Notas de Aula de SMA308 - Análise 2

Wagner Vieira Leite Nunes
Departamento de Matemática
ICMC - USP

9 de abril de 2015

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O objetivo destas notas é ser um texto de apoio para a disciplina SMA308 - Análise II, que trata, em uma primeira parte, de conceitos relacionados com a integral de Riemann e Riemann-Stieltjes de funções de uma variável real a valores reais ou a valores vetoriais, propriedades das mesmas, relações entre estas e aplicações.

Em uma segunda etapa, serão estudados tópicos relacionados com sequência e séries de funções; estudo da convergência pontual ou uniforme, propriedades e aplicações.

Em uma terceira etapa trataremos da continuidade, diferenciabilidade de funções de várias variáveis reais a valores reais ou vetoriais, propriedades e aplicações.

Finalizando com enunciaremos, provaremos e aplicaremos os Teoremas da função implícita e da função inversa para funções de várias variáveis reais, a valores reais ou vetoriais.

Iniciaremos fixando a notação dos elementos que serão utilizados ao longo das notas.

Notação 1.0.1

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} \doteq \{1\,,2\,,3\,,\cdots\} && \textit{(conjunto dos números naturais)}\\
&\mathbb{Z} \doteq \{\cdots\,,3\,,-2\,,-1\,,0\,,1\,,2\,,3\,,\cdots\} && \textit{(conjunto dos números inteiros)}\\
&\mathbb{Q} \doteq \left\{\frac{p}{q}\,;\, p\,,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\} && \textit{(conjunto dos números racionais)}\\
&\mathbb{I} \doteq \left\{x \neq \frac{p}{q}\,;\ \textit{para todo}\ \ p\,,q \in \mathbb{Z}\,,\ q \neq 0\right\} && \textit{(conjunto dos números irracionais)}\\
&\mathbb{R} \doteq \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} && \textit{(conjunto dos números reais)}
\end{aligned}$$

Capítulo 2

A Integral de Riemann-Stieltjes

Neste capítulo introduziremos a integral de Riemann-Stieltjes de uma função definida em um intervalo fechado e limitado, a valores reais.

Para isto relembraremos o conceito de supremo e ínfimo em $\mathbb{R}$ e algumas propriedades relacionadas com estes conceitos.

2.1 Supremo e ínfimo de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Começaremos pelos importantes conceitos estudados no curso de Análise I: supremo de ínfimo de "certos" subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Definição 2.1.1 *Diremos que o subconjunto* $E \subseteq \mathbb{R}$ *é* **limitado superiormente** *em* $\mathbb{R}$, *se existir* $\beta \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$e \leq \beta\,, \quad \textit{para cada} \quad e \in E\,.$$

Neste caso, o número real $\underline{\beta}$ *será dito* **limitante superior do conjunto** E.

De modo semelhante, diremos que o subconjunto $F \subseteq \mathbb{R}$ *é* **limitado inferiormente** *em* $\mathbb{R}$, *se existir* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\alpha \leq f\,, \quad \textit{para cada} \quad f \in F\,.$$

Neste caso, o número real $\underline{\alpha}$ *será dito* **limitante inferior do conjunto** F .

Diremos que o subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ *é* **limitado** *em* $\mathbb{R}$, *se for limitado superiormente e inferiormente, isto é, se existirem* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\alpha \leq a \leq \beta\,, \quad \textit{para cada} \quad a \in A\,.$$

Notemos que

Proposição 2.1.1 *Seja* $E \subseteq \mathbb{R}$.

O conjunto $\underline{E}$ *será limitado em* $\mathbb{R}$ *se, e somente se, existe* $\gamma \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$-\gamma \leq e \leq \gamma\,, \quad \textit{para cada} \quad e \in E\,.$$

<u>**Demonstração:**</u>

Foi vista no curso de Análise I e será deixada como exercício para o leitor.

□

Temos os:

Exemplo 2.1.1 *Seja*

$$E \doteq [2, \infty) \subseteq \mathbb{R}.$$

Então o conjunto $\underline{E}$ *é limitado inferiormente em* $\mathbb{R}$.

<u>**Resolução:**</u>

De fato, pois qualquer

$$\alpha \in (-\infty, 2]$$

será um limitante inferior do conjunto $\underline{E}$, mas <u>**não**</u> é limitado superiormente em $\mathbb{R}$.

□

Exemplo 2.1.2 *Seja*

$$E \doteq \left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Então o conjunto $\underline{E}$ *é limitado superiormente.*

<u>**Resolução:**</u>

De fato, pois qualquer

$$\beta \in \left[\sqrt{2}, \infty\right)$$

é um limitante superior do conjunto $\underline{E}$, mas <u>**não**</u> é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$.

□

Exemplo 2.1.3 *Seja*

$$E \doteq \left(-1, \sqrt{2}\right) \subseteq \mathbb{R}.$$

Então o conjunto $\underline{E}$ *é limitado em* $\mathbb{R}$.

<u>**Resolução:**</u>

De fato, o conjunto $\underline{E}$ é limitado superiormente, pois qualquer

$$\beta \in \left[\sqrt{2}, \infty\right)$$

erá um limitante superior do conjunto E e é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$, pois qualquer

$$\alpha \in (-\infty, -1]$$

será um limitante inferior do conjunto E.

□

Com isto podemos introduzir a:

Definição 2.1.2 *Seja* $E \subseteq \mathbb{R}$ *um conjunto não vazio e limitado superiormente em* $\mathbb{R}$.

Suponhamos que exista $\alpha \in \mathbb{R}$, *que têm as seguintes propriedades:*

1. *$\underline{\alpha}$ é um limitante superior do conjunto* E*;*

2. *se $\gamma \in \mathbb{R}$ satisfaz*
$$\gamma < \alpha\,,$$
então $\underline{\gamma}$ não será limitante superior do conjunto E.

Neste caso diremos que o número real $\underline{\alpha}$ é o <u>**supremo do conjunto** E</u>*, e será denotado por $\underline{\sup(E)}$, isto é,*
$$\sup(E) \doteq \alpha\,.$$

Observação 2.1.1 *A definição acima nos diz que o número real $\underline{\alpha}$ é o menor limitante superior do conjunto $\underline{E}$ (se existir).*

De modo semelhante temos a:

Definição 2.1.3 *Seja $F \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Suponhamos que exista $\beta \in \mathbb{R}$, que têm as seguintes propriedades:*

1. *$\underline{\beta}$ é um limitante inferior do conjunto $\underline{F}$;*

2. *se $\gamma \in \mathbb{R}$ satisfaz*
$$\gamma > \beta\,,$$
então $\underline{\gamma}$ não será limitante inferior do conjunto $\underline{F}$.

Neste caso diremos que o número real $\underline{\beta}$ é o <u>**ínfimo do conjunto** F</u>*, e será denotado por $\underline{\inf(F)}$, isto é,*
$$\inf(F) \doteq \beta\,.$$

Observação 2.1.2 *A definição acima nos diz que o número real $\underline{\beta}$ é o maior limitante inferior do conjunto $\underline{F}$ (se existir).*

Exemplo 2.1.4 *Seja*
$$E \doteq (0\,,1] \subseteq \mathbb{R}\,.$$

Então
$$\sup(E) = 1 \quad e \quad \inf(E) = 0\,.$$

<u>**Resolução:**</u>

Notemos que o conjunto formado por todos os limitantes superiores do conjunto $\underline{E}$ será o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$:
$$LS \doteq [1\,,\infty)\,.$$

Assim o menor limitante superior será $\underline{1}$, ou seja,
$$\sup(E) = 1\,.$$

Por outro lado, o conjunto formado por todos os limitantes inferiores do conjunto $\underline{E}$ será o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$LI \doteq (-\infty, 0] .$$

Assim o maior limitante inferior será $\underline{0}$, ou seja,

$$\inf(E) = 0 .$$

Temos um modo equivalente a Definição de supremo (isto é, a Definição (2.1.2)) que é dada pelo:

Observação 2.1.3 *Notemos que, no Exemplo acima, tem-se:*

$$\sup(E) \in E \quad e \quad \inf(E) \notin E .$$

Temos agora o seguinte importante resultado:

Teorema 2.1.1 *Seja $E \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado superiormente em $\mathbb{R}$. Então*

$$\alpha = \sup(E)$$

se, e somente se,

1' $\underline{\alpha}$ é limitante superior do conjunto $\underline{E}$;

2' dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $e \in E$, de modo que

$$\alpha - \varepsilon < e \leq \alpha .$$

Demonstração:

Foi vista no curso de Análise I e será deixada como exercício para o leitor.

□

Temos um resultado análogo ao acima para o ínfimo, a saber:

Teorema 2.1.2 *Seja $F \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Então*

$$\beta = \inf(F)$$

se, e somente se,

1' $\underline{\beta}$ é limitante inferior do conjunto F;

2' dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $f \in F$, de modo que

$$\beta \leq f < \beta + \varepsilon .$$

Demonstração:

Foi vista no curso de Análise I e será deixada como exercício para o leitor.

□

Antes de prosseguir temos o seguinte resultado sobre a existência do supremo (respectivamente, ínifimo) de um conjunto limitado superiormente (respectivamente, inferiormente):

Teorema 2.1.3 *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente (respectivamente, inferiormente) em $\mathbb{R}$, possui supremo (respectivamente, ínfimo) em $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [1] página 8.

$\square$

Como consequência temos o

Corolário 2.1.1 *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$, não vazio e limitado em $\mathbb{R}$, possui supremo e ínfimo em $\mathbb{R}$.*

Para finalizar esta seção temos o seguinte resultado importante relacionado com a operações de supremo e ínfimo de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são limitados superiomente e inferiormente, respectivamente:

Teorema 2.1.4 *Sejam $c \in \mathbb{R}$, $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos, não vazios e limitados superiormente em $\mathbb{R}$ e $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos, não vazios e limitados inferiormente em $\mathbb{R}$. Então:*

1. *Se $E_1 \subseteq E_2$, então*
$$\sup(E_1) \leq \sup(E_2)\,.$$

2. *Se $F_1 \subseteq F_2$, então*
$$\inf(F_1) \geq \inf(F_2)\,.$$

3. *o conjunto*
$$E_1 + E_2 \doteq \{e_1 + e_2\,;\, e_1 \in E_1 \ \text{e} \ e_2 \in E_2\}$$
é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ e
$$\sup(E_1) + \sup(E_2) \geq \sup(E_1 + E_2).$$

4. *o conjunto $F_1 + F_2$ é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$ e*
$$\inf(F_1) + \inf(F_2) \leq \inf(F_1 + F_2)\,.$$

5. *Se $E_1, E_2 \subseteq [0, \infty)$, então o conjunto*
$$E_1\, E_2 \doteq \{e_1\, e_2\,;\, e_1 \in E_1 \ \text{e} \ e_2 \in E_2\}$$
é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ e
$$\sup(E_1\, E_2) = \sup(E_1)\, \sup(E_2)\,.$$

6. *Se $F_1, F_2 \subseteq [0, \infty)$, então o conjunto $F_1\, F_2$ é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ e*
$$\inf(F_1\, F_2) = \inf(F_1)\, \inf(F_2)\,.$$

7. *Se* $c > 0$, *então o conjunto*

$$c\,E_1 \doteq \{c\,e_1\,;\,e_1 \in E_1\}$$

é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ *e*

$$\sup(c\,E_1) = c\,\sup(E_1)\,.$$

8. *Se* $c < 0$, *então o conjunto* $c\,E_1$ *é limitado inferiormente em* $\mathbb{R}$ *e*

$$\inf(c\,E_1) = c\,\sup(E_1)\,.$$

9. *Se* $c > 0$, *então o conjunto* $c\,F_1$ *é limitado inferiormente em* $\mathbb{R}$ *e*

$$\inf(c\,F_1) = c\,\inf(F_1)\,.$$

10. *Se* $c < 0$, *então o conjunto* $c\,F_1$ *é limitado superiormente em* $\mathbb{R}$ *e*

$$\sup(c\,F_1) = c\,\inf(F_1)\,.$$

Demonstração:

Foi vista no curso de Análise I e será deixada como exercício para o leitor.

□

Como consequência dos itens 8. e 10. da Proposição acima temos o:

Corolário 2.1.2 *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}$ *subconjunto não vazio e limitado em* $\mathbb{R}$. *Então o conjunto*

$$-A \doteq \{-a\,;\,a \in A\}$$

também é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ *e além disso*

$$\sup(-A) = -\inf(A) \quad e \quad \inf(-A) = -\sup(A)\,.$$

Demonstração:

A demonstração deste será deixada como exercício para o leitor.

□

2.2 A integral de Riemann-Stieltjes

Para introduzir a integral de Riemann-Sieltjes de uma função, a valores reais, limitada e definida em um intervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}$ precisaremos da:

Definição 2.2.1 *Consideremos* $[a\,,b] \subseteq \mathbb{R}$ *o intervalo limitado e fechado de* $\mathbb{R}$.

Sejam $x_o\,,x_1\,,\cdots\,,x_n \in [a\,,b]$ *tais que*

$$x_o \doteq a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \doteq b\,.$$

O conjunto

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o\,, x_1\,, \cdots, x_n\}$$

será dito **partição do intervalo** $[a\,,b]$.

Para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$, *denotaremos o comprimento do intervalo* $[x_{i-1}\,,x_i]$ *por:*

$$\Delta x_i \doteq x_i - x_{i-1}\,. \tag{2.1}$$

Temos também a

Definição 2.2.2 *Seja* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada.*

Dada uma partição

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o\,, x_1\,, \cdots, x_n\}$$

do intervalo $[a\,,b]$, *para cada* $i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$, *definamos*

$$M_i \doteq \sup_{x\in[x_{i-1}\,,x_i]} f(x)\,, \tag{2.2}$$

$$m_i \doteq \inf_{x\in[x_{i-1}\,,x_i]} f(x) \tag{2.3}$$

(como a função $\underline{f}$ *é limitada em* $[a\,,b]$ *segue que existem os supremos e ínfimos acima) e*

$$U(\mathcal{P}\,,f) \doteq \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i\,, \tag{2.4}$$

$$L(\mathcal{P}\,,f) \doteq \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i\,, \tag{2.5}$$

denominadas **soma superior, respectivamente, soma inferior,** *sobre a partição* $\underline{\mathcal{P}}$ *associada à função* $\underline{f}$.

Observação 2.2.1 *Notemos que:*

1. *Como*

   $$m_i \leq M_i\,, \qquad \textit{para cada} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}\,,$$

   segue que

   $$L\,(\mathcal{P}\,,f) \leq U(\mathcal{P}\,,f)\,. \tag{2.6}$$

2. *Denotemos por* $\underline{\mathfrak{P}}$, *a coleção formada por todas as partições do intervalo* $[a\,,b]$.

3. *Se*

   $$m \doteq \inf_{x\in[a\,,b]} f(x)\,, \tag{2.7}$$

então

$$\begin{aligned} m\,\underbrace{(b-a)}_{=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i} &= \sum_{i=1}^{n} m\,\Delta x_i \\ &\overset{m\leq m_i\leq M_i\,,\ \textit{em cada}\ [x_{i-1}\,,x_i]}{\leq} \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i \\ &\overset{(2.4)}{=} U(\mathcal{P},f)\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$m\,(b-a) \leq U(\mathcal{P},f)\,. \tag{2.8}$$

Logo, podemos concluir, que o subconjunto

$$\{U(\mathcal{P}\,,f)\,;\,\mathcal{P}\in\mathfrak{P}\}$$

é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$ *(pois, o número real* $m\,(b-a)$ *é um limitante inferior do conjunto acima).*

Logo o conjunto acima possui ínfimo em $\mathbb{R}$*, ou seja, existe*

$$\inf_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} U(\mathcal{P}\,,f)\in\mathbb{R}\,.$$

4. *Por outro lado, se*

$$M \doteq \sup_{x\in[a\,,b]} f(x) \tag{2.9}$$

então

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}\,,f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i \\ &\overset{m_i\leq M_i\,,\ \textit{em cada}\ [x_{i-1}\,,x_i]}{\leq} \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i \\ &\overset{M_i\leq M\,,\ \textit{para cada}\ i\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} M\,\Delta x_i \\ &= M\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i}_{=b-a} = M(b-a)\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$L(\mathcal{P},f) \leq M(b-a)\,. \tag{2.10}$$

Logo, podemos concluir, que o subconjunto

$$\{L(\mathcal{P}\,,f)\,;\,\mathcal{P}\in\mathfrak{P}\}$$

é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ (pois, o número real $M(b-a)$ é um limitante superior do conjunto acima).

Logo, o conjunto acima possui supremo em $\mathbb{R}$, ou seja, existe

$$\sup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} L(\mathcal{P}, f) \in \mathbb{R}.$$

Com isto podemos introduzir a:

Definição 2.2.3 *Na situação acima, definimos a* **integral superior de Riemann** *da função f no intervalo $[a,b]$, que será indicada por $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, com o sendo:*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \doteq \inf_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} U(\mathcal{P}, f) \tag{2.11}$$

e definimos a **integral inferior de Riemann** *da função f no intervalo $[a,b]$, que será indicada por $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, com o sendo:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \doteq \sup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} L(\mathcal{P}, f). \tag{2.12}$$

Se

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

diremos que a função f é **Riemann integrável em $[a,b]$** *e o valor comum acima, será dito* **integral de Riemann** *da função f no intervalo $[a,b]$ e será indicada por $\int_a^b f(x)\,dx$, ou seja,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx. \tag{2.13}$$

Denotaremos por

$$\mathfrak{R}([a,b]),$$

ou simplesmente por $\mathfrak{R}$ (omitindo o intervalo fechado e limitado $[a,b]$), o conjunto formado por todas as funções, a valores reais, que são Riemann integráveis no intervalo $[a,b]$.

Observação 2.2.2

Questão: se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função limitada então $f\in\mathfrak{R}([a,b])$?

A resposta a esta questão é negativa.

Para ver isto, notemos que a função $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) \doteq \begin{cases} 0, & \text{para} \quad x\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 1, & \text{para} \quad x\in\mathbb{I}\cap[0,1] \end{cases}$$

é uma função limitada no intervalo $[0\,,1]$*, mas* **não** *é uma função Riemann integrável em* $[0\,,1]$.

De fato, seja

$$\mathcal{P} \doteq \{0 = x_o\,, x_1\,, \cdots, x_n = 1\}$$

uma partição do intervalo $[0\,,1]$.

Com isto, teremos que

$$M_i \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}\,, x_i]} f(x) \overset{\mathbb{I}\cap[0,1]\neq\emptyset}{=} 1\,, \tag{2.14}$$

$$m_i \doteq \inf_{x \in [x_{i-1}\,, x_i]} f(x) \overset{\mathbb{Q}\cap[0,1]\neq\emptyset}{=} 0 \tag{2.15}$$

e assim

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f) &\doteq \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i \\ &\overset{(2.14)}{=} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1 - 0 = 1\,, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f) &\doteq \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i \\ &\overset{(2.15)}{=} \sum_{i=1}^{n} 0\,\Delta x_i = 0\,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Logo,

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \doteq \inf_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} U(\mathcal{P}, f) \overset{(2.16)}{=} 1 \tag{2.18}$$

e

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \doteq \sup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} L(\mathcal{P}, f) \overset{(2.17)}{=} 0\,. \tag{2.19}$$

Portanto

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \overset{(2.18)}{=} 1 \neq 0 \overset{(2.19)}{=} \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\,,$$

ou seja, a função $\underline{f}$ *não é Riemann integrável em* $[0\,,1]$.

Na verdade trataremos de situações mais gerais que a integral de Riemann em intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$, como veremos, a seguir.

Seja $\alpha : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente em $[a\,,b]$, isto é,

$$\alpha(x) \leq \alpha(y)\,, \quad \text{para} \quad x \leq y\,, \quad \text{com} \quad x, y \in [a\,,b]\,.$$

Observemos que, sendo a função $\underline{\alpha}$ monótona crescente, deveremos ter

$$-\infty < \alpha(a) \leq \alpha(x) \leq \alpha(b) < \infty\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,,$$

ou seja, a função $\underline{\alpha}$ será limitada em $[a\,,b]$.

Dada uma partição

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o\,,x_1\,,\cdots\,,x_n\}$$

do intervalo $[a\,,b]$, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, definamos

$$\Delta\alpha_i \doteq \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\,. \tag{2.20}$$

Notemos que, a função $\underline{\alpha}$, sendo monótona crescente, implicará em

$$\Delta\alpha_i \geq 0\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,.$$

Dada uma função limitada $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ definamos

$$U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \doteq \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta\alpha_i\,, \tag{2.21}$$

$$L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \doteq \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta\alpha_i\,, \tag{2.22}$$

onde, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, os números reais

$$M_i, m_i$$

são dados por (2.2) e (2.3), respectivamente.

Observação 2.2.3

1. *Notemos que, na situação acima, teremos:*

$$L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \leq U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha)\,, \tag{2.23}$$

$$m\,[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha)\,, \tag{2.24}$$

$$L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \leq M\,[\alpha(b) - \alpha(a)]\,, \tag{2.25}$$

onde $\underline{m}$ e $\underline{M}$, são dados por (2.7) e (2.9), respectivamente.

Estas desigualdades seguem do fato que, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, teremos:

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M$$

e que

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \alpha(b) - \alpha(a)\,.$$

2. *De (2.24) segue que o subconjunto*

$$\{U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha)\,;\,\mathcal{P} \in \mathfrak{P}\},$$

é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$, logo admite ínfimo em $\mathbb{R}$, isto é, existe

$$\inf_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \in \mathbb{R}\,. \tag{2.26}$$

3. *De modo semelhante, de (2.25) segue que o subconjunto*

$$\{L(\mathcal{P}, f, \alpha) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\} \tag{2.27}$$

é limitado superiormente em $\mathbb{R}$, logo admite supremo em $\mathbb{R}$, isto é, existe

$$\sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha) \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.2.4 *Na situação acima, (2.26) será denominado de* **integral superior de Riemann-Stieltjes** *da função $\underline{f}$ em $[a, b]$, relativamente à função $\underline{\alpha}$ e será denotada por $\overline{\int_a^b} f \, d\alpha$, ou seja,*

$$\overline{\int_a^b} f \, d\alpha \doteq \inf_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha). \tag{2.28}$$

De modo análogo, (2.27) será denominado **integral inferior de Riemann-Stieltjes** *da função $\underline{f}$ em $[a, b]$, relativamente à função $\underline{\alpha}$ e será denotada por $\underline{\int_a^b} f \, d\alpha$, ou seja,*

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha \doteq \sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha). \tag{2.29}$$

Se

$$\overline{\int_a^b} f \, d\alpha = \underline{\int_a^b} f \, d\alpha,$$

diremos que a função $\underline{f}$ é **Riemann-Stieltjes integrável** *em $[a, b]$, relativamente à função $\underline{\alpha}$ e o valor comum das integrais acima será denominado* **integral de Riemann -Stieltjes** *da função $\underline{f}$ em $[a, b]$, relativamente à função $\underline{\alpha}$ e indicada por $\int_a^b f \, d\alpha$, isto é,*

$$\int_a^b f \, d\alpha \doteq \overline{\int_a^b} f \, d\alpha = \underline{\int_a^b} f \, d\alpha. \tag{2.30}$$

Observação 2.2.4

1. *Também poderemos utilizar as seguintes notações, para as integrais de Riemann-Stieltjes:*

$$\overline{\int_a^b} f(x) \, d\alpha(x) \doteq \overline{\int_a^b} f \, d\alpha, \tag{2.31}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x) \, d\alpha(x) \doteq \underline{\int_a^b} f \, d\alpha, \tag{2.32}$$

$$\int_a^b f(x) \, d\alpha(x) \doteq \int_a^b f \, d\alpha. \tag{2.33}$$

2. *Denotaremos o conjunto formado por todas as funções a valores reais, limitadas definidas no intervalo* $[a\,,b]$ *que são Riemann-Stieltjes integráveis relativamente à função* $\underline{\alpha}$ *por*
$$\mathfrak{R}(\alpha)\,.$$

3. *Se* $\alpha : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *é dada por*
$$\alpha(x) \doteq x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,,$$
segue que a integral de Riemann-Stieltjes, relativamente à função $\underline{\alpha}$*, coincide com a integral de Riemann, ou seja,*
$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$
pois
$$\Delta\alpha_i = \Delta x_i\,.$$

4. *Notemos que a função* $\alpha : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *só precisa ser monótona crescente em* $[a\,,b]$*, para podermos definir a integral de Riemann-Stieltjes de uma função* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *limitada, relativamente à função* $\underline{\alpha}$*.*

5. *Vamos supor, daqui em diante, que*
$$\alpha(b) > \alpha(a)\,,$$
pois, caso contrário, a função $\underline{\alpha}$ *seria constante em* $[a\,,b]$ *e pouco serviria para o estudo da integral de Riemann-Stieltjes de uma função a valores reais, limitada e definida em um intervalo* $[a\,,b]$*.*

A seguir passaremos a investigar em que situações existe a integral de Riemann-Stieltjes, relativamente à função $\underline{\alpha}$, para uma função limitada, a valores reais $\underline{f}$, definida no intervalo $[a\,,b]$.

Para isto precisaremos da:

Definição 2.2.5 *Sejam* $\underline{\mathcal{P}}$ *e* $\underline{\mathcal{P}^*}$*, duas partições do intervalo* $[a\,,b]$ *(isto é,* $\mathcal{P}$*,* $\mathcal{P}^* \in \mathfrak{P}$*).*

Diremos que a partição $\underline{\mathcal{P}^*}$ *é um* **refinamento da partição** $\underline{\mathcal{P}}$*, se*
$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^*\,,$$
ou seja, todo ponto da partição $\underline{\mathcal{P}}$ *é um ponto da partição* $\underline{\mathcal{P}^*}$*.*

Observação 2.2.5 *Sejam* $\underline{\mathcal{P}_1}$ *e* $\underline{\mathcal{P}_2}$ *duas partições do intervalo* $[a\,,b]$ *(isto é,* $\mathcal{P}_1$*,* $\mathcal{P}_2 \in \mathfrak{P}$*).*

Definamos
$$\mathcal{P}^* \doteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2. \tag{2.34}$$

Então $\underline{\mathcal{P}^*}$ *será um refinamento de ambas as partições* $\underline{\mathcal{P}_1}$ *e* $\underline{\mathcal{P}_2}$*, e será denominada* **refinamento comum** *das partições* $\underline{\mathcal{P}_1}$ *e* $\underline{\mathcal{P}_2}$*.*

Com isto temos o:

Proposição 2.2.1 *Sejam* $\underline{\mathcal{P}}$ *e* $\underline{\mathcal{P}^*}$ *partições do intervalo* $[a\,,b]$ *onde a partição* $\underline{\mathcal{P}^*}$ *é um refinamento da partição* $\underline{\mathcal{P}}$ *do intervalo* $[a\,,b]$. *Então valem:*

$$L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \leq L(\mathcal{P}^*\,,f\,,\alpha) \tag{2.35}$$

$$U(\mathcal{P}^*\,,f\,,\alpha) \leq U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha)\,. \tag{2.36}$$

Demonstração:

Suponhamos que

$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_o\,, x_1\,, \cdots\,, x_{n-1}\,, x_n = b\}, \tag{2.37}$$

$$\mathcal{P}^* \doteq \{a = x_o^*\,, x_1^*\,, \cdots\,, x_{m-1}^*\,, x_m^* = b\}\,. \tag{2.38}$$

Notemos que se

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}\,,$$

nada teremos a fazer e, neste caso, as desigualdades (2.35) e (2.36) acima, serão igualdades.

Logo podemos supor que

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^* \quad \text{e existe} \quad x^* \in \mathcal{P}^* \setminus \mathcal{P}\,. \tag{2.39}$$

Consideremos, primeiramente, o caso (particular) que

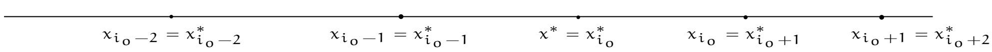
$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{x^*\}\,.$$

Logo, de (2.39), segue que existe $i_o \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$ tal que

$$x_{i_o-1} < x^* < x_{i_o}\,,$$

ou seja, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n+1\}$, teremos (veja a figura abaixo):

$$x_j^* = \begin{cases} x_j\,, & \text{para} \quad j \in \{0\,,1\,,\cdots\,,i_o-1\} \\ x^*\,, & \text{para} \quad j = i_o \\ x_{j-1}\,, & \text{para} \quad j \in \{i_o+1\,,i_o+2\,,\cdots\,,n+1\} \end{cases} \,. \tag{2.40}$$



Para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$, denotemos por

$$\Delta\alpha_j^* \doteq \alpha\left(x_j^*\right) - \alpha\left(x_{j-1}^*\right) \tag{2.41}$$
$$m_j^* \doteq \inf_{x \in \left[x_{j-1}^*, x_j^*\right]} f(x) \,. \tag{2.42}$$

Notemos que, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$, teremos

$$m_j^* = \begin{cases} m_j \,, & \text{se} \quad j \in \{1, \cdots, i_o - 1\} \\ \inf\limits_{x \in [x_{i_o-1}, x^*]} f(x) \,, & \text{se} \quad j = i_o \\ \inf\limits_{x \in [x^*, x_{i_o}]} f(x) \,, & \text{se} \quad j = i_o + 1 \\ m_{j-1} \,, & \text{se} \quad j \in \{i_o + 2, i_o + 3, \cdots, n+1\} \end{cases} . \tag{2.43}$$

e

$$\Delta\alpha_j^* = \begin{cases} \Delta\alpha_j \,, & \text{se} \quad j \in \{1, 2, \cdots, i_o - 1\} \quad \text{ou} \quad j \in \{i_o + 2, i_o + 3, \cdots, n\} \\ \alpha\left(x^*\right) - \alpha\left(x_{i_o-1}\right) \,, & \text{se} \quad j = i_o \\ \alpha\left(x_{i_o}\right) - \alpha\left(x^*\right) \,, & \text{se} \quad j = i_o + 1 \end{cases} . \tag{2.44}$$

Observemos também que (veja figura acima):

$$m_{i_o} = \inf_{x \in [x_{i_o-1}, x_{i_o}]} f(x) \overset{[x_{i_o-1}^*, x_{i_o}^*] \subseteq [x_{i_o-1}, x_{i_o}]}{\leq} \inf_{x \in \left[x_{i_o-1}^*, x_{i_o}^*\right]} f(x) \overset{(2.42)}{=} m_{i_o}^* \,, \tag{2.45}$$

$$m_{i_o} = \inf_{x \in [x_{i_o-1}, x_{i_o}]} f(x) \overset{[x_{i_o}^*, x_{i_o+1}^*] \subseteq [x_{i_o-1}, x_{i_o}]}{\leq} \inf_{x \in \left[x_{i_o}^*, x_{i_o+1}^*\right]} f(x) \overset{(2.42)}{=} m_{i_o+1}^* \,. \tag{2.46}$$

Logo

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{j=1}^{n+1} m_j^* \, \Delta\alpha_j^* - \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i \\ &= \sum_{j=1, j \neq i_o, i_o+1}^{n+1} \underbrace{m_j^*}_{\overset{(2.43)}{=} m_j \text{ ou } m_{j-1}} \Delta\alpha_j^* + m_{i_o}^* \Delta\alpha_{i_o}^* + m_{i_o+1}^* \, \Delta\alpha_{i_o+1}^* - \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i \\ &= m_{i_o}^* \, \Delta\alpha_{i_o}^* + m_{i_o+1}^* \, \Delta\alpha_{i_o+1}^* - m_{i_o} \, \Delta\alpha_{i_o} \\ &= m_{i_o}^* \, [\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_o-1})] + m_{i_o+1}^* \, [\alpha(x_{i_o}) - \alpha(x^*)] - m_{i_o} \, [\alpha(x_{i_o}) - \alpha(x_{i_o-1})] \\ &= \underbrace{[m_{i_o}^* - m_{i_o}]}_{\overset{(2.45)}{\geq} 0} \underbrace{[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_o-1})]}_{\overset{\alpha \text{ é mon. cresc. e } x^* \geq x_{i_o-1}}{\geq} 0} + \underbrace{[m_{i_o+1}^* - m_{i_o}]}_{\overset{(2.46)}{\geq} 0} \underbrace{[\alpha(x_{i_o}) - \alpha(x^*)]}_{\overset{\alpha \text{ é mon. cresc. e } x_{i_o} \geq x^*}{\geq} 0} \geq 0 \,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \geq 0,$$

completando a demonstração de (2.35).

Se a partição $\underline{\mathcal{P}^*}$ possui mais pontos (no máximo, será um número finito de pontos a mais que a partição $\underline{\mathcal{P}}$) repetimos o argumento acima um número finito de vezes para obter (2.35).

A demonstração da desigualdade (2.36) é análoga e sua elaboração será deixada como exercício para o leitor.

$\square$

Como consequência segue o:

Teorema 2.2.1 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada em* $[a, b]$*. Então*

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f \, d\alpha. \tag{2.47}$$

<u>Demonstração:</u>

Sejam $\underline{\mathcal{P}_1}$ e $\underline{\mathcal{P}_2}$ duas partições do intervalo $[a, b]$ e consideremos a partição $\underline{\mathcal{P}^*}$, o refinamento comum a estas duas partições, isto é,

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2.$$

Da Proposição (2.2.1) acima, segue que

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) &\overset{\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}^* \text{ e } (2.35)}{\leq} L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \overset{(2.23)}{\leq} U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \\ &\overset{\mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}^* \text{ e } (2.36)}{\leq} U(\mathcal{P}_2, f, \alpha), \end{aligned}$$

ou seja,

$$L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}_2, f, \alpha).$$

Portanto, o número real $U(\mathcal{P}_2, f, \alpha)$ é um limitante superior para o conjunto

$$\{L(\mathcal{P}_1, f, \alpha); \mathcal{P}_1 \in \mathfrak{P}\}.$$

Logo, existe $\sup\limits_{\mathcal{P}_1 \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}_1, f, \alpha)$ e, além disso, teremos:

$$\sup_{\mathcal{P}_1 \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}_2, f, \alpha).$$

Da desigualdade acima, segue que o número real $\sup\limits_{\mathcal{P}_1 \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}_1, f, \alpha)$ é um limitante inferior do conjunto

$$\{U(\mathcal{P}_2, f, \alpha); \mathcal{P}_2 \in \mathfrak{P}\}.$$

Logo, existe $\inf\limits_{\mathcal{P}_2 \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}_2, f, \alpha)$ e, além disso, teremos:

$$\underbrace{\sup_{\mathcal{P}_1 \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}_1, f, \alpha)}_{=\underline{\int_a^b} f \, d\alpha} \leq \underbrace{\inf_{\mathcal{P}_2 \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}_2, f, \alpha)}_{=\overline{\int_a^b} f \, d\alpha},$$

ou seja,

$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\,d\alpha\,,$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

Com este resultado podemos obter uma outra caracterização equivalente para os elementos de $\mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,,b]$, mais precisamente:

Corolário 2.2.1 *Seja* $f:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ *uma função limitada em* $[a\,,b]$.

$f\in\mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$ *se, e somente se, dado* $\varepsilon>0$, *existe uma partição* $\mathcal{P}\in\mathfrak{P}$ *tal que*

$$0\leq U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha)-L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha)<\varepsilon\,. \tag{2.48}$$

Demonstração:

Suponhamos que (2.48) ocorre e mostremos que $f\in\mathfrak{R}(\alpha)$.

Para isto, observemos que se $\mathcal{P}\in\mathfrak{P}$ então

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) &\leq \sup_{\mathcal{P}'\in\mathfrak{P}} L(\mathcal{P}'\,,f\,,\alpha)\\ &= \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \overset{(2.47)}{\leq} \overline{\int_a^b} f\,d\alpha\\ &= \inf_{\mathcal{P}'\in\mathfrak{P}} U(\mathcal{P}'\,,f\,,\alpha)\leq U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha)\,. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Logo, dado $\varepsilon>0$, por hipótese, existe uma partição $\mathcal{P}\in\mathfrak{P}$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \underline{\int_a^b} f\,d\alpha\\ &\overset{(2.49)}{\leq} U(\mathcal{P},f,\alpha)-L(\mathcal{P},f,\alpha) \overset{\text{Hipótese (2.48)}}{<} \varepsilon\,, \end{aligned} \tag{2.50}$$

ou seja,

$$0\leq \overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \underline{\int_a^b} f\,d\alpha<\varepsilon\,,$$

para todo $\varepsilon>0$, mostrando que

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \underline{\int_a^b} f\,d\alpha=0\,,\quad \text{ou seja,}\quad \overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \underline{\int_a^b} f\,d\alpha\,,$$

isto é, a função $\underline{f}$ é Riemann-Stieltjes integrável em $[a\,,b]$, relativamente à função $\underline{\alpha}$, ou ainda, $f\in\mathfrak{R}(\alpha)$.

Por outro lado, se $f\in\mathfrak{R}(\alpha)$, dado $\varepsilon>0$, das definições de supremo e ínfimo, segue que existem partições $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2\in\mathfrak{P}$ do intervalo $[a\,,b]$, tais que

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}_2\,,f\,,\alpha) &\overset{\text{Teor. (2.1.1)}}{<} \overline{\int_a^b} f\,d\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\\ &\overset{\overline{\int_a^b} f\,d\alpha=\int_a^b f\,d\alpha}{=} \int_a^b f\,d\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\,, \end{aligned}$$

e

$$L(\mathcal{P}_1\,, f\,, \alpha) \overset{\text{Teor. (2.1.2)}}{>} \underline{\int_a^b} f\,d\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\overset{\underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha}{=} \int_a^b f\,d\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

o que implicarão em:

$$0 \leq U(\mathcal{P}_2\,, f\,, \alpha) < \int_a^b f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{2.51}$$

$$0 \leq \int_a^b f\,d\alpha < \frac{\varepsilon}{2} + L(\mathcal{P}_1\,, f\,, \alpha)\,. \tag{2.52}$$

Consideremos a partição $\underline{\mathcal{P}}$ do intervalo $[a\,, b]$, que é o refinamento comum das partições $\underline{\mathcal{P}_1}$ e $\underline{\mathcal{P}_2}$, isto é,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2\,.$$

Com isto teremos:

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}\,, f\,, \alpha) &\overset{(2.36)}{\leq} U(\mathcal{P}_2\,, f\,, \alpha) \\ &\overset{(2.51)}{<} \int_a^b f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\overset{(2.52)}{<} \left[\frac{\varepsilon}{2} + L(\mathcal{P}_1\,, f\,, \alpha)\right] + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= L(\mathcal{P}_1\,, f\,, \alpha) + \varepsilon \\ &\overset{(2.35)}{\leq} L(\mathcal{P}\,, f\,, \alpha) + \varepsilon\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \varepsilon\,,$$

isto é, (2.48), completando a demonstração do resultado.

□

Temos alguns outros resultados semelhantes que são dados pelo:

Teorema 2.2.2 *Temos que:*

1. *Se (2.48) ocorrer para uma partição* $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ *do intervalo* $[a\,, b]$ *e, para* $\varepsilon > 0$, *então (2.48) também ocorrerá trocando-se a partição* $\underline{\mathcal{P}}$ *do intervalo* $[a\,, b]$, *por uma outra partição do intervalo* $[a\,, b]$, *que seja um refinamento da mesma (com o mesmo* $\varepsilon > 0$*).*

2. *Se (2.48) ocorrer para a partição*

$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_o, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$$

do intervalo $[a\,, b]$ *e, para cada* $i \in \{1\,, 2\,, \cdots, n\}$, *escolhermos*

$$s_i\,, t_i \in [x_{i-1}\,, x_i]\,,$$

então

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\, \Delta\alpha_i < \varepsilon\,. \tag{2.53}$$

3. *Se* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$, *a partição* $\underline{\mathcal{P}}$ *do intervalo* $[a\,,b]$ *é como no item acima e, para cada* $i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$, *escolhermos*

$$t_i \in [x_{i-1}\,,x_i]\,,$$

então teremos

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta\alpha_i - \int_a^b f\,d\alpha\right| < \varepsilon\,. \tag{2.54}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Suponhamos que vale (2.48) para a partição $\underline{\mathcal{P}}$ do intervalo $[a\,,b]$.

<u>De 1.</u>:

Se a partição $\underline{\mathcal{P}^*}$ do intervalo $[a\,,b]$ é um refinamento da partição $\underline{\mathcal{P}}$ então, de (2.35) e (2.36), segue que

$$U(\mathcal{P}^*\,,f\,,\alpha) \le U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \quad \text{e} \quad L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \le L(\mathcal{P}^*\,,f\,,\alpha)\,,$$

o que implicará em

$$U(\mathcal{P}^*\,,f\,,\alpha) - L(\mathcal{P}^*\,,f\,,\alpha) \le U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) - L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \overset{(2.48)}{<} \varepsilon\,,$$

completando a demonstração do item 1. .

<u>De 2.</u>:

Sabemos que, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$, escolhendo-se

$$s_i\,,t_i \in [x_{i-1}\,,x_i]\,,$$

teremos

$$f(s_i)\,,f(t_i) \in [m_i\,,M_i]\,,$$

o que implicará em

$$|f(s_i) - f(t_i)| \le M_i - m_i\,. \tag{2.55}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\,\Delta\alpha_i &\overset{(2.55)}{\le} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta\alpha_i \\
&\overset{(2.21)\text{ e }(2.22)}{=} U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) - L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \overset{(2.48)}{<} \varepsilon\,,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

completando a demonstração do item 2. .

<u>De 3.</u>:

Como $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$, do Corolário (2.2.1) segue que, dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a\,,b]$ tal que

$$U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) - L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.57}$$

Sabemos que, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, escolhendo-se

$$t_i \in [x_{i-1}\,,x_i]\,,$$

teremos

$$f(t_i) \in [m_i\,,M_i]\,,$$

o que implicará em

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P},f,\alpha) &\overset{(2.21)}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta\alpha_i \\ &\overset{m_i \le f(t_i)}{\le} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta\alpha_i \\ &\overset{f(t_i) \le M_i}{\le} \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta\alpha_i \\ &\overset{(2.22)}{=} U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \overset{(2.57)}{<} L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) + \frac{\varepsilon}{2}\,, \end{aligned}$$

em particular,

$$L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} < L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \le \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta\alpha_i < L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

ou seja,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta\alpha_i - L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.58}$$

Por outro lado, da definição

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} &< L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \\ &\le \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \\ &= \int_a^b f\,d\alpha = \overline{\int_a^b} f\,d\alpha \\ &\le U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \overset{(2.57)}{<} L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) + \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{aligned}$$

em particular, teremos

$$L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} < L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \le \int_a^b f\,d\alpha < L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

ou seja,

$$\left| L(\mathcal{P}, f, \alpha) - \int_a^b f \, d\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2} . \tag{2.59}$$

Portanto

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta\alpha_i - \int_a^b f \, d\alpha \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta\alpha_i - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \right|}_{\overset{(2.58)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left| L(\mathcal{P}, f, \alpha) - \int_a^b f \, d\alpha \right|}_{\overset{(2.59)}{<} \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon , \tag{2.60}$$

completando a demonstração do item 3. .

□

Com estes resultados podemos demonstrar o:

Teorema 2.2.3 $C([a, b]; \mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$.

Demonstração:

Lembremos que estamos supondo que

$$\alpha(b) > \alpha(a) .$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $\eta > 0$, de modo que

$$\eta < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)} . \tag{2.61}$$

Como $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$, segue que a função $\underline{f}$ será uniformemente continua em $[a, b]$ (pois $[a, b]$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$).

Logo, existirá $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, de modo que

$$\text{para} \quad x, t \in [a, b], \quad \text{satisfazendo} \quad |x - t| < \delta, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - f(t)| < \eta . \tag{2.62}$$

Consideremos uma partição

$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_o, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

do intervalo $[a, b]$ de modo que, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, tenhamos

$$\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}| < \delta . \tag{2.63}$$

Notemos que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, como a função $\underline{f}$ é contínua em $[a, b]$ (em particular, em $[x_{i-1}, x_i]$ que é compacto em $\mathbb{R}$), segue que existem $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f(t_i) = m_i \quad \text{e} \quad f(s_i) = M_i , \tag{2.64}$$

ou seja, a função $\underline{f}$ assume o máximo e o mínimo absolutos em $[x_{i-1}, x_i]$, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Com isto teremos

$$|M_i - m_i| = |f(s_i) - f(t_i)| \underset{|s_i - t_i| \leq |x_i - x_{i-1}| \overset{(2.63)}{<} \delta \text{ e } (2.62)}{<} \eta \,. \tag{2.65}$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(M_i - m_i)}_{=|M_i - m_i| \overset{(2.65)}{<} \eta} \Delta\alpha_i \\ &< \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i \\ &= \underbrace{\eta}_{\overset{(2.61)}{<} \frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)}} [\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon \,. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Portanto, pelo Corolário (2.2.1), segue que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,,b]$, completando a demonstração do resultado.

□

Temos também o:

Teorema 2.2.4 *Suponhamos que a função* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *é monótona em* $[a\,,b]$ *e que a função* $\alpha : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *seja monótona crescente e contínua em* $[a\,,b]$.

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$, *em* $[a\,,b]$.

Demonstração:

Lembremos, uma vez mais, que estamos supondo

$$\alpha(b) > \alpha(a) \,.$$

Vamos exibir a demonstração para o caso em que a função $\underline{f}$ ser monótona crescente em $[a\,,b]$.

A demonstração para o caso em que a função $\underline{f}$ é monótona decrescente em $[a\,,b]$ é semelhante e será deixada como exercício para o leitor.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$f(a) < f(b) \,,$$

caso contrário a função $\underline{f}$ será constante (logo contínua em $[a\,,b]$) e, do Teorema (2.2.3) acima, teremos que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,,b]$.

Dado $\varepsilon > 0$, para cada $N \in \mathbb{N}$, escolhamos uma partição

$$\mathcal{P}_N \doteq \{a = x_o\,, x_1\,, \cdots, x_N = b\}$$

do intervalo $[a\,,b]$, de modo que

$$[f(b)-f(a)]\,\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{\varepsilon}<N\,, \tag{2.67}$$

$$\Delta\alpha_i=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})\leq\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N}\,. \tag{2.68}$$

Podemos realmente escolher tal partição pois, (2.67) é sempre possível de se obter.
Por outro lado, para se obter (2.68), teremos um pouco mais de trabalho.
Para isto, observemos que

$$\underbrace{\alpha(x_o)}_{=\alpha(a)}<\underbrace{\alpha(x_o)}_{=\alpha(a)}+\underbrace{\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N}}_{\overset{\alpha(b)>\alpha(a)}{>}0}\,. \tag{2.69}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
& (N-1)\,\alpha(a)\overset{\alpha(a)<\alpha(b)}{<}(N-1)\,\alpha(b)\,,\\
\text{ou seja,}\quad & N\,\alpha(a)-\alpha(a)<N\,\alpha(b)-\alpha(b)\,,\\
\text{ou ainda,}\quad & N\,\alpha(a)+\alpha(b)-\alpha(a)<N\,\alpha(b)\,,\\
\text{ou seja,}\quad & \underbrace{\alpha(a)}_{\alpha(x_o)}+\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N}<\alpha(b)\,,
\end{aligned}$$

que, juntamente com (2.69), implicará que

$$\alpha(a)<\alpha(x_o)+\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N}<\alpha(b)\,. \tag{2.70}$$

Como a função $\underline{\alpha}$ é contínua em $[a\,,b]$, segue do Teorema do Valor Intermediário, que existe um menor $x_1\in[a\,,b]$ (por que existe um menor?), tal que

$$\alpha(x_1)=\underbrace{\alpha(a)}_{=\alpha(x_o)}+\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N}\,. \tag{2.71}$$

Como a função $\underline{\alpha}$ é monótona crescente em $[a\,,b]$ e (2.70), segue que

$$a=x_o<x_1<b\,.$$

Se

$$\alpha(x_1)+\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N}\geq\alpha(b)\,, \tag{2.72}$$

consideraremos

$$x_2\doteq b$$

e com isto, de (2.72), teremos

$$\begin{aligned}
\alpha(x_2)-\alpha(x_1)&=\alpha(b)-\alpha(x_1)\\
&\overset{(2.72)}{\leq}\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N}\,,
\end{aligned}$$

e concluímos a construção da partição $\underline{\mathcal{P}}$ do intervalo $[a\,,b]$, satisfazendo (2.68).

Caso contrário, isto é, se

$$\alpha(x_1) < \alpha(x_1) + \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N} < \alpha(b)\,, \tag{2.73}$$

como a função $\underline{\alpha}$ é contínua em $[x_1\,,b]$, segue, novamente, do Teorema do Valor Intermediário, que existe um menor $x_2 \in [x_1\,,b]$, tal que

$$\alpha(x_2) = \alpha(x_1) + \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N}\,.$$

Como a função $\underline{\alpha}$ é monótona crescente em $[a\,,b]$, segue que

$$a = x_o < x_1 < x_2 \leq b\,.$$

Com isto teremos

$$\alpha(x_o) < \alpha(x_1) < \alpha(x_2) \leq \alpha(b)\,. \tag{2.74}$$

Repetindo o argumento acima um número finito de vezes (devido a compacidade do intervalo $[a\,,b]$ e o fato que $\dfrac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N} > 0$), obteremos a partição $\mathcal{P}$ satisfazendo (2.68).

Caso o número de pontos $\underline{x_i}$, obtidos na construção acima, seja menor que o valor $\underline{N}$, acrescentamos mais pontos (um número finito) até obtermos uma partição do intervalo $[a\,,b]$, que tenha $\underline{N}$ pontos e que, por construção, ainda irá satisfazer (2.67) e (2.68).

Como a função $\underline{f}$ é monótona crescente segue que, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}$, teremos

$$m_i = f(x_{i-1}) \quad \text{e} \quad M_i = f(x_i)\,. \tag{2.75}$$

Deste modo, segue que

$$\begin{aligned}
U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) - L(\mathcal{P},f,\alpha) &= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{M_i}_{\overset{(2.75)}{=} f(x_i)} \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{N} \underbrace{m_i}_{\overset{(2.75)}{=} f(x_{i-1})} \Delta\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \underbrace{\Delta\alpha_i}_{\overset{(2.68)}{\leq} \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N}} \\
&\leq \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} [f(x_i) - f(x_{i-1})]}_{= f(b) - f(a)} \\
&\leq [f(b) - f(a)] \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N} \overset{(2.67)}{<} \varepsilon\,.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Portanto, pelo Corolário (2.2.1), segue que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,,b]$, completando a demonstração do resultado.

□

Um outro resultado interessante é dado pelo:

Teorema 2.2.5 *Sejam* $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada em* $[a\,,b]$, *que possui somente um número finito de pontos de descontinuidade e* $\alpha : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função monótona crescente que é contínua em todos os pontos onde a função* $\underline{f}$ *é descontínua.*

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$.

Demonstração:

Seja $E \subseteq [a\,,b]$ o conjunto formado por todos os pontos onde a função $\underline{f}$ é descontínua (o conjunto $\underline{E}$ é finito, por hipótese).

Como a função $\underline{f}$ é limitada em $[a\,,b]$, segue que existe

$$M \doteq \sup_{x\in[a\,,b]} |f(x)|\,.$$

Dado $\varepsilon > 0$ como, por hipótese, $\underline{E}$ é um conjunto finito e a função $\underline{\alpha}$ é contínua em cada um dos pontos de $\underline{E}$, podemos cobrir o conjunto $\underline{E}$, com um número finito de intervalos fechados, limitados e disjuntos, que denotaremos por

$$[u_j\,,v_j] \subseteq [a\,,b]\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}\,,$$

de modo que

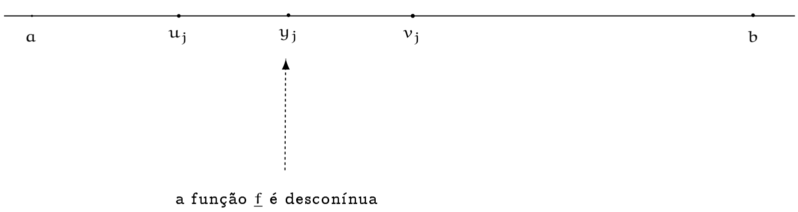
$$\sum_{j=1}^{m} [\alpha(v_j) - \alpha(u_j)] < \frac{\varepsilon}{4\,M}\,. \tag{2.77}$$

De fato, suponhamos que (veja a figura abaixo)

$$E = \{y_1\,,y_2\,,\cdots\,,y_m\} \subseteq [a\,,b]\,,$$

com

$$y_{j-1} < y_j\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}\,.$$



Vamos considerar o caso em que $m \geq 2$ e

$$a < y_1 < y_m < b\,.$$

Os outros caso serão deixados como exercício para o leitor (a saber, $m = 1$ ou $y_1 = a$ e/ou $y_m = b$).

Observemos que, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}$, como a função $\underline{\alpha}$ é contínua em cada $\underline{y_j}$, existe $\delta_j > 0$, tal que

$$\text{para} \quad |x - y_j| < \delta_j\,, \quad \text{deveremos ter} \quad |\alpha(x) - \alpha(y_j)| < \frac{\varepsilon}{8\,M\,m}\,. \tag{2.78}$$

Seja

$$\delta \doteq \min\left\{\frac{\delta_j}{2}\,,\,\frac{y_j - y_{j-1}}{4}\,,\,\frac{y_1 - a}{2}\,,\,\frac{b - y_m}{2}\,;\ \text{para } j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}\right\} > 0\,. \tag{2.79}$$

Para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}$, consideremos

$$u_j \doteq y_j - \delta \qquad \text{e} \qquad v_j \doteq y_j + \delta\,. \tag{2.80}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} y_1 + 2\,\delta &\overset{\delta \overset{(2.79)}{\leq} \frac{y_2 - y_1}{4}}{\leq} y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2} \\ &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &\overset{y_1 < y_2}{<} \frac{y_2 + y_2}{2} = y_2\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} v_1 &\overset{(2.80)}{=} y_1 + \delta \\ &\overset{+\delta-\delta}{=} \underbrace{(y_1 + 2\,\delta)}_{<y_2} - \delta \\ &< y_2 - \delta \overset{(2.80)}{=} u_2\,. \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos mostrar (por indução sobre $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m-1\}$) que, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m-1\}$, teremos

$$v_j < u_{j+1}\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad a < u_j \overset{(2.80)}{<} v_j < u_{j+1} \overset{(2.80)}{<} v_{j+1} < b\,. \tag{2.81}$$

Deixaremos a demonstraçao deste fato como exercício para o leitor.

Logo, das desigualdades (2.81) acima, para $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m-1\}$, segue que os intervalos

$$[u_j\,,v_j] \subseteq [a\,,b]$$

são disjuntos.

Notemos também que, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}$, teremos:

$$|v_j - y_j| = |u_j - y_j| \overset{(2.80)}{=} \delta \overset{(2.79)}{\leq} \frac{\delta_j}{2} < \delta_j\,,$$

o que implicará, por (2.78), que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} [\alpha\,(v_j) - \alpha\,(u_j)] &= \sum_{j=1}^{m} \underbrace{[\alpha(v_j) - \alpha(y_j)]}_{\overset{\alpha \text{ é mon. crescente}}{=} |\alpha(v_j) - \alpha(y_j)| \overset{(2.78)}{<} \frac{\varepsilon}{8Mm}} + \sum_{j=1}^{m} \underbrace{[\alpha(y_j) - \alpha(u_j)]}_{\overset{\alpha \text{ é mon. crescente}}{=} |\alpha(y_j) - \alpha(u_j)| \overset{(2.78)}{<} \frac{\varepsilon}{8\,M\,m}} \\ &< m\,\frac{\varepsilon}{8\,M\,m} + m\,\frac{\varepsilon}{8\,M\,m} \\ &= \frac{\varepsilon}{4\,M}\,, \end{aligned} \tag{2.82}$$

mostrando (2.77).

Observemos também que, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, por construção, temos que:

$$y_j \overset{(2.80)}{\in} (u_j, v_j)$$

e assim teremos:

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} (u_j, v_j)$$

Além disso, temos que o conjunto

$$K \doteq [a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^{m} (u_j, v_j) \tag{2.83}$$

será um subconjunto compacto de $[a, b]$.

Dessas duas observações, segue que a restrição da função $\underline{f}$ ao conjunto $\underline{K}$ será uniformemente contínua em $\underline{K}$, ou seja, existirá $\eta > 0$, de modo que, para $s, t \in K$, satisfazendo:

$$|s - t| < \eta, \quad \text{deveremos ter} \quad |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2\,[\alpha(b) - \alpha(a)]}. \tag{2.84}$$

Vale observar que **não** temos, necessariamente:

$$v_j - u_{j+1} < \delta .$$

Devido a este fato, consideraremos uma partição

$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_o, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

construída da seguinte forma (veja a figura abaixo):

(i) para cada $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, deveremos ter

$$u_j \in \mathcal{P};$$

(ii) para cada $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, deveremos ter

$$v_j \in \mathcal{P};$$

(iii) para cada $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, deveremos ter

$$(u_j, v_j) \cap \mathcal{P} = \emptyset;$$

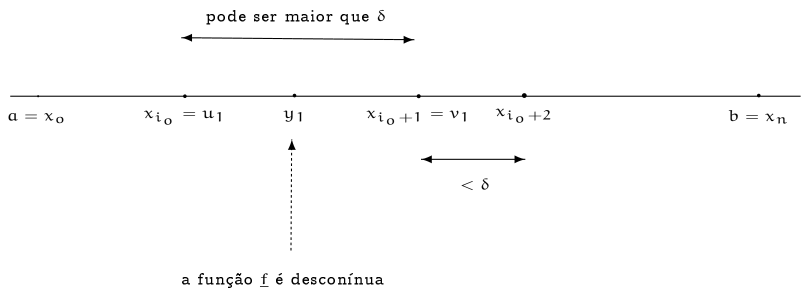
(iv) se

$$x_{i-1} \neq u_j, \quad \text{para todo} \quad j \in \{1, 2, \cdots, m\},$$

deveremos ter

$$\Delta x_i < \eta .$$

A figura abaixo ilustra a situação acima:



Denotemos por

$$I \doteq \{i \in \{1, 2, \cdots, n\};\ x_{i-1} \neq u_j\,,\ \text{para todo } j \in \{1, 2, \cdots, m\}\}\,.$$

Notemos que, se $i \in I$, devido a (i), (ii) e (iii), deveremos ter (veja (2.83)):

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq K\,. \tag{2.85}$$

Para $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, denotemos por:

$$m_i \doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad M_i \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\,.$$

Como, para cada $i \in I$, a função $\underline{f}$ é contínua em $[x_{i-1}, x_i]$ (pois $[x_{i-1}, x_i] \subseteq K$, por (2.83)), segue que existem $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tais que

$$f(t_i) = m_i \quad \text{e} \quad f(s_i) = M_i\,. \tag{2.86}$$

Observemos que, para cada $i \in I$, segue que

$$\begin{aligned} f(t_i) &= \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \\ &\leq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(s_i)\,. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Por outro lado, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, teremos:

$$\begin{aligned} M_i - m_i &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \\ &\leq 2 \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = 2M\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$M_i - m_i \leq 2M\,. \tag{2.88}$$

Notemos também que, para $i \in I$, da continuidade uniforme da função $\underline{f}$ em $[x_{i-1}, x_i] \subseteq K$ (isto é, de (2.84)), do fato que

$$s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{e} \quad \Delta x_i < \eta \tag{2.89}$$

(ver (iv)), segue que

$$
\begin{aligned}
M_i - m_i &= f(s_i) - f(t_i) \\
&\overset{f(s_i) \overset{(2.87)}{\geq} f(t_i)}{=} |f(s_i) - f(t_i)| \\
&\overset{(2.85),(2.89) \text{ e } (2.84)}{<} \frac{\varepsilon}{2\,[\alpha(b) - \alpha(a)]} \,.
\end{aligned} \tag{2.90}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \Delta\alpha_i \\
&= \sum_{i \in \{1,\cdots,m\} \setminus I} \underbrace{(M_i - m_i)}_{\overset{(2.88)}{\leq} 2M} \Delta\alpha_i + \sum_{i \in I} \underbrace{(M_i - m_i)}_{\overset{(2.90)}{<} \frac{\varepsilon}{2\,[\alpha(b)-\alpha(a)]}} \Delta\alpha_i \\
&\leq 2\,M \sum_{i \in \{1,\cdots,m\} \setminus I} \underbrace{\Delta\alpha_i}_{=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})} + \frac{\varepsilon}{2\,[\alpha(b) - \alpha(a)]} \sum_{i \in I} \Delta\alpha_i \\
&\leq 2\,M \sum_{i \in \{1,\cdots,m\} \setminus I} [\,\underbrace{\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})}_{\overset{x_{i-1}=u_{j_i} \text{ e } x_i = v_{j_i}}{=} \alpha(v_{j_i}) - \alpha(u_{j_i})}\,] + \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i}_{=\alpha(b)-\alpha(a)} \\
&\leq 2\,M \underbrace{\sum_{j \in \{1,\cdots,m\}} [\alpha(v_j) - \alpha(u_j)]}_{\overset{(2.77)}{<} \frac{\varepsilon}{4M}} + \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i}_{=\alpha(b)-\alpha(a)} \\
&< 2\,M \frac{\varepsilon}{4\,M} + \frac{\varepsilon}{2\,[\alpha(b) - \alpha(a)]} [\alpha(b) - \alpha(a)] \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.
\end{aligned} \tag{2.91}
$$

Portanto, pelo Corolário (2.2.1), segue que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 2.2.6 *Como consequência do Teorema (2.2.5) acima, temos que toda função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que é seccionalmente contínua em $[a, b]$, pertencerá a $\mathfrak{R}$ em $[a, b]$.*

De fato, pois neste caso temos que a função $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ será dada por

$$
\alpha(x) \doteq x \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b] \,,
$$

que é uma função monótona crescente e contínua em $[a, b]$, em particular, será contínua nos pontos de descontinuidade da função $\underline{f}$ em $[a, b]$ (que são em número finito, pois a função $\underline{f}$ é seccionalmente contínua em $[a, b]$).

Temos também o:

Teorema 2.2.6 *Suponhamos que* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$, $m\,,M \in \mathbb{R}$ *são tais que*

$$m \leq f(x) \leq M\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,,$$

e a função $\phi : [m\,,M] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[m\,,M]$.

Consideremos $h : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$h(x) \doteq (\phi \circ f)(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,.$$

Então $h \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$.

<u>**Demonstração:**</u>

Se a função $\underline{\phi}$ for identidamente nula, nada teremos a fazer.

Logo podemos supor, sem perda de generalidade, que a função $\underline{\phi}$ não é identicamente nula em $[m\,,M]$.

Dado $\varepsilon > 0$, como a função $\underline{\phi}$ é contínua em $[m\,,M]$, que é um subconjunto compacto em $\mathbb{R}$, segue que ela será uma função limitada e uniformemente contínua em $[m\,,M]$, ou seja, existirá

$$K \doteq \sup_{y \in [m\,,M]} |\phi(y)| > 0 \tag{2.92}$$

e exitirá $\delta > 0$, que podemos supor satisfazer,

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1}\,, \tag{2.93}$$

de modo que, para $s\,,t \in [m\,,M]$ satisfazendo:

$$|s - t| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |\phi(s) - \phi(t)| < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1}\,. \tag{2.94}$$

Como $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,,b]$, existirá uma partição

$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_o\,, x_1\,, \cdots, x_{n-1}\,, x_n = b\}\,,$$

de modo que

$$U(\mathcal{P}\,, f\,, \alpha) - L(\mathcal{P}\,, f\,, \alpha) < \frac{\delta^2}{2\,K}\,. \tag{2.95}$$

Para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$, denotemos por:

$$m_i \doteq \inf_{x \in [x_{i-1}\,,x_i]} f(x) \qquad \text{e} \qquad M_i \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}\,,x_i]} f(x)\,,$$

$$m_i^* \doteq \inf_{x \in [x_{i-1}\,,x_i]} h(x) \qquad \text{e} \qquad M_i^* \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}\,,x_i]} h(x)\,,$$

$$A \doteq \{i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}\,;\ 0 \leq M_i - m_i < \delta\}\,, \tag{2.96}$$

$$B \doteq \{i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}\,;\ M_i - m_i \geq \delta\}\,. \tag{2.97}$$

Observemos que

$$A \cap B = \emptyset\,.$$

Notemos que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots n\}$, teremos:

$$\begin{aligned} M_i^* &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x) \\ &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \phi[f(x)] \\ &\overset{m_i \leq f(x) \leq M_i, \text{ para } x \in [x_{i-1}, x_i]}{\leq} \sup_{y \in [m_i, M_i]} \phi(y) \end{aligned} \tag{2.98}$$

$$\begin{aligned} m_i^* &= \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x) \\ &= \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \phi[f(x)] \\ &\overset{m_i \leq f(x) \leq M_i, \text{ para } x \in [x_{i-1}, x_i]}{\geq} \inf_{y \in [m_i, M_i]} \phi(y) . \end{aligned} \tag{2.99}$$

Logo, segue que, para cada $i \in A$, teremos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq M_i^* - m_i^* \\ &\overset{(2.98),(2.99)}{\leq} \sup_{y \in [m_i, M_i]} \phi(y) - \inf_{y \in [m_i, M_i]} \phi(y) . \end{aligned}$$

Notemos também que, para cada $y, z \in [m_i, M_i]$, como

$$0 \leq M_i - m_i < \delta$$

(pois $i \in A$, veja (2.96)), e, de (2.94), temos que

$$|y - z| < \delta , \quad \text{que implicará em} \quad -\frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1} < \phi(y) - \phi(z) < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1} .$$

Tomando-se o supremo, para $y \in [m_i, M_i]$, e o ínfimo, para $z \in [m_i, M_i]$, na desigualdade acima, obteremos (veja (2.98) e (2.99)))

$$0 \leq M_i^* - m_i^* \leq \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1} , \tag{2.100}$$

para cada $i \in A$.

Por outro lado, para $i \in B$, teremos

$$\begin{aligned} 0 &\leq M_i^* - m_i^* \leq |M_i^*| + |m_i^*| \\ &\overset{(2.92)}{\leq} K + K = 2K . \end{aligned} \tag{2.101}$$

Logo, para $i \in B$, teremos:

$$\begin{aligned} \delta \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i &\overset{i \in B \overset{(2.97)}{\Rightarrow} \delta \leq M_i - m_i}{\leq} \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \, \Delta\alpha_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i \\ &= U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \overset{(2.95)}{<} \frac{\delta^2}{2K} , \end{aligned}$$

e como $\delta > 0$, teremos:

$$\sum_{i \in B} \Delta\alpha_i < \frac{\delta}{2\,K}. \tag{2.102}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
U(\mathcal{P}, h, \alpha) - L(\mathcal{P}, h, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} M_i^* \,\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i^* \Delta\,\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i^* - m_i^*)\,\Delta\alpha_i \\
&= \sum_{i \in A} \underbrace{(M_i^* - m_i^*)}_{\overset{(2.100)}{<} \frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)+1}} \Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} \underbrace{(M_i^* - m_i^*)}_{\overset{(2.101)}{\leq} 2\,K} \Delta\alpha_i \\
&< \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1} \underbrace{\sum_{i \in A} \Delta\alpha_i}_{\leq \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i} + 2\,K \underbrace{\sum_{i \in B} \Delta\alpha_i}_{\overset{(2.102)}{<} \frac{\delta}{2\,K}} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i}_{=\alpha(b)-\alpha(a)} + 2\,K \frac{\delta}{2\,K} \\
&= \frac{\varepsilon\,[\alpha(b) - \alpha(a)]}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1} + \underbrace{\delta}_{\overset{(2.93)}{<} \frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)+1}} \\
&= \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Corolário (2.2.1), segue que $h \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,, b]$, completando a demonstração do resultado.

□

2.3 Propriedades da integral de Riemann-Stieltjes

Temos as seguintes propriedades básicas da integral de Riemann-Stieltjes, em um intervalo fechado e limitado $[a\,, b]$ de $\mathbb{R}$:

Proposição 2.3.1 *Sejam* $f\,, g : [a\,, b] \to \mathbb{R}$ *funções limitadas em* $[a\,, b]$, $\alpha\,, \beta : [a\,, b] \to \mathbb{R}$ *funções monótonas crescentes em* $[a\,, b]$*. Com isto teremos:*

1. *Se* $f\,, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a\,, b]$ *então* $(f + g) \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a\,, b]$.

   Além disso,

$$\int_a^b (f + g)\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b g\,d\alpha\,.$$

2. *Se* $c \in \mathbb{R}$ *e* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a\,, b]$ *então* $(c\,f) \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a\,, b]$.

Além disso

$$\int_a^b (c\,f)\,d\alpha = c\int_a^b f\,d\alpha\,.$$

3. $f\,,g \in \Re(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$ *é tal que*

$$f(x) \leq g(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,,$$

então

$$\int_a^b f\,d\alpha \leq \int_a^b g\,d\alpha\,.$$

4. *Se* $f \in \Re(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$ *e* $c \in (a\,,b)$ *então* $f \in \Re(\alpha)$ *em* $[a\,,c]$ *e em* $[c\,,b]$.

   Além disso

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha\,.$$

5. *Se* $f \in \Re(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$ *e*

$$|f(x)| \leq M\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,,$$

então

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \leq M\,[\alpha(b) - \alpha(a)]\,.$$

6. *Se* $f \in \Re(\alpha)$ *e* $f \in \Re(\beta)$ *em* $[a\,,b]$ *então* $f \in \Re(\alpha+\beta)$ *em* $[a\,,b]$.

   Além disso

$$\int_a^b f\,d(\alpha+\beta) = \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b f\,d\beta\,.$$

7. *Se* $f \in \Re(\alpha)$ *e* $c > 0$ *então* $f \in \Re(c\,\alpha)$ *em* $[a\,,b]$.

