo ponto de* $(a, b) \setminus E$*.*

Pode-se mostrar também que

$$f\left(x^-\right) = f(x), \quad \textit{para todo} \quad x \in (a, b).$$

A demonstração desses fatos serão deixadas como exercício o leitor.

(b) *Se em (5.29) a soma for tomada sobre todos os* $x_n \leq x$ *então pode-se mostrar que*

$$f\left(x^+\right) = f(x), \quad \textit{para todo} \quad x \in (a, b).$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Com isto temos a:

Definição 5.6.2 *Sejam* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *e* $x_o \in (a, b)$.

Diremos que uma função $\underline{f}$ *é* **contínua, à direita de** x_o, *se*

$$f\left(x_o^+\right) = f(x_o).$$

Diremos que uma função $\underline{f}$ *é* **contínua, à esquerda de** x_o, *se*

$$f\left(x_o^-\right) = f(x_o).$$

5.7 Limites Infinitos e no Infinito

Iniciaremos com a:

Definição 5.7.1 *Seja* $c \in \mathbb{R}$.

O conjunto (c, ∞) *será dito* **vizinhança de** $+\infty$ *e indicado por* $V(\infty)$, *ou seja,*

$$V(+\infty) \doteq (c, \infty).$$

De modo semelhante o conjunto $(-\infty, c)$ *será dito* **vizinhança de** $-\infty$ *e indicado por* $V(-\infty)$, *ou seja,*

$$V(-\infty) \doteq (-\infty, c).$$

Com isto temos a:

Definição 5.7.2 *Sejam* $f : E \to \mathbb{R}$, $A, a \in \mathbb{R}^*$ *(a reta extendida), com* $\underline{a}$ *sendo um ponto de acumulação do conjunto* E *em* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Diremos que **$f(x)$ tende A, quando x tende $\underline{a}$** , *indicando por*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

se dada uma vizinhança de A, *que indicaremos por* $U_A = U(A)$, *podemos encontrar uma vizinhança de* $\underline{a}$, *que indicaremos por* $V_a = V(a)$, *de modo que*

$$V_a \cap E \neq \emptyset \quad e \quad f(x) \in U_A, \quad \text{para todo} \quad x \in V_a \cap E, \; x \neq a.$$

Observação 5.7.1

1. *Se*

$$A, a \in \mathbb{R}$$

   (isto é, são números reais) a Definição acima coincide com a Definição (5.1.1).

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. *Se*

$$A = +\infty \quad e \quad a \in \mathbb{R},$$

   então a Definição acima nos diz que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

   se dada uma vizinhança de $+\infty$, *isto é,*

$$U_{+\infty} \doteq (c, \infty),$$

podemos encontrar uma vizinhança do ponto $\underline{a}$*, a saber,*

$$V_a \doteq (a-\delta, a+\delta),$$

de modo que

$$(a-\delta, a+\delta) \cap E \neq \emptyset \quad e \quad f(x) \in (c, \infty), \quad \textit{para todo} \quad x \in (a-\delta, a+\delta) \cap E,\ x \neq a.$$

3. *Se*

$$A = -\infty \quad e \quad a \in \mathbb{R},$$

então a Definição acima nos diz que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

se dada uma vizinhança de $-\infty$*, isto é,*

$$U_{-\infty} \doteq (-\infty, c),$$

podemos encontrar uma vizinhança do ponto $\underline{a}$*, a saber,*

$$V_a \doteq (a-\delta, a+\delta),$$

de modo que

$$(a-\delta, a+\delta) \cap E \neq \emptyset \quad e \quad f(x) \in (-\infty, c), \quad \textit{para todo} \quad x \in (a-\delta, a+\delta) \cap E,\ x \neq a.$$

4. *Se*

$$A \in \mathbb{R} \quad e \quad a = +\infty,$$

então a Definição acima nos diz que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A,$$

se dada uma vizinhança do ponto A*, a saber,*

$$U_A \doteq (A-\varepsilon, A+\varepsilon),$$

podemos encontrar uma vizinhança de $+\infty$*, isto é,*

$$V_{+\infty} = (c, \infty),$$

de modo que

$$(c, \infty) \cap E \neq \emptyset \quad e \quad f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon), \quad \textit{para todo} \quad x \in (c, \infty) \cap E.$$

5. *Se*

$$A \in \mathbb{R} \quad e \quad a = -\infty,$$

então a Definição acima nos diz que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A,$$

se dada uma vizinhança do ponto A, *a saber,*

$$U_A = (A - \varepsilon, A + \varepsilon),$$

podemos encontrar uma vizinhança de $-\infty$, *isto é,*

$$V_{-\infty} = (-\infty, c),$$

de modo que

$$(-\infty, c) \cap E \neq \emptyset \quad e \quad f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon), \quad \textit{para todo} \quad x \in (-\infty, c) \cap E.$$

6. *Se*

$$A = +\infty \quad e \quad a = +\infty,$$

então a Definição acima nos diz que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty,$$

se dada uma vizinhança de ∞, *isto é,*

$$U_{+\infty} \doteq (c, \infty),$$

podemos encontrar uma vizinhança de ∞, *isto é,*

$$V_{+\infty} \doteq (d, \infty),$$

de modo que

$$(d, \infty) \cap E \neq \emptyset \quad e \quad f(x) \in (c, \infty), \quad \textit{para todo} \quad x \in (d, \infty) \cap E.$$

7. *Se*

$$A = -\infty \quad e \quad x = +\infty,$$

então a Definição acima nos diz que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

se dada uma vizinhança de $-\infty$, *isto é,*

$$U_{-\infty} \doteq (-\infty, c),$$

podemos encontrar uma vizinhança de ∞, *isto é,*

$$V_{+\infty} \doteq (d, \infty),$$

de modo que

$$(d, \infty) \cap E \neq \emptyset \quad e \quad f(x) \in (-\infty, c), \quad \textit{para todo} \quad x \in (d, \infty) \cap E.$$

8. *Se*

$$A = -\infty \quad e \quad x = -\infty,$$

então a Definição acima nos diz que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

se dada uma vizinhança de $-\infty$, isto é

$$U_{-\infty} \doteq (-\infty, c),$$

podemos encontrar uma vizinhança de $-\infty$, isto é,

$$V_{-\infty} \doteq (-\infty, d),$$

de modo que

$$(-\infty, d) \cap E \neq \emptyset \quad e \quad f(x) \in (-\infty, c), \quad \textit{para todo} \quad x \in (-\infty, d) \cap E.$$

Com isto temos o:

Proposição 5.7.1 *Sejam $f,\ g : E \to \mathbb{R}$ tais que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = B,$$

onde $A, B, a \in \mathbb{R}^*$ (a reta estendida).
Então:

(a) *(unicidade do limite) se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A'$ temos que*

$$A' = A.$$

(b) *Se*

$$A, B \in (-\infty, +\infty] \quad ou \quad A, B \in [-\infty, +\infty)$$

então $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = A + B$, isto é,

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

(c) *Se*

$$A, B \neq 0$$

então $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = A.B$, isto é,

$$\lim_{x \to a} (f.g)(x) = \lim_{x \to a} f(x). \lim_{x \to a} g(x).$$

(d) *Se $B \neq 0$ então $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{A}{B}$, isto é,*

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

(ou seja, se operações $A + B$, $A.B$, $\dfrac{A}{B}$ estiverem definidas - ver Observação (2.6.1) (c)).

Demonstração:
A demostração será deixada como exercício para o leitor.

$\square$

Capítulo 6

Funções Diferenciáveis

Neste capítulo trataremos de alguns aspectos relacionados a derivação de funções definidas em intervalos (abertos ou fechados) a valores reais.