   Além disso

$$\int_a^b f\,d(c\,\alpha) = c\int_a^b f\,d\alpha\,.$$

Demonstração:

De 1.:

Se

$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_o\,, x_1\,, \cdots\,, x_{n-1}\,, x_n = b\}$$

é uma partição do intervalo $[a\,,b]$, denotaremos por:

$$m_i \doteq \inf_{x\in[x_{i-1}\,,x_i]} f(x)\,, \qquad M_i \doteq \sup_{x\in[x_{i-1}\,,x_i]} f(x)\,,$$

$$n_i \doteq \inf_{x\in[x_{i-1}\,,x_i]} g(x)\,, \qquad N_i \doteq \sup_{x\in[x_{i-1}\,,x_i]} g(x)\,,$$

$$m_i^* \doteq \inf_{x\in[x_{i-1}\,,x_i]} (f+g)(x)\,, \qquad M_i^* \doteq \sup_{x\in[x_{i-1}\,,x_i]} (f+g)(x)\,.$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
m_i^* &= \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f+g)(x) \\
&\geq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) + \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) \\
&= m_i + n_i , \qquad (2.103) \\
M_i^* &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f+g)(x) \\
&\leq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) + \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) \\
&= M_i + N_i . \qquad (2.104)
\end{aligned}
$$

Observemos que, dado $\varepsilon > 0$, como $f , g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a , b]$, pelo Corolário (2.2.1), segue que existem partições $\mathcal{P}_f , \mathcal{P}_g \in \mathfrak{P}$, do intervalo $[a , b]$, tais que

$$
\begin{aligned}
U(\mathcal{P}_f , f , \alpha) - L(\mathcal{P}_f , f , \alpha) &< \frac{\varepsilon}{2} , \qquad (2.105) \\
U(\mathcal{P}_g , g , \alpha) - L(\mathcal{P}_g , g , \alpha) &< \frac{\varepsilon}{2} . \qquad (2.106)
\end{aligned}
$$

Observemos também, que:

$$
\begin{aligned}
L(\mathcal{P} , f , \alpha) + L(\mathcal{P} , g , \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} n_i \, \Delta\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (m_i + n_i) \, \Delta\alpha_i \\
&\overset{(2.103)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} m_i^* \, \Delta\alpha_i \\
&= L(\mathcal{P} , f + g , \alpha) , \qquad (2.107) \\
U(\mathcal{P} , f , \alpha) + U(\mathcal{P} , g , \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} N_i \, \Delta\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i + N_i) \, \Delta\alpha_i \\
&\overset{(2.104)}{\geq} \sum_{i=1}^{n} M_i^* \, \Delta\alpha_i \\
&= U(\mathcal{P} , f + g , \alpha) \qquad (2.108)
\end{aligned}
$$

Denotemos por $\underline{\mathcal{P}^*}$, o refinamento comum das partições $\underline{\mathcal{P}_f}$ e $\underline{\mathcal{P}_g}$, do intervalo $[a , b]$, ou seja,

$$
\mathcal{P}^* \doteq \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g .
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
U(\mathcal{P}^*, f+g, \alpha) - L(\mathcal{P}^*, f+g, \alpha) &\overset{(2.108) \text{ e } (2.107)}{\leq} [U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) + U(\mathcal{P}^*, g, \alpha)] \\
&\quad - [L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) + L(\mathcal{P}^*, g, \alpha)] \\
&= [U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}^*, f, \alpha)] + [U(\mathcal{P}^*, g, \alpha) - L(\mathcal{P}^*, g, \alpha)] \\
&\overset{\mathcal{P}_f, \mathcal{P}_g \subseteq \mathcal{P}^*, (2.35) \text{ e } (2.36)}{\leq} \underbrace{[U(\mathcal{P}_f, f, \alpha) - L(\mathcal{P}_f, f, \alpha)]}_{\overset{(2.105)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{[U(\mathcal{P}_g, g, \alpha) - L(\mathcal{P}_g, g, \alpha)]}_{\overset{(2.106)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Corolário (2.2.1), segue que

$$(f+g) \in \mathfrak{R}(\alpha) \quad \text{em} \quad [a, b] .$$

Notemos também que, como $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, segue da definição de ínfimo que, podemos encontrar duas partições $\mathcal{P}_f, \mathcal{P}_g \in \mathfrak{P}$ tais que

$$U(\mathcal{P}_f, f, \alpha) < \underbrace{\int_a^b f \, d\alpha}_{= \inf_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha)} + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.109}$$

$$U(\mathcal{P}_g, g, \alpha) < \underbrace{\int_a^b g \, d\alpha}_{= \inf_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}, g, \alpha)} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.110}$$

Considerando o refinamento comum a estas duas partições, isto é,

$$\mathcal{P}^* \doteq \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g ,$$

teremos

$$
\begin{aligned}
U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) &\overset{\mathcal{P}_f \subseteq \mathcal{P}^* \text{ e } (2.36)}{\leq} U(\mathcal{P}_f, f, \alpha) \\
&\overset{(2.109)}{<} \int_a^b f \, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, && (2.111) \\
U(\mathcal{P}^*, g, \alpha) &\overset{\mathcal{P}_g \subseteq \mathcal{P}^* \text{ e } (2.36)}{\leq} U(\mathcal{P}_g, g, \alpha) \\
&\overset{(2.110)}{<} \int_a^b g \, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}. && (2.112)
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\int_a^b (f+g) \, d\alpha &\leq U(\mathcal{P}^*, f+g, \alpha) \\
&\overset{(2.108)}{\leq} U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) + U(\mathcal{P}^*, g, \alpha) \\
&\overset{(2.111) \text{ e } (2.112)}{\leq} \left(\int_a^b f \, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) + \left(\int_a^b g \, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
&= \int_a^b f \, d\alpha + \int_a^b g \, d\alpha + \varepsilon ,
\end{aligned}
$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Assim teremos:

$$\int_a^b (f+g)\,d\alpha \le \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b g\,d\alpha\,. \tag{2.113}$$

Por outro lado, como $f\,,g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,,b]$, segue da definição de supremo que, podemos encontrar duas partições $\mathcal{P}_f\,,\mathcal{P}_g \in \mathfrak{P}$ tais que

$$L(P_f\,,f\,,\alpha) > \underbrace{\int_a^b f\,d\alpha}_{=\sup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} L(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha)} -\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad L(P_g\,,g\,,\alpha) > \underbrace{\int_a^b g\,d\alpha}_{=\sup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} L(\mathcal{P}\,,g\,,\alpha)} -\frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.114}$$

Considerando o refinamento comum a estas duas partições, isto é,

$$\mathcal{P}^* \doteq \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g\,,$$

teremos

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}^*\,,f\,,\alpha) &\overset{(2.35)}{\ge} L(P_f\,,f\,,\alpha) \\ &\overset{(2.114)}{>} \int_a^b f\,d\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\,, \end{aligned} \tag{2.115}$$

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}^*\,,g\,,\alpha) &\overset{(2.35)}{\ge} L(P_g, g, \alpha) \\ &\overset{(2.114)}{>} \int_a^b g\,d\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{aligned} \tag{2.116}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_a^b (f+g)\,d\alpha &\ge L(\mathcal{P}^*\,,(f+g)\,,\alpha) \\ &\overset{(2.107)}{\ge} L(\mathcal{P}^*\,,f\,,\alpha) + L(\mathcal{P}^*\,,g\,,\alpha) \\ &\overset{(2.115)\text{ e }(2.116)}{>} \left(\int_a^b f\,d\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\int_a^b g\,d\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b g\,d\alpha - \varepsilon\,. \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Assim, segue que

$$\int_a^b (f+g)\,d\alpha \ge \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b g\,d\alpha\,. \tag{2.117}$$

Portanto, de (2.113) e (2.117), segue que

$$\int_a^b (f+g)\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b g\,d\alpha\,,$$

completando a demonstração do item 1. .

Deixaremos a elaboração das demonstrações dos itens 2., 3., 4., 5., 6. e 7., como exercício para o leitor.

□

Como consequência temos o:

Corolário 2.3.1 *Se* $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *então:*

1. $(f\,g) \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$.
2. $|f| \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$.

   Além disso, teremos

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \leq \int_a^b |f|\,d\alpha\,. \tag{2.118}$$

Demonstração:

De 1.:

Consideremos $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$\phi(t) \doteq t^2\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Como a função ϕ é contínua em $\mathbb{R}$ e $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ segue, do Teorema (2.2.6), que a função $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq \underbrace{(\phi \circ f)(x)}_{=f^2(x)}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a, b]\,,$$

pertencerá a $\mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, ou seja,

$$f^2 \in \mathfrak{R}(\alpha) \quad \text{em} \quad [a, b]\,. \tag{2.119}$$

Observemos também, que

$$f\,g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]. \tag{2.120}$$

Como $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, segue da Proposição (2.3.1) itens 1. e 2., que

$$(f+g)\,, (f-g) \in \mathfrak{R}(\alpha) \quad \text{em} \quad [a, b]\,.$$

Logo, de (2.119), segue que

$$(f+g)^2\,, (f-g)^2 \in \mathfrak{R}(\alpha) \quad \text{em} \quad [a, b]\,.$$

e assim, de (2.120) e da Proposição (2.3.1) itens 1. e 2., teremos que

$$f\,g \in \mathfrak{R}(\alpha) \quad \text{em} \quad [a, b]\,,$$

completando a demonstração do item 1. .

De 2.:

Consideremos $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$\phi(t) \doteq |t|\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Como a função $\underline{\phi}$ é contínua em $\mathbb{R}$ e $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,,b]$ segue, do Teorema (2.2.6), que a função $h : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq \underbrace{(\phi \circ f)(x)}_{=|f(x)|}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,,$$

pertencerá a $\mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,,b]$, ou seja,

$$|f| \in \mathfrak{R}(\alpha) \quad \text{em} \quad [a\,,b]\,.$$

Além disso, se considerarmos

$$c = 1 \quad \text{ou} \quad c = -1\,,$$

de modo que

$$c \int_a^b f \, d\alpha \geq 0\,,$$

segue que

$$\left| \int_a^b f \, d\alpha \right| = c \int_a^b f \, d\alpha \overset{\text{Prop. (2.3.1) item 2.}}{=} \int_a^b (c\,f) \, d\alpha$$
$$\overset{c\,f \leq |f| \text{ e Prop. (2.3.1) item 3.}}{\leq} \int_a^b |f| \, d\alpha\,,$$

completando a demonstração do item 2. e do resultado.

□

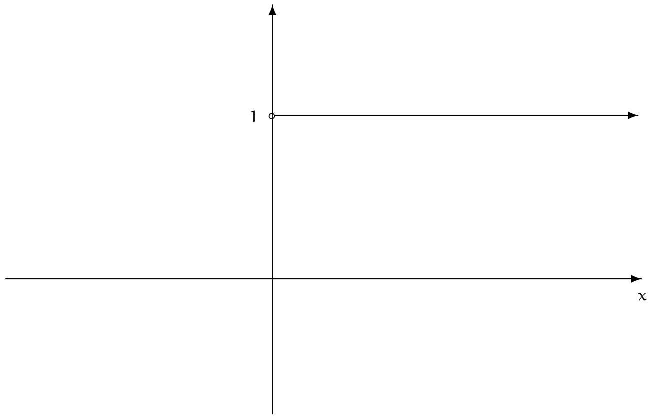
A seguir consideraremos um exemplo importante, a saber:

Definição 2.3.1 *A função* $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$I(x) \doteq \begin{cases} 0\,, & \textit{para cada} \quad x \in (-\infty\,,0] \\ 1\,, & \textit{para cada} \quad x \in (0\,,\infty) \end{cases}\,,$$

será denominada **<u>função degrau unitário</u>**.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{I}$ *é dada pela figura abaixo.*



Com isto temos a

Proposição 2.3.2 *Sejam* $s \in (a\,,b)$ *e* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada em* $[a\,,b]$ *e contínua em* $\underline{s}$.

Consideremos a função $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\alpha(x) \doteq I(x-s)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{2.121}$$

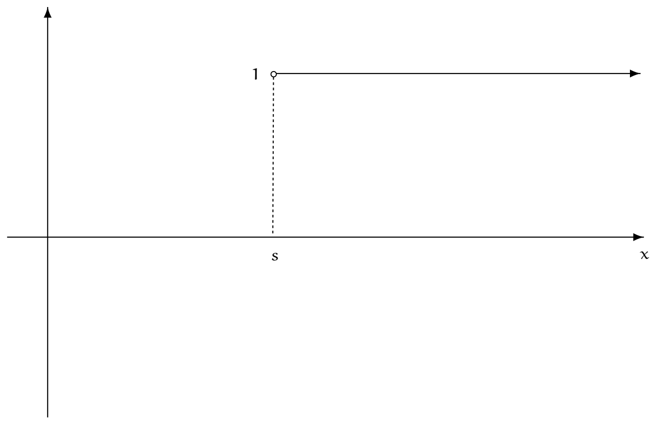
onde a função $\underline{I}$ *é a função degrau unitário.*

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$ *e*

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(s)\,. \tag{2.122}$$

Demonstração:

A figura abaixo nos fornece a representação geométrica do gráfico da função $\underline{\alpha}$:



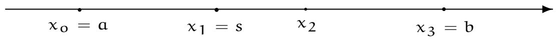
Observemos que a função $\underline{\alpha}$ é monótona crescente em $\mathbb{R}$, em particular em $[a\,,b]$.

Consideremos

$$\mathcal{P}_o \doteq \{a = x_o\,, x_1\,, x_2\,, x_3 = b\}\,,$$

a seguinte partição do intervalo $[a\,,b]$:

$$x_o \doteq a\,, \quad x_1 \doteq s\,, \quad x_3 \doteq b \quad \text{e} \quad x_2 \in (x_1\,, x_3) = (s\,, b)\,.$$



Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, definamos

$$m_i \doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad M_i \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Com isto teremos:

$$\begin{aligned}
U(\mathcal{P}_o, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^{3} M_i \, \Delta\alpha_i \\
&= M_1 [\alpha(\underbrace{x_1}_{=s}) - \alpha(\underbrace{x_o}_{=a})] + M_2 [\alpha(x_2) - \alpha(\underbrace{x_1}_{=s})] + M_3 [\alpha(\underbrace{x_3}_{=b}) - \alpha(x_2)] \\
&= M_1 [\underbrace{\alpha(s)}_{\overset{(2.121)}{=} 0} - \underbrace{\alpha(a)}_{\overset{(2.121)}{=} 0}] + M_2 [\underbrace{\alpha(x_2)}_{\overset{(2.121)}{=} 1} - \underbrace{\alpha(s)}_{\overset{(2.121)}{=} 0}] + M_3 [\underbrace{\alpha(b)}_{\overset{(2.121)}{=} 1} - \underbrace{\alpha(x_2)}_{\overset{(2.121)}{=} 1}] \\
&= M_2 = \sup_{x \in [x_1, x_2]} f(x). \qquad (2.123)
\end{aligned}$$

De modo semelhante, teremos:

$$\begin{aligned}
L(\mathcal{P}_o, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^{3} m_i \, \Delta\alpha_i \\
&= m_1 [\alpha(\underbrace{x_1}_{=s}) - \alpha(\underbrace{x_o}_{=a})] + m_2 [\alpha(x_2) - \alpha(\underbrace{x_1}_{=s})] + m_3 [\alpha(\underbrace{x_3}_{=b}) - \alpha(x_2)] \\
&= m_1 [\underbrace{\alpha(s)}_{\overset{(2.121)}{=} 0} - \underbrace{\alpha(a)}_{\overset{(2.121)}{=} 0}] + m_2 [\underbrace{\alpha(x_2)}_{\overset{(2.121)}{=} 1} - \underbrace{\alpha(s)}_{\overset{(2.121)}{=} 0}] + m_3 [\underbrace{\alpha(b)}_{\overset{(2.121)}{=} 1} - \underbrace{\alpha(x_2)}_{\overset{(2.121)}{=} 1}] \\
&= m_2 = \inf_{x \in [x_1, x_2]} f(x). \qquad (2.124)
\end{aligned}$$

Notemos que, como a função $\underline{f}$ é contínua em $\underline{s}$, quando

$$x_2 \to s = x_1,$$

segue que

$$M_2 = \sup_{x \in \underbrace{[x_1, x_2]}_{=[s, x_2]}} f(x) \quad \text{e} \quad m_2 = \inf_{x \in \underbrace{[x_1, x_2]}_{=[s, x_2]}} f(x) \to f(s). \qquad (2.125)$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo

$$
\begin{aligned}
m_2 = \underbrace{L(\mathcal{P}_o\,,f\,,\alpha)}_{\overset{(2.124)}{=} m_2}
&\leq \underbrace{\sup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} L(P\,,f\,,\alpha)}_{=\underline{\int_a^b} f\,d\alpha} \\
&\overset{(2.23)}{\leq} \underbrace{\inf_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} U(P\,,f\,,\alpha)}_{=\overline{\int_a^b} f\,d\alpha} \\
&\leq \underbrace{U(\mathcal{P}_o\,,f\,,\alpha)}_{\overset{(2.123)}{=} M_2} = M_2\,,
\end{aligned}
\tag{2.126}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
\inf_{x\in \underbrace{[x_1\,,x_2]}_{=[s\,,x_2]}} f(x) = m_2
&\leq \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \\
&\overset{(2.126)}{\leq} \overline{\int_a^b} f\,d\alpha \\
&\overset{(2.126)}{\leq} M_2 = \sup_{x\in \underbrace{[x_1\,,x_2]}_{=[s\,,x_2]}} f(x)\,,
\end{aligned}
\tag{2.127}
$$

para cada

$$x_2 \in (x_1\,,x_3) = (s\,,b)\,.$$

Fazendo

$$x_2 \to s^+\,,$$

isto é, considerando partições

$$\mathcal{P} = \{x_o = a\,,x_1 = s\,,x_2\,,\cdots\,,x_n = b\}\,,$$

de modo que $x_2 \to s^+$, nas desigualdades (2.127) e utilizando (2.125), obteremos

$$f(s) \leq \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\,d\alpha \leq f(s)\,,$$

assim,

$$f(s) = \underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \overline{\int_a^b} f\,d\alpha\,,$$

mostrando que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,,b]$ e que vale a identidade (2.122), completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o

Corolário 2.3.2 *Sejam* $c_n \in [0\,,\infty)$ *e* $s_n \in (a\,,b)$*, para cada* $n \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}$*, satisfazendo*

$$s_n < s_{n+1}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}\,.$$

Suponhamos que a função $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$\alpha(x) \doteq \sum_{n=1}^{N} c_n\, I(x - s_n)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{2.128}$$

e que a função $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* s_n*, para cada* $n \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}$.

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$ *e além disso*

$$\int_a^b f\, d\alpha = \sum_{n=1}^{N} c_n\, f(s_n)\,. \tag{2.129}$$

Demonstração:

Observemos que a função $\underline{\alpha}$ é monótona crescente em $\mathbb{R}$, pois se

$$x_1 \leq x_2$$

teremos, para cada $n \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}$ fixado, que

$$I(x_1 - s_n) \leq I(x_2 - s_n)\,,$$

logo

$$\begin{aligned} \alpha(x_1) &= \sum_{n=1}^{N} c_n\, I(x_1 - s_n) \\ &\overset{0 \leq c_n}{\leq} \sum_{n=1}^{N} c_n\, I(x_2 - s_n) \\ &= \alpha(x_2)\,. \end{aligned}$$

Logo, para completar a demonstração basta aplicar a Proposição (2.3.1) itens 1. e 2. e a Proposição (2.3.2) acima, a cada uma das parcelas e assim teremos que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,,b]$.

Por fim, notemos que se, para cada $n \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}$, definirmos a função $\alpha_n : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ por

$$\alpha_n(x) \doteq I(x - s_n)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,,$$

segue que

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f\left(\sum_{n=1}^{N} c_n\,d\alpha_n\right) \overset{\text{Prop. (2.3.1) itens 1., 2. e 6.}}{=} \sum_{n=1}^{N} c_n \underbrace{\int_a^b f\,d\alpha_n}_{\overset{(2.122)}{=} f(s_n)}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} c_n\,f(s_n)\,, \tag{2.130}$$

completando a demonstração do resultado.

□

Podemos estender esse resultado, como afirma a:

Proposição 2.3.3 *Seja que* $c_n \in [0\,,\infty)$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, tal que a série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

é convergente em $\mathbb{R}$ *e a sequência de números reais*

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

é uma sequência monótona crescente de pontos distintos em $(a\,,b)$*.*

Consideremos $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$\alpha(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,I(x - s_n)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{2.131}$$

Se $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a\,,b]$*, então* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$ *e além disso*

$$\int_a^b f\,d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,f(s_n)\,. \tag{2.132}$$

Demonstração:

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$f \neq 0\,,$$

caso contrário (isto é, se $f = 0$) o resultado vale trivialmente.

Notemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos

$$|c_n\,I(x - s_n)| \leq c_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

e como a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente em $\mathbb{R}$, segue que a função $\underline{\alpha}$ está bem definida em $\mathbb{R}$.

Na verdade, do Teste M de Weierstrass, segue que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \, I(x - s_n)$$

é converge uniformemente em $\mathbb{R}$ (este Teste será visto em um próximo capítulo).

Observemos que a função $\underline{\alpha}$ é monótona crescente em $\mathbb{R}$, pois se

$$x_1 \leq x_2 ,$$

teremos, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, que

$$I(x_1 - s_n) \leq I(x_2 - s_n) ,$$

logo

$$\begin{aligned} \alpha(x_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, I(x_1 - s_n) \\ &\overset{0 \leq c_n}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, I(x_2 - s_n) \\ &= \alpha(x_2) . \end{aligned}$$

Seja

$$M \doteq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \overset{f \text{ é cont. em}[a,b]}{=} \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \overset{f \not\equiv 0}{>} 0 . \tag{2.133}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente em $\mathbb{R}$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\sum_{n=N_o+1}^{\infty} c_n < \frac{\varepsilon}{M} . \tag{2.134}$$

Definamos as funções $\alpha_1 , \alpha_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por:

$$\alpha_1(x) \doteq \sum_{n=1}^{N_o} c_n \, I(x - s_n) \quad \text{e} \quad \alpha_2 \doteq \sum_{n=N_o+1}^{\infty} c_n \, I(x - s_n) , \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} . \tag{2.135}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \alpha(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{I(a - s_n)}_{=0, \text{ pois } a < s_n, \text{ para } n \in \mathbb{N}} = 0 , \\ \alpha(b) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{I(b - s_n)}_{=1, \text{ pois } s_n < b, \text{ para } n \in \mathbb{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n . \end{aligned} \tag{2.136}$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $[a , b]$ e as funções $\underline{\alpha_1}$ e $\underline{\alpha_2}$ são monótonas crescentes em $[a , b]$ segue, do Teorema (2.2.3), que

$$f \in \mathfrak{R}(\alpha_1) \cap \mathfrak{R}(\alpha_2) \quad \text{em} \quad [a , b] .$$

Além disso, do Corolário (2.3.2) acima, teremos que

$$\int_a^b f\, d\alpha_1 \overset{(2.129)}{=} \sum_{n=1}^{N_o} c_n\, f(s_n)\,. \tag{2.137}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\alpha_2(b) - \underbrace{\alpha_2(a)}_{=\sum_{n=N_o+1}^{\infty} c_n \underbrace{I(a-s_n)}_{=0 \text{ pois } a<s_n, \forall n\in\mathbb{N}} =0} &= \alpha_2(b) \\
&= \sum_{n=N_o+1}^{\infty} c_n \underbrace{I(b-s_n)}_{=1, \text{ pois } s_n<b, \forall n\in\mathbb{N}} \\
&= \sum_{n=N_o+1}^{\infty} c_n \overset{(2.135)}{<} \frac{\varepsilon}{M}\,.
\end{aligned} \tag{2.138}$$

Por outro lado, como $f \in \mathfrak{R}(\alpha_2)$ segue, da Proposição (2.3.1) item 5., que

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f\, d\alpha_2\right| &\leq \underbrace{\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|}_{=M}\, [\alpha_2(b) - \alpha_2(a)] \\
&\overset{(2.138)}{<} M\,\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon\,.
\end{aligned} \tag{2.139}$$

Mas

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2\,,$$

logo, da Proposição (2.3.1) item 6., segue que

$$\begin{aligned}
\left|\underbrace{\int_a^b f\, d\alpha}_{\text{Prop. (2.3.1) item 6.} \,=\, \int_a^b f\, d\alpha_1 + \int_a^b f\, d\alpha_2} - \sum_{i=1}^{N_o} c_n\, f(s_n)\right| &= \left|\underbrace{\int_a^b f\, d\alpha_1}_{\overset{(2.137)}{=} \sum_{i=1}^{N_o} c_n f(s_n)} + \int_a^b f\, d\alpha_2 - \sum_{i=1}^{N_o} c_n\, f(s_n)\right| \\
&= \left|\int_a^b f\, d\alpha_2\right| \overset{(2.139)}{<} \varepsilon\,,
\end{aligned} \tag{2.140}$$

mostrando que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, f(s_n)$ é convergente em $\mathbb{R}$, e sua soma será igual a $\int_a^b f\, d\alpha$, completando a demonstração do resultado.

□

A seguir temos um resultado que relaciona a integral de Riemann com a integral de Riemann-Stieltjes, a saber:

Teorema 2.3.1 *Sejam* $f, \alpha : [a, b]$ *funções definidas em* $[a, b]$*, tais que a função* $\underline{f}$ *é uma função limitada em* $[a, b]$ *e a função* $\underline{\alpha}$ *é monótona crescente, diferenciável em* $[a, b]$ *e além disso* $\underline{\alpha'}$ *é uma função Riemann integrável em* $[a, b]$ *(ou seja,* $\alpha' \in \mathfrak{R}$ *em* $[a, b]$*).*

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *se, e somente se,* $f \alpha' \in \mathfrak{R}$ *em* $[a, b]$.

Neste caso teremos:

$$\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^b f(x) \, \alpha'(x) \, dx . \tag{2.141}$$

Demonstração:

Seja

$$M \doteq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| , \tag{2.142}$$

que existe pois a função $\underline{f}$ é limitada em $[a, b]$.

Dado $\varepsilon > 0$, como $\alpha' \in \mathfrak{R}$, do Corolário (2.2.1) (tomado-se naquele resultado $\alpha(x) = x$, $x \in [a, b]$ e utilizando a Observação (2.2.4) item 4.), segue que existe uma partição

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o = a, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

do intervalo $[a, b]$ de modo que

$$0 \leq U(\mathcal{P}, \alpha') - L(\mathcal{P}, \alpha') < \frac{\varepsilon}{M} . \tag{2.143}$$

Definamos, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$:

$$M_i \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) , \tag{2.144}$$

$$M_i^* \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f \alpha')(x) . \tag{2.145}$$

Observemos que a função $\underline{\alpha'}$ está definida em $[a, b]$, logo a função $\underline{\alpha}$ deverá ser contínua em $[a, b]$.

Assim, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, aplicando-se o Teorema do Valor Médio à função $\underline{\alpha}$ no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, obteremos $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, de modo que

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \overset{\text{Teor. Valor Médio}}{=} \alpha'(t_i) (x_i - x_{i-1}) = \alpha'(t_i) \Delta x_i . \tag{2.146}$$

Temos também que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, se

$$s_i \in [x_{i-1}, x_i] ,$$

segue, de (2.143) e do Teorema (2.2.2) item 2. (tomando-se naquele $\alpha(x) \doteq x$, para cada $x \in [a, b]$), que

$$\sum_{i=1}^n |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)| \, \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{M} . \tag{2.147}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\alpha'(s_i)\,\Delta x_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\left[\underbrace{\Delta\alpha_i}_{\overset{(2.146)}{=}\alpha'(t_i)\,\Delta x_i} - \alpha'(s_i)\,\Delta x_i\right]\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,[\alpha'(t_i)-\alpha'(s_i)]\,\Delta x_i\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|f(s_i)|}_{\overset{(2.142)}{\leq} M} |\alpha'(t_i)-\alpha'(s_i)|\,\Delta x_i \\
&\leq M \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\alpha'(t_i)-\alpha'(s_i)|\,\Delta x_i}_{\overset{(2.147)}{<}\frac{\varepsilon}{M}} \\
&< M\,\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Em particular, teremos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\Delta\alpha_i &< \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(s_i)\,\alpha'(s_i)}_{\leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}(f\,\alpha')(x) \overset{(2.145)}{=} M_i^*} \Delta x_i + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} M_i^*\,\Delta x_i + \varepsilon \\
&= U(\mathcal{P}, f\,\alpha') + \varepsilon\,, \qquad (2.148)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\alpha'(s_i)\,\Delta x_i &< \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(s_i)}_{\leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \overset{(2.144)}{=} M_i} \Delta\alpha_i + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta\alpha_i + \varepsilon \\
&= U(\mathcal{P}, f, \alpha) + \varepsilon\,. \qquad (2.149)
\end{aligned}$$

Portanto, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, tomando-se, no lado esquerdo de (2.148), o supremo, para $s \in [x_{i-1}, x_i]$, obteremos

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sup_{s\in[x_{i-1},x_i]} f(s)\,\Delta\alpha_i}_{=\sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta\alpha_i = U(\mathcal{P},f,\alpha)} \leq U(\mathcal{P}, f\,\alpha') + \varepsilon\,,$$

ou seja,

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f\,\alpha') + \varepsilon\,. \qquad (2.150)$$

De modo semelhante, para cada $i \in \{1\,,\,,\cdots,n\}$, tomando-se, no lado esquerdo de (2.149), o supremo, para $s \in [x_{i-1}\,,x_i]$, obteremos

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sup_{s\in[x_{i-1}\,,x_i]} [f(s)\alpha\,'(s)]\,\Delta x_i}_{=\sum_{i=1}^{n} M_i^*\,\Delta x_i = U(\mathcal{P}\,,f\alpha\,')} \leq U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha)+\varepsilon\,,$$

ou seja,

$$U(\mathcal{P}\,,f\,\alpha\,') \leq U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha)+\varepsilon\,. \tag{2.151}$$

Portanto, de (2.150) e (2.151), segue que

$$U(\mathcal{P}\,,f\,\alpha\,')-\varepsilon \leq U(\mathcal{P}\,,f\,,\alpha) \leq U(\mathcal{P}\,,f\,\alpha\,')+\varepsilon\,. \tag{2.152}$$

Notemos também que, (2.143) ocorrerá se trocarmos a partição $\mathcal{P}$, do intervalo $[a\,,b]$, por uma partição que é um refinamento da mesma, implicando que (2.152), também ocorrerá se trocarmos a partição $\mathcal{P}$, do intervalo $[a\,,b]$, por uma outra partição que é um refinamento da mesma.

Logo, tomando-se o ínfimo em (2.152), sobre todas as partições $\mathcal{P}$ do intervalo $[a\,,b]$, obteremos:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\alpha\,'(x)\,dx-\varepsilon \leq \overline{\int_a^b} f\,d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\alpha\,'(x)\,dx+\varepsilon\,, \tag{2.153}$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ teremos

$$\left|\overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\,\alpha\,'(x)\,dx\right| < \varepsilon\,,$$

mostrando que

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\,\alpha\,'(x)\,dx\,. \tag{2.154}$$

De modo semelhante, mostra-se que

$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \underline{\int_a^b} f(x)\,\alpha\,'(x)\,dx\,. \tag{2.155}$$

Deixaremos os detalhes dessa prova como exercício para o leitor.

Finalmente, notamos que

$$\begin{aligned} & f \in \mathfrak{R}(\alpha) \text{ em } [a\,,b] \\ \text{se, e somente se } \quad & \overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \\ \text{de (2.154) e (2.155), se, e somente se } \quad & \overline{\int_a^b} f(x)\,\alpha\,'(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,\alpha\,'(x)\,dx \\ \text{se, e somente se } \quad & (f\,\alpha\,') \in \mathfrak{R} \text{ em } [a\,,b]\,. \end{aligned} \tag{2.156}$$

Além disso, neste caso, teremos a validade de (2.141), completando a demonstração do resultado.

□

Temos também um resultado que trata da mudança de variáveis na integral de Riemann-Stieltjes, mas precisamente:

Teorema 2.3.2 *Seja $\phi : [A\,,B] \to [a\,,b]$ uma função contínua e estritamente crescente em $[a\,,b]$.*

Suponhamos que a função $\alpha : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ seja monótona crescente em $[a\,,b]$ e a função $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ seja Riemann-Stieltjes integrável em $[a\,,b]$, relativamente à função $\underline{\alpha}$.

Consideremos as funções $\beta\,, g : [A, B] \to \mathbb{R}$, dadas por

$$g(y) \doteq f[\phi(y)] \quad e \quad \beta(y) \doteq \alpha[\phi(y)]\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in [A\,,B]\,. \tag{2.157}$$

Então $g \in \mathfrak{R}(\beta)$ em $[A\,,B]$, e além disso, temos que

$$\int_A^B g\,d\beta = \int_a^b f\,d\alpha\,. \tag{2.158}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Notemos que a função $\underline{\phi}$ será bijetora e assim, do Teorema da continuidade da função inversa (visto em Análise I), segue que a função $\underline{\phi}$ admitirá função inversa $\phi^{-1} : [a\,,b] \to [A\,,B]$, que também será uma função estritamente crescente e contínua em $[a\,,b]$.

Como a função $\underline{\alpha}$ é monótona crescente em $[a\,,b]$ e a função $\underline{\phi}$ é monótona crescente em $[A\,,B]$, segue que a função

$$\beta = \alpha \circ \phi$$

também será monótona crescente em $[A\,,B]$.

Além disso, como a função $\underline{f}$ é limitada em $[a\,,b]$ e a função $\underline{\phi}$ é contínua em $[A\,,B]$, que é um subcojunto compacto de $\mathbb{R}$ (logo o conjunto $\phi([A\,,B])$ é um subconjunto compacto em $\mathbb{R}$), segue que a função $\underline{g}$ será limitada em $[A\,,B]$.

Notemos que se

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o = a\,, x_1\,, \cdots\,, x_{n-1}\,, x_n = b\}$$

é uma partição do intervalo $[a\,,b]$, como a função $\underline{\phi}$ é estritamente crescente em $[A\,,B]$, teremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} \doteq &\left\{y_o \doteq \phi^{-1}(a) = A\,,\, y_1 \doteq \phi^{-1}(x_1)\,, \cdots\,,\, y_{n-1} \doteq \phi^{-1}(x_{n-1})\,,\, y_n \doteq \phi^{-1}(b) = B\right\} \\ &\subseteq [A\,,B]\,, \end{aligned} \tag{2.159}$$

será uma partição do intervalo $[A\,,B]$ e reciprocamente, ou seja, a cada partição do intervalo $[a\,,b]$, corresponderá uma partição do intervalo $[A\,,B]$, por meio da função (bijetora e estritamente crescente em $[a\,,b]$) $\underline{\phi}$, e reciprocamente.

Notemos que, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, teremos:

$$s \in [y_{i-1}\,,y_i] \quad \text{se, e somente, se} \quad t = \phi(s) \in [x_{i-1}\,,x_i]\,.$$

Com isto teremos

$$U(\mathcal{Q}, g, \beta) = U(\mathcal{P}, f, \alpha), \tag{2.160}$$

$$L(\mathcal{Q}, g, \beta) = L(\mathcal{P}, f, \alpha). \tag{2.161}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, como $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, pelo Corolário (2.2.1), segue que existe uma partição $\mathcal{P}$, do intervalo $[a, b]$, tal que

$$0 \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \varepsilon. \tag{2.162}$$

Logo, tomando-se a partição

$$\mathcal{Q} \doteq \phi(\mathcal{P}),$$

do intervalo $[A, B]$, (como em (2.159)), de (2.160) e (2.161), teremos

$$0 \leq \underbrace{U(\mathcal{Q}, g, \beta)}_{\overset{(2.160)}{=} U(\mathcal{P}, f, \alpha)} - \underbrace{L(\mathcal{Q}, g, \beta)}_{\overset{(2.161)}{=} L(\mathcal{P}, f, \alpha)} < \varepsilon, \tag{2.163}$$

que, pelo Corolário (2.2.1), implicará $g \in \mathfrak{R}(\beta)$ em $[A, B]$.

Além disso, tomando-se o ínfimo no lado direito de (2.160), sobre todas as partições do intervalo $[a, b]$ e no lado esquerdo de (2.160), sobre todas as partições do intervalor $[A, B]$, obteremos:

$$\underbrace{\overline{\int_a^b} f \, d\alpha}_{=\int_a^b f \, d\alpha} = \underbrace{\overline{\int_A^B} g \, d\beta}_{=\int_A^B g \, d\beta}, \quad \text{ou seja,} \quad \int_a^b f \, d\alpha = \int_A^B g \, d\beta,$$

mostrando (2.158) e completando a demonstração do resultado.

□

Observação 2.3.1 *Notemos que se a função $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dada por*

$$\alpha(x) \doteq x, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b],$$

então, tomando-se a função $\beta : [A, B] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\beta(y) \doteq \phi(y), \quad \textit{para cada} \quad y \in [A, B],$$

teremos que, se a função $\phi : [A, B] \to [a, b]$ é estritamente crescente, diferenciável em $[A, B]$ e $\phi' \in \mathfrak{R}$ em $[A, B]$, então o resultado acima, juntamente com o Teorema (2.3.1), implicarão em:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_A^B f[\phi(y)] \, \phi'(y) \, dy,$$

que é um resultado importante do Cálculo 1 e nos diz como fazer para mudar de variáveis na integral definida (ou seja, na integral de Riemann em intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$).

De fato,

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{Teor. (2.3.1), com } \alpha(x)\doteq x}{=} \int_a^b f\,d\alpha \overset{(2.158)}{=} \int_A^B g\,d\beta$$
$$\overset{g=\phi\circ f,\beta=\phi,A=\phi^{-1}(a) \text{ e } B=\phi^{-1}(b)}{=} \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} (f\circ\phi)\,d\phi$$
$$\overset{\text{Teor. (2.3.1), com } \alpha(x)\doteq\phi(x)}{=} \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} (f\circ\phi)(x)\phi'(x)\,dx\,,$$

mostrando a identidade acima.

2.4 Relações entre integração e diferenciação

Começaremos com o "Teorema Fundamental do Cálculo (versão I)", a saber:

Teorema 2.4.1 *Seja* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[a\,,b]$.

Consideremos a função $F:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt\,, \quad \textit{para cada} \quad x\in[a\,,b]\,. \tag{2.164}$$

Então a função $\underline{F}$ *é uniformemente contínua em* $[a\,,b]$.

Além disso, se a função $\underline{f}$ *for contínua em* $x_o\in[a\,,b]$, *então a função* $\underline{F}$ *será diferenciável em* $x_o\in[a\,,b]$ *e além disso*

$$F'(x_o) = f(x_o)\,. \tag{2.165}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Como $f\in\mathfrak{R}$ em $[a\,,b]$, segue que a função $\underline{f}$ é limitada em $[a\,,b]$, logo existe $M>0$ tal que

$$|f(t)|\le M\,, \quad \text{para cada} \quad t\in[a\,,b]\,.$$

Notemos que, para cada $x\,,y\in\mathbb{R}$, satisfazendo

$$a\le x<y\le b\,,$$

da Proposição (2.3.1) item 4., segue que $f\in\mathfrak{R}$, em $[a\,,x]$ e em $[a\,,y]$.

Assim, a função $\underline{F}$ está bem definida e, além disso, teremos:

$$\begin{aligned}|F(y)-F(x)| &\overset{(2.164)}{=} \left|\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| \\ &\overset{\text{Prop. (2.3.1) item 4.}}{=} \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \\ &\overset{\text{Prop. (2.3.1) item 3.}}{\le} \int_x^y |f(t)|\,dt \\ &\le \int_x^y \underbrace{|f(t)|}_{\le M}\,dt \\ &\overset{\text{Prop. (2.3.1) item 5.}}{\le} M\,|y-x|\,.\end{aligned} \tag{2.166}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, seja

$$\delta \doteq \frac{\varepsilon}{M} > 0 . \tag{2.167}$$

Assim, se

$$|y - x| < \delta$$

teremos, por (2.166), que
$$|F(y) - F(x)| \overset{(2.166)}{\leq} M \underbrace{|y - x|}_{<\delta}$$
$$= M\,\delta$$
$$\overset{(2.167)}{=} M\,\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon ,$$

mostrando que a função $\underline{F}$ é uniformemente contínua em $[a\,,b]$.

Se a função $\underline{f}$ for contínua em $x_o \in [a\,,b]$ então, dado $\varepsilon > 0$, poderemos encontrar $\delta = \delta(x_o\,,\varepsilon) > 0$, de modo que

$$\text{se} \quad |t - x_o| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |f(t) - f(x_o)| < \varepsilon\,.$$

Suponhamos que $t \in \mathbb{R}$, satisfaz:

$$x_o < t < x_o + \delta\,. \tag{2.168}$$

Com isto teremos:

$$\left| \frac{F(t) - F(x_o)}{t - x_o} - \underbrace{f(x_o)}_{= f(x_o)\frac{\int_{x_o}^t dt}{t - x_o}} \right| \overset{(2.164)}{=} \left| \frac{\int_a^t f(s)\,ds - \int_a^{x_o} f(s)\,ds}{t - x_o} - \frac{\int_{x_o}^t f(x_o)\,ds}{t - x_o} \right|$$
$$\overset{\text{Prop. (2.3.1) item 4.}}{=} \left| \frac{\int_{x_o}^t f(s)\,ds}{t - x_o} - \frac{\int_{x_o}^t f(x_o)\,ds}{t - x_o} \right|$$
$$\overset{\text{Prop. (2.3.1) item 1.}}{=} \left| \frac{\int_{x_o}^t [f(s) - f(x_o)]\,ds}{t - x_o} \right|$$
$$\overset{\text{Prop. (2.3.1) item 3.}}{=} \frac{1}{t - x_o} \int_{x_o}^t \underbrace{|f(s) - f(x_o)|}_{<\varepsilon,\ \text{pois}\ |s - x_o| \leq |t - x_o| \overset{(2.168)}{<} \delta} ds$$
$$< \frac{1}{t - x_o}\,\varepsilon\,(t - x_o) = \varepsilon\,,$$

ou seja,

$$\lim_{t \to x_o^+} \frac{F(t) - F(x_o)}{t - x_o} = f(x_o)\,, \tag{2.169}$$

mostrando que a função F é diferenciável à direita de $x_o \in [a\,,b)$.

De modo semelhante, podemos mostrar que

$$\lim_{t \to x_o^-} \frac{F(t) - F(x_o)}{t - x_o} = f(x_o)\,, \tag{2.170}$$

se $x_o \in (a\,,b]$.

A demonstração deste fato será deixado como exercício para o leitor.

Com isto, mostramos que a função F é diferenciável à esquerda de $x_o \in (a\,,b]$, que juntamente (2.169) e (2.170), mostram que a função F é diferenciável em $[a\,,b]$ e que vale (2.165), completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o (também conhecido como "Teorema Fundamental do Cálculo (versão II)"):

Teorema 2.4.2 *Seja* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[a\,,b]$ *e* $F : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* $[a\,,b]$ *tal que*

$$F'(x) = f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{2.171}$$

Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,. \tag{2.172}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Dado $\varepsilon > 0$, como $f \in \mathfrak{R}$ em $[a\,,b]$, do Teorema (2.2.2) item 3. (e da Observação (2.2.4) item 3.), segue que existe uma partição

$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_o\,, x_1\,, \cdots\,, x_n = b\}\,,$$

do intervalo $[a\,,b]$ tal que se, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, escolhendo-se $t_i \in [x_{i-1}\,,x_i]$, teremos

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon\,. \tag{2.173}$$

Por outro lado, como a função F é diferenciável em $[a\,,b]$, segue que ela será uma função (uniformemente) contínua em $[a\,,b]$.

Portanto, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, do Teorema do Valor Médio aplicado ao intervalo $[x_{i-1}\,,x_i]$, segue que existirá $t_i \in (x_{i-1}\,,x_i)$, de modo

$$\begin{aligned} F(x_i) - F(x_{i-1}) &= \underbrace{F'(t_i)}_{\overset{(2.171)}{=} f(t_i)} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{= \Delta x_i} \\ &= f(t_i)\,\Delta x_i\,. \end{aligned} \tag{2.174}$$

Assim teremos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i &\overset{(2.174)}{=} \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &\overset{\text{Soma telescópica}}{=} F(b) - F(a)\,. \end{aligned} \tag{2.175}$$

Logo

$$\left|[F(b) - F(a)] - \int_a^b f(x)\,dx\right| \overset{(2.175)}{=} \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,dx\right| \overset{(2.173)}{<} \varepsilon\,, \tag{2.176}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)\,dx = 0\,,$$

mostrando que identidade (2.172) e completando a demonstração do resultado.

□

Observação 2.4.1 *Notemos que existem funções* $F : [a\,,b]$ to$\mathbb{R}$ *diferenciáveis em* $[a\,,b]$*, de modo que a função* $\underline{F'}$ *não é contínua em, pelo menos, um ponto de* $[a\,b]$ *mas é integrável em* $[a\,,]$.

Um exemplo de função que tem essa propriedade é a função $F : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$F(x) \doteq \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\,, & \textit{para} \quad x \neq 0 \\ 0\,, \quad \textit{para} \quad x = 0 \end{cases} .$$

Temos que a função $\underline{F}$ *é difereniável em* $[0\,,1]$ *além disso, temos que:*

$$F'(x) \doteq \begin{cases} 2\,x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\,, & \textit{para} \quad x \neq 0 \\ 0\,, \quad \textit{para} \quad x = 0 \end{cases} ,$$

que não é uma função contínua em $\underline{x = 0}$*, mas é integrável em* $[0\,,1]$.

Lembremos que

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Podemos mostrar um resultado relacionado com a integração por partes para integrias de Riemann, mais precisamente:

Teorema 2.4.3 *Suponhamos que as funções* $F\,, G : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *são continuamente diferenciáveis em* $[a\,,b]$ *e que as funções* $f\,,g : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *são dadas por*

$$f(x) \doteq F\,'(x) \quad \textit{e} \quad g(x) = G\,'(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,.$$

Então $(F\,g)\,,(f\,G) \in \mathfrak{R}$ *em* $[a\,,b]$ *e além disso*

$$\int_a^b F(x)\,g(x)\,dx = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b f(x)\,G(x)\,dx\,, \tag{2.177}$$

ou seja,

$$\int_a^b F(x)\,G\,'(x)\,dx = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b F\,'(x)\,G(x)\,dx\,. \tag{2.178}$$

Demonstração:

Como as funções $\underline{F}$ e $\underline{G}$ são continuamente diferenciáveis em $[a\,,b]$, segue que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ serão funções contínuas em $[a\,,b]$.

Logo as funções $\underline{F\,g}$ e $\underline{f\,G}$ serão funções contínuas em $[a\,,b]$ e assim, pelo Teorema (2.2.3), elas serão funções Riemann integráveis em $[a\,,b]$.

Consideremos a função $H:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ dada por

$$H(x)\doteq F(x)\,G(x)\,,\quad \text{para cada}\quad x\in[a\,,b]\,,$$

que será continuamente diferenciável em $[a\,,b]$.

Temos que $H\in\mathfrak{R}$ em $[a\,,b]$ (pois é, em particular, uma função contínua em $[a\,,b]$) e como

$$H\,'(x)=F\,'(x)\,G(x)+F(x)\,G\,'(x)\,,\quad \text{para cada}\quad x\in\mathbb{R}\,,$$

e as funções $\underline{F\,'}$ e $\underline{G\,'}$ são funções contínuas em $[a\,,b]$, segue que $H\,'\in\mathfrak{R}$ em $[a\,,b]$.

Logo, do Teorema (2.4.2), segue que

$$\int_a^b H'(x)\,dx=H(b)-H(a)=F(b)\,G(b)-F(a)\,G(a)\,.$$

Mas

$$\begin{aligned}
F(b)\,G(b)-F(a)\,G(a) &\overset{(2.4)}{=}\int_a^b H\,'(x)\,dx\\
&=\int_a^b [\underbrace{F\,'(x)}_{=f(x)}\,G(x)+F(x)\,\underbrace{G\,'(x)}_{=g(x)}]\,dx\\
&=\int_a^b f(x)G(x)\,dx+\int_a^b F(x)g(x)\,dx\,,
\end{aligned}$$

$$\text{ou seja,}\quad F(b)\,G(b)-F(a)\,G(a)=\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx+\int_a^b F(x)\,g(x)\,dx\,,$$

de onde, podemos obter (2.178), completando a demonstração do resultado.

□

2.5 Integração de funções vetoriais

Começaremos com a

Definição 2.5.1 *Consideremos a função vetorial* $f:[a\,,b]\to\mathbb{R}^k$ *cujas funções componentes são as funções*

$$f_j:[a\,,b]\to\mathbb{R}\,,\qquad \textit{para cada}\quad j\in\{1\,,2\,,\cdots\,,k\}\,,$$

e a função $\alpha:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ *monótona crescente em* $[a\,,b]$.

Diremos que a função vetorial $\underline{f}$ *é* **Riemann-Stieltjes integrável em** $[a\,,b]$, *indicando por* $f \in \Re(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$ *se, e somente se, para cada* $j \in \{1\,,2\,,\cdots,k\}$, *a função* $f_j \in \Re(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$.

Neste caso, definiremos a **integral de Riemann-Stieltjes da função** $\underline{f}$ **em** $[a\,,b]$, *indicada por* $\displaystyle\int_a^b f\,d\alpha$, *como sendo a* k*-upla:*

$$\int_a^b f\,d\alpha \doteq \left(\int_a^b f_1\,d\alpha\,, \int_a^b f_2\,d\alpha\,, \cdots, \int_a^b f_k\,d\alpha\right) \in \mathbb{R}^k\,. \tag{2.179}$$

Observação 2.5.1

1. *A Definição (2.5.1) acima, nos diz que uma função, definida no intervalo* $[a\,,b]$ *a valores vetoriais, será Riemann-Stieltjes integrável em* $[a\,,b]$, *relativamente à função* $\underline{\alpha}$, *se, e somente se, cada função componente associada à mesma, for uma função Riemann-Stieltjes integrável em* $[a\,,b]$, *relativamente à função* $\underline{\alpha}$.

   Neste caso a integral de Riemann-Stieltjes da função vetorial no intervalo $[a\,,b]$ *será obtida integrando-se, cada uma das funções componentes associadas à mesma no intervalo* $[a\,,b]$.

2. *Diremos que a função vetorial* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}^k$ *é uma* **função limitada em** $[a\,,b]$ *se existir* $M > 0$, *tal que*

$$\|f(x)\| \leq M\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,,$$

   onde $\|.\|$ *denota a norma usual de* $\mathbb{R}^k$, *isto é,*

$$\|(a_1\,,a_2\,,\cdots,a_k)\| \doteq \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_k}^2}\,.$$

3. *Seja* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}^k$ *é uma função vetorial, cujas funções componentes são as funções*

$$f_j : [a\,,b] \to \mathbb{R}\,, \qquad \textit{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots,k\}$$

   e $x_o \in (a\,,b)$.

   Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **diferenciável em** x_o, *se para cada* $j \in \{1\,,2\,,\cdots,k\}$, *a função componente* $\underline{f_j}$ *é uma função diferenciável em* x_o.

   Neste caso, definiremos a **derivada da função** $\underline{f}$ **em** x_o, *que será indicada por* $f\,'(x_o)$, *como sendo*

$$f\,'(x_o) \doteq ({f_1}'(x_o)\,, {f_2}'(x_o)\,, \cdots, {f_k}'(x_o)) \in \mathbb{R}^k.$$

Com isto temos a:

Proposição 2.5.1

1. *Se* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *são funções vetoriais,* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função monótona crescente em* $[a, b]$ *com* $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *então* $(f + g) \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *e*
$$\int_a^b (f + g)\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha + \int_a^b g\, d\alpha\,.$$

2. *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *função vetorial,* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função monótona crescente em* $[a, b]$ *com* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *e* $c \in \mathbb{R}$ *então* $(c\, f) \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *e*
$$\int_a^b (c\, f)\, d\alpha = c \int_a^b f\, d\alpha\,.$$

3. *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *função vetorial,* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função monótona crescente em* $[a, b]$ *com* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *e* $c \in [a, b]$ *então* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, c]$ *e em* $[c, b]$ *e*
$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha\,.$$

4. *Se as funções* $\alpha_1, \alpha_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ *são monótonas crescentes em* $[a, b]$ *e a função vetorial* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *satisfaz* $f \in \mathfrak{R}(\alpha_1) \cap f \in \mathfrak{R}(\alpha_2)$ *em* $[a, b]$ *então* $f \in \mathfrak{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ *em* $[a, b]$ *e*
$$\int_a^b f\, d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f\, d\alpha_1 + \int_a^b f\, d\alpha_2\,.$$

5. *Se* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é monótona crescente em* $[a, b]$*, a função vetorial* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *satisfaz* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *e* $c \geq 0$ *então* $f \in \mathfrak{R}(c\, \alpha)$ *em* $[a, b]$ *e*
$$\int_a^b f\, d(c\, \alpha) = c \int_a^b f\, d\alpha\,.$$

6. *Sejam* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é diferenciável e monótona crescente em* $[a, b]$*, tal que* $\alpha' \in \mathfrak{R}$ *em* $[a, b]$*, e* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *uma função vetorial limitada em* $[a, b]$*.*

   Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *se, e somente se,* $f\, \alpha' \in \mathfrak{R}$ *em* $[a, b]$*.*

   Neste caso teremos
$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f(x)\, \alpha'(x)\, d\alpha\,.$$

7. *Seja* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[a, b]$ *e definamos a função* $F : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *por*
$$F(x) \doteq \int_a^b f(t)\, dt\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b]\,.$$

   Então a função vetorial $\underline{F}$ *será contínua em* $[a, b]$*.*

   Além disso, se a função $\underline{f}$ *vetorial for contínua em* $x_o \in [a, b]$*, então a função vetorial* $\underline{F}$ *será diferenciável em* $x_o \in [a, b]$ *e*
$$F'(x_o) = f(x_o)\,.$$

8. *Seja* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[a\,,b]$ *e exista uma função* $F : [a\,,b] \to \mathbb{R}^k$ *diferenciável em* $[a\,,b]$ *tal que*

$$F\,'(x) = f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,.$$

Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Demonstração:

Para demonstrar os itens 1. até 5., basta aplicar os itens 1., 2., 4., 6. e 7. da Proposição (2.3.1) a cada uma das componentes das funções vetoriais envolvidas e a Definição (2.5.1).

Para demonstrar o item 6., basta aplicar o Teorema (2.3.1) a cada uma das componentes das funções vetoriais envolvidas e a Definição (2.5.1).

Para demonstrar os itens 7. e 8., basta aplicar, respectivamente, os Teoremas (2.4.1) e (2.4.2), a cada uma das componentes das funções vetoriais envolvidas e a Definição (2.5.1), completando a demonstração do resultado.

□

Um outro resultado interessante é dado pela:

Proposição 2.5.2 *Sejam* $\alpha : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função monótona crescente em* $[a\,,b]$ *e* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}^k$ *função vetorial tal que* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$.

Então $\|f\| \in \mathfrak{R}$ *em* $[a\,,b]$ *e*

$$\left\| \int_a^b f\,d\alpha \right\| \leq \int_a^b \|f\|\,d\alpha\,, \tag{2.180}$$

onde $\|.\|$ *denota a norma usual de* $\mathbb{R}^k$ *(veja Observação (2.5.1) item 2).*

Demonstração:

Observemos que se as funções componentes da função vetorial $\underline{f}$ são as funções

$$f_j : [a\,,b] \to \mathbb{R}\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots,k\}\,,$$

então

$$\|f(x)\| = \sqrt{[f_1(x)]^2 + \cdots + [f_k(x)]^2}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{2.181}$$

Como $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,,b]$, da Definição (2.5.1), para cada $j \in \{1,\cdots,k\}$, temos que

$$f_j \in \mathfrak{R}(\alpha) \quad \text{em} \quad [a\,,b]\,.$$

Logo, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots,k\}$, do Corolário (2.3.1) item 1., segue que

$$f_j^{\,2} \in \mathfrak{R}(\alpha) \quad \text{em} \quad [a\,,b]\,.$$

Assim, pela Proposição (2.3.1) item (1)., segue que

$$F \doteq \sum_{j=1}^k f_j^{\,2} \in \mathfrak{R}(\alpha) \quad \text{em} \quad [a\,,b]\,. \tag{2.182}$$

Consideremos $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$\phi(t) \doteq \sqrt{t}\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, \infty)\,.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &\overset{(2.181)\text{ e }(2.182)}{=} \sqrt{F(x)}\\ &= (\phi \circ F)(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,, b]\,.\end{aligned}$$

Como a função ϕ é contínua em $[0\,, \infty)$ e $F \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,, b]$, segue, do Teorema (2.2.6), que a função $h : [a\,, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq \underbrace{(\phi \circ F)(x)}_{=\|f(x)\|}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,, b]\,,$$

pertencerá a $\mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,, b]$, ou seja, $\|f\| \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,, b]$, como afirmamos.

Para cada $j \in \{1\,, 2\,, \cdots, k\}$, definamos

$$y_j \doteq \int_a^b f_j\, d\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y \doteq \int_a^b f\, d\alpha \in \mathbb{R}^k. \tag{2.183}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\|y\|^2 &= \sum_{j=1}^{k} {y_j}^2\\ &= \sum_{j=1}^{k} y_j \underbrace{y_j}_{\overset{(2.183)}{=} \int_a^b f_j\, d\alpha}\\ &= \sum_{j=1}^{k} y_j \left(\int_a^b f_j\, d\alpha\right)\\ &\overset{\text{Prop. (2.3.1) itens (1). e (2).}}{=} \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{k} y_j\, f_j\right) d\alpha\,.\end{aligned} \tag{2.184}$$

Para cada $t \in [a\,, b]$, aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz às k-uplas

$$(y_1\,, y_2\,, \cdots, y_k) \quad \text{e} \quad (f_1(t)\,, f_2(t)\,, \cdots, f_k(t))\,,$$

segue que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} y_j\, f_j(t) &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{k} {y_j}^2}\,\sqrt{\sum_{j=1}^{k} [f_j(t)]^2}\\ &\overset{(2.181)}{=} \|y\|\,\|f(t)\|\,.\end{aligned}$$

Logo, da Proposição (2.3.1) item 3., segue que

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^k y_j \, f_j \right) \, d\alpha \leq \int_a^b (\|y\| \, \|f\|) \, d\alpha$$

$$\overset{\text{Prop. (2.3.1) itens 2.}}{=} \|y\| \int_a^b \|f\| \, d\alpha \, .$$

Susbstituindo-se em (2.184), obteremos

$$\|y\|^2 \leq \|y\| \int_a^b \|f\| \, d\alpha \, . \tag{2.185}$$

Temos duas possibilidades:

(i) Se $\|y\| = 0$ (ou seja, $\displaystyle\int_a^b f \, d\alpha = 0$), segue que (2.180) vale trivialmente.

(ii) Por outro lado, se $\|y\| \neq 0$, dividindo-se (2.185) por $\|y\| > 0$, obteremos

$$\underbrace{\|y\|}_{\left\|\int_a^b f \, d\alpha\right\|} \leq \int_a^b \|f\| \, d\alpha \, , \quad \text{ou seja,} \quad \left\| \int_a^b f \, d\alpha \right\| \leq \int_a^b \|f\| \, d\alpha \, ,$$

como queríamos demonstrar, completando a demonstração do resultado.

□

2.6 Curvas retificáveis

Começaremos introduzindo alguns conceitos básicos e mais adiante entraremos no que nos interessa propriamente, a saber, o comprimento de uma curva "bem comportada" do $\mathbb{R}^k$, para $k \in \mathbb{N}$ fixado.

Definição 2.6.1 *Uma função* $\gamma : [a\,,b] \to \mathbb{R}^k$ *contínua em* $[a\,,b]$ *será dita* **curva parametrizada em $\mathbb{R}^k$**.

O conjunto

$$\gamma([a\,,b]) \subseteq \mathbb{R}^k \, ,$$

será dito **traço da curva parmetrizada γ**.

Se a curva parametrizada $\gamma : [a\,,b] \to \mathbb{R}^k$ *for injetora (isto é,* $\gamma(s) \neq \gamma(t)$*, para* $t\,,s \in [a\,,b]$ *satisfazendo* $t \neq s$*) diremos que a curva parametrizada é* **simples**.

Se a curva parametrizada $\gamma : [a\,,b] \to \mathbb{R}^k$ *é tal que*

$$\gamma(a) = \gamma(b),$$

diremos que a curva parametrizada é **fechada**.

Se a curva parametrizada $\gamma : [a\,,b] \to \mathbb{R}^k$ *for injetora em* $(a\,,b)$ *e* $\gamma(a) = \gamma(b)$*, diremos que a curva parametrizada é* **fechada e simples** .

Observação 2.6.1 *Duas curvas parametrizadas distintas podem ter o mesmo traço.*

Para ilustrar, consideremos $\gamma_1 : [0\,,1] \to \mathbb{R}^2$ *e* $\gamma_2 : \left[0\,,\dfrac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$*, dadas por*

$$\gamma_1(t) \doteq (t\,,0)\,, \quad \textit{para} \quad t \in [0\,,1] \quad \textit{e} \quad \gamma_2(s) \doteq (2\,s\,,0)\,, \quad \textit{para} \quad s \in \left[0\,,\frac{1}{2}\right]\,.$$

As curvas parmetrizadas são distintas mas teêm o mesmo traço,que o conjunto $[0\,,1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Sejam $\gamma : [a\,,b] \to \mathbb{R}^k$ uma curva parametrizada em $\mathbb{R}^k$,

$$\mathcal{P} \doteq \{t_o = a\,, t_1\,, \cdots\,, t_{n-1}, t_n = b\}$$

uma partição do intervalo $[a\,,b]$ e definamos

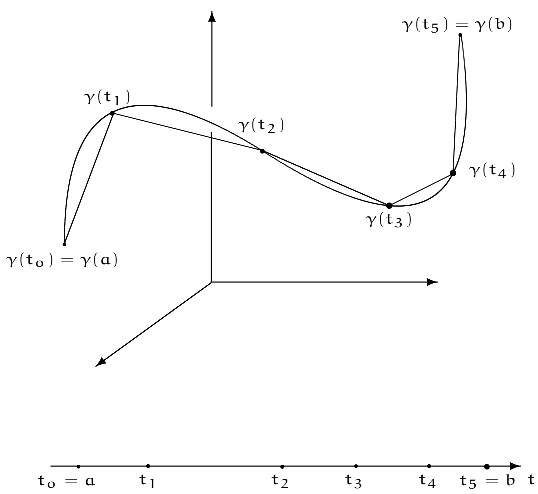
$$\Lambda(\mathcal{P}\,,\gamma) \doteq \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|\,. \tag{2.186}$$

Observemos que, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, o número real

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|\,,$$

nos fornece a distância do ponto $\gamma(t_{i-1})$ ao ponto $\gamma(t_i)$ em $\mathbb{R}^k$.

Logo o número real, não negativo, $\Lambda(\mathcal{P}\,,\gamma)$, dado por (2.186), nos fornece o comprimento de uma poligonal, que tem como vértices os pontos $\gamma(t_i)$, para $i \in \{0\,,1\,,\cdots\,,n\}$ (veja a figura abaixo).



Em princípio, quanto maior o número de pontos da partição $\underline{\mathcal{P}}$, mais perto o número real, não negativo, $\Lambda(\mathcal{P}\,,\gamma)$, ficará do valor do comprimento do traço da curva $\underline{\gamma}$ (se este existir!).

Devido a este fato, empírico, introduziremos a:

Definição 2.6.2 *Na situação acima, definiremos o* **comprimento da curva parametrizada** γ, *denotado por* $\Lambda(\gamma)$, *como sendo*

$$\Lambda(\gamma) \doteq \sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} \Lambda(\mathcal{P}, \gamma) \geq 0 . \tag{2.187}$$

Diremos que a curva parametrizada γ *é* **retificável** *se*

$$\Lambda(\gamma) < \infty .$$

Em certos casos, o comprimento da curva parametrizada γ será dado por uma integral de Riemann, como mostra o:

Teorema 2.6.1 *Seja* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *uma curva parametrizada que é continuamente diferenciável em* $[a, b]$.

Então a curva parametrizda $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *é uma curva retificável e*

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt . \tag{2.188}$$

Demonstração:

Notemos que a função $\gamma' : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ é uma função contínua em $[a, b]$.

Logo a função $\|\gamma'\| : [a, b] \to \mathbb{R}$ também será uma função contínua em $[a, b]$ (pois a norma é uma função contínua).

Portanto a integral de Riemann, do lado direito de (2.188), existirá.

Observemos também que se

$$\mathcal{P} \doteq \{t_o = a, t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n = b\}$$

é uma partição do intervalo $[a, b]$, teremos

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| &\overset{\text{Prop. (2.5.1) item 8.}}{=} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(s) \, ds \right\| \\ &\overset{\text{Prop. (2.5.1) item 8.}}{\leq} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(s)\| \, ds . \end{aligned} \tag{2.189}$$

Assim teremos:

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathcal{P}, \gamma) &= \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &\overset{(2.189)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(s)\| \, ds \\ &= \int_a^b \|\gamma'(s)\| \, ds . \end{aligned} \tag{2.190}$$

Tomando-se o supremo, sobre todas as partições do intervalor $[a, b]$, obteremos

$$\begin{aligned} \Lambda(\gamma) &= \sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} \Lambda(\mathcal{P}, \gamma) \\ &\overset{(2.190)}{\leq} \int_a^b \|\gamma'(s)\| \, ds . \end{aligned} \tag{2.191}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, como a função $\underline{\gamma'}$ é contínua em $[a\,,b]$, que é um subconjunto compacto em $\mathbb{R}$, segue que a função $\underline{\gamma'}$ será uniformemente contínua em $[a\,,b]$.

Logo, podemos encontrar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, de modo que se

$$\begin{aligned} & s\,,t \in [a\,,b]\,, \quad \text{satisfaz} \quad |s-t| < \delta\,, \\ \text{deveremos ter:} \quad & \|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| < \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}\,. \end{aligned} \tag{2.192}$$

Seja

$$\mathcal{P} \doteq \{t_o = a\,, t_1\,, \cdots\,, t_{n-1}\,, t_n = b\}$$

uma partição do intervalo $[a\,,b]$ (sempre existe !) de modo que

$$\Delta t_i \doteq t_i - t_{i-1} < \delta\,. \tag{2.193}$$

Notemos que, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, se $t \in [t_{i-1}\,,t_i]$, segue que

$$\underbrace{\|\gamma'(t) - \gamma'(t_i)\|}_{\overset{\text{Des. triangular}}{\geq} \|\gamma'(t)\| - \|\gamma'(t_i)\|} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

ou seja,

$$\|\gamma'(t)\| \leq \|\gamma'(t_i)\| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,. \tag{2.194}$$

Logo, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, teremos

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\|\,dt &\overset{(2.194)}{\leq} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\|\gamma'(t_i)\| + \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)} \right) dt \\ &= \underbrace{\|\gamma'(t_i)\|\,(t_i - t_{i-1})}_{\|\gamma'(t_i)\,(t_i - t_{i-1})\| = \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t_i)\,dt\right\|} + \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)} \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t_i} \\ &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \{\gamma'(t) + [\gamma'(t_i) - \gamma'(t)]\}\,dt \right\| + \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}\,\Delta t_i \\ &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\,dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\gamma'(t) - \gamma'(t_i)]\,dt \right\| + \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}\,\Delta t_i \\ &\overset{\text{Des. triangular}}{\leq} \left\| \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\,dt}_{\overset{\text{Prop. (2.5.1) item 8.}}{=} \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})} \right\| + \underbrace{\left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\gamma'(t) - \gamma'(t_i)]\,dt \right\|}_{\overset{\text{Prop. (2.5.2)}}{\leq} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t) + \gamma'(t_i)\|\,dt} + \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}\,\Delta t_i \\ &\leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|\gamma'(t) - \gamma'(t_i)\|}_{< \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)},\ \text{por (2.194), pois } |t_i - t_{i-1}| < \delta} dt + \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}\,\Delta t_i \\ &< \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}\,\Delta t_i + \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}\,\Delta t_i \\ &= \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \frac{\varepsilon}{(b-a)}\,\Delta t_i\,. \end{aligned} \tag{2.195}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \|\gamma\,'(t)\|\,dt &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma\,'(t)\|\,dt \\
&\overset{(2.195)}{<} \sum_{i=1}^n \left(\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\| + \frac{\varepsilon}{(b-a)}\,\Delta t_i\right) \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|}_{\overset{(2.187)}{=}\Lambda(\mathcal{P},\gamma)} + \frac{\varepsilon}{(b-a)} \underbrace{\sum_{i=1}^n \Delta t_i}_{\overset{\text{soma telescópica}}{=} b-a} \\
&= \underbrace{\Lambda(\mathcal{P}\,,\gamma)}_{\leq \sup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} \Lambda(\mathcal{P}\,,\gamma)=\Lambda(\gamma)} + \frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a) \\
&\leq \Lambda(\gamma)+\varepsilon\,,
\end{aligned}
$$

para cada $\varepsilon > 0$, ou seja,

$$
\int_a^b \|\gamma\,'(t)\|\;dt \leq \Lambda(\gamma)\,,
$$

que, juntamente com (2.191), mostram que (2.188) ocorrerá, completando a prova do resultado.

□

2.7 Exercícios

Capítulo 3

Sequência e Séries de Funções

Neste capítulo trataremos da convergência pontual e uniforme das sequências e das séries de funções e algumas aplicações.

Começaremos com a convergência pontual das sequências e das séries de funções.

3.1 Convergência pontual de sequências e séries de funções

Definição 3.1.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* $f : E \to A$ *uma função e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções, onde para cada* $n \in \mathbb{N}$ *a função* $f_n : E \to A$*, onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$*.*

Diremos que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge pontualmente (ou ponto a ponto) para a função $\underline{f}$ em $\underline{E}$** *se, para cada* $x_o \in E$ *fixado, a sequência numérica* $(f_n(x_o))_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente para* $f(x_o)$*, isto é, para cada* $x_o \in E$*, dado* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $N_o = N_o(\varepsilon, x_o) \in \mathbb{N}$ *tal que se*

$$n \geq N_o\,, \quad \textit{deveremos ter} \quad |f_n(x_o) - f(x_o)| < \varepsilon\,. \tag{3.1}$$

Neste caso escreveremos:

$$f(x_o) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_o)\,, \quad \textit{para cada} \quad x_o \in E\,, \quad \textit{ou} \quad f_n \stackrel{E}{\to} f, \quad \textit{ou ainda} \quad f_n \stackrel{p}{\to} f\,. \tag{3.2}$$

Com isto podemos introduzir a

Definição 3.1.2 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* $f : E \to A$ *uma função e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções, onde para cada* $n \in \mathbb{N}$ *temos que* $f_n : E \to A$*, onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$*..*

Diremos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge pontualmente (ou ponto a ponto) para a função $\underline{f}$ em $\underline{E}$** *se, para cada* $x_o \in E$ *fixado, a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_o)$ *for convergente para* $f(x_o)$*, ou seja, a sequência das somas parcias* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente, pontualmente, para a função* $\underline{f}$ *em* $\underline{E}$*, onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, temos que:*

$$S_n(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in E\,. \tag{3.3}$$

Neste caso escrevemos

$$f(x_o) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_o)\,, \quad \textit{para cada} \quad x_o \in E\,, \tag{3.4}$$

e diremos que a função $\underline{f}$ *é a* **<u>soma da série de funções</u>** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Observação 3.1.1

1. *Algumas questões podem ser colocadas:*

   (a) *Se* $f_n \xrightarrow{E} f$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $\underline{f_n}$ *for contínua em* $x_o \in E$ *isto implicará,* **<u>necessariamente</u>**, *que a função* $\underline{f}$ *será contínua em* $\underline{x_o}$*?*

   (b) *Se* $f_n \xrightarrow{E} f$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $\underline{f_n}$ *for diferenciável em* $x_o \in E$ *isto implicará,* **<u>necessariamente</u>**, *que a função* $\underline{f}$ *será diferenciável em* $\underline{x_o}$*?*

   (c) *Se* $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $\underline{f_n}$ *for Riemann integrável em* $[a\,,b]$ *isto implicará,* **<u>necessariamente</u>**, *que a função* $\underline{f}$ *será integrável em* $[a\,,b]$*?*

2. *Podemos colocar as questões análogas as questões acima, para a série de funções* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

3. *Antes de responder as questões acima lembremos que uma função* $\underline{f}$ *é contínua em* $\underline{x_o}$ *se, e somente se,*

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)\,.$$

4. *Sob este ponto de vista, a resposta para a questão (a), do item 1. acima, pode ser colocada da seguinte forma:*

   Por um lado teremos:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) \overset{f_n \xrightarrow{E} f}{=} \lim_{x \to x_o} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right), \tag{3.5}$$

   por outro, deveremos ter

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_o} f(x) &\overset{f \text{ é cont. em } x_o}{=} f(x_o) \overset{f_n \xrightarrow{E} f}{=} \lim_{n \to \infty} f_n(x_o) \\ &\overset{f_n \text{ é cont. em } x_o}{=} \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_o} f_n(x) \right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

   Comparando (3.5) como (3.6), segue que deveremos ter

$$\lim_{x \to x_o} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_o} f_n(x) \right), \tag{3.7}$$

   ou seja, precisamos saber se a "troca" dos limites acima é sempre possível, se $f_n \xrightarrow{E} f$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $\underline{f_n}$ *é contínua em* $x_o \in E$.