6.1 A Derivada de uma Função Real de Variável Real

Começaremos pela:

Definição 6.1.1 *Seja* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *e para cada* $x_o \in (a, b)$ *consideremos a função* $\phi : (a, b) \setminus \{x_o\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\phi(x) \doteq \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}, \quad x \in (a, b),\ x \neq x_o.$$

Se existir o limite $\lim\limits_{x \to x_o} \phi(x)$ *diremos que a função* $\underline{f}$ *é* **diferenciável no ponto** x_o *e o limite acima será denominado* **derivada da função** $\underline{f}$ **em** x_o *e denotado por* $f'(x_o)$*, isto é,*

$$f'(x_o) \doteq \lim_{x \to x_o} \phi(x) = \lim_{t \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}. \tag{6.1}$$

Observação 6.1.1

1. *É possível considerar os limites laterais pela direita e pela esquerda em (6.1).*

   Se existirem eles serão ditos **derivada da função** $\underline{f}$ **à direita do ponto** x_o *e* **derivada da função** $\underline{f}$ **à esquerda do ponto** x_o*, respectivamente e indicadas por*

   $$f'\left(x_o^+\right) \quad e \quad f'\left(x_o^-\right),$$

   respectivamente.

2. *É fácil ver que uma função* $\underline{f}$ *tem derivada no ponto* x_o *se, e somente se, ela possui as derivadas à direita e à esquerda do ponto* x_o *e estas são iguais, ou seja,*

   $$f'\left(x_o^+\right) = f'\left(x_o^-\right) = f'(x_o).$$

   A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

3. *Se a função* $\underline{f}$ *está definida em* $[a, b]$*, podemos estudar a existência da derivada à direita do ponto* $\underline{a}$ *e à esquerda do ponto* $\underline{b}$*.*

Com isto temos a:

Proposição 6.1.1 *Seja* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável no ponto* $x_o \in (a, b)$. *Então a função* $\underline{f}$ *é uma função contínua no ponto* x_o.

Demonstração:

Observemos que se $x \neq x_o$ temos

$$f(x) - f(x_o) = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}(x - x_o). \tag{6.2}$$

Assim

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_o} [f(x) - f(x_o)] &\overset{(6.2)}{=} \lim_{x \to x_o} \left[\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}(x - x_o)\right] = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} . \lim_{x \to x_o} (x - x_o) \\ &= f'(x_o).0 = 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{x \to x_o} [f(x) - f(x_o)] = 0,$$

mostrando que

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o),$$

isto é, a função $\underline{f}$ é uma função contínua no ponto x_o, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 6.1.2

1. *A recíproca do resultado acima* **<u>não</u>** *é verdadeira, isto é, existem funções que são contínuas em um ponto mas* **<u>não</u>** *são diferenciáveis no mesmo.*

   Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

   $$f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

   é uma função contínua no ponto $x = 0$ *mas* **<u>não</u>** *é diferenciável neste ponto.*

   A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

2. *Pode-se construir uma função contínua em toda a reta* $\mathbb{R}$ *que* **<u>não</u>** *é diferenciável em nenhum ponto da reta.*

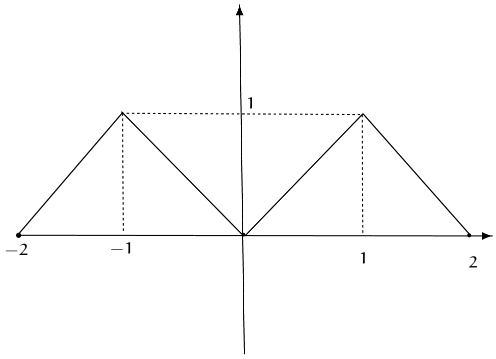
   A demonstração completa da afirmação acima será feita no curso de Análise II (veja Teorema 7.18 na página 154 do livro do W. Rudin).

   A seguir apenas introduziremos a função com as propriedades acima.

   Consideremos a função $\phi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

   $$\phi(t) \doteq |t|, \quad t \in [-1, 1] \quad \phi(x + 2) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

   ou seja, a extensão 2-periódica da função módulo definida no intervalo $[-1, 1]$ *(veja figura abaixo)*



Podemos agora definir a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *por*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi\left(4^n x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pode-se mostrar (será visto no curso de Análise II) que a função $\underline{f}$ é contínua em $\mathbb{R}$ mas ***<u>não</u>*** *é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.*

A seguir daremos algumas propriedades básicas da derivação.

Proposição 6.1.2 *Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funções que são diferenciáveis no ponto $x_o \in (a, b)$.*

Então as funções $f \pm g$, $f.g$ e $\dfrac{f}{g}$ são diferenciáveis no ponto x_o (para esta última é necessário que $g(x_o) \neq 0$).

Além disso terermos

(a) $(f \pm g)'(x_o) = f'(x_o) \pm g'(x_o)$;

(b) $(f.g)'(x_o) = f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_o)$;

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_o) = \dfrac{f'(x_o)g(x_o) - f(x_o)g'(x_o)}{g^2(x_o)}$.

Demonstração:

<u>De **(a)**:</u>

Segue da definição de derivada e da Proposição (5.1.1) (a).

<u>De **(b)**:</u>

Consideremos a função $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq f(x).g(x), \quad x \in (a, b).$$

Se $x \neq x_o$ temos:

$$\frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} = \frac{f(x)\,g(x) - f(x_o)\,g(x_o)}{x - x_o} = \frac{f(x)\,[g(x) - g(x_o)] + g(x_o)\,[f(x) - f(x_o)]}{x - x_o}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_o} \frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} &= \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)\,[g(x) - g(x_o)] + g(x_o)\,[f(x) - f(x_o)]}{x - x_o} \\
&= \lim_{x \to x_o} f(x). \lim_{x \to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} + \lim_{x \to x_o} g(x_o). \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \\
&\overset{\underline{f} \text{ é contínua no ponto } x_o}{=} f(x_o)g'(x_o) + g(x_o)f'(x_o).
\end{aligned}$$

Portanto, a função $f.g$ é diferençiável no ponto x_o e

$$(f.g)'(x_o) = f(x_o)g'(x_o) + g(x_o)f'(x_o),$$

completando a demonstração do item.

De **(c)**:

Podemos supor, sem perda de generalidade que $g(x) \neq 0$ para $x \in V_\delta \doteq V_\delta(x_o)$.

De fato, como $g(x_o) \neq 0$ e a função $\underline{g}$ é contínua no ponto x_o, segue que existe uma vizinhança do ponto x_o, que indicaremos por V_δ, de modo que $g(x) \neq 0$ para todo ponto $\underline{x}$ nessa vizinhança.

Consideremos a função $h : V \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in V_\delta.$$

Então se $x \neq x_o$, temos:

$$\frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} = \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_o)}{g(x_o)}}{x - x_o} = \frac{1}{g(x)g(x_o)} \left[g(x_o)\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} - f(x_o)\frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \right].$$

Logo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_o} \frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} &= \lim_{x \to x_o} \frac{1}{g(x)g(x_o)} \left[g(x_o)\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} - f(x_o)\frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \right] \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{1}{g(x)g(x_o)} \left[\lim_{x \to x_o} g(x_o)\frac{f(x) - f(x_o)}{t - x_o} \right] - \left[\lim_{x \to x_o} f(x_o)\frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \right] \\
&\overset{\underline{g} \text{ é contínua em } x_o}{=} \frac{g(x_o)f'(x_o) - f(x_o)g'(x_o)}{g^2(x_o)}.
\end{aligned}$$

Portanto, a função $\dfrac{f}{g}$ é diferençiável no ponto x_o e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{g(x_o)f'(x_o) - f(x_o)g'(x_o)}{g^2(x_o)},$$

completando a demonstração do item e do resultado.

□

Exemplo 6.1.1

(a) *Se a função* $\underline{f}$ *é uma função constante em* (a, b) *então ela será diferenciável em todo ponto de* (a, b) *e sua derivada será zero.*

A verficação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

(b) *Se* $f : I \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) = x, \quad x \in I,$$

onde I *é um intervalo aberto da reta, então a função* $\underline{f}$ *será diferenciável em* I *e*

$$f'(x) = 1, \quad x \in I.$$

A verficação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

(c) *Logo, da Proposição (6.1.2) temos que se* $n \in \mathbb{Z}$ *e* $f : I \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) = x^n, \quad x \in I,$$

onde I *é um intervalo aberto da reta, então a função* $\underline{f}$ *será diferenciável em* I *e*

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad x \in I.$$

A verficação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Notemos que se $n < 0$ *então devemos ter* $x \neq 0$.

(d) *Como consequência da Proposição (6.1.2) também temos que toda função polinomial será diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e toda função racional será diferençiável no seu domínio.*

(e) *Pode-se mostrar que se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

então a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e*

$$f'(x) = \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

A verficação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

(f) *Pode-se mostrar que se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

então a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e*

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

A verficação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

(g) *Como consequência da Proposição (6.1.2) temos que as funções*

$$f_1(x) \doteq \operatorname{tg}(x), \quad f_2(x) \doteq \operatorname{cotg}(x), \quad f_3(x) \doteq \sec(x) \quad e \quad f_4(x) = \operatorname{cossec}(x),$$

são diferenciáveis em seus respectivos domínios e

$$f_1'(x) = \sec^2(x), \quad f_2'(x) = -\operatorname{cossec}^2(x), \quad f_3'(x) = \sec(x)\operatorname{tg}(x) \quad e \quad f_4'(x) = -\operatorname{cossec}(x)\operatorname{cotg}(x),$$

para $\underline{x}$ *nos seus respectivos domínios.*

A verficação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Consideremos os seguintes exmeplos:

Exemplo 6.1.2

(a) *Consideremos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} x \,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que se $x \neq 0$ *então, da Proposição (6.1.2), segue que a função* $\underline{f}$ *será diferenciável em* $\underline{x}$.

Além disso

$$f'(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Para $x = 0$ *não podemos aplica a Proposição (6.1.2), pois* $\dfrac{1}{x}$ *não está definido para* $x = 0$.

Neste caso devemos utilizar a definição de derivada, isto é,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{f(0)=0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \overset{x \neq 0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{x \,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

e este limite não existe (verifique!).

Logo a função $\underline{f}$ *não é diferenciável em* $x = 0$.

Observemos que a função $\underline{f}$ *é contínua em* $x = 0$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

(b) *Consideremos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que se $x \neq 0$ *então, da Proposição (6.1.2), segue que a função* $\underline{f}$ *será diferenciável em* $\underline{x}$.

Além disso

$$f'(x) = 2x \,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Para $x = 0$ *não podemos aplica a Proposição (6.1.2) pois* $\dfrac{1}{x}$ *não está definido para* $x = 0$.

Neste caso devemos utilizar a definição de derivada, isto é,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{f(0)=0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \overset{x \neq 0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \left[x \,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0,$$

pois

$$\lim_{x \to 0} x = 0 \quad e \quad \left|\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Logo a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $x = 0$ *e*

$$f'(0) = 0.$$

Neste caso, a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

*Observemos que a função $\underline{f'}$ **não** será uma função contínua em $x = 0$, pois não existe $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$, ou melhor, não existe $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ (verifique!).*

Um resultado importante é a **Regra da Cadeia**, a saber:

Teorema 6.1.1 *Suponhamos que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ seja diferenciável em $x_o \in (a, b)$, $f((a, b)) \subseteq (c, d)$ e que a função $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $y_o = f(x_o)$.*

Então a função composta $h \doteq g \circ f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é diferenciável em x_o e além disso teremos

$$h'(x_o) = (g \circ f)'(x_o) = g'(f(x_o)).f'(x_o).$$

Demonstração:

Sejam $y \doteq f(x)$, $x \in (a, b)$, e para $x \in (a, b)$, $x \neq x_o$ definamos

$$u(x) \doteq \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} - f'(x_o) \tag{6.3}$$

e para $y \in (c, d)$, $y \neq y_o = f(x_o)$ definamos

$$v(y) \doteq \frac{g(y) - g(y_o)}{y - y_o} - g'(y_o) \tag{6.4}$$

Como as função $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são diferenciáveis em x_o e y_o, respectivamente, temos que

$$\lim_{x \to x_o} u(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \to y_o} v(y) = 0. \tag{6.5}$$

Observemos que, se $x \neq x_o$, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_o))}{x - x_o} \overset{y=f(x),\, y_o=f(x_o)}{=} \frac{[g(y) - g(y_o)]}{x - x_o} \\
&\overset{y \neq y_o}{=} \frac{g(y) - g(y_o)}{y - y_o} \frac{y - y_o}{x - x_o} \overset{y=f(x),\, y_o=f(x_o)}{=} \frac{g(y) - g(y_o)}{y - y_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \\
&\overset{(6.22)}{=} \left[g'(y_o) + v(y)\right] . \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \overset{(6.3)}{=} \left[g'(y_o) + v(y)\right] . \left[f'(x_o) + u(x)\right].
\end{aligned}$$

Da Proposição (6.1.1), segue que a função $\underline{f}$ é contínua em x_o.

Logo teremos que

$$y = f(x) \to f(x_o) = y_o, \quad \text{para} \quad x \to x_o.$$

Assim

$$\lim_{x \to x_o} \frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \left\{\left[g'(y_o) + v(y)\right] . \left[f'(x_o) + u(x)\right]\right\} \overset{\lim\limits_{y \to y_o} v(y) = \lim\limits_{x \to x_o} u(x) = 0}{=} g'(f(x_o)).f'(x_o),$$

mostrando que a função $(g \circ f)$ é diferenciável em x_o e

$$(g \circ f)'(x_o) = g'(f(x_o)).f'(x_o),$$

completando a demonstração do resultado.

□

Um resultado que nos fornece a diferenciabilidade da função inversa, é dado pelo

Teorema 6.1.2 *Sejam* $(a,b),(c,d) \subseteq \mathbb{R}$, *não vazios, onde* $(\mathbb{R}, d_1)$ *é o espaço métrico usual,* $a \in (a,b)$ *e* $f:(a,b) \to (c,d)$ *uma função bijetora.*

Suponhamos que a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $\underline{a}$, *que a função* f^{-1} *seja contínua em* $b = f(a)$ *e* $f'(a) \neq 0$.

Então a função inversa $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ *será diferenciável em* $b \doteq f(a) \in (c,d)$ *e além disso teremos*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{6.6}$$

Demonstração:

Como a função $\underline{g}$ é contínua em $b = f(a)$ segue que

$$\lim_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a. \tag{6.7}$$

Notemos que existe $\delta > 0$ tal que se $y \in (V_\delta(b) \cap (c,d)) \setminus \{b\}$ segue que

$$x = f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b) = a. \tag{6.8}$$

De fato, como $f'(a) \neq 0$ segue que a função $\underline{f}$ é estritamente crescente ou estritamente decrescente em uma vizinhança do ponto $\underline{a}$.

Com isto, pode-se mostrar que a função $\underline{f^{-1}}$ deverá ser estritamente crescente ou estritamente decrescente em uma vizinhança do ponto $b = f(a)$, o que nos fornecerá (6.8).

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Com isto segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} &\overset{y=f(x),\ x=f^{-1}(y) \text{ e } b=f(a)}{=} \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} = \lim_{y \to b} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \\
&\overset{(6.8)}{=} \lim_{y \to b} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}} \\
&\overset{x=f^{-1}(y),\text{ se } y \to b \text{ como } f^{-1} \text{ é cont. em } b \text{ segue que } x \to a}{=} \lim_{x \to a} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)},
\end{aligned}$$

mostrando que a função f^{-1} é diferenicável em $b = f(a)$ e que vale (6.6), completando a demonstração do resultado.

□

Observação 6.1.3 *Uma condição* **suficiente** *para que a função* f^{-1} *seja contínua em* $b = f(a)$ *é que a função* $\underline{f}$ *seja contínua, injetora e aberta (ou fechada) em* (a,b) *(veja o Observação* (5.3.3) *itens 2 ou 4).*

Temos a

6.2 Teorema do Valor Médio

Começaremos esta secção com a seguinte definição:

Definição 6.2.1 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* $f : X \to \mathbb{R}$.

Diremos que a função $\underline{f}$ *tem um* **máximo local em** $p \in X$ *se existir uma vizinhaça,* $V_\delta \doteq V_\delta(p)$*, de modo que*

$$f(x) \leq f(p) \quad \textit{para} \quad x \in V_\delta.$$

De modo semelhante, diremos que a função $\underline{f}$ *tem um* **mínimo local em** $p \in X$ *se existir uma vizinhaça,* $V_\delta \doteq V_\delta(p)$*, de modo que*

$$f(p) \leq f(x) \quad \textit{para} \quad x \in V_\delta.$$

Como isto temos o:

Teorema 6.2.1 *Seja* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Se a função $\underline{f}$ *tem um máximo (respectivamente, mínimo) local em* $x_o \in (a, b)$ *e for uma função diferenciável em* x_o

$$f'(x_o) = 0.$$

Demonstração:

Daremos a prova para o caso em que a função $\underline{f}$ tem máximo local em x_o.