5. *Veremos em alguns exemplos a seguir que isto, em geral, não pode ser feito.*

Exemplo 3.1.1 *Para cada* $m, n \in \mathbb{N}$*, consideremos*

$$S_{m,n} \doteq \frac{m}{m+n}.$$

Pergunta-se:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} S_{m,n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} S_{m,n}\right) \ ?$$

Resolução:

Notemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, teremos:

$$\lim_{n\to\infty} S_{m,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{m+n} \overset{\text{Exercício}}{=} 0.$$

Logo

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} S_{m,n}\right) = 0. \tag{3.8}$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, teremos:

$$\lim_{m\to\infty} S_{m,n} = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{m+n} \overset{\text{Exercício}}{=} 1. \tag{3.9}$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} S_{m,n}\right) \overset{(3.9)}{=} 1 \neq 0 \overset{(3.8)}{=} \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} S_{m,n}\right),$$

ou seja, <u>não</u> podemos trocar a ordem nos limites acima!

Uma outra situação é dado pelo:

Exemplo 3.1.2 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, seja* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f_n(x) \doteq \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

e, com isto, podemos considerar a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Afirmamos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$*, pontualmente em* $\mathbb{R}$*, onde a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} 0, & \textit{para} \quad x = 0 \\ 1 + x^2, & \textit{para} \quad x \neq 0 \end{cases}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Resolução:

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$f_n(0) = \left(\frac{0^2}{1+0^2}\right)^n = 0, \quad \text{ou seja,} \quad f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = 0.$$

Por outro lado, se $x_o \neq 0$ está fixado, como

$$0 < \frac{x_o^2}{1 + x_o^2} < 1\,,$$

segue que a série numérica

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_o) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{{x_o}^2}{1+{x_o}^2} \right)^n \\
&\overset{\text{Série geom. de razão } \frac{{x_o}^2}{1+{x_o}^2}<1}{=} \frac{1}{1 - \dfrac{{x_o}^2}{1+{x_o}^2}} \\
&= \frac{1+{x_o}^2}{1+{x_o}^2-{x_o}^2} \\
&= 1 + {x_o}^2 \\
&\overset{(3.10)}{=} f(x_o)\,,
\end{aligned}$$

mostrando que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge para a função $\underline{f}$, dada por (3.10).

Exemplo 3.1.3 *Notemos que, no Exemplo (3.1.2) acima, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, a função $\underline{f_n}$ é contínua em $\mathbb{R}$, mas a função $\underline{f}$ **não** é contínua em $x = 0$, pois*

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{x\neq 0 \text{ e } (3.10)}{=} \lim_{x\to 0} \left(1 + x^2\right) = 1 \neq 0 \overset{(3.10)}{=} f(0)\,,$$

ou seja, no Exemplo (3.1.2) acima, temos que

$$\lim_{x\to x_o} \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] \neq \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{x\to x_o} f_n(x)\right].$$

Um Exemplo, mais simples que o Exemplo (3.1.2) acima em que ocorre uma situação análoga é dado pelo:

Exemplo 3.1.4 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos a função $f_n : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f_n(x) \doteq x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,.$$

Então

$$f_m \xrightarrow{p} f \quad \textit{em} \quad [0,1]\,,$$

onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) \doteq \begin{cases} 0\,, & \textit{para} \quad x \in [0\,,1) \\ 1\,, & \textit{para} \quad x = 1 \end{cases}.$$

*Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, a função $\underline{f_n}$ é contínua em $[0\,,1]$, mas a função $\underline{f}$ **não** é contínua em $x = 1$.*

Resolução:

Dexiaremos a resolução como exercício para o leitor.

Temos também o:

Exemplo 3.1.5 *Para cada* $m \in \mathbb{N}$ *fixado, consideremos a função* $f_m : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f_m(x) \doteq \lim_{n\to\infty} [\cos(m!\,\pi\,x)]^{2n}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,. \tag{3.11}$$

Afirmamos que

$$f_m \xrightarrow{E} f\,,$$

onde a função $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} 0\,, & \textit{para} \quad x \notin \mathbb{I} \cap [0\,,1] \\ 1\,, & \textit{para} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0\,,1] \end{cases}\,.$$

Resolução:

Observemos que

(i) Se

$$m!\,x \in \mathbb{Z}\,,$$

teremos

$$\begin{aligned} &\cos(m!\,x\,\pi) = \pm 1\,, \\ \text{ou seja,} \quad &[\cos(m!\,x\,\pi)]^2 = 1\,, \\ \text{isto é,} \quad &f_m(x) = \lim_{n\to\infty} [\cos(m!\,\pi\,x)]^{2n} = 1\,. \end{aligned}$$

Neste caso, teremos:

$$f(x) = 1\,.$$

(ii) Por outro lado, se

$$m!\,x \notin \mathbb{Z}\,,$$

segue que

$$\begin{aligned} &-1 < \cos(m!\,x\,\pi) < 1\,, \\ \text{ou seja,} \quad &[\cos(m!\,x\,\pi)]^2 < 1\,, \\ \text{isto é,} \quad &f_m(x) = \lim_{n\to\infty} [\cos(m!\,\pi\,x)]^{2n} = 0\,. \end{aligned}$$

Neste caso teremos:

$$f(x) = 0\,.$$

Para finalizar, notemos que

(i') Se
$$x \in \mathbb{Q}, \quad \text{então}, \quad m!\, x \in \mathbb{Z},$$
para cada $m \in \mathbb{N}$, suficientemente grande.

De fato, se
$$x \in \mathbb{Q}, \quad \text{então}, \quad x = \frac{p}{q},$$
para $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$.

Seja
$$m \in \mathbb{N}, \quad \text{de modo que}, \quad m > q.$$

Então
$$\begin{aligned} m!\, x &= m!\, \frac{p}{q} \\ &= [m \cdot (m-1) \cdots (q-1) \cdot q \cdot (q+1) \cdots 2 \cdot 1]\, \frac{p}{q} \\ &= [m \cdot (m-1) \cdots (q-1) \cdot (q+1) \cdots 2 \cdot 1] \cdot p \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Logo, do item 1. acima, segue que
$$f(x) = 1.$$

(ii') Se
$$x \in \mathbb{I}, \quad \text{então}, \quad m!\, x \notin \mathbb{Z}.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Logo, do item 2. acima, segue que
$$f(x) = 0.$$

Com isto teremos que:
$$f_m \xrightarrow{p} f \quad \text{em} \quad [0,1].$$

Observação 3.1.2 *Notemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, temos que $f_m \in \mathfrak{R}$ em $[0,1]$.*
Deixaremos a elaboração da prova deste fato como exercício para o leitor.
Por outro lado, $f \notin \mathfrak{R}$ em $[0,1]$, como vimos no item 1. da Observação (2.2.2).
Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Temos também o:

Exemplo 3.1.6 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos a função $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*
$$f_n(x) \doteq \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Afirmamos que
$$f_n \xrightarrow{p} f \quad \textit{em} \quad \mathbb{R},$$
onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por
$$f(x) \doteq 0, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução:

De fato, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, temos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}} \overset{\text{Exercício}}{=} 0 = f(x)\,.$$

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, a função $\underline{f_n}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$f_n{}'(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}\, n = \sqrt{n}\,\cos(nx)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Em particular, a sequência de funções $(f_n{}')_{n\in\mathbb{N}}$ **não** é convergente para a função $\underline{f\,'}$, pois, por exemplo,

$$f_n(0) = \sqrt{n} \to \infty\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.$$

Logo, neste caso, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{d}{dx} f_n(x)\right] \neq \frac{d}{dx}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]\,.$$

Para finalizar temos o:

Exercício 3.1.1 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *fixado, consideremos a função* $f_n : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f_n(x) \doteq n^2\, x\, \left(1 - x^2\right)^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,.$$

Afirmamos que

$$f_n \xrightarrow{p} f \quad \textit{em} \quad [0\,,1]\,,$$

onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,.$$

Resolução:

Observemos que:

(i)

$$f_n(0) = 0 \to 0 = f(0)\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.$$

(ii) se $x \in (0\,,1]$, teremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\left[n^2\, x\, \left(1 - x^2\right)^n\right] \\
&= x \lim_{n\to\infty}\left[n^2\, \left(1 - x^2\right)^n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2}{\left(1 - x^2\right)^n}\, \left(1 - x^2\right)^{2n}\right]\,.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Como

$$0 < \left(1 - x^2\right)^{2n} < 1\,,$$

se mostrarmos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(1-x^2)^n} = 0\,, \tag{3.13}$$

de (3.12), seguirá que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)\,.$$

Para mostrar (3.14), mostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^r}{(1+p)^n} = 0, \quad \text{para cada} \quad r > 0 \;\text{ e } p \in \mathbb{R}\,. \tag{3.14}$$

Notemos que, apra $p \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ fixados, teremos:

$$\begin{aligned}
(1+p)^n \overset{\text{Binômio de Newton}}{=} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} p^k\, 1^{n-k} &> \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k \\
&= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k \\
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\, p^k\,.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

para cada $k \in \{0\,,1\,,\cdots\,,n\}$.

Consideremos $n \in \mathbb{N}$, de modo que (lembremos que faremos $n \to \infty$)

$$r < \frac{n}{2}\,.$$

Logo,

$$1 < \frac{n}{2} + 1 - r\,.$$

Com isto, podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$, de modo que

$$k \in \left(r\,, \frac{n}{2} + 1\right)\,.$$

Deste modo, teremos:

$$n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1) > \left(\frac{n}{2}\right)^k\,. \tag{3.16}$$

De fato, pois

$$\begin{aligned}
& 0 < k < \frac{n}{2} + 1\,, \\
\text{ou seja,} \quad & 0 < 2\,k < n + 2\,, \\
\text{ou ainda,} \quad & 0 < n - 2\,k + 2\,, \\
\text{equivalentemente,} \quad & n < 2n - 2\,k + 2 \\
\text{ou seja,} \quad & \left(\frac{n}{2}\right)^k < n - k + 1\,.
\end{aligned}$$

Em particular, vale (3.16).

Lodo, de (3.15) e (3.16), teremos, para $k \in \mathbb{N}$ fixado, satisfazendo

$$2\,k < n + 2\,,$$

que:

$$(1+p)^n > \frac{n^k}{2^k\,k!}\,p^k$$

$$\text{isto é,}\quad 0 < \frac{n^r}{(1+p)^n} < \underbrace{\frac{2^k\,k!}{p^k}}_{\text{n.o real fixado}}\, n^{r-k} \to 0\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,, \tag{3.17}$$

pois

$$r - k < 0\,.$$

Em particular, (3.14) ocorrerá.

Conclusão:

$$f_n \xrightarrow{p} f \quad \text{em} \quad [0\,,1]\,.$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 n^2\,x\,\left(1 - x^2\right)^n\,dx$$

$$\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{n^2}{2\,(n+1)} \to \infty\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.$$

Por outro lado,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0\,,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \infty \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\,,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

Deixaremos a cargo do leitor a resolução do:

Exercício 3.1.2 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos a função $f_n : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f_n(x) \doteq n\,x\,\left(1 - x^2\right)^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,.$$

Então

$$f_n \xrightarrow{p} f \quad \textit{em} \quad [0\,,1]\,,$$

onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,.$$

Além disso

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\,,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

3.2 Convergência uniforme de sequências e séries de funções

Nesta seção trataremos de outro tipo de convergência de sequências e séries de funções, que nos fornecerá várias propriedades as quais a convergência pontual não pode nos garantir.

Começaremos com a

Definição 3.2.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* $f : E \to A$ *uma função e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos a função* $f_n : E \to A$*, onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$.

Diremos que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformemente para a função** f *em* E*, se dado* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$*, de modo que, para*

$$n \geq N_o\,, \quad \textit{deveremos ter} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,, \quad \textit{para todo} \quad x \in E\,. \tag{3.18}$$

Neste caso escrevermos:

$$f_n \xrightarrow{u} f \quad \textit{em} \quad E\,.$$

Observação 3.2.1 *Na situação acima, é fácil, mostrar que se a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para a função* f *em* E*, então ela será convergente pontualmente para* f *em* E*, ou seja,*

$$f_n \xrightarrow{u} f \quad \textit{em} \quad E\,, \qquad \textit{implicará em:} \quad f_n \xrightarrow{p} f \quad \textit{em} \quad E$$

A recíproca é falsa, como veremos em exemplos mais adiante.

Com isto podemos introduzir a

Definição 3.2.2 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* $f : E \to A$ *uma função e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos a função* $f_n : E \to A$*, onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$.

Diremos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge uniformemente para a função** f *em* E*, se a sequência de funções das somas parciais* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para a função* f *em* E*, onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, temos que*

$$S_n(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in E\,. \tag{3.19}$$

A seguir exibiremos alguns resultados relacionados com a convergêncua uniforme de sequências de funções.

Começaremos pelo **Critério de Cauchy** para a convergência uniforme de uma sequência de funções:

Teorema 3.2.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* $f : E \to A$ *uma função e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos a função* $f_n : E \to A$*, onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$*.*

A sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para a função* $\underline{f}$ *em* $\underline{E}$ *se, e somente se, dado* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$*, tal que se:*

$$m, n \geq N_o, \quad \textit{deveremos ter} \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \textit{para todo} \quad x \in E. \tag{3.20}$$

Demonstração:

Suponhamos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $\underline{f}$ em $\underline{E}$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, de modo se:

$$n \geq N_o, \quad \text{deveremos ter:} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para cada} \quad x \in E. \tag{3.21}$$

Portanto, se $m, n \geq N_o$, para cada $x \in E$, teremos que:

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |[f_m(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \\ &\leq \underbrace{|f_m(x) - f(x)|}_{\overset{(3.21)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\overset{(3.21)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que (3.20) ocorrerá.

Por outro lado, se dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, de modo que (3.20) ocorre, então para cada $x \in E$, segue que a sequência numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ será uma sequência numérica de Cauchy em $\underline{A}$ (onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$).

Mas o conjunto $\underline{A}$, munido da métrica usual (isto é, da métrica induzida por $|\cdot|$) é um espaço métrico completo.

Logo, para cada $x \in E$, podemos encontrar $f(x) \in A$, de modo que

$$f_n(x) \to f(x), \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Seja $N_o \in \mathbb{N}$ como em (3.20) e consideremos

$$m, n \geq N_o.$$

Então teremos que

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{para cada} \quad x \in E.$$

Passando o limite na desigualdade acima, quando $m \to \infty$, utilizando o fato que a função $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e que

$$f_m(x) \to f(x), \quad \text{para cada} \quad x \in E,$$

seguirá que

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{para cada} \quad x \in E,$$

mostrando que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $\underline{f}$ em $\underline{E}$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.2.2

1. *Quando (3.20) ocorre diremos que a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma* **sequência uniformemente de Cauchy** *em* $\underline{E}$.

2. *Podemos substituir o subconjunto* $E \subseteq \mathbb{R}$ *por um subconjunto de um espaço métrico* (X, d_X) *qualquer, que a conclusão do resultado permanecerá válida.*

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Proposição 3.2.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* $f : E \to A$ *uma função e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos a função* $f_n : E \to A$, *onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, *consideremos*

$$M_n \doteq \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \,. \tag{3.22}$$

Então

$$f_n \xrightarrow{u} f, \quad \textit{em} \quad E$$

se, e somente se,

$$M_n \overset{n\to\infty}{\to} 0 \,.$$

Demonstração:

Notemos que

$$f_n \xrightarrow{u} f, \quad \text{em} \quad E$$

se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, de modo que, se

$$n \geq N_o, \quad \text{deveremos ter} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{para cada} \quad x \in E,$$

que é equivalente a escrever

$$\underbrace{\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|}_{=M_n} \leq \varepsilon$$

$$\text{que, por (3.22), é equivalente a:} \quad 0 \leq M_n \leq \varepsilon, \quad \text{se} \quad n \geq N_o,$$

$$\text{ou ainda, que} \quad M_n \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Para a convergência uniforme de séries de funções temos o **Teste M. de Weierstrass**:

Teorema 3.2.2 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ não vazio, $f : E \to A$ uma função e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n : E \to A$, onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.*

Suponhamos que exista uma sequência numérica $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formada por números reais, não negativos tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$|f_n(x)| \leq M_n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in E\,. \tag{3.23}$$

Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ for convergente em $\underline{A}$, então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ será uniformemente convergente em $\underline{E}$, para alguma função $f : E \to A$.

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, segue que a sequência das somas parciais desta série, que indicaremos por $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deverá ser uma sequência numérica de Cauchy em $\mathbb{R}$, isto é, deverá existir $N_o \in \mathbb{N}$ tal que, se

$$m > n \geq N_o\,,$$

deveremos ter: $$\underbrace{|\underbrace{s_m}_{\sum_{i=1}^{m} M_i} - \underbrace{s_n}_{\sum_{i=1}^{n} M_i}|}_{=\sum_{i=n+1}^{m} M_i} < \varepsilon\,,$$

ou seja, $$\underbrace{\left|\sum_{i=n+1}^{m} \underbrace{M_i}_{\geq 0}\right|}_{\sum_{i=n+1}^{m} M_i} < \varepsilon\,,$$

ou ainda, $$\sum_{i=n+1}^{m} M_i < \varepsilon\,. \tag{3.24}$$

Afirmamos que a sequência das somas parciais da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, isto é, a sequência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (dada por (3.19)), é uma sequência uniformemente de Cauchy em $\underline{E}$.

De fato, se $m > n \geq N_o$, teremos

$$\begin{aligned}
|S_m(x) - S_n(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{m} f_i(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right| \\
&= \left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)\right| \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{m} \underbrace{|f_i(x)|}_{\stackrel{(3.23)}{\leq} M_i} \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{m} M_i \\
&\stackrel{(3.24)}{<} \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

mostrando a afirmação.

Logo, do Teorema (3.2.1) (ou seja, o critério de Cauchy para a convergência uniforme), segue que a sequência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente convergente em $\underline{E}$, ou ainda, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ será uniformemente convergente em $\underline{E}$, para alguma função $f: E \to A$, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 3.2.3 *O Teste M. de Weierstrass nos fornece uma condição* **suficiente** *para que uma série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *seja uniformemente convergente em* E.

Pode-se mostrar que esta condição **não é necessária** *para que uma série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *seja uniformemente convergente em* $\underline{E}$.

Deixaremos a cargo do leitor encontrar um exemplo para esta situação.

3.2.1 Convergência uniforme e continuidade

A seguir exibiremos alguns consequências da convergência uniforme de sequências e séries de funções, entre estas destacam-se a que nos diz, como veremos, que a convergência uniforme preserva continuidade.

Começaremos pelo:

Teorema 3.2.3 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* $f : E \to A$ *uma função e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos a função* $f_n : E \to A$, *onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$.

Suponhamos a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para a função* $\underline{f}$ *em* $\underline{E}$.

Seja $\underline{x_o}$ *um ponto de acumulação de* $\underline{E}$ *em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ *tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tenhamos*

$$L_n \doteq \lim_{x\to x_o} f_n(x) \in A\,. \tag{3.25}$$

Então, existe $L \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$L_n \to L\,, \quad \textit{quando} \quad n \to \infty\,, \tag{3.26}$$

existe $\lim_{x\to x_o} f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = L\,, \tag{3.27}$$

ou seja,

$$\lim_{x\to x_o}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to x_o} f_n(x)\right].$$

<u>**Demonstração:**</u>

Dado $\varepsilon > 0$, como a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $\underline{f}$ em $\underline{E}$, do Teorema (3.2.1), segue que existe $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que se

$$m, n \geq N_o\,, \quad \text{deveremos ter} \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,. \tag{3.28}$$

Fazendo

$$x \to x_o$$

na desigualdade acima, utilizando-se o fato que a função $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $\underline{A}$ e que

$$\lim_{x \to x_o} f_k(x) = L_k \,,$$

obteremos

$$|L_m - L_n| < \varepsilon \,,$$

ou seja, a sequência numérica $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica de Cauchy em $\underline{A}$, que é um espaço métrico completo (com a métrica induzida pela norma $|\cdot|$).

Logo, existirá $L \in A$, tal que

$$L = \lim_{n \to \infty} L_n \,. \tag{3.29}$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in E$ fixados, teremos:

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |[f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - L]| \\ &\overset{\text{des. triangular}}{\leq} |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L| \\ &= |f(x) - f_n(x)| + |[f_n(x) - L_n] + [L_n - L]| \\ &\overset{\text{des. triangular}}{\leq} |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L| \,. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Como a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $\underline{f}$ em $\underline{E}$, existe $N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que se

$$n \geq N_1 \,, \quad \text{deveremos ter} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \,, \quad \text{para cada} \quad x \in E \,. \tag{3.31}$$

Por outro lado, de (3.29), segue que existe $N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que se

$$n \geq N_2 \,, \quad \text{deveremos ter} \quad |L_n - L| < \frac{\varepsilon}{3} \,. \tag{3.32}$$

Por fim, de (3.25), para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, existe $\delta > 0$, tal que se

$$x \in (x_o - \delta \,, x_o + \delta) \cap E \,, \quad \text{deveremos ter} \quad |f_n(x) - L_n| < \frac{\varepsilon}{3} \,. \tag{3.33}$$

Portanto se

$$x \in (x_o - \delta \,, x_o + \delta) \cap E \quad \text{e} \quad n \geq \max\{N_1 \,, N_2\} \,,$$

de (3.30), (3.31), (3.32) e (3.33), teremos

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &\overset{(3.30)}{\leq} \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\overset{(3.31)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - L_n|}_{\overset{(3.33)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|L_n - L|}_{\overset{(3.32)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \,, \end{aligned}$$

para cada $\varepsilon > 0$, mostrando (3.27) e completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 3.2.4 *Podemos reescrever a conclusão do resultado acima da seguinte forma:*

$$\lim_{x\to x_o} \underbrace{f(x)}_{=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)} = \underbrace{L}_{\lim\limits_{n\to\infty} L_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{L_n}_{=\lim\limits_{x\to x_o} f_n(x)} . \tag{3.34}$$

isto é,

$$\lim_{x\to x_o}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to x_o} f_n(x)\right], \tag{3.35}$$

ou seja, o resultado acima nos fornece condições **suficientes** *para que possamos trocar a ordem dos limites, no duplo limite que estamos interessados em calcular.*

Como consequência do resultado acima temos o

Corolário 3.2.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *intervalo aberto,* $f : E \to A$ *uma função e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos a função* $f_n : E \to A$*, que vamos supor ser contínua em* $x_o \in E$*, onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$.

Suponhamos a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para a função* $\underline{f}$ *em* $\underline{E}$.

Então a função $\underline{f}$ *será contínua em* $\underline{x_o}$.

Demonstração:

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{f_n}$ é contínua em $\underline{x_o}$, teremos

$$\lim_{x\to x_o} f_n(x) = f_n(x_o),$$

ou seja, podemos considerar

$$L_n \doteq f_n(x_o).$$

Logo, do Teorema (3.2.3) acima, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_o} f(x) &\overset{f_n \overset{u}{\to} f}{=} L \\ &= \lim_{n\to\infty} L_n \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(x_o) \\ &\overset{f_n \overset{u}{\to} f}{=} f(x_o),\end{aligned} \tag{3.36}$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é contínua em $\underline{x_o}$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.2.5

1. *A hipósete da convergência uniforme, no resultado acima, é necessaria para obtermos a conclusão do mesmo.*

   Para ver isto, basta olhar o Exercício (3.1.5).

2. *Em geral,* **não** *vale a recíproca do Corolário (3.2.1) acima, mais precisamente, existem sequências de funções contínuas em* $[a, b]$ *que convergem para uma função em contínua* $[a, b]$*, sem que a convergência da sequência de funções seja, necessariamente, uniforme em* $[a, b]$*.*

   Deixaremos como exercício para o leitor a construção de um exemplo que tenha essas propriedades.

3. *Diremos que* $K \subseteq \mathbb{R}$ *é um* **conjunto compacto** *se o subconjunto* $\underline{K}$ *for fechado e limitado em* $\mathbb{R}$*.*

Um resultado interessante que relaciona convergência pontual com convergência uniforme de sequências de funções é dado pelo:

Teorema 3.2.4 *Sejam* $K \subseteq \mathbb{R}$ *um compacto de* $\mathbb{R}$*,* $f : K \to \mathbb{R}$ *uma função e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções definidas em* $\underline{K}$*.*

Suponhamos que:

(i) para cada $n \in \mathbb{N}$*, a função* $f_n : K \to \mathbb{R}$ *seja contínua em* $\underline{K}$ *;*

(ii) $f_n \xrightarrow{p} f$ *em* $\underline{K}$ *;*

(iii) a função $\underline{f}$ *seja contínua em* K *;*

(iv) a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência monótona decrescente em* $\underline{K}$*, isto é, para cada* $x \in K$ *temos*

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x), \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.37}$$

Então

$$f_n \xrightarrow{u} f, \qquad \textit{em} \quad \underline{K}.$$

Demonstração:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $g_n : K \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_n(x) \doteq f_n(x) - f(x), \quad \text{para cada} \quad x \in K. \tag{3.38}$$

Como a função $\underline{f}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{f_n}$ são contínuas em $\underline{K}$, segue que a função $\underline{g_n}$ será contínua em $\underline{K}$.

Notemos também que, da hipótese (ii), segue que

$$g_n \xrightarrow{p} 0, \qquad \text{em } \underline{K}. \tag{3.39}$$

Da hipótese (iv), segue que a sequência de funções $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona decrescente em $\underline{K}$.

Mostremos que

$$g_n \xrightarrow{u} 0, \qquad \text{em } \underline{K}. \tag{3.40}$$

Para isto, dado $\varepsilon > 0$, consideremos

$$K_n \doteq \{x \in K\,;\, g_n(x) \geq \varepsilon\} \subseteq K\,. \tag{3.41}$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{g_n}$ será contínua em $\underline{K}$ e

$$K_n = g_n^{-1}([\varepsilon, \infty))\,,$$

(imagem inversa do conjunto K_n pela função $\underline{g_n}$), segue que o conjunto $\underline{K_n}$ é um subconjunto fechado de $\underline{K}$.

Logo o conjunto $\underline{K_n}$ também será um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, pois é um subconjunto fechado e como está contido em $\underline{K}$, que é limitado em $\mathbb{R}$, também será limitado em $\mathbb{R}$ e portanto um subconjunto compacto de $\underline{\mathbb{R}}$.

Por outro lado, como a sequência de funções $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona decrescente em $\underline{K}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$
\begin{aligned}
& && x \in K_{n+1}\,,\\
&\text{segue que,} && \varepsilon \overset{(3.41)}{\leq} g_{n+1}(x) \overset{(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\downarrow}{\leq} g_n(x)\,,\\
&\text{implicando que} && x \in K_n\,,\\
&\text{ou seja,} && K_{n+1} \subseteq K_n\,.
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

Fixemos $x \in K$.

De (3.39), teremos

$$g_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Logo, existirá $N_o = N_o(x) \in \mathbb{N}$, tal que se

$$
\begin{aligned}
& && n \geq N_o\,,\\
&\text{devemos ter:} && |g_n(x)| < \varepsilon\,,\\
&\text{em particular,} && 0 \overset{(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\downarrow \text{ e } g_n(x)\to 0}{\leq} g_n(x) < \varepsilon\,,
\end{aligned}
$$

e assim, de (3.41), segue que

$$x \notin K_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \geq N_o(x)\,. \tag{3.43}$$

Em particular

$$
\begin{aligned}
& && x \notin \bigcap_{n\geq N_o(x)} K_n\,,\\
&\text{ou seja,} && \bigcap_{n\geq N_o(x)} K_n = \emptyset\,,\\
&\text{isto é,} && \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset\,.
\end{aligned}
$$

Logo temos que, a sequência de conjuntos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de subconjuntos compactos de $(K\,,d_{\mathbb{R}})$, cuja intersecção de todos é vazia.

Utilizando-se o Corolário do Teorema 2.36 de [1], página 38, que nos diz:
"Suponhamos que uma sequência decrescente de subconjuntos não vazios é tal que cada um dos subconjuntos da mesma é um subconjunto compacto de um espaço métrico. Então a interseção de todos os subconjuntos da sequência deverá ser não vazia",
segue que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$K_{N_1} = \emptyset\,,$$

ou ainda, da Definição de $\underline{K_{N_1}}$ (ver (3.41)), segue que

$$0 \leq g_{N_1}(x) < \varepsilon\,, \quad \text{para cada} \quad x \in K\,. \tag{3.44}$$

Para finalizar, notemos que se $n \geq N_1$, teremos

$$0 \leq g_n(x) \overset{(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\downarrow}{\leq} g_{N_1}(x) \overset{(3.44)}{<} \varepsilon, \quad \text{para cada} \quad x \in K\,,$$

ou seja, (3.40) ocorrerá, que, de (3.38), implicará em:

$$f_n \overset{u}{\to} f\,, \quad \text{em} \quad K\,,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.2.6 *Notemos que a compacidade do conjunto $\underline{K}$ é uma condição necessária para a conclusão do resultado acima, como mostra o seguinte exemplo:*

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) \doteq x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0,1)$$

e a função $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0,1)\,.$$

Para cada $x \in [0,1)$ fixado, temos que

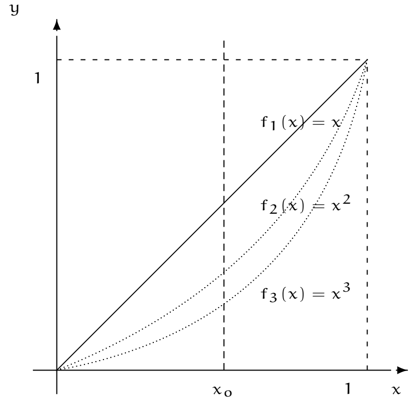
$$f_n(x) = x_n \overset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Notemos também que, se $m \geq n$ e $x \in [0,1)$, então

$$f_m(x) = x^m \overset{n\leq m \text{ e } x\in[0,1)}{\leq} x^n = f_n(x)\,,$$

ou seja, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções decrescente em $[0,1)$.

Apesar disso tudo, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **<u>não</u>** *converge uniformemente para a função $\underline{f}$ em $[0,1)$ (veja figura abaixo).*



A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

A seguir estudaremos, de um modo mais profundo, o conjunto formado por todas as funções, a valores reais, contínuas e limitadas definidas em um espaço (X, d_X).

Começaremos introduzindo a:

Definição 3.2.3 *Sejam (X, d_X) um espaço métrico e $A = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) munido da métrica usual (isto é, induzida pelo $|\cdot|$).*

Definiremos

$$C_b(X; A) \doteq \{f : X \to A \,;\ \text{a função } \underline{f} \text{ é contínua e limitada em } (X, d_X)\}\,.$$

Observação 3.2.7

1. *Notemos que $(C_b(X; A), +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\underline{A}$, onde $\underline{+}$ indica a adição usual de funções e $\underline{\cdot}$ denotará a multiplicação de elementos de $\underline{A}$ por funções.*

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Com isto podemos definir a função $\|\cdot\|_b : C_b(X; A) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\|f\|_b \doteq \sup_{x \in X} |f(x)|\,, \quad \text{para cada} \quad f \in C_b(X; A)\,. \tag{3.45}$$

   Notemos que:

   (i) se $f \in C_b(X; A)$, então a função $\underline{f}$ será limitada em $\underline{X}$, logo existe

$$\sup_{x \in X} |f(x)| \in [0, \infty)\,,$$

   ou seja, a função $\|\cdot\|_b$ introduzida em (3.45), está bem definida;

   (ii) se $f \in C_b(X; A)$, teremos

$$\|f\|_b \overset{(3.45)}{=} \sup_{x \in X} \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0} \geq 0\,;$$

(iii) se $f \in C_b(X;A)$*, então*

$$0 = \|f\|_b \overset{(3.45)}{=} \sup_{x\in X} \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0},$$

se, e somente se, $|f(x)| = 0$*, para cada* $x \in X$*,*

ou seja, $f = 0$.

(iv) se $f \in C_b(X;A)$ *e* $\lambda \in A$ *teremos*

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_b &\overset{(3.45)}{=} \sup_{x\in X} |(\lambda f)(x)| \\
&= \sup_{x\in X} [|\lambda|\,|f(x)|] \\
&\overset{|\lambda|\geq 0}{=} |\lambda| \sup_{x\in X} |f(x)| \\
&\overset{(3.45)}{=} |\lambda|\,\|f\|_b ;
\end{aligned}$$

(v) se $f, g \in C_b(X;A)$ *teremos*

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_b &\overset{(3.45)}{=} \sup_{x\in X} |(f+g)(x)| \\
&= \sup_{x\in X} [|f(x)+g(x)|] \\
&\overset{|f(x)+g(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|}{=} \sup_{x\in X} [|f(x)|+|g(x)|] \\
&\leq \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)| \\
&\overset{(3.45)}{=} \|f\|_b + \|g\|_b ,
\end{aligned}$$

ou seja, $\|\cdot\|_b$ *é uma* **norma** *no espaço vetorial* $(C_b(X;A), +, \cdot)$*, sobre* $\underline{A}$*.*

3. *Na situação acima, temos que a função* $d : C_b(X;A) \times C_b(X;A) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$d_b(f,g) \doteq \|f-g\|_b , \quad \textit{para cada} \quad f, g \in C_b(X;A), \tag{3.46}$$

será uma **métrica** *no espaço vetorial* $(C_b(X;A), +, \cdot)$*, sobre* $\underline{A}$*, que será denominada de* **métrica da convergência uniforme em** $C_b(X;A)$*.*

4. *A Proposição (3.2.1) afirma que:*

$$f_n \xrightarrow{u} f, \quad \textit{em} \quad X \quad \textit{se, e somente se} \quad f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_b} f.$$

5. *Seja* $\mathcal{A} \subseteq C_b(X;A)$*.*

Então o fecho do conjunto $\underline{\mathcal{A}}$*, segundo a métrica* $\underline{d_b}$ *(definida em (3.46)), que denotaremos por* $\overline{\mathcal{A}}$*, será denominado* **fecho uniforme do conjunto** $\underline{\mathcal{A}}$ *em*

$$((C_b(X;A), +, \cdot), d_b),$$

que denotaremos por $\overline{\mathcal{A}}$ *e, deste mdoo, este conjunto será dito* **uniformemente fechado** *em* $((C_b(X;A), +, \cdot), d_b)$*.*

Podemos agora demonstrar o:

Teorema 3.2.5 *Sendo (X, d_X) um espaço métrico, o espaço vetorial $(C_b(X; A), +, \cdot)$, sobre $\underline{A}$, quando munido da métrica $\underline{d_b}$ (dada por (3.46)), é um espaço métrico completo, ou seja, toda sequência de Cauchy em $((C_b(X; A), +, \cdot), d_b)$, deverá ser convergente em*

$$((C_b(X; A), +, \cdot), d_b).$$

Demonstração:

Consideremos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $((C_b(X; A), +, \cdot), d_b)$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, se

$$m > n \geq N_o,$$

$$\text{teremos:} \quad \underbrace{d_b(f_m, f_n)}_{\|f_m - f_n\|} < \varepsilon,$$

$$\text{ou ainda,} \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{para cada} \quad x \in X.$$

Logo, do Teorema (3.2.1) (ou seja, o Critério de Cauchy para a convergência uniforme de uma sequência de funções), juntamente com o Corolário (3.2.1), segue que existe uma função $f : X \to A$, contínua em (X, d_X), tal que

$$f_n \xrightarrow{u} f, \quad \text{em} \quad (X, d_X)$$

que, pela Proposição (3.2.1), implicará que

$$f_n \xrightarrow{d_b} f \in C(X; A).$$

Falta mostrar que a função $\underline{f}$ é uma função limitada em (X, d_X).

Para isto observemos que, como

$$f_n \xrightarrow{u} f, \quad \text{em} \quad \underline{X},$$

dado $\varepsilon = 1$, podemos encontrar $N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f - f_{N_1}\| < \varepsilon = 1,$$

$$\text{ou seja,} \quad \underbrace{|f(x) - f_{N_1}(x)|}_{\geq |f(x)| - |f_{N_1}(x)|} < 1, \quad \text{para cada} \quad x \in X,$$

que implicará

$$|f(x)| < 1 + \underbrace{|f_{N_1}(x)|}_{\leq R, \text{ pois } f_{N_1} \text{ é limitada em } X} \leq 1 + R, \quad \text{para cada} \quad x \in X,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é uma função limitada em $\underline{X}$, completando a demonstração do resultado.

□

3.2.2 Convergência uniforme e integração

O resultado principal desta subseção é o:

Teorema 3.2.6 *Sejam* $\alpha : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função monótona crescente em* $[a\,,b]$, $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$, $f : [a\,,b] \to A$ *uma função e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *consideremos a função* $f_n : [a\,,b] \to A$, *que vamos supor pertencer a* $\mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$.

Suponhamos que

$$f_n \xrightarrow{u} f\,, \qquad \textit{em} \quad [a\,,b]\,.$$

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a\,,b]$ *e além disso*

$$\int_a^b f\, d\alpha = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n\, d\alpha\,. \tag{3.47}$$

Demonstração:

Podemos supor, sem perda de generalidade, que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $f_n : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, ou seja, é uma função a valores reais.

Isto se deve ao fato que, se a função f_n for a valores complexos, podemos escrevê-la como

$$f_n = \mathfrak{R}(f_n) + i\,\mathfrak{I}(f_n)\,,$$

e podemos aplicar as idéias da demonstração do caso real, à parte real e à parte imaginária da mesma (que são funções a valores reais) e com isto obter a identidade (3.47), para o caso em que a função f é uma função a valores complexos.

Deixaremos os detalhes da verificação da situação acima como exercício para o leitor.

Notemos que as funções f_n são limitadas em $[a\,,b]$ e que

$$f_n \xrightarrow{u} f\,, \qquad \text{em} \quad [a\,,b]\,,$$

assim a função f também será uma função limitada em $[a\,,b]$ (isso foi provado no final da demonstração do Teorema (3.2.5)).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$\varepsilon_n \doteq \sup_{x \in [a\,,b]} |f(x) - f_n(x)| \geq 0\,. \tag{3.48}$$

Com isto teremos que, para cada $x \in [a\,,b]$,

$$\begin{aligned} \text{segue que:} \quad & |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon_n \\ \text{ou seja,} \quad & -\varepsilon_n \leq f(x) - f_n(x) \leq \varepsilon_n \\ \text{ou ainda,} \quad & f_n(x) - \varepsilon_n \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n\,. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f_n\,d\alpha - \varepsilon_n \underbrace{[\alpha(b)-\alpha(a)]}_{=\int_a^b d\alpha} &= \int_a^b f_n\,d\alpha - \varepsilon_n \int_a^b d\alpha \\
&\overset{\text{Prop. (2.3.1) itens 1. e 2.}}{=} \int_a^b (f_n - \varepsilon_n)\,d\alpha \\
&= \underline{\int_a^b} (f_n - \varepsilon_n)\,d\alpha \\
&\overset{f_n - \varepsilon_n \overset{(3.49)}{\leq} f,\ f \text{ é limitada e Prop. (2.3.1) item 3.}}{\leq} \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \qquad (3.50) \\
&\leq \overline{\int_a^b} f\,d\alpha \\
&\overset{f \overset{(3.49)}{\leq} f_n+\varepsilon \text{ e Prop. (2.3.1) item 3.}}{\leq} \overline{\int_a^b} (f_n + \varepsilon_n)\,d\alpha \\
&\overset{f_n \in \mathfrak{R}(\alpha)}{=} \int_a^b (f_n + \varepsilon_n)\,d\alpha \\
&\overset{\text{Prop. (2.3.1) itens 1. e 2.}}{=} \int_a^b f_n\,d\alpha + \varepsilon_n \int_a^b d\alpha \\
&= \int_a^b f_n\,d\alpha + \varepsilon_n [\alpha(b)-\alpha(a)]\,, \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \\
&\overset{(3.50) \text{ e } (3.51)}{\leq} \left(\int_a^b f_n\,d\alpha + \varepsilon_n [\alpha(b)-\alpha(a)]\right) - \left(\int_a^b f_n\,d\alpha - \varepsilon_n [\alpha(b)-\alpha(a)]\right) \\
&= 2\,\varepsilon_n [\alpha(b)-\alpha(a)] \to 0\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,,
\end{aligned}
$$

pois

$$
f_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \text{em} \quad [a\,,b]\,.
$$

Assim, (3.48) implicará que (veja a Proposição (3.2.1))

$$
\varepsilon_n \to 0\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.
$$

Logo

$$
\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \underline{\int_a^b} f\,d\alpha\,, \qquad (3.52)
$$

mostrando que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a\,,b]$.

Além disso, de (3.50), (3.51) e (3.52), segue que

$$
\int_a^b f_n\,d\alpha - \varepsilon_n [\alpha(b)-\alpha(a)] \leq \int_a^b f\,d\alpha \leq \int_a^b f_n\,d\alpha + \varepsilon_n [\alpha(b)-\alpha(a)]\,,
$$

ou seja,

$$\left|\int_a^b f_n \, d\alpha - \int_a^b f \, d\alpha\right| \leq \varepsilon_n \, [\alpha(b) - \alpha(a)] \to 0 \,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty \,,$$

pois

$$f_n \xrightarrow{u} f \,, \quad \text{em} \quad [a \,, b] \,,$$

ou seja,

$$\int_a^b f_n \, d\alpha \to \int_a^b f \, d\alpha \,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty \,,$$

mostrando (3.47) e completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 3.2.8 *Na situação acima, a conclusão do resultado pode ser reescrita como:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n \, d\alpha = \int_a^b \underbrace{f}_{\lim\limits_{n \to \infty} f_n} \, d\alpha = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n \, d\alpha \,.$$

Como consequência temos o:

Corolário 3.2.2 *Sejam* $\alpha : [a \,, b] \to \mathbb{R}$ *uma função monótona crescente em* $[a \,, b]$, $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$, $f : [a \,, b] \to A$ *uma função e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *consideremos a função* $f_n : [a \,, b] \to A$ *que pertence a* $\mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a \,, b]$.

Suponhamos que a série de funções $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *seja uniformemente convergente para a função* $\underline{f}$ *em* $[a \,, b]$.

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a \,, b]$ *e além disso*

$$\int_a^b f \, d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n \, d\alpha \,. \tag{3.53}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Como a série de funções $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente para a função $\underline{f}$ em $[a \,, b]$, temos que a sequência das somas parciais da série de funções $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, isto é, a sequência de funções $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é uniformemente convergente para a $\underline{f}$ em $[a \,, b]$, onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$S_n(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a \,, b] \,.$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a \,, b]$, segue que que $S_n \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a \,, b]$.

Como

$$S_n \xrightarrow{u} f \,, \quad \text{em} \quad [a \,, b] \,,$$

do Corolário (3.2.2) acima, segue que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ e

$$\begin{aligned}
\int_a^b f\, d\alpha &\overset{(3.47)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b \underbrace{S_n}_{=\sum_{i=1}^{n} f_i} d\alpha \\
&\overset{\text{soma finita}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i\, d\alpha \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\, d\alpha\,,
\end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.2.9 *Na situação acima a conclusão do resultado acima pode ser reescrita como:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\, d\alpha = \int_a^b \underbrace{f}_{=\sum_{n=1}^{\infty} f_n} d\alpha = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, d\alpha\,.$$

3.2.3 Convergência uniforme e diferenciação

O resultado principal desta subseção é o:

Teorema 3.2.7 *Sejam $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$, $g : [a\,,b] \to A$ uma função e, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : [a\,,b] \to A$ que vamos supor ser diferenciável em $[a\,,b]$.*

Suponhamos que a sequência numérica $(f_n(x_o))_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente em $(A\,,d_A)$ e $f_n{}' \overset{u}{\to} g$ em $[a\,,b]$.

Então a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformente para uma função $\underline{f}$, onde a função $f : [a\,,b] \to A$ é diferenciável em $[a\,,b]$ e

$$f\,'(x) = g(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,.$$

<u>Demonstração:</u>

Dado $\varepsilon > 0$, como a sequência numérica $(f_n(x_o))_{n\in\mathbb{N}}$ converge em (A, d_A), segue que ela será uma sequência de Cauchy em $(A\,,d_A)$.

Logo poderemos encontrar $N_1 = N_1(\varepsilon\,,x_o) \in \mathbb{N}$, tal que se

$$m > n \geq N_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f_m(x_o) - f_n(x_o)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3.54}$$

Por outro lado, como a sequência de funções $(f_n{}')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $\underline{g}$ em $[a\,,b]$, segue, do Teorema (3.2.1), que ela será uma sequência de funções uniformemente de Cauchy em $[a\,,b]$, ou seja, podemos encontrar $N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que se

$$m > n \geq N_2\,, \quad \text{teremos} \quad |f_m{}'(t) - f_n{}'(t)| < \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}\,, \tag{3.55}$$

para cada $t \in [a\,,b]$.

Seja

$$N_o \doteq \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}\,.$$

Com isto, se

$$m > n \geq N_o\,, \quad \text{para cada} \quad t\,,x \in [a\,,b]\,, \quad \text{com} \quad x \leq t\,,$$

segue do, Teorema do valor Médio, aplicado à função $h : [x\,,t] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(s) \doteq f_m(s) - f_n(s)\,, \quad \text{para cada} \quad s \in [x\,,t]\,, \tag{3.56}$$

que existe $s_o \in [x\,,t] \subseteq [a\,,b]$ de tal modo que:

$$\begin{aligned} |[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(t) - f_n(t)]| &\overset{\text{Teor. Valor Médio à } h}{=} |h\,'(s_o)(x-t)| \\ &\overset{(3.56)}{=} \underbrace{|f_m{}'(s_o) - f_n{}'(s_o)|}_{\overset{m,n \geq N_o \geq N_2,\text{ e } (2.57)}{<} \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}} \underbrace{|x - t|}_{\leq b-a} \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Logo, se $m > n \geq N \geq N_o$, teremos:

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(x_o) - f_n(x_o)] + [f_m(x_o) - f_n(x_o)]| \\ &\leq \underbrace{|[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(x_o) - f_n(x_o)]|}_{\overset{(3.57)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f_n(x_o) - f_m(x_o)|}_{\overset{(3.54)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} \\ &< \varepsilon\,, \end{aligned}$$

para cada $x \in [a\,,b]$, ou seja, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções que é uniformente de Cauchy em $[a\,,b]$.

Logo segue, do Teorema (3.2.1), que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções uniformemente convergente para uma função $\underline{f}$ em $[a\,,b]$.

Para cada $x \in [a\,,b]$ e $n \in \mathbb{N}$ fixados, consideremos as funções ϕ, $\phi_n : [a\,,b] \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\phi_n(t) \doteq \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \qquad \text{e} \qquad \phi(t) \doteq \frac{f(t) - f(x)}{t - x}\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [a\,,b] \setminus \{x\}\,. \tag{3.58}$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n é diferenciável em $[a\,,b]$, logo

$$\lim_{t\to x} \phi_n(t) = \lim_{t\to x} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \overset{\text{def. de derivada}}{=} f_n{}'(x)\,. \tag{3.59}$$

Por outro, se $m > n \geq N_o$, para cada $t \in [a\,,b]$, teremos que:

$$
\begin{aligned}
|\phi_m(t) - \phi_n(t)| &= \left| \frac{f_m(t) - f_m(x)}{t - x} - \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \right| \\
&= \frac{1}{|t - x|} \, |[f_m(t) - f_m(x)] - [f_n(t) - f_n(x)]| \\
&= \frac{1}{|t - x|} \, \underbrace{|[f_m(t) - f_n(x)] - [f_m(t) - f_n(x)]|}_{\substack{\text{como em } (3.57) \\ < \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}\,|t-x|}} \\
&< \frac{1}{|t - x|} \, \frac{\varepsilon}{2\,(b - a)} \, |t - x| = \frac{\varepsilon}{2\,(b - a)}\,,
\end{aligned} \tag{3.60}
$$

ou seja, a sequência de funções $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções que é uniformente de Cauchy em $[a\,,b] \setminus \{x\}$.

Logo segue, do Teorema (3.2.1), que a sequência de funções $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções uniformemente convergente para uma função em $[a\,,b] \setminus \{x\}$.

Como

$$f_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \text{em} \quad [a\,,b]\,,$$

segue, de (3.58), que

$$\phi_n \xrightarrow{u} \phi\,, \quad \text{em} \quad [a\,,b] \setminus \{x\}\,.$$

Aplicando o Teorema (3.2.3) a sequência de funções $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ segue que, para cada $x \in [a\,,b]$, fixado, teremos:

$$f\,'(t) = \lim_{t\to x} \phi(t) \overset{L_n \doteq \lim_{t\to x} \phi_n(t) = f_n{}'(x)}{=} \lim_{n\to\infty} L_n \doteq \lim_{n\to\infty} f_n{}'(t)\,,$$

ou seja, a função $\underline{f}$ é diferenciável em $[a\,,b]$ e

$$f\,' = g\,, \quad \text{em} \quad [a\,,b]\,,$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 3.2.10

1. *Na situação acima, a conclusão do resultado pode ser reescrita como:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{d}{dx} f_n(x) \right) = g(x) = f\,'(x) = \frac{d}{dx} \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right)(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,.$$

2. *Se as funções $\underline{f_n{}'}$ do Teorema (3.2.7) acima, forem Riemann integrável em $[a\,,b]$, par todo $n \in \mathbb{N}$, uma demonstração alternativa para o Teorema (3.2.7) acima, pode ser a seguinte:*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, do fato que a função $\underline{f_n}$ for Riemann integrável em $[a, b]$, segue, do Teorema (2.4.2) (Teorema Fundamental do Cálculo - II, aplicado ao intervalo $[x_o\,, x]$ ou $[x\,, x_o]$), que

$$f_n(x) = f_n(x_o) + \int_{x_o}^{x} f_n{}'(t)\,dt\,,$$

para cada $x \in [a\,, b]$.

Como

$$f_n{}' \xrightarrow{u} g \quad \text{em} \quad [a\,, b]$$

(em particular em $[x\,, x_o]$, se $x > x_o$ ou em $[x_o\,, x]$, se $x \leq x_o$) e

$$f_n(x_o) \to c\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,,$$

do Teorema (3.2.6), segue que podemos passar o limite, quando $n \to \infty$,na igualdade acima, e assim obteremos:

$$f(x) = c + \int_{x_o}^{x} g(t)\,dt\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a, b]\,.$$

Com isto, do do Teorema (2.4.1) (Teorema Fundamental do Cálculo - I), segue que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $[a\,, b]$ e além disso,

$$f\,'(x) = g(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,, b]\,.$$

Para finalizarmos, precisaremos mostrar que $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a\,, b]$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Como consequência temos o

Corolário 3.2.3 *Sejam $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$, $g : [a\,, b] \to A$ uma função e, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : [a\,, b] \to A$, que vamos supor ser diferenciável em $[a\,, b]$.*

Suponhamos que a séria numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_o)$ seja convergente em A e a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'$ seja uniformemente convergente para a função $\underline{g}$ em $[a\,, b]$.

Então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformente para uma função $\underline{f}$, onde a função $f : [a\,, b] \to A$ é diferenciável em $[a\,, b]$ e

$$f\,'(x) = g(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,, b]\,.$$

Demonstração:

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_o)$ é convergente em $(A\,, d_A)$ e a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'$ converge uniformemente para uma função $\underline{g}$ em $[a\,, b]$, temos que a sequência numérica

$(S_n(x_o))_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $(A\,,d_A)$ e a sequência de funções $(S_n{}')_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente convergente para uma $\underline{g}$ em $[a\,,b]$, onde, para cada $n\in\mathbb{N}$, temos:

$$S_n(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x\in[a\,,b]\,.$$

Como para cada $n\in\mathbb{N}$, a função $\underline{f_n}$ é diferenciável em $[a\,,b]$, segue que a função $\underline{S_n}$ também será diferenciável em $[a\,,b]$ (pois é uma soma finita de funções diferenciáveis em $[a\,,b]$).

Logo do Teorema (3.2.7) acima, segue que a sequência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformente para uma função $\underline{f}$, onde a função $f:[a\,,b]\to A$ é diferenciável em $[a\,,b]$ e

$$f\,'(x) = g(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x\in[a\,,b]\,,$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 3.2.11 *Na situação acima a conclusão do resultado acima pode ser reescrita como:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{d}{dx}f_n(x)\right] = g(x) = f\,'(x) = \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right]\,, \quad \textit{para cada} \quad x\in[a\,,b]\,.$$

A seguir exibiremos um exemplo de uma função contínua em $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$ que **não** é diferenciável em nenhum ponto de $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$.

Teorema 3.2.8 *Existe uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que é contínua em $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$, que* **não** *é diferenciável em nenhum ponto de $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$.*

Demonstração:

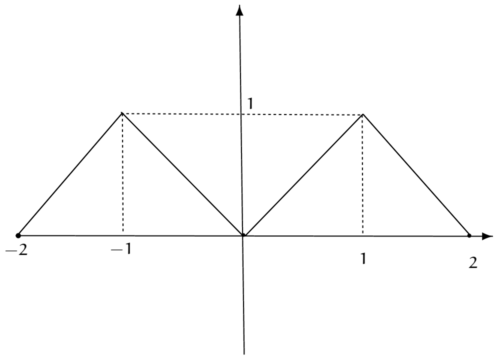
Consideremos a função $\phi:[-1\,,1]\to\mathbb{R}$ dada por

$$\phi(t) \doteq |t|\,, \quad \text{para cada} \quad t\in[-1\,,1]\,, \tag{3.61}$$

satisfazendo

$$\phi(x+2) = \phi(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x\in\mathbb{R}\,,$$

ou seja, a função $\underline{\phi}$ é a extensão 2-periódica da função módulo definida no intervalo $[-1\,,1]$ (veja a figura abaixo).



Notemos que se $s, t \in [-1, 1]$ então teremos

$$\begin{aligned} |\phi(s) - \phi(t)| &\overset{(3.61)}{=} \big||s| - |t|\big| \\ &\overset{\text{Des. triangular}}{\leq} |s - t|. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Como a função $\underline{\phi}$ é 2-periódica, segue que

$$|\phi(s) - \phi(t)| \leq |s - t|. \tag{3.63}$$

para cada $s, t \in \mathbb{R}$.

De fato, notemos que:

1. se
$$|t - s| \leq 2,$$
existem $k \in \mathbb{Z}$ e $\bar{s}, \bar{t} \in [-1, 1]$ tais que
$$s \doteq \bar{s} + 2k \quad \text{e} \quad t = \bar{t} + 2k. \tag{3.64}$$
Com isto, segue que
$$\begin{aligned} |\phi(s) - \phi(t)| &\overset{(3.64)}{=} |\phi(\bar{s} + 2k) - \phi(\bar{t} + 2k)| \\ &\overset{\phi \text{ é 2-periódica}}{=} |\phi(\bar{s}) - \phi(\bar{t})| \\ &\overset{\bar{s}, \bar{t} \in [-1,1] \text{ e } (3.62)}{\leq} |\underbrace{\bar{s}}_{\overset{(3.64)}{=} s - 2k} - \underbrace{\bar{t}}_{\overset{(3.64)}{=} t - 2k}| \\ &= |(s - 2k) - (t - 2k)| \\ &= |s - t|. \end{aligned}$$

2. se
$$|t - s| > 2, \tag{3.65}$$
existem $k, m \in \mathbb{Z}$ e $\bar{s}, \bar{t} \in [-1, 1]$ tais que
$$s \doteq \bar{s} + 2k \quad \text{e} \quad t = \bar{t} + 2m. \tag{3.66}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|\phi(s) - \phi(t)| &\overset{(3.64)}{=} |\phi(\bar{s} + 2k) - \phi(\bar{t} + 2m)| \\
&\overset{\phi \text{ é 2-periódica}}{=} |\phi(\bar{s}) - \phi(\bar{t})| \\
&\overset{\bar{s}, \bar{t} \in [-1,1] \text{ e } (3.62)}{\leq} |\bar{s} - \bar{t}| \\
&\overset{\bar{s}, \bar{t} \in [-1,1]}{\leq} 2 \overset{(3.65)}{<} |s - t|,
\end{aligned}
$$

completando a demonstração de (3.63).

De (3.63), segue que a função $\underline{\phi}$ é uma função contínua em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ (na verdade ela é uniformemente contínua em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$).

Podemos agora definir a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$
f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.67}
$$

Notemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$ e cada $n \in \mathbb{N}$, fixado teremos

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)\right| &= \left(\frac{3}{4}\right)^n \underbrace{|\phi(4^n x)|}_{\overset{(3.61)}{\leq} 1} \\
&\leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.
\end{aligned}
$$

Como a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ é convergente (é uma série geométrica de razão $\dfrac{3}{4} < 1$) segue, do Teste M de Weierstrass, que a série de funções

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x),
$$

converge uniformemente para a função $\underline{f}$.

Observemos que também que, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, definido-se a função $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$
f_n(x) \doteq \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},
$$

segue que a mesma será contínua em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Logo, do Corolário (3.2.1), segue que a função $\underline{f}$ será uma função contínua em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Para finalizar, mostraremos que a função $\underline{f}$ **<u>não</u>** é diferenciável em nenhum $x \in \mathbb{R}$.

Para isto mostraremos que, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, podemos encontrar uma sequência numérica

$$
(\delta_m)_{m \in \mathbb{N}},
$$

de modo que, quando $m \to \infty$, teremos

$$\delta_m \to 0\,, \quad \text{porém} \quad \left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right| \to \infty\,,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ **não** será diferenciável em $x \in [a\,,b]$, ou seja, não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

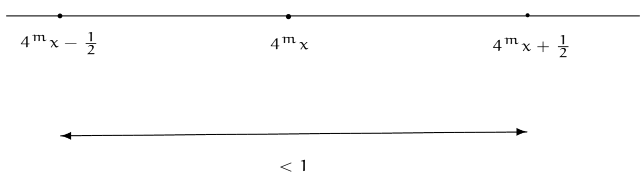
Seja $x \in \mathbb{R}$ fixo.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, escolhamos

$$\delta_m \doteq \pm\frac{1}{2}4^{-m}\,, \tag{3.68}$$

onde o sinal $\pm$ deverá ser escolhido, de modo que, **não** existe nenhum número inteiro (veja a figura abaixo):

$$\begin{array}{llll} \text{no intervalo aberto} & (4^m x\,, \overbrace{4^m(x+\delta_m)}^{\overset{(3.68)}{=} 4^m x+\frac{1}{2}})\,, & \text{se} & \delta_m > 0\,, \\ \text{ou no intervalo aberto} & (\underbrace{4^m(x+\delta_m)}_{\overset{(3.68)}{=} 4^m x-\frac{1}{2}}, 4^m x)\,, & \text{se} & \delta_m < 0\,. \end{array}$$



Podemos fazer a escolha acima pois, existe um inteiro $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$k \in \left(4^m x\,, 4^m x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{se, e somente se} \quad (k-1) \in \left(4^m x - 1\,, 4^m x - \frac{1}{2}\right)\,,$$

$$\text{ou seja (transladando-se de } \frac{1}{2}\text{)}, \quad (k-1) \notin \left(4^m x - \frac{1}{2}\,, 4^m x\right)\,,$$

ou seja, não existe um número inteiro no intervalo aberto

$$\left(4^m x - \frac{1}{2}\,, 4^m x\right)\,,$$

e assim tomaremos

$$\delta_m \doteq -\frac{1}{2}4^{-m}\,.$$

De modo semelhante, existe um inteiro $k \in \mathbb{Z}$,

$$k \in \left(4^m x - \frac{1}{2}\,, 4^m x\right)$$

$$\text{se, e somente se} \quad (k+1) \in \left(4^m x + \frac{1}{2}\,, 4^m x + 1\right)\,,$$

$$\text{ou seja (transladando-se de } -\frac{1}{2}\text{)}, \quad (k-1) \notin \left(4^m x\,, 4^m x + \frac{1}{2}\right)\,,$$

ou seja, não existe um número inteiro no intervalo aberto

$$\left(4^m x\,,\, 4^m x + \frac{1}{2}\right),$$

e assim tomaremos

$$\delta_m \doteq +\frac{1}{2}\,4^{-m}\,.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$ fixados, definamos

$$\begin{aligned}\gamma_{n,m} &\doteq \frac{\phi\left[4^n\left(x+\delta_m\right)\right]-\phi\left(4^n x\right)}{\delta_m}\\ &= \frac{\phi\left(4^n x + 4^n\,\delta_m\right)-\phi\left(4^n x\right)}{\delta_m}\end{aligned} \tag{3.69}$$

Notemos que se

$$n > m\,, \tag{3.70}$$

segue que existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$4^n\,\delta_m = 2\,k\,. \tag{3.71}$$

De fato, pois

$$|4^n\,\delta_m| \overset{(3.68)}{=} 4^n\left(\frac{1}{4^m}\,\frac{1}{2}\right) = \frac{4^{\overbrace{(n-m)}^{\overset{(3.70)}{>}0}}}{2} \quad \text{é um número natural e par,}$$

mostrando a afirmação acima.

Observação 3.2.12 *Notemos também que caso contrário, isto é, se*

$$0 \leq n \leq m\,,$$

teremos que o número

$$|4^n\,\delta_m|$$

<u>não</u> *será um número natural par.*

Logo, se vale (3.70), teremos

$$\phi\left(4^n x + \underbrace{4^n\,\delta_m}_{\overset{(3.71)}{=}2\,k}\right) \overset{\phi \text{ é 2-periódica}}{=} \phi(4^n x)\,. \tag{3.72}$$

Logo, de (3.72), segue que, se

$$n > m\,, \quad \text{teremos} \quad \gamma_{n,m} \overset{(3.69)}{=} 0\,. \tag{3.73}$$

Por outro lado, se

$$0 \leq n \leq m\,, \tag{3.74}$$

teremos

$$
\begin{aligned}
|\gamma_{n,m}| &= \left| \frac{\phi\,(4^n\,x + 4^n\,\delta_m) - \phi\,(4^n\,x)}{\delta_m} \right| \\
&= \frac{1}{|\delta_m|}\,|\phi\,(4^n\,x + 4^n\,\delta_m) - \phi\,(4^n\,x)| \\
&\overset{(3.63)}{\leq} \frac{1}{|\delta_m|}\,|(4^n\,x + 4^n\,\delta_m) - 4^n\,x| \\
&= \frac{1}{|\delta_m|}\,4^n\,|\delta_m| \\
&= 4^n,
\end{aligned}
$$

ou seja, se (3.74) ocorre, teremos:

$$
|\gamma_{n,m}| \leq 4^n\,. \tag{3.75}
$$

Observação 3.2.13 *No caso acima, da Observação (3.2.12) acima, segue que*

$$
4^m\,\delta_m\,, \qquad \underline{\text{não}}\ \textit{será um número natural par,}
$$

mas

$$
|4^m\,x + 4^m\,\delta_m - 4^m\,x| = \left| \overbrace{4^m\,\delta_m}^{=\pm\frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{2}\,,
$$

Afirmamos que existe $k \in \mathbb{Z}$, de modo que (que depende da escolha de $\underline{\delta_m}$)

$$
4^m\,x + 4^m\,\delta_m\,,\ 4^m\,x \in [2\,k - 1\,, 2\,k] \quad \text{ou} \quad 4^m\,x + 4^m\,\delta_m\,,\ 4^m\,x \in [2\,k\,, 2\,k + 1]
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
& 4^m\,x + 4^m\delta_m - 2\,k,\ 4^m\,x - 2k \in [-1\,, 0]\,, \\
\text{ou} \quad & 4^m\,x + 4^m\,\delta_m - 2\,k,\ 4^m\,x - 2\,k \in [0\,, 1]\,.
\end{aligned} \tag{3.76}
$$

De fato, se $\delta_m > 0$, segue que

$$
(4^m\,x\,, 4^m\,(x + \delta_m)) \cap \mathbb{Z} = \emptyset\,,
$$

assim, se considerarmos $N \in \mathbb{Z}$, o maio inteiro de modo que

$$
\begin{aligned}
& N \leq 4^m\,x\,, \\
\text{segue que,} \quad & N \leq 4^m\,x < 4^m\,(x + \delta_m) \leq N + 1\,.
\end{aligned} \tag{3.77}
$$

Se

$$
N = 2\,k\,,
$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$, da desigualdade (3.77) acima, segue que

$$
\begin{aligned}
& 2\,k \leq 4^m\,x < 4^m\,(x + \delta_m) \leq 2\,k + 1\,, \\
\text{isto é,} \quad & 0 \leq 4^m\,x - 2\,k < 4^m\,(x + \delta_m) - 2\,k \leq 1\,.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, se, para algum $k \in \mathbb{Z}$, temos que

$$N = 2\,k - 1\,,$$

da desigualdade (3.77) acima, segue que

$$\begin{aligned} & 2\,k - 1 \leq 4^m\,x < 4^m\,(x + \delta_m) \leq 2\,k\,, \\ \text{isto é,} \quad & -1 \leq 4^m\,x - 2\,k < 4^m\,(x + \delta_m) - 2\,k \leq 0\,, \end{aligned}$$

mostrando (3.76).

Temos algo semelhante para o caso que $\delta_m < 0$.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

Portanto

$$\begin{aligned} |\phi\,(4^m\,x + 4^m\,\delta_m) - \phi\,(4^m\,x)| & \overset{\phi \text{ é 2-periódica}}{=} |\phi\,(4^m\,x + 4^m\,\delta_m - 2\,k) - \phi\,(4^m\,x - 2\,k)| \\ & \overset{(3.76) \text{ e } (3.61)}{=} |(4^m\,x + 4^m\,\delta_m - 2\,k) - (4^m\,x - 2\,k)| \\ & = 4^m\,|\delta_m|\,. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Logo, se (3.74) ocorre, teremos:

$$\begin{aligned} |\gamma_{m\,,m}| & = \left|\frac{\phi\,(4^m\,x + 4^m\,\delta_m) - \phi\,(4^m\,x)}{\delta_m}\right| \\ & \overset{(3.78)}{=} \frac{1}{|\delta_m|} 4^m\,|\delta_m| \\ & = 4^m\,. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Portanto, para cada $m \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| & \overset{(3.67)}{=} \frac{1}{|\delta_m|} \left|\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi[4^n\,(x + \delta_m)] - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n\,x)\right| \\ & = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \underbrace{\left(\frac{\phi[4^n\,(x + \delta_m)] - \phi(4^n\,x)}{\delta_m}\right)}_{\overset{(3.69)}{=} \gamma_{n\,,m}}\right| \\ & = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_{n,m}\right| \\ & \overset{\text{de } (3.73)\ \gamma_n = 0 \text{ para } n > m}{=} \left|\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_{n\,,m}\right| \\ & = \left|\left(\frac{3}{4}\right)^m \gamma_{m,m} + \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_{n\,,m}\right| \\ & \geq \frac{3^m}{4^m} \underbrace{|\gamma_{m\,,m}|}_{\overset{(3.79)}{=} 4^m} - \left|\sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_{n\,,m}\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3^m - \left|\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_{n,m}\right| \geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \underbrace{|\gamma_{n,m}|}_{\overset{(3.75)}{\leq} 4^n} \\
&\geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n \\
&= 3^m - \frac{1-3^{m-1}}{1-3} \\
&= 3^m + \frac{1-3^m}{2} \\
&= \underbrace{3^m - \frac{3^m}{2}}_{=\frac{3^m}{2}} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(3^m + 1) \geq \frac{3^m}{2}\,.
\end{aligned}
\tag{3.80}
$$

Portanto, quando

$$
m \to \infty\,, \quad \text{temos que} \quad \delta_m \overset{(3.68)}{=} \pm\frac{1}{2\,4^m} \to 0\,,
$$

mas, de (3.80), teremos que

$$
\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| \to \infty\,,
$$

mostrando que a função $\underline{f}$ não é diferenciável em $x \in \mathbb{R}$, completando a demonstração do resultado.

□

3.3 Família de funções equicontínuas

A seguir introduziremos alguns conceitos que nos fornecerão condições suficientes para que a convergência pontual de uma sequência de funções implique na existência de uma subsequência da mesma que seja uniformemente convergente.

Para isto precisaremos, entre outras, da:

Definição 3.3.1 *Sejam* $E \neq \emptyset$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *consideremos* $f_n : E \to A$ *uma função, onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$.

Diremos que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é* **pontualmente limitada em** $\underline{E}$, *se existir uma função* $\varphi : E \to [0\,,\infty)$, *tal que*

$$
|f_n(x)| \leq \varphi(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in E\,. \tag{3.81}
$$

Diremos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é* **uniformente limitada em** $\underline{E}$, *se existir* $M \geq 0$ *tal que*

$$
|f_n(x)| \leq M\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in E \quad e \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.82}
$$

Observação 3.3.1 *Na situação da Definição (3.3.1) acima, se uma sequência de funções for uniformemente limitada em* $\underline{E}$ *ela será pontualmente limitada em* $\underline{E}$

Na situação da Definição (3.3.1) acima, se uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é pontualmente limitada será uniformemente limitada se, e somente se, a função* $\underline{\phi}$ *for uma função limitada em* $\underline{E}$.

Com isto temos a:

Proposição 3.3.1 *Sejam* $E \neq \emptyset$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, consideremos* $f_n : E \to A$ *uma função, onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$.

Suponhamos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é pontualmente limitada em* $\underline{E}$ *e que* $E_1 \subseteq E$*, é um subconjunto enumerável.*

Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$*, da sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, que é pontualmente convergente em* $\underline{E_1}$.

<u>**Demonstração:**</u>

Seja

$$E_1 \doteq \{x_1 , x_2 , \cdots\} \subseteq E . \tag{3.83}$$

Por hipótese, temos que a sequência numérica $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em (A , d_A).

Logo, do curso de Análise I, segue que existe uma subsequência $\left(f_{n_{k_1}}(x_1)\right)_{n_{k_1}\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$, que será convergente para $a_1 \in A$, em (A , d_A), ou seja,

$$f_{n_{k_1}}(x_1) \to a_1 , \quad \text{quando} \quad n_{k_1} \to \infty . \tag{3.84}$$

Mas a sequência numérica $\left(f_{n_{k_1}}(x_2)\right)_{n_{k_1}\in\mathbb{N}}$ também é limitada em (A , d_A).

Logo, pelo mesmo motivo acima, existirá uma subsequência $\left(f_{n_{k_2}}(x_2)\right)_{n_{k_2}\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $\left(f_{n_{k_1}}(x_1)\right)_{n_{k_1}\in\mathbb{N}}$, que será convergente para $a_2 \in A$, em (A , d_A), isto é,

$$f_{n_{k_2}}(x_2) \to a_2 , \quad \text{quando} \quad n_{k_2} \to \infty . \tag{3.85}$$

Notemos que, de (3.84) e (3.85), segue que

$$f_{n_{k_2}}(x_1) \to a_1 \quad \text{e} \quad f_{n_{k_2}}(x_2) \to a_2 , \quad \text{quando} \quad n_{k_2} \to \infty ,$$

Prosseguindo com as idéias acima, para cada $j \in \mathbb{N}$, podemos encontrar uma subsequência $\left(f_{n_{k_j}}\right)_{n_{k_j}\in\mathbb{N}}$, da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de modo que sequência numérica $\left(f_{n_{k_j}}(x_j)\right)_{n_{k_j}\in\mathbb{N}}$ que será convergente para $a_j \in A$, em (A , d_A), ou seja,

$$f_{n_{k_j}}(x_j) \to a_j , \quad \text{quando} \quad n_{k_j} \to \infty . \tag{3.86}$$

Em particular, para cada $i \in \{1 , 2 , \cdots , j\}$, teremos

$$f_{n_{k_j}}(x_i) \to a_i , \quad \text{quando} \quad n_{k_2} \to \infty ,$$

Com isto mostramos que existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$, da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que é pontualmente convergente em $\underline{E_1}$, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 3.3.2 *Sejam $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto e, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $f_n : K \to \mathbb{R}$ uma função contínua, de $(K, d_{\mathbb{R}})$ em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.*

*Notemos que, mesmo que a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uniformemente limitada em (K, d_R), pode **não** existir uma subsequência da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que seja pontualmente convergente para alguma função definida em $(K, d_{\mathbb{R}})$, como mostra o exemplo a seguir.*

Exemplo 3.3.1 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos a função $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f_n(x) \doteq \operatorname{sen}(n\,x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, 2\pi]\,.$$

*Afirmamos que **não exite** uma subsequência da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convegindo pontualmente para alguma função em $[0, 2\pi]$.*

Resolução:

Notemos que o conjunto

$$K \doteq [0, 2\pi]$$

é um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ (pois é fechado e limitado em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$).

Suponhamos, por absurdo, que exite uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$, da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergindo pontualmente para alguma função $\underline{f}$, definida $([0, 2\pi], d_{\mathbb{R}})$.

Neste caso, para cada $x \in [0, 2\pi]$, teremos:

$$\lim_{k \to \infty} \left[f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)\right] = \lim_{k \to \infty} [\operatorname{sen}(n_k\,x) - \operatorname{sen}(n_{k+1}\,x)] = 0\,,$$

ou seja,

$$\lim_{k \to \infty} [\operatorname{sen}(n_k\,x) - \operatorname{sen}(n_{k+1}\,x)]^2 = 0\,. \tag{3.87}$$

Com isto teríamos que

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}(n_k\,x) - \operatorname{sen}(n_{k+1}\,x)]^2\,dx \overset{\text{Exercício}}{=} \int_0^{2\pi} \underbrace{\lim_{k \to \infty} [\operatorname{sen}(n_k\,x) - \operatorname{sen}(n_{k+1}\,x)]^2}_{\overset{(3.87)}{=} 0}\,dx$$

$$= 0\,. \tag{3.88}$$

Por outro lado, observemos que:

$$\int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}(n_k\,x) - \operatorname{sen}(n_{k+1}\,x)]^2\,dx = \int_0^{2\pi} \left[\operatorname{sen}^2(n_k\,x) - 2\operatorname{sen}(n_k\,x)\operatorname{sen}(n_{k+1}\,x) + \operatorname{sen}^2(n_{k+1}\,x)\right]\,dx\,.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2(n_k\,x)\,dx &\overset{u\doteq n_k\,x \Rightarrow du = n_k\,dx}{=} \int \operatorname{sen}^2(u)\frac{1}{n_k}\,du \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2n_k}\left[u - \frac{\operatorname{sen}(2u)}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2\,n_k}\left[n_k\,x - \frac{\operatorname{sen}\,(2\,n_k x)}{2}\right],\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(n_k\,mx)\,dx &= \frac{1}{2\,n_k}\left[n_k\,x - \frac{\operatorname{sen}(2\,n_k\,x)}{2}\right]\Big|_{x=0}^{x=2\pi} \\ &= \frac{n_k\,2\,\pi}{2\,n_k} = \pi\,.\end{aligned}$$

Logo

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\,n_k\,x)\,dx = \pi\,. \tag{3.89}$$

De modo semelhante teremos

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(n_{k+1}\,x)\,dx = \pi\,. \tag{3.90}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Finalmente

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(n_k\,x)\operatorname{sen}(n_{k+1}\,x)\,dx &\overset{\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)=\frac{\cos(a-b)\,\cos(a+b)}{2}}{=} \int \frac{1}{2}\left[\cos(n_k\,x - n_{k+1}\,x) - \cos(n_k\,x + n_{k+1}\,x)\right]\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(n_k\,x - n_{k+1}\,x)}{n_k - n_{k+1}} - \frac{\operatorname{sen}(n_k\,x + n_{k+1}\,x)}{n_k + n_{k+1}}\right], \qquad (3.91)\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(n_k\,x)\operatorname{sen}(n_{k+1}\,x)\,dx &\overset{\text{Teor. Fund. Cálc. e (3.91)}}{=} \left[\frac{\operatorname{sen}(n_k\,x - n_{k+1}\,x)}{n_k - n_{k+1}} - \frac{\operatorname{sen}(n_k\,x + n_{k+1}\,x)}{n_k + n_{k+1}}\right]\Big|_{x=0}^{x=2\pi} \\ &= 0\,. \qquad (3.92)\end{aligned}$$

Portanto, (3.89), (3.90), (3.92) e (3.88) darão origem a um absurdo, pois

$$2\,\pi \overset{(3.89),(3.90),(3.92)}{=} \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}(n_k\,x) - \operatorname{sen}(n_{k+1}\,x)]^2\,dx \overset{(3.88)}{=} 0\,.$$

Isto nos mostra que, **<u>não</u>** poderá existir uma subsequência da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convegindo pontualmente, em $[0\,,2\,\pi]$, para alguma função $\underline{f}$, definida $[0\,,2\,\pi]$.

Observação 3.3.3 *Uma outra questão importante é saber se uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que é pontualmente convergente em $\underline{E}$, pode conter uma subsequência que seja uniformemente convergente $\underline{E}$, onde $E \subseteq \mathbb{R}$.*

O Exemplo a seguir nos mostra que isto, em geral, pode **<u>não</u>** *ocorrer, mesmo que, a convergência pontual da sequência de funções seja em um compacto de $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$.*

Exemplo 3.3.2 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{x^2}{x^2 + (1 - n\,x)^2}, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0,1].$$

Afirmamos que **não exite** *uma subsequência da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergindo uniformemente para alguma função definida em $[0,1]$.*

Demonstração:

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$x^2 + (1 - n\,x)^2 \geq x^2 \geq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in [0,1].$$

Além disso, temos que

$$\underbrace{x^2 + (1 - n\,x)^2}_{(1+n^2)x^2 - 2\,n\,x + 1} = 0, \quad \text{não admite solução, pois} \quad \Delta = -4 < 0.$$

Assim

$$x^2 + (1 - n\,x)^2 > 0, \quad \text{para cada} \quad x \in [0,1].$$

Logo,

$$x^2 + (1 - n\,x)^2 \neq 0$$

assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{f_n}$ está bem definida.

Além disso

$$|f_n(x)| = \frac{x^2}{x^2 + (1 - n\,x)^2} \overset{x^2+(1-n\,x)^2 \geq x^2}{\leq} 1, \quad \text{para cada} \quad x \in [0,1],$$

ou seja, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $[0,1]$.

Notemos que, para cada $x \in [0,1]$ fixado, temos que

$$x^2 + (1 - n\,x)^2 \to \infty, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

com isto teremos que

$$f_n(x) \to 0,$$

ou seja,

$$f_n \to 0, \quad \text{pontualmente em} \quad ([0,1], d_{\mathbb{R}}). \tag{3.93}$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left[1 - n\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2} = 1. \tag{3.94}$$

Se alguma subsequência, da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, fosse convergente uniformemente, em $[0,1]$, para alguma função $\underline{f}$ definida em $[0,1]$, de (3.93), deveríamos ter

$$f_n \xrightarrow{u} f \overset{(3.93)}{=} 0, \quad \text{em} \quad [0,1].$$

Em particular, teríamos:

$$\frac{1}{n} \to 0\,, \quad \text{e por (3.93), deveria implicar que} \quad \underbrace{f_n\left(\frac{1}{n}\right)}_{\overset{(3.94)}{=} 1} \to 0\,, \quad \text{em} \quad (\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$$

o que seria um absurdo.

Portanto nenhuma subsequência, da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, poderá convergir uniformemente, em $[0\,,1]$, para alguma função definida $[0\,,1]$, como afirmamos.

Observação 3.3.4 *Poderíamos ter considerado o seguinte exemplo alternativo, para a situação acima: para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f_n(x) \doteq x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,.$$

Afirmamos que **não exite** *uma subsequência, da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergindo uniformemente, em $([0\,,1]\,,d_{\mathbb{R}})$, para alguma função, definida em $[0\,,1]$.*

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Com isto temos o:

Teorema 3.3.1 *Sejam $E \neq \emptyset$ subconjunto enumerável e $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.*

Consideremos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções definidas em $\underline{E}$, tomando valores em $\underline{A}$, que é pontualmente limitada em $\underline{E}$.

Então a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge pontualmente em $\underline{E}$.

Demonstração:

Como o conjunto $\underline{E}$ é enumerável, podemos denotar seus elementos da seguinte forma:$e_1\,, e_2\,, \cdots$, ou seja,

$$E \doteq \{e_1\,, e_2\,, \cdots\}\,.$$

Como a sequência numérica $(f_n(e_1))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\underline{E}$, segue que existe uma subsequência, que indicaremos por $\left(f_{n_{k_1}}(e_1)\right)_{n_{k_1}\in\mathbb{N}}$, que é convegente para $\underline{a_1}$, em $(A\,, d_A)$.

Notemos que a sequência numérica $\left(f_{n_{k_1}}(e_2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $(A\,, d_A)$.

Logo existe uma subsequência, que indicaremos por $\left(f_{n_{k_2}}(e_2)\right)_{n_{k_2}\in\mathbb{N}}$, da sequência numérica $\left(f_{n_{k_1}}(e_2)\right)_{n_{k_1}\in\mathbb{N}}$, que é convegente para $\underline{a_2}$, em $(A\,, d_A)$.

Com isto teremos que

$$f_{n_{k_2}}(e_1) \to a_1\,, \quad \text{quando} \quad n_{k_2} \to \infty\,,$$
$$f_{n_{k_2}}(e_2) \to a_2\,, \quad \text{quando} \quad n_{k_2} \to \infty\,.$$

Prosseguindo no processo acima, encontramos uma subsequência $\left(f_{n_{k_j}}\right)_{n_{k_j}\in\mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$, teremos que a sequência numérica $\left(f_{n_{k_j}}(e_i)\right)_{n_{k_j}\in\mathbb{N}}$

que será convergente para $\underline{a_i}$, em (A, d_A), mostrando que existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k k\in\mathbb{N}}$, da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que é pontualmente convergente em $\underline{E}$, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 3.3.5 *Para o resultado que vem a seguir precisaremos da caracterização geral de subconjuntos compactos de um espaço métrico* (X, d_X), *que é a seguinte:*

Diremos que um subconjunto $K \subseteq X$ *é* **compacto em (X, d_X)** *se, para cada família* $\{O_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ *onde, para cada* $\lambda \in \Lambda$, *temos que* O_λ *é um subconjunto aberto de* (X, d_X), *satisfazendo*

$$K \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda ,$$

podemos encontrar

$$i_1, i_2, \cdots, i_N \in \mathbb{N},$$

de modo que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} O_{i_j} ,$$

ou seja, toda cobertura por subconjunto abertos de (X, d_X), *do conjunto* $\underline{K}$, *possui uma subcobertura finita, que ainda cobre o conjunto* $\underline{K}$.

Vamos agora introduzir a:

Definição 3.3.2 *Sejam* (X, d_X) *um espaço métrico,* $E \subseteq X$, *não vazio, e* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$.

Uma família $\underline{\mathfrak{F}}$, *formada por funções* $f : E \to A$, *será dita* **equicontínua em (E, d_X)**, *se dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *tal que, para* $x, y \in E$ *satisfazendo:*

$$d_X(x, y) < \delta , \quad \textit{devemos ter} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon , \quad \textit{para toda} \quad f \in \mathfrak{F} . \tag{3.95}$$

Observação 3.3.6 *Notemos que se a família* $\underline{\mathfrak{F}}$ *é equicontínua em* (E, d_X) *e* $f \in \mathfrak{F}$, *então a função* $\underline{f}$ *será uniformemente contínua de* (E, d_X), *em* (A, d_A).

A verificação deste fato é imediata e os detalhes serão deixados como exercício para o leitor.

Podemos agora enunciar e demonstrar o:

Teorema 3.3.2 *Sejam* (X, d_X) *um espaço métrico,* $K \subseteq X$ *subconjunto compacto, não vazio,* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$ *e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos* $f, f_n \in C(K; A)$.

Suponhamos que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seja uma sequência uniformemente convergente em* $\underline{K}$, *para a função* $\underline{f}$ *definida* $\underline{K}$ *e tomando valores em* $\underline{A}$.

Então a família de funções

$$\mathfrak{F} \doteq \{f_n ; n \in \mathbb{N}\}$$

será uma família equicontínua em (K, d_X).

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como

$$f_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \text{em} \quad \underline{K}\,,$$

segue que existe $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que se

$$n \geq N_o\,, \quad \text{deveremos ter} \quad \|f_n - f_{N_o}\| < \frac{\varepsilon}{3}\,, \tag{3.96}$$

onde

$$\|g\| \doteq \sup_{x \in K} |g(x)|\,.$$

Como a função $\underline{f_{N_o}}$ é contínua em $(K\,, d_X)$, que é um subconjunto compacto de $(X\,, d_X)$, segue que a função $\underline{f_{N_o}}$ será uniformemente contínua em $(K\,, d_X)$ (resultados vistos em Análise I).

Logo, podemos encontrar $\delta_o = \delta_o(\varepsilon\,, N_o) > 0$, tal que se $x\,, y \in K$ satisfazem

$$d_X(x\,, y) < \delta_o\,, \quad \text{segue que} \quad |f_{N_o}(x) - f_{N_o}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{3.97}$$

Logo, se $n \geq N_o$ e $x\,, y \in K$, são tais que

$$d(x\,, y) < \delta_o\,,$$

de (3.96) e (3.97), segue que

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_n(y)| &= |f_n(x) - f_n(y) - f_{N_o}(x) + f_{N_o}(x) - f_{N_o}(y) + f_{N_o}(y)| \\
&\leq \underbrace{|f_n(x) - f_{N_o}(x)|}_{\leq \sup_{x \in K} |f_n(x) - f_{N_o}(x)|} + |f_{N_o}(x) - f_{N_o}(y)| + \underbrace{|f_{N_o}(y) - f_n(y)|}_{\leq \sup_{x \in K} |f_{N_o}(x) - f_n(x)|} \\
&\leq \underbrace{\|f_n - f_{N_o}\|}_{\overset{(3.96)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{N_o}(x) - f_{N_o}(y)|}_{\overset{(3.97)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_{N_o} - f_n\|}_{\overset{(3.96)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Notemos que, para cada $n \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, N_o - 1\}$, como $f_n \in C(K\,; A)$ e $\underline{K}$ é um subconjunto compacto de $(X\,, d_X)$, segue que a função $\underline{f_n}$ será uniformemente contínua em $(K\,, d_X)$, ou seja, existe $\delta_n = \delta_n(\varepsilon, f_n) > 0$ de modo que, se $x\,, y \in K$ satisfazem

$$d_X(x\,, y) < \delta_n\,, \quad \text{segue que,} \quad |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon\,. \tag{3.99}$$

Deste modo, considerando

$$\delta \doteq \min\{\delta_o\,, \delta_1\,, \cdots\,, \delta_{N_o - 1}\} > 0\,, \tag{3.100}$$

segue que, se $x\,, y \in K$ satisfazem

$$d_X(x\,, y) < \delta_n \overset{(3.100)}{\leq} \delta_i\,, \quad \text{para } i \in \{0\,, 1\,, \cdots\,, N_o - 1\}\,,$$

$$\text{segue, de (3.99) e (3.98), que} \quad |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon\,,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, mostrando que a família de funções $\underline{\mathfrak{F}}$ é equicontínua em (K, d_X), completando a demonstração do resultado.

$\square$

Podemos agora enunciar e demonstrar o seguinte importante resultado, conhecido como **Teorema de Arzelá-Ascoli**:

Teorema 3.3.3 *Sejam* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$, (X, d_X) *um espaço métrico,* $K \subseteq X$ *um subconjuto compacto e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tenhamos* $f_n \in C(K; A)$.

Suponhamos que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é pontualmente limitada e equicontínua em* (K, d_X).

Então:

1. *a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uniformente limitada em* (K, d_X) *;*

2. *a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possui uma subsequência, que é uniformemente convergente em* (K, d_X) *.*

Demonstração:
De 1.:

Dado $\varepsilon = 1 > 0$, como a família de funções

$$\mathfrak{F} \doteq \{f_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$$

é equicontínua em (K, d_X), segue que existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, de modo que, se $x, y \in K$ satisfazem

$$d_X(x, y) < \delta, \quad \text{devemos ter:} \quad |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon = 1, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.101}$$

Para cada

$$a \in X \quad \text{e} \quad r > 0$$

denotaremos por $\mathcal{B}(a; r)$, a bola aberta de centro em $\underline{a}$ e raio $\underline{r}$, em (X, d_X), ou seja:

$$\mathcal{B}(a; r) \doteq \{x \in X;\ d_X(x, a) < r\}.$$

Como $K \subseteq X$ é um subconjunto compacto de (X, d_X) e

$$K \subseteq \bigcup_{x\in K} \mathcal{B}(x; \delta),$$

segue que, existirão

$$p_1, \cdots, p_{N_o} \in K,$$

tais que:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_o} \mathcal{B}(p_i; \delta). \tag{3.102}$$

Por outro lado, como a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é pontualmente limitada em (K, d_X), segue que, para cada $i \in \{1, \cdots, N_o\}$, existirá $M_i > 0$, tal que

$$|f_n(p_i)| < M_i, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.103}$$

Seja
$$M \doteq \max\{M_i \,;\, i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N_o\}\}\,. \tag{3.104}$$

Notemos que, para cada $x \in K$, segue de (3.102), que existirá $i_o \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N_o\}$, de modo que
$$x \in \mathcal{B}(p_{i_o}\,;\delta)\,. \tag{3.105}$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= |f_n(x) - f_n(p_{i_o}) + f_n(p_{i_o})| \\
&\leq \underbrace{|f_n(x) - f_n(p_{i_o})|}_{d_X(x\,,p_{i_o}) \overset{(3.105)}{<} \delta\,,\ \text{logo (3.101) implicará} \ < 1} + \underbrace{|f_n(p_{i_o})|}_{\overset{(3.103)}{\leq} M_{i_o} \overset{(3.104)}{\leq} M} \\
&\leq 1 + M\,,
\end{aligned}$$

mostrando que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformente limitada em $(K\,,d_X)$, completando a demonstração de 1. .

<u>**De 2.**</u>:

Para demonstrarmos 2., notemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos que:
$$K \subseteq \bigcup_{x\in K} \mathcal{B}\left(x\,;\frac{1}{m}\right)\,.$$

Assim, da compacidade do conjunto <u>K</u> em $(X\,,d_X)$, para cada $m \in \mathbb{N}$, segue que existirão
$$x_{i_1}\,, x_{i_2}\,,\cdots\,, x_{i_{N_m}} \in K\,,$$
de modo que
$$K \subseteq \bigcup_{m=1}^{N_m} \mathcal{B}\left(x_{i_m}\,;\frac{1}{m}\right)\,. \tag{3.106}$$

Consideremos, para cada $m \in \mathbb{N}$, o conjunto finito:
$$E_m \doteq \{x_{i_m}\,;\, m \in \mathbb{N}\} \subseteq K$$

Notemos que, dado $\eta > 0$, podemos escolher $m \in \mathbb{N}$, de modo que
$$\frac{1}{m} < \eta\,. \tag{3.107}$$

Logo, de (3.106), teremos
$$x \in K \subseteq \bigcup_{m=1}^{N_m} \mathcal{B}\left(x_{i_m}\,;\frac{1}{m}\right)\,,$$
o que implicará que
$$x \in B\left(x_{i_{m_o}}\,;\frac{1}{m}\right)\,,$$

para algum $m_o \in \{1, 2, \cdots, N_m\}$, ou seja,

$$d_X(x, x_{i_{m_o}}) < \frac{1}{m} \overset{(3.107)}{<} \eta,$$

ou ainda,

$$x \in \mathcal{B}(x_{i_{m_o}}; \eta), \quad \text{ou ainda,} \quad x_{i_{m_o}} \in \mathcal{B}(x; \eta). \tag{3.108}$$

Definamos

$$E \doteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m \overset{\text{reunião enumerável de conjuntos finitos é enumerável}}{=} \{x_j; j \in \mathbb{N}\},$$

onde, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $m_j \in \mathbb{N}$, tal que $x_j \in E_{m_j}$.

Notemos que, para cada $\eta > 0$, de (3.108), segue que existe $x_{j_o} \in E$ de modo que

$$x_{j_o} \in \mathcal{B}(x; \eta),$$

isto é,

$$\overline{E} = K.$$

Notemos que, do Teorema (3.3.1), segue que existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$, da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que converge pontualmente em $\underline{E}$ (pois $\underline{E}$ é enumerável, a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é pontualmente limitada em $\underline{K}$, e $E \subseteq K$), ou seja,

$$\text{a sequência numérica } (f_{n_k}(x))_{n_k \in \mathbb{N}} \text{ converge em } (A, d_A), \text{ para cada } x \in E. \tag{3.109}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos a função $g_k : K \to A$ dada por

$$g_k(x) \doteq f_{n_k}(x), \quad \text{para cada} \quad x \in K. \tag{3.110}$$

Afirmamos que a sequência de funções $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformente em (K, d_X), o que completará a demonstração de 2., pois a sequência $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é a subsequência $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Mostremos então que

$$g_k \overset{u}{\to} g \quad \text{em} \quad (K, d_X),$$

para alguma $g \in C(K; A)$.

Defato, dado $\varepsilon > 0$, consideremos $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, como em (3.101) (obtido do fato que a família de funções $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ é equicontínua em $\underline{K}$).

Notemos que se $x \in K$, como

$$\overline{E} = K,$$

segue que

$$x \in \mathcal{B}(x_{j_x}; \delta), \quad \text{para algum} \quad j_x \in \mathbb{N}. \tag{3.111}$$

Assim

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} \mathcal{B}(x; \delta) \overset{(3.111)}{\subseteq} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(x_j; \delta).$$

Como o conjunto $\underline{K}$ é um subconjunto compacto em $(X\,,d_X)$, segue que

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} \mathcal{B}(x_k\,;\delta)\,, \tag{3.112}$$

renomeando, se necessário, os elementos do conjunto $\underline{E}$.

Notemos que de (3.109), temos que a sequência numérica $(g_k(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $(A\,,d_A)$.

Logo, cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}$, a sequência numérica $(g_k(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ será uma sequência numérica de Cauchy em $(A\,,d_A)$.

Assim, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}$, exitirá $N_j = N_j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, de modo que, se

$$i\,,k \geq N_j\,, \quad \text{teremos}, \quad |g_i(x_j) - g_k(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{3.113}$$

Consideremos

$$\overline{N} \doteq \max\{N_j\,;\, j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}\} \in \mathbb{N}\,. \tag{3.114}$$

De (3.113), segue que, se

$$i\,,k \geq \overline{N}, \quad \text{teremos} \quad |g_i(x_j) - g_k(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}\,. \tag{3.115}$$

Notemos que, se $x \in K$, de (3.112), segue que que

$$x \in \mathcal{B}(x_{j_o}\,;\delta)\,,$$

para algum $j_o \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}$.

Assim,

$$d(x\,,x_{j_o}) < \delta$$

e, de (3.101), segue:

$$|\underbrace{g_i(x)}_{f_{n_i}(x)} - \underbrace{g_i(x_{j_o})}_{f_{n_i}(x_{j_o})}| = |f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_{j_o})| \overset{(3.101)}{<} \frac{\varepsilon}{3}\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{N}\,. \tag{3.116}$$

Portanto se

$$i\,,k \geq \overline{N}\,,$$

teremos

$$\begin{aligned}
|g_i(x) - g_k(x)| &= |[g_i(x) - g_k(x)] + [g_i(x_{j_o}) - g_i(x_{j_o})] + [g_k(x_{i_o}) - g_k(x_{i_o})]| \\
&\leq \underbrace{|g_i(x) - g_i(x_{j_o})|}_{\overset{d(x,x_{j_o})<\delta \text{ e } (3.116)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|g_i(x_{j_o}) - g_k(x_{i_o})|}_{\overset{i,k\geq\overline{N} \text{ e } (3.115)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|g_k(x_{i_o}) - g_k(x)|}_{\overset{d(x,x_{j_o})<\delta \text{ e } (3.116)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ou seja, a sequência de funções $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será uniformemente de Cauchy em $(K\,,d_X)$.

Logo, do Teorema (3.2.1) (na verdade do item 2. da Observação (3.2.2)), segue que a sequência $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será uniformemente convergente em $(K\,,d_X)$, ou seja, existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$, da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que converge uniformemente em $(K\,,d_X)$, completando a demonstração do item 2. e portanto do resultado.

□

3.4 O Teorema de Stone-Weierstrass

O **Teorema de Stone-Weierstrass** nos diz que o conjunto formado pelos polinômios, com coeficientes complexos, é denso nas funções contínuas definidas em um intervalo fechado e limitado a valores complexos, com a métrica da convergência uniforme, mais especificamente:

Teorema 3.4.1 (Teorema de Stone-Weierstrass) *Seja* $f \in C([a\,,b]\,;\mathbb{C})$.

Então existe uma sequência de funções $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, formada por polinômios (com coeficientes complexos), de modo que*

$$p_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \textit{em} \quad [a\,,b]\,. \tag{3.117}$$

Se $f \in C([a\,,b]\,;\mathbb{R})$*, então a sequência* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pode ser escolhida com coeficientes reais.*

Demonstração:

Começaremos mostrando as seguintes afirmações:

1. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$[a\,,b] = [0\,,1]\,.$$

De fato, suponhamos que para

$$g \in C([0\,,1]\,;\mathbb{C})\,,$$

exista uma sequência de funções $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, formada por polinômios (com coeficientes complexos), de modo que

$$q_n \xrightarrow{u} g\,, \quad \text{em} \quad [0\,,1]\,. \tag{3.118}$$

Dada

$$f \in C[a\,,b]\,;\mathbb{C})\,,$$

consideremos $g : [0\,,1] \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(x) \doteq f[a + x\,(b-a)]\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,. \tag{3.119}$$

Com isto teremos que

$$g \in C([0\,,1]\,;\mathbb{C})\,.$$

Logo, de (3.118), existirá uma sequência de funções $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, formada por polinômios (com coeficientes complexos), de modo que

$$q_n \xrightarrow{u} g\,, \quad \text{em} \quad [0\,,1]\,. \tag{3.120}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considerando-se a função $p_n : [a\,,b] \to \mathbb{C}$ dada por

$$p_n(x) \doteq q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{3.121}$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{p_n}$, dada por (3.120), será uma função polinomial definida em $[a\,,b]$.

Com isto, de (3.120) e (3.121), segue que que

$$\begin{aligned} p_n(\cdot) = q_n\left(\frac{\cdot - a}{b-a}\right) &\overset{\text{uniformemente quando } n\to\infty}{\longrightarrow} g\left(\frac{\cdot - a}{b-a}\right) \\ &\overset{(3.119)}{=} f\left[a + \left(\frac{\cdot - a}{b-a}\right)(b-a)\right] = f(\cdot)\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$p_n \xrightarrow{u} f, \quad \text{em} \quad [a\,,b],$$

mostrando que a afirmação 1. é verdadeira.

2. Também podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$f(0) = f(1) = 0\,. \tag{3.122}$$

De fato, suponhamos que, para $g \in C([0\,,1]\,;\mathbb{C})$, satisfazendo

$$g(0) = g(1) = 0,$$

exista uma sequência de funçoes $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, formada por polinômios (com coeficientes complexos), de modo que

$$q_n \xrightarrow{u} g\,, \quad \text{em} \quad [0\,,1]\,. \tag{3.123}$$

Dada

$$f \in C([0\,,1]\,;\mathbb{C})\,,$$

se considerarmos a função $g : [0\,,1] \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(x) \doteq f(x) - f(0) - x\,[f(1) - f(0)]\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,, \tag{3.124}$$

segue que

$$g \in C([0\,,1]\,;\mathbb{C})$$

e além disso

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) - f(0) - 0\,[f(1) - f(0)] = 0\,, \\ g(1) &= f(1) - f(0) - 1\,[f(1) - f(0)] = 0\,. \end{aligned}$$

Notemos também que, de (3.124), teremos:

$$f(x) = g(x) + f(0) + x\,[f(1) - f(0)]\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,. \tag{3.125}$$

Logo, de (3.123), existe uma sequência de funções $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, formada por polinômios (com coeficientes complexos) de modo que

$$q_n \xrightarrow{u} g\,, \quad \text{em} \quad [0\,,1]\,. \tag{3.126}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $p_n : [0\,,1] \to \mathbb{C}$, dada por

$$p_n(x) \doteq q_n(x) + f(0) + x\,[f(1) - f(0)]\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,. \tag{3.127}$$

Notemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, que a função $\underline{p_n}$, dada por (3.126), é uma função polinomial. Além disso, de (3.127) e (3.126), segue que

$$p_n(\cdot) \stackrel{(3.127)}{=} q_n(\cdot) + f(0) + \cdot\,[f(1) - f(0)] \stackrel{\text{uniformemente se } n\to\infty}{\longrightarrow} g(\cdot) + f(0) + \cdot\,[f(1) - f(0)]$$
$$\stackrel{(3.125))}{=} f(\cdot)\,,$$

em $[0\,1]$, ou seja,

$$p_n \stackrel{u}{\to} f\,, \quad \text{em} \quad [0\,,1]\,,$$

mostrando que a afirmação 2. é verdadeira.

Resumindo as duas afirmações acima, sem perda de generalidade, podemos supor que

$$f \in C([0\,,1]\,;\mathbb{C})$$

e satisfaz

$$f(0) = f(1) = 0\,. \tag{3.128}$$

Com isto, podemos estender a função $\underline{f}$, continuamente, à reta toda, do seguinte modo (indicaremos a extensão da mesma também por $\underline{f}$) a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será dada por:

$$f(x) \doteq \begin{cases} f(x)\,, & \text{para} \quad x \in [0\,,1] \\ 0\,, & \text{para} \quad x \in [0\,,1]^c \doteq (-\infty\,,0) \cup (1\,,\infty) \end{cases}\,. \tag{3.129}$$

Com isto a função $\underline{f}$ será uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.
A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $q_n : [-1\,,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$q_n \doteq c_n\,(1 - x^2)^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [-1\,,1]\,, \tag{3.130}$$

onde a constante $c_n \in (0\,,\infty)$ é considerada de modo que

$$\int_{-1}^{1} q_n(x)\,dx = 1\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad c_n \doteq \frac{1}{\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\,dx}\,. \tag{3.131}$$

Notemos também que, para cada $x \in \left[0\,,\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$, pelo Binômio de Newton, temos:

$$\begin{aligned}
(1 - x^2)^n &\stackrel{\text{Bin. Newton}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}\,(-x^2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}(-1)^k\,x^{2k} \\
&= 1 - n\,x^2 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}(-1)^k x^{2k}}_{\geq 0,\ \text{pois},\ \frac{n!}{[n-(m+1)]!\,(m+1)!}x^{2m+2} \leq \frac{n!}{(n-m)!\,m!}x^{2m}\,,\ \text{para } x \in \left[0\,,\frac{1}{\sqrt{n}}\right]}
\end{aligned}$$

$$\geq 1 - n\,x^2. \tag{3.132}$$

Por outro lado, observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n \, dx &\overset{\left(1-x^2\right)^n \text{ é par}}{=} 2\int_0^1 \underbrace{\left(1-x^2\right)^n}_{\geq 0} \, dx \\
&\overset{\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1}{\geq} 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(1-x^2\right)^n \, dx \\
&\overset{(3.132)}{\geq} 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(1-n\,x^2\right) \, dx \\
&= 2\left(x - n\,\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{\sqrt{n}}} \\
&= 2\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} - \underbrace{\frac{n}{3\,n^{\frac{3}{2}}}}_{=\frac{1}{3\,n^{\frac{1}{2}}}}\right) \\
&= \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}\,,
\end{aligned} \tag{3.133}$$

o que implicará em

$$\begin{aligned}
c_n &\overset{(3.131)}{=} \frac{1}{\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n \, dx} \\
&\overset{(3.133)}{<} \sqrt{n}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned} \tag{3.134}$$

Notemos também que, se

$$0 < \delta < 1\,, \tag{3.135}$$

$$\begin{aligned}
\text{e} \quad & \delta \leq |x| \leq 1 \\
\text{então,} \quad & \delta^2 \leq x^2\,, \\
\text{ou ainda,} \quad & 1 - x^2 \leq 1 - \delta^2 \leq \left(1-\delta^2\right)\,.
\end{aligned} \tag{3.136}$$

$$\begin{aligned}
\text{assim, se} \quad & \delta \leq |x| \leq 1\,, \\
\text{teremos que,} \quad & 0 \leq q_n(x) \\
& = \underbrace{c_n}_{\overset{(3.134)}{<} \sqrt{n}} \left(\underbrace{1-x^2}_{\overset{(3.136)}{\leq} 1-\delta^2}\right)^n \\
& < \sqrt{n}\,\left(1-\delta^2\right)^n.
\end{aligned} \tag{3.137}$$

Mas

$$\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n = n^{\frac{1}{2}}\,(1-\delta^2)^n$$
$$= \left[n^{\frac{1}{2n}}\,(1-\delta^2)\right]^n \to 0\,,\quad \text{quando} \quad n\to\infty\,, \tag{3.138}$$

pois, $\quad n^{\frac{1}{2n}} = e^{\frac{1}{2n}\ln(n)} \to 1\,,\quad$ quando $\quad n\to\infty$

e

$$(1-\delta^2)^n \in (0\,,1)\,,$$

pois temos (3.135).

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, de modo que se

$$n \geq N\,,\quad \text{segue que,}\quad 0 \leq \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3.139}$$

Logo, para cada $x \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\delta \leq |x| \leq 1\,,$$

de (3.130), (3.137) e (3.138), segue que

$$q_n(x) \to 0\,,\quad \text{quando} \quad n\to\infty\,. \tag{3.140}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $p_n : [0\,,1] \to \mathbb{C}$, dada por

$$p_n(x) \doteq \int_{-1}^{1} f(x+t)\,q_n(t)\,dt\,,\quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,. \tag{3.141}$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, as funções $\underline{f}$ e $\underline{q_n}$ são funções contínuas em $[-1\,,1]$, segue que a função $\underline{p_n}$ está bem definida.

Notemos que, para cada $x \in [0\,,1]$, como (ver (3.129))

$$f \equiv 0\,,\quad \text{em} \quad (-\infty\,,0] \cup [1\,,\infty)\,, \tag{3.142}$$

segue, que para

$$t \in [-1\,,-x]\,,\qquad \text{isto é,}\quad t+x \in [x-1\,,0] \subseteq (-\infty\,,0]\,,$$

de (3.142), teremos $\qquad f(x+t) = 0 \qquad (3.143)$

$$t \in [1-x\,,1]\,,\qquad \text{isto é,}\quad t+x \in [1\,,1+x] \subseteq [1\,,\infty)\,,$$

de (3.142), teremos $\qquad f(x+t) = 0\,. \qquad (3.144)$

Logo

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= \int_{-1}^{1} f(x+t)\,q_n(t)\,dt \\
&= \int_{-1}^{-x} \underbrace{f(x+t)}_{\overset{(3.143)}{=}0}\,q_n(t)\,dt + \int_{-x}^{1-x} f(x+t)q_n(t)\,dt + \int_{1-x}^{1} \underbrace{f(x+t)}_{\overset{(3.144)}{=}0}\,q_n(t)\,dt \\
&= \int_{-x}^{1-x} f(x+t)q_n(t)\,dt \\
&\overset{\left(\begin{smallmatrix} u \doteq x+t\,,\ \text{logo, } du = dt \\ t=-x\,,\ \text{logo, } u=0 \\ t=1-x\,,\ \text{logo, } u=1 \end{smallmatrix}\right)}{=} \int_0^1 f(u)\,q_n(u-x)\,du\,.
\end{aligned}$$

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o lado direito da igualdade acima, é um polinômio na variável $\underline{x}$, ou seja, a sequência de funções $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções polinomiais (que serão a valores reais, se a função $\underline{f}$ for a valor real).

Afirmamos que

$$p_n \xrightarrow{u} f \quad \text{em} \quad [0\,,1].$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, como a função $\underline{f}$ é uniformemente contínua, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que se

$$|y - x| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3.145}$$

Seja

$$M \doteq \sup_{x\in[0\,,1]} |f(x)| \quad \left(\overset{(3.129)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\right). \tag{3.146}$$

Com isto, para cada $x \in [0\,,1]$ e $n \in \mathbb{N}$, teremos que:

$$\begin{aligned}
|p_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} f(x+t)\, q_n(t)\, dt - f(x) \underbrace{\int_{-1}^{1} q_n(t)\, dt}_{\overset{(3.131)}{=} 1} \right| \\
&= \left| \int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)]\, q_n(t)\, dt \right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, |\underbrace{q_n(t)}_{\geq 0}|\, dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{-\delta} \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{\overset{(3.146)}{\leq} 2M} q_n(t)\, dt + \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{\overset{(3.145)}{<} \frac{\varepsilon}{2},\ \text{pois } |(x+t)-x| = |t| < \delta} q_n(t)\, dt \\
&\quad + \int_{\delta}^{1} \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{\overset{(3.146)}{\leq} 2M} q_n(t)\, dt \\
&< 2M \left(\int_{-1}^{-\delta} \underbrace{q_n(t)}_{\overset{(3.137)}{\leq} \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n} dt + \int_{\delta}^{1} \underbrace{q_n(t)}_{\overset{(3.137)}{\leq} \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n} dt \right) + \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} q_n(t)\, dt}_{\leq \int_{-1}^{1} q_n(t)\, dt \overset{(3.131)}{=} 1} \\
&\leq 2M \left[2\sqrt{n}\, \left(1 - \delta^2\right)^n\right] \underbrace{\delta}_{<1} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \underbrace{4M\sqrt{n}\, \left(1 - \delta^2\right)^n}_{\text{de (3.139), se } n \geq N, \text{ segue que } < \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, de modo que, se

$$n \geq N\,, \quad \text{teremos} \quad |p_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, mostrando que

$$p_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \text{em} \quad [0\,,1]\,,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o

Corolário 3.4.1 *Para cada $a > 0$ fixado, consideremos a função $f : [-a\,,a] \to \mathbb{R}$, dada por*

$$f(x) \doteq |x|\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [-a, a]\,.$$

Então existe uma sequência de funções polinomiais $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$p_n(0) = 0 \tag{3.147}$$

e

$$p_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \textit{em} \quad [-a\,,a]\,. \tag{3.148}$$

Demonstração:

Como $f \in C([-a\,,a]\,;\mathbb{R})$ segue, do Teorema de Stone-Weierstrass (isto é, Teorema (3.4.1)), que existe uma sequência de funções polinomiais, que denotaremos por $(p_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$p_n^* \xrightarrow{u} f\,, \quad \text{em} \quad [-a\,,a]\,. \tag{3.149}$$

Em particular, teremos

$$p_n^*(0) \to f(0) = |0| = 0\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,. \tag{3.150}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$p_n(x) \doteq p_n^*(x) - p_n^*(0)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.151}$$

De (3.149) e (3.150), segue que

$$p_n = \underbrace{p_n^*}_{\xrightarrow{u} f} - \underbrace{p_n^*(0)}_{\to 0\,,\ \text{por (3.150)}} \xrightarrow{u} f\,, \quad \text{em} \quad [-a\,,a]$$

e

$$p_n(0) \overset{(3.151)}{=} p_n^*(0) - p_n^*(0) = 0\,,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Temos a

Definição 3.4.1 *Seja* $E \subseteq \mathbb{R}$.

Diremos que

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(E\,;\mathbb{C}) \doteq \{f\,;\, f: E \to \mathbb{C} \text{ é função}\}$$

é uma **álgebra** *em* $\mathcal{F}(E\,;\mathbb{C})$ *se:*

(i) para $f\,, g \in \mathcal{A}$*, tenhamos* $(f+g) \in \mathcal{A}$ *;*

(ii) para $f\,, g \in \mathcal{A}$*, tenhamos* $(f\,g) \in \mathcal{A}$ *;*

(iii) para $c \in \mathbb{C}$ *e* $f \in \mathcal{A}$*, tenhamos* $(c\,f) \in \mathcal{A}$ *.*

Se as funções consideradas forem a valores reais, no item (iii), consideraremos apenas $c \in \mathbb{R}$.

Na situação acima, podemos introduzir a:

Definição 3.4.2 *Diremos que uma álgebra*

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(E\,;\mathbb{C})$$

é **uniformemente fechada***, se dada uma sequência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\underline{\mathcal{A}}$*, tal que*

$$f_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \text{em} \quad E\,,$$

implicar que

$$f \in \mathcal{A}\,.$$

Temos trambém a:

Definição 3.4.3 *O conjunto formado por todas as funções de* $\mathcal{F}(E\,;\mathbb{C})$ *que são limites uniformes de sequências de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\underline{\mathcal{A}}$*, será dito* **fecho uniforme de** $\underline{\mathcal{A}}$*, e será indicado por*

$$\overline{\mathcal{A}}\,.$$

Como exemplo temos o:

Exercício 3.4.1 *Sejam* $E \doteq [a\,,b] \subseteq \mathbb{R}$ *e*

$$\mathcal{A} \doteq \{p\,;\, p:[a\,,b] \to \mathbb{C} \text{ é função polinomial}\}\,.$$

Então o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ *é uma álgebra em* $C([a\,,b]\,;\mathbb{R})$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Com isto o Teorema de Stone-Weierstrass (isto é, o Teorema (3.4.1)), garante que

$$\overline{\mathcal{A}} = C([a\,,b]\,;\mathbb{R})\,.$$

Para o próximo resultado precisaremos do seguinte exercício, cuja resolução será deixada para o leitor:

Exercício 3.4.2 *Sejam* $\underline{E}$ *um subconjunto não vazio e*

$$\mathcal{A} \doteq \{f\,;\, f : E \to \mathbb{C} \text{ é função limitada}\}. \tag{3.152}$$

Mostre que o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ *é uma álgebra em* $\mathcal{F}(E\,;\mathbb{C})$.

Com isto temos o:

Teorema 3.4.2 *Consideremos* $\underline{E}$ *e* $\underline{\mathcal{A}}$, *como no Exercício* (3.4.2) *acima, e consideremos*

$$\mathcal{B} \doteq \overline{\mathcal{A}}. \tag{3.153}$$

Então o conjunto $\underline{\mathcal{B}}$ *é uma álgebra uniformente fechada em* $\underline{E}$.

Demonstração:

Mostremos que o conjunto $\underline{\mathcal{B}}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E\,;\mathbb{C})$.
Para isto, notemos que:

1. para $f, g \in \mathcal{B}$, de (3.153), segue que existem sequências $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\underline{\mathcal{A}}$, tais que

$$f_n \xrightarrow{u} f \quad \text{e} \quad g_n \xrightarrow{u} g \quad \text{em} \quad E. \tag{3.154}$$

Como $\underline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra $\mathcal{F}(E\,;\mathbb{C})$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$f_n\,, g_n \in \mathcal{A}\,, \quad \text{teremos} \quad (f_n + g_n) \in \mathcal{A}\,.$$

Além disso, de (3.154), segue que

$$(f_n + g_n) \xrightarrow{u} (f + g)\,, \quad \text{em} \quad \underline{E}\,,$$

ou seja,

$$(f + g) \in \mathcal{B}\,.$$

2. de modo semelhante, para $c \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{B}$, de (3.153), segue que existe sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\underline{\mathcal{A}}$, tal que

$$f_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \text{em} \quad E\,. \tag{3.155}$$

Como $\underline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E\,;\mathbb{C})$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$ teremos

$$c \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad f_n \in \mathcal{A}\,, \quad \text{teremos} \quad (c\,f_n) \in \mathcal{A}\,.$$

Além disso, de (3.155), segue que

$$(c\,f_n) \xrightarrow{u} (c\,f)\,, \quad \text{em} \quad \underline{E}\,,$$

ou seja,

$$(c\,f) \in \mathcal{B}\,,$$

3. para $f, g \in \mathcal{B}$, mostremos que $(f\,g) \in \mathcal{B}$.

   Para isto, notemos que, de (3.153), segue que existem sequências $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\underline{\mathcal{A}}$, tais que

$$f_n \xrightarrow{u} f \quad \text{e} \quad g_n \xrightarrow{u} g \quad \text{em} \quad \underline{E}\,. \tag{3.156}$$

   Como $\underline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E\,;\mathbb{C})$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$f_n\,, g_n \in \mathcal{A}\,, \quad \text{imlicará} \quad (f_n\,g_n) \in \mathcal{A}\,.$$

   Notemos também que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$f_n \in \mathcal{A} \quad \text{e} \quad f_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \text{em} \quad \underline{E}\,.$$

   Com isto, teremos que $f \in \mathcal{A}$.

   De fato pois, como $f_n \xrightarrow{u} f$ em $\underline{E}$, segue que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente de Cauchy em $\underline{E}$, ou seja, dado $\varepsilon = 1$, existe $N_o \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geq N_o$, teremos

$$\underbrace{|f_m(x) - f_{N_o}(x)|}_{\geq |f_m(x)| - |f_{N_o}(x)|} < \varepsilon = 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,,$$

   ou seja, para $m \geq N_o$ temos que

$$|f_m(x)| \leq |f_{N_o}(x)| + 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,.$$

   Fazendo $m \to \infty$ na desigualdade acima, utilizando o fato que a função $|\cdot|$ é contínua em $\underline{E}$ e que $f_n \xrightarrow{u} f$ em $\underline{E}$, segue que

$$|f(x)| \leq \underbrace{|f_{N_o}(x)|}_{\leq M_o} + 1 \leq M_o + 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,,$$

   ou seja, a função $\underline{f}$ é uma função limitada em $\underline{E}$, ou ainda, $f \in \mathcal{A}$.

   Afirmamos que, existe $L \in \mathbb{R}$, tal que

$$|f_n(x)| \leq L\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,. \tag{3.157}$$

   De fato, como $f \in \mathcal{A}$, de (3.152), segue que existe $R \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)| \leq R\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,. \tag{3.158}$$

   Como $f_n \xrightarrow{u}$ em E, dado $\varepsilon = 1$, existe $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ de modo que, se

$$n \geq N_o\,, \quad \text{teremos} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,. \tag{3.159}$$

   Em particular, se $n \geq N_o$, segue que

$$|f_n(x)| - |f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| \overset{(3.159)}{\leq} 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,,$$

ou seja, para $n \geq N_o$ teremos:

$$|f_n(x)| \leq 1 + |f(x)| \overset{(3.158)}{\leq} 1 + R\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,. \tag{3.160}$$

Por outro lado, para $n \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N_o - 1\}$, de (3.152), segue que existe

$$L_n \doteq \sup_{x \in E} |f_n(x)|\,. \tag{3.161}$$

Seja

$$L \doteq \max\{L_1\,,L_2\,,\cdots\,,L_{n-1}\,,R+1\}\,. \tag{3.162}$$

Logo, de (3.160), (3.161) e (3.162), segue que

$$|f_n(x)| \leq L\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.163}$$

Afirmamos que, de (3.156) e (3.163), segue que

$$(f_n\,g_n) \xrightarrow{u} (f\,g) \quad \text{em} \quad \underline{E}\,.$$

De fato, pois, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\begin{aligned}
|f_n(x)\,g_n(x) - f(x)\,g(x)| &= |[f_n(x)\,g_n(x) - f(x)\,g(x)] + [f_n(x)\,g(x) - f_n(x)\,g(x)]| \\
&\leq |f_n(x)\,[g_n(x) - g(x)] + [f_n(x) - f(x)]\,g(x)| \\
&\leq \underbrace{|f_n(x)|}_{\overset{(3.163)}{\leq} L} |g_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - f(x)| \quad \underbrace{|g(x)|}_{\overset{g \in \mathcal{A} \text{ e } (3.158)}{\leq} M} \quad \overset{(3.156)}{\to} 0\,,
\end{aligned}$$

$$\text{quando} \quad n \to \infty\,, \quad \text{para} \quad x \in E\,,$$

ou seja,

$$(f_n\,g_n) \xrightarrow{u} (f\,g)\,, \quad \text{em} \quad \underline{E}\,,$$

ou ainda,

$$(f\,g) \in \mathcal{B}\,,$$

mostrando que $\underline{\mathcal{B}}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E\,;\mathbb{C})$.

Assim, por construção, o conjunto $\underline{\mathcal{B}}$ é uma álgebra uniformente fechada em $\mathcal{F}(E\,;\mathbb{C})$, como queríamos mostrar.

□

Nosso objetivo, no que segue, é estender o Teorema de Stone-Weierstrass (isto é, o Teorema (3.4.1)).

Para isto precisaremos introduzir alguns conceitos, entre eles, a:

Definição 3.4.4 *Sejam* $\underline{E}$ *um conjunto não vazio,* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$ *e*

$$\mathcal{F}(E\,;A) \doteq \{f\,;\, f : E \to A \text{ é função}\}.$$

Diremos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(E;A)$ *é uma família que* <u>**separa pontos de $\underline{E}$**</u> *se, para cada* $x_1, x_2 \in E$*, com*

$$x_1 \neq x_2\,, \quad \text{existe} \quad f \in \mathcal{A}\,, \quad \text{tal que} \quad f(x_1) \neq f(x_2)\,. \tag{3.164}$$

Por outro lado, diremos que a família $\underline{\mathcal{A}}$ <u>**não se anula em nenhum ponto de $\underline{E}$**</u> *se, para cada* $x_o \in E$*,*

$$\text{existe} \quad g \in \mathcal{A}\,, \quad \text{tal que} \quad g(x_o) \neq 0\,. \tag{3.165}$$

Como exemplo destes duas famílias que têm as propriedades acima, temos o:

Exemplo 3.4.1 *Seja*

$$\mathcal{A} \doteq \{p\,;\, p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ é função polinomial}\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})\,. \tag{3.166}$$

Então o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ *é uma álgebra em* $F(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$*, que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de* $\mathbb{R}$*.*

<u>**Resolução:**</u>

O Exercício (3.4.2) garante que o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E\,;A)$.

Notemos que se

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}\,, \quad \text{com} \quad x_1 \neq x_2\,,$$

então, considerando-se a função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou seja, $p \in \mathcal{A}$), dada por

$$p(t) \doteq t\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

segue que

$$p(x_1) = x_1 \neq x_2 = p(x_2)\,,$$

mostrando que $\underline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, que separa pontos de $\mathbb{R}$.

Notemos que para $x_o \in \mathbb{R}$, considerando-se a função polinomial $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou seja, $q \in \mathcal{A}$), dada por

$$q(t) \doteq 1\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

segue que

$$q(x_o) = 1 \neq 0\,,$$

ou seja, a álgebra $\underline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, que não se anula em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

O exemplo a seguir nos fornece uma álgebra em $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, que <u>**não**</u> separa pontos de $\mathbb{R}$ e não se anula em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.4.2 *Seja*

$$\mathcal{A} \doteq \{p\,;\, p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ é função polinomial par}\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}),$$

ou seja, se $p \in \mathcal{A}$, *deveremos ter*

$$p(-t) = p(t), \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Então o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ *é uma álgebra em* $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$, *que* **não** *separa pontos de* $\mathbb{R}$ *e que não se anula em nenhum ponto de* $\mathbb{R}$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $\underline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$.

Notemos que se

$$x_1 \in \mathbb{R}, \quad \text{com} \quad x_1 \neq 0,$$

teremos que

$$x_1 \neq x_2 \doteq -x_1$$

e assim, para todo $p \in \mathcal{A}$, como a função $\underline{p}$ é uma função par, segue que

$$p(x_2) = p(-x_1) \overset{\text{p é função par}}{=} p(x_1),$$

mostrando que a álgebra $\underline{\mathcal{A}}$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$, **não** separa pontos de $\mathbb{R}$.

Notemos que para $x_o \in \mathbb{R}$, considerando-se a função polinomial $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$q(t) \doteq 1, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R},$$

segue que $q \in \mathcal{A}$ (pois é uma função $\underline{q}$ é uma função par) e

$$q(x_o) = 1 \neq 0,$$

ou seja, a álgebra $\underline{\mathcal{A}}$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, não se anula em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

Observação 3.4.1 *Notemos que se*

$$\mathcal{A} \doteq \{p\,;\, p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ é função polinomial ímpar}\},$$

ou seja, se $p \in \mathcal{A}$ *deveremos ter*

$$p(-t) = -p(t), \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R},$$

então o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ *é* **não** *é uma álgebra em* $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Isto ocorre, pois produto de duas funções ímpares é uma função par, logo não pertencerá a $\underline{\mathcal{A}}$.

Podemos agora, enunciar e demonstrar a:

Proposição 3.4.1 *Sejam* E *um conjunto não vazio,* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$ *e* $\underline{\mathcal{A}}$ *uma álgebra em* $\mathcal{F}(E\,;\,A)$*, que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de* $\underline{E}$*.*

Consideremos

$$x_1\,,x_2 \in E\,, \qquad \textit{tais que} \qquad x_1 \neq x_2$$

e $c_1\,,c_2 \in A$*.*

Então existe $f \in \mathcal{A}$ *tal que*

$$f(x_1) = c_1 \quad \textit{e} \quad f(x_2) = c_2\,. \tag{3.167}$$

Demonstração:

Como

$$x_1 \neq x_2\,,$$

a álgebra $\underline{\mathcal{A}}$ em $\mathcal{F}(E\,;\,A)$, que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de $\underline{E}$, segue que existem $g\,,h\,,k \in \mathcal{A}$, tais que

$$g(x_1) \neq g(x_2)\,, \quad h(x_1) \neq 0 \quad \text{e} \quad k(x_2) \neq 0\,. \tag{3.168}$$

Consideremos as funções $u\,,v : E \to A$ dadas por

$$u(x) \doteq g(x)\,k(x) - g(x_1)\,k(x)\,, \tag{3.169}$$

$$v(x) \doteq g(x)\,h(x) - g(x_2)\,h(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,. \tag{3.170}$$

Como o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E\,;A)$ e $g\,,h\,,k \in \mathcal{A}$, segue que

$$u\,,v \in \mathcal{A}\,.$$

Notemos também que:

$$u(x_1) \doteq g(x_1)\,k(x_1) - g(x_1)\,k(x_1) = 0\,, \tag{3.171}$$

$$\begin{aligned} u(x_2) &\doteq g(x_2)\,k(x_2) - g(x_1)\,k(x_2) \\ &= \underbrace{[g(x_2) - g(x_1)]}_{\overset{(3.168)}{\neq}\,0}\,\underbrace{k(x_2)}_{\overset{(3.168)}{\neq}\,0} \neq 0\,, \end{aligned} \tag{3.172}$$

$$v(x_2) \doteq g(x_2)\,h(x_2) - g(x_2)\,h(x_2) = 0\,, \tag{3.173}$$

$$\begin{aligned} v(x_1) &\doteq g(x_1)\,h(x_1) - g(x_2)\,h(x_1) \\ &= \underbrace{[g(x_1) - g(x_2)]}_{\overset{(3.168)}{\neq}\,0}\,\underbrace{h(x_1)}_{\overset{(3.168)}{\neq}\,0} \neq 0\,. \end{aligned} \tag{3.174}$$

Para finalizar, consideremos a função $f : E \to A$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{c_1}{\underbrace{v(x_1)}_{\overset{(3.174)}{\neq}\,0}}\,v(x) + \frac{c_2}{\underbrace{u(x_2)}_{\overset{(3.172)}{\neq}\,0}}\,u(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,. \tag{3.175}$$

Como o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E\,;A)$ e $u\,,v \in \mathcal{A}$, teremos que $f \in \mathcal{A}$ e, além disso,

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &\doteq \frac{c_1}{v(x_1)}\,v(x_1) + \frac{c_2}{u(x_2)}\,\overbrace{u(x_1)}^{\overset{(3.171)}{=}0} = c_1\,,\\
f(x_2) &\doteq \frac{c_1}{v(x_1)}\,\underbrace{v(x_2)}_{\overset{(3.173)}{=}0} + \frac{c_2}{u(x_2)}\,u(x_2) = c_2\,,
\end{aligned}
$$

completando a demonstração do resultado.

□

Podemos agora enuciar e demonstrar o :

Teorema 3.4.3 (Teorema de Stone - versão real) *Sejam* $\underline{K}$ *conjunto compacto de um espaço métrico* $(X\,,d_X)$ *e* $\mathcal{A} \subseteq C(K;\mathbb{R})$ *uma álgebra em* $\mathcal{F}(K;\mathbb{R})$*, que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de* $\underline{K}$ *.*

Então

$$
\overline{\mathcal{A}} = C(K;\mathbb{R})\,. \tag{3.176}
$$

Demonstração:

Notemos que, como o conjunto $\underline{K}$ é um subconjunto compacto de $(X\,,d_X)$, segue que a álgebra $\mathcal{A} \subseteq C(K;\,A)$ é uma álgebra de funções limitadas (pois toda função contínua, a valores reais ou complexos, definida em um subconjunto compacto de um espaço métrico, é uma função limitada nesse compacto).

Logo, do Teorema (3.4.2), segue que $\overline{\mathcal{A}}$ será uma álgebra em $\mathcal{F}(K;\,\mathbb{R})$, que é uniformemente fechada e contém a álgebra $\underline{\mathcal{A}}$.

Mostraremos que, se $f \in C(K;\,A)$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $h \in \mathcal{A}$, tal que

$$
|h(x) - f(x)| < \varepsilon\,, \quad \text{para todo} \quad x \in K\,. \tag{3.177}
$$

Desta forma podemos encontrar uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\underline{\mathcal{A}}$, que converge uniformemente para a função $\underline{f}$ em $\underline{K}$.

Para isto bastará, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomar $\varepsilon \doteq \dfrac{1}{n}$, na definição convergência uniforme.

Portanto, $f \in \overline{\mathcal{A}}$, ou ainda, vale (3.176).

Mostremos que (3.177) ocorrerá.

Para isto, notemos que, como $\overline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(K;A)$, se

$$
g \in \overline{\mathcal{A}}\,, \quad \text{segue que} \quad |g| \in \overline{\mathcal{A}}\,. \tag{3.178}
$$

De fato, como o conjunto $\underline{K}$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ e a função $\underline{g}$ é contínua em $\underline{K}$, segue que ela será uma função limitada em $\underline{K}$, ou seja, existe

$$
a \doteq \sup_{x\in K}|g(x)|\,, \quad \text{ou seja,} \quad g(x) \in [-a\,,a]\,. \tag{3.179}
$$

Dado $\varepsilon > 0$, do Corolário (3.4.1), segue que existe uma sequência de funções polinomiais $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$p_n(0) = 0 \quad \text{e} \quad p_n \xrightarrow{u} |\cdot|, \qquad \text{em} \quad [-a\,,a]\,,$$

isto é, existe $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, de modo que, para cada $n \geq N_o$, teremos

$$|p_n(y) - |y|| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad y \in [-a\,,a]\,, \tag{3.180}$$

ou seja, existem constantes

$$c_1\,, c_2\,, \cdots, c_n \in \mathbb{R}\,,$$

de modo que (lembremos que $p_n(0) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} p_n(x) &= c_1\,y + c_2\,y^2 + \cdots + c_n\,y^n \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i\,y^i\,, \quad \text{para cada} \quad y \in [-a\,,a]\,, \end{aligned} \tag{3.181}$$

ou ainda, de (3.180) e (3.181), segue que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i\,y^i - |y| \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{para todo} \quad y \in [-a\,,a]\,, \tag{3.182}$$

para cada $n \geq N_o$.

Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g_n(y) \doteq \sum_{i=1}^{n} c_i\,[g(y)]^i\,, \quad \text{para cada} \quad y \in K\,. \tag{3.183}$$

Como o conjunto $\overline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(K\,;A)$ e $g \in \overline{\mathcal{A}}$, segue que

$$g_n \in \overline{\mathcal{A}}\,.$$

Notemos que, para cada $x \in K$ e $n \geq N_o$, teremos

$$|g_n(x) - |g(x)|| \overset{(3.183)}{=} \left| \sum_{i=1}^{n} c_i\,[\underbrace{g(x)}_{\overset{(3.179)}{\in}[-a\,,a]}]^i - |\underbrace{g(x)}_{\overset{(3.179)}{\in}[-a\,,a]}| \right| \overset{(3.182)}{<} \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3.184}$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, como $\overline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra uniformemente fechada, e

$$g_n \in \overline{\mathcal{A}}\,,$$

segue que, existe $f_n \in \mathcal{A}$, de modo que

$$|f_n(x) - g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{para todo} \quad x \in K\,. \tag{3.185}$$

Portanto, de (3.184) e (3.185), para $n \geq N_o$ e $x \in K$, segue que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - |g(x)|| &= |f_n(x) - |g(x)| - g_n(x) + g_n(x)| \\ &\leq |f_n(x) - g_n(x)| + |g(x) - g_n(x)| \\ &\overset{(3.184) \text{ e } (3.185)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,, \end{aligned} \tag{3.186}$$

ou seja,

$$f_n \xrightarrow{u} g\,, \quad \text{em} \quad K\,,$$

como $f_n \in \mathcal{A}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, isto é, (3.178).

Afirmamos também que, se $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, então as funções $h\,, s : K \to \mathbb{R}$ dadas por

$$h(x) \doteq \max\{f(x)\,, g(x)\} \quad \text{e} \quad s(x) \doteq \min\{f(x)\,, g(x)\}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in K\,, \tag{3.187}$$

satisfazem

$$h\,, s \in \overline{\mathcal{A}}\,. \tag{3.188}$$

De fato, pois, para cada $x \in K$, temos que:

(i) se

$$\max\{f(x)\,, g(x)\} = f(x)$$

então

$$\min\{f(x)\,, g(x)\} = g(x)\,.$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2} &\overset{f(x) \geq g(x)}{=} \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{f(x) - g(x)}{2} \\ &= f(x) \\ &= \max\{f(x)\,, g(x)\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2} &\overset{f(x) \geq g(x)}{=} \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{f(x) - g(x)}{2} \\ &= g(x) \\ &= \min\{f(x)\,, g(x)\}\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} h(x) &= \max\{f(x)\,, g(x)\} \qquad (3.189) \\ &= \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}\,, \\ s(x) &= \min\{f(x)\,, g(x)\} \\ &= \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}\,. \qquad (3.190) \end{aligned}$$

(ii) de modo semelhante, se

$$\max\{f(x)\,,g(x)\} = g(x)$$

então

$$\min\{f(x)\,,g(x)\} = f(x)\,.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2} &\overset{g(x)\geq f(x)}{=} \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{f(x)-g(x)}{2} \\
&= g(x) \\
&= \max\{f(x)\,,g(x)\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2} &\overset{g(x)\geq f(x)}{=} \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{f(x)-g(x)}{2} \\
&= f(x) \\
&= \min\{f(x)\,,g(x)\}\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
h(x) &= \max\{f(x)\,,g(x)\} \\
&= \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2}\,, \qquad (3.191)\\
s(x) &= \min\{f(x)\,,g(x)\} \\
&= \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2}\,. \qquad (3.192)
\end{aligned}$$

Portanto, de (i) e (ii) (mais precisamente, (3.189), (3.190), (3.191) e (3.192)) segue que, para $x \in K$, teremos:

$$\begin{aligned}
h(x) &= \max\{f(x), g(x)\} \\
&\overset{(3.189)\text{ e }(3.191)}{=} \overbrace{\frac{f(x)+g(x)}{2}}^{\in\overline{\mathcal{A}}} + \overbrace{\frac{|f(x)-g(x)|}{2}}^{\overset{(3.178)}{\in}\overline{\mathcal{A}}}\,, \\
s(x) &= \min\{f(x), g(x)\} \\
&\overset{(3.190)\text{ e }(3.192)}{=} \underbrace{\frac{f(x)+g(x)}{2}}_{\in\overline{\mathcal{A}}} - \underbrace{\frac{|f(x)-g(x)|}{2}}_{\overset{(3.178)}{\in}\overline{\mathcal{A}}}\,,
\end{aligned}$$

mostrando, em particular, que

$$h\,,s \in \overline{\mathcal{A}}\,,$$

com afirmamos (isto é, (3.188)).

Afirmamos também que, como $f \in C(K;\mathbb{R})$ e $x_o \in K$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $g_{x_o} \in \overline{\mathcal{A}}$ tal que

$$g_{x_o}(x_o) = f(x_o) \quad \text{e} \quad f(t) - \varepsilon < g_{x_o}(t)\,, \quad \text{para cada} \quad t \in K\,. \tag{3.193}$$

De fato, para cada

$$y \in K \quad \text{e} \quad y \neq x_o\,,$$

da Proposição (3.4.1), tomando-se

$$x_1 \doteq x_o\,, \qquad x_2 \doteq y\,, \qquad c_1 \doteq f(x_o) \qquad \text{e} \qquad c_2 \doteq f(y)\,,$$

segue que, existe $h_y \in \overline{\mathcal{A}}$ tal que

$$h_y(x_o) = f(x_o) \qquad \text{e} \qquad h_y(y) = f(y)\,. \tag{3.194}$$

Como as funções $\underline{h_y}$, $\underline{f}$ são contínuas em $\underline{K}$, que é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ (logo as funções $\underline{h_y}$, $\underline{f}$ serão uniformemente contínuas em $\underline{K}$) e

$$h_y(y) = f(y)\,,$$

existe $\delta_y > 0$, de modo que, se $t \in K$ satisfazendo

$$|y - t| < \delta_y\,, \quad \text{segue que} \quad |h_y(t) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$
$$\text{e} \quad |f(t) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

isto é,

$$\begin{aligned} |h_y(t) - f(t)| &= |[h_y(t) - f(y)] + [f(y) - f(t)]| \\ &\leq \underbrace{|h_y(t) - f(y)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(y) - f(t)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,, \\ \text{ou seja,} \quad & -\varepsilon < h_y(t) - f(t) < \varepsilon\,, \\ \text{em particular,} \quad & f(t) - \varepsilon < h_y(t)\,. \end{aligned}$$

Definido-se

$$J_y \doteq \mathcal{B}(y\,;\delta_y) \cap K\,,$$

segue que

$$f(t) - \varepsilon < h_y(t)\,, \quad \text{para cada} \quad t \in J_y\,. \tag{3.195}$$

Notemos que, para cada $t \in K$, existe $y \in K$, de modo que $t \in J_y$, ou seja,

$$K \subseteq \bigcup_{y \in K} J_y\,.$$

Como o conjunto $\underline{K}$ é um subconjunto compacto em (X, d_X) (e os conjuntos $\mathcal{B}(y\,;\delta_y)$ são subconjuntos abertos de (X, d_X)), segue que existem

$$y_1, y_2, \cdots, y_{N_o} \in K,$$

tais que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_o} J_{y_i}. \tag{3.196}$$

Para cada $x_o \in K$, definamos a função $g_{x_o} : K \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_{x_o}(t) \doteq \max\left\{h_{y_1}(t), h_{y_2}(t), \cdots, h_{y_{N_o}}(t)\right\}, \quad \text{para cada} \quad t \in K. \tag{3.197}$$

Como, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, N_o\}$, temos

$$h_{y_i} \in \overline{\mathcal{A}},$$

segue, de (3.187) e (3.188), que

$$g_{x_o} \in \overline{\mathcal{A}}. \tag{3.198}$$

Notemos que, para cada $t \in K$, de (3.196), segue que, existe

$$i_o \in \{1, 2, \cdots, N_o\},$$

de modo que

$$t \in J_{i_o}, \quad \text{que, de (3.195), implicará em:} \quad h_{y_{i_o}}(t) > f(t) - \varepsilon. \tag{3.199}$$

Assim teremos:

$$\begin{aligned} g_{x_o}(x_o) &\overset{(3.197)}{=} \max\left\{\underbrace{h_{y_1}(x_o)}_{\overset{(3.194)}{=} f(x_o)}, h_{y_2}(x_o), \cdots, \underbrace{h_{y_{N_o}}(x_o)}_{\overset{(3.194)}{=} f(x_o)}\right\} \\ &= f(x_o), \end{aligned} \tag{3.200}$$

$$\begin{aligned} g_{x_o}(t) &\overset{(3.197)}{=} \max\left\{h_{y_1}(t), h_{y_2}(t), \cdots, h_{y_{N_o}}(t)\right\} \\ &\geq h_{y_{i_o}}(t) \overset{(3.199)}{>} f(t) - \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.201}$$

completando a prova da afirmação (isto é, (3.193)).

Para cada $x_o \in K$, temos $f, g_{x_o} \in C(K; \mathbb{R})$.

Como o conjunto $\underline{K}$ é um subconjunto compacto de (X, d_X) e as funções f, g_{x_o} são funções contínuas em $\underline{K}$, temos que elas serão uniformemente contínuas em $\underline{K}$, logo existirá, $\delta_{x_o} > 0$, tal que, para cada $t \in K$ satisfazendo

$$|t - x_o| < \delta_{x_o}, \quad \text{segue que} \quad |g_{x_o}(t) - g_{x_o}(x_o)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.202}$$

$$\text{e} \quad |f(x_o) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.203}$$

Assim, para $t \in K$ satisfazendo

$$|t - x_o| < \delta_{x_o},$$

$$\text{teremos:} \quad |g_{x_o}(t) - f(t)| = |[g_{x_o}(t) - g_{x_o}(x_o)] + [\overbrace{g_{x_o}(x_o)}^{\stackrel{(3.200)}{=} f(x_o)} - f(t)]|$$
$$\leq \underbrace{|g_{x_o}(t) - g_{x_o}(x_o)|}_{\stackrel{(3.202)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x_o) - f(t)|}_{\stackrel{(3.203)}{<} \frac{\varepsilon}{2}}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$\text{ou seja,} \quad -\varepsilon < g_{x_o}(t) - f(t) < \varepsilon,$$

ou ainda, para cada $t \in K$, satisfazendo:

$$|t - x_o| < \delta_{x_o}, \quad \text{teremos:} \quad f(t) - \varepsilon < g_{x_o}(t) < f(t) + \varepsilon. \tag{3.204}$$

Notemos que

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} \mathcal{B}(x; \delta_x).$$

Como o conjunto $\underline{K}$ é um subconjunto compacto de (X, d_X), segue que existirão

$$x_1, x_2, \cdots, x_{N_1} \in K,$$

de modo que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_1} \mathcal{B}(x_i; \delta_{x_i}). \tag{3.205}$$

Consideremos a função $h : K \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) \doteq \min\left\{g_{x_1}(x), g_{x_2}(x), \cdots, g_{x_{N_1}}(x)\right\}, \quad \text{para cada} \quad x \in K.$$

Como

$$g_{x_i} \in \overline{\mathcal{A}}, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, N_1\},$$

segue que (como em (3.187) e (3.188))

$$h \in \overline{\mathcal{A}}.$$

Além disso, para $t \in K$, teremos

$$h(t) = \min\{g_{x_1}(t), \cdots, g_{x_{N_1}}(t)\} \stackrel{\text{Existe } i_1 \in \{1, 2, \cdots N\} \text{ tal que}}{=} g_{x_{i_1}}(t) \stackrel{(3.193)}{>} f(t) - \varepsilon,$$

$$h(t) = \min\{g_{x_1}(t), \cdots, g_{x_{N_1}}(t)\} \stackrel{(3.205) \text{ implica em: } t \in \mathcal{B}(x_{i_o}, \delta_{i_o}), \text{ para alum } i_o \in \{1, 2, \cdots, N\}}{\leq} g_{x_{i_o}}(t) \stackrel{(3.204)}{<} f(t) + \varepsilon,$$

ou seja,

$$|h(x) - f(t)| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad t \in K,$$

ou seja, temos (3.177), ou ainda, vale (3.176), completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 3.4.2

1. *O Teorema de Stone* só é válido *para álgebras contidas nas funções contínuas, definidas em compactos, a* valores reais*, isto é, o Teorema de Stone* não é válido*, em geral, para álgebras contidas nas funções contínuas, a* valores complexos *(veja a Observação (3.4.4)).*

2. *O Teorema de Stone será válido para álgebras contidas nas funções contínuas em compactos, a valores complexos, se acrescentarmos a hipótese da álgebra* $\underline{\mathcal{A}}$ *ser uma álgebra* auto-adjunta*, isto é, se*

$$f \in \mathcal{A}, \quad \textit{implicar} \quad \bar{f} \in \mathcal{A}, \tag{3.206}$$

onde, para $f : K \to \mathbb{C}$*, definimos a função* $\bar{f} : K \to \mathbb{C}$ *como sendo*

$$\bar{f}(x) \doteq \overline{f(x)}, \quad \textit{para cada} \quad x \in K,$$

sendo que $\bar{z}$*, denota o conjugado do número complexo* $\underline{z}$*.*

Mais precisamente, temos o:

Corolário 3.4.2 (Teorema de Stone - versão complexa) *Sejam* $\underline{K}$ *um conjunto compacto de* (X, d_X) *e* $\mathcal{A} \subseteq C(K; \mathbb{C})$ *uma álgebra auto-adjunta em* $\underline{K}$*, que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de* $\underline{K}$*.*

Então

$$\overline{\mathcal{A}} = C(K; \mathbb{C}). \tag{3.207}$$

Demonstração:

Consideremos

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \doteq \{f \in \mathcal{A}; \underline{f} \text{ é uma função a valores reais}\}.$$

Notemos que $\underline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}}$ é uma álgebra de funções, a valores real.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Notemos que se $f \in \mathcal{A}$, então podemos escrever

$$f(x) = u(x) + i\, v(x), \quad \text{para cada} \quad x \in K,$$

onde $u, v : K \to \mathbb{R}$ são funções a valores reais.