O caso em que a função $\underline{f}$ tem mínimo local em x_o será deixado como exercício para o leitor.

Suponhamos que a função $\underline{f}$ tem um tem um máximo local em $x_o \in (a, b)$ e existe $f'(x_o)$.

Seja $\delta > 0$ de modo que, para

$$x \in V_\delta = V_\delta(x_o) \subseteq (a, b) \quad \text{tenhamos} \quad f(x) \leq f(x_o).$$

Observemos que neste caso

$$V_\delta = (x_o - \delta, x_o + \delta).$$

Notemos que:

- Se $x_o - \delta < x < x_o$ teremos:

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \overset{f(x)-f(x_o)\leq 0 \text{ e } x-x_o<0}{\geq} 0.$$

  Logo fazendo $x \to x_o^-$, como existe $f'(x_o)$, segue que:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geq 0. \tag{6.9}$$

- Por outro lado, se $x_o < x < x_o + \delta$ teremos:

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \overset{f(x)-f(x_o)\leq 0 \text{ e } x-x_o>0}{\leq} 0.$$

  Logo fazendo $x \to x_o^+$, como existe $f'(x_o)$, segue que

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{t \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \leq 0. \tag{6.10}$$

Portanto, de (6.9) e (6.10), segue que

$$f'(x_o) = 0,$$

como queríamos mostrar.

□

Como consequência temos o:

Teorema 6.2.2 *Sejam* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínuas em* $[a,b]$ *e diferenciáveis em* (a,b).
Então existe $x_o \in (a,b)$ *tal que*

$$[f(b) - f(a)]\, g'(x_o) = [g(b) - g(a)]\, f'(x_o). \tag{6.11}$$

Demonstração:
Consideremos a função $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Observemos que a função $\underline{h}$ é contínua em $[a,b]$, diferenciável em (a,b).
Além disso temos:

$$h(a) = [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a)$$
$$h(b) = [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) \overset{\text{Exercício}}{=} h(a),$$

isto é,

$$h(a) = h(b).$$

Como a função $\underline{h}$ é contínua em $[a,b]$ segue, do Teorema (5.3.2), que a função $\underline{h}$ tem máximo e mínimo globais em $[a,b]$.
Se a função $\underline{h}$ é constante em $[a,b]$, segue que

$$h'(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \in (a,b).$$

Mas

$$h'(x) = [f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]f'(x),$$

assim

$$[f(b) - f(a)]g'(x_o) = [g(b) - g(a)]f'(x_o)$$

para todo $x_o \in (a,b)$, ou seja, (6.11) ocorrerá para todo $x_o \in (a,b)$.
Por outro lado, se a função $\underline{h}$ não é constante em $[a,b]$, segue que

$$h(x) > h(a) = h(b) \quad \text{ou} \quad h(x) < h(a) = h(b),$$

para algum $x \in (a,b)$, ou seja, o máximo ou o mínimo globais da função $\underline{h}$ em $[a,b]$ deverá ocorrer em (a,b) (ambos não poderão ocorrer nos extremos a e b, pois $h(a) = h(b)$).
Se em $x_o \in (a,b)$ a função $\underline{h}$ tem máximo ou mínimo global em $[a,b]$ então em $x_o \in (a,b)$ a função $\underline{h}$ tem um máximo ou mínimo local (verifique!).
Logo, do Teorema (6.2.1), segue que $h'(x_o) = 0$, isto é,

$$[f(b) - f(a)]g'(x_o) = [g(b) - g(a)]f'(x_o),$$

ou seja, (6.11) ocorrerá em $x_o \in (a,b)$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 6.2.1 *O resultado acima é conhecido na literatura como o* **Teorema do valor médio generalizado**.

Como caso particular deste temos o **Teorema do valor médio** *(visto no curso de Cálculo I):*

Teorema 6.2.3 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* (a, b).

Então existe $x_o \in (a, b)$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(x_o)(b - a),$$

ou

$$f'(x_o) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração:

Basta considerar a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = x, \quad x \in [a, b].$$

Observemos que

$$g'(x) = 1, \quad x \in [a, b].$$

Aplicando o Teorema (6.2.2), segue que exsite $x_o \in (a, b)$ de modo que

$$[f(b) - f(a)] \underbrace{g'(x_o)}_{=1} = \underbrace{[g(b) - g(a)]}_{=b-a} f'(x_o),$$

ou seja,

$$f'(x_o) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

completando a demonstração do resultado.

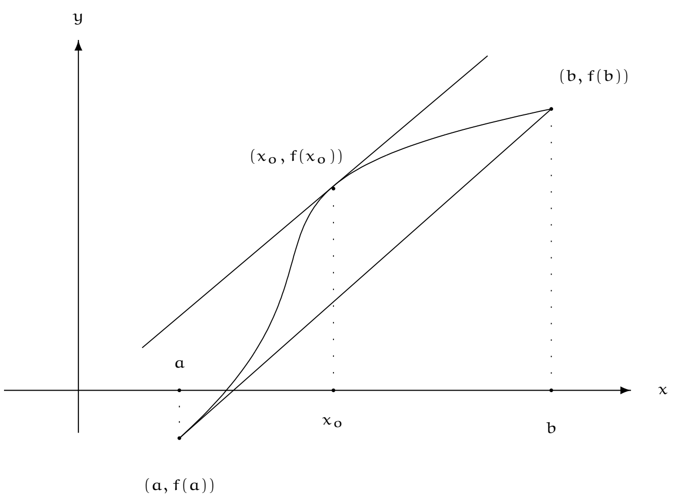
□

Observação 6.2.2 *Na situação acima temos que*

$$f'(x_o) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

isto é, o resultado nos diz que existe uma reta tangente ao gráfico da função $\underline{f}$ *(que é a reta que passa pelo ponto* $(x_o, f(x_o))$ *e tem coeficiente angular* $f'(x_o)$*) que é paralela a reta que passa pelos pontos* $(a, f(a))$ *e* $(b, f(b))$.

De fato, pois o coeficiente angular da reta tangente é $f'(x_o)$ *e da outra reta é* $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Com relação a monotonicidade de uma função temos o:

Teorema 6.2.4 *Suponhamos que* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *seja diferenciável em* (a, b)*. Então:*

(a) *Se* $f'(x) \geq 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *então a função* $\underline{f}$ *será monótona crescente em* (a, b).

(b) *Se* $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *então a função* $\underline{f}$ *constante em* (a, b).

(c) *Se* $f'(x) \leq 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *então a função* $\underline{f}$ *será monótona decrescente em* (a, b).

Demonstração:

Suponhamos que

$$a < x_1 < x_2 < b.$$

Notemos que como a função $\underline{f}$ é diferenciável em (a, b) segue que ela será contínua em (a, b), em particular, a função $\underline{f}$ será contínua em $[x_1, x_2]$ e diferenciável em (x_1, x_2).

Logo, do Teorema do valor médio (isto é, o Teorema (6.2.3)) aplicado ao intervalo $[x_1, x_2]$, segue que existe $x_o \in (x_1, x_2)$, de modo que

$$f'(x_o) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{6.12}$$

Como $x_1 < x_2$ temos que o sinal da expressão $f(x_2) - f(x_1)$ é o mesmo sinal de $f'(x_o)$.

No item (a) temos que $f'(x_o) \geq 0$.

Logo, de (6.12), segue que

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0,$$

isto é,

$$f(x_2) \geq f(x_1),$$

ou seja, a função $\underline{f}$ é monótona crescente em (a, b).

No item (c) temos que $f'(x_o) \leq 0$.

Logo, de (6.12), segue que

$$f(x_2) - f(x_1) \leq 0,$$

isto é,

$$f(x_2) \leq f(x_1),$$

ou seja, a função $\underline{f}$ é monótona decrescente em (a, b).