Neste caso teremos

$$u = \frac{f + \bar{f}}{2}. \tag{3.208}$$

Como o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra auto-adjunta em $\underline{K}$, segue que

$$\bar{f} \in \mathcal{A},$$

assim, de (3.208), segue que

$$u \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}.$$

Notemos também que se $x_1, x_2 \in K$ são tais que

$$x_1 \neq x_2\,,$$

como a álgebra $\underline{\mathcal{A}}$, separa pontos de $\underline{K}$, segue, da Proposição (3.4.1), que existe $f \in \mathcal{A}$, tal que

$$f(x_1) = 1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = 0\,.$$

Isto implicará que

$$u(x_1) = 1 \quad \text{e} \quad u(x_2) = 0\,,$$

ou seja, a álgebra $\underline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}}$, separa pontos de $\underline{K}$.

Por outro lado, se $x_o \in K$, como a álgebra $\underline{\mathcal{A}}$, não se anula em nenhum ponto de $\underline{K}$, segue, da Proposição (3.4.1), que existe $g \in \mathcal{A}$ tal que

$$g(x_o) \neq 0\,.$$

Seja

$$\lambda \doteq \overline{g(x_o)}\,.$$

Neste caso, teremos que

$$\lambda\, g(x_o) = |\underbrace{g(x_o)}_{\neq 0}|^2 > 0\,.$$

Consideremos a função $f : K \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(x) \doteq \lambda\, g(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in K$$

e sejam $u\,, v : K \to \mathbb{R}$ as funções, a valores reais, tais que

$$f = u + i\,v\,.$$

Neste caso teremos

$$\begin{aligned} u(x_o) &= \Re[f(x_o)] \\ &= \Re[\,\underbrace{\lambda\, g(x_o)}_{=|\underbrace{g(x_o)}_{\neq 0}|^2}\,] \\ &= |\underbrace{g(x_o)}_{\neq 0}|^2 > 0\,, \end{aligned}$$

ou seja, a álgebra $\underline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}}$, não se anula em nenhum ponto de $\underline{K}$.

Logo, do Teorema de Stone, versão real (isto é, Teorema (3.4.3)), segue que

$$\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}} = C(K\,;\mathbb{R})\,. \tag{3.209}$$

Por fim, notemos temos que se $f \in C(K\,;\mathbb{C})$, segue que

$$f = u + i\,v\,,$$

onde

$$u\,,v \in C(K\,;\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}}\,,$$

ou seja,

$$C(K\,;\,\mathbb{C}) \overset{(3.209)}{=} \overline{\mathcal{A}}\,,$$

completando a demonstração.

□

Observação 3.4.3 *A grosso modo, o resultado acima nos diz que*

$$\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}} + i\,\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}}\,.$$

Para finalizar temos o:

Corolário 3.4.3 *Toda função contínua e 2π-periódica, a valores reais, pode ser uniformemente aproximada por um* **polinômio trigonométrico** *definido $\mathbb{R}$, isto é, por uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do tipo*

$$g(t) = \sum_{n=0}^{N} [a_n \cos(n\,t) + b_n \operatorname{sen}(n\,t)]\;, \quad \textit{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Demonstração:

Denotemos por

$$\begin{aligned} C_{2\pi}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}) &\doteq \{f\,;\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ \text{contínua e } 2\pi\text{-periódica em } \mathbb{R}\} \\ &= \{h\,;\, h : [-\pi\,,\pi] \to \mathbb{R}\,,\ \text{contínua em } [-\pi\,,\pi]\,,\ \text{tal que } h(-\pi) = h(\pi)\}\;. \end{aligned}$$

Consideremos

$$\mathcal{A} \doteq \left\{ g\,;\, g(t) = \sum_{n=0}^{N} [a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)]\;,\ \text{com } a_n\,,b_n \in \mathbb{R}\,, n \in \{0\,,1\,,\cdots\,,N\} \text{ e } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pode-se mostrar que $\mathcal{A}$ é uma álgebra, que separa pontos e que não se anula em nenhum ponto de $[-\pi, \pi]$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, do Teorema de Stone, segue que

$$\overline{\mathcal{A}} = C_{2\pi}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})\,,$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 3.4.4

1. *(Exercício 21, da página 169) O resultado acima* **NÃO** *permanece válido se considerarmos funções contínuas e 2π-periódicas,* **a valores complexos***, mais precisamente, se denotarmos por*

$$S^1 \doteq \{e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C},$$

$$C\left(S^1; \mathbb{C}\right) \doteq \left\{f;\ \underline{f} \text{ é contínua, a valores complexos e definida em } S^1\right\}.$$

e

$$\mathcal{A} \doteq \left\{g;\ g(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n\, e^{int},\ c_n \in \mathbb{C}, n \in \{0, 1, \cdots, N\} \text{ e } t \in S^1\right\} \subseteq C\left(S^1; \mathbb{C}\right),$$

pode-se mostrar que $\underline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra, que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de $\underline{S^1}$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Porém

$$\overline{\mathcal{A}} \neq C\left(S^1; \mathbb{C}\right). \tag{3.210}$$

Para verificar a afirmação acima, observamos que, para cada $f \in \mathcal{A}$, temos que

$$\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\, e^{i\theta}\, d\theta = 0,$$

e, como consequência da convergência uniforme, também valerá o mesmo para cada função que pertençam ao conjunto $\overline{\mathcal{A}}$.

Por outro lado, existem funções contínuas definidas em $\underline{S^1}$, tomando valores em $\mathbb{C}$, de modo que a integral acima não dá igual a zero. (por exemplo $f(z) \doteq \overline{z}$ para $z \in S^1$), mostrando a afirmação (3.210) acima.

2. *Na verdade, na situação acima estamos identificando as funções 2π-periódicas, tomando valores em $\mathbb{C}$, com o conjunto das funções definidas na circunferência unitária, ou seja,*

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \sim C(S^1; \mathbb{C}),$$

onde $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, pode ser identificada com uma função $\tilde{f}: S^1 \to \mathbb{C}$ da seguinte forma: se $z \in S^1$, então existe $\theta \in \mathbb{R}$, tal que

$$z = e^{i\theta}$$

e assim

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}\left(e^{i\theta}\right) \doteq f(\theta).$$

Notemos que a função $\underline{\tilde{f}}$ está bem definida, pois a função $\underline{f}$ é 2π-periódica e também será contínua em $\underline{S^1}$ se a função $\underline{f}$ for contínua em $\mathbb{R}$.

3.5 Exercícios

Capítulo 4

Séries de Potências e de Fourier

Começaremos este capítulo tratando das séries de potências e mais adiante trataremos das séries de Fourier.

4.1 Séries de potências

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ um aberto de $\mathbb{R}$ e $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

Nesta seção consideraremos funções $\underline{f}$, como acima, que podem ser representadas por uma série de funções particular, denominada <u>**série de potências**</u>, do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, x^n \,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-\delta \,, \delta) \,, \tag{4.1}$$

ou, mais geralmente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x - a)^n \,, \quad \text{para cada} \quad x \in (a - \delta \,, a + \delta) \,, \tag{4.2}$$

para algum $\delta > 0$, que será denominada <u>**série de potências centrada em $x = a$**</u>.

Observação 4.1.1

1. *Se a função $\underline{f}$ têm a propriedade que, para cada ponto $a \in A$, existe $\delta_a > 0$, de modo que a série de potências (4.2) converge para a função $\underline{f}$, no intervalo $(a - \delta_a \,, a + \delta_a) \subseteq A$, diremos que a função $\underline{f}$ é uma* <u>**função analítica (real) em A**</u>.

2. *Se existe $R \in [0 \,, \infty]$, tal que a série de funções (4.1) converge, pontualmente em $(-R \,, R)$, para a função $\underline{f}$, diremos que a função $\underline{f}$ possui uma* <u>**expansão em série de potências em torno de $x = 0$**</u>.

3. *De modo semelhante, se existe $R \in [0 \,, \infty]$, tal que a série de funções (4.2) converge, pontualmente em $(a - R \,, a + R)$, para a função $\underline{f}$, diremos que a função $\underline{f}$ possui uma* <u>**expansão em série de potências em torno de $x = a$**</u>.

4. *Nosso estudo sobre as séries de potências, começará considerando-se o caso*

$$a = 0,$$

ou seja, estudando a série de potências (4.1).

Depois trataremos a série de potências (4.2) que, como veremos, será um caso particular da série de potências (4.1).

Com isto temos o:

Proposição 4.1.1 *Sejam* $x_o, x_1 \neq 0$.
Então,

1. *se a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, {x_o}^n$ *for convergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$*, então a série de funções* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, x^n$ *será absolutamente pontualmente convergente para cada*

$$x \in (-|x_o|, |x_o|).$$

2. *se a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, {x_1}^n$ *for divergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$*, então a série de funções* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, x^n$ *será divergente para*

$$x \in (-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, \infty).$$

Demonstração:

De 1.:

Sabemos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, {x_o}^n$ é convergente em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ e $x_o \neq 0$.

Logo, do Critério da Divergência para séries numéricas, segue que

$$\lim_{n \to \infty} c_n \, {x_o}^n = 0.$$

Assim a seqüência numérica $(c_n \, {x_o}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}$, ou seja, existe $M \in \mathbb{R}$, tal que

$$|c_n \, {x_o}^n| \leq M, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Notemos que, se $x \in (-|x_o|, |x_o|)$, ou seja,

$$|x| < |x_o|, \tag{4.4}$$

teremos

$$|c_n \, x^n| \overset{x_o \neq 0}{=} \underbrace{|c_n \, {x_o}^n|}_{\overset{(4.3)}{\leq} M} \left| \frac{x^n}{{x_o}^n} \right|$$
$$\leq M \left| \frac{x}{x_o} \right|^n$$

$$= M\, r^n\,, \tag{4.5}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, onde

$$r \doteq \left|\frac{x}{x_o}\right| \overset{(4.4)}{<} 1\,.$$

Como

$$0 \leq r < 1\,,$$

segue que a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\, r^n = M \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

é convergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$, pois é uma série geométrica de razão $\underline{r}$, que é menor do que $\underline{1}$.

Logo, do Critério da Comparação para séries numérica (cujos termos são não-negativos), segue que para cada

$$x \in (-|x_o|\,, |x_o|)\,,$$

a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n\, x^n|$$

será convergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$, portanto a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ será absolutamente convergente, para cada $x \in (-|x_o|\,, |x_o|)$.

<u>De 2.:</u>

Sabemos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, {x_1}^n$ é divergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$.

Suponhamos, por absurdo, que para algum

$$x_2 \in (-\infty\,, -|x_1|) \cup (|x_1|\,, \infty)\,,$$

a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, {x_2}^n$$

seja convergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$.

Então, do item 1. acima, seguirá que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ será convergente para cada

$$x \in (-|x_2|\,, |x_2|)\,,$$

o que é um absurdo, pois $\underline{x_1}$ pertence a esse intervalo (pois $|x_2| > |x_1|$), mas a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, {x_1}^n$ é divergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$.

Portanto a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ será divergente, para cada

$$x \in (-\infty\,, -|x_1|) \cup (|x_1|\,, \infty)\,,$$

completando a demonstração do resultado.

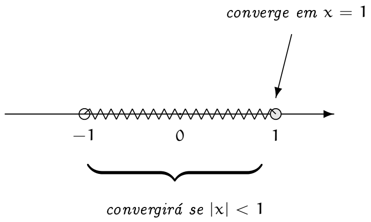
□

A seguir consideraremos alguns exemplos, a saber:

Exemplo 4.1.1 *A série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *é convergente em* $x_o = 1$, *pois a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ *(visto no curso de Cálulo 3).*

Logo, da Proposição (4.1.1) item 1., segue que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *será absolutamente convergente (veja figura abaixo) para cada*

$$|x| < |x_o| = 1 .$$



Exemplo 4.1.2 *A série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ *é convergente para cada* $x \in (-1, 1)$ *pois, para cada* $x_o \in (0, 1)$, *a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_o^{2n}$ *será convergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

De fato,

$$\left|(-1)^n {x_o}^2\right| \leq {x_o}^2 \doteq r < 1$$

e a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, *pois é uma série geométrica de razão* $\underline{r}$ *menor que* $\underline{1}$.

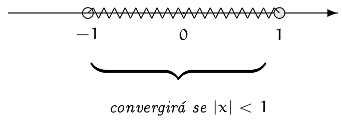
Logo, do Teorema da Comparação para séries numérica (cujos termos são não-negativos) segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n {x_o}^{2n}$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Assim, da Proposição (4.1.1) item 1., segue que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ *será absolutamente convergente, para*

$$x \in (-x_o, x_o),$$

para cada $x_o \in (0, 1)$ *fixado, isto é, será absolutamente convergente (veja a figura abaixo) para cada*

$$x \in (-1, 1) .$$

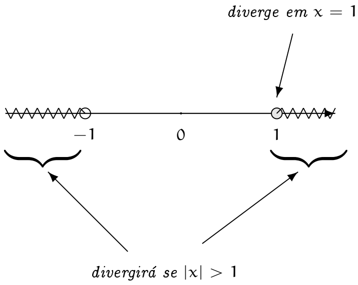


Por outro lado a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ *é divergente em* $x_1 = 1$*, pois a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ *é divergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ *(Critério da divergência).*

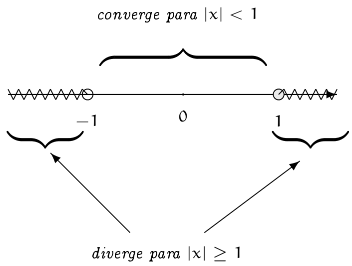
Logo, da Proposição (4.1.1) item 2., segue que a a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ *é divergente para cada* $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ *(veja a figura abaixo).*

Além disso é fácil de ver que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ *é divergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$*, para* $x_1 = -1$*.*

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.



Com isto temos a seguinte situação:



Em geral temos a seguinte situação:

Teorema 4.1.1 *Dada a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *uma, e somente uma, das situações abaixo ocorre:*

1. *a série de potências converge somente em* $x = 0$*;*
2. *a série de potências converge absolutamente em todo* $\mathbb{R}$*;*

3. *existe* $R > 0$, *tal que a série de potências é absolutamente convergente para cada*

$$x \in (-R, R)$$

e divergente para cada

$$x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty).$$

<u>**Demonstração:**</u>

Se o item 1. ocorrer, 2. e 3. não ocorrerão.

Vamos super que o item 1. não ocorre, ou seja, existe

$$x_o \neq 0,$$

tal que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x_o{}^n$ seja convergente em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Logo do item 1. da Proposição (4.1.1), segue que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ convergirá absolutamente em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, para cada

$$x \in (-|x_o|, |x_o|) = (-r, r),$$

onde

$$r \doteq |x_o| > 0.$$

Denotemos por $\underline{S}$, o conjunto formado por todos os $r > 0$, que têm a propriedade acima, isto é, de modo que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$, converge absolutamente em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, para cada $x \in (-r, r)$.

O conjunto $\underline{S}$ é não vazio (pois $r = |x_o| > 0$ pertence a $\underline{S}$).

Se o conjunto $\underline{S}$ não for limitado superiomente, então o item 2. ocorrerá, ou seja, a série de potências convergirá em todo $\mathbb{R}$.

Se o conjunto $\underline{S}$ for limitado superiormente, afirmamos que o item 3. ocorrerá.

De fato, se o conjunto $\underline{S}$ é limitado superiormente, como ele é não vazio, então existe

$$0 < R \doteq \sup(S).$$

Afirmamos que $\underline{R}$ satisfaz o item 3.

De fato, seja $r \in S$ tal que

$$0 < r \leq R \quad \text{e} \quad x_o \in \mathbb{R}, \quad \text{tal que} \quad |x_o| < r. \tag{4.6}$$

Como

$$r \in S \quad \text{e} \quad |x_o| < r,$$

temos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x_o{}^n$ converge em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Logo, da Proposição (4.1.1) item 1., a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ converge absolutamente para cada

$$x \in (-r\,,r)\,.$$

Se

$$x_1 \in \mathbb{R}\,, \quad \text{satisfaz} \quad |x_1| > R\,, \tag{4.7}$$

afirmamos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, {x_1}^n$ é divergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$.

De fato, suponhamos, por absurdo, que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, {x_1}^n$ seja convergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$.

Então, pela Proposição (4.1.1) item 1., a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ será convergente para cada

$$x \in (-|x_1|\,, |x_1|)\,, \quad \text{ou seja,} \quad |x_1| \in S\,,$$

o que seria um absurdo, pois teríamos

$$|x_1| \overset{(4.7)}{>} R = \sup(S) \quad \text{e} \quad |x_1| \in S\,.$$

Portanto a série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ diverge, para cada

$$x \in (-\infty\,, -R) \cup (R\,, \infty)\,,$$

mostrando que

$$R \doteq \sup(S)\,,$$

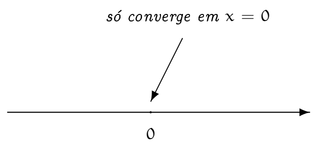
satisfaz o item 2., completando a demonstração do resultado.

$\square$

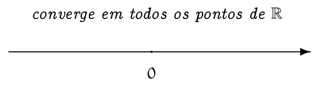
Observação 4.1.2

1. *O Teorema acima nos diz que uma, e somente uma, das possibilidades abaixo, para uma série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$*, ocorrerá:*

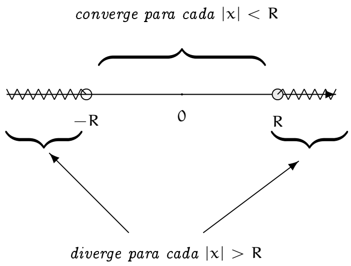
   (i) $R = 0$ *:*



   (ii) $R = \infty$ *:*



(iii) $\quad 0 < R < \infty$:



Neste último caso, poderá ocorrer todo tipo de situação em relação a convergência da série de potências nos pontos

$$x = -R \quad e \quad x = R\,,$$

como veremos em exemplos a seguir.

2. *O*

$$R \in (0\,,\infty]\,,$$

obtido nos itens 2. e 3. do Teorema acima terá uma importância muito grande no estudo das séries de potências, como veremos mais adiante.

Com isto podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 4.1.1 *Definiremos* **raio de convergência** *da série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ *como sendo*

$$R \in [0\,,\infty]\,,$$

obtido no Teorema (4.1.1) acima.

O conjunto formado por todos os $x \in \mathbb{R}$*, para os quais a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ *converge será dito* **intervalo de convergência** *da série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$*.*

Observação 4.1.3

1. *Segue do Teorema (4.1.1) acima que toda série de potências tem um (único) raio de convergência e portanto um (único) intervalo de convergência.*

2. *O raio de convergência de uma série de potências pode ser* $\underline{0}$*, isto é, podemos ter*

$$R = 0\,.$$

Neste caso o intervalo de convergência da série de potências será

$$I = \{0\},$$

isto é, o conjunto formado por um ponto, que na verdade não é um intervalo, como mostra o seguinte exemplo:

Consideremos a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n . \tag{4.8}$$

Observemos que, para cada

$$x_1 > 0$$

fixado, temos que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n {x_1}^n$ *é divergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

De fato, como

$$\lim_{n\to\infty} (n^n {x_1}^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (n\, x_1) = \infty > 1,$$

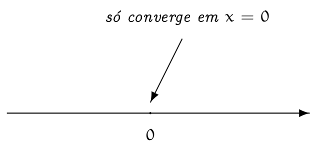
do Critério da Raiz para Séries Numéricas (cujos termos são não-negativos), segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n {x_1}^n$ *é divergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Assim, segue da Proposição (4.1.1) item 2., que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ *só converge quando* $x = 0$*, isto é,*

$$R = 0$$

e o intervalo de convergência da série de potências será

$$I = \{0\}.$$



3. *O raio de convergência* $\underline{R}$*, associado a uma série de potências, pode ser infinito e portanto o intervalo de convergência associado a correspondente série de potências será*

$$I = \mathbb{R},$$

como mostra o seguinte exemplo:

Consideremos a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} . \tag{4.9}$$

Observemos que, para cada $x_o > 0$ *fixado, a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{{x_o}^n}{n!}$ *é convergente em* $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$.

De fato, como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{{x_o}^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{{x_o}^{n}}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_o}{n+1} = 0 < 1,$$

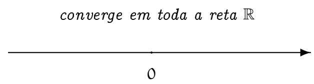
do Critério da Razão para Séries Numéricas (cujos termos são não-negativso), segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{{x_o}^n}{n!}$ *é convergente em* $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$.

Assim, da Proposição (4.1.1) item 1., segue que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{{x_o}^n}{n!}$ *converge em* $\mathbb{R}$*, isto é,*

$$R = \infty$$

e o intervalo de convergência da série de potências será

$$I = \mathbb{R}\,.$$



4. *Se o raio de convergência de uma série de potências for maior que zero e finito, isto é,*

$$R \in (0\,,\infty)\,,$$

a priori, **nenhuma** *conclusão podemos tirar sobre o comportamento da série de potência* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,x^n$*, relativamente a convergência ou divergência, nos pontos*

$$x = -R \quad \text{e} \quad x = R\,.$$

Podemos ter situações, como veremos a seguir, que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,x^n$ *converge em um dos pontos acima e diverge no outro, ou diverge nos dois ou ainda converge nos dois.*

Um exemplo de um desses casos é a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,x^n\,. \tag{4.10}$$

Observemos que a série de potências converge se

$$x = 1\,,$$

pois a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ *(série harmônica alternada).*

Logo, da Proposição (4.1.1) item 1., segue que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ *será convergente, para caca*

$$|x| < 1 .$$

Por outro lado, a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ *é divergente, para*

$$x = -1 ,$$

pois a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ *(série harmônica).*

Logo, da Proposição (4.1.1) item 2., segue que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ *será divergente, para cada*

$$|x| > 1 .$$

Com isto temos que o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ *será*

$$R = 1$$

e o seu intervalo de convergência será

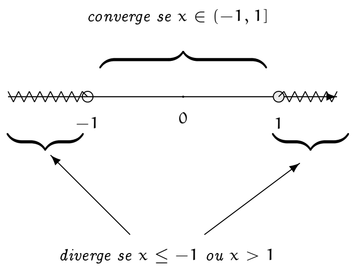
$$I = (-1, -1] ,$$

ou seja, (veja a figura abaixo) a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ *converge em*

$$x = R = 1$$

e diverge em

$$x = -R = -1 .$$



Podemos demonstrar o:

Teorema 4.1.2 *Suponhamos que exista*

$$R \in (0, \infty],$$

tal que a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *seja pontualmente convergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$*, para cada*

$$x \in (-R, R)$$

e definamos a função $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-R, R). \tag{4.11}$$

Então para

$$\varepsilon \in (0, R),$$

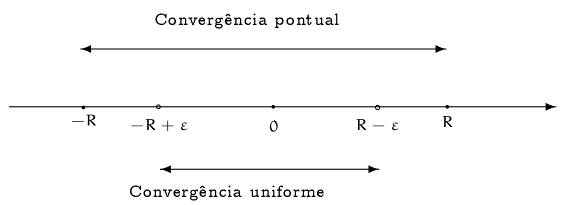
a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n$ *será uniformemente em*

$$[-R + \varepsilon, R - \varepsilon].$$

Em particular, a função $\underline{f}$ *será diferenciável em* $(-R, R)$ *(em particular, contínua em* $(-R, R)$*) e*

$$f'(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^{n-1}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-R, R), \tag{4.12}$$

ou seja, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *pode ser derivada, termo a termos, em* $(-R, R)$ *(veja a figura abaixo).*



Demonstração:

Dado $\varepsilon \in (0, R)$, para cada

$$|x| < R - \varepsilon, \quad \text{isxo é}, \quad -R + \varepsilon < x < R - \varepsilon,$$

teremos

$$\begin{aligned} |c_n\, x^n| &= |c_n|\, |x|^n \\ &\leq |c_n|\, (R-\varepsilon)^n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Como

$$R-\varepsilon \in (-R\,,R)\,, \quad \text{pois} \quad \varepsilon \in (0\,,R)\,,$$

segue, por hipótese, que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\,(R-\varepsilon)^n$ é convergente em $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$.

Logo, do Teste M de Weierstrass (isto é, Teorema (3.2.2)), segue que a série de funções $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ será uniformemente em

$$[-R+\varepsilon\,,R-\varepsilon]\,.$$

Na Observação (4.1.4) a seguir (veja a conclusão no item 2.), mostraremos que a série de potência do lado direito de (4.12) converge uniformemente em $[-R+\varepsilon\,,R-\varepsilon]$, para cada $\varepsilon \in (0\,,R)$.

Notemos que, do Corolário (3.2.3), segue que a função $\underline{f}$ será diferenciável em $(-R\,,R)$ e vale (4.12), completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 4.1.4

1. *Notemos que:*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \\ &\overset{\textit{Exercício}}{=} 1\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{assim,} \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\,|c_n|} &= \underbrace{\left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)}_{=1} \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

2. *De (4.14) segue que, para cada $x_o \in \mathbb{R}$, teremos:*

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n\, c_n\, {x_o}^{n-1}|} &= \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\,|c_n|}\right) \underbrace{\left(\limsup_{n\to\infty} (|{x_o}^{n-1}|)^{\frac{1}{n}}\right)}_{= \limsup\limits_{n\to\infty} |x_o|^{\frac{n-1}{n}} = |x_o|} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\, |x_o| \\ &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n\, x_o|^n}\,. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Em particular, teremos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n\,c_n|}\,|x_o| &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n\,c_n\,x_o{}^{n-1}|}\\ &\overset{(4.15)}{=} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n\,x_o{}^n|}\\ &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\,|x_o|\,.\end{aligned}$$

Logo, do Critério da Raiz para Séries Numéricas (veja o Teorema 3.33 , página 54 de [1]), segue que,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n\,c_n\,x_o{}^{n-1}|} < 1 \quad \textit{se, e somente se,} \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n\,x_o|^n} < 1\,, \tag{4.16}$$

isto é, as séries de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n\,x^{n-1} \qquad e \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,x^n$$

têm o mesmo raio de convergência $R \in (0\,,\infty]$ *que, de* (4.16), *será dado por*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\,.$$

Logo, do Corolário (3.2.3), segue que a função $\underline{f}$ *será diferenciável em* $(-R\,,R)$ *e vale (4.12), completando a demonstração do Teorema* (4.1.2).

<u>Conclusão:</u> *uma série de potências pode ser derivada, termo a termo, que a série de funções obtida será uma série de potências, cujo raio de convergência é o mesmo da série de potências dada inicialmente.*

3. *Vale notar, como veremos em exemplos a seguir, que os intervalos de convegência das séries de potências acima, podem ser diferentes.*

Podemos resumir as Observações acima no:

Corolário 4.1.1 *Nas condições do Teorema (4.1.2) temos que*

$$f \in C^\infty((-R\,,R)\,;\mathbb{R})$$

e, para cada $k \in \mathbb{N}$, *teremos*

$$f^{(k)}(x) \doteq \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\,c_n\,x^{n-k}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-R\,,R)\,. \tag{4.17}$$

Em particular, para cada $k \in \mathbb{N}$, *teremos*

$$f^{(k)}(0) = k!\,c_k\,,$$

ou seja,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,. \tag{4.18}$$

Demonstração:

Observemos que a identidade (4.17), segue da aplicação do Teorema (4.1.2) e da Observação (4.1.4) acima, por indução sobre $k \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, fazendo $x = 0$ em (4.17), obteremos

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\,c_k \underbrace{0^{n-k}}_{\begin{cases} 0\,, & \text{para} \quad n > k \\ 1\,, & \text{para} \quad n = k \end{cases}}$$
$$= c_k\,k\,(k-1)\cdots 1 = c_k\,k!\,,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.1.5

1. *Existem funções* $f \in C^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, *de modo que*

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Como por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\,, & \textit{para cada} \quad x \neq 0 \\ 0\,, & \textit{para} \quad x = 0 \end{cases}. \tag{4.19}$$

Pode-se mostrar que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *e que para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *teremos*

$$f^{(n)}(0) = 0\,. \tag{4.20}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Assim, se $x \neq 0$ *teremos*

$$f(x) \overset{(4.19)}{\neq} 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overbrace{f^{(n)}(0)}^{\overset{(4.20)}{=}0}}{n!}\,x^n$$

Em particular, a função <u>f</u> **<u>não</u>** *é uma função analítica em* $\mathbb{R}$.

2. *Seja* $R > 0$ *e suponhamos que a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,x^n$ *converge em* $x = R$.

Então, o Teorema (4.1.2), nos garante que a função

$$f \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,x^n$$

será contínua em $(-R\,,R)$.

O que podemos dizer sobre a função $\underline{f}$ *em* $x = R$ *?*

O resultado a seguir, conhecido como **Teorema de Abel**, *afirma que a função* $\underline{f}$ *será contínua em* $x = R$ *(na verdade trataremos do caso em que* $R = 1$*).*

Teorema 4.1.3 *Suponhamos que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *é convergente em* $\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$ *e consideremos* $f : (-1\,,1] \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1\,,1]\,. \tag{4.21}$$

Então

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = f(1)\,, \tag{4.22}$$

ou seja, a função $\underline{f}$ *será contínua em* $x = 1$.

Em particular, do Corolário (4.1.1) teremos

$$f \in C((-1\,,1]\,;\mathbb{R})\,.$$

<u>**Demonstração:**</u>

Consideremos a sequência numérica $(s_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1,0\}}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{-1\,,0\}$, temos que

$$\begin{aligned} s_{-1} &\doteq 0, \\ s_n &\doteq \sum_{k=0}^{n} c_k\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Com isto, por indução sobre $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, segue que

$$c_n = s_n - s_{n-1}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\,. \tag{4.24}$$

Logo, para cada

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad m \in \mathbb{N}$$

fixados, teremos:

$$\sum_{n=0}^{m} c_n\, x^n = \sum_{n=0}^{m} (s_n - s_{n-1})\, x^n\,.$$

Assim, teremos

$$
\begin{aligned}
(1-x)\sum_{n=0}^{m-1} s_n\,x^n + s_m\,x^m &= \sum_{n=0}^{m-1} s_n\,x^n - \overbrace{\sum_{n=0}^{m-1} s_n\,x^{n+1}}^{k\doteq n+1} + s_m\,x^m \\
&= \sum_{n=0}^{m} s_n\,x^n - \underbrace{\sum_{k=1}^{m} s_{k-1}\,x^k}_{\overset{s_{-1}=0}{=}\sum_{n=0}^{m} s_{n-1}x^n} \\
&= \sum_{n=0}^{m} (\underbrace{s_n - s_{n-1}}_{=c_n})\,x^n \\
&= \sum_{n=0}^{m} c_n\,x^n\,,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\sum_{n=0}^{m} c_n\,x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{m-1} s_n\,x^n + s_m\,x^m\,, \tag{4.25}
$$

para cada, $x \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$.

Logo, para cada

$$
|x| < 1\,,
$$

tomando-se o limite, quando $m \to \infty$, na identidade acima obteremos

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,x^n \\
&\overset{(4.25)}{=} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n\,x^n + \underbrace{\left(\lim_{m\to\infty} s_m\right)}_{\overset{(4.22)}{=}\sum_{n=0}^{\infty} c_n\in\mathbb{R}} \underbrace{\left(\lim_{m\to\infty} x^m\right)}_{\overset{|x|<1}{=}0} \\
&= (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n\,x^n\,.
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

Definido-se

$$
s \doteq \lim_{m\to\infty} s_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \in \mathbb{R}\,,
$$

dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, de modo que se

$$
n \geq N_o\,, \quad \text{teremos} \quad |s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{4.27}
$$

Por outro lado, para cada $|x| < 1$, temos que

$$
(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1\,. \tag{4.28}
$$

De fato, pois, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, temos que

$$\begin{aligned}(1-x)\,(1+x+\cdots+x^m) &= (1+x+\cdots+x^m) - \left(x+x^2+\cdots+x^m+x^{m+1}\right)\\ &= 1-x^{m+1} \to 0\,, \quad \text{quando} \quad m\to\infty\,, \quad \text{pois} \quad |x|<1\,.\end{aligned}$$

Com isto, para cada $|x| < 1$, teremos

$$\begin{aligned}|f(x)-s| &\overset{(4.26)\text{ e }(4.28)}{=} \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n\,x^n - s\,(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right|\\
&= |\underbrace{1-x}_{\overset{x\in(-1,1)}{>}0}|\left|\sum_{n=0}^{\infty}(s_n-s)\,x^n\right|\\
&= (1-x)\left|\sum_{n=0}^{\infty}(s_n-s)\,x^n\right|\\
&\leq (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}|(s_n-s)\,x^n|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}|s_n-s|\,|x|^n\\
&= (1-x)\left[\sum_{n=0}^{N_o}|s_n-s|\underbrace{|x|^n}_{\overset{|x|<1}{<}1} + \sum_{n=N_o+1}^{\infty}\underbrace{|s_n-s|}_{\overset{(4.27)}{<}\frac{\varepsilon}{2}}|x|^n\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&< (1-x)\left[\underbrace{\sum_{n=0}^{N_o}|s_n-s|}_{\doteq M} + \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\sum_{n=N_o+1}^{\infty}|x|^n}_{\leq\sum_{n=0}^{\infty}|x|^n\leq\frac{1}{1-|x|}}\right]\\
&\leq M\,(1-x) + \frac{1-x}{1-|x|}\,\frac{\varepsilon}{2}\,. \qquad (4.29)\end{aligned}$$

Notemos que se

$$M = 0\,,$$

a desigualdade acima implicará que

$$|f(x)-s| < \frac{1-x}{1-|x|}\,\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Logo, fazendo

$$x \to 1^-$$

podemos supor, sem perda de generalidade que, $0 < x < 1$, o que implicaria

$$1 - |x| = 1 - x\,,$$

assim

$$\begin{aligned}|f(x) - s| &< \frac{1-x}{1-|x|}\,\frac{\varepsilon}{2}\\ &= \frac{1-x}{1-x}\,\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}\,,\end{aligned}$$

para cada $\varepsilon > 0$, ou seja,

$$f(x) = s\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (1-\delta\,, 1)\,,$$

portanto teríamos:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = s = f(1)\,,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é contínua em $x = 1$.

Por outro lado, se

$$M > 0\,,$$

considando-se

$$\delta \doteq \min\left\{\frac{\varepsilon}{2\,M}\,, \frac{1}{2}\right\} > 0\,,$$

teremos:

$$0 \overset{\delta \leq \frac{1}{2}}{\leq} 1 - \delta < x < 1\,,$$

implicando em

$$\begin{aligned}M\,(1-x) &\overset{-x<\delta-1 \text{ e } M>0}{<} M\,[1 + (\delta - 1)]\\ &= M\,\delta \overset{\delta \leq \frac{\varepsilon}{2\,M}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

Logo, de (4.29), segue que

$$\begin{aligned}|f(x) - s| &< \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\frac{1-x}{1-\underbrace{|x|}_{\overset{0\leq x}{=}x}}}_{=1}\,\frac{\varepsilon}{2}\\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,\end{aligned}$$

para cada $\varepsilon > 0$, ou seja,

$$\lim_{x\to 1^-} = s = f(1)\,,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é contínua em $x = 1$, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Como consequência temos o:

Corolário 4.1.2 *Sejam*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tag{4.30}$$

séries numéricas convergentes cujas somas são

$$A\,, \quad B \quad e \quad C\,,$$

respectivamente, onde, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *temos:*

$$\begin{aligned} c_n &\doteq a_o\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, b_1 + a_n\, b_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\,. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Então

$$C = A\,B\,.$$

Demonstração:

Consideremos as funções $f\,, g\,, h : [0\,, 1] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n, \tag{4.32}$$

$$g(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n, \tag{4.33}$$

$$h(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,, 1]\,. \tag{4.34}$$

Notemos que as funções acima estão bem definidas pois, para cada

$$x_o \in [0\,, 1)\,,$$

pela Proposição (4.1.1) item 1. segue que as séries numéricas

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {x_o}^n\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, {x_o}^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, {x_o}^n$$

são absolutamente convergentes, já que as correspondentes séries numéricas (4.30), são convergentes, por hipótese.

Lembremos do seguinte resultado (veja o Teorema 3.50, página 74, de [1]):

Suponhamos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente em* $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$*, com soma* $\underline{A}$*, a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *é convergente* $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$*, como soma* $\underline{B}$ *e definamos, para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $c_n \doteq \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$*. Então, a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *é convergente em* $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$ *e sua soma é igual a* $\underline{A\,, B}$ *.”*

Logo, aplicando o resultado acima, temos que, para cada, para cada $x_o \in [0\,,1)$, as séries numéricas

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, {x_o}^n \,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, {x_o}^n \,,$$

podem ser multiplicadas e, além disso, teremos:

$$\underbrace{h(x_o)}_{\overset{(4.34)}{=}\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, {x_o}^n} = \underbrace{f(x_o)}_{\overset{(4.32)}{=}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, {x_o}^n} \underbrace{g(x_o)}_{\overset{(4.33)}{=}\sum_{n=0}^{\infty} b_n \, {x_o}^n} \,, \quad \text{para cada} \quad x_o \in [0\,,1)\,. \tag{4.35}$$

Pelo Teorema de Abel (isto é, o Teorema (4.1.3)), as funções $\underline{f}$, $\underline{g}$ e $\underline{h}$ são contínuas à esquerda de $x = 1$, ou seja, para

$$x \to 1^- \,,$$

teremos

$$\underbrace{f(x)}_{\overset{(4.32)}{=}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n} \to A \,, \qquad \underbrace{g(x)}_{\overset{(4.33)}{=}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} \to B \quad \text{e} \qquad \underbrace{h(x)}_{\overset{(4.34)}{=}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n} \to C \,.$$

Assim, passando o limite, quando

$$x_o \to 1^- \,,$$

em (4.35), segue que

$$C = A\,B \,,$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 4.1.6 *A seguir exibiremos um exemplo de uma série numérica convergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$, cujo produto com ela mesmo* ***não*** *é convergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$, ou seja, em geral, o produto de séries numéricas convergentes pode* ***não*** *ser convergente.*

Consideremos a série numérica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

Observemos que, do critério de Leibnitz para séries alternadas, que a série numérica é convergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Da definicão de produto de séries numéricas teremos que a série produto

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_n \,,$$

será dada pela série numérica $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$, *onde:*

$$\begin{aligned}
c_o &= a_o\, a_o = 1\,,\\
c_1 &= a_o\, a_1 + a_1\, a_o\\
&= 2\, a_o\, a_1\\
&= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\\
c_2 &= a_o\, a_2 + a_1\, a_1 + a_2\, a_o\\
&= 2\, a_o\, a_2 + {a_1}^2\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,,\\
c_3 &= a_o\, a_3 + a_1\, a_2 + a_2\, a_1 + a_3\, a_o\\
&= 2\, a_o\, a_3 + 2\, a_1\, a_2\\
&= -\left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right),
\end{aligned}$$

em geral teremos:

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)\,(k+1)}}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{Z}^+\,.$$

A verificação deste fato será deixado como exercício para o leitor.
Observemos que

$$\begin{aligned}
(n-k+1)\,(k+1) &\overset{\textit{Exercício}}{=} \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 \underbrace{-\left(\frac{n}{2}-k\right)^2}_{\leq 0}\\
&\leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2\\
&= \left(\frac{n+2}{2}\right)^2, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{1}{(n-k+1)\,(k+1)} \geq \left(\frac{2}{n+2}\right)^2, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, *teremos:*

$$\begin{aligned}
|c_n| &= \left|(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)\,(k+1)}}\right|\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)\,(k+1)}}\\
&\geq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2}{n+2}\,(n+1)\,.
\end{aligned}$$

Logo, a sequência numérica $(|c_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ***não*** *converge para zero em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$*, pois*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,(n+1)}{n+2} = 2\,.$$

Logo, do critério da comparação para sequências numéricas, segue que

$$\lim_{n\to\infty} |c_n| \geq 2\,.$$

Portanto a sequência $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***não*** *converge para zero em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.
Portanto, do critério da divergência, segue que a série numérica

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_n$$

não *será convergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Para a convergência do produto de séries numéricas, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1.4 *Seja* $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números reais e consideremos a sequência numérica* $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$*, onde, para cada* $i \in \mathbb{N}$*, temos que:*

$$b_i \doteq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \in [0, \infty)\,, \tag{4.36}$$

ou seja, a série numérica $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ *é absolutamente convergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$*, para cada* $i \in \mathbb{N}$.

Suponhamos que a série numérica $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ *seja convergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\,. \tag{4.37}$$

Demonstração:

Seja

$$E \doteq \{x_o, x_1, x_2, \cdots\}$$

um subconjuto enumerável, de modo que

$$x_n \to x_o\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, definamos a função $f_i : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_i(x_o) \doteq \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\,, \tag{4.38}$$

$$f_i(x_n) \doteq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{4.39}$$

Notemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, a função $\underline{f_i}$ está bem definida.

De fato, para cada $i \in \mathbb{N}$ fixado, se $x = x_o$, segue, de (4.36), que série numérica (4.38) será convergente e para $x = x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, (4.39) é uma soma finita.

Notemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$ fixado, temos que

$$\begin{aligned} |f_i(x_o)| &\overset{(4.38)}{=} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \\ &\overset{(4.36)}{=} b_i \,. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Como a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ é convergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$, segue que,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x_o)| \overset{(4.40)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} b_i \overset{(4.36)}{<} \infty \,.$$

Por outro lado, para cada $i\,, n \in \mathbb{N}$ fixados, teremos:

$$\begin{aligned} |f_i(x_n)| &\overset{(4.39)}{=} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \\ &\overset{(4.36)}{=} b_i \,. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Como a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ é convergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$, do Critério da Comparação para Séries Numéricas (cujos termos são não-negativos), segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x_n)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} b_i \overset{(4.36)}{<} \infty \,.$$

Observemos também que, para cada $i \in \mathbb{N}$, a função $\underline{f_i}$ é contínua em $\underline{x_o}$.

De fato, como

$$x_n \to x_o \,,$$

segue que

$$\lim_{n\to\infty} f_i(x_n) \overset{(4.39)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$$
$$\overset{(4.38)}{=} f_i(x_o)\,,$$

mostrando que a função $\underline{f_i}$ é contínua em $\underline{x_o}$.

Definamos agora a função $g : E \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) \doteq \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,. \tag{4.42}$$

Notemos que a função $\underline{g}$ está bem definida e é contínua em $\underline{x_o}$.

De fato, pois para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, teremos:

$$|f_i(x_k)| \overset{(4.41)}{\leq} b_i \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} b_i \overset{(4.36)}{<} \infty\,.$$

Logo, do Teste M de Weierstrass, segue que a série de funções $g \overset{(4.42)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ converge uniformemente em $(E\,, d_{\mathbb{R}})$.

Como, para cada $i \in \mathbb{N}$, a função $\underline{f_i}$ é contínua em $\underline{x_o}$, do Corolário (3.2.1), segue que a função $\underline{g}$ será contínua em $\underline{x_o}$.

Por hipótese, temos que a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ é absolutamente convergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$ e, assim, do Critério da Comparação para séries numéricas, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|\right) \overset{(4.36)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} b_i\,,$$

ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$ será convergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$.

Notemos também que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) \overset{\text{soma finita}}{=} \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right). \tag{4.43}$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \overbrace{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}}^{\stackrel{(4.38)}{=} f_i(x_o)} &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_o) \\
&\stackrel{(4.42)}{=} g(x_o) \\
&\stackrel{g \text{ é cont. em} x_o}{=} \lim_{n \to \infty} g(x_n) \\
&\stackrel{(4.42)}{=} \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) \right] \\
&\stackrel{(4.39)}{=} \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \right] \\
&\stackrel{(4.43)}{=} \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \,,
\end{aligned}
$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

Agoro, podemos enunciar e demonstrar o **Teorema de Taylor** que nos diz:

Teorema 4.1.5 *Sejam* $R \in (0\,,\infty]$ *o raio de convergência da série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ *e definamos a função* $f : (-R\,,R) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-R\,,R)\,.$$

Se

$$a \in (-R\,,R)\,,$$

então a função $\underline{f}$ *pode ser expandida em uma série de potências em torno de* $x = a$, *que convergirá para a função* $\underline{f}$ *em*

$$I_a \doteq (a - (R - |a|)\,, a + (R - |a|))\,.$$

Além disso

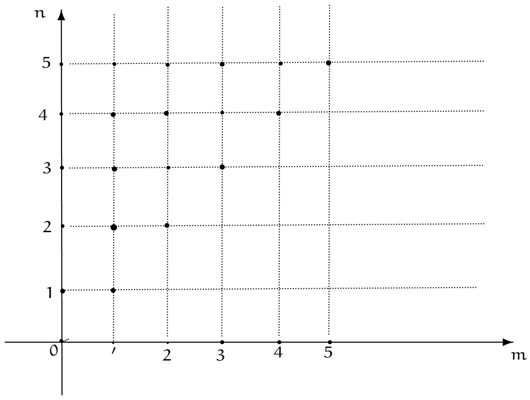
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in I_a\,. \tag{4.44}$$

Demonstração:

Notemos que, para cada $x \in (-R\,, R)$, teremos

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, [(x-a)-a]^n \\
&\overset{\text{Binômio de Newton}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}\, a^{n-m}\, (x-a)^m\right] \\
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} &\overset{\text{figura abaixo}}{=} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=m}^{\infty} c_n \binom{n}{m}\, a^{n-m}\right](x-a)^m,
\end{aligned}$$

onde, na última identidade utilizamos o Teorema (4.1.4) e assim, obtemos uma expansão da função $\underline{f}$ em série de potências em torno de $x = a$.



Notemos que para $a > 0$, segue que $|a| = a$, e assim teremos:

$$\begin{aligned}
&-R < x < R\,, \\
\text{ou seja,}\quad &-R - a < x - a < R - a\,, \\
\text{ou ainda,}\quad &-R - |a| < x - a < R - |a|\,.
\end{aligned}$$

Vale algo semelhante se $a \leq 0$.

Deixaremos os detalhes deste caso como exercício para o leitor.

Para terminar a demonstração, precisamos demonstrar a identidade (4.44).

Para isto afirmamos que, para cada $x_o \in I_a$, a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} c_n \binom{n}{m}\, a^{n-m}\, (x_o - a)^m\,, \tag{4.45}$$

é absolutamente convergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$.

De fato, pois

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left|c_n \binom{n}{m} a^{n-m}(x_o-a)^m\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}|c_n| \binom{n}{m} |a|^{n-m}|x_o-a|^m$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}|c_n| \underbrace{\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} |a|^{n-m}|x_o-a|^m}_{\text{Binômio de Newton } (|x_o-a|+|a|)^n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\,(|x_o-a|+|a|)^n\,.$$

Como $x_o \in I_a$, temos que:

$$a-(R-|a|) < x_o < a+(R-|a|)\,,$$
ou ainda, $\quad -(R-|a|) < x_o - a < (R-|a|)\,,$
isto é, $\quad |x_o-a| < R-|a|\,,$
ou seja, $\quad |x_o-a|+|a| < R\,,$

implicando que a série numérica (4.45) acima será absolutamente convergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$.

Para finalizar, notemos que se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\,(x-a)^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in I_a\,, \tag{4.46}$$

e

$$I_a{}' \doteq (-R+|a|\,, R-|a|)\,,$$

definindo-se a função $g : I_a{}' \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(y) \doteq f(y+a) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\,y^n\,, \quad \text{para cada} \quad y \in I_a{}'\,, \tag{4.47}$$

teremos que

$$g^{(n)}(0) = n!\,d_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\,. \tag{4.48}$$

Logo, de (4.46) e (4.47), segue que

$$g^{(n)}(0) = f^{(n)}(a)\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\,. \tag{4.49}$$

Deixaremos como exercício para o leitor verificação deste fato.

Logo, de (4.48) e (4.49), segue que

$$d_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\,. \tag{4.50}$$

Assim

$$f(x) = g(x-a)$$
$$\overset{(4.47)\text{ e }(4.50)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in I_a\,,$$

obtendo a identidade (4.44) e completando a demonstração do resultado.

$\square$

Para finalizar esta seção temos o:

Teorema 4.1.6 *Suponhamos que as séries de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n \tag{4.51}$$

são convergentes em $(-R\,,R)$.

Seja

$$E \doteq \left\{ x \in (-R\,,R)\ ;\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n \right\} \subseteq \mathbb{R}\,.$$

Suponhamos que o conjunto $\underline{E}$ *tem um ponto de acumulação em* $(-R\,,R)$.

Então

$$a_n = b_n, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Em particular,

$$E = (-R\,,R)\,,$$

ou seja, as duas séries de potências dadas por (4.51), *coincidem em* $(-R\,,R)$.

Demonstração:

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, seja

$$c_n \doteq a_n - b_n \tag{4.52}$$

e consideremos a função $f : (-R\,,R) \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-R\,,R)\,, \tag{4.53}$$

que está bem definida, pois as séries de potências (4.51) são convergentes em $(-R\,,R)$.

Observemos que

$$x_o \in E$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {x_o}^n &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x_o^n\,,\\
\text{ou seja,}\quad 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {x_o}^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, {x_o}^n\\
&\overset{\text{séries convergentes}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n){x_o}^n\\
&\overset{(4.52)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x_o^n\\
&\overset{(4.53)}{=} f(x_o)\,,\\
\text{isto é,}\quad f(x_o) &= 0\,,
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Portanto

$$x_o \in E \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x_o) = 0 . \tag{4.55}$$

Seja

$$\mathcal{A} \subseteq (-R\,, R) \tag{4.56}$$

o conjunto formado por todos os pontos de acumulação de $\underline{E}$ e

$$\mathcal{B} \doteq (-R\,, R) \setminus A . \tag{4.57}$$

Por hipótese, temos que

$$\mathcal{A} \neq \emptyset$$

e notemos que se $x_o \in \mathcal{A}$, como a função $\underline{f}$ é contínua em $(-R\,, R)$, segue que

$$f(x_o) = 0 ,$$

ou seja, $x_o \in E$, ou ainda,

$$A \subseteq E . \tag{4.58}$$

De fato, notemos que se $x_o \in \mathcal{A}$, como $\underline{x_o}$ é ponto de acumulação de $\underline{E}$ (em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$), deverá existir uma sequência numérica $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que pertence ao conjunto $\underline{E}$, de modo que

$$x_n \to x_o .$$

Portanto teremos:

$$\begin{aligned} f(x_o) &\overset{x_n \to x_o}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \\ &\overset{f \text{ é contínua em } x_o}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) \\ &\overset{x_n \in E \text{ de } (4.55), \text{ segue que } f(x_n)=0}{=} 0 . \end{aligned}$$

Notemos que, o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ contém todos os seus pontos de acumulação, ou seja, o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ é um subconjunto fechado em $((-R\,, R)\,, d_{\mathbb{R}})$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (visto no curso de Análise I).

Como consequência temos que o conjunto $\underline{\mathcal{B}}$, dado por (4.57), será um subconjunto aberto de $((-R\,, R)\,, d_{\mathbb{R}})$.

Afirmamos que o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ é um subconjunto aberto em $((-R\,, R)\,, d_{\mathbb{R}})$.

Para mostrar isto consideremos

$$x_o \in \mathcal{A} \subseteq (-R\,, R) . \tag{4.59}$$

O Teorema (4.1.5) acima, garante que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \,(x - x_o)^n , \quad \text{para cada} \quad |x - x_o| < R - |x_o| . \tag{4.60}$$

Afirmamos que:

$$d_n = 0\,, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

De fato, caso contrário, como $x_o \in \mathcal{A}$ teremos

$$f(x_o) = 0$$

e existirá $k_o \in \mathbb{N}$, o menor natural, tal que

$$d_{k_o} \neq 0\,. \tag{4.61}$$

Assim teremos

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{d_n=0\,,\ \text{para}\ n\in\{0,\cdots,k_o-1\}}{=} \sum_{n=k_o}^{\infty} d_n\,(x-x_o)^n \\ &\overset{m\doteq n-k_o}{=} \sum_{m=0}^{\infty} d_{m+k_o}\,(x-x_o)^{m+k_o} \\ &= (x-x_o)^{k_o} \sum_{m=0}^{\infty} d_{m+k_o}\,(x-x_o)^m\,, \end{aligned} \tag{4.62}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$ que satisfaz

$$|x - x_o| < R - |x_o|\,.$$

Logo, considerando-se a função $g : I_{x_o} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) \doteq \sum_{m=0}^{\infty} d_{m+k_o}\,(x-x_o)^m\,, \quad \text{para cada} \quad x \in I_{x_o}\,, \tag{4.63}$$

onde

$$I_{x_o} \doteq \{x \in (-R\,,R)\,;\, |x - x_o| < R - |x_o|\}\,, \tag{4.64}$$

segue que

$$f(x) \overset{(4.62)\ \text{e}\ (4.63)}{=} (x-x_o)^{k_o}\,g(x)\,, \tag{4.65}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$ que satisfaz

$$|x - x_o| < R - |x_o|\,.$$

Observemos que a função $\underline{g}$ é contínua em $\underline{x_o}$.

Na verdade $g \in C^\infty(I_{x_o}\,;\mathbb{R})$, pois é dada por uma série de potências convergente.

Além disso temos que

$$g(x_o) \overset{(4.63)}{=} d_{k_o} \neq 0\,,$$

pela escolha que fizemos em (4.61).

Logo, da continuidade da função $\underline{g}$ em $\underline{x_o}$, segue que podemos encontrar

$$\varepsilon > 0\,,$$

de modo que se

$$x \in \mathcal{B}(x_o\,;\,\varepsilon) \subseteq I_{x_o}\,, \quad \text{teremos} \quad g(x) \neq 0\,.$$

Assim para

$$x \in \mathcal{B}(x_o\,;\,\varepsilon) \setminus \{x_o\},$$

teremos

$$f(x) \overset{(4.65)}{=} \underbrace{(x - x_o)^{k_o}}_{\neq 0} \underbrace{g(x)}_{\neq 0} \neq 0\,. \tag{4.66}$$

Por outro lado, como (veja (4.59))

$$x_o \in \mathcal{A}\,,$$

segue que $\underline{x_o}$ é ponto de acumulação do conjunto $\underline{E}$ em $((-R\,,R)\,,d_{\mathbb{R}})$, ou seja, existe uma sequência numérica $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $x_n \in E$, para cada $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo

$$x_n \to x_o\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $x_n \in E$, segue que

$$f(x_n) = 0\,,$$

o que mostra que

$$x_n \in \mathcal{B}(x_o\,;\,\varepsilon)$$

para $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, o que contraria (4.66).

Portanto deveremos ter

$$d_n = 0\,, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,,$$

ou seja,

$$f(x) \overset{(4.60)}{=} 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in I_{x_o}\,,$$

que, de (4.64), é uma vizinhança de $\underline{x_o}$, que está contida em $(-R\,,R)$.

Logo

$$I_{x_o} \subseteq E\,,$$

ou seja, se

$$x_o \in \mathcal{A} \quad \text{e} \quad x \in I_{x_o}$$

segue que

$$x \in E\,,$$

em particular, $\underline{x}$ será ponto de acumulação de $\underline{E}$ em $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$, ou ainda, que

$$I_{x_o} \subseteq \mathcal{A}\,,$$

mostrando que o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ é um subconjunto aberto em $((-R\,,R)\,,d_{\mathbb{R}})$.

Com isto teremos

$$(-R\,,R) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B},$$

onde os conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ e $\underline{\mathcal{B}}$ são subconjuntos abertos em $((-R\,,R)\,,d_{\mathbb{R}})$ e são disjuntos.

Como o conjunto $(-R\,,R)$ é conexo em $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$ e

$$\mathcal{A} \neq \emptyset\,,$$

deveremos necessariamente ter (veja Teorema 2.47, página 42 de [1])

$$\mathcal{B} = \emptyset\,,$$

ou seja,

$$\mathcal{A} = (-R\,,R) \subseteq E \subseteq (-R\,,R)\,,$$

portanto

$$E = (-R\,,R)\,.$$

Logo, teremos

$$f(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-R\,,R)\,,$$

o que implicará que

$$f^{(n)}(0) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

e assim, do Teorema (4.1.5), segue que

$$c_n \overset{(4.44)}{=} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,,$$

ou ainda, de (4.52), teremos

$$a_n = b_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,,$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

4.2 As funções Exponencial e Logarítmo

Nesta seção, utilizando as séries de potências, estudaremos as funções logarítmo e exponencial complexas, suas propriedades e aplicações.

Começaremos pela

Definição 4.2.1 *Definamos a função* $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, dada por*

$$E(z) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\,, \quad \textit{para cada} \quad z \in \mathbb{C}\,, \tag{4.67}$$

que será denominada **função exponencial (complexa)**.

A seguir exibiremos algumas propriedades da função exponencial (complexa).

Observação 4.2.1

1. *Para cada* $z_o \in \mathbb{C}$ *a série numérica complexa*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} {z_o}^n$$

será convergente em $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}})$.

De fato, notemos que se

$$z_o = 0$$

nada temos a demonstrar.

Por outro lado, se

$$z_o \neq 0,$$

notamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{{z_o}^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{{z_o}^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z_o|}{n+1} = 0 < 1. \tag{4.68}$$

Assim, do Critério da Razão para séries numéricas (cujos termos são não-negativos) segue que a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |z_o|^n$$

será convergente, o que implicará que a série numérica complexa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} {z_o}^n$$

também será convergente.

Em particular, a função exponencial (4.67) *está bem definida.*

2. *Se* $z \in \mathbb{C}$, *segue que*

$$\overline{E(z)} = E(\overline{z}). \tag{4.69}$$

De fato, pois

$$\begin{aligned}
\overline{E(z)} &\overset{(4.67)}{=} \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \overline{(z^n)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\overline{z})^n \\
&\overset{(4.67)}{=} E(\overline{z}).
\end{aligned}$$

3. *Se* $z, w \in \mathbb{C}$, *teremos*

$$E(z+w) = E(z) \cdot E(w)\,. \tag{4.70}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
E(z) \cdot E(w) &\overset{(4.67)}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} w^m\right) \\
&\overset{\text{Def. de produto de duas séries (ver Def. 3.48 de [1], página 73)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{n!} z^m w^{n-m} \\
&\overset{\text{Binômio de Newton}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n \\
&\overset{(4.67)}{=} E(z+w)\,.
\end{aligned}$$

4. *Em particular, do item (3) acima, segue que, para cada* $z_o \in \mathbb{C}$, *teremos*

$$\begin{aligned}
&E(z_o) \cdot E(-z_o) \\
&\overset{(4.70)}{=} E[z_o + (-z_o)] \\
&= E(0) \\
&\overset{(4.67)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 0^n = 1\,,
\end{aligned}$$

ou seja, o número complexo $E(z_o)$ *é inversível e seu inverso será* $E(-z_o)$, *isto é,*

$$[E(z_o)]^{-1} = E(-z_o)\,. \tag{4.71}$$

5. *Se* $x_o \in [0, \infty)$, *segue que*

$$E(x_o) \overset{(4.67)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{>0} \underbrace{x_o^n}_{>0} > 0\,.$$

Se $x_o \in (-\infty, 0)$, *do item (4) acima, segue que*

$$E(x_o) \overset{(4.71)}{=} [\underbrace{E(-x_o)}_{>0,\ pois\ -x_o>0}]^{-1} > 0\,,$$

assim

$$E(x) > 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.72}$$

6. *Para cada* $x \in \mathbb{R}$, *temos que*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} E(x) &\overset{(4.67)}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{n!}}_{>0}\underbrace{x^n}_{\to\infty} = \infty\\
\text{e}\qquad \lim_{x\to-\infty} E(x) &\overset{y\doteq -x}{=} \lim_{y\to\infty}\underbrace{E(-y)}_{=\frac{1}{E(y)}}\\
&= \lim_{y\to\infty}\frac{1}{E(y)}\\
&\overset{\lim_{y\to\infty}E(y)=\infty}{=} 0\,.
\end{aligned}$$

7. *A função* $\underline{E}$ *é estritamente crescente em* $\mathbb{R}$.

   De fato, se

$$0 \le x < y\,,$$

   teremos

$$\begin{aligned}
E(x) &\overset{(4.67)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{x^n}_{<y^n}\\
&< \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}y^n\\
&\overset{(4.67)}{=} E(y)\,.
\end{aligned}$$

   Por outro lado se,

$$x < y \le 0\,, \quad \textit{teremos} \quad -x > -y \ge 0$$

   e assim

$$\underbrace{E(-y)}_{=\frac{1}{E(y)}} < \underbrace{E(-x)}_{=\frac{1}{E(x)}}\,,$$

$$\textit{ou seja,}\quad E(x) < E(y)\,.$$

   Os outros casos serão deixados como exercício para o leitor.

8. *A função* $\underline{E}$ *pertence a* $C^\infty(\mathbb{C};\mathbb{C})$ *e*

$$E'(z) = E(z)\,, \quad \textit{para cada} \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.73}$$

   De fato, como a função $\underline{E}$ *é dada por uma série de potências que converge em* $\mathbb{C}$ *segue, do Corolário (4.1.1), que ela será uma função que pertencerá a* $C^\infty(\mathbb{C};\mathbb{C})$.

Além disso, a série de potências que define a função $\underline{E}$ *poderá ser derivada, termo a termo, em* $\mathbb{C}$, *ou seja, para cada* $z \in \mathbb{C}$, *teremos:*

$$\begin{aligned}
E'(z) &\overset{(4.67)}{=} \frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{n!} z^n\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} \\
&\overset{m \doteq n-1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z^m \\
&\overset{(4.67)}{=} E(z)\,.
\end{aligned}$$

9. *Definamos o* **<u>número de Euler</u>**, *que será indicado por* $\underline{e}$, *como sendo*

$$e \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \in (0\,,\infty)\,. \tag{4.74}$$

10. *Notemos que se* $n \in \mathbb{N}$, *segue que*

$$e^n = E(n)\,. \tag{4.75}$$

De fato, pois

$$\begin{aligned}
e^n &= E(1)^n \\
&= \underbrace{E(1)\cdots E(1)}_{n \text{ fatores}} \\
&\overset{\text{item 2.}}{=} E(\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ parcelas}}) \\
&= E(n)\,.
\end{aligned}$$

11. *Se* $p\,,q \in \mathbb{Z}$, *com* $q \neq 0$, *teremos*

$$e^{\frac{p}{q}} = E\left(\frac{p}{q}\right)\,. \tag{4.76}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\left[E\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q &= \underbrace{E\left(\frac{p}{q}\right)\cdots E\left(\frac{p}{q}\right)}_{q \textit{ fatores}}\\ &\overset{\textit{item 2.}}{=} E\left(\underbrace{\frac{p}{q}+\cdots+\frac{p}{q}}_{q \textit{ parcelas}}\right)\\ &= E\left(q\,\frac{p}{q}\right)\\ &= E(p)\\ &\overset{(4.75)}{=} e^p,\end{aligned}$$

logo, segue que

$$e^{\frac{p}{q}} = E\left(\frac{p}{q}\right).$$

Com a função exponencial podemos definir outras funções importantes, que serão introduzidas e estudadas, a seguir.

Comecemos pela:

Observação 4.2.2 *Sejam $x > 1$ e $y \in \mathbb{R}$ fixados.*

Consideremos o conjunto

$$\mathcal{P} \doteq \{p \in \mathbb{Q};\, p < y\}.$$

Com isto afirmamos que o conjunto

$$\{x^p;\, p \in \mathcal{P}\}$$

será limitado superiormente em $\mathbb{R}$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Com isto podemos introduzir a:

Definição 4.2.2 *Na situação acima, definiremos*

$$x^y \doteq \sup_{p\in\mathcal{P}} x^p. \tag{4.77}$$

Temos as seguintes observações:

Observação 4.2.3

1. *Se $x \in \mathbb{R}$, da Definição (4.2.2), teremos*

$$e^x = \sup_{p\in\mathcal{P}} e^p, \tag{4.78}$$

onde

$$\mathcal{P} \doteq \{p \in \mathbb{Q};\, p < x\}.$$

2. *Como a função $\underline{E}$ é contínua e monótona crescente em $\mathbb{R}$, segue que*

$$e^x = E(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.79}$$

De fato, seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona crescente, formada por números racionais, tais que

$$p_n < x \quad e \quad p_n \to x\,, \quad \textit{quando} \quad n \to \infty\,,$$

então, como a função $\underline{E}$ é contínua em $\mathbb{R}$, segue que

$$\underbrace{E(p_n)}_{\overset{(4.76)}{=} e^{p_n}} \to E(x)\,, \quad \textit{que, de (4.79), implicará que:} \quad e^{p_n} \to E(x)\,,$$

quando $n \to \infty$.

Como a função $\underline{E}$ é monótona crescente em $\mathbb{R}$, segue que

$$\underbrace{E(p_n)}_{\overset{(4.76)}{=} e^{p_n}} < \underbrace{E(p_{n+1})}_{\overset{(4.76)}{=} e^{p_{n+1}}} \overset{p_n<x}{\leq} E(x)\,,$$

o que implicará que

$$e^x \overset{(4.78)}{=} \sup_{p\in\mathcal{P}} e^p \overset{e^p \overset{(4.79)}{=} E(p) \leq E(x)}{\leq} E(x)\,. \tag{4.80}$$

Por outro lado, se $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona decrescente, formada por números racionais, tais que

$$x < q_n \quad e \quad q_n \to x\,, \quad \textit{quando} \quad n \to \infty,$$

segue, da continuidade da função $\underline{E}$ em $\mathbb{R}$, que

$$\underbrace{E(q_n)}_{\overset{(4.76)}{=} e^{q_n}} \to E(x)\,, \quad \textit{ou seja,} \quad e^{q_n} \to E(x)\,, \quad \textit{quando} \quad n \to \infty\,.$$

Como a função $\underline{E}$ é monótona crescente em $\mathbb{R}$ segue que

$$E(x) < \underbrace{E(q_n)}_{\overset{(4.76)}{=} e^{q_n}} = e^{q_n}\,.$$

Fazendo $n \to \infty$, obteremos o que implicará

$$E(x) \leq \lim_{n\to\infty} e^{q_n} \overset{\textit{Exercício}}{=} e^x\,. \tag{4.81}$$

Logo, de (4.80) e (4.81), segue que

$$e^x = E(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

como afirmamos.

Com isto introduziremos a

Definição 4.2.3 *Definimos a* **função exponencial (real)**, *indicada por* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *como sendo*

$$\exp(x) \doteq e^x, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.82}$$

Podemos resumir algumas das propriedades acima bem como outras, no seguinte resultado:

Proposição 4.2.1

1. *Para cada* $x \in \mathbb{R}$, *teremos*
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n. \tag{4.83}$$

2. *A função exponencial real, pertence a* $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, *é estritamente cescente em* $\mathbb{R}$ *e maior que zero.*

   Além disso
$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.84}$$

3. *Se* $x, y \in \mathbb{R}$, *teremos*
$$e^{x+y} = e^x e^y. \tag{4.85}$$

4. *Se*
$$x \to \infty, \quad \textit{segue que} \quad e^x \to \infty, \tag{4.86}$$
$$y \to -\infty, \quad \textit{segue que} \quad e^y \to 0. \tag{4.87}$$

5. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *teremos*
$$\lim_{x \to \infty} x^n e^{-x} = 0. \tag{4.88}$$

Demonstração:

Deixaremos a demonstração dos itens não tratados na Observação (4.2.3) acima, como exercício para o leitor.

Notemos que a propriedade 5. segue do fato que, se $x > 0$, teremos

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{4.89}$$

Logo, se $x > 0$ teremos

$$0 \le x^n e^{-x} \overset{(4.89)}{<} \frac{(n+1)!}{x} \to 0, \quad \text{quando} \quad x \to \infty,$$

mostrando o item 5. .

□

Observação 4.2.4

1. *Do item* (7) *da Observação* (4.2.1)*, temos que a função* $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é estritamente crescente em* $\mathbb{R}$.

   Além disso, valem (4.86) *e* (4.87)*, assim, teremos*

$$E(\mathbb{R}) = (0\,,\infty)\,. \tag{4.90}$$

   Do item (8) *da Observação* (4.2.1)*, temos que a função* $\underline{E}$ *é uma função diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e*

$$E\,'(x) = E(x) \overset{(4.72)}{>} 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

   Do Teorema da Função Inversa (visto em Análise I), segue que existe sua função inversa $L : (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$ *e esta será estritamente crescente, diferenciável em* $(0\,,\infty)$.

   Em particular, teremos

$$E[L(y)] = y\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in (0,\infty) \tag{4.91}$$
$$\textit{e} \quad L[E(x)] = x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.92}$$

   Derivando a identidade à direita, em relação a $\underline{x}$*, e utilizando a Regra da Cadeia, obteremos*

$$\begin{aligned} 1 &= L\,'[E(x)] \cdot E\,'(x) \\ &= L[E(x)] \cdot E(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

   e assim, definindo-se $y \doteq E(x)$*, segue, da identidade acima, que*

$$L\,'(y) \cdot y = 1\,,$$
$$\textit{ou seja,} \quad L\,'(y) = \frac{1}{y}\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in (0\,,\infty)\,. \tag{4.93}$$

   Notemos que

$$L(1) \overset{1 \overset{(4.67)}{=} E(0)}{=} L[E(0)] \overset{L[E(x)] \overset{(4.92)}{=} x}{=} 0\,. \tag{4.94}$$

2. *Integrando-se a identidade* (4.93)*, em relação a* $\underline{y}$*, de* $\underline{1}$ *a* $\underline{y}$ *obteremos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que*

$$L(y) - \underbrace{L(1)}_{\overset{(4.94)}{=} 0} = \int_1^y \frac{1}{t}\,dt\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in (-0\,,\infty)\,,$$

   ou seja, a função inversa associada a função exponencial é a função $L : (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$L(y) \doteq \int_1^y \frac{1}{t}\,dt\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in (0\,,\infty)\,, \tag{4.95}$$

   que é denominada **<u>função logarítmo natural</u>** *e denotada por* $\underline{\ln}$.

3. *Se* $y \in (0\,,\infty)$, *de* (4.90), *segue que existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$y = E(x)\,. \tag{4.96}$$

Assim, de (4.96), (4.79) *e , se*

$$y \to \infty\,, \quad \textit{teremos que} \quad x \to \infty\,.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Com isto teremos:

$$L(y) \overset{(4.96)}{=} L[E(x)] \overset{(4.92)}{=} x \to \infty\,, \quad \textit{se} \quad y \to \infty\,.$$

4. *Por outro lado, , de* (4.96) *e* (4.79), *se*

$$y \to 0^+\,, \quad \textit{segue que} \quad x \to -\infty\,.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor

Com isto teremos:

$$L(y) \overset{(4.96)}{=} L[E(x)] \overset{(4.91)}{=} x \to -\infty\,, \quad \textit{se} \quad y \to 0^+\,.$$

5. *Observemos que se* $u\,,v \in (0,\infty)$, *de* (4.90), *segue que existem* $x\,,y \in \mathbb{R}$, *tais que*

$$u = E(x) \quad \textit{e} \quad v = E(y)\,, \tag{4.97}$$
$$\textit{ou ainda,} \quad L(u) = x \quad \textit{e} \quad L(v) = y\,. \tag{4.98}$$

Com isto teremos:

$$\begin{aligned} L(u \cdot v) &\overset{(4.97)}{=} L[E(x) \cdot E(y)] \\ &\overset{\textit{Obs. } (4.2.1) \textit{ item } (3)}{=} L[E(x+y)] \\ &= x + y \\ &\overset{(4.98)}{=} L(u) + L(v)\,. \end{aligned}$$

6. *Em particular, se* $n \in \mathbb{N}$ *e* $y \in (0\,,\infty)$ *segue, por indução e a identidade acima, que*

$$L[y^n] = L[\underbrace{y \cdots y}_{n-\textit{fatores}}] = n\,L(y)\,.$$

Em particular, teremos

$$y^n = E[L(y^n)]\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in (0\,,\infty)\,.$$

7. *Como consequência do item acima, segue que, para* $y \in (0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$, *se considerarmos*

$$x \doteq y^m \in (0\,,\infty)\,, \tag{4.99}$$

e assim, segue que

$$\begin{aligned} L[x] &\overset{(4.99)}{=} L(y^m) \\ &\overset{item\ (6)\ acima}{=} m \cdot L(y) \\ &\overset{y \overset{(4.99)}{=} x^{\frac{1}{m}}}{=} m \cdot L\left(x^{\frac{1}{m}}\right)\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$L\left(x^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m} L(x)\,,$$

ou ainda:

$$x^{\frac{1}{m}} = E\left[\frac{1}{m} L(x)\right]\,. \tag{4.100}$$

8. *Dos itens* (5) *e* (6) *acima, segue que, para* $x \in (0\,,\infty)$ *e* $m\,,n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, *teremos*

$$x^{\frac{n}{m}} = E\left[\frac{n}{m}\,L(x)\right]\,. \tag{4.101}$$

9. *Baseado nos itens acima, para* $x \in (0\,,\infty)$ *e* $y \in \mathbb{R}$, *é natural definirmos:*

$$x^y \doteq E\,[y \cdot L(x)]\,. \tag{4.102}$$

10. *Deixaremos como exercício para o leitor a verificação de que este modo de definir* $\underline{x^y}$, *coincide com a maneira que introduzimos anteriormente na Definição (4.2.2), quando* $x > 0$.

11. *Notemos que, da diferenciabilidade das funções* $\underline{E}$ *e* $\underline{Ln}$ *em* $\mathbb{R}$ *e* $(0\,,\infty)$, *respectivamente, temos que, para* $y \in \mathbb{R}$, *a função* $f : (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x) \doteq x^y\,, \quad para\ cada \quad x \in (0\,,\infty)\,, \tag{4.103}$$

será diferenciável em $(0\,,\infty)$ *e além disso,para cada* $x \in (0\,,\infty)$, *teremos*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\,[x^y] &\overset{(4.102)}{=} \frac{d}{dx}\{E\,[y \cdot L(x)]\} \\ &\overset{Regar\ da\ Cadeia}{=} E\,'\,[y \cdot L(x)] \cdot y \cdot L\,'(x) \\ &\overset{(4.73)\ e\ (4.93)}{=} \underbrace{E\,[y \cdot L(x)]}_{\overset{(4.102)}{=} x^y} \cdot y \cdot \frac{1}{x} \\ &= y \cdot x^{y-1}\,, \end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{d}{dx}\,[x^y] = y \cdot x^{y-1}\,, \tag{4.104}$$

para $x \in (0\,,\infty)$.

12. *Finalmente, para* $y \in (0\,,\infty)$, *segue que, considerando-se*

$$\varepsilon \in (0\,,y) \quad e \quad x \in (1\,,\infty)\,,$$

teremos

$$\begin{aligned}
x^{-y} \cdot L(x) &\overset{(4.95)}{=} x^{-y} \cdot \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \\
&\overset{t>1\ \textit{logo},\ t^{1-\varepsilon}<t}{<} x^{-y} \cdot \int_1^x t^{\varepsilon-1}\,dt \\
&= x^{-y} \cdot \left[\frac{t^{\varepsilon}}{\varepsilon} \Big|_{t=1}^{t=x} \right] \\
&= x^{-y} \cdot \frac{x^{\varepsilon}-1}{\varepsilon} \\
&< \frac{x^{\overbrace{\varepsilon - y}^{<0}}}{\varepsilon} \to 0\,, \quad \textit{quando} \quad x \to \infty\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{x\to\infty} x^{-y} \cdot L(x) = 0\,. \tag{4.105}$$

4.3 Funcões trigonométricas complexas

Nesta seção, utilizando a função exponencial complexa definida na seção anterior, introduziremos as funções trigonométricas complexas e estudaremos suas propriedades básicas.

Começaremos pelas:

Definição 4.3.1 *Definiremos as funções* $C\,,S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dadas por*

$$C(z) \doteq \frac{1}{2}\left[E(i\,z) + E(-i\,z)\right]\,, \tag{4.106}$$

$$S(z) \doteq \frac{1}{2i}\left[E(i\,z) - E(-i\,z)\right]\,, \quad \textit{para cada} \quad z \in \mathbb{C}\,, \tag{4.107}$$

que serão denominadas funções cosseno e seno (complexos) *, respectivamnte.*

A seguir temos algumas propriedades relacionadas com estas duas funções.

Observação 4.3.1

1. *Notemos que, para cada* $x \in \mathbb{R}$, *utilizando-se a propriedades básica da conjugação*

de números complexos, teremos:

$$
\begin{aligned}
\overline{C(x)} &\overset{(4.106)}{=} \overline{\frac{1}{2}\left[E(i\,x) + E(-i\,x)\right]} \\
&\overset{\overline{Z+W}=\overline{Z}+\overline{W}}{=} \frac{1}{2}\left[\overline{E(ix)} + \overline{E(-ix)}\right] \\
&\overset{\overline{E(w)}=E(\overline{w})}{=} \frac{1}{2}\left[\underbrace{E\left(\overline{i\,x}\right)}_{=E(-i\,x)} + \underbrace{E\left(\overline{-i\,x}\right)}_{=E[-(-i\,x)]=E(i\,x)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[E(-i\,x) + E(i\,x)\right] \\
&= C(x)\,,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$C(x) \in \mathbb{R}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

De modo semelhante teremos:

$$
\begin{aligned}
\overline{S(x)} &\overset{(4.107)}{=} \overline{\frac{1}{2i}\left[E(i\,x) - E(-i\,x)\right]} \\
&= \frac{1}{-2i}\left[\overline{E(i\,x)} - \overline{E(-i\,x)}\right] \\
&\overset{\overline{E(x)}=E(\overline{x})}{=} \frac{1}{-2\,i}\left[\underbrace{E\left(\overline{i\,x}\right)}_{=E(-i\,x)} - \underbrace{E\left(\overline{-i\,x}\right)}_{=E[-(-i\,x)]=E(i\,z)}\right] \\
&= \frac{1}{-2\,i}\left[E(-i\,x) - E(i\,x)\right] \\
&= S(x)\,,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$S(x) \in \mathbb{R}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

2. *Como consequência, para cada* $x \in \mathbb{R}$*, segue que:*

$$
\begin{aligned}
\underbrace{C(x)}_{\in\mathbb{R}} + i\,\underbrace{S(x)}_{\in\mathbb{R}} &\overset{(4.106)\ e\ (4.107)}{=} \frac{1}{2}\left[E(i\,x) + E(-i\,x)\right] + i\left\{\frac{1}{2\,i}\left[E(i\,x) - E(-i\,x)\right]\right\} \\
&= E(i\,x)\,,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\Re\left[E(i\,x)\right] = C(x) \quad e \quad \Im\left[E(i\,x)\right] = S(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{4.108}$$

onde a parte real do número complexo $\underline{z}$ *será indicada por* $\Re(z)$ *e a parte inamgiária do número complexo* $\underline{z}$ *será indicada por* $\Im(z)$.

3. *Observemos também que, para cada* $x \in \mathbb{R}$, *teremos:*

$$
\begin{aligned}
|E(i\,x)|^2 &= E(i\,x) \cdot \underbrace{\overline{E(ix)}}_{=E(\overline{i\,x})=E(-i\,x)} \\
&= E(i\,x) \cdot E(-i\,x) \\
&= E(i\,x - i\,x) \\
&= E(0) = 1\,,
\end{aligned}
$$

em particular, segue que

$$
|E(i\,x)| = 1\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.109}
$$

4. *As funções* $\underline{C}$ *e* $\underline{S}$ *são diferenciáveis em* $\mathbb{C}$ *(na verdade pertencem a* $C^\infty(\mathbb{C};\mathbb{C})$*) e além disso, segue que:*

$$
\begin{aligned}
C\,'(z) &\overset{(4.106)}{=} \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{2}\,[E(i\,z) + E(-i\,z)]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dz}\,[E(i\,z)] + \frac{d}{dz}\,[E(-i\,z)]\right\} \\
&\overset{\textit{Regra da Cadeia}}{=} \frac{1}{2}\{E(i\,z)\cdot i + E(-i\,z)\cdot(-i)\} \\
&= -\frac{1}{2i}\,[E(i\,z) - E(-i\,z)] \\
&\overset{(4.107)}{=} -S(z)\,, \quad \textit{para cada} \quad z \in \mathbb{C}\,,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
C\,'(z) = -S(z)\,, \quad \textit{para cada} \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.110}
$$

De modo semelhante, teremos:

$$
\begin{aligned}
S\,'(z) &\overset{(4.107)}{=} \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{2i}\,[E(i\,z) - E(-i\,z)]\right\} \\
&= \frac{1}{2i}\left\{\frac{d}{dz}\,[E(i\,z)] - \frac{d}{dz}\,[E(-i\,z)]\right\} \\
&\overset{\textit{Regra da Cadeia}}{=} \frac{1}{2i}\{E(i\,z)\cdot i - E(-i\,z)\cdot(-i)\} \\
&= \frac{1}{2}\,[E(i\,z) + E(-i\,z)] \\
&\overset{(4.106)}{=} C(z)\,, \quad \textit{para cada} \quad z \in \mathbb{C}\,,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
S\,'(z) = C(z)\,, \quad \textit{para cada} \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.111}
$$

5. *Notemos que*

$$C(0) \overset{(4.106)}{=} \frac{1}{2}\left[\overbrace{E(i\cdot 0)}^{=1} + \overbrace{E(-i\cdot 0)}^{=1}\right]$$
$$= 1 \tag{4.112}$$
$$S(0) \overset{(4.107)}{=} \frac{1}{2\,i}\left[\underbrace{E(i\cdot 0)}_{=1} - \underbrace{E(-i\cdot 0)}_{=1}\right]$$
$$= 0\,. \tag{4.113}$$

6. *Existe* $x_o \in (0\,,\infty)$ *tal que*

$$C(x_o) = 0\,.$$

De fato, suponhamos, por absurdo, que para todo $x > 0$*, tenhamos*

$$C(x) \neq 0\,.$$

Como a função $\underline{C}$ *é contínua em* $\mathbb{C}$*,*

$$C(0) \overset{(4.112)}{=} 1$$

e estamos supondo que

$$C(x) \neq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0\,,\infty)\,,$$

segue que

$$C(x) > 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0\,,\infty)\,. \tag{4.114}$$

Mas

$$S\,'(x) \overset{(4.111)}{=} C(x) \overset{(4.114)}{>} 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

assim a função $\underline{S}$ *seria estritamente crescente em* $(0\,,\infty)$*.*

Isto, juntamente com o fato que a função $\underline{S}$ *é contínua em* $\mathbb{C}$ *e*

$$S(0) \overset{(4.113)}{=} 0\,,$$

implicaria que

$$S(x) > 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0\,,\infty)\,. \tag{4.115}$$

Deste modo, para $0 < x < y$*, teríamos:*

$$
\begin{aligned}
S(x)\,(y - x) &= \int_x^y S(x)\,dt \\
&\overset{S(x)<S(t)\,,\ se\ t\in(x,y)}{<} \int_x^y \overbrace{S(t)}^{\overset{(4.110)}{=}-C\,'(t)}\,dt \\
&= \int_x^y [-C\,'(t)]\,dt \\
&\overset{Teor.\ Fund.\ Cálculo}{=} -[C(y) - C(x)] \\
&\leq |C(y)| + |C(x)| \\
&\overset{C(x)\leq|C(x)|=|\Re[E(ix)]|\leq|E(ix)|=1}{\leq} 2\,,
\end{aligned}
$$

ou seja, para cada $x \in (0\,,\infty)$*, temos que*

$$
S(x)\,(y - x) \leq 2\,, \quad para \quad y \in (x\,,\infty)\,. \tag{4.116}
$$

Mas, se

$$
y \to \infty\,,
$$

de (4.115), temos que $S(x) > 0$*, para cada* $x \in (0\,,\infty)$ *assim, segue que*

$$
S(x)(y - x) \to \infty\,,
$$

contrariando (4.116).

Logo podemos concluir que, existe $x_o \in (0\,,\infty)$ *tal que*

$$
C(x_o) = 0\,.
$$

7. *Seja* $x_o \in (0\,,\infty)$*, tal que*

$$
C(x_o) = 0
$$

e para cada $x \in (0\,,x_o)$*, tenhamos*

$$
C(x) \neq 0\,,
$$

isto é, $x_o > 0$ *será o primeiro zero da função* $\underline{C}$ *em* $(0\,,\infty)$.

Notemos que existe tal

$$
x_o \in (0\,,\infty)\,,
$$

pois sabemos que o conjunto, que indicaremos por $\underline{\mathcal{Z}}$*, formado pelos zeros de uma função contínua é um conjunto fechado.*

De fato, pois

$$
\{x \geq 0\,;\, C(x) = 0\} = \underbrace{\underbrace{C^{-1}(\{0\})}_{fechado} \cap \underbrace{[0, \infty)}_{fechado}}_{fechado}\,.
$$

Como $\mathcal{Z} \subseteq [0, \infty)$ *e*

$$C(0) = 1 \neq 0\,,$$

segue que

$$x_o = \inf \mathcal{Z} \overset{\mathcal{Z} \text{ é fechado em } \mathbb{R}}{=} \min \mathcal{Z} > 0\,.$$

8. *Deste podo, podemos definir*

$$\pi \in (x_o\,, \infty)\,, \qquad \textit{como sendo} \quad \pi \doteq 2\,x_o\,. \tag{4.117}$$

Notemos que:

$$C\left(\frac{\pi}{2}\right) = C(x_o) = 0\,.$$

9. *Observemos também que*

$$1 = |E(i\,x_o)|^2 = [\underbrace{C(x_o)}_{=0}]^2 + [S(x_o)]^2\,,$$

assim teremos

$$[S(x_o)]^2 = 1, \quad \textit{ou seja,} \quad S(x_o) = \pm 1\,.$$

Como

$$C(x) > 0 \quad e \quad S'(x) = C(x) > 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0\,, x_o)\,,$$

segue que a função $\underline{S}$ *será estritamente crescente em* $(0\,, x_o)$.

Mas

$$S(0) = 0\,,$$

logo, da continuidade da função $\underline{S}$, *segue que*

$$S(x) > 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0\,, x_o) = \left(0\,, \frac{\pi}{2}\right). \tag{4.118}$$

Portanto deveremos ter

$$S(x_o) = 1\,.$$

10. *Em particular, teremos*

$$\begin{aligned} E(i\,x_o) &= C(x_o) + i\,S(x_o) \\ &= 0 + i \cdot 1 \\ &= i\,, \end{aligned}$$

$$\textit{ou seja,} \quad E\left(i\,\frac{\pi}{2}\right) = i\,. \tag{4.119}$$

11. *Notemos também que:*

$$\begin{aligned} E(i\pi) &= E\left(i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \overbrace{E\left(i\frac{\pi}{2}\right)}^{=i} \cdot \overbrace{E\left(i\frac{\pi}{2}\right)}^{=i} \\ &= i \cdot i = -1\,, \\ E(i\,2\pi) &= E\,(i\pi + i\pi) \\ &= \overbrace{E\,(i\pi)}^{=-1} \cdot \overbrace{E\,(i\pi)}^{=-1} \\ &= (-1)\cdot(-1) = 1\,, \end{aligned}$$

e portanto

$$E(z + 2\pi i) = E(z) \cdot \overbrace{E(2\pi i)}^{=1} = E(z)\,, \quad \textit{par cada} \quad z \in \mathbb{C}\,, \tag{4.120}$$

ou seja, a função $\underline{E}$ *é uma função* $2\pi i$*-periódica.*

12. *Dos itens* (4) *e* (5) *acima teremos, para cada* $x \in \mathbb{R}$, *que*

$$C\,'(x) = -S(x)\,, \quad S\,'(x) = C(x)\,, \quad C(0) = 1 \quad e \quad S(0) = 0\,.$$

Do curso de Equações Diferenciais Ordinárias segue que deveremos, necessariamente, ter:

$$C(x) = \cos(x) \quad e \quad S(x) = \mathrm{sen}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{4.121}$$

ou seja, as funções $\underline{C}$ *e* $\underline{S}$*, dadas por* (4.106) *e* (4.107)*, respectivamente, são extensões das funções trigonométricas reais, para o campo complexo.*

Podemos resumir isto no seguinte resultado:

Proposição 4.3.1

1. *a função* $\underline{E}$*, dada por* (4.67)*, é* $2\pi i$*-periódica;*

2. *as funções* $\underline{C}$ *e* $\underline{S}$*, dadas por* (4.106) *e* (4.107)*, respectivamente, são* 2π*-periódicas;*

3. *as restrições das funções* $\underline{C}$ *e* $\underline{S}$*, dadas por* (4.106) *e* (4.107)*, à* $\mathbb{R}$ *são funções reais e* 2π*-periódicas;*

4. *Para cada* $t \in (0, 2\pi)$*, teremos*
$$E(i\,t) \neq 1\,;$$

5. *se* $z_o \in \mathbb{C}$ *satisfaz* $|z_o| = 1$*, então existirá um único* $t_o \in [0, 2\pi)$*, tal que*
$$E(i\,t_o) = z_o\,.$$

Demonstração:

Do item 1.:

Foi mostrado na Observação acima item (8).

Do item 2.:

Foi mostrado na Observação acima item (9).

Do item 3.:

Para cada $x \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} C(x+2\pi) &= \frac{1}{2}\{E[i(x+2\pi)] + E[-i(x+2\pi)]\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\underbrace{E[i\,x+2\pi\,i]}_{=E(i\,x)} + \underbrace{E[-i\,x-2\pi\,i]}_{=E(-i\,x)}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\{E(i\,x)+E(-i\,x)\} \\ &= C(x)\,, \end{aligned} \tag{4.122}$$

e

$$\begin{aligned} S(x+2\pi) &= \frac{1}{2i}\{E[i(x+2\pi)] - E[-i(x+2\pi)]\} \\ &= \frac{1}{2i}\left\{\underbrace{E[i\,x+2\pi\,i]}_{=E(i\,x)} - \underbrace{E[-i\,x-2\pi\,i]}_{=E(-i\,x)}\right\} \\ &= \frac{1}{2i}\{E(i\,x)-E(-i\,x)\} \\ &= S(x)\,, \end{aligned} \tag{4.123}$$

mostrando que as restrições das funções $\underline{C}$, $\underline{S}$, dadas por (4.106) e (4.107), à $\mathbb{R}$ são funções reais 2π-periódicas.

Do item 4.:

Se

$$s \in \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad E(i\,s) = x + i\,y\,,$$

com $x\,,y \in \mathbb{R}$, como

$$|E(i\,t)| = 1\,,$$

da Observação (4.3.1) acima item 8., teremos que

$$x = C(s) \quad \text{e} \quad y = S(s) \in (0\,,1)\,, \qquad \text{ou seja,} \quad x\,,y \in (0\,,1)\,.$$

Notemos também que

$$\begin{aligned} E(4\,s\,i) &= [E(i\,s)]^4 \\ &= (x+i\,y)^4 \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4 + 4\,i\,x\,y\,\left(x^2-y^2\right)\,. \end{aligned} \tag{4.124}$$

Logo,

$$E(4\,s\,i) \in \mathbb{R}$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} & x\,y\,\left(x^2 - y^2\right) = 0\,, \\ \text{como } x\,,y \in (0\,,1), \text{ teremos:} \quad & x^2 - y^2 = 0\,, \\ \text{isto é,} \quad & x^2 = y^2 = 0\,, \\ \text{ou ainda,} \quad & x = \pm y\,. \end{aligned} \tag{4.125}$$

Mas

$$x^2 + y^2 = |E(i\,s)| = 1\,,$$

assim teremos

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 + y^2 \\ &\overset{(4.125)}{=} (\pm y)^2 + y^2\,, \\ \text{isto é,} \quad x^2 &= y^2 = \frac{1}{2}\,, \end{aligned} \tag{4.126}$$

ou seja,

$$E(4\,s\,i) \in \mathbb{R}$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} E(4s\,i) &\overset{(4.124) \text{ e } (4.125)}{=} \Big(\underbrace{x^2}_{\overset{(4.126)}{=} \frac{1}{2}}\Big)^2 - 6\,\underbrace{x^2}_{\overset{(4.126)}{=} \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{y^2}_{\overset{(4.126)}{=} \frac{1}{2}} + \Big(\underbrace{y^2}_{\overset{(4.126)}{=} \frac{1}{2}}\Big)^2 \\ &= \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = -1\,, \\ \text{ou seja,} \quad E(4s\,i) &= -1\,. \end{aligned}$$

Portanto, se

$$s \in \left(0\,, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{é tal que} \quad E(4\,s\,i) \in \mathbb{R}\,, \quad \text{deveremos ter:} \quad E(4\,s\,i) = -1\,. \tag{4.127}$$

Suponhamos, por absurdo, que existe $t_o \in (0\,,2\,\pi)$ tal que

$$E(i\,t_o) = 1\,.$$

Como

$$s \doteq \frac{t_o}{4} \in \left(0\,, \frac{\pi}{2}\right)\,,$$

segue que,

$$E(4\,s\,i) = E(i\,t_o) = 1\,, \quad \text{ou seja,} \quad E(4\,s\,i) \in \mathbb{R}\,. \tag{4.128}$$

Logo, de (4.127), segue que

$$E(4\,s\,i) = -1\,,$$

o que contraria (4.128).

Portanto não existe $t_o \in (0, 2\pi)$, tal que

$$E(i\,t) = 1\,,$$

completando a demonstração do item 4. .

Do item 5.:

A unicidade segue do item 4., pois se

$$t_1\,, t_2 \in [0, 2\pi)\,,$$

são tais que

$$\begin{aligned} & E(i\,t_1) = E(i\,t_2) = z_o \\ \text{teremos,}\quad & \frac{E(i\,t_1)}{E(i\,t_2)} = 1 \\ \text{então,}\quad & \underbrace{E(i\,t_1) \cdot \underbrace{[E(i\,t_2)]^{-1}}_{=E(-i\,t_2)}}_{=E[i\,(t_1 - t_2)]} = 1 \\ \text{ou ainda,}\quad & E[i\,(t_1 - t_2)] = 1\,. \end{aligned}$$

Suponhamos, por absurdo, que $t_1 \neq t_2$.

Podemos supor, sem perda de generalidade que

$$t_2 < t_1\,.$$

Logo

$$t_2 - t_1 \in (0, 2\pi)\,,$$

o que contraria o item 4. (pois $E[i\,(t_2 - t_1)] \neq 1$).

Para mostrar a existência de

$$t \in [0, 2\pi)\,, \quad \text{tal que} \quad E(i\,t) = z_o\,,$$

escrevemos

$$z_o = x_o + i\,y_o\,, \quad \text{onde} \quad x_o\,, y_o \in \mathbb{R}\,.$$

Notemos que

$$|x_o|\,, |y_o| \leq 1\,, \quad \text{pois} \quad {x_o}^2 + {y_o}^2 = |z_o|^2 = 1\,.$$

A seguir consideraremos os seguintes casos:

I. Caso que $x_o, y_o \in [0, 1]$.

Observemos que a função $\underline{C}$ é estritamente decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, do valor $\underline{1}$, para o valor $\underline{0}$.

Como ela é uma função contínua segue, do Teorema do Valor Intermediário, que existe $t_o \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ tal que

$$C(t_o) = x_o\,.$$

Por outro lado, como

$$[C(t_o)]^2 + [S(t_o)]^2 = 1 \quad \text{e} \quad S(t_o) \overset{(4.118))}{\geq} 0\,, \quad \text{para cada} \quad t_o \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]\,,$$

segue que

$$\begin{aligned} y_o &\overset{y_o \geq 0}{=} \sqrt{1 - x_o{}^2} \\ &= \sqrt{1 - [C(t_o)]^2} \\ &\overset{[C(t_o)]^2+[S(t_o)]^2=1 \text{ e } S(t_o)\geq 0}{=} S(t_o)\,. \end{aligned}$$

Assim

$$z_o \doteq x_o + i\,y_o = C(t_o) + i\,S(t_o) = E(i\,t_o)\,,$$

completando a demonstração para o caso que $x_o\,, y_o \in [0\,,1]$.

II. Caso que $x_o \in [-1\,,0)$ e $y_o \in [0\,,1]$.

Neste caso teremos:

$$-i\,z_o = -i(x_o + i\,y_o) = y_o - i\,x_o = \underbrace{y_o}_{\geq 0} + i(\underbrace{-x_o}_{>0})$$

e assim estaremos na situação acima.

Logo, poderemos encontrar $\tilde{t}_o \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$, tal que

$$E\left(i\,\tilde{t}_o\right) = -i\,z_o\,.$$

Portanto

$$\begin{aligned} z_o &= \frac{1}{-i} \cdot E\left(i\,\tilde{t}_o\right) \\ &= i \cdot E\left(i\,\tilde{t}_o\right) \\ &= E\left(\frac{\pi}{2}\,i\right) \cdot E\left(i\,\tilde{t}_o\right) \\ &= E\left(\frac{\pi}{2}\,i + i\,\tilde{t}_o\right) \\ &= E\left[\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} + \tilde{t}_o}_{\doteq t_o \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \subseteq [0,2\,\pi)}\right) i\right]. \end{aligned}$$

III. Caso que $x_o \in (-1\,,1)$ e $y_o \in (-1\,,0)$.

Nesta situação teremos:

$$-z_o = -(x_o + i\,y_o) = \underbrace{-x_o}_{\in(-1,1)} + i(\underbrace{-y_o}_{\in(0,1)}),$$

e assim podemos aplicar a situação acima para obter $\tilde{t}_o \in [0\,,\pi)$ tal que

$$\begin{aligned} -\,z_o &= E\left(i\,\tilde{t}_o\right)\,, \\ \text{então,}\quad z_o &= -1 \cdot E\left(i\,\tilde{t}_o\right) \\ &= E(i\,\pi) \cdot E\left(i\,\tilde{t}_o\right) \\ &= E\left(i\,\pi + i\,\tilde{t}_o\right) \\ &= E\left[\left(\underbrace{\pi + \tilde{t}_o}_{\doteq t_o \in [0\,,2\,\pi)}\right) i\right], \end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

□

Temos também as seguintes observações:

Observação 4.3.2

1. *Segue do item 5. da Proposição (4.3.1) acima, e do fato que*

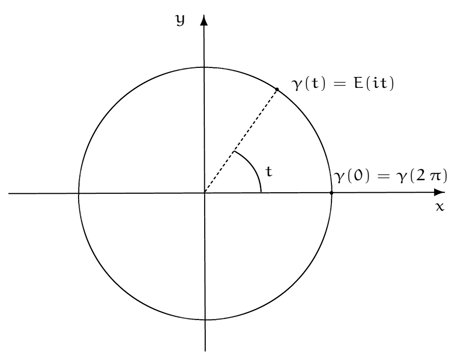
$$|E(i\,t)| = 1\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

que a curva parametrizada diferenciável $\gamma : [0\,,2\,\pi] \to \mathbb{R}^2$ *(identificando* $\mathbb{R}^2$ *com* $\mathbb{C}$*) dada por*

$$\gamma(t) \doteq E(i\,t)\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in [0\,,2\,\pi]\,,$$

será uma curva fechada simples, cuja imagem é a circunferência unitária centrada na origem de $\mathbb{C}$ *(veja a figura abaixo)*

$$x^2 + y^2 = 1\,.$$



2. *Como*

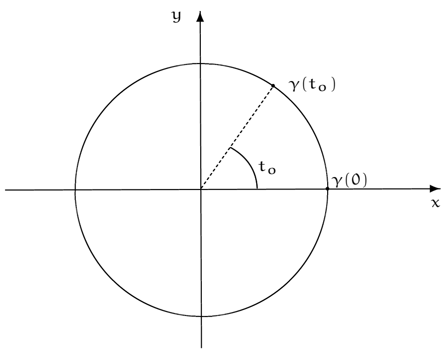
$$\gamma\,'(t) = \frac{d}{dt}[E(i\,t)] \overset{\text{Regra da Cadeia}}{=} E\,'(i\,t)\cdot i = i\cdot E(i\,t)\,, \quad \textit{para cada} \quad t\in[0\,,2\,\pi]\,,$$

segue que

$$\int_0^{2\,\pi} |\gamma\,'(t)|\;dt = \int_0^{2\,\pi} \underbrace{|i\cdot E(i\,t)|}_{=|i|\,|E(i\,t)|=1}\;dt = \int_0^{2\,\pi} dt = 2\,\pi\,,$$

ou seja, o comprimento da curva parametrizada diferenciável $\underline{\gamma}$*, é igual ao comprimento da circunferência, do plano* xOy*, de centro na origem e raio* $\underline{1}$*.*

3. *Para cada* $t_o \in (0\,,2\,\pi]$*, quando* $\underline{t}$ *varia de* $\underline{0}$ *até* $\underline{t_o}$*,* $\gamma(t)$ *descreverá uma arco da circunferência percorrido no sentido anti-horário do ponto* $\gamma(0)$ *até o ponto* $\gamma(t_o)$ *(veja a figura abaixo).*



4. *Consideremos o triângulo de vértices (veja a figura abaixo):*

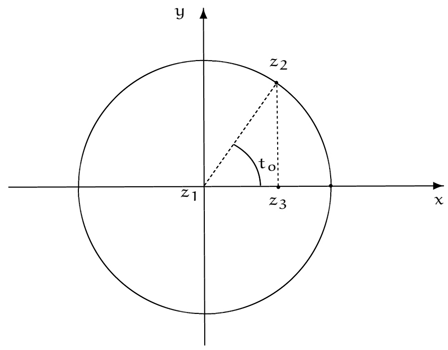
$$z_1 \doteq 0, \quad z_2 \doteq \gamma(t_o) \quad e \quad z_3 \doteq C(t_o)\,.$$

Então teremos, da Trigonometria, que

$$C(t_o) = \cos(t_o) \quad e \quad S(t_o) = \operatorname{sen}(t_o)\,,$$

ou seja, como as funções envonvidas são $2\,\pi$*-periódicas segue que*

$$C(t) = \cos(t) \quad e \quad S(t) = \operatorname{sen}(t)\,, \quad \textit{para cada} \quad t\in\mathbb{R}\,.$$



4.4 O Teorema fundamental da Álgebra

Nesta seção trataremos do Teorema Fundamental da Álgebra, a saber:

Teorema 4.4.1 *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $a_i \in \mathbb{C}$, *para* $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, *com* $a_n \neq 0$.

Então existe $z_o \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$P(z_o) = 0,$$

onde

$$P(z) \doteq \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad \textit{para cada} \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.129}$$

ou seja, todo polinômio de grau $n \geq 1$, *com coeficientes complexos possui, pelo menos, uma raiz complexa.*

Demonstração:

Sem perda de generalidade, podemo supor que

$$a_n = 1.$$

De fato, caso contrário consideramos o polinômio $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dado por

$$Q(z) \doteq \frac{1}{a_n} P(z), \quad \text{para cada} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Se provarmos que existe $z_o \in C$ tal que

$$Q(z_o) = 0,$$

isto implicará que

$$\frac{1}{a_n} P(z) = 0, \quad \text{ou seja,} \quad P(z_o) = 0,$$

demonstrando o resultado.

Seja

$$\mu \doteq \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|, \tag{4.130}$$

que existe pois

$$|P(z)| \geq 0, \quad \text{para cada} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Se, para algum $R > 0$, temos que $z \in \mathbb{C}$ satisfaz

$$|z| = R > 0\,, \tag{4.131}$$

então:

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k\right| \\
&\overset{a_n=1}{=} \left|z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, z^k\right| \\
&\geq |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left|a_k\, z^k\right| \\
&= \underbrace{|z|}_{\overset{(4.131)}{=} R}{}^{n} - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\, \underbrace{|z|}_{\overset{(4.131)}{=} R}{}^{k} \\
&= R^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\, R^k \\
&= R^n \left(1 - |a_o|\, R^{-n} - |a_1|\, R^{-n+1} - \cdots - |a_{n-1}|\, R^{-1}\right) .
\end{aligned}$$

Notemos que, fazendo

$$R \to \infty\,,$$

o lado direito da expressão acima tende a $\underline{\infty}$, pois

$$R^{-n}\,, R^{-n+1}\,, \cdots\,, R^{-1} \to 0\,, \quad \text{quando} \quad R \to \infty\,.$$

Logo, existe $R_o > 0$ tal que

$$|P(z)| > \mu\,, \quad \text{para cada} \quad |z| > R_o\,.$$

Assim, segue que

$$\mu \doteq \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)| = \inf_{z\in B_o} |P(z)|\,, \tag{4.132}$$

onde

$$\mathcal{B}_o \doteq \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq R_o\}\;.$$

Como a função

$$z \mapsto |P(z)|$$

é uma função contínua na bola fechada $\underline{\mathcal{B}_o}$ (que é compacta em $\left(\mathbb{R}^2\,, d_{\mathbb{R}^2}\right)$), segue que ela assume seu valor mínimo em $\underline{\mathcal{B}_o}$, ou seja,

$$\mu = \min_{z\in\mathcal{B}_o} |P(z)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|\,, \tag{4.133}$$

ou ainda, existe $z_o \in \mathcal{B}_o$ tal que

$$|P(z_o)| = \mu\,. \tag{4.134}$$

Afirmação:

$$\mu = 0\,.$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$P(z_o) = \mu \neq 0\,.$$

Consideremos a função $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por

$$Q(z) \doteq \frac{1}{P(z_o)}\, P(z + z_o)\,, \quad \text{para cada} \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.135}$$

Notemos que a função $\underline{Q}$ é uma função polinomial, não-constante (pois a função $\underline{P}$ é uma função polinomial, não-constante, já que $a_n = 1$ e $n \geq 1$), que satisfaz:

$$Q(0) = \frac{1}{P(z_o)} P(0 + z_o) = 1\,, \tag{4.136}$$

$$\begin{aligned}
\text{e} \quad |Q(z)| &= \frac{|P(z + z_o)|}{|P(z_o)|} \\
&\geq \frac{\inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |P(z + z_o)|}{|P(z_o)|} \\
&= \frac{\overbrace{\inf\limits_{w\in\mathbb{C}} |P(w)|}^{\overset{(4.133)}{=}\mu\overset{(4.134)}{=}P(z_o)}}{|P(z_o)|} \\
&= \frac{|P(z_o)|}{|P(z_o)|} = 1\,,
\end{aligned}$$

$$\text{isto é,} \quad |Q(z)| \geq 1\,, \quad \text{para cada} \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.137}$$

Logo podemos escrever ($|Q(0)| \overset{(4.136)}{=} 1$)

$$Q(z) = 1 + b_k\, z^k + \cdots + b_n\, z^n\,, \quad \text{para cada} \quad z \in \mathbb{C}\,, \tag{4.138}$$

onde

$$k \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}$$

é o menor natural tal que

$$b_k \neq 0\,, \tag{4.139}$$

que existe, pois função polinomial $\underline{Q}$ é não constante.

Notemos que se considerarmos

$$z \doteq -\frac{b_k}{|b_k|}\,, \quad \text{teremos que} \quad |z| = 1\,.$$

Logo, pelo item (5) da Proposiçao (4.3.1) , segue que existe $\theta \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{aligned}
e^{-i\,k\,\theta} &= E(-i\,k\,\theta) \\
&\overset{\text{Prop.}(4.3.1)}{=} z \\
&= -\frac{b_k}{|b_k|}\,,
\end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \qquad e^{i\,k\,\theta} b_k = -|b_k|\,. \tag{4.140}$$

Seja $r > 0$, tal que

$$r^k < \frac{1}{|b_k|}, \quad \text{ou seja,} \quad 0 < 1 - r^k\,|b_k|. \tag{4.141}$$

Então (4.140), implicará que

$$\begin{aligned} |1 + r^k \underbrace{b_k\, e^{ik\theta}}_{\overset{(4.140)}{=} -|b_k|}| &= \left|1 - r^k\,|b_k|\right| \\ &\overset{(4.141)}{=} 1 - r^k |b_k|. \end{aligned} \tag{4.142}$$

Assim, teremos:

$$\begin{aligned} \left|Q\left(r\,e^{i\theta}\right)\right| &= \left|1 + b_k\,r^k\,e^{ik\theta} + b_{k+1}\,r^{k+1}\,e^{i(k+1)\theta} + \cdots + b_n\,r^n e^{in\theta}\right| \\ &\leq \left|1 + b_k\,r^k\,e^{ik\theta}\right| + \left|b_{k+1}\,r^{k+1}\,e^{i(k+1)\theta}\right| + \cdots + \left|b_n\,r^n\,e^{in\theta}\right| \\ &\leq \left|1 + b_k\,r^k\,e^{ik\theta}\right| + |b_{k+1}|\,r^{k+1}\,\underbrace{\left|e^{i(k+1)\theta}\right|}_{=1} + \cdots + |b_n|\,r^n\,\underbrace{\left|e^{in\theta}\right|}_{=1} \\ &\leq \underbrace{\left|1 + b_k\,r^k\,e^{ik\theta}\right|}_{\overset{(4.142)}{=} 1 - r^k\,|b_k|} + |b_{k+1}|\,r^{k+1} + \cdots + |b_n|\,r^n \\ &\overset{(4.142)}{=} 1 - |b_k|\,r^k + |b_{k+1}|\,r^{k+1} + \cdots + |b_n|\,r^n \\ &= 1 - r^k\,\left[|b_k| - r\,|b_{k+1}| - \cdots - r^{n-k}\,|b_n|\right]. \end{aligned} \tag{4.143}$$

Notemos que se

$$r \in (0\,,\infty)\,, \quad \text{é suficientemente pequeno}\,,$$

a expressão dentro do colchete acima será maior que zero, pois

$$|b_k| - r\,|b_{k+1}| - \cdots - r^{n-k}\,|b_n| \uparrow |b_k| \overset{(4.139)}{>} 0\,, \quad \text{quando} \quad r \to 0^+\,.$$

Logo, podemos conlcuir que

$$\left|Q\left(r\,e^{i\theta}\right)\right| < 1\,, \quad \text{para} \quad r > 0 \quad \text{suficientemente pequeno}\,,$$

suficientemente pequeno, o que contraria o fato que (veja (4.137))

$$\left|Q\left(r\,e^{i\theta}\right)\right| \geq 1\,.$$

Portando deveremos ter

$$\mu = 0$$

ou seja, existe $z_o \in \mathbb{C}$ tal que

$$P(z_o) = 0\,,$$

completando a demonstração do resultado.

□

4.5 Séries de Fourier

Nesta seção estudaremos a **Série de Fourier** associada a uma função periódica "bem comportada".

Começaremos pela:

Definição 4.5.1 *Um* **polinômio trigonométrico** *é uma função* $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *que pode ser colocada na seguinte forma:*

$$P(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos(n\,x) + b_n \operatorname{sen}(n\,x)]\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{4.144}$$

onde $a_i\,, b_j \in \mathbb{C}$*, para cada* $i \in \{0\,, 1\,, \cdots, N\}$ *e* $j \in \{1\,, 2\,, \cdots, N\}$*.*

Observação 4.5.1

1. *Podemos reescrever (4.144) na forma*

$$P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{i\,n\,x}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{4.145}$$

onde

$$c_o \doteq \frac{a_o}{2}\,, \quad c_n \doteq \frac{a_n - i\,b_n}{2} \quad e \quad c_{-n} \doteq \frac{a_n + i\,b_n}{2}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{4.146}$$

Para mostrar as identidades acima, basta, para $n \in \mathbb{Z}$*, substituir*

$$\cos(n\,x) = \frac{e^{i\,n\,x} + e^{-i\,n\,x}}{2} \quad e \quad \operatorname{sen}(n\,x) = \frac{e^{i\,n\,x} - e^{-i\,n\,x}}{2\,i}$$

em (4.144).

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. *Notemos que, para cada* $x \in \mathbb{R}$*, temos que:*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{i\,n\,x} &= \sum_{n=-N}^{-1} c_n\, \left(e^{-i\,x}\right)^{-n} + \sum_{n=0}^{N} c_n\, \left(e^{i\,x}\right)^{n} \\
&\overset{n=-m \text{ na 1.a soma}}{=} \sum_{m=1}^{N} c_{-m}\, \left(e^{-i\,x}\right)^{m} + \sum_{n=0}^{N} c_n\, \left(e^{i\,x}\right)^{n} \\
&= Q\left(e^{-i\,x}\right) + R\left(e^{i\,x}\right)\,,
\end{aligned}$$

onde $\underline{Q}$ *e* $\underline{R}$ *são funções polinomiais complexas, dadas por*

$$Q(z) \doteq \sum_{m=1}^{N} c_{-m}\, z^m \quad e \quad R(z) \doteq \sum_{n=0}^{N} c_n\, z^n\,,$$

para cada $z \in \mathbb{C}$*, dai o porque do nome "polinômio trigonométrico" para a expressão (4.144).*

3. *Observemos que todo polinômio trigonométrico é uma função 2π-periódica pois, para cada $n \in \mathbb{Z}$ a função*

$$x \mapsto e^{i\,n\,x}$$

é uma função 2π-períodica.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

4. *Notemos também que, para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, temos que*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{i\,n\,x}}{in}\right] = e^{i\,n\,x}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja, a função

$$x \mapsto \frac{d}{dx}\left[\frac{e^{i\,n\,x}}{in}\right],$$

também será uma função 2π-periódica.

5. *Além disso teremos:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\,n\,x}\,dx = \begin{cases} 1, & \textit{para} \quad n = 0 \\ 0, & \textit{para} \quad n \neq 0 \end{cases}. \tag{4.147}$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

6. *Notemos que, para cada $m \in \{-N, \cdots, N\}$ e $x \in \mathbb{R}$, multiplicando-se (4.145) por $e^{-i\,m\,x}$ e integrando-se em $[-\pi, \pi]$ obteremos:*

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-i\,m\,x}\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-N}^{N} c_n\,e^{i\,n\,x}\right] e^{-i\,m\,x}\,dx \\
&= \sum_{n=-N}^{N}\left[c_n\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\,n\,x}\,e^{-i\,m\,x}\,dx\right] \\
&= \sum_{n=-N}^{N} c_n \qquad \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\,(n-m)\,x}\,dx}_{\overset{(4.147)}{=}\begin{cases} 0, & \textit{para} \quad m \neq n \\ 2\pi, & \textit{para} \quad m = n \end{cases}} \qquad (4.148) \\
&= 2\pi\,c_m, \qquad (4.149)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-i\,m\,x}\,dx, \quad \textit{para cada} \quad m \in \{-N, \cdots, N\}.$$

7. *Notemos também que, de* (4.149)*, se função* $\underline{f}$ *é dada por (4.145) e* $|m| > N$ *então*

$$c_m = 0 \overset{(4.148)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-i\,m\,x}\, dx\,,$$

ou seja,

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-i\,m\,x}\, dx\,, \quad \textit{para cada} \quad m \in \mathbb{Z}\,. \tag{4.150}$$

8. *Neste caso, os coeficientes de (4.144) poderão ser obtidos da seguinte forma:*

   Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ *e* $k \in \mathbb{N}$*, teremos*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos(n\,x)\, dx \quad e \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{sen}(k\,x)\, dx\,. \tag{4.151}$$

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

9. *Por fim notemos que, o polinômio trigonométrico (4.144) será a* <u>**valores reais**</u> *se, e somente se,*

$$a_i\,, b_j \in \mathbb{R}\,, \quad \textit{para para} \quad i \in \{0\,,1\,,\cdots,N\} \quad e \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots,N\}\,.$$

   Por sua vez, de (4.146)*, isto será equivalente a*

$$c_{-n} = \overline{c_n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

   pois

$$\begin{aligned} c_{-n} &\overset{(4.146)}{=} \frac{a_n + i\,b_n}{2} \\ &\overset{\overline{a_n}=a_n,\,\overline{b_n}=b_n}{=} \frac{\overline{a_n} + i\,\overline{b_n}}{2} \\ &= \overline{\frac{a_n - i\,b_n}{2}} \\ &\overset{(4.146)}{=} \overline{\left(\frac{a_n - i\,b_n}{2}\right)} \\ &= \overline{c_n}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

10. *Se a função* $f : [-\pi\,,\pi] \to \mathbb{C}$ *é integrável em* $[-\pi\,,\pi]$*, os números complexos*

$$c_m\,, \quad \textit{para cada} \quad m \in \mathbb{Z}\,,$$

   dados pela expressão (4.150), estarão bem definidos e serão ditos <u>**coeficientes (complexos) de Fourier associados à função f**</u>.

Podemos agora introduzir a:

Definição 4.5.2 *Uma* **série trigonométrica (ou de Fourier)**, *será uma série de funções que pode ser colocada na seguinte forma:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.152}$$

onde a N*-ésima soma parcial desta série de funções é dada por (4.145), ou seja*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \doteq \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.153}$$

Observação 4.5.2 *Temos as seguintes questões relacionadas com a série de funções acima:*

1. *Quando a série de Fourier associada a uma dada função* $\underline{f}$ *que é* 2π*-periódica converge (pontualmente ou uniformemente)?*

2. *Se a série de Fourier associada a uma dada função* $\underline{f}$ *for convergente, convergirá para a função* $\underline{f}$*?*

Outras questões interessantes serão colocadas ao longo desta seção.

Para começar a responder a essas questões precisaremos de alguns resultados que serão tratados a seguir.

Antes porém temos a:

Definição 4.5.3 *Consideremos a sequência de funções* $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, a função* $\phi_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ *e, para cada* $n, m \in \mathbb{N}$ *temos que*

$$\int_a^b \phi_m(x)\, \phi_n(x)\, dx = 0, \quad \textit{se} \quad m \neq n. \tag{4.154}$$

Neste caso diremos que a família $\{\phi_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ *é um* **conjunto ortogonal**.

Se além disso, tivermos

$$\int_a^b |\phi_n(x)|^2\, dx = 1, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.155}$$

diremos que a família $\{\phi_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ *é um* **conjunto ortonornal**.

Com isto temos o:

Exemplo 4.5.1 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, consideremos a função* $\phi_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$*, dada por*

$$\phi_n(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad \textit{para cada} \quad x \in [-\pi, \pi]. \tag{4.156}$$

Então a família $\{\phi_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ *é um conjunto ortonornal.*

Resolução:

A demonstração segue da contas feitas em (4.149) e por isto os detalhes serão deixados como exercício para o leitor.

Temos também o

Exemplo 4.5.2 *Consideremos as* $\phi_o, \phi_1, \cdots, \psi_1, \psi_2, \cdots : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, *dadas por:*

$$\begin{aligned}
\phi_o(x) &\doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \\
\phi_1(x) &\doteq \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}\,, \quad \psi_1(x) \doteq \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{\pi}}\,, \\
\phi_2(x) &\doteq \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}\,, \quad \psi_2(x) \doteq \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{\pi}}\,, \\
&\vdots \\
\textit{para cada} \quad & x \in [-\pi, \pi]\,.
\end{aligned} \tag{4.157}$$

Então a família $\{\phi_i, \psi_j\,;\, i \in \mathbb{N} \cup \{0\},\, j \in \mathbb{N}\}$ *é um conjunto ortonormal.*

Resolução:

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Observação 4.5.3 *Consideremos* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[a, b]$.

1. *Seja* $\{\phi_n\,;\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ *um conjunto ortonormal formado por funções, a valores complexos, definidas em* $[a, b]$.

   Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ *definamos*

   $$c_n \doteq \int_a^b f(t)\,\overline{\phi_n(t)}\,dt\,, \tag{4.158}$$

   que será dito <u>n**-ésimo coeficiente (complexo) de Fourier associado à função** f</u>.

   Neste caso poderemos considerar a série de funções

   $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\phi_n(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b]\,, \tag{4.159}$$

   que será denominada <u>**série de Fourier (complexa) associada à função** f</u> *(relativamente a família ortonormal* $\{\phi_n\,;\, n \in \mathbb{Z}^+\}$*).*

2. *Nosso objetivo será estudar a convergência da série de Fourier (4.159), associada a uma função* f *dada.*

Para isto começaremos com o:

Teorema 4.5.1 *Sejam* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[a\,,b]$ *e* $\{\phi_n\,;\,n \in \mathbb{Z}^+\}$ *um conjunto ortonormal formado por funções, a valores complexos, definidas em* $[a\,,b]$.

Para cada $N \in \mathbb{Z}^+$ *consideremos as funções* $s_N\,, t_N : [a\,,b] \to \mathbb{C}$, *dadas por:*

$$s_N(x) \doteq \sum_{i=0}^{N} c_i\,\phi_i(x)\,, \tag{4.160}$$

$$t_N(x) \doteq \sum_{k=0}^{N} d_k\,\phi_k(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,, \tag{4.161}$$

onde (4.160) é a N*-ésima soma parcial da série de Fourier associada a função* $\underline{f}$ *(ou seja, para cada* $n \in \mathbb{Z}^+$, *o coeficiente* $\underline{c_n}$ *é dado por (4.158)).*

Então, teremos

$$\int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2\,dx \le \int_a^b |f(x) - t_N(x)|^2\,dx\,. \tag{4.162}$$

A igualdade na desigualdade acima ocorrerá se, e somente se,

$$d_k = c_k\,, \quad \textit{para cada} \quad k \in \{0\,,1\,,\cdots,N\}\,. \tag{4.163}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Observemos que, para cada $N \in \mathbb{Z}^+$, teremos:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\overline{t_N(x)}\,dx &\overset{(4.161)}{=} \int_a^b f(x)\,\overbrace{\overline{\left(\sum_{k=0}^{N} d_k\,\phi_k(x)\right)}}^{=\sum_{k=0}^{N}\overline{d_k\,\phi_k(x)}}\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{N} \int_a^b f(x)\,\overline{d_k}\,\overline{\phi_k(x)}\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{N} \overline{d_k}\,\underbrace{\int_a^b f(x)\,\overline{\phi_k(x)}\,dx}_{\overset{(4.158)}{=} c_k} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \overline{d_k}\,c_k\,.
\end{aligned} \tag{4.164}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\int_a^b |t_N(x)|^2\, dx &= \int_a^b \overbrace{t_N(x)}^{=\sum_{k=0}^N d_k\,\phi_k(x)}\ \overline{t_N(x)}\, dx \\
&\overset{(4.161)}{=} \int_a^b \left(\sum_{k=0}^N d_k\,\phi_k(x)\right) \overbrace{\overline{\left(\sum_{j=0}^N d_j\,\phi_j(x)\right)}}^{=\sum_{j=0}^N \overline{d_j\,\phi_j(x)}}\, dx \\
&= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N d_k\,\overline{d_j} \qquad \underbrace{\int_a^b \phi_k(x)\,\overline{\phi_j(x)}\, dx}_{\overset{\text{Conj. ortonormal}}{=} \begin{cases} 1\,, & \text{para } j = k \\ 0\,, & \text{para } j \neq k \end{cases}} \\
&= \sum_{k=0}^N d_k\,\overline{d_k} \\
&= \sum_{k=0}^N |d_k|^2 . \qquad (4.165)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x) - t_N(x)|^2\, dx &= \int_a^b [f(x) - t_N(x)] \cdot \overline{[f(x) - t_N(x)]}\, dx \\
&= \int_a^b [f(x) - t_N(x)] \cdot \left[\overline{f(x)} - \overline{t_N(x)}\right]\, dx \\
&= \int_a^b \left[f(x)\,\overline{f(x)} - f(x)\,\overline{t_N(x)} - t_N(x)\,\overline{f(x)} + t_N(x)\,\overline{t_N(x)}\right]\, dx \\
&= \int_a^b |f(x)|^2\, dx - \int_a^b f(x)\,\overline{t_N(x)}\, dx - \underbrace{\int_a^b t_N(x)\,\overline{f(x)}\, dx}_{=\overline{\int_a^b f(x)\overline{t_N(x)}\, dx}} + \underbrace{\int_a^b |t_N(x)|^2\, dx}_{\overset{(4.165)}{=}\sum_{k=0}^N |d_k|^2} \\
&= \int_a^b |f(x)|^2\, dx - \underbrace{\int_a^b f(x)\,\overline{t_N(x)}\, dx}_{\overset{(4.164)}{=}\sum_{k=0}^N \overline{d_k}\,c_k} - \underbrace{\overline{\int_a^b f(x)\,\overline{t_N(x)}\, dx}}_{\overset{(4.164)}{=}\overline{\sum_{k=0}^N \overline{d_k}\,c_k}} + \sum_{k=0}^N |d_k|^2 \\
&= \int_a^b |f(x)|^2\, dx - \sum_{k=0}^N \overline{d_k}\,c_k - \underbrace{\overline{\sum_{k=0}^N \overline{d_k}\,c_k}}_{=\sum_{k=0}^N d_k\,\overline{c_k}} + \sum_{k=0}^N |d_k|^2 \\
&= \int_a^b |f(x)|^2\, dx - \sum_{k=0}^N \overline{d_k}\,c_k - \sum_{k=0}^N d_k\,\overline{c_k} + \sum_{k=0}^N |d_k|^2 \\
&= \int_a^b |f(x)|^2\, dx - \sum_{k=0}^N \left(\overline{d_k}\,c_k + d_k\,\overline{c_k}\right) + \sum_{k=0}^N |d_k|^2. \qquad (4.166)
\end{aligned}$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} |d_k - c_k|^2 &= \sum_{k=0}^{N} (d_k - c_k) \cdot \overbrace{\overline{(d_k - c_k)}}^{=(\overline{d_k}-\overline{c_k})} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(d_k\,\overline{d_k} - d_k\,\overline{c_k} - c_k\,\overline{d_k} + c_k\,\overline{c_k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N} |d_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} \left(d_k\,\overline{c_k} + c_k\,\overline{d_k}\right) + \sum_{k=0}^{N} |c_k|^2,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\sum_{k=0}^{N} |d_k|^2 - \sum_{k=0}^{N} \left(d_k\,\overline{c_k} + c_k\,\overline{d_k}\right) = \sum_{k=0}^{N} |d_k - c_k|^2 - \sum_{k=0}^{N} |c_k|^2 .
$$

Logo substituindo esta identidade em (4.166), obteremos:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |f(x) - t_N(x)|^2\,dx &= \int_a^b |f(x)|^2\,dx + \overbrace{\sum_{k=0}^{N} |d_k - c_k|^2}^{\geq 0} - \sum_{k=0}^{N} |c_k|^2 \\
&\geq \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \sum_{k=0}^{N} |c_k|^2, \qquad (4.167)
\end{aligned}
$$

e a igualdade na desigualdade acima ocorrerá se, e somente se,

$$
d_k = c_k\,, \qquad \text{para cada} \quad k \in \{0\,,1\,,\cdots,N\}\,.
$$

Para finalizar, observemos que

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |s_N(x)|^2\,dx &= \int_a^b \overbrace{s_N(x)}^{\overset{(4.160)}{=}\sum_{i=0}^{N} c_i\,\phi_i(x)} \quad \overline{s_N(x)}\,dx \\
&= \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{N} c_i\,\phi_i(x)\right] \overline{\left[\sum_{j=0}^{N} c_j\,\phi_j(x)\right]}\,dx \\
&= \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{N} c_i\,\phi_i(x)\right] \left[\sum_{j=0}^{N} \overline{c_j}\,\overline{\phi_j(x)}\right]\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} c_i\,\overline{c_j} \qquad \underbrace{\int_a^b \phi_i(x)\,\overline{\phi_j(x)}\,dx}_{\overset{(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}\text{ é ortonromal}}{=} \begin{cases} 1\,, & \text{para } i = j \\ 0\,, & \text{para } i \neq j \end{cases}} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_i\,\overline{c_i} = \sum_{i=0}^{N} |c_i|^2 \qquad (4.168)
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2\, dx &= \int_a^b [f(x) - s_N(x)] \cdot \overline{[f(x) - s_N(x)]}\, dx \\
&= \int_a^b [f(x) - s_N(x)] \cdot \left[\overline{f(x)} - \overline{s_N(x)}\right]\, dx \\
&= \int_a^b \left[f(x)\,\overline{f(x)} - f(x)\,\overline{s_N(x)} - s_N(x)\overline{f(x)} + s_N(x)\overline{s_N(x)}\right]\, dx \\
&= \int_a^b |f(x)|^2\, dx - \int_a^b f(x)\,\overline{s_N(x)}\, dx - \int_a^b s_N(x)\,\overline{f(x)}\, dx + \underbrace{\int_a^b |s_N(x)|^2\, dx}_{\overset{(4.168)}{=} \sum_{k=0}^N |c_k|^2} \\
&= \int_a^b |f(x)|^2\, dx - \int_a^b f(x)\overline{s_N(x)}\, dx - \underbrace{\int_a^b \overline{f(x)}\, s_N(x)\, dx}_{= \overline{\int_a^b f(x)\,\overline{s_N(x)}\, dx}} + \sum_{k=0}^N |c_k|^2. \qquad (4.169)
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\overline{s_N(x)}\, dx &\overset{(4.160)}{=} \int_a^b f(x)\,\overline{\left(\sum_{i=0}^N c_i\,\phi_i(x)\right)}\, dx \\
&= \sum_{i=0}^N \overline{c_i}\, \underbrace{\int_a^b f(x)\,\overline{\phi_i(x)}\, dx}_{\overset{(4.158)}{=} c_i} \\
&\overset{c_i\overline{c_i} = |c_i|^2}{=} \sum_{i=0}^N \overline{c_i}\, c_i = \sum_{i=0}^N |c_i|^2 \qquad (4.170)
\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \overline{f(x)} s_N(x)\, dx &= \underbrace{\overline{\left[\int_a^b f(x)\,\overline{s_N(x)}\, dx\right]}}_{\overset{(4.170)}{=} \sum_{i=0}^N |c_i|^2} \\
&= \overline{\left(\sum_{i=0}^N |c_i|^2\right)} \\
&= \sum_{i=0}^N |c_i|^2\,.
\end{aligned}$$

Logo, substituindo esta identidade em (4.169), obteremos:

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2\, dx &= \int_a^b |f(x)|^2\, dx - \sum_{i=0}^N |c_i|^2 - \sum_{i=0}^N |c_i|^2 + \sum_{k=0}^N |c_k|^2 \\
&= \int_a^b |f(x)|^2\, dx - \sum_{i=0}^N |c_i|^2\,. \qquad (4.171)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_a^b |f(x) - t_N(x)|\, dx \overset{(4.167)}{\geq} \int_a^b |f(x)|^2\, dx - \sum_{k=0}^{N} |c_k|^2$$
$$\overset{(4.171)}{=} \int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2\, dx\,,$$

mostrando (4.162).

Além disso, de (4.167), notamos que valerá a igualdade na desigualdade acima ocorrerá se, e somente se,

$$d_k = c_k\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \{0\,,1\,,\cdots\,,n\}\,,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.5.4

1. *O resultado acima nos diz que entre todas as funções*

$$t_n = t_n(x)\,,$$

do tipo polinômio trigonométrico (isto é, dadas por (4.161)*), que utilizarmos para a aproximar a função* $\underline{f}$*, as funções*

$$s_n = s_n(x)\,,$$

dadas por (4.160)*, são aquelas que nos fornecerão as melhores aproximações (na norma acima).*

2. *Notemos que (4.168) nos diz que, para cada* $N \in \mathbb{N}$*, teremos*

$$\int_a^b |s_N(f\,;x)|^2\, dx \leq \sum_{i=0}^{N} |c_i|^2\,. \tag{4.172}$$

Temos também a <u>**desigualdade de Bessel (na forma complexa)**</u>, a saber:

Teorema 4.5.2 *Sejam* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[a\,,b]$ *e* $\{\phi_n\,;\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ *um conjunto ortonormal formado por funções, a valores complexos, definidas em* $[a\,,b]$*.*

Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2\, dx\,, \tag{4.173}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$*, o coeficiente* $\underline{c_n}$ *será dada por (4.158).*

Em particular,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0\,, \tag{4.174}$$

que é conhecido como <u>**Lema de Riemann-Lebesgue (na forma complexa)**</u>.

Demonstração:

Para cada $N \in \mathbb{N}$ segue, de (4.171), que

$$0 \leq \int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2 \, dx$$
$$= \int_a^b |f(x)|^2 \, dx - \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 ,$$

ou seja,
$$0 \leq \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 \, dx . \tag{4.175}$$

Logo fazendo

$$N \to \infty$$

na desigualdade acima, segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ é convergente em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, pois a sequência das somas parciais será monótona crescente e limitada em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Além disso, teremos

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 \, dx ,$$

mostrando (4.173).

Como a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ é convergente $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, do Critério da Divergência, segue que

$$\lim_{n\to\infty} |c_n|^2 = 0 ,$$

o que implicará que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 ,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência da demonstração do Teorema (4.5.2), temos um resultado análogo para as sequências

$$(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} ,$$

dados por (4.150), a saber, também conhecido como **desigualdade de Bessel (na forma complexa)**:

Corolário 4.5.1 *Sejam* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[-\pi, \pi]$.

Então

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} {c_n}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_a^b |f(x)|^2 \, dx , \tag{4.176}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{Z}$, *os coeficientes* c_n *serão dados por (4.150).*

Em particular,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \quad e \quad \lim_{n\to-\infty} c_n = 0 \tag{4.177}$$

que é conhecido como **Lema de Riemann-Lebesgue (na forma complexa)**.

Demonstração:

Também como consequência da demonstração do Teorema (4.5.2), temos um resultado análogo para as sequências

$$(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+} \quad \text{e} \quad (b_k)_{k \in \mathbb{N}},$$

dados por (4.151), a saber, também conhecido como **desigualdade de Bessel (na forma real)**:

Corolário 4.5.2 *Sejam* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[-\pi, \pi]$.

Então

$$\frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2 + \sum_{n=0}^{\infty} {b_n}^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_a^b |f(x)|^2 \, dx, \tag{4.178}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, *os coeficientes* $\underline{a_n, b_n}$ *serão dados por (4.146) ou (4.151).*

Em particular,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0 \tag{4.179}$$

que é conhecido como **Lema de Riemann-Lebesgue (na forma real)**.

Demonstração:

Notemos que o conjunto $\{\Phi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$

$$\Phi_n(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.180}$$

é um conjunto ortonormal em $(C([-\pi, \pi]; \mathbb{C}), +, \cdot)$, relativamente oa produto interno da integral em $[-\pi, \pi]$.

Como, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ temos que

$$|c_o|^2 \overset{(4.146)}{=} \frac{a_o^2}{4} \quad \text{e} \quad |c_n|^2 \overset{(4.146)}{=} \frac{{a_n}^2 + {b_n}^2}{4}. \tag{4.181}$$

Como, do Teorema (4.5.2), temos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ é convergente em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ e, do Critério da Comparação para séries numéricas (cujos termos são não negativos), segue que as séries numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2$ e $\sum_{n=0}^{\infty} {b_n}^2$ serão convergentes em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Além disso, da desigualdade de Bessel na forma complexa (isto é, (4.173)), segue que

$$\pi \left(\frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2 + \sum_{n=0}^{\infty} {b_n}^2 \right) = \pi \left[\frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left({a_n}^2 + {b_n}^2 \right) \right]$$

$$\overset{(4.181)}{=} 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \overset{(4.173)}{\leq} \int_a^b |f(x)|^2 \, dx.$$

Como as séries numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2$ e $\sum_{n=0}^{\infty} {b_n}^2$ são convergentes em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, do Critério da Divergência, segue que

$$\lim_{n \to \infty} {a_n}^2 = \lim_{n \to \infty} {b_n}^2 = 0,$$

o que implicará que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0\,,$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 4.5.5 *Observemos que o fator* $\dfrac{1}{\pi}$ *aparece na desigualdade acima está relacionado com o fato que*

$$\|e^{in\cdot}\| = 2\pi$$

Examine a demonstração do Teorema (4.5.2) acima trocando, para cada $k \in \mathbb{Z}$, *a função* ϕ_k *pela função* Φ_k, *dada por (4.180).*

4.6 Algumas séries trigonométricas

A seguir exibiremos alguns resultados importantes relacionados com a convergência da série de Fourier associada a uma função $\underline{f}$ que é 2π-periódica e "bem comportada".

Começaremos fazendo as seguintes observações:

Observação 4.6.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *uma função* 2π*-periódica, tal que* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[-\pi, \pi]$.

1. *Para cada* $n \in \mathbb{Z}$, *consideremos*

$$c_n \doteq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx\,, \tag{4.182}$$

o n*-ésimo coeficiente de Fourier associado à função* $\underline{f}$ *e*

$$S_N(x) = S_N(f\,;x) \doteq \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{4.183}$$

a n*-ésima soma parcial da série de Fourier associado à função* $\underline{f}$, *isto é, de*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{4.184}$$

Além disso, para cada $n \in \mathbb{Z}$, *consideremos a função* $\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$\Phi_n(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{4.185}$$

Com isto, do Exemplo (4.5.1), segue que o conjunto $\{\Phi_n\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ *é um conjunto ortonormal em* $[-\pi, \pi]$.

2. *Logo, utilizando-se de (4.168), temos que (4.175) pode ser reescrita na seguinte forma:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_N(x)|^2\,dx \overset{(4.168)}{=} \sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2 \overset{(4.175)}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\,. \tag{4.186}$$

O fator $\frac{1}{2\pi}$ *aparece devido a*

$$\int_{-\pi}^{\pi}|e^{i\,n\,x}|^2\,dx = 2\,\pi\,.$$

3. *Para cada* $N \in \mathbb{N}$*, consideremos a função* $D_N : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$D_N(x) \doteq \sum_{n=-N}^{N} e^{i\,n\,x}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{4.187}$$

que é denominado <u>**núcleo de Dirichlet**</u> *de ordem* <u>N</u>*.*

4. *Observemos que, para cada* $N \in \mathbb{N}$ *e* $x \in \mathbb{R}$*, teremos:*

$$\begin{aligned}
\left(e^{i\,x}-1\right)D_N(x) &= \left(e^{i\,x}-1\right)\sum_{n=-N}^{N}e^{i\,n\,x}\\
&= \underbrace{\sum_{n=-N}^{N}e^{i\,(n+1)\,x}}_{k \doteq n+1 \atop = \sum_{k=-N+1}^{N+1} e^{i\,k\,x}} - \underbrace{\sum_{n=-N}^{N}e^{i\,n\,x}}_{=\sum_{k=-N+1}^{N} e^{i\,k\,x} - e^{-i\,N\,x}}\\
&= \underbrace{\sum_{k=-N+1}^{N+1}e^{i\,k\,x}}_{=\sum_{k=-N+1}^{N} e^{i\,k\,x}+e^{i\,(N+1)\,x}} - \sum_{n=-N+1}^{N}e^{i\,k\,x} - e^{-i\,N\,x}\\
&= e^{i\,(N+1)\,x} - e^{-i\,N\,x}\,.
\end{aligned}$$

Multiplicando-se essa igualdade por $e^{-i\,\frac{x}{2}}$*, obteremos:*

$$\begin{aligned}
\underbrace{e^{-i\,\frac{x}{2}}\left(e^{i\,x}-1\right)}_{=\underbrace{e^{i\,\frac{x}{2}}-e^{-i\,\frac{x}{2}}}_{=2\,i\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}} D_N(x) &= e^{-i\,\frac{x}{2}}\left(e^{i\,(N+1)\,x}-e^{-i\,N\,x}\right)\\
&= \underbrace{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)x}-e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)x}}_{=2\,i\,\mathrm{sen}\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right]},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$D_N(x) = \frac{\operatorname{sen}\left[\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad \textit{para cada} \quad N \in \mathbb{N} \ \textit{e} \ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.188}$$

5. *Observemos também que, para* $N \in \mathbb{N}$ *e* $x \in \mathbb{R}$*, teremos:*

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{i\,n\,x} \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-i\,n\,t}\, dt\right) e^{i\,n\,x} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\underbrace{\sum_{n=-N}^{N} e^{i\,n\,(x-t)}}_{=D_N(x-t)}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_N(x-t)\, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{\begin{pmatrix} s \doteq x - t & \Rightarrow & ds = -dt \\ t = -\pi & \Rightarrow & s = x + \pi \\ t = \pi & \Rightarrow & s = x - \pi \end{pmatrix}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-s)\, D_N(s)\, (-ds) \\ &\overset{f, D_N \ \textit{são}\ 2\pi\textit{-periódicas}}{=} -\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(x-s)\, D_N(s)\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)\, D_N(s)\, ds\,. \end{aligned} \tag{4.189}$$

Agora podemos enunciar e demonstrar um resultado que trata da convergência pontual da série de Fourier (4.184):

Teorema 4.6.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *uma função* 2π*-periódica em* $\mathbb{R}$ *tal que* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[-\pi, \pi]$.