No item (b) temos que $f'(x_o) = 0$.

Logo, de (6.12), segue que $f(x_2) - f(x_1) = 0$, isto é,

$$f(x_2) = f(x_1),$$

ou seja, a função $\underline{f}$ é constante em (a, b), completando a demonstração do resultado.

□

6.3 Continuidade da Derivada

Começaremos esta seção com a seguinte observação:

Observação 6.3.1 *Existem funções a valores reais, que são diferenciáveis em um intervalo aberto* (a, b) *mas cuja função derivada* **não** *é uma função contínua em* (a, b) *(veja Exemplo (6.1.2) (b)).*

Mesmo neste caso, temos um resultado semelhante ao Teorema do valor intermediário para a função derivada, que **não** *é, necessariamente, contínua em* $[a, b]$*, a saber:*

Teorema 6.3.1 *Suponhamos que* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *seja diferenciável em* $[a, b]$ *e que*

$$f'(a) < f'(b).$$

Se

$$\lambda \in \big(f'(a), f'(b)\big) \tag{6.13}$$

, podemos encontrar $x_o \in (a, b)$*, de modo que*

$$f'(x_o) = \lambda.$$

Vale um resultado análogo se

$$f'(a) > f'(b).$$

Demonstração:

Por hipótese, temos que

$$f'(a) < f'(b).$$

Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) \doteq f(x) - \lambda x, \quad x \in [a, b].$$

Com isto, a função $\underline{g}$ será diferenciável em $[a, b]$ e

$$g'(x) = f'(x) - \lambda, \quad x \in [a, b]. \tag{6.14}$$

Em particular,

$$g'(a) = f'(a) - \lambda \overset{(6.13)}{<} 0. \tag{6.15}$$

Afirmamos que existe $x_1 \in (a, b)$ tal que

$$g(x_1) < g(a).$$

De fato, suponhamos, por absurdo, que para todo $x \in (a, b)$ tivéssemos

$$g(x) \geq g(a).$$

Então

$$g'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \overset{g(x) \geq g(a),\, x > a}{\geq} 0,$$

contrariando (6.15) (ou seja, que $g'(a) < 0$).

Por outro lado,

$$g'(b) = f'(b) - \lambda > 0. \tag{6.16}$$

Afirmamos que exite $x_2 \in (a, b)$ tal que

$$g(x_2) < g(b).$$

De fato, suponhamos, por absurdo, que para todo $x \in (a, b)$ tivéssemos $g(x) \geq g(b)$, então

$$g'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} \overset{g(x) \geq g(b),\, x<b}{\leq} 0,$$

contrariando (6.16) (ou seja, que $g'(b) > 0$).

Como a função $\underline{g}$ é contínua em $[a, b]$ (pois é diferenciável em $[a, b]$) segue que a função $\underline{g}$ tem máximo e mínimo globais em $[a, b]$.

Das afirmações acima segue que o mínimo global da função $\underline{g}$ será assumido no intervalo aberto (a, b).

De fato, pois

$$g(x_1) < g(a) \quad \text{e} \quad g(x_2) < g(b).$$

Em particular, a função $\underline{g}$ terá um mínimo local em (a, b).

Logo, do Teorema (6.2.1) segue que

$$g'(x_o) = 0.$$

Portanto, de (6.14),

$$f'(x_o) = \lambda.$$

De modo semelhante demonstra-se que o resultado é válido quando

$$f'(a) < f'(b).$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor, completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o:

Corolário 6.3.1 *Seja* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* (a, b).

Então os pontos de descontinuidade da função $\underline{f'}$*, se existirem,* **não** *poderão ser de 1.a espécie em* (a, b)*, isto é, se a função* $\underline{f'}$ *tem uma descontinuidade em* $x_o \in (a, b)$ *então*

$$\textit{ou não existe} \quad \lim_{x \to x_o^+} f'(x), \quad \textit{ou não existe} \quad \lim_{x \to x_o^-} f'(x)$$

.

Demonstração:

Seja $x_o \in (a, b)$ de modo que existem (isto é, são números reais)

$$L \doteq \lim_{x \to x_o^+} f'(x) \quad \text{e} \quad M \doteq \lim_{x \to x_o^-} f'(x).$$

Afirmamos que

$$L = f'(x_o) = M. \tag{6.17}$$

Caso isto esteja provado, notamos que isto implicará que a função $\underline{f'}$ será contínua no ponto x_o, ou seja, se existirem os limites laterais (isto é, forem números reais)

$$\lim_{x \to x_o^+} f'(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_o^-} f'(x),$$

então a função $\underline{f'}$ deverá ser contínua no ponto x_o.

Com isto, podemos concuir que a função $\underline{f'}$ não possui pontos de descontinuidade de 1.a espécie em (a, b).

Provemos (6.17).

Suponhamos, por absurdo, que

$$f'(x_o) < L. \tag{6.18}$$

Consideremos $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que

$$f'(x_o) < \lambda < L.$$

Como

$$L \doteq \lim_{x \to x_o^+} f'(x)$$

segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$\lambda < f'(x), \quad \text{para} \quad x \in (x_o, x_o + \delta). \tag{6.19}$$

Em particular, de (6.18) e (6.19), segue que

$$f'(x_o) < \lambda < f'\overbrace{\left(x_o + \frac{\delta}{2}\right)}^{\in(x_o, x_o+\delta)},$$

Logo, do Teorema (6.3.1), segue que existe $x_1 \in \left(x_o, x_o + \frac{\delta}{2}\right) \subseteq (x_o, x_o + \delta)$ de modo que

$$f(x_1) = \lambda,$$

contrariando (6.19).

De modo semelhante, mostra-se que

$$L < f'(x_o)$$

não pode acontecer.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Portanto deveremos ter

$$L = f'(x_o).$$

De modo semelhante mostra-se que

$$f'(x_o) = M.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor, completando a demonstração do resultado.

□

6.4 Regras de L'Hospital

O resultado que vem a seguir tratará de formas indeterminadas (isto é, limites do tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ entre outros).

Teorema 6.4.1 *Sejam* $f, g : (c, d) \to \mathbb{R}$ *funções diferenciáveis em* (c, d), *com* $g'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in (a, b)$, *onde* $-\infty \leq c < a < b < d \leq \infty$.

Suponhamos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in [-\infty, \infty].$$

(a) *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *então* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ *isto é,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(b) *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ *então* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$*, isto é,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração:

<u>De **(a)**:</u>

Deixaremos a demonstração deste item como exercício para o leitor.

<u>De **(b)**:</u>

Deixaremos a demonstração deste item como exercício para o leitor.

□

Observação 6.4.1

1. *O mesmo resultado é válido se trocarmos "*$x \to a$*" por "*$x \to \pm\infty$*" e no item (b) "*∞*" por "*$-\infty$*".*

2. *Vale o mesmo resultado para limites laterais.*

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

6.5 Derivadas de Ordem Superior

Definição 6.5.1 *Suponhamos que* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* (a, b)*.*

Logo temos definida a função derivada $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$*.*

Se a função derivada, isto é, a função f'*, for diferenciável em* $x_o \in (a, b)$ *diremos que a função* <u>f</u> *é* <u>**duas-vezes diferenciável em** x_o</u> *e denotaremos* $(f')'(x_o)$ *por*

$$f''(x_o) \quad ou \quad f^{(2)}(x_o),$$

que será denominada <u>**derivada 2.a da função f em** x_o</u> *(ou derivada de ordem 2 da função* <u>f</u> *em* x_o*).*

Em geral, diremos que a função <u>f</u> *é* <u>**n-vezes diferenciável em** x_o</u> *se a derivada de ordem* $n - 1$ *da função* <u>f</u>*, isto é, a função* $f^{(n-1)}$*, for diferenciável em* x_o*.*

Neste caso, denotaremos a derivada da função <u>f</u>*, de ordem* <u>n</u> *em* x_o*, por*

$$f^{(n)}(x_o).$$

Observação 6.5.1 *Para que a derivada da função* <u>f</u>*, de ordem* <u>n</u> *em* x_o*, isto é,* $f^{(n)}(x_o)$*, exista é necessário que a derivada da função* <u>f</u> *de ordem* $n - 1$*, isto é, a função* $f^{(n-1)}$*, exista numa vizinhança do ponto* x_o*.*