Suponhamos que para cada $x_o \in \mathbb{R}$ *fixado, existam* $\delta, M > 0$ *tais que se*

$$|t| < \delta\,, \quad \textit{deveremos ter:} \quad |f(x_o + t) - f(x_o)| \le M\,|t|\,, \tag{4.190}$$

então

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x_o) = f(x_o)\,, \tag{4.191}$$

isto é, a série de Fourier (4.184) associada a função $\underline{f}$ *convergirá, em* $\underline{x_o}$*, para* $f(x_o)$*, ou ainda,*

$$f(x_o) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\,n\,x_o}\,. \tag{4.192}$$

Demonstração:

Consideremos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dada por

$$g(t) \doteq \begin{cases} \dfrac{f(x_o - t) - f(x_o)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{t}{2}\right)}, & \text{para} \quad 0 < |t| < \pi \\ 0\,, \quad \text{para} \quad t = 0 \end{cases}, \tag{4.193}$$

e

$$g(t + 2\pi) = g(t)\,, \qquad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Notemos que, para cada $N \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{D_N(x)}_{=\sum_{n=-N}^{N} e^{i n x}} \; dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{i n x}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i n x}\, dx}_{=\begin{cases} 0\,, & \text{se } n \neq 0 \\ 2\pi\,, & \text{se } \; n = 0 \end{cases}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\, 2\pi = 1\,. \end{aligned} \tag{4.194}$$

Assim:

$$\begin{aligned} S_N(x_o) - f(x_o) &\overset{(4.189)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_o - s)\, D_N(s)\, ds - f(x_o)\, \overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(s)\, ds}^{\overset{(4.194)}{=} 1} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{[f(x_o - s) - f(x_o)]}_{\overset{(4.193)}{=} g(s)\,\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} \; \underbrace{D_N(s)}_{\overset{(4.188)}{=} \frac{\operatorname{sen}\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)s\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)}} \; ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)\, \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}\left[\left(N + \frac{1}{2}\right) s\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)}\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)\, \operatorname{sen}\left[\left(N + \frac{1}{2}\right) s\right]\, ds \\ &\overset{\operatorname{sen}\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)s\right] = \operatorname{sen}(N s)\cdot\cos\left(\frac{s}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)\cdot\cos(N s)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[g(s)\cos\left(\frac{s}{2}\right)\right] \operatorname{sen}(N s)\, ds \\ &\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[g(s)\, \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)\right] \cos(N s)\, ds\,. \end{aligned} \tag{4.195}$$

Mas

$$\begin{aligned}\left|g(s)\cos\left(\frac{s}{2}\right)\right| &= \frac{|f(x_o+s)-f(x_o)|}{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)\right|}\underbrace{\left|\cos\left(\frac{s}{2}\right)\right|}_{\leq 1}\\ &\overset{(4.190)}{\leq} \frac{M\,|s|}{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)\right|}\\ &= 2\,M\left|\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)}{\frac{s}{2}}}\right| \leq L\,, \end{aligned} \tag{4.196}$$

para algum $L > 0$, se $|s| < \delta$, pois

$$\lim_{s\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)}{\frac{s}{2}} = 1$$

e

$$\begin{aligned}\left|g(s)\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)\right| &= \frac{|f(x_o+s)-f(x_o)|}{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)\right|}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)\right|\\ &= |f(x_o+s)-f(x_o)|\\ &\overset{(4.190)}{\leq} M\,|s|\\ &\overset{|s|<\delta<\pi}{\leq} M\,\pi\,,\end{aligned} \tag{4.197}$$

ou seja, as funções $2\,\pi$-periódicas

$$g_1 : s \mapsto g(s)\cos\left(\frac{s}{2}\right) \quad \text{e} \quad g_2 : s \mapsto g(t)\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \tag{4.198}$$

são funções limitadas em $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$ e, juntamente com o fato que $f \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi\,,\pi]$, implicarão que as funções $\underline{g_1}$ e $\underline{g_2}$ dadas por (4.198) acima, pertencem a $\mathfrak{R}$ em $[-\pi\,,\pi]$.

Deixaremos os detalhes dessa afirmação como exercício para o leitor.

Com isto, podemos considerar os coeficientes de Fourier associados a função $\underline{g_1}$, que serão indicados por

$$a_n\,,b_n\,,\quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{Z}^+\,,$$

dados por (4.151), trocando-se função $\underline{f}$ pela função $\underline{g_1}$.

Também podemos considerar os coeficientes de Fourier associados a função $\underline{g_2}$, que serão indicados por

$$A_n\,,B_n\,,\quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{Z}^+\,,$$

dados por (4.151), trocando-se função $\underline{f}$ pela função $\underline{g_2}$.

Logo, do Corolário (4.5.2), segue que,

$$a_N\,,b_N\,,A_N\,,B_N \to \infty\,,\quad \text{quando} \quad N \to \infty\,,$$

em particular:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(s)\cos\left(\frac{s}{2}\right)\right]\,\text{sen}(N\,s)\,ds = \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} g_1(s)\,\text{sen}(N\,s)\,ds}^{\overset{(4.151)}{=}\pi\,b_N} \to 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(s)\,\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right)\right]\cos(N\,s)\,ds = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} g_2(s)\cos(N\,s)\,ds}_{\overset{(4.151)}{=}\pi\,A_N} \to 0\,,\quad \text{quando} \quad N\to\infty\,, \tag{4.199}$$

ou seja, de (4.195), teremos

$$S_N(x_o) - f(x_o) \to 0\,,\quad \text{quando} \quad N \to \infty\,,$$

mostrando (4.191) e completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.6.2 *Uma função* $\underline{f}$ *que satisfaz a condição (4.190) será denominada função* **<u>localmente Lipschitiziana em $x = x_o$</u>**.

Como consequência temos o

Corolário 4.6.1 *Sejam* $f\,,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *funções* 2π*-periódicas em* $\mathbb{R}$*, tais que* $f\,,g\in\mathfrak{R}$ *em* $[-\pi\,,\pi]$ *e* $I\subseteq\mathbb{R}$ *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$.

Suponhamos que

$$f(x) = 0\,,\quad \textit{para cada} \quad x\in I\,.$$

Então, para cada $x \in I$*, teremos*

$$S_N(x) \to 0\,,\quad \textit{quando} \quad N\to\infty\,. \tag{4.200}$$

Em particular, se existir $\delta > 0$ *tal que*

$$f(x) = g(x)\,,\quad \textit{para cada} \quad x\in(x_o-\delta\,,x_o+\delta)\,,$$

segue que

$$S_N(f\,;x) - S_N(g\,;x) = S_N(f-g\,;x) \to 0\,,\quad \textit{quando} \quad N\to\infty\,, \tag{4.201}$$

para cada $x\in\mathbb{R}$.

<u>Demonstração:</u>

Como a função

$$f = 0 \quad \text{em} \quad I\,,$$

ela satisfaz (4.190) para cada $x \in I$.

Do Teorema (4.6.1) acima, segue que, para cada $x \in I$, teremos que (4.191) será válido, implicando que

$$S_N(x) \to f(x) = 0, \quad \text{para cada} \quad x \in I,$$

ou seja, vale (4.200).

Se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(x) = g(x), \quad \text{para cada} \quad x \in (x_o - \delta, x_o + \delta),$$

então teremos

$$(f - g)(x) = 0, \quad \text{para cada} \quad x \in I \doteq (x_o - \delta, x_o + \delta).$$

Vale observar que

$$S_N(f; x) - S_N(g; x) = S_N(f - g; x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.202}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo da primeira parte deste resultado e de (4.202), segue (4.201), completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.6.3 *O resultado acima nos diz que o comportamento da série de Fourier de uma função* $\underline{f}$ *periódica "bem comportada" em um ponto* $\underline{x_o}$ *depende, em princípio,* **somente**, *dos valores da função em alguma vizinhança de* $\underline{x_o}$.

Isto nos diz que duas séries de Fourier associadas a duas funções diferentes podem coincidir em um intervalo aberto, mas podem diferir em outro intervalo aberto.

Conclusão: *o comportamento de uma série de Fourier é bem diferente do comportamento de uma série de potências, que estudamos na Seção 1 deste capítulo (ver Teorema (4.1.6)).*

Enunciaremos agora, o já enunciado e provado, **Teorema de Stone-Weierstrass** para polinômios trigonométricos (veja o Corolário (3.4.3)), mais precisamente temos o:

Teorema 4.6.2 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *uma função contínua e* 2π*-periódicas definida em* $\mathbb{R}$.

Então dado $\varepsilon > 0$, *existe um polinômio trigonométrico (complexo)* $P = P(x)$, *isto é, dado por* (4.145) *(veja a Definição* (4.5.1)*), tal que*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.203}$$

Demonstração:

Se "identificarmos" $\underline{x}$ como $\underline{x + 2\pi}$, (por meio de uma relação de equivalência) poderemos identificar uma função 2π-periódicas definida em $\mathbb{R}$, com uma função definida na circunferência unitária centrada na origem, que denotaremos por $\underline{S^1}$.

Para isto basta considerar a aplicação

$$x \mapsto e^{ix},$$

que leva a reta $\mathbb{R}$ em $\underline{S^1}$ e permitirá a identificação citada.

Notemos que o conjunto formado por todos os polinômios trigonométricos (complexos) formam uma álgebra $\underline{\mathcal{A}}$ auto-adjunta, que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de $\underline{S^1}$ e o conjunto $\underline{S^1}$ é compacto em $\left(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2}\right)$.

Logo, do Corolário (3.4.2), segue que

$$\overline{\mathcal{A}} = C(S^1; \mathbb{R}),$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.6.4 *O resultado acima nos diz que toda função contínua complexa, 2π-periódica definida em $\mathbb{R}$, pode ser* **uniformemente aproximada** *por uma polinômio trigonométrico (complexo) definido em $\mathbb{R}$.*

Com isto podemos enunciar e demonstrar a, assim denominada, **Identidada de Parseval**, a saber:

Corolário 4.6.2 *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funções 2π-periódicas em $\mathbb{R}$ tal que $f, g \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$, cujos coeficientes de Fourier são dados pelas sequências numéricas (complexas) $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ e $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, respectivamente.*

Para cada $N \in \mathbb{Z}^+$, consideremos a N-ésima soma parcial da série de Fourier (na forma complexa) associada à função $\underline{f}$ e a função $\underline{f}$, ou seja,:

$$S_N(f; x) \doteq \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \quad e \quad S_N(g; x) \doteq \sum_{n=-N}^{N} d_n e^{inx}, \quad para\ cada \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.204}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\underline{c_n}$ e $\underline{d_n}$ denotam os $\underline{n}$-ésimos coeficientes de Fourier associados à função $\underline{f}$ e a função $\underline{g}$, respectivamente, isto é,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad e \quad d_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx. \tag{4.205}$$

Então

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f; x)|^2 dx = 0, \tag{4.206}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{N=-\infty}^{\infty} c_N \overline{d_N}, \tag{4.207}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{N=-\infty}^{\infty} |c_N|^2. \tag{4.208}$$

<u>Demonstração:</u>

Lembremos que se $t \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$ segue, do Corolário (2.3.1), que $|t|^2 \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$.

Neste caso, denotaremos por

$$\|t\|_2 \doteq \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

Como $f \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$, segue, do Exercício 12, página 140, que dado $\varepsilon > 0$ existe $h \in C(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, tal que a função $\underline{h}$ seja 2π-periódica em $\mathbb{R}$ e

$$\|f - h\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.209}$$

Como a função $\underline{h}$ é contínua e 2π-periódica em $\mathbb{R}$, do Teorema (4.6.2), segue que existe um polinômio trigonométrico $P = P(x)$, tal que

$$|h(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.210}$$

o que implicará em

$$\begin{aligned} \|h - P\|_2 &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|h(x) - P(x)|^2}_{\overset{(4.210)}{\leq} \frac{\varepsilon^2}{9}} \, dx\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{(4.210)}{<} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon^2}{9} \, dx\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{4.211}$$

Seja $N_o \in \mathbb{Z}^+$ e , para cada $n \in \{-N_1, \cdots, N_1\}$, consideremos $C_n \in \mathbb{C}$, de modo que

$$P(x) = \sum_{n=-N_o}^{N_o} C_n \, e^{-i\,n\,x}, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.212}$$

onde

$$C_{-N_o} \neq 0 \quad \text{ou} \quad C_{N_o} \neq 0.$$

Então, aplicando-se o Teorema (4.5.1), à família do Exemplo (4.5.1), com $(t_N)_{N\in\mathbb{N}}$, como sendo

$$t_N(x) \doteq P(x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

e $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$, como sendo

$$s_N(x) \doteq S_N(f; x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

segue que (multiplicando-se ambos o membros da desigualdade (4.162) por $\dfrac{1}{2\pi} > 0$)

$$\begin{aligned} \|h - S_N(h)\|_2 &\overset{(4.162)}{\leq} \|h - P\|_2 \\ &\overset{(4.211)}{<} \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para cada} \quad N \geq N_o. \end{aligned} \tag{4.213}$$

Assim, se $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denotam os coeficientes associados à função $\underline{h}$, da Observação (4.5.4) item 2. e do Teorema (4.5.2), segue que

$$\begin{aligned}
\|S_N(h) - S_N(f)\|_2 &= \|S_N(h-f)\|_2 \\
&\overset{\text{Obs. (4.5.4) item 2. aplicado à função } h-f}{\leq} \sum_{n=-N}^{N} |e_n - d_n|^2 \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e_n - d_n|^2 \\
&\overset{(4.173) \text{ aplicado a } h-f}{\leq} \|h-f\|_2 \overset{(4.209)}{<} \frac{\varepsilon}{3}\,.
\end{aligned} \tag{4.214}$$

Logo, se $N \geq N_o$, teremos:

$$\begin{aligned}
\|f - S_N(f)\|_2 &= \|[f-h] + [h - S_N(h)] + [S_N(h) - S_N(f)]\|_2 \\
&\leq \underbrace{\|f-h\|_2}_{\overset{(4.209)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|h - S_N(h)\|_2}_{\overset{(4.213)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|S_N(h) - S_N(f)\|_2}_{\overset{(4.214)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f;x)|^2 \, dx = 0\,,$$

mostrando (4.206).

Com isto, para cada $N \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N(f;x)\, \overline{g(x)}\, dx &\overset{(4.205)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx} \right] \overline{g(x)}\, dx \\
&= \sum_{n=-N}^{N} c_n \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, \overline{g(x)}\, dx}_{= \overline{\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \underbrace{\overline{e^{inx}}}_{=e^{-inx}} dx}} \\
&= \sum_{n=-N}^{N} c_n \underbrace{\overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{-inx}\, dx}}_{\overset{(4.205)}{=} \overline{d_N}} \\
&= \sum_{n=-N}^{N} c_n\, \overline{d_n}\,.
\end{aligned} \tag{4.215}$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} S_N(f\,;x)\,\overline{g(x)}\,dx \right| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_N(f\,;x)]\,\overline{g(x)}\,dx \right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |[f(x) - S_N(f\,;x)]\,\overline{g(x)}|\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f\,;x)|\,\underbrace{|\overline{g(x)}|}_{=|g(x)|}\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f\,;x)|\,|g(x)|\,dx \\
&\overset{\text{Des. Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f\,;x)|^2\,dx}_{\overset{(4.207)}{\to} 0 \text{ quando } N \to \infty} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2\,dx \right]^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}
$$

Logo podemos passar o limite, quando $N \to \infty$, em (4.215) e assim obter

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx &= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N(f\,;x)\,\overline{g(x)}\,dx \\
&\overset{(4.215)}{=} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n\,\overline{d_n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\overline{d_n}\,,
\end{aligned}
$$

mostrando (4.207).

Fazendo

$$g = f$$

em (4.207), obteremos (4.208), completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 4.6.5 *Podemos fazer um estudo semelhante ao feito acima para funções, a valores complexos, qeu são* $2\,L$*-periódicas, bastando, para cada* $n \in \mathbb{Z}^+$*, substituir, nas considerações acima, a função*

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{i\,n\,x}$$

pela função

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2L}}\,e^{\frac{i\,n\,\pi\,x}{L}}$$

e, de modo semelhante, substituir as funções

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\cos(nx) \quad e \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\operatorname{sen}(nx)$$

pelas funções

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right) \quad e \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right),$$

respectivamente.

4.7 Notas Históricas

A seguir vamos fornecer um breve relato do desenvolvimento da teria associada as séries de Fourier.

1. d'Alambert (1747) e Euler (1748) encontraram a solução geral para a equação da onda

$$u_{tt}(t\,,x) - u_{xx}(t\,,x) = 0\,, \quad \text{para} \quad (t\,,x) \in \mathbb{R}^2\,,$$

   a saber:

$$u(t\,,x) \doteq F(x+t) + G(x-t)\,, \quad \text{para cada} \quad (t\,,x) \in \mathbb{R}^2\,,$$

   onde $F\,,G \in C^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$.

2. D.Bernoulli (1753) afirmou que a solução da equação da onda deveria ter a seguinte forma:

$$u(t\,,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\,t)\operatorname{sen}(n\,x)\,,$$

   para cada $(t\,,x) \in [0\,,\infty) \times [0,\pi]$ (caso que $L = \pi$).

3. Lagrange (1759) afirmou que a equação da onda em $[0\,,1]$ (isto é, para $L = 1$), com dado inicial dado pela função $\underline{f}$ e velocidade inicial dada pela função $\underline{g}$, deveria ser dada por:

$$\begin{aligned} u(t\,,x) = 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} &[\cos(n\,\pi\,t)\operatorname{sen}(n\,\pi\,y)\operatorname{sen}(n\,\pi\,x)]\,f(y)\,dy \\ &+ 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}\operatorname{sen}(n\,\pi\,t)\operatorname{sen}(n\,\pi\,y)\operatorname{sen}(n\,\pi\,x)\right] g(y)\,dy\,, \end{aligned} \tag{4.216}$$

   para cada $(t\,,x) \in [0\,,\infty) \times \in [0\,,1]$.

4. Notemos que, se fizermos $t = 0$ em (4.216), e trocarmos a integral definida com a série

funções, obteremos:

$$
\begin{aligned}
f(x) = u(0\,,x) &= 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f(y)\left[\underbrace{\cos(n\,\pi\,0)}_{=1}\,\mathrm{sen}(n\pi y)\,\mathrm{sen}(n\,\pi\,x)\right]\,dy\\
&\quad + 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} g(y)\left[\frac{1}{n}\,\underbrace{\mathrm{sen}(n\,\pi\,0)}_{=0}\,\mathrm{sen}(n\,\pi\,y)\,\mathrm{sen}(n\,\pi\,x)\right]\,dy\,,\\
&= 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}[f(y)\,\mathrm{sen}(n\,\pi\,y)\,\mathrm{sen}(n\,\pi\,x)]\,dy\\
&\overset{\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\,!?}{=} 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\underbrace{\int_0^1 f(y)\,\mathrm{sen}(n\,\pi\,y)\,dy}_{\text{Coef. de Fourier}}\right]\,\mathrm{sen}(n\,\pi\,x)\,,
\end{aligned}
$$

para cada $x \in [0\,,1]$.

4. Fourier (1811) obteve os coeficientes de Fourier e escreveu as séries de senos e cossenos de várias funções.

   Segundo consta, ele dizia que qualquer função periódica poderia ser expressa por uma tal série.

   Mais tarde foi mostrado que isso, em geral, não é verdade.

5. Dirichlet (1829 e 1837) foi um dos primeiros a reconhecer que nem toda função periódica poderia ser representada por uma série de Fourier.

   Produziu os primeiros critérios de convergência da série de Fourier.

6. Riemann (século XIX) propôs encontrar condições necessárias e suficientes para que uma função periódica pudesse ser representada por uma série de Fourier.

   Como estas questões estavam ligadas a integração de funções, neste instante, começa a teoria de integração de Riemann.

7. de Bois e Reymond (1876) construiram uma função contínua e periódica cuja série de Fourier divergia em um ponto.

   Mais tarde, construiram uma outra para o qual a série de Fourier divergia num conjunto denso.

   Féjér (1909) exibiu exemplos mais simples.

8. Dini (1880) conseguiu critérios para a convergência da série de Fourier (Teste ou Critério de Dini).

9. Jordan (1881) demostrou outro critério de convergência da série de Fourier (Critério de Jordan).

10. Todos estes trabalhos, e muitos outros, conduziram a uma melhor compreensão das funções descontínuas e propiciaram os trabalhos de Harnack, Hankel, Borel e Lebesgue, culminando com a introdução de um novo conceito de integração, a saber, a integral de Lebesgue.

    Aqui começa a teoria moderna das séries de Fourier.

11. Riesz e Fischer (1907) mostraram a convergência da série de Fourier na norma $\|.\|_{L^2([0a,,L]\,;\,\mathbb{R})}$ para funções cujo módulo ao quadrado são integráveis (segundo Lebesgue) em um intervalo $[0, L]$.

12. Carleson (1966) mostrou que para uma função, cujo módulo ao quadrado é integrável (segundo Lebesgue) em um intervalo $[0\,, L]$, a série de Fourier converge, exceto num conjunto de medida de Lebesgue zero, para a própria função.

4.8 Exercícios

Capítulo 5

Funções de Várias Variáveis Reais

Neste capítulo trataremos das funções de várias variáveis reais a valores reais (ou complexos).

Serão abordados assuntos relacionados com a continuidade e a diferenciabilidade de tais funções.

5.1 Um pouco de Álgebra Linear

Nesta seção abordaremos alguns tópicos relacionados com transformações lineares.

Estamos supondo que o leitor esteja familiarizado com a teoria básica de Álgebra Linear, que compreende os assuntos relacionados com espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), base, dimensão de espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), que são finitamente gerados, transformações lineares entre espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), que são finitamente gerados, entre outros tópicos.

Começaremos com a:

Observação 5.1.1

Sejam $(X, +, \cdot)$, $(Y, +, \cdot)$ *e* $(Z, +, \cdot)$ *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*).*

A verificação dos fatos citados abaixo serão deixadas como exercício para o leitor.

1. *Denotaremos o conjunto formado por todas as transformações lineares* $T : X \to Y$ *por*
$$L(X; Y).$$

2. *Notemos que* $(L(X; Y), +, \cdot)$ *será um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), onde* $\underline{+}$ *denota a soma de funções e* $\underline{\cdot}$ *denota a multiplicação de uma função por número real (ou complexo).*

3. *Lembremos também que se*
$$T \in L(X; Y) \quad e \quad S \in L(Y; Z), \quad \text{então} \quad S \circ T \in L(X; Z).$$

4. *Se* $n \in \mathbb{N}$ *está fixado, denotaremos a norma usual do espaço vetorial* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*, por* $\| \cdot \|$*, ou seja, se* $x \doteq (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *então*
$$\|x\| \doteq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}. \tag{5.1}$$

Com as considerações acima temos:

Proposição 5.1.1 *Sejam* $n\,,m\,,k \in \mathbb{N}$ *fixados. Então:*

1. *Se* $A \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, *então existe* $\lambda \geq 0$ *tal que*

$$\|A(x)\| \leq \lambda\,\|x\|\,, \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n\,. \tag{5.2}$$

   Em particular, existe

$$\|A\|_L \doteq \sup_{\|y\|\leq 1} \|A(y)\| < \infty \tag{5.3}$$

   e a transformação linear $\underline{A}$ *será uniformemente contínua em* $\mathbb{R}^n$;

2. $\|\cdot\|_L$, *definida por* (5.3), *é uma norma em* $(L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\,,+\,,\cdot)$;

3. *Se* $A \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ *e* $B \in L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^k)$, *então*

$$\|B \circ A\|_L \leq \|B\|_L\,\|A\|_L\,. \tag{5.4}$$

Demonstração:

De 1.:

Seja

$$\beta \doteq \{\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\cdots\,,\vec{e}_n\}$$

a base canônica de $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$, isto é,

$$\vec{e}_i = (0,\cdots,0,\underbrace{1}_{\text{i-ésima entrada}},0,\cdots 0)\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,.$$

Consideremos

$$y \doteq \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \vec{e}_i\,, \quad \text{tal que} \quad \|y\| \leq 1\,. \tag{5.5}$$

Notemos que, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, teremos:

$$\begin{aligned} |y_i| &= \sqrt{{y_i}^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} {y_j}^2} \\ &\overset{(5.1)}{=} \|y\| \overset{(5.5)}{\leq} 1\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad |y_i| \leq 1\,. \tag{5.6}$$

Consideremos

$$\lambda \doteq \sum_{i=1}^{n} \|A\,(\vec{e}_i)\|\,. \tag{5.7}$$

Com isto segue que

$$\begin{aligned}
\|A(y)\| &\overset{(5.5)}{=} \left\| A\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \vec{e}_i\right)\right\| \\
&\overset{A \text{ é transf. linear}}{=} \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot A\left(\vec{e}_i\right)\right\| \\
&\overset{\text{Des. triangular}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \|y_i\, A(\vec{e}_i)\| \\
&\overset{\text{Propriedade de norma}}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|y_i|}_{\overset{(5.6)}{\leq} 1} \|A(\vec{e}_i)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|A(\vec{e}_i)\| \\
&\overset{(5.7)}{=} \lambda\,.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Assim o conjunto

$$\{\|A(y)\|\,;\ \|y\| \leq 1\}$$

é limitado superiormente em $\mathbb{R}$, pelo número real não negativo $\underline{\lambda}$.

Portando este conjunto admitirá supremo em $\mathbb{R}$ e, além disso, teremos:

$$\sup_{\|y\|\leq 1} \|A(y)\| \leq \lambda\,,$$

mostrando (5.3).

Notemos que, se

$$x = 0\,, \quad \text{então} \quad \|x\| = 0\,,$$

e como $\underline{A}$ é uma transformação linear, segue que

$$A(x) = 0\,.$$

Neste caso, (5.2) ocorrerá trivialmente (pois ambos os lados da desigualdade serão zero e assim a igualdade ocorrerá).

Por outro lado, se

$$x \neq 0\,,$$

considerando-se

$$y \doteq \frac{x}{\|x\|}\,, \quad \text{segue que} \quad \|y\| = 1\,.$$

Assim, de (5.8) obteremos

$$\|A(y)\| \leq \lambda\,,$$

como $y = \dfrac{x}{\|x\|}$, será equivalente a: $$\underbrace{\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|}_{\overset{A \text{ é trans. linear}}{=} \left\|\frac{1}{\|x\|} A(x)\right\| \overset{\text{Propriedade de norma}}{=} \frac{1}{\|x\|}\|A(x)\|} \leq \lambda\,,$$

$$\text{ou ainda,} \quad \|A(x)\| \leq \lambda\,\|x\|\,,$$

mostrando (5.2).

Notemos que, se

$$\lambda = 0$$

segue, trivialmente, que a função $\underline{A}$ será uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$.

Se

$$\lambda > 0\,,$$

temos que se $x\,,y \in \mathbb{R}^n$, segue que

$$\begin{aligned} \|A(x) - A(y)\| &\overset{A \text{ é transf. linear}}{=} \|A(x-y)\| \\ &\overset{(5.2)}{\leq} \lambda\|x-y\|\,, \end{aligned}$$

mostrando que a função $\underline{A}$ é Lipschtiziana em $\mathbb{R}^n$.

Em particular, será uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$ (basta tomar $\delta \doteq \frac{\varepsilon}{\lambda}$), completando a demonstração do item 1. .

<u>De 2.:</u>

Notemos que

- Se $A \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ então

$$\|A\|_L \geq 0\,.$$

Além disso

$$\begin{aligned} & \|A\|_L = 0\,, \\ \text{se, e somente se,} \quad & \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\| = 0\,, \\ \text{ou, equivalentemente,} \quad & \|A(x)\| = 0\,, \quad \text{para cada} \quad \|x\| \leq 1\,, \\ \text{ou ainda,} \quad & A(x) = 0\,, \quad \text{para} \quad \|x\| \leq 1\,, \\ \text{ou seja,} \quad & A(x) = 0\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n\,. \end{aligned}$$

A verificação da última equivalência será deixada como exercício para o leitor.

- Se $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e $A \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, então

$$\begin{aligned} \|\alpha \cdot A\|_L &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|(\alpha \cdot A)(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} \{|\alpha|\, \|A(x)\|\} \\ &\overset{|\alpha|\geq 0}{=} |\alpha| \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\| \\ &= |\alpha|\, \|A\|_L\,; \end{aligned}$$

- Se $A, B \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, então

$$\begin{aligned}
\|A+B\|_L &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|[A+B](x)\| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \underbrace{\|A(x)+B(x)\|}_{\leq \|A(x)\|+\|B(x)\|} \\
&\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \{\|A(x)\| + \|B(x)\|\} \\
&\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\| + \sup_{\|x\|\leq 1} \|B(x)\| \\
&= \|A\|_L + \|B\|_L,
\end{aligned}$$

  mostrando que $\|\cdot\|_L$ é uma norma em $(L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), +, \cdot)$, completando a demonstração do item 2. .

De 3.:
Observemos que, se $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ então, para cada $x \neq O$, teremos

$$\begin{aligned}
\|A\|_L &= \sup_{\|y\|\leq 1} \|A(y)\| \\
&\geq \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \\
&\overset{A \text{ é transf. linear}}{=} \left\| \frac{1}{\|x\|} A(x) \right\| \\
&\overset{\|\cdot\|_L \text{ é norma}}{=} \frac{1}{\|x\|} \|A(x)\|,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|A(x)\| \leq \|A\|_L \|x\|, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.9}$$

Notemos que se $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que

$$\|x\| \leq 1,$$

teremos:

$$\begin{aligned}
\|(B \circ A)(x)\| &= \|B[A(x)]\| \\
&\overset{(5.9)}{\leq} \|B\|_L \|A(x)\| \\
&\overset{(5.9)}{\leq} \|B\|_L (\|A\|_L \|x\|).
\end{aligned}$$

Tomando-se o supremo na desigualdade acima, para $\|x\| \leq 1$, obteremos:

$$\|B \circ A\|_L \leq \|B\|_L \|A\|_L,$$

completando a demonstração do item 3. e do resultado.

□

Observação 5.1.2

1. *Notemos que, se* $A \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ *admite transformação inversa, segue que*
$$m = n\,.$$
De fato, se $A \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ *admite transformação inversa, segue que*
$$\dim\left[\mathcal{N}(A)\right] = 0 \quad e \quad \dim\left[\mathcal{I}(A)\right] = m\,,$$
onde $\mathcal{N}(A)$ *denota o núcleo da transformação linear* $\underline{A}$ *(que é um subespaço vetorial de* $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$*), ou seja,*
$$\mathcal{N}(A) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, A(x) = O\}$$
e $\mathcal{I}(A)$ *denota o conjunto imagem da transformação linear* $\underline{A}$ *(que também é um subespaço vetorial de* $(\mathbb{R}^m,+,\cdot)$*), isto é,*
$$\mathcal{I}(A) \doteq \{y \in \mathbb{R}^m\,;\; \textit{existe}\ x \in \mathbb{R}^n\ \textit{tal que}\ T(x) = y\}\,.$$
Logo, de um resultado de Álgebra Linear, segue que
$$\underbrace{\dim\left[\mathcal{I}(A)\right]}_{=m} + \underbrace{\dim\left[\mathcal{N}(A)\right]}_{=0} = n,$$
ou seja,
$$m = n\,,$$
como afirmamos.

2. *Por simplicidade, denotaremos* $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ *por* $L(\mathbb{R}^n)$ *e um elemento de* $L(\mathbb{R}^n)$ *será denominado* **operador linear em $\mathbb{R}^n$**.

Para finalizar esta seção temos o:

Teorema 5.1.1 *Seja*
$$\Omega \doteq \{A \in L(\mathbb{R}^n)\,;\, A \ \textit{é inversível}\,\}\,.$$
Então

1. *Se* $A \in \Omega$ *e* $B \in L(\mathbb{R}^n)$ *satisfaz:*
$$\|B - A\|_L\,\left\|A^{-1}\right\|_L < 1\,, \tag{5.10}$$
segue que $B \in \Omega$.

2. Ω *é um subconjunto aberto de* $L(\mathbb{R}^n)$ *(munido da norma* $\|\cdot\|_L$*).*

3. *A aplicação* $T : \Omega \to \Omega$ *dada por*
$$T(A) \doteq A^{-1}\,, \quad \textit{para cada} \quad A \in \Omega\,, \tag{5.11}$$
é uma função contínua e bijetora em Ω.

Demonstração:

De 1.:

Notemos que se $C \in \Omega$, segue que

$$\|C\|_L \neq 0\,,$$

pois caso contrário $C = 0$, e assim não seria injetora.

Assim, como $A \in \Omega$, temos que $\underline{A}$ é um operador linear inversível, logo

$$A^{-1} \in L(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \|A^{-1}\|_L \neq 0\,.$$

Sejam

$$\alpha \doteq \frac{1}{\|A^{-1}\|_L} \quad \text{e} \quad \beta \doteq \|B - A\|_L\,. \tag{5.12}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \beta &= \|B - A\|_L \\ &\overset{(5.10)}{<} \frac{1}{\|A^{-1}\|_L} = \alpha\,, \\ \text{isto é,} \quad \beta &< \alpha\,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Logo, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, teremos:

$$\begin{aligned} \alpha\,\|x\| &= \alpha\,\overbrace{\|A^{-1}[A(x)]\|}^{\overset{(5.9)}{\leq}\|A^{-1}\|_L\|A(x)\|} \\ &\leq \underbrace{\alpha\|A^{-1}\|_L}_{\overset{(5.12)}{=}1}\,\|A(x)\| \\ &= \|A(x)\| \\ &= \|(A - B)(x) + B(x)\| \\ &\overset{\text{des. triangular}}{\leq} \underbrace{\|(A - B)(x)\|}_{\overset{(5.9)}{\leq}\|A-B\|_L\|x\|} + \|B(x)\| \\ &\leq \underbrace{\|A - B\|_L}_{\overset{(5.12)}{=}\beta}\,\|x\| + \|B(x)\| \\ &= \beta\,\|x\| + \|B(x)\|\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(\alpha - \beta)\,\|x\| \leq \|B(x)\|\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}^n\,. \tag{5.14}$$

Como

$$\beta < \alpha$$

(veja (5.13)), segue que

$$\|B(x)\| \neq 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \neq 0\,,$$

ou seja, o operador linear $\underline{B}$ é injetor e como o domínio e o contra-domínio são iguais (logo têem a mesma dimensão), implicará que o operador linear $\underline{B}$ será sobrejetor, ou ainda, bijetor.

Assim teremos que

$$B \in \Omega\,,$$

completando a demonstração de 1. .

De 2.:

Dado $A \in \Omega$, notemos que se $B \in L(\mathbb{R}^n)$ é tal que

$$\|B - A\|_L < \alpha\,,$$

de (5.13) e do item 1., segue que $B \in \Omega$.

Portanto, a bola aberta $\mathcal{B}(A\,;\,\alpha) \subseteq \Omega$, ou seja, Ω é um subconjunto aberto de $L(\mathbb{R}^n)$ (munido da norma $\|\cdot\|_L$), completando a demonstração de 2. .

De 3.:

Sejam $A\,,B \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}^n$ e α, β com em (5.12).

Trocando-se $\underline{x}$ por $B^{-1}y$ em (5.14), obteremos

$$\begin{aligned}
(\alpha - \beta)\,\left\|B^{-1}(y)\right\| &\leq \left\|B\left[B^{-1}(y)\right]\right\| \\
&= \|y\|\,, \\
\text{ou seja,}\quad \left\|B^{-1}(y)\right\| &\leq \frac{1}{\alpha - \beta}\,\|y\|\,, \\
\text{tomando-se o } \sup_{\|y\| \leq 1}\text{, obteremos:}\quad \left\|B^{-1}\right\|_L &\leq \frac{1}{\alpha - \beta}\,. \qquad (5.15)
\end{aligned}$$

Logo, se $A \in \Omega$, da Proposição (5.1.1) item 3., segue que

$$\begin{aligned}
B^{-1} - A^{-1} &= B^{-1}\left(AA^{-1}\right) - \left(B^{-1}B\right)A^{-1} \\
&= B^{-1}(A - B)A^{-1} \\
\text{implicando em:}\quad \left\|B^{-1} - A^{-1}\right\|_L &= \left\|B^{-1}(A - B)\,A^{-1}\right\|_L \\
&\overset{(5.4)}{\leq} \underbrace{\left\|B^{-1}\right\|_L}_{\overset{(5.15)}{\leq} \frac{1}{\alpha-\beta}} \underbrace{\|A - B\|_L}_{\overset{(5.12)}{=} \beta} \underbrace{\left\|A^{-1}\right\|_L}_{\overset{(5.15)}{=} \frac{1}{\alpha}} \\
&\leq \frac{1}{\alpha - \beta}\,\beta\,\frac{1}{\alpha}\,, \\
\text{ou seja,}\quad \left\|B^{-1} - A^{-1}\right\|_L &\leq \frac{\beta}{\alpha\,(\alpha - \beta)}\,. \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

Portanto, se

$$B \overset{\|\cdot\|_L}{\to} A\,,\quad \text{teremos:}\quad \beta \overset{(5.12)}{=} \|B - A\|_L \to 0\,,$$

e assim, de (5.16), segue que

$$\left\|B^{-1} - A^{-1}\right\|_L \to 0\,,\quad \text{ou ainda}\quad B^{-1} \overset{\|\cdot\|_L}{\to} A^{-1}\,,$$

ou seja, a aplicação $\underline{T}$, dada por (5.11), será contínua em $\underline{\Omega}$, munido da norma $\|\cdot\|_L$, completando a demonstração do item 3. e do resultado.

$\square$

5.2 Diferenciabilidade de funções de várias variáveis reais a valores reais (ou complexos)

Nesta seção trataremos da diferenciabilidade de funções de várias variáveis reais, a valores reais (ou complexos), algumas aplicações da mesma, bem como propriedades associadas.

Antes de introduzir a noção de diferenciabilidade para este caso, lembraremos da noção análoga para o caso de funções a valores reais, de uma variável real.

Observação 5.2.1

1. *Nosso objetivo no que segue é introduzir o conceito de diferenciabilidade em* $x_o \in E$*, onde* $\underline{E}$ *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$*, para uma função* $f : E \to \mathbb{R}^m$.

2. *No capítulo anterior tratamos, de modo rápido, a questão da diferenciabilidade de uma função vetorial* $f : (a\,,b) \to \mathbb{R}^m$.

   A seguir fazeremos o estudo da situação do item acima, de modo mais preciso, e depois, trataremos da situação geral do item 1. .

3. *Seja* $f : (a\,,b) \to \mathbb{R}$ *uma função e* $x_o \in (a,b)$.

   Dizemos que a função $\underline{f}$ *é* **diferenciável em** $\underline{x_o}$*, se existe o seguinte limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \in \mathbb{R}\,. \tag{5.17}$$

   Neste caso, denotaremos o limite acima por $\underline{f\,'(x_o)}$ *e o denominamos de* **derivada da função** $\underline{f}$ **no ponto** $\underline{x_o}$.

4. *O limite (5.17) é equivalente a escrever*

$$f(x_o+h) = f(x_o) + f\,'(x_o)\,h + r(h)\,, \tag{5.18}$$

   onde

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0\,. \tag{5.19}$$

5. *Por sua vez, a expressão (5.18) pode ser lida da seguinte forma: a diferença entre os vetores*

$$f(x_o+h)-f(x_o)$$

   é "aproximadamente igual" a função linear,

$$h \mapsto f\,'(x_o)\,h\,,$$

   para $\underline{h}$ *"suficientemente pequeno", onde o erro é dado pela função*

$$r = r(h)\,.$$

6. *Deste modo* $\underline{f'(x_o)}$ *pode ser visto, não como um número real, mas como associado a um operador linear definido em* $\mathbb{R}$, *a saber, o operador linear*

$$h \mapsto f'(x_o)\, h\,.$$

Lembremos que, do ponto de vista da Álgebra Linear, o espaço vetorial real $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$ *é isomorfo ao espaço vetorial real* $(L(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *(pois ambos são unidimensionais).*

Para o caso de funções vetoriais temos a:

Definição 5.2.1 *Sejam* $f : (a\,,b) \to \mathbb{R}^m$ *uma função vetorial e* $x_o \in (a,b)$.
Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **diferenciável em** $\underline{x_o}$, *se existir* $y \in \mathbb{R}^m$, *tal que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = y\,. \tag{5.20}$$

Neste caso diremos que o vetor $\underline{y}$ *é a* **derivada da função** $\underline{f}$ **no ponto** $\underline{x_o}$, *que será indicada por* $\underline{f'(x_o)}$, *ou seja*

$$f'(x_o) \doteq y\,. \tag{5.21}$$

Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **diferenciável em** $(a\,,b)$, *se a função* $\underline{f}$ *for diferenciável em cada ponto de* $(a\,,b)$.
Com isto podemos considerar a função $f' : (a\,,b) \to \mathbb{R}^m$, *denominada* **função derivada associada à função** $\underline{f}$.

Observação 5.2.2

1. *Notemos que o limite* (5.20) *acima, é considerado na norma de* $\mathbb{R}^m$, *ou seja, dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $\delta = \delta(\varepsilon\,,x_o\,,f) > 0$, *de modo que se*

$$h \in I_\delta^* \doteq (-\delta\,,\delta) \setminus \{0\}\,, \qquad \textit{com} \qquad x_o + h \in (a\,,b)$$

deveremos ter

$$\left\| \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} - y \right\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon\,. \tag{5.22}$$

2. *Observemos que* (5.20) *é equivalente a:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \quad \textit{ou, equivalentemente,} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{h} = 0\,, \tag{5.23}$$

onde

$$r(h) \doteq f(x_o+h) - f(x_o) - y\,, \quad \textit{para cada} \quad h \in I_\delta^*\,. \tag{5.24}$$

3. *Portanto, a função* $f : (a\,,b) \to \mathbb{R}^m$ *será diferenciável em* $x_o \in (a,b)$ *se, e somente se, existe* $y \in \mathbb{R}^m$, *que será denotado por* $\underline{f'(x_o)}$, *de modo que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_o+h) - f(x_o) - y\,h\|_{\mathbb{R}^m}}{|h|} = 0\,. \tag{5.25}$$

4. *Notemos também que no caso acima, podemos interpretar o vetor* $\underline{f'(x_o)}$ *como sendo associada a uma transformação linear de* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *em* $(\mathbb{R}^m +, \cdot)$*, a saber, a transformação linear*
$$h \mapsto f'(x_o)\, h\,,$$
pois o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ *é isomorfo ao espaço vetorial real* $(L(\mathbb{R};\mathbb{R}^m), +, \cdot)$ *(pois ambos têem dimensão* $\underline{m}$*).*

5. *Na situação acima, se*
$$\beta_m \doteq \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m\}$$
é uma base canônica de $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$*, temos que para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$*, existe uma função* $f_i : E \to \mathbb{R}^m$ *tal que*
$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a, b)\,, \tag{5.26}$$
ou seja,
$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \cdot \vec{u}_i\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a, b)\,. \tag{5.27}$$
Para cada $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$*, a função* $\underline{f_i}$ *será denominada* **i-ésima componente da função** $\underline{f}$.

6. *Sejam* $x_o \in E$*, onde* $\underline{E}$ *subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *uma função vetorial, cujas funções componentes são* $f_i : E \to \mathbb{R}$*, para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$.

   Afirmamos que a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $\underline{x_o}$ *se, e somente se, para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$*, a função* $\underline{f_i}$ *é diferenciável em* $\underline{x_o}$.

   Além disso, temos que
$$f'(x_o) = (f_1{}'(x_o), f_2{}'(x_o), \cdots, f_m{}'(x_o))\,. \tag{5.28}$$
   De fato, a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $\underline{x_o}$ *se, e somente se, existe* $y \in \mathbb{R}^m$*, de modo que*
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o) - y\, h}{h} = 0\,. \tag{5.29}$$
   Para $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$*, denotemos por* $y_i \in \mathbb{R}$*, de modo que*
$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)\,.$$
   Logo (5.29) ocorrerá se, e somente se, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ *tivermos*
$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_o + h) - f_i(x_o) - y_i\, h}{h} = 0\,, \tag{5.30}$$
   ou seja, se, e somente se, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ *a função* $\underline{f_i}$ *for diferenciável em* $\underline{x_o}$ *e*
$$y_i = f_i{}'(x_o)\,,$$
   como afirmamos acima.

7. *Na situação acima, se olharmos* $\underline{f'(x)}$ *como uma transformação linear de* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *em* $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$*, isto é,*
$$f'(x) \in L(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m),$$
a expressão (5.28) *acima, nos diz que a matriz da transformação linear*
$$h \mapsto f'(x_o)\, h,$$
em relação às bases canônicas
$$\beta_1 \doteq \{1\} \quad e \quad \beta_2 \doteq \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m\}$$
de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$*, respectivamente, será dada por*
$$[f'(x_o)]_{\beta_1,\beta_2} = \begin{pmatrix} f_1'(x_o) \\ \vdots \\ f_m'(x_o) \end{pmatrix}. \tag{5.31}$$

A caracterização (5.25) pode ser estendida para funções que têm várias variáveis reais, a valores reais, ou seja, temos a:

Definição 5.2.2 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *aberto em* $\mathbb{R}^n$*,* $x_o \in E$ *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **diferenciável em** $\underline{x_o}$*, se existir* $y \in \mathbb{R}^n$ *de modo que*
$$\lim_{h \to \vec{O}} \frac{f(x_o + h) - f(x_o) - y \bullet h}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0, \tag{5.32}$$
onde $\bullet$ *denota o produto interno usual de* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*.*

Neste caso diremos que o vetor $\underline{y}$ *será dito* **derivada da função** $\underline{f}$ **no ponto** $\underline{x_o}$*, que será indicada por* $\underline{f'(x_o)}$*, ou seja*
$$f'(x_o) \doteq y. \tag{5.33}$$

Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **diferenciável em** $\underline{E}$ *se ela a função* $\underline{f}$ *for diferenciável em cada ponto de* $\underline{E}$*.*

Com isto podemos considerar a função $f' : E \to \mathbb{R}$*, denominada* **função derivada associada à função** $\underline{f}$*.*

Observação 5.2.3

1. *Observemos que (5.32) é equivalente a*
$$\lim_{h \to \vec{O}} \frac{|f(x_o + h) - f(x_o) - y \bullet h|}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0. \tag{5.34}$$

2. *A Definição* (5.2.2) *acima, pode ser reescrita da seguinte maneira:*

A função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $x_o \in E$*, se existir* $y \in \mathbb{R}^n$*, de modo que dado* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $\delta = \delta(\varepsilon, x_o, f) > 0$*, de modo que, se*
$$h \in \mathbb{R}^n, \quad \textit{satisfaz} \quad 0 < \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta, \quad \textit{teremos} \quad x_o + h \in E$$
e
$$\left| \frac{f(x_o + h) - f(x_o) - y \bullet h}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \right| < \varepsilon. \tag{5.35}$$

3. *Observemos que (5.32) é equivalente a :*

$$\lim_{h \to \vec{O}} \frac{|r(h)|}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0\,, \tag{5.36}$$

onde

$$r(h) \doteq f(x_o + h) - f(x_o) - y \bullet h\,, \quad \textit{para} \quad h \in \mathbb{R}^n\,, \tag{5.37}$$

satisfazendo

$$\|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta\,.$$

4. *Notemos também que, no caso acima, podemos interpretar* $\underline{f'(x_o)}$ *como sendo uma transformação linear do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *no espaço vetorial real* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$*, a saber,*

$$h \mapsto \underbrace{f'(x_o)\, h}_{=y \bullet h}\,,$$

já que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *é isomorfo a* $(L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}), +, \cdot)$ *(pois ambos têem dimensão* $\underline{n}$*).*

Podemos agora considerar a situação geral:

Definição 5.2.3 *Sejam* $\underline{E}$ *subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$*,* $x_o \in E$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^m$*.*

Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **diferenciável em $\underline{x_o}$***, se existir uma transformação linear* $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$*, de modo que*

$$\lim_{h \to \vec{O}} \frac{\|f(x_o + h) - f(x_o) - A(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0\,. \tag{5.38}$$

Neste caso definimos a **derivada da função $\underline{f}$ no ponto $\underline{x_o}$***, que será indicada por* $\underline{f'(x_o)}$*, como sendo*

$$f'(x_o) \doteq A\,. \tag{5.39}$$

Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **diferenciável em $\underline{E}$** *se a função* $\underline{f}$ *for diferenciável em cada ponto de* $\underline{E}$*.*

Com isto podemos considerar a função $f' : E \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$*, que a cada* $x \in E$*, associará* $f'(x) \in L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$*, que será dita* **função derivada associada à função $\underline{f}$***.*

Observação 5.2.4

1. *Observemos que, como o conjunto* $\underline{E}$ *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $x_o \in E$*, podemos encontrar* $\eta > 0$*, de modo que*

$$\mathcal{B}(x_o; \eta) \subseteq E\,.$$

Assim, a função $\underline{f}$ *será diferenciável em* $\underline{x_o}$*, se existir uma transformação linear* $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$*, de modo que, dado* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $\delta \in (0, \eta)$ *tal que, se*

$$0 < \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta\,, \quad \textit{deveremos ter} \quad \frac{\|f(x_o + h) - f(x_o) - A(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} < \varepsilon\,. \tag{5.40}$$

2. *Notemos que em (5.38) (ou (5.40)) a norma do numerador é a norma usual de* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *e a norma do denominador é a norma usual de* $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$.

3. *Na situação acima consideremos, para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, *a função* $f_i : E \to \mathbb{R}$, *a* i*-ésima componente da função* $\underline{f}$.

   Afirmamos que, a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $\underline{x_o}$ *se, e somente se, para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, *a função* $\underline{f_i}$ *é diferenciável em* $\underline{x_o}$.

   Além disso
$$f'(x_o)(h) = \begin{pmatrix} f_1'(x_o)(h) \\ \vdots \\ f_m'(x_o)(h) \end{pmatrix}, \quad \textit{para cada} \quad h \in \mathbb{R}^n. \tag{5.41}$$

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

O resultado a seguir irá garantir que se a função for diferenciável em $x_o \in E$, então a derivada da função em $\underline{x_o}$, estará bem definida, isto é,

Proposição 5.2.1 *Se (5.38) ocorrer com* $A, B \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ *então deveremos ter*
$$B = A.$$

Demonstração:

Seja
$$C \doteq A - B.$$

Então, para
$$h \in \mathbb{R}^n, \quad \text{com} \quad h \neq \vec{O}, \quad \text{de modo que} \quad x_o + h \in A,$$
teremos
$$\begin{aligned} \|C(h)\|_{\mathbb{R}^m} &= \|(A - B)(h)\|_{\mathbb{R}^m} \\ &= \| - \{[f(x_o + h) - f(x_o)] - A(h)\} + \{[f(x_o + h) - f(x_o)] - B(h)\} \|_{\mathbb{R}^m} \\ &\leq \|f(x_o + h) - f(x_o) - A(h)\|_{\mathbb{R}^m} + \|f(x_o + h) - f(x_o) - B(h)\|_{\mathbb{R}^m}. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Como função $\underline{f}$ é diferenciável em x_o, de (5.42), segue que
$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\|C(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \\ &\overset{(5.42)}{\leq} \frac{\|f(x_o + h) - f(x_o) - A(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} + \frac{\|f(x_o + h) - f(x_o) - B(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \to 0, \end{aligned} \tag{5.43}$$
quando $h \to \vec{O}$, ou seja,
$$\lim_{h \to \vec{O}} \frac{\|C(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0 \qquad ,$$
$$\text{em particular,} \quad \lim_{t \to 0} \frac{\|C(tx)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|tx\|_{\mathbb{R}^n}} = 0, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\vec{O}\right\}. \tag{5.44}$$

Notemos que para $t \in \mathbb{R}^*$ e $x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\vec{O}\right\}$ teremos

$$\frac{\|C(t\,x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|t\,x\|_{\mathbb{R}^n}} \overset{C \text{ é linear}}{=} \frac{\|t\,C(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|t\,x\|_{\mathbb{R}^n}}$$
$$\overset{\text{propriedade de norma}}{=} \frac{|t|\,\|C(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{|t|\,\|x\|_{\mathbb{R}^n}}$$
$$\overset{t\neq 0}{=} \frac{\|C(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}}\,.$$

Isto, juntamente com (5.44), implicarão que

$$\frac{\|C(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\vec{O}\right\}.$$

Como $x \neq \vec{O}$, segue que

$$C(x) = \vec{O}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\vec{O}\right\},$$
$$\text{isto é,} \quad C(x) = \vec{O}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}^n\,,$$

ou seja,

$$A(x) - B(x) = \vec{O}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}^n\,,$$

mostrando que

$$B = A\,,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 5.2.5

1. *A expressão (5.38) na Definição (5.2.3) acima, pode ser reescrita da seguinte forma:*

   Se a função $\underline{f}$ for diferenciável em $x_o \in E$, então a função

$$r : V \doteq B\left(\vec{O};\eta\right) \setminus \left\{\vec{O}\right\} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\,,$$

   dada por

$$r(h) \doteq f(x_o + h) - f(x_o) - A(h)\,, \quad \textit{para cada} \quad h \in V\,, \tag{5.45}$$

   deverá satisfazer

$$\lim_{h\to\vec{O}} \frac{\|r(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0\,. \tag{5.46}$$

2. *Notemos que se a função $\underline{f}$ é diferenciável em $x_o \in E$, segue que ela será uma função contínua em $\underline{x_o}$.*

   De fato, pois

$$\lim_{h\to\vec{O}} [f(x_o + h) - f(x_o)] \overset{(5.45),\, f'(x_o)=A}{=} \lim_{h\to\vec{O}} [f'(x_o)h + r(h)]\,.$$

Da Proposição (5.1.1) temos que a função $\underline{f'(x_o)}$ *é contínua (pois* $f'(x_o) \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$*), logo será contínua em* $\underline{\vec{O}}$.

Logo, segue que

$$\lim_{h \to \vec{O}} f'(x_o)h = 0 .$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\lim_{h \to \vec{O}} \|r(h)\|_{\mathbb{R}^m} &= \lim_{h \to \vec{O}} \left[\frac{\|r(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \|h\|_{\mathbb{R}^n} \right] \\ &= \underbrace{\lim_{h \to \vec{O}} \frac{\|r(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}}_{\stackrel{(5.46)}{=} 0} \cdot \underbrace{\lim_{h \to \vec{O}} \|h\|_{\mathbb{R}^n}}_{=0} = 0 ,\end{aligned}$$

ou seja, $\displaystyle\lim_{h \to \vec{O}} [f(x_o + h) - f(x_o)] = 0$,

mostrando que a função $\underline{f}$ *é contínua em* $x_o \in E$.

3. *Daqui em diante omitiremos os índices nas normas dos espaços euclideanos que aparecerão, ou seja, escreveremos*

$$\|\cdot\| \doteq \|\cdot\|_{\mathbb{R}^k} .$$

Em cada caso o leitor é convidado a verificar que a norma que estaremos utilizando é a norma usual do correspondente espaço euclideano.

A seguir exibiremos um resultado muito importante, a saber:

Proposição 5.2.2 *Seja* $A \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.
Então a função $\underline{A}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}^n$ *e*

$$A'(x_o) = A , \quad \textit{para cada} \quad x_o \in \mathbb{R}^n . \tag{5.47}$$

<u>**Demonstração:**</u>
Notemos que, para cada $x_o \in \mathbb{R}$ fixado, teremos:

$$\begin{aligned}\lim_{h \to \vec{O}} \frac{\|A(x_o + h) - A(x_o) - A(h)\|}{\|h\|} &\stackrel{A \text{ é linear}}{=} \lim_{h \to \vec{O}} \frac{\|\overbrace{A(x_o) + A(h) - A(x_o) - A(h)}^{=0}\|}{\|h\|} \\ &= 0 ,\end{aligned}$$

ou seja, a função $\underline{A}$ é diferenciável em $\underline{x_o}$, para $x_o \in \mathbb{R}^n$ arbitrário e

$$A'(x_o) = A .$$

Portanto a função $\underline{A}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e vale (5.47), terminando a demonstração do resultado.

□

Valem as propriedades básicas de deferenciação, a saber:

Proposição 5.2.3 *Sejam $\underline{E}$ subsconjunto aberto de* $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, $x_o \in \mathbb{R}^n$, $f, g : E \to \mathbb{R}^m$ *funções diferenciáveis em* $\underline{x_o}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Então

1. *As funções* $(f \pm g)$ *serão diferenciáveis em* $\underline{x_o}$ *e, além disso, teremos*
$$(f \pm g)'(x_o) = f\,'(x_o) \pm g\,'(x_o)\,. \tag{5.48}$$
2. *A função* (λf) *será diferenciável em* $\underline{x_o}$ *e, além disso, teremos*
$$(\lambda f)'(x_o) = \lambda f\,'(x_o)\,. \tag{5.49}$$

Demonstração:

As demonstrações dos itens acima serão deixadas como exercício para o leitor.

□

Temos também o seguinte importante resultado, conhecido como **regra da cadeia**:

Teorema 5.2.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *subsconjuntos abertos de* $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ *e* $(\mathbb{R}^m, d_{\mathbb{R}^m})$, *respectivamente,* $x_o \in \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$ *função diferenciável em* $\underline{x_o}$, $y_o \doteq f(x_o) \in U$ *e* $g : U \to \mathbb{R}^j$ *função diferenciável em* $\underline{y_o}$.

Então a função $(g \circ f)$ *será diferenciável em* x_o *e além disso*
$$(g \circ f)'(x_o) = g\,'[f(x_o)] \circ f\,'(x_o)\,. \tag{5.50}$$

Demonstração:

Como $x_o \in E$, $y_o \in U$, estes são subconjuntos abertos de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ e $(\mathbb{R}^m, d_{\mathbb{R}^m})$, respectivamente, e a função $\underline{f}$ é contínua em $\underline{x_o}$, segue que existem $\eta_1, \eta_2 > 0$, de modo que
$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(x_o; \eta_1) \subseteq E$$
e se
$$x \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(x_o; \eta_1)\,, \quad \text{teremos} \quad f(x) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}(y_o; \eta_2) \subseteq U\,, \tag{5.51}$$
onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^l}(z_o; \eta)$, denota a bola aberta de centro em $z_o \in \mathbb{R}^l$ e raio $\underline{\eta}$, em $(\mathbb{R}^l, d_{\mathbb{R}^l})$.

Consideremos as funções
$$u : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(x_o; \eta_1) \to \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad v : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}(y_o; \eta_2) \to \mathbb{R}^j\,,$$
dadas por
$$u(h) \doteq f(x_o + h) - f(x_o) - f\,'(x_o)\,h\,, \quad \text{para cada} \quad h \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(x_o; \eta_1)\,, \tag{5.52}$$
$$v(k) \doteq g(y_o + k) - g(y_o) - g\,'(y_o)\,k\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}(y_o; \eta_2)\,. \tag{5.53}$$

Como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são diferenciáveis em $\underline{x_o}$ e $\underline{y_o}$, respectivamente, segue que
$$\lim_{h \to \vec{O}} \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \to \vec{O}} \frac{\|v(k)\|}{\|k\|} = 0\,. \tag{5.54}$$

Logo, dado $h \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(\vec{O}\,;\eta_1)$, consideremos

$$k \doteq f(\underbrace{x_o + h}_{\in \mathcal{B}(x_o\,;\eta_1)}) - \underbrace{f(x_o)}_{=y_o} \overset{(5.51)}{\in} \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}\left(\vec{O}\,;\eta_2\right), \tag{5.55}$$

em particular,

$$f(x_o + h) = f(x_o) + k = y_o + k\,. \tag{5.56}$$

Então

$$\begin{aligned}
\|k\| &\overset{(5.55)}{=} \|f(x_o + h) - f(x_o)\| \\
&\overset{(5.52)}{=} \|f\,'(x_o)h - u(h)\| \\
&\leq \|f\,'(x_o)h\| + \|u(h)\| \\
&\overset{f\,'(x_o)\text{ é transf. linear}}{\leq} \|f\,'(x_o)\|_L\,\|h\| + \frac{\|u(h)\|}{\|h\|}\,\|h\| \\
&= \left[\|f\,'(x_o)\|_L + \frac{\|u(h)\|}{\|h\|}\right]\|h\|\,.
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x_o + h) - (g \circ f)(x_o) - [g\,'[f(x_o)] \circ f\,'(x_o)]\,(h) &= g[\overbrace{f(x_o + h)}^{\overset{(5.55)}{=} y_o + k}] - g[\overbrace{f(x_o)}^{=y_o}] \\
&\quad - g\,'[\overbrace{f(x_o)}^{=y_o}][f\,'(x_o)h] \\
&= \underbrace{g(y_o + k) - g(y_o)}_{\overset{(5.53)}{=} v(k) + g\,'(y_o)k} - g\,'(y_o)[f'(x_o)h] \\
&= v(k) + g\,'(y_o)k - g\,'(y_o)\,[f\,'(x_o)h] \\
&\overset{g\,'(y_o)\text{ é linear}}{=} v(k) + g\,'(y_o)[\underbrace{k}_{\overset{(5.55)}{=} f(x_o+h) - f(x_o)} - f\,'(x_o)h] \\
&= v(k) + g\,'(y_o)[\underbrace{f(x_o + h) - f(x_o) - f\,'(x_o)h}_{\overset{(5.52)}{=} u(h)}] \\
&= v(k) + g\,'(y_o)[u(h)]\,.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{\|(g\circ f)(x_o+h)-(g\circ f)(x_o)-g'(y_o)[f'(x_o)\,h]\|}{\|h\|} &= \frac{\overbrace{\|v(k)+g'(y_o)[u(h)]\|}^{\le\|v(k)\|+\|g'(y_o)[u(h)]\|}}{\|h\|} \\
&\le \frac{\|v(k)\|}{\|h\|}+\frac{\overbrace{\|g'(y_o)[u(h)]\|}^{\overset{g'(y_o)\text{ é transf. linear}}{\le}\|g'(y_o)\|_L\|u(h)\|}}{\|h\|} \\
&\le \frac{\|v(k)\|}{\|k\|}\frac{\overbrace{\|k\|}^{\overset{(5.57)}{\le}\left[\|f'(x_o)\|_L+\frac{\|u(h)\|}{\|h\|}\right]\|h\|}}{\|h\|}+\|g'(y_o)\|_L\frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \\
&\le \frac{\|v(k)\|}{\|k\|}\left\{\left[\|f'(x_o)\|_L+\frac{\|u(h)\|}{\|h\|}\right]\|h\|\right\}\frac{1}{\|h\|}+\|g'(y_o)\|_L\frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \\
&= \frac{\|v(k)\|}{\|k\|}\left\{\|f'(x_o)\|_L+\frac{\|u(h)\|}{\|h\|}\right\}+\|g'(y_o)\|_L\frac{\|u(h)\|}{\|h\|}\,.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Notemos que, da diferenciabilidade da função $\underline{f}$ em $\underline{x_o}$, se

$$h\to\vec{O}\,,\quad \text{em}\quad (\mathbb{R}^n\,,d_{\mathbb{R}^n})\,,\qquad \text{segue que}\quad \frac{\|u(h)\|}{\|h\|}\to 0\,,\quad \text{em}\quad (\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})\,.$$

Logo, de (5.57), segue que

$$k\to\vec{O}\,,\quad \text{em}\quad (\mathbb{R}^m\,,d_{\mathbb{R}^m})\,.$$

Como isto, da diferenciabilidade da função $\underline{g}$ em $\underline{y_o}$, como

$$k\to\vec{O}\,,\quad \text{em}\quad (\mathbb{R}^m\,,d_{\mathbb{R}^m})\,,\quad \text{deveremos ter}\quad \frac{\|v(k)\|}{\|k\|}\to 0\,,\quad \text{em}\quad (\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})\,.$$

Portanto, fazendo $h\to\vec{O}$, em $(\mathbb{R}^n\,,d_{\mathbb{R}^n})$, das conclusões acima e de (5.58), segue que

$$\frac{\|(g\circ f)(x_o+h)-(g\circ f)(x_o)-g'(y_o)[f'(x_o)\,h]\|}{\|h\|}\to 0,$$

ou seja, a função $(g\circ f)$ é diferenciável em $\underline{x_o}$ e, além disso,

$$(g\circ f)'(x_o)=g'[f(x_o)]\circ f'(x_o)\,,$$

ou seja, vale (5.50), completando a demonstração do resultado.

□

5.3 Derivadas parciais

Nesta seção estudaremos algumas propriedades importantes de funções diferenciáveis, definidas em subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e tomando valores em $\mathbb{R}^m$.

Antes porém introduziremos alguns conceitos que serão utilizados no estudo acima.

Para isto sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ subsconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $x_o \in E$ e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função.

Seja

$$\beta \doteq \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

a base canônica de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Com isto podemos introduzir a:

Definição 5.3.1 *Seja* $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *fixado.*

Se existir o limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_o + t \cdot \vec{e}_j) - f(x_o)}{t},$$

diremos que o mesmo é a **derivada parcial de 1.a ordem da função f, em relação a x_j, no ponto x_o** *e este será indicado por* $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)$ *ou* $\partial_{x_j} f(x_o)$*, isto é,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f(x_o + t \cdot \vec{e}_j) - f(x_o)}{t}. \tag{5.59}$$

Observação 5.3.1

1. *Podem ocorrer situações em que uma função possui todas as derivadas parciais de 1.a ordem em um ponto, mas ela* **não** *ser diferenciável nesse ponto.*

   Na verdade, podem existir todas as derivadas parciais de 1.a ordem de uma função em um ponto do seu domínio e ela **não** *ser, nem mesmo, contínua nesse ponto, como mostra o seguinte exemplo:*

   Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y) \doteq \begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{x^2 + y^2}, & \text{para} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \tag{5.60}$$

   Observemos que a função f **não** *é contínua em* (x_o, y_o).

   De fato, pois

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} f(t, 0) &\overset{t \neq 0 \text{ e } (5.60)}{=} \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} f\left(t^2, t\right) &\overset{t \neq 0 \text{ e } (5.60)}{=} \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cdot t^2}{\left(t^2\right)^2 + \left(t^2\right)^2} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{t^4}{2\,t^4} = \frac{1}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

   Logo **não** *existe o limite*

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y),$$

*em particular, a função $\underline{f}$ **não** é contínua em $(x_o\,,y_o) \doteq (0,0)$.*

*Portanto, pela Observação (5.2.5) item 2., segue que a função $\underline{f}$ **não** poderá ser diferenciável em $X_o \doteq (x_o\,,y_o) = (0\,,0)$.*

Notemos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\,(X_o + t\cdot\vec{e}_1) - f(X_o)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{f[(0\,,0)+t(1\,,0)]}^{=f(t,0)\overset{t\neq 0\ e\ (5.60)}{=}\frac{t\cdot 0}{t^2+0^2}=0} - \overbrace{f(0\,,0)}^{\overset{(5.60)}{=}0}}{t} = 0\,, \tag{5.61}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(X_o + t\cdot\vec{e}_2) - f(X_o)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{f[(0\,,0)+t(0\,,1)]}^{=f(0,t)\overset{t\neq 0\ e\ (5.60)}{=}\frac{0\cdot t}{0^2+t^2}0} - \overbrace{f(0\,,0)}^{\overset{(5.60)}{=}0}}{t} = 0\,, \tag{5.62}$$

ou seja, existem as derivadas parciais de 1.a ordem

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_o) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0\,,0) \overset{(5.61)}{=} 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_o) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0\,,0) \overset{(5.62)}{=} 0\,,$$

*mas a função $\underline{f}$ **não** será diferenciável em $X_o = (0\,,0)$.*

2. *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $x_o \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f\,,g : E \to \mathbb{R}$ são funções tais que, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots n\}$, existem as derivadas parciais de 1.a ordem $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(x_o)$.*

   Então, existirão as derivadas parciais de 1.a ordem $\dfrac{\partial(f\pm g)}{\partial x_j}(x_o)$ e $\dfrac{\partial(\lambda\, f)}{\partial x_j}(x_o)$ e além disso

$$\frac{\partial(f\pm g)}{\partial x_j}(x_o) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) \pm \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_o)\,, \tag{5.63}$$

$$\frac{\partial(\lambda\, f)}{\partial x_j}(x_o) = \lambda\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)\,. \tag{5.64}$$

   Deixaremos a demonstração destes fatos como exercício para o leitor.

3. *Como veremos mais adiante, se a função $\underline{f}$ for diferenciável em $\underline{x_o}$, então existirão todas derivadas parciais de 1.a ordem da função $\underline{f}$ no ponto $\underline{x_o}$ e, além disso, poderemos obtê-las utlizando-se a derivada da função $\underline{f}$ no ponto $\underline{x_o}$.*

4. *Consideremos, como acima, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $x_o \in E$ e $f : E \to \mathbb{R}^m$ uma função.*

   Sejam

$$\beta_n \doteq \{\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\cdots,\vec{e}_n\} \quad e \quad \beta_m \doteq \{\vec{u}_1\,,\vec{u}_2\,,\cdots,\vec{u}_m\}$$

as bases canônicas dos espaços vetoriais reais $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$, *respectivamente.*

Para cada $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, *definamos a função* $f_i : E \to \mathbb{R}$ *(a* i*-ésima componete da função* $\underline{f}$*) onde:*

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \cdot \vec{u}_i, \quad \text{para cada} \quad x \in E.$$

Notemos que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, *teremos*

$$f_i(x) = f(x) \bullet \vec{u}_i,$$

onde $\underline{\bullet}$ *denota o produto interno usual de* $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$.

5. *Observemos também que, para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ *e para cada* $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *se existir o limite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_i(x_o + t \cdot \vec{e}_j) - f_i(x_o)}{t},$$

este será a derivada parcial de 1.a ordem, da i*-ésima componente da função* $\underline{f}$, *em relação* $\underline{x_j}$, *no ponto* $\underline{x_o}$, *isto é,*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x_o + t \cdot \vec{e}_j) - f_i(x_o)}{t}. \tag{5.65}$$

Mantendo a notação acima, temos o:

Teorema 5.3.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *subsconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$, $x_o \in E$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *uma função diferenciável em* x_o.