6.6 Fórmula de Taylor

Teorema 6.6.1 *(Teorema de Taylor com resto de Lagrange) Sejam que* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Suponhamos que a função* $f^{(n-1)}$ *é contínua em* $[a, b]$ *e que existe a função* $f^{(n)}$ *em* (a, b). *Para* $x_o, x_1 \in [a, b]$, $x_o \neq x_1$, *definamos*

$$P(x_1) \doteq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x_1 - x_o)^k .$$

Então, podemos encontrar $\bar{x} \in (x_o, x_1)$ *ou* $\bar{x} \in (x_1, x_o)$, *de modo que*

$$f(x_1) = P(x_1) + \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x_1 - x_o)^n \tag{6.20}$$

Demonstração:

Seja $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1) = P(x_1) + M(x_1 - x_o)^n,$$

isto é,

$$M \doteq \frac{f(x_1) - P(x_1)}{(x_1 - x_o)^n}.$$

Para completar a demonstração basta mostrar que existe $\bar{x} \in (x_o, x_1)$ ou $\bar{x} \in (x_1, x_o)$ de modo que

$$f^{(n)}(\bar{x}) = n!\, M.$$

Para isto, definamos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) \doteq f(t) - P(t) - M(t - x_o)^n, \quad t \in [a, b].$$

Observemos que a função $\underline{g}$ tem derivada de ordem $n-1$ contínua em $[a, b]$ e existe $g^{(n)}$ em (a, b). Além disso

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!\, M, \quad t \in (a, b)$$

pois

$$P^{(n)}(t) = 0, \quad t \in [a, b],$$

pois a função P é uma função polinômial de grau menor ou igual a $n - 1$.

Portanto, para completar a demonstração, basta mostrar que existe $\bar{x} \in [x_o, x_1]$ ou $\bar{x} \in [x_1, x_o]$, de modo que

$$g^{(n)}(\bar{x}) = 0. \tag{6.21}$$

Observemos que

$$P^{(k)}(x_o) = f^{(k)}(x_o), \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n - 1.$$

Assim

$$g(x_o) = g'(x_o) = \cdots = g^{(n-1)}(x_o) = 0.$$

Além disso,

$$g(x_1) = f(x_1) - P(x_1) - M(x_1 - x_1)^n = f(x_1) - P(x_1) - \frac{f(x_1) - P(x_1)}{(x_1 - x_o)^n}(x_1 - x_o)^n = 0,$$

ou seja,

$$g(x_o) = g(x_1) = 0.$$

Logo, do Teorema do valor médio (6.2.3), segue que podemos encontrar x_2 entre x_o e x_1 de modo que

$$g'(x_2) = 0.$$

Mas

$$g'(x_o) = 0 = g'(x_2),$$

assim novamente, pelo Teorema do valor médio, existirá x_3 entre x_o e x_2 de modo que

$$g''(x_3) = 0.$$

Repetindo o processo (observemos que $g(x_o) = g'(x_o) = \cdots = g^{(n-1)}(x_o) = 0$), segue que existirá $\bar{x}$ entre x_o e x_n tal que

$$g^{(n)}(\bar{x}) = 0.$$

Portanto, de (6.21), completamos a demostração do resultado.

□

Observação 6.6.1 *A expressão (6.20) é conhecida com* **Fórmula de Taylor de ordem $n-1$ para a função f no ponto x_o**.

Fazendo $x_1 = x$ podemos reescrevê-la com

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_o)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x - x_o)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_o)^n,$$

onde o ponto c está entre x e x_1.

A função polinomial

$$P(x) \doteq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x - x_o)^k$$

será dita **polinômio de Taylor de ordem $n-1$ associado à função f no ponto x_o** *e a função dada por*

$$R_n(x) \doteq \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_o)^n$$

é conhecido como **resto de Taylor de ordem $n-1$ associado à função f no ponto x_o**.

A seguir faremos uma aplicação do Teorema de Taylor para demonstrar o **Teste da 2.a Derivada** para classificar pontos críticos, relativamente a máximos e/ou mínimo locais, de uma função de uma variável real a valores reais, mais precismante:

Teorema 6.6.2 (**Teste da 2.a Derivada**) *Sejam A um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ e $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que pertença a $C^2(A; \mathbb{R})$.*

Suponhamos que $x_o \in A$ é um ponto crítico da função f, isto é,

$$f'(x_o) = 0.$$

Então:

(i) *se $f''(x_o) > 0$ então, no ponto x_o, a função f terá um ponto de mínimo local.*

(ii) *se $f''(x_o) < 0$ então, no ponto x_o, a função f terá um ponto de máximo local.*

Demonstração:

De (i):

Como A é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ e as derivadas até segunda ordem da função $\underline{f}$ são contínuas em A, pois a função $f \in C^2(A;\mathbb{R})$, e além disso temos

$$f''(x_o) > 0,$$

segue que existe uma vizinhança $V_\varepsilon \doteq V_\varepsilon(x_o)$ de modo que

$$f''(x) > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in V_\varepsilon. \tag{6.22}$$

Para cada $x \in V_\varepsilon$, $x \neq x_o$, definamos

$$h \doteq x - x_o, \qquad \text{ou seja,} \quad x = x_o \pm h \in V_\varepsilon \subseteq A.$$

Aplicando-se a fórmula de Taylor de ordem $\underline{1}$ para a função $\underline{f}$ nos pontos x e x_o (ver Teorema (6.6.1) com $n = 1$), obteremos que:

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)\,h + \frac{1}{2!}\,f''(\bar{x})\,h^2, \tag{6.23}$$

onde $\bar{x} \in V_\varepsilon$.

Como

$$f'(x_o) = 0,$$

segue, de (6.23), que, para $x \in V_\varepsilon$, teremos

$$f(x) - f(x_o) = \frac{1}{2!}f''(\bar{x})h^2,$$

onde $\bar{x} \in V_\varepsilon$.

Logo, de (6.22), teremos

$$f(x) - f(x_o) = \frac{1}{2!}\underbrace{f''(\bar{x})}_{\overset{(6.22)}{>0}}\quad\underbrace{h^2}_{=(x-x_o)^2\overset{x\neq x_o}{>}0} > 0 \quad \text{ou seja,} \quad f(x) > f(x_o), \quad \text{para todo} \quad x \in V_\varepsilon,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ tem um mínimo local no ponto x_o.

De modo semelhante mostra-se o item (ii).

A demonstração deste será deixada como exercício para o leitor, com isto completamos a demonstração do resultado.

$\square$

De modo semelhante podemos demonstrar o seguinte resultado que nos ajuda a classificar os pontos críticos de uma função rela de uma variável real.

Teorema 6.6.3 *Sejam $N \in \mathbb{N}$, A um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função que tem as derivadas até a ordem $2N$ contínuas em A. Suponhamos que $x_o \in A$ é tal que*

$$f'(x_o) = f''(x_o) = \cdots = f^{(2N-1)}(x_o) = 0 \quad e \quad f^{(2N)}(x_o) \neq 0.$$

Então

(i) Se $f^{(2N)}(x_o) < 0$, segue que a função $\underline{f}$ tem um máximo local no ponto x_o.

(ii) Se $f^{(2N)}(x_o) > 0$, *segue que a função* $\underline{f}$ *tem um mínimo local no ponto* x_o.

Demonstração:

De (i):

Como A é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ e as derivadas até a ordem $(2N)$ da função $\underline{f}$ são contínuas em A e

$$f^{(2N)}(x_o) > 0,$$

segue que existe uma vizinhança $V_\varepsilon \doteq V_\varepsilon(x_o)$ de modo que

$$f^{(2N)}(x) > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in V_\varepsilon. \tag{6.24}$$

Para cada $x \in V_\varepsilon$, $x \neq x_o$, definamos

$$h \doteq x - x_o, \qquad \text{ou seja,} \quad x = x_o \pm h \in V_\varepsilon \subseteq A.$$

Aplicando-se a fórmula de Taylor de ordem $\underline{2N-1}$ para a função $\underline{f}$ nos pontos x e x_o (ver Teorema (6.6.1) com $n = 2N-1$), obteremos que:

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)\,h + \cdots + \frac{1}{(2N-1)!} f^{(2N-1)}(x_o)\,h^{2N-1} + \frac{1}{(2N)!} f^{(2N)}(\bar{x})\,h^{2N}, \tag{6.25}$$

onde $\bar{x} \in V_\varepsilon$.

Como

$$f'(x_o) = f''(x_o) = \cdots = f^{(2N-1)}(x_o) = 0,$$

segue, de (6.25), que, para $x \in V_\varepsilon$, teremos

$$f(x) - f(x_o) = \frac{1}{(2N)!} f^{(2N)}(\bar{x})\,h^{2N},$$

onde $\bar{x} \in V_\varepsilon$.

Logo, de (6.24), teremos

$$f(x) - f(x_o) = \frac{1}{(2N)!} \underbrace{f^{(2N)}(\bar{x})}_{\overset{(6.24)}{>0}} \quad \underbrace{h^{2N}}_{=(x-x_o)^2 \overset{x\neq x_o}{>} 0} > 0 \quad \text{ou seja,} \quad f(x) > f(x_o), \quad \text{para todo} \quad x \in V_\varepsilon,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ tem um mínimo local no ponto x_o.

De modo semelhante demonstra-se o item (ii).

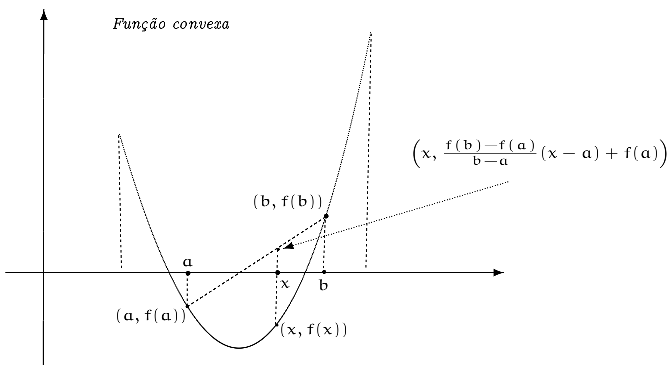
A demonstração deste será deixada como exercício para o leitor, com isto completamos a demonstração do resultado.

$\square$

Uma outra aplicação do Teorema de Taylor é para obter condições necessárias e suficientes para que uma função, de uma variável real a valores reais, duas vezes diferenciável seja uma função convexa.

Para a definição da mesma temos a:

Definição 6.6.1 *Diremos que a função* $f : I \to \mathbb{R}$, *onde* $I \subseteq \mathbb{R}$ *é um intervalo, é uma* **função convexa** *se para cada* $x \in (a,b) \subseteq I$, *o ponto* $(x, f(x))$ *do gráfico da função, situa-se abaixo correspondente ponto do segmento que une os pontos* $(a, f(a))$ *a* $(b, f(b))$ *(veja figura abaixo).*



Observação 6.6.2

1. *Na situação acima, sabemos que a equação da reta pelos pontos* $(a, f(a))$ *e* $(b, f(b))$ *será dada por*

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \textit{ou} \quad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Logo, dizer que, para $x \in (a, b) \subseteq I$, *o ponto do gráfico da função* $(x, f(x))$ *está abaixo da secante pelos pontos* $(a, f(a))$ *e* $(b, f(b))$ *é equivalente a escrever*

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \textit{ou} \quad f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b),$$

ou seja,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Portanto, para mostrar que a função $\underline{f}$ *é convexa em* I *é* **<u>necessário e suficiente</u>** *verificar se para* $x \in (a, b) \subseteq I$ *temos:*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{6.26}$$

2. *Na verdade, basta obter umas das duas desigualdades acima para caracterizarmos a convexidade de uma função* $\underline{f}$ *a valores reais, definida em um intervalo aberto da reta.*

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Com isto temos o:

Proposição 6.6.1 *Sejam* $I \subseteq \mathbb{R}$ *um intervalo aberto e* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função duas vezes diferenciável em* I.

A função $\underline{f}$ *é convexa em* I *se, e somente se,*

$$f''(x) \geq 0, \quad \textit{para cada} \quad x \in I.$$

Demonstração:

Suponhamos que

$$f''(x) \geq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in I.$$

Então, pelo Teorema de Taylor, se $x_o, x_o + h \in I$, podemos encontrar

$$c \in (x_o, x_o + h), \text{ se } h > 0, \quad \text{ou} \quad c \in (x_o + h, x_o) \text{ se } h < 0,$$

de modo que

$$f(x_o+h) = f(x_o) + f'(x_o)h + \frac{f''(c)}{2}h^2.$$

Como $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ segue, da identidade acima que,

$$f(x_o+h) \geq f(x_o) + f'(x_o)h$$

ou seja,

$$\text{se,} \quad h > 0 \quad \text{teremos} \quad \frac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h} \geq f'(x_o) \quad \text{ou} \tag{6.27}$$

$$\text{se} \quad h < 0, \quad \text{teremos} \quad \frac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h} \leq f'(x_o). \tag{6.28}$$

Se $x \in (a,b) \subseteq I$ segue que, tomando-se

$$x_o \doteq x \quad \text{e} \quad h \doteq b - x > 0,$$

segue que

$$x_o + h = x + h = b,$$

assim, de (6.27), segue que

$$\frac{f(b) - f(x)}{b - x} \geq f'(x). \tag{6.29}$$

Por outro lado, tomando-se

$$h \doteq a - x < 0 \quad \text{e} \quad x_o \doteq x$$

segue que

$$x_o + h = a,$$

assim, segue de (6.28), que

$$\underbrace{\frac{f(a) - f(x)}{a - x}}_{=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \leq f'(x). \tag{6.30}$$

Logo, de (6.29) e (6.30), segue que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{6.31}$$

Consideremos

$$X \doteq f(x) \quad A \doteq f(a) \quad \text{e} \quad B \doteq f(b). \tag{6.32}$$

Logo, de (6.31), segue que

$$\frac{X - A}{x - a} \leq \frac{B - X}{b - x}.$$

Como $(x-a), (b-x) > 0$, segue que

$$(X - A)\,(b - x) \leq (B - X)\,(x - a).$$

Somando-se $(X-A)\,(x-a)$ a ambos os membros da desigualdade acima obteremos:

$$\underbrace{(X - A)\,(b - x) + (X - A)\,(x - a)}_{=(X-A)\,(b-a)} \leq \underbrace{(B - X)\,(x - a) + (X - A)\,(x - a)}_{=(B-A)\,(x-a)},$$

ou seja,

$$(X - A)(b - a) \leq (B - A)(x - a).$$

Como $(b - a), (x - a) > 0$, segue, da desigualdade acima, que

$$\frac{X - A}{x - a} \leq \frac{B - A}{b - a}.$$

Logo, de (6.32), segue que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

que pela Observação (6.6.2) item 2. implica que a função função $\underline{f}$ é uam função convexa em I.

Reciprocamente, suponhamos que a função $\underline{f}$ é uma função convexa em I.

Mostremos que

$$f''(x) \geq 0, \quad \text{para todo} \quad x \in I.$$

Como a função $\underline{f}$ é uma função convexa em I segue que, para $a, b \in I$ tal que $a < b$, se $x \in (a, b)$ segue, de (6.26), que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\text{não depende de } \underline{x}} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Fazendo $x \to a$, na desigualdade à esquerda, e $x \to b$, na desigualdade à direita, segue que

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b),$$

ou seja, a função $\underline{f'}$ é uma função monótona crescente em I.

Portanto, pelo Teorema (6.2.4), deveremos ter

$$f''(x) = \left(f'\right)'(x) \geq 0, \quad \text{para todo} \quad x \in I,$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

6.7 Diferenciação de Funções Vetoriais

Observação 6.7.1

(a) *Se* $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ *é uma função a valores complexos, então podemos escrever*

$$f(t) = f_1(t) + i\, f_2(t) \quad t \in (a, b),$$

onde $f_1, f_2 : (a, b) \to \mathbb{R}$ *são funções a valores reais.*

Podemos definir a diferenciabilidade de tal função de modo análogo ao que fizemos para função reais, isto é, a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $x_o \in (a, b)$ *se existe*

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \in \mathbb{C}$$

e neste caso, este limite será denominado **derivada da função $\underline{f}$ no ponto x_o** *e indicado por* $f'(x_o) \in \mathbb{C}$.

Pode-se mostrar que, na situação acima, a função $\underline{f}$ *diferenciável em* $x_o \in (a, b)$ *se, e somente se, as funções* f_1, f_2 *são diferenciáveis em* x_o.

Além disso,

$$f'(x_o) = f_1{}'(x_o) + i\, f_2{}'(x_o).$$

A verificação destes fatos será deixado como exercício para o leitor.

Com isto todas as propriedades básicas de derivação são válidas para funções a valores complexos.

As demonstrações das mesmas serão deixadas como exercíco para o leitor.

(b) *Se* $f : (a, b) \to \mathbb{R}^k$ *é uma função a valores vetoriais, então podemos escrever*

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_k(t)), \quad t \in (a, b),$$

onde $f_1, f_2, \cdots f_k : (a, b) \to \mathbb{R}$ *são funções a valores reais.*

Neste caso podemos definir a diferencibilidade da seguinte forma: diremos qua a função **f é diferenciável no ponto** x_o *se existe um vetor, que será indicado por* $f'(x_o) \in \mathbb{R}^k$, *de modo que*

$$\lim_{x \to x_o} \left\| \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} - f'(x_o) \right\|_{\mathbb{R}^k} = 0.$$

Neste caso diremos que $f'(x_o)$ *é a* **derivada da função $\underline{f}$ no ponto** x_o.

Pode-se mostrar, na situação acima, que a função $\underline{f}$ *é diferenciável no ponto* $x_o \in (a, b)$ *se, e somente se, as funções* $f_1, f_2, \cdots, f_k$ *são diferenciáveis em* x_o.

Além disso,

$$f'(x_o) = (f_1{}'(x_o), f_2{}'(x_o), \cdots, f_k{}'(x_o)).$$

A verificação destes fatos será deixado como exercício para o leitor.

Todas as propriedades básicas de derivação continuarão válidas neste caso.

As demonstrações das mesmas serão deixadas como exercíco para o leitor.

(c) *Podemos definir de modo semelhante as derivadas de ordem superior para as funções acima.*

Deixaremos os detalhes como exercíco para o leitor.

Consideremos o:

Exemplo 6.7.1

(a) *Consideremos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$f(x) \doteq e^{ix} = \cos(x) + i\ \mathrm{sen}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Como as funções f_1, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$f_1(x) = \cos(x) \quad e \quad f_2(x) = \mathrm{sen}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

são diferenciáveis em $\mathbb{R}$, *segue que a função* $\underline{f}$ *será diferenciável em* $\mathbb{R}$.

Além disso,

$$f'(x) = f_1{}'(x) + i\, f_2{}'(x) = -\,\text{sen}(x) + i\,\cos(x) = i(\cos(x) + i\,\text{sen}(x))$$
$$= ie^{ix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\|f'(x)\| = 1 \quad x \in \mathbb{R},$$

em particular

$$f'(x) \neq (0,0), \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que

$$f(0) = f(2\pi) = 1.$$

Logo, o Teorema do valor médio **não** *é válido neste caso.*

De fato, pois **não** *existe* $c \in (0, 2\pi)$ *tal que*

$$f'(c) \neq 0 = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0}.$$

(b) *Definamos as funções* $f,\ g : (0,1) \to \mathbb{C}$ *dadas por*

$$f(x) \doteq x \quad \textit{e} \quad g(x) \doteq x + x^2 e^{\frac{i}{x^2}}, \quad x \in (0,1).$$

Notemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + xe^{\frac{i}{x^2}}} = 1, \tag{6.33}$$

onde na última igualdade usamos o fato que

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \quad \textit{e} \quad \left|e^{\frac{i}{x^2}}\right| = 1,\ x \neq 0.$$

Observemos também que

$$g'(x) = 1 + \left(2x - \frac{2i}{x}\right) e^{\frac{i}{x^2}}, \quad x \in (0,1),$$

assim

$$\|g'(x)\| = \left\|1 + \left(2x - \frac{2i}{x}\right) e^{\frac{i}{x^2}}\right\| \geq \left\|\left(2x - \frac{2i}{x}\right) e^{\frac{i}{x^2}}\right\| - 1 = \left\|2x - \frac{2i}{x}\right\| \underbrace{\left|e^{\frac{i}{x^2}}\right|}_{=1} - 1$$
$$= \left\|2x - \frac{2i}{x}\right\| - 1 = \left\|\frac{2x^2 - 2i}{x}\right\| - 1 \overset{\|2x^2-2i\| \geq \|2i\| = 2}{\geq} \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}, \quad x \in (0,1).$$

Logo

$$0 \leq \left\|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right\| \overset{f'(x)=1}{=} \frac{1}{\|g'(x)\|} \leq \frac{x}{2-x}$$

implicando que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$

Portanto, comparando com (6.33)*, segue que* **não** *vale a regra de L'Hospital neste caso.*

Como vimos no Exemplo (a) acima **não** vale, em geral, o Teorema do valor médio para funções vetoriais.

Porém temos um resultado que pode ser bastante útil que pode em algumas situações substituir o Teorema do valor médio usual, a saber:

Teorema 6.7.1 *(Desigualdade do Valor Médio) Suponhamos que* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *é contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* (a, b).

Então existe $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \left\|f'(c)\right\| (b - a).$$

Demonstração:

Se

$$f(b) = f(a)$$

nada temos a fazer.

Se

$$f(b) \neq f(a)$$

consideremos

$$z_o \doteq f(b) - f(a) \neq \vec{O} \in \mathbb{R}^k \tag{6.34}$$

e definamos a função $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(t) \doteq z_o \bullet f(t), \quad t \in [a, b],$$

onde $\bullet$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^k$.

Logo a função ϕ será contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

Além disso

$$\phi'(t) = z_o \bullet f'(t), \quad t \in (a, b).$$

Logo podemos aplicar o Teorema do valor médio para ϕ (pois ela é uma função de uma variável real a valores reais) e assim podemos encontrar $c \in (a, b)$ de modo que

$$\phi(b) - \phi(a) = \phi'(c)(b - a) = \left[z_o \bullet f'(c)\right] (b - a). \tag{6.35}$$

Mas

$$\phi(b) - \phi(a) = z_o \bullet f(b) - z_o \bullet f(a) = z_o \bullet [f(b) - f(a)] \overset{(6.34)}{=} z_o \bullet z_o = \|z_o\|^2,$$

logo, de (6.35), segue que

$$\left[z_o \bullet f'(c)\right] (b - a) = \|z_o\|^2. \tag{6.36}$$

Assim, da desigualde de Cauchy-Schwarz, segue que:

$$\|z_o\|^2 \overset{(6.36)}{=} \left|\left[z_o \bullet f'(c)\right] (b - a)\right| = \left|z_o \bullet f'(c)\right| (b - a)$$
$$\overset{\text{Des. Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left[\|z_o\| \, \|f'(c)\|\right] (b - a).$$

Como

$$\|z_o\| \overset{(6.34)}{=} \|f(b) - f(a)\| > 0,$$

dividindo-se ambos os membros da desigualdade acima por $\|z_o\| > 0$, obteremos

$$\|z_o\| \leq \|f'(c)\| (b - a),$$

e de (6.34), teremos

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \left\|f'(c)\right\| (b - a),$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

6.8 Bibliografia

A bibliografia básica do curso será:

1. **Rudin, W.** - *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.
2. **Bartle, R.G.** - *Elementos de Análise Real*, RJ, Editora Campus, 1983.
3. **Figueiredo, D.G.** - *Análise I*, RJ, LTC, 1996.
4. **Lang, S.** - *Analysis*, Addison-Weslwy, Reading, 1968.
5. **Lima, E.L.** -*Curso de Análise*, Vol. I, Projeto Euclides, IMPA, RJ, 2002.

Índice Remissivo