Então, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ *e* $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *existe a derivada parcial de 1.a ordem* $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)$ *e, além disso, teremos:*

$$f'(x_o)\, \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o) \cdot \vec{u}_i. \tag{5.66}$$

Demonstração:

Como a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\underline{x_o}$, da Observação (5.2.4) item 3., segue que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, as funções componentes $\underline{f_i}$ são diferenciáveis em $\underline{x_o}$, ou seja, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, ou seja, teremos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_o + h) - f_i(x_o) - f_i{}'(x_o)\, h}{\|h\|} = 0,$$

que, fazendo

$$k \doteq \frac{1}{t} \cdot h \in \mathbb{R}^n, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

será equivalente a :

$$\lim_{t\to 0}\frac{f_i(x_o+t\cdot k)-f_i(x_o)-f_i{}'(x_o)(t\cdot k)}{\underbrace{\|t\cdot k\|}_{\overset{\text{propriedade de norma}}{=}|t|\,\|k\|}}=0\,,\quad \text{onde}\quad k\in\mathbb{R}^n\setminus\left\{\vec{O}\right\}. \tag{5.67}$$

Com isto teremos (escolhendo $k \doteq \vec{e}_j$) existe o limite:

$$\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{f_i(x_o+t\cdot\vec{e}_j)-f_i(x_o)}{t}}_{=f_i{}'\,\vec{e}_j}=\lim_{t\to 0}\frac{f_i(x_o+t\cdot\vec{e}_j)-f_i(x_o)-f_i{}'(x_o)(t\cdot\vec{e}_j)+f_i{}'(x_o)(t\cdot\vec{e}_j)}{t}$$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{t\to 0}\frac{f_i(x_o+t\vec{e}_j)-f_i(x_o)-f_i{}'(x_o)(t\cdot\vec{e}_j)}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{f_i{}'(x_o)(t\cdot\vec{e}_j)}^{f_i{}'(x_o)\text{ é linear }\,=\,t\cdot f_i{}'(x_o)(\vec{e}_j)}}{t}\\
&\overset{k\doteq\vec{e}_j\text{ em (5.67)}}{=}0+\lim_{t\to 0}\frac{t\,[f_i{}'(x_o)\,\vec{e}_j]}{t}\\
&=f_i{}'(x_o)\,\vec{e}_j\,,
\end{aligned}$$

ou seja, existe a derivada parcial de 1.a ordem $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)$ e, além disso, vale a seguinte igualdade:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)=f_i{}'(x_o)\,\vec{e}_j\,,\quad \text{para cada}\quad i\in\{1,2,\cdots,m\}\ \text{ e }\ j\in\{1,2,\cdots,n\}. \tag{5.68}$$

Como

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\cdot\vec{u}_i\,,\quad \text{para cada}\quad x\in E$$

e existem as derivadas parciais de cada parcela, da Proposição (5.2.3) itens 1. e 2., segue que:

$$\begin{aligned}
f\,'(x_o)\,\vec{e}_j &\overset{f(x)=\sum_{i=1}^{m}f_i(x)\,\vec{u}_i}{=}\sum_{i=1}^{n}[f_i{}'(x)\,\vec{e}_j]\cdot\vec{u}_i\\
&\overset{(5.68)}{=}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)\cdot\vec{u}_i\,,
\end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 5.3.2

1. *Na situação acima, consideremos*

$$\beta_n\doteq\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\}\qquad e\qquad \beta_m\doteq\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\cdots,\vec{u}_m\}$$

as bases canônicas dos espaços vetoriais reais $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ *e* $(\mathbb{R}^m,+,\cdot)$*, respectivamente.*

Afirmamos que a matriz da transformação linear $f'(x_o)$*, em relação às bases* $\underline{\beta_n}$ *e* $\underline{\beta_m}$*, que será denotada por* $[f'(x_o)]_{\beta_n,\beta_m}$*, será dada por:*

$$[f'(x_o)]_{\beta_n,\beta_m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_o) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_o) \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}). \tag{5.69}$$

De fato, do Teorema (5.3.1) acima temos que, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$

$$f'(x_o)\,\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)\cdot \vec{u}_i\,,$$

ou seja, a j*-ésima coluna da matriz* $[f'(x_o)]_{\beta_n,\beta_m}$ *será dada por:*

$$\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_o) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_o) \end{matrix}\,,$$

ou seja, a matriz $[f'(x_o)]_{\beta_n,\beta_m}$ *será dada por (5.69).*

2. *Em particular, se*

$$h = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n\,, \tag{5.70}$$

teremos

$$\begin{aligned} [f'(x_o)\,h]_{\beta_m} &\overset{\text{ÁLgebra Linear}}{=} [f'(x_o)]_{\beta_n\beta_m}\cdot[h]_{\beta_m} \\ &\overset{(5.69)\ e\ (5.70)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_o) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_o) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_o)\,h_j\,, \cdots, \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_o)\,h_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)\,h_j\right]\cdot\vec{u}_i. \end{aligned} \tag{5.71}$$

3. *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$*,* $\gamma : [a, b] \to E$ *uma curva parametrizada diferenciável e* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* E*.*

   Consideremos

$$\beta_n \doteq \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

a base canônica do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *e, para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *denotemos por* $\gamma_i : [a, b] \to \mathbb{R}$, *as funções componentes associadas a função* $\underline{\gamma}$, *isto é,*

$$\gamma(t) \doteq (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \cdots, \gamma_n(t)) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(t) \cdot \vec{e}_i, \quad \textit{para cada} \quad t \in [a, b]. \tag{5.72}$$

Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(t) \doteq f[\gamma(t)], \quad \textit{para cada} \quad t \in [a, b]. \tag{5.73}$$

Do Teorema (5.2.1) (isto é, da regra da cadeia), segue que a função $\underline{g}$ *é diferenciável em* $[a, b]$ *e*

$$g'(t) = f'[\gamma(t)] \circ [\gamma'(t)], \quad \textit{para cada} \quad t \in [a, b]. \tag{5.74}$$

Como

$$\gamma'(t) \in L(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n) \quad \textit{e} \quad f'[\gamma(t)] \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}),$$

segue, de (5.74), *que*

$$g'(t) \in L(\mathbb{R}; \mathbb{R}),$$

para cada $t \in [a, b]$.

Notemos que o espaço vetorial real $(L(\mathbb{R}; \mathbb{R}), +, \cdot)$ *é isomorfo ao espaço vetorial real* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *(pois ambos têem dimensão* $\underline{1}$*), assim podemos identificar* $g'(t)$ *com um número real.*

4. *Na situação acima, se*

$$\beta_1 \doteq \{1\} \quad \textit{e} \quad \beta_n \doteq \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

são as bases canônicas dos espaços vetoriais reais $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, *respectivamente, temos que a matriz da transformação linear* $\gamma'(t) \in L(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, *em relação às bases* $\underline{\beta_1}$ *e* $\underline{\beta_n}$, *será uma matriz coluna* $n \times 1$ *onde, a* $\underline{i}$*-ésima linha da mesma, será dada por* $\underline{\gamma_i'(t)}$, *ou seja*

$$[\gamma'(t)]_{\beta_1, \beta_n} \overset{(5.72))}{=} \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}, \quad \textit{para cada} \quad t \in [a, b]. \tag{5.75}$$

Por outro lado, para cada $x \in E$, *a matriz da transformação linear* $f'(x) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, *em relação às bases* $\underline{\beta_n}$ *e* $\underline{\beta_1}$, *será uma matriz linha* $1 \times n$, *dada por (ver item 1. desta Observação)*

$$[f'(x)]_{\beta_n, \beta_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}, \quad \textit{para cada} \quad x \in E. \tag{5.76}$$

Logo a matriz da transformação linear $g'(t)$*, em relação à base* $\underline{\beta_1}$*, será (via Álgebra Linear) dada por:*

$$\begin{aligned}
[g'(t)]_{\beta_1,\beta_1} &= [f'[\gamma(t)]\,[\gamma'(t)]]_{\beta_1,\beta_1} \\
&\overset{\text{Álg. Linear}}{=} [f'[\gamma(t)]]_{\beta_n,\beta_1} \cdot [\gamma'(t)]_{\beta_1,\beta_n} \\
&\overset{(5.75)\ e\ (5.76)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}[\gamma(t)] & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}[\gamma(t)] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}[\gamma(t)]\,\gamma_i'(t)\,,
\end{aligned} \tag{5.77}$$

para cada $t \in [a\,,b]$.

Podemos agora introduzir a :

Definição 5.3.2 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto em* $\mathbb{R}^n$*,* $x_o \in E$ *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função que possui todas as derivadas parciais em* $\underline{x_o}$*.*

Definimos o **vetor gradiente da função $\underline{f}$ em $\underline{x_o}$**, *que será indicado por* $\nabla f(x_o)$*, como sendo*

$$\nabla f(x_o) \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_o)\,, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_o)\,, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_o) \right) \in \mathbb{R}^n\,, \tag{5.78}$$

ou ainda:

$$\nabla f(x_o) \doteq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) \cdot \vec{e}_i\,, \tag{5.79}$$

onde $\beta_n \doteq \{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \cdots, \vec{e}_n\}$ *é a base canônica do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n\,, +\,, \cdot)$.

Observação 5.3.3

1. *Voltando ao item 4. da Observação (5.3.2), notamos que se*

$$x_o \doteq \gamma(t_o)\,,$$

para algum $t_o \in [a\,,b]$*, como*

$$\gamma'(t_o) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(t_o) \cdot \vec{e}_i\,,$$

considerando-se a função $g \doteq f \circ \gamma : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *(como em (5.73)), de (5.77) e (5.78), segue que*

$$\begin{aligned}
g'(t_o) &\overset{(5.77)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}[\gamma(t_o)]\ \gamma_i'(t_o) \\
&\overset{(5.78)}{=} \nabla f[\gamma(t_o)] \bullet \gamma'(t_o)\,.
\end{aligned} \tag{5.80}$$

2. *Notemos que se* $x_o \in E$, *como* $\underline{E}$ *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$, *podemos encontrar* $\delta > 0$, *de modo que*
$$\mathcal{B}(x_o\,;\delta) \subseteq E\,.$$
Logo, se $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *é um vetor unitário (isto é,* $\|\vec{u}\| = 1$*) e considerarmos a curva parametrizada* $\gamma : (-\delta\,,\delta) \to E$, *dada por*
$$\gamma(t) \doteq x_o + t\cdot\vec{u}\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in (-\delta\,,\delta)\,, \tag{5.81}$$
segue que a curva $\underline{\gamma}$ *será uma curva parametrizada diferenciável em* $\underline{E}$, *que satisfaz:*
$$\gamma(0) = x_o \quad \textit{e} \quad \gamma\,'(t) = \vec{u}\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in (-\delta\,,\delta)\,. \tag{5.82}$$
Logo, de (5.80) e (5.82), segue que
$$\begin{aligned} g'(0) &\overset{(5.80)}{=} \nabla f[\gamma(0)] \bullet \gamma\,'(0) \\ &\overset{(5.82)}{=} \nabla f(x_o) \bullet \vec{u}\,. \end{aligned} \tag{5.83}$$
Por outro lado, notemos que
$$\begin{aligned} g\,'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \\ &\overset{(5.73)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f[\gamma(t)] - f[\gamma(0)]}{t} \\ &\overset{(5.81)\ e\ (5.82)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(x_o + t\cdot\vec{u}) - f(x_o)}{t}\,. \end{aligned} \tag{5.84}$$
Com isto podemos introduzir a:

Definição 5.3.3 *Na situação acima, o limite (5.84) (quando existir) será denominado* **derivada direcional da função** $\underline{f}$ **em** $\underline{x_o}$**, na direção do vetor** $\underline{\vec{u}}$, *e indicada por* $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o)$, *isto é,*
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o) \doteq \lim_{t\to 0} \frac{f(x_o + t\cdot\vec{u}) - f(x_o)}{t}\,, \tag{5.85}$$
quando existir o limite em questão.

Observação 5.3.4

1. *Notemos que o vetor* $\underline{\vec{u}}$, *na Definição (5.3.3) acima, deve ser untiário.*

2. *Se existirem todas as derivadas parciais de 1.a ordem da função* $\underline{f}$ *em* $\underline{x_o}$, *de (5.83) e (5.84), segue que existirá a derivada direcional da função* $\underline{f}$ *em* $\underline{x_o}$, *na direção de qualquer vetor unitario* $\underline{\vec{u}}$, *e além disso*
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o) &\overset{(5.84)}{=} g\,'(0) \\ &\overset{(5.83)}{=} \nabla f(x_o) \bullet \vec{u}\,. \end{aligned} \tag{5.86}$$

3. *Na situação acima, se*

$$\nabla f(x_o) \neq \vec{O}$$

e considerarmos vetores unitários $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, *teremos que o número real*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o)$$

por (5.86), *atingirá seu valor máximo quando o vetor* $\underline{\vec{u}}$ *for multiplo positivo do vetor* $\nabla f(x_o)$, *mais precisamente se*

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}\,.$$

De fato, pois se $\theta \in [0\,,2\,\pi)$ *nos fornece o ângulo entre os vetores* $\underline{\vec{u}}$ *e* $\nabla f(x_o)$, *segue que*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o) &\overset{(5.86)}{=} \nabla f(x_o) \bullet \vec{u} \\
&\overset{\textit{propriedades de um p.i.}}{=} \|\nabla f(x_o)\| \,\underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1} \cos(\theta) \\
&= \|\nabla f(x_o)\|\,\cos(\theta)\,,
\end{aligned} \tag{5.87}$$

ou seja, (5.87) *nos diz que o número real* $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o)$ *atingirá seu valor máximo quando*

$$\theta = 0\,,$$

isto é, quando o vetor $\underline{\vec{u}}$ *for um múltiplo positivo do vetor* $\nabla f(x_o)$, *ou seja,*

$$\vec{u} = \lambda \cdot \nabla f(x_o)\,, \quad \textit{para algum} \quad \lambda > 0\,. \tag{5.88}$$

Como

$$\begin{aligned}
1 &= \|\vec{u}\| \\
&\overset{(5.88)}{=} \|\lambda \cdot \nabla f(x_o)\| \\
&= \lambda\,\overbrace{\|\nabla f(x_o)\|}^{\neq 0}\,, \\
\textit{segue que,} \quad \lambda &= \frac{1}{\|\nabla f(x_o)\|}\,, \\
\textit{que, de (5.88), implicará em:} \quad \vec{u} &= \frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}\,.
\end{aligned}$$

como afirmamos,

Neste caso $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o)$ *será igual a* $\|\nabla f(x_o)\|$.

4. *Por outro lado, o número real* $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o)$ *atingirá seu valor mínimo quando*

$$\vec{u} = -\frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|},$$

pois, neste caso

$$\theta = \pi$$

e assim $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o)$ *será igual a* $-\|\nabla f(x_o)\|$.

A verificação deste fato é semelhante ao que fizemos no item acima e sua elaboração será deixada como exercício para o leitor.

5. *Se* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *é um vetor unitário tal que*

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \vec{e}_i, \tag{5.89}$$

onde

$$\beta \doteq \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

é a base canônica do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *segue, de (5.79), que*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o) &\overset{(5.86)}{=} \nabla f(x_o) \bullet \vec{u} \\
&\overset{(5.88)}{=} \nabla f(x_o) \bullet \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \vec{e}_i\right) \\
&\overset{\textit{Prop. Produto interno}}{=} \sum_{i=1}^{n} u_i \left(\underbrace{\nabla f(x_o) \bullet \vec{e}_i}_{\overset{(5.79)}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o),
\end{aligned}$$

ou seja, a derivada direcional da função $\underline{f}$ *no ponto* $\underline{x_o}$*, na direção do vetor unitário* $\underline{\vec{u}}$*, pode ser obtida por meio das derivadas parciais de 1.a ordem da mesma no mesmo ponto, isto é:*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o)\, u_i. \tag{5.90}$$

A seguir enunciaremos alguns resultados importantes que são consequência da diferenciabilidade de uma função de várias variáveis reais, tomando valores num espaço euclideano.

Começaremos pela **Desigualdade do valor médio**, mais precisamente:

Teorema 5.3.2 *Suponhamos que a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *seja contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* (a, b).

Então existe $t_o \in (a, b)$ *tal que*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(t_o)\|\,(b - a). \tag{5.91}$$

Demonstração:

Seja

$$z \doteq f(b) - f(a) \in \mathbb{R}^n \tag{5.92}$$

e consideremos a função $\phi : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(t) \doteq z \bullet f(t)\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [a\,,b]\,. \tag{5.93}$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $[a\,,b]$ e diferenciável em $(a\,,b)$, segue que a função $\underline{\phi}$ será contínua em $[a\,,b]$ e diferenciável em $(a\,,b)$.

Notemos que, para mostrar a afirmação acima entamos usando o fato que a função

$$x \mapsto z \bullet x$$

é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^n$, cuja verificação será deixada como exercício para o leitor.

Logo pelo Teorema do Valor Médio para funções dem uma variável real, a valores reais (visto em Análise I), segue que existe $t_o \in (a\,,b)$, tal que

$$\phi(b) - \phi(a) = \phi\,'(t_o)\,(b-a)\,. \tag{5.94}$$

Mas, para cada $t \in [a\,,b]$, temos que

$$\phi\,'(t) = z \bullet f\,'(t)\,.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo (5.94), tornar-se-á

$$\phi(b) - \phi(a) = [z \bullet f\,'(t_o)]\;(b-a)\,. \tag{5.95}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}\phi(b) - \phi(a) &= z \bullet f(b) - z \bullet f(a)\\ &= z \bullet \Big[\underbrace{f(b) - f(a)}_{\overset{(5.92)}{=} z}\Big]\\ &= z \bullet z\\ &= \|z\|^2 \geq 0\,. \end{aligned} \tag{5.96}$$

Assim

$$\begin{aligned}\|z\|^2 &\overset{(5.96)}{=} |\phi(b) - \phi(a)|\\ &\overset{(5.95)}{=} |z \bullet f\,'(t_o)|\,(b-a)\\ &\overset{\text{Des. Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|z\|\,\|f\,'(t_o)\|\,(b-a)\,. \end{aligned} \tag{5.97}$$

Se

$$z = \vec{O}\,, \quad \text{isto é,} \quad f(b) = f(a)\,,$$

nada temos a fazer, pois o lado direito de (5.91) será igual a zero.

Se

$$z \neq \vec{O}\,, \qquad \text{teremos} \quad \|z\| > 0$$

e (5.97) implicará em

$$\|z\| \leq \|f\,'(t_o)\|\,(b-a)\,,$$

$$\text{e de (5.92), segue que} \quad \|f(b)-f(a)\| \leq \|f\,'(t_o)\|\,(b-a)\,,$$

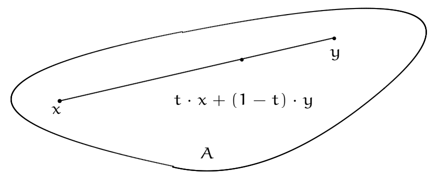
ou seja, vale (5.91), completando a demonstração do resultado.

□

Para o próximo resultado precisaremos da:

Definição 5.3.4 *Diremos que o subconjunto* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *é um subconjunto* **convexo** *do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *se dados* $x, y \in E$, *o segmento que tem extremidades nestes dois pontos está inteiramente contido no conjunto* $\underline{A}$, *ou seja,*

$$(1-t)\cdot x + t\cdot y \in A\,, \qquad \textit{para cada} \quad t \in [0,1]\,. \tag{5.98}$$



Com isto, podemos enunciar e demonstrar o:

Corolário 5.3.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto convexo de* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *uma função diferenciável em* $\underline{E}$, *tal que existe* $M > 0$, *de modo que*

$$\|f\,'(x)\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)} \leq M\,, \qquad \textit{para cada} \quad x \in E\,. \tag{5.99}$$

Então

$$\|f(x)-f(y)\| \leq M\,\|x-y\|\,, \qquad \textit{para cada} \quad x, y \in E\,. \tag{5.100}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Sejam $x, y \in E$.

Consideremos $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ a curva parametrizada diferenciável dada por

$$\gamma(t) \doteq (1-t)\cdot x + t\cdot y\,, \qquad \text{para cada} \quad t \in [0,1]\,. \tag{5.101}$$

Observemos que

$$\gamma\,'(t) = y - x\,, \qquad \text{para cada} \quad t \in [0,1]\,.$$

Como o conjunto $\underline{E}$ é convexo no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ e $x, y \in E$, segue que

$$\gamma(t) \in E\,, \qquad \text{para cada} \quad t \in [0,1]\,.$$

Definamos a função $g : [0\,,1] \to \mathbb{R}^m$, por

$$g(t) \doteq f\,[\gamma(t)]\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0\,,1]\,.$$

Notemos que

$$g(1) = f\left[\overbrace{\gamma(1)}^{\overset{(5.101)}{=} y}\right] = f(y)\,, \tag{5.102}$$

$$g(0) = f\left[\underbrace{\gamma(0)}_{\overset{(5.101)}{=} x}\right] = f(x)\,. \tag{5.103}$$

Como as funções $\underline{f}$ e $\underline{\gamma}$ são diferenciáveis em $\underline{E}$ e $[0\,,1]$, respectivamente, segue que a função $\underline{g}$ será diferenciável em $[0\,,1]$, em particular, será contínua em $[0\,,1]$ e diferenciável em $(0\,,1)$.

Além disso, da Regra da Cadeia (isto é, do Teorema (5.2.1)), segue que

$$\begin{aligned} g\,'(t) &= f\,'\,[\gamma(t)]\,[\underbrace{\gamma\,'(t)}_{=y-x}] \\ &= f\,'\,[\gamma(t)]\,(y-x)\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0\,,1]\,. \end{aligned} \tag{5.104}$$

Logo

$$\begin{aligned} \|g\,'(t)\| &\overset{(5.104)}{=} \|f\,'\,[\gamma(t)]\,(y-x)\| \\ &\leq \underbrace{\|f\,'\,[\gamma(t)]\,\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)}}_{\overset{\text{Hipótese}}{\leq M}} \|y-x\| \\ &\leq M\,\|y-x\|\,. \end{aligned} \tag{5.105}$$

Portanto, aplicando a Desigualdade do Valor Médio (isto é, o Teorema (5.3.2)) à função $\underline{g}$, segue que existe $t_o \in (0\,,1)$ tal que

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\| &\overset{(5.102),(5.103)}{=} \|g(1) - g(0)\| \\ &\overset{\text{Teorema (5.3.2)}}{\leq} \|g\,'(t_o)\|\,|1-0| \\ &= \|g\,'(t_o)\| \\ &\overset{(5.105)}{\leq} M\|y-x\|\,, \end{aligned}$$

obtendo (5.100), completando a demonstração do resultado.

□

Observação 5.3.5 *O resultado acima nos diz que se a função $\underline{f}$ tem derivada uniformemente limitada em um subconjunto aberto e convexo do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$, então ela será uma função Lipschitziana em $\underline{E}$.*

Como consequência deste temos o:

Corolário 5.3.2 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto convexo do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *uma função diferenciável em* $\underline{E}$, *tal que*

$$f'(x) = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in E\,. \tag{5.106}$$

Então a função $\underline{f}$ *será constante em* $\underline{E}$, *ou seja, se* $x_o \in E$ *teremos*

$$f(x) = f(x_o)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in E\,. \tag{5.107}$$

Demonstração:

Como

$$f'(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,,$$

segue que

$$M \doteq \|f'(x)\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)} = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,. \tag{5.108}$$

Logo, do Corolário (5.3.1), segue que

$$\begin{aligned} 0 &\le \|f(x) - f(x_o)\| \\ &\le M\|x - x_o\| \overset{(5.108)}{=} 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,, \\ \text{ou seja,} \quad & \|f(x) - f(x_o)\| = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,, \\ \text{ou ainda,} \quad & f(x) = f(x_o)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,, \end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

□

Introduziremos agora a:

Definição 5.3.5 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *uma função diferenciável em* $\underline{E}$.

Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **continuamente diferenciável em** $\underline{E}$, *se as funções* $\underline{f}$ *e* $f' : E \to L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ *forem contínuas em* $\underline{E}$, *ou seja, para cada* $x_o \in E$ *fixado, dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $\delta > 0$, *de modo que, se*

$$\|x - x_o\|_{\mathbb{R}^n} < \delta\,, \quad \textit{teremos} \quad \|f(x) - f(x_o)\|_{\mathbb{R}^m}, \|f'(x) - f'(x_o)\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)} < \varepsilon\,. \tag{5.109}$$

O conjunto formado por todas as funções continuamente diferenciável em $\underline{E}$, *tomando valores em* $\mathbb{R}^m$, *será denotado por:* $C^1(E;\mathbb{R}^m)$.

Observação 5.3.6 *Será deixado como exercício para o leitor mostrar que*

$$\left(C^1(E;\mathbb{R}^m), +, \cdot\right)$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, *onde* $\underline{+}$ *e* $\underline{\cdot}$ *denotam a soma de funções e a multiplicação de uma função por um número real, respectivamente.*

Com isto temos a seguinte caracterização dos elementos de $C^1(E\,;\mathbb{R}^m)$:

Teorema 5.3.3 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *uma função.*

Então $f \in C^1(E\,;\mathbb{R}^m)$ *se, e somente se, a função* $\underline{f}$ *for contínua em* $\underline{E}$ *e existem e são contínuas todas as derivadas parciais de 1.a ordem da função* $\underline{f}$ *em* $\underline{E}$*.*

Demonstração:

Suponhamos que

$$f \in C^1(E\,;\mathbb{R}^m) \quad \text{e} \quad x_o \in E\,.$$

Logo a função $\underline{f}$ é contínua em $\underline{E}$ e, para completar a 1.a parte da demonstração, devemos mostrar que existem e são contínuas todas as derivadas parciais de 1.a ordem da função $\underline{f}$ em $\underline{E}$.

Lembremos que, do Teorema (5.3.1), segue que existem todas as derivadas parciais de 1.a ordem da função $\underline{f}$ em $\underline{E}$.

Além disso, para $x_o \in E$, se

$$\beta_n \doteq \{\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\cdots,\vec{e}_n\} \quad \text{e} \quad \beta_m \doteq \{\vec{u}_1\,,\vec{u}_2\,,\cdots,\vec{u}_m\}$$

são as bases canônicas dos espaços vetoriais reais $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$ e $(\mathbb{R}^m\,,+\,,\cdot)$, respectivamente, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$, $k \in \{1\,,2\,,\cdots,m\}$ e $x \in E$, de (5.66), segue que

$$\begin{aligned}
[f\,'(x)\,\vec{e}_j] \bullet \vec{u}_k &\overset{(5.66)}{=} \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\cdot \vec{u}_i\right] \bullet \vec{u}_k \\
&\overset{\text{Propriedades produto interno}}{=} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\Big(\underbrace{\vec{u}_i \bullet \vec{u}_k}_{\overset{\beta_m \text{ é base canônica}}{=} \begin{cases} 0\,, & \text{para } i \neq k \\ 1\,, & \text{para } i = k \end{cases}}\Big) \\
&= \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)\,.
\end{aligned} \tag{5.110}$$

Em particular, para cada $k \in \{1\,,2\,,\cdots,m\}$, existem todas as derivadas parciais de 1.a ordem $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_o)$, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_o) &\overset{(5.110)}{=} [f\,'(x)\,\vec{e}_j] \bullet \vec{u}_k - [f\,'(x_o)\,\vec{e}_j] \bullet \vec{u}_k \\
&\overset{\text{Propriedades produto interno}}{=} [f\,'(x)\,\vec{e}_j - f\,'(x_o)\,\vec{e}_j] \bullet \vec{u}_k\,,
\end{aligned} \tag{5.111}$$

assim

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)-\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_o)\right| &\overset{(5.111)}{=} |[f\,'(x)\,\vec{e}_j-f\,'(x_o)\,\vec{e}_j)]\bullet\vec{u}_k| \\
&\overset{\text{Des. Cauchy Schwarz}}{\leq} \|f\,'(x)\,\vec{e}_j-f\,'(x_o)\,\vec{e}_j\|\,\underbrace{\|\vec{u}_k\|}_{=1} \\
&\leq \|\,[f\,'(x)-f\,'(x_o)]\,\vec{e}_j\| \\
&\leq \|f\,'(x)-f\,'(x_o)\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)}\,\underbrace{\|\vec{e}_j\|}_{=1} \\
&= \|f\,'(x)-f\,'(x_o)\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)}\,.
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, a função $f\,':E\to L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ é contínua em $\underline{E}$ segue, da desigualdade acima, que todas as derivadas parciais de 1.a ordem da função $\underline{f}$ serão contínuas em $\underline{E}$, completando a demonstração da 1.a parte do resultado.

Notemos que, para a recíproca, basta mostrar que a mesma vale, apenas, para

$$m=1\,.$$

De fato, pois se para cada $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ a função $\underline{f_i}$, i-ésima componente da função $\underline{f}$, pertence a $C^1(E;\mathbb{R})$, segue que $f\in C^1(E;\mathbb{R}^m)$.

Deixaremos a verificação desta afirmação como exercício para o leitor.

Suponhamos que todas as derivadas parciais de 1.a ordem da função $f:E\to\mathbb{R}$, juntamente com a mesma, sejam contínuas em $\underline{E}$.

Sejam

$$x_o\in E \quad \text{e} \quad \varepsilon>0\,.$$

Como o conjunto $\underline{E}$ é um subconjunto aberto em $(\mathbb{R}^n\,,d_{\mathbb{R}^n})$, podemos encontrar $\delta>0$, tal que

$$\mathcal{B}(x_o\,;\,\delta)\subseteq E\,.$$

Por hipótese, para cada $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, a função $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ é contínua em $\underline{x_o}$.

Logo, para cada $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, podemos encontrar

$$\delta_j\in(0,\delta)\,,$$

tal que, se

$$x\in\mathcal{B}(x_o\,;\,\delta_j)\,,\quad \text{teremos}\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)\right|<\frac{\varepsilon}{n}\,. \tag{5.112}$$

Assim, considerando-se

$$\delta_o\doteq\min\{\delta\,,\delta_j\,;\quad \text{para}\quad j\in\{1,2,\cdots,n\}\},$$

segue que, para cada $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, se

$$x\in\mathcal{B}(x_o\,;\delta_o)\,,\quad \text{teremos}\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)\right|<\frac{\varepsilon}{n}\,, \tag{5.113}$$

Seja $h \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\|h\| < \delta_o\,, \quad \text{com} \quad h \doteq \sum_{i=1}^{n} h_j \cdot \vec{e}_j\,, \tag{5.114}$$

onde

$$\beta_n \doteq \{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \cdots, \vec{e}_n\}$$

é base canônica do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n\,, +\,, \cdot)$.

Notemos que

$$\|(x_o + h) - x_o\| = \|h\| \overset{(5.114)}{<} \delta_o\,,$$

assim

$$(x_o + h) \in \mathcal{B}(x_o\,; \delta_o) \subseteq E\,.$$

Consideremos, para cada $k \in \{1\,, 2\,, \cdots, n\}$, o seguintes vetores de $(\mathbb{R}^n\,, +\,, \cdot)$:

$$\vec{v}_o \doteq \vec{O} \quad \text{e} \quad \vec{v}_k \doteq h_1 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + h_k \cdot \vec{e}_k = (h_1\,, h_2\,, \cdots, h_k\,, 0\,, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n\,. \tag{5.115}$$

Com isto teremos:

$$\begin{aligned}
f(x_o + h) - f(x_o) &\overset{\vec{v}_n = h \text{ e } \vec{v}_o = \vec{O}}{=} f(x_o + \vec{v}_n) - f(x_o + \underbrace{\vec{v}_o}_{=\vec{O}}) \\
&\overset{\text{soma telescópica}}{=} [f(x_o + \vec{v}_1) - f(x_o + \vec{v}_o)] + [f(x_o + \vec{v}_2) - f(x_o + \vec{v}_1)] \\
&\quad + \cdots + [f(x_o + \vec{v}_{n-1}) - f(x_o + \vec{v}_{n-2})] + [f(x_o + \vec{v}_n) - f(x_o + \vec{v}_{n-1})] \\
&= \sum_{j=1}^{n} [f(x_o + \vec{v}_j) - f(x_o + \vec{v}_{j-1})]\,.
\end{aligned} \tag{5.116}$$

Por outro lado, para cada $k \in \{1\,, 2\,, \cdots, n\}$, notemos que

$$\begin{aligned}
\|\vec{v}_k\| &\overset{(5.115)}{=} \sqrt{{h_1}^2 + \cdots + {h_k}^2} \\
&\leq \sqrt{{h_1}^2 + \cdots + {h_k}^2 + {h_{k+1}}^2 + \cdots + {h_n}^2} \\
&= \|h\| \overset{(5.114)}{<} \delta_o\,.
\end{aligned}$$

Como a bola aberta $\mathcal{B}(x_o\,; \delta_o)$ é um conjunto convexo do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n\,, +\,, \cdot)$, segue que o segmento de reta de extremos nos pontos

$$x_o + \vec{v}_{j-1} \quad \text{e} \quad x_o + \vec{v}_j$$

estará contido em $\mathcal{B}(x_o\,; \delta_o)$.

Observemos também que, para cada $j \in \{1\,, 2\,, \cdots, n\}$, segue que

$$\begin{aligned}
\vec{v}_j &= (h_1\,, h_2\,, \cdots, h_j\,, 0\,, \cdots, 0) \\
&= (h_1\,, h_2\,, \cdots, h_{j-1}\,, 0\,, \cdots) + (0\,, \cdots, 0\,, h_j\,, 0\,, \cdots, 0) \\
&\overset{(5.115)}{=} \vec{v}_{j-1} + h_j \cdot \vec{e}_j\,.
\end{aligned} \tag{5.117}$$

Suponhamos que

$$h_j > 0 \, .$$

O caso

$$h_j \leq 0$$

é semelhante e será deixado como exercício para o leitor.

Para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, consideremos a função $g_j : [0, h_j] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_j(t) \doteq f\left(x_o + \vec{v}_{j-1} + t \cdot \vec{e}_j\right) \,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, h_j] \, . \tag{5.118}$$

Notemos que o traço da curva parametrizada

$$t \mapsto x_o + \vec{v}_{j-1} + t \cdot \vec{e}_j \,, \quad \text{para} \quad t \in [0, h_j]$$

é o segmento de reta que liga o ponto

$$x_o + \vec{v}_{j-1} + 0 \cdot \vec{e}_j = x_o + \vec{v}_{j-1} \,, \quad \text{ao ponto} \quad x_o + \overbrace{\vec{v}_{j-1} + h_j \cdot \vec{e}_j}^{\overset{(5.115)}{=} \vec{v}_j} = x_o + \vec{v}_j$$

e que está contido em $\mathcal{B}(x_o\,; \delta_o)$.

Assim temos que a função $\underline{g_j}$ será a restrição da função $\underline{f}$ ao esse segmento de reta que une os pontos acima.

Observemos também que, para $t_o \in (0, h_j)$, teremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{g_j(t + t_o) - g_j(t_o)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{f\left[x_o + \vec{v}_{j-1} + (t + t_o) \cdot \vec{e}_j\right] - f(x_o + \vec{v}_{j-1} + t_o \cdot \vec{e}_j)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f\left[(x_o + \vec{v}_{j-1} + t_o \cdot \vec{e}_j) + t \cdot \vec{e}_j\right] - f(x_o + \vec{v}_{j-1} + t_o \cdot \vec{e}_j)}{t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o + \vec{v}_{j-1} + t_o \cdot \vec{e}_j),
\end{aligned} \tag{5.119}$$

ou seja, a função $\underline{g_j}$ será diferenciável em $t_o \in [0, h_j]$ e

$$g_j{}'(t_o) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o + \vec{v}_{j-1} + t_o \cdot \vec{e}_j) \, . \tag{5.120}$$

Como, por hipótese, as derivadas parciais de 1.a ordem da função $\underline{f}$ são contínuas em $\underline{E}$ segue, de (5.120), que a função $\underline{g_j}$ será continuamente diferenciável em $[0, h_j]$, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Assim, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio à função $\underline{g_j}$ no intervalo $[0, h_j]$ e assim obter

$$\theta_j \in [0, h_j] \,,$$

tal que

$$
\begin{aligned}
&\overset{(5.118)}{=} \underbrace{f(x_o + \overbrace{\vec{v}_{j-1} + h_j \cdot \vec{e}_j}^{\overset{(5.117)}{=} \vec{v}_j})}_{g_j(h_j)} - \underbrace{f(x_o + \overbrace{\vec{v}_{j-1} + 0 \cdot \vec{e}_j}^{\overset{(5.117)}{=} \vec{v}_{j-1}})}_{g_j(0)} = g_j{}'(\theta_j)\, h_j \\
&\overset{(5.120)}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,(x_o + \vec{v}_{j-1} + \theta_j \cdot \vec{e}_j)\ h_j\,,
\end{aligned}
$$

$$
\text{ou seja,} \quad f(x_o + \vec{v}_j) - f(x_o + \vec{v}_{j-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o + \vec{v}_{j-1} + \theta_j \cdot \vec{e}_j)\, h_j\,, \tag{5.121}
$$

para cada $j \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\left| f(x_o + h) - f(x_o) - \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) \right| &\overset{(5.116)}{=} \left| \sum_{j=1}^{n} [f(x_o + \vec{v}_j) - f(x_o + \vec{v}_{j-1})] - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)\, h_j \right| \\
&\overset{(5.121)}{=} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o + \vec{v}_{j-1} + \theta_j \cdot \vec{e}_j)\, h_j - \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o + \vec{v}_{j-1} + \theta_j \cdot \vec{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) \right|}_{\|(x_o + \vec{v}_{j-1} + \theta_j \cdot \vec{e}_j) - x_o\| = \|\vec{v}_{j-1} + \theta_j \vec{e}_j\| \leq \|h\| < \delta_o,\ \text{logo } (5.113)\ \underset{<}{} \ \frac{\varepsilon}{n}} \underbrace{|h_j|}_{\leq \|h\|} \\
&< \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n}\, \|h\| \\
&= \frac{\varepsilon}{n}\, \|h\|\, n = \varepsilon \|h\|\,,
\end{aligned} \tag{5.122}
$$

ou seja, se considerarmos a transformação linear $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$
A(h) \doteq \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)\, h_j\,,
$$

onde

$$
h \doteq \sum_{i=1}^{n} h_j \cdot \vec{e}_j\,,
$$

segue, de (5.122), que

$$
\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_o + h) - f(x_o) - A(h)|}{\|h\|} = 0\,,
$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $x_o \in E$.

Portanto a função $\underline{f}$ será diferenciável em $\underline{E}$ e, além disso, temos que

$$
\begin{aligned}
f\,'(x)\, h &= A(h) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, h_j\,,
\end{aligned} \tag{5.123}
$$

onde

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_j \cdot \vec{e}_j \,.$$

Se

$$t_o = 0 \quad \text{ou} \quad t_o = h_j \,,$$

teremos algo semelhante, trocando-se o limite (5.119), pelos respectivos limites laterais.

Deixaremos os detalhes destes dois casos como exercício para o leitor.

Como, por hipótese, as derivadas parciais de 1.a ordem da função $\underline{f}$ são contínuas em $\underline{E}$ segue, de (5.123), que a função f' será contínua em $\underline{E}$, ou seja, $f \in C^1(E\,;\mathbb{R})$, completando a demonstração.

□

5.4 Ponto fixo de uma função

Nosso objetivo nesta seção é exibirmos um resultado que garante a existência de um, único, ponto fixo de uma função "especial" definida em um espaço métrico "especial".

Para isto começaremos pela:

Definição 5.4.1 *Sejam* $\underline{X}$ *um conjunto não vazio,* $x_o \in X$ *e* $f : X \to X$ *uma função.*

Diremos que $\underline{x_o}$ *é um* **ponto fixo da função $\underline{f}$ em $\underline{X}$** *se*

$$f(x_o) = x_o \,. \tag{5.124}$$

Para exibir um resultado importante que tratará da existência e unicidade de ponto fixo de uma aplicação precisaremos da:

Definição 5.4.2 *Sejam* $(X\,, d_X)$ *um espaço métrico e* $f : X \to X$ *uma função.*

Diremos que a função $\underline{f}$ *é uma* **contração em $(X\,, d_X)$**, *se existir* $c \in [0\,, 1)$, *tal que*

$$d_X[f(x), f(y)] \le c\, d_X(x\,, y)\,, \quad \textit{para todo} \quad x\,, y \in X\,. \tag{5.125}$$

Observação 5.4.1 *Toda contração definida em um espaço métrico é uma função contínua definida nesse espaço métrico.*

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

Com isto temos o **Teorema do ponto fixo de Banach**:

Teorema 5.4.1 *Sejam* $(X\,, d_X)$ *é um espaço métrico completo e a função* $f : X \to X$ *uma contração em* $(X\,, d_X)$.

Então existe um, e somente um, ponto fixo da função $\underline{f}$ *em* $\underline{X}$, *isto é, existe um único* $\bar{x} \in X$, *tal que*

$$f(\bar{x}) = \bar{x}\,. \tag{5.126}$$

Demonstração:

Começaremos provando a unicidade:

Para isto, suponhamos que $x_1, x_2 \in X$ são pontos fixos da função $\underline{f}$ em $\underline{X}$, ou seja,

$$f(x_1) = x_1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = x_2 .$$

Então

$$\begin{aligned} d_X(x_1, x_2) &\overset{f(x_1)=x_1,\, f(x_2=x_2}{=} d_X[f(x_1), f(x_2)] \\ &\overset{f \text{ é contração}}{\leq} c\, d_X(x_1, x_2), \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad 0 \leq \underbrace{(1-c)}_{>0} d_X(x_1, x_2) \leq 0$$

$$\text{que implicará que:} \quad d_X(x_1, x_2) = 0,$$

$$\text{ou ainda,} \quad x_1 = x_2,$$

mostrando a unicidade do ponto fixo da função $\underline{f}$.

Mostremos agora a existência do ponto fixo da função $\underline{f}$ em $\underline{X}$.

Seja $x_o \in X$ qualquer.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por:

$$x_n \doteq f(x_{n-1}) . \tag{5.127}$$

Notemos que, para $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned} d_X(x_{n+1}, x_n) &\overset{(5.127)}{=} d_X[f(x_n), f(x_{n-1})] \\ &\overset{f \text{ é contração}}{\leq} c\, d_X(x_n, x_{n-1}), \end{aligned}$$

com isto, por indução, podemos mostrar que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n\, d(x_1, x_o), \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.128}$$

Os detalhes da prova da afirmação acima serão deixados como exercício para o leitor.

Notemos que, se $m > n$, segue que

$$\begin{aligned} d_X(x_m, x_n) &\overset{\text{des. triangular}}{\leq} d_X(x_m, x_{m-1}) + d_X(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d_X(x_{n+1}, x_n) \\ &= \sum_{i=n+1}^{m} d_X(x_i, x_{i-1}) \\ &\overset{(5.128)}{\leq} \left(c^n + c^{n-1} + \cdots + c^{m-1}\right) d_X(x_1, x_o) \\ &= c^n \left(\underbrace{1 + c + \cdots + c^{m-n-1}}_{\leq 1+c+c^2+\cdots \leq \frac{1}{1-c}} \right) d_X(x_1, x_o) \\ &\leq c^n \frac{1}{1-c}\, d_X(x_1, x_o) . \end{aligned} \tag{5.129}$$

Como $c \in [0,1)$, segue que a sequência numérica $(c^n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente para zero, ou seja, (5.129) implicará que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será um sequência de Cauchy no espaço métrico (X, d_X).

Mas o espaço métrico (X, d_X) é um espaço métrico completo, logo existe o limte

$$\bar{x} \doteq \lim_{n\to\infty} x_n \in X. \tag{5.130}$$

Como a função $\underline{f}$ é uma contração em (X, d_X), segue que ela será uma função contínua em (X, d_X), assim

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &\overset{(5.130)}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \\ &\overset{\text{f é contínua}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{=x_{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &\overset{(5.130)}{=} \bar{x}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(\bar{x}) = \bar{x},$$

portanto a função $\underline{f}$ tem um único ponto fixo em (X, d_X), completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 5.4.2 *A demonstração acima nos fornece um modo de encontrar o ponto fixo da função* $\underline{f}$.

Basta escolher $x_o \in X$ *qualquer e encontrar o limite da sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* (X, d_X), *onde*

$$x_n \doteq f^n(x), \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.131}$$

notando que:

$$f^n \doteq \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-\textit{fatores}}. \tag{5.132}$$

Como consequência do resultado acima temos o:

Corolário 5.4.1 *Seja* (X, d_X) *um espaço métrico completo. Suponhamos que a função* $f : X \to X$ *seja contínua em* (X, d_X) *e que exista* $N \in \mathbb{N}$, *de modo que* $f^N : X \to X$ *é uma contração em* (X, d_X).

Então existe um único ponto fixo da função $\underline{f}$ *em* $\underline{X}$.

Demonstração:

Do Teorema (5.4.1), segue que função $\underline{f^N}$ tem um único ponto fixo em $\underline{X}$, que denotaremos por $\underline{p}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos

$$M \doteq k\,N + L, \quad \text{onde} \quad 0 \le L < N.$$

Dado $x \in X$ temos que

$$f^L(x) \in X .$$

Da demonstração do Teorema (5.4.1) (veja a Observação (5.4.2)), temos que

$$\underbrace{f^{(kN)}[f^L(x)]}_{f^{(kN+L)}(x)=f^M(x)} \to p\,, \quad \text{quando} \quad k \to \infty\,,$$

ou seja,

$$F^M(x) \to p\,, \quad \text{quando} \quad M \to \infty\,. \tag{5.133}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
p &\overset{(5.133)\text{ com } x=F(p)}{=} \lim_{M\to\infty} F^M[F(p)] \\
&= \lim_{M\to\infty} F^{(M+1)}(p) \\
&= \lim_{M\to\infty} F[F^M(p)] \\
&\overset{F\text{ é contínua em } X}{=} F\left[\lim_{M\to\infty} F^M(p)\right] \\
&\overset{(5.133)\text{ com } x=p}{=} F(p)\,,
\end{aligned}$$

completando a demonstração

□

5.5 O Teorema da Função Inversa

Nesta seção utizaremos o Teorema do ponto fixo de Banach (isto é, o Teorema (5.4.1)) para provar um resultado sobre a contínua diferenciabilidade da função inversa (local), associada uma função continuamente diferenciável e "bem comportada", mais precisamente:

Teorema 5.5.1 (Teorema da Função Inversa) *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto de* $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, $x_o \in E$ *e* $f \in C^1(E;\mathbb{R}^n)$, *tal que* $f'(x_o) \in L(\mathbb{R}^n)$ *seja um operador linear inversível e* $y_o \doteq f(x_o)$.

Então

1. *existem dois conjuntos, que denotaremos por:*

$$U = U(x_o) \subseteq E \qquad e \qquad V = V(y_o)\,,$$

   que são subconjuntos abertos em $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, *contendo* $\underline{x_o}$ *e* $\underline{y_o}$, *respectivamente, tais que* $f: U \to V$ *é bijetora, ou seja, a função* $\underline{f}$ *admite uma função inversa* $f^{-1}: V \to U$, *localmente em* $\underline{x_o}$.

2. *Além disso,*

$$f^{-1} \in C^1(V;\mathbb{R}^n)$$

e, para cada $y \in V$, *teremos*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = [f'(x)]^{-1}\,,$$

onde $x \doteq f^{-1}(y)$.

<u>**Demonstração:**</u>

<u>**De 1.:**</u>

Seja

$$A \doteq f'(x_o) \in L(\mathbb{R}^n)\,.$$

Como $f'(x_o) \in L(\mathbb{R}^n)$ é um operador linear inversível, segue que

$$\|A\|_{L(\mathbb{R}^n)} \neq 0\,.$$

Assim podemos considerar

$$\lambda \doteq \frac{1}{2\,\|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)}} > 0\,. \tag{5.134}$$

Como a função $\underline{f'}$ é contínua em $\underline{x_o}$ e o conjunto $\underline{E}$ é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^n\,, d_{\mathbb{R}^n})$, podemos encontrar $r_1 > 0$, tal que $\overline{\mathcal{B}(x_o\,;\,r)} \subseteq E$ e se

$$x \in \overline{\mathcal{B}(x_o\,;\,r)}\,, \quad \text{teremos} \quad \Big\| f'(x) - \underbrace{f'(x_o)}_{=A} \Big\|_{L(\mathbb{R}^n)} < \lambda\,. \tag{5.135}$$

Afirmamos que a função $\underline{f}$ é injetora em

$$U \doteq \mathcal{B}(x_o\,;\,r)\,.$$

De fato, sejam $x_1, x_2 \in U$ para os quais

$$y \doteq f(x_1) = f(x_2)$$

Mostremos que

$$x_1 = x_2\,.$$

Para isto, consideremos a função $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi_y(x) \doteq x + A^{-1}\,[y - f(x)]\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,. \tag{5.136}$$

Notemos que:

$$\text{existe único} \quad x \in U\,, \quad \text{tal que} \quad y = f(x)$$

se, e somente se,

$$\text{existe único} \quad x \in U\,, \quad \text{tal que} \quad y - f(x) = \vec{O}\,,$$

ou, é equivalente, a

$$\text{existe único} \quad x \in U\,, \quad \text{tal que} \quad A^{-1}\,[y - f(x)] = \vec{O}\,,$$

ou ainda,

$$\text{existe único} \quad x \in U, \quad \text{tal que} \quad x + A^{-1}[y - f(x)] = x,$$

ou, equivalentemente,

$$\text{existe único} \quad x \in U, \quad \text{tal que} \quad \varphi_y(x) = x,$$

ou ainda,

$$\text{existe único} \quad x \in U, \quad \text{ponto fixo da função} \quad \varphi_y. \tag{5.137}$$

Portanto a função $\underline{f}$ é injetora em $\underline{U}$ se, e somente se, (5.137) ocorre.

Mostremos que (5.137) ocorre.

Para isto, observemos que $\varphi_y \in C^1(E;\mathbb{R}^n)$ (pois $f, A \in C^1(E;\mathbb{R}^n)$) e, além disso, da Regra da Cadeia (isto é, o Teorema (5.2.1)) e da Proposição (5.2.2), segue que

$$\varphi_y{}'(x) \overset{(5.136)}{=} I_n - A^{-1} \circ f'(x), \quad \text{para cada} \quad x \in E, \tag{5.138}$$

onde $I_n \in L(\mathbb{R}^n)$ denota o operador identidade em $\mathbb{R}^n$.

Os detalhes da verificação da identidade acima serão deixados como exercício para o leitor.

Logo, da Proposição (5.1.1) item 3. (isto é (5.4)), se $x \in \overline{\mathcal{B}(x_o\,;r)}$, segue que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_y{}'(x)\|_{L(\mathbb{R}^n)} &\overset{(5.138)}{=} \|I - A^{-1} \circ [f'(x)]\|_{L(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|A^{-1} \circ [A - f'(x)]\,\|_{L(\mathbb{R}^n)} \\
&\overset{(5.4)}{\leq} \underbrace{\|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)}\|}_{\overset{(5.134)}{=}\frac{1}{2\lambda}} \ \underbrace{\|A - f'(x)\|_{L(\mathbb{R}^n)}}_{\overset{(5.135)}{<}\lambda} \\
&= \frac{1}{2\lambda}\lambda = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

Logo se $x_1, x_2 \in \overline{\mathcal{B}(x_o\,;r)}$ (que é um subconjunto convexo de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$), do Corolário (5.3.1), podemos concluir que

$$\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|. \tag{5.139}$$

que garante que a função $\underline{\varphi_y}$ terá, no máximo, um único ponto fixo em $\underline{U}$.

De fato, pois se $x_1, x_2 \in U$ satisfazem

$$\begin{aligned}
& \phi_y(x_1) = x_1 \quad \text{e} \quad x_2 = \phi_y(x_2), \\
\text{então, de (5.139), segue que} \quad & \|x_1 - x_2\| = \|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\| \overset{(5.139)}{\leq} \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \\
\text{implicando que:} \quad & \|x_1 - x_2\| = 0, \\
\text{ou seja,} \quad & x_1 = x_2. \qquad (5.140)
\end{aligned}$$

Assim, de (5.140), segue que a função $\underline{f}$ será injetora em $\underline{U}$.

Com isto temos que a função $f: U \to V$ será um função bijetora, onde

$$V \doteq f(U). \tag{5.141}$$

Logo, para cada $y \in V$, existe um único $x \in U$, tal que

$$f(x) = y .$$

Para completar a demonstração do item 1., precisamos mostrar que o conjunto $\underline{V}$, definido por (5.141), é um subconjunto aberto em $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$.

Para isto, dado $y_1 \in V$, de (5.141), segue que existe (um único) $x_1 \in U$ tal que

$$y_1 = f(x_1)$$

e, do fato que a bola aberta $\mathcal{B}(x_o\,;\,r)$ é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, segue que existe $r_o \in (0, r)$, tal que

$$\overline{\mathcal{B}(x_1\,;\,r_o)} \subseteq U = \mathcal{B}(x_o\,;\,r) .$$

Afirmamos que, se $y \in \mathbb{R}^n$ é tal que

$$\|y - y_1\| < \lambda\, r_o , \qquad \text{então deveremos ter} \quad y \in V . \tag{5.142}$$

Em particular, teremos que o conjunto $\underline{V}$ será um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, pois se $y_1 \in V$, da desigualdade (5.142) acima, teremos que

$$\mathcal{B}(y_1\,;\,r_o\,\lambda) \subseteq V .$$

Mostremos a afirmação (5.142).

Para isto, suponhamos que $y \in E$ satisfaz

$$\|y - y_1\| < \lambda\, r_o , \qquad \text{ou seja,} \quad y \in \mathcal{B}\,(y_1\,;\,r_o\,\lambda) .$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_y(x_1) - x_1\| &\overset{(5.136)}{=} \left\|\left(x_1 + A^{-1}\left[y - f(x_1)\right]\right) - x_1\right\| \\
&= \left\| A^{-1} \left[y - \underbrace{f(x_1)}_{=y_1} \right] \right\| \\
&\overset{\|A^{-1}(z)\| \le \|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)} \|z\|}{\le} \underbrace{\|A^{-1}\|}_{\overset{(5.134)}{=} \frac{1}{2\lambda}} \underbrace{\|y - y_1\|}_{\overset{y \in \mathcal{B}(y_1;r_o\lambda)}{<} r_o\lambda} \\
&< \frac{1}{2\lambda}\, r_o\,\lambda = \frac{1}{2}\, r_o .
\end{aligned} \tag{5.143}$$

Assim, se $x \in \overline{\mathcal{B}(x_1\,;\,r_o)}$, teremos:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_y(x) - x_1\| &= \|[\varphi_y(x) - \varphi_y(x_1)] + [\varphi_y(x_1) - x_1]\| \\
&\overset{\text{des. triangular}}{\le} \underbrace{\|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_1)\|}_{\overset{(5.139)\ \text{em}\ \mathcal{B}(x_1\,;\,r_o)}{\le} \frac{1}{2} \underbrace{\|x - x_1\|}_{< r_o} < \frac{1}{2} r_o} + \underbrace{\|\varphi_y(x_1) - x_1\|}_{\overset{(5.143)}{<} \frac{1}{2} r_o} \\
&< \frac{1}{2}\, r_o + \frac{1}{2}\, r_o = r_o ,
\end{aligned} \tag{5.144}$$

ou seja, de (5.144), podemos concluir que

$$\varphi_y : \overline{\mathcal{B}(x_1; r_o)} \to \overline{\mathcal{B}(x_1\,; r_o)}\,.$$

Assim, uma vez mais, a função $\underline{\varphi_y}$ será uma contração em $\overline{\mathcal{B}(x_1\,; r_o)}$ que, como dissemos anteriormente, é um espaço métrico completo.

Logo, do Teorema de Banach, existe um único

$$x \in \overline{\mathcal{B}(x_1\,; r_o)} \subseteq \mathcal{B}(x_o\,; r)\,, \quad \text{tal que} \quad f(x) = y\,,$$

mostrando que

$$y \in f(U) = V\,,$$

completando a demonstração do item 1. .

<u>**De 2.:**</u>

Como o conjunto $\underline{V}$ é um subconjunto aberto em $(\mathbb{R}^n\,, d_{\mathbb{R}^n})$, dado $y \in V$, existirá

$$k \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{O}\}\,, \quad \text{tal que} \quad (y+k) \in V\,.$$

Do item 1., segue que existem (únicos) $x\,, x_k \in U$, tais que

$$f(x) = y \quad \text{e} \quad f(x_k) = y + k\,. \tag{5.145}$$

Considerando-se

$$h \doteq x_k - x\,,$$

da identidade (5.145) acima, segue que

$$f(x) = y \quad \text{e} \quad f(x+h) = y + k\,. \tag{5.146}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x) &\overset{(5.136)}{=} \left\{ (x+h) + \overbrace{A^{-1}\,[y - f(x+h)]}^{=A^{-1}(y)+A^{-1}[f(x+h)]} \right\} - \left\{ x + \overbrace{A^{-1}\,[y - f(x)]}^{=A^{-1}(y)+A^{-1}[f(x)]} \right\} \\
&= h + A^{-1} \left[\underbrace{\underbrace{f(x)}_{\overset{(5.146)}{=} y} - \underbrace{f(x+h)}_{\overset{(5.146)}{=} y+k}}_{=-k} \right] \\
&= h - A^{-1}(k)\,,
\end{aligned}$$

o que implicará que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x)\| &= \|h - A^{-1}(k)\| \\
&\overset{\text{des. triangular}}{\geq} \|h\| - \|A^{-1}(k)\|\,.
\end{aligned} \tag{5.147}$$

Por outro lado, de (5.139), segue que

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x)\| &\overset{x,(x+h)\in U,\ \text{logo } (5.139)}{\leq} \frac{1}{2}\|(x+h) - x\| \\
&= \frac{1}{2}\,\|h\|\,. \qquad (5.148)
\end{aligned}
$$

Logo, de (5.147) e (5.148), teremos:

$$
\begin{aligned}
& \|h\| - \|A^{-1}(k)\| \leq \frac{1}{2}\,\|h\|\,, \\
\text{ou seja,}\quad & \|h\| \leq 2\|A^{-1}(k)\| \leq \underbrace{2\|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)}}_{\overset{(5.134)}{=}\frac{1}{\lambda}}\,\|k\| \\
& = \frac{1}{\lambda}\,\|k\|\,, \\
\text{isto é,}\quad & \|h\| \leq \frac{1}{\lambda}\,\|k\|\,, \qquad (5.149) \\
\text{ou ainda,}\quad & \frac{1}{\|k\|} \leq \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{\|h\|}\,. \qquad (5.150)
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
1 &\overset{(5.135)}{>} \frac{1}{\lambda}\,\|f\,'(x) - A\|_{L(\mathbb{R}^n)} \\
&\overset{(5.134)}{=} 2\,\|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)}\,\|f\,'(x) - A\|_{L(\mathbb{R}^n)} \\
\text{ou seja,}\quad & \|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)}\,\|f\,'(x) - A\|_{L(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Logo, para cada $x \in U$, do Teorema (5.1.1) item 1., segue que, o operador linear $f\,'(x)$, admite inversa (ou seja, será um operador linear inversível) que, por simplicidade, denotaremos por $\underline{T}$, ou seja:

$$
T \doteq [f\,'(x)]^{-1}\,.
$$

Denotemos a função inversa associada a função $f : U \to V$ por $\underline{g}$, isto é,

$$
g \doteq f^{-1}\,.
$$

Como isto teremos:

$$
\begin{aligned}
g(y+k) - g(y) - T(k) &\overset{(5.146)}{=} (x+h) - x - T(k) = \underbrace{h}_{=T[f\,'(x)(h)]} - T(\underbrace{k}_{\overset{(5.146)}{=} f(x+h)-f(x)}) \\
&\overset{T \text{ é op. linear}}{=} T\,[f\,'(x)(h) - f(x+h) + f(x)] \\
&= -T\,[f(x+h) - f(x) - f\,'(x)(h)]\,. \qquad (5.151)
\end{aligned}
$$

Logo, se $k \neq \vec{O}$, segue que

$$\frac{\|g(y+k)-g(y)-T(k)\|}{\|k\|} \overset{(5.151)}{\leq} \overbrace{\frac{1}{\|k\|}}^{\overset{(5.150)}{\leq} \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\|h\|}} \|-T\,[f(x+h)-f(x)-f\,'(x)(h)]\| \overset{\|T(z)\|\leq\|T\|_{L(\mathbb{R}^n)}\,\|z\|}{\leq} \|T\|_{L(\mathbb{R}^n)}\frac{1}{\lambda}\frac{\|f(x+h)-f(x)-f\,'(x)(h)\|}{\|h\|}. \tag{5.152}$$

Portanto quando

$$k \to \vec{O}, \quad \text{de (5.149), segue que} \quad h \to \vec{O}.$$

Assim, quando $k \to \vec{O}$, o lado direito de (5.152) vai para zero, pois a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\underline{x}$, implicando que a função $g = f^{-1}$ será diferenciável em $y = f(x) \in V$.

Além disso, de (5.152), segue que

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = g\,'(y) = T = [f\,'(x)]^{-1}, \quad \text{para cada} \quad y = f(x) \in V.$$

Notemos que a função $\underline{g}$ é contínua em $\underline{V}$, pois é uma função diferenciável em $\underline{V}$.

Como, por hipótese, a função $f\,' : U \to L(\mathbb{R}^n)$ é contínua em $\underline{U}$ e a aplicação que leva um operador linear inversível no seu operador linear inverso é uma aplicação contínua na norma de $L(\mathbb{R}^n)$ (ver Teorema (5.1.1) item 3.), segue que a função $\underline{g\,'}$ será uma função contínua em $\underline{V}$, mostrando que

$$f^{-1} = g \in C^1(V;U),$$

completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o

Corolário 5.5.1 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, Ω como no Teorema (5.1.1), $f \in C^1(E;\mathbb{R}^n)$ tal que $f\,'(x) \in \Omega$, para cada $x \in E$.*

Se $W \subseteq E$ é aberto em $(E, d_{\mathbb{R}^n})$, então o conjunto $\underline{f(W)}$ é aberto em $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, ou seja, a aplicação $\underline{f}$ é uma aplicação aberta.

Demonstração:

Se $y \in f(W)$, existe

$$x \in W, \quad \text{tal que} \quad f(x) = y.$$

Pelo item 1. do resultado acima, existirá um conjunto $U = U(x)$, subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, contido em $\underline{W}$, tal que

$$y \in V \doteq f(U) \subseteq f(W),$$

com o conjunto $\underline{f(U)}$ sendo um subconjunto aberto em $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$.

Logo, existe $\delta > 0$, tal que

$$\mathcal{B}(y;\delta) \subseteq f(U) \subseteq f(W),$$

em particular,

$$\mathcal{B}(y\,;\delta) \subseteq f(W)\,,$$

mostrando que o conjunto $\underline{f(W)}$ é um subconjunto aberto em $(\mathbb{R}^n\,, d_{\mathbb{R}^n})$, completando a demonstração do resultado.

□

5.6 Teorema da função implícita

Para finalizar enunciaremos e provaremos o **Teorema da função implícita** .

Antes porém faremos algumas observações e introduziremos algumas notações:

Observação 5.6.1

1. *Sejam* $\underline{E}$ *um subconjunto aberto de* $\left(\mathbb{R}^2\,, d_{\mathbb{R}^2}\right)$ *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* $\underline{E}$.

   Suponhamos que $(x_o\,, y_o) \in E$ *é tal que*

   $$f(x_o\,, y_o) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,, y_o) \neq 0\,.$$

   Então, no curso de Cálculo II, mostrou-se que existem vizinhanças de $\underline{x_o}$ *e* $\underline{y_o}$, *que denotatemos por*

   $$U = U(x_o) \quad e \quad V = V(y_o)\,,$$

   respectivamente, tal que

   $$U \times V \subseteq E$$

   e existirá uma função $y : U \to V$, *diferenciável em* $\underline{U}$, *de modo que*

   $$f[x\,, y(x)] = 0\,, \quad para\ cada \quad x \in U\,,$$

   ou seja, podemos obter na equação

   $$f(x\,, y) = 0\,, \quad para\ cada \quad (x\,, y) \in E\,, \tag{5.153}$$

   $\underline{y}$, *como função de* $\underline{x}$, *em um vizinhança do ponto* $(x_o\,, y_o) \in E$, *ou ainda, o gráfico da equação (5.153) acima, pode ser obtido como o gráfico de uma função de* $\underline{x}$, *em um vizinhança de* $(x_o\,, y_o) \in E$, *contida em* $\underline{E}$.

2. *Se a hipósete*

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,, y_o) \neq 0$$

   falhar, a conclusão pode ser **falsa**, *como mostra o seguinte exemplo:*

   Consideremos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

   $$f(x\,, y) \doteq x^2 + y^2 - 1\,, \quad para\ cada \quad (x\,, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Notemos que a função $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* $\mathbb{R}^2$ *e*

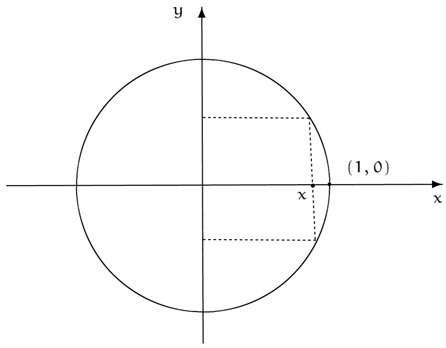
$$f(1,0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 2 \cdot 0 = 0$$

e **não** *existe nenhuma vizinhança de*

$$(x_o, y_o) \doteq (1,0),$$

de modo que possamos escrever $y = y(x)$*, em uma vizinhança do ponto* $(x_o, y_o) = (1,0)$ *(veja a figura abaixo) na equação*

$$f(x,y) = 0.$$



3. *Na situação do item 1., suponhamos que* $(x_o, y_o) \in E$ *é tal que*

$$f(x_o, y_o) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) \neq 0.$$

Então, no curso de Cáculo II, mostrou-se que existem vizinhanças de $\underline{x_o}$ *e* $\underline{y_o}$*, que denotatemos por*

$$U = U(x_o) \quad e \quad V = V(y_o),$$

respectivamente, tais que

$$U \times V \subseteq E$$

e existirá uma função $x : V \to U$*, diferenciável em* $\underline{V}$*, de modo que*

$$f[x(y), y] = 0, \quad para\ cada \quad y \in V,$$

ou seja, podemos obter na equação

$$f(x,y) = 0, \quad para\ cada \quad (x,y) \in E,$$

$\underline{x}$ *como função de* $\underline{y}$*, em um vizinhança de* $(x_o, y_o) \in E$*, contida em* $\underline{E}$*.*

4. *A seguir exibiremos uma versão mais geral do resultado acima (que foi apresentado no curso de Cálculo II), bem como sua demonstração.*

5. *No enunciado e na demonstração deste resultado que virá a seguir, utilizaremos a seguinte notação:*

Se

$$x \doteq (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad e \quad y \doteq (y_1, y_2, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m, \tag{5.154}$$

então

$$(x, y) \doteq (x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}. \tag{5.155}$$

Com isto, notamos que dada

$$A \in L(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^n),$$

então podemos decompor a transformação linear $\underline{A}$*, em duas transformações lineares, que denotaremos por:*

$$A_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad e \quad A_y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,$$

dadas por

$$A_x(h) \doteq A(h, O_m), \quad \textit{para cada} \quad h \in \mathbb{R}^n, \tag{5.156}$$

$$A_y(k) \doteq A(O_n, k), \quad \textit{para cada} \quad k \in \mathbb{R}^m, \tag{5.157}$$

onde

$$O_n \doteq (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad e \quad O_m \doteq (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^m. \tag{5.158}$$

De fato, para $h \in \mathbb{R}^n$ *e* $k \in \mathbb{R}^m$*, teremos:*

$$\begin{aligned} A(h, k) &\overset{(5.154),(5.155)\ e\ (5.158)}{=} A[(h, O_m) + (O_n, k)] \\ &\overset{A\ \text{é transf. linear}}{=} A(h, O_m) + A(O_n, k) \\ &\overset{(5.156)\ e\ (5.157)}{=} A_x(h) + A_y(k). \end{aligned} \tag{5.159}$$

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que

$$A_x \in L(\mathbb{R}^n) \quad e \quad A_y \in L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n).$$

6. *Notemos também que*

$$\begin{aligned} \|A_x(h)\| &\overset{(5.156)}{=} \|A(h, O_m)\| \\ &\leq \|A\|_{L(\mathbb{R}^{m+n}; \mathbb{R}^n)} \overbrace{\|(h, O_m)\|_{\mathbb{R}^{n+m}}}^{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \\ &= \|A\|_{L(\mathbb{R}^{m+n}; \mathbb{R}^n)} \|h\|_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

7. *De modo semelhante, temos*

$$\|A_y(k)\| \leq \|A\|_{L(\mathbb{R}^{m+n}; \mathbb{R}^n)} \|k\|_{\mathbb{R}^m}.$$

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Com isto podemos enunciar e demonstrar um **Teorema da função implícita** para transformações lineares, mais precisamente:

Proposição 5.6.1 *Seja* $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^n)$, *tal que* $A_x \in L(\mathbb{R}^n)$ *é um operador linear inversível.*

Então, para cada $k \in \mathbb{R}^m$, *existe um único* $h \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$A(h, k) = O_n . \tag{5.160}$$

Além disso, temos que

$$h = -A_x^{-1}[A_y(k)] . \tag{5.161}$$

Demonstração:

Observemos que, para cada $k \in \mathbb{R}^m$, temos que

$$\begin{aligned} & A(h,k) = O_n \\ \text{que, de (5.159), é equivalente a:} \quad & A_x(h) + A_y(k) = O_n , \\ \text{existe } A_x^{-1} \in L(\mathbb{R}^n)\text{, segue que, existe um único:} \quad & h = -A_x^{-1}[A_y(k)] , \end{aligned}$$

completando a demonstração.

□

Observação 5.6.2 *O resultado acima nos diz que, para cada* $k \in \mathbb{R}^m$, *na equação*

$$A(h, k) = O_n ,$$

podemos obter $h \in \mathbb{R}^n$, *de modo único, em função de* $\underline{k}$, *ou seja,*

$$h = h(k) , \quad \textit{para cada} \quad k \in \mathbb{R}^m .$$

Além disso, essa função será uma transformação linear do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ *no espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, *como descrita em (5.161).*

Podemos agora enuciar e demonstrar um **Teorema da função implícita** que estende o que foi exibido no curso de Cálculo II, mais precisamente:

Teorema 5.6.1 *Sejam* $\underline{E}$ *um subconjunto aberto de* $(\mathbb{R}^{n+m}, d_{\mathbb{R}^{n+m}})$, $(x_o, y_o) \in E$, $f \in C^1(E; \mathbb{R}^n)$ *e* $A \doteq f'(x_o, y_o) \in L(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^n)$.

Suponhamos que

$$f(x_o, y_o) = O_n$$

e que $A_x \in L(\mathbb{R}^n)$, *dada por (5.156), seja um operador linear inversível.*

Então existe subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^{n+m}, d_{\mathbb{R}^{n+m}})$, *que indicaremos por*

$$U \doteq U(x_o, y_o) \subseteq E ,$$

contendo $(x_o, y_o) \in E$, *um subconjunto aberto de* $(\mathbb{R}^m, d_{\mathbb{R}^m})$, *que denotaremos por*

$$W \doteq W(y_o) \subseteq \mathbb{R}^m ,$$

contendo $\underline{y_o}$, tal que para todo $y \in W$ existe um, único, $x \in \mathbb{R}^n$ de modo que

$$(x\,,y) \in U \quad e \quad f(x\,,y) = O_n\,, \tag{5.162}$$

ou seja, existe uma função $g : W \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo:

1. $g(y_o) = x_o$;
2. *para $y \in W$, temos*
$$(g(y)\,,y) \in U\,;$$
3. *para $y \in W$, temos que*
$$f\,(g(y)\,,y) = O_n\,.$$

Além disso, $g \in C^1(W;\mathbb{R}^n)$ e

$$g\,'(y_o) = -A_x^{-1} \circ A_y\,. \tag{5.163}$$

Demonstração:

Definamos a função $F : E \to \mathbb{R}^{n+m}$, dada por

$$F(x\,,y) \doteq (f(x\,,y)\,,y)\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y) \in E\,. \tag{5.164}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} F(x_o\,,y_o) &= (\overbrace{f(x_o\,,y_o)}^{=O_n}\,,y_o) \\ &= (O_n\,,y_o)\,. \end{aligned} \tag{5.165}$$

Como $f \in C^1(E\,;\mathbb{R}^n)$, segue que

$$F \in C^1(E\,;\mathbb{R}^{n+m})\,,$$

pois suas funções componentes são funções continuamente diferenciáveis em $\underline{E}$.

Além disso, temos que

$$F\,'(x_o,y_o)(h\,,k) \overset{(5.164)}{=} (A(h\,,k)\,,k)\,. \tag{5.166}$$

De fato, notemos que como a função $\underline{f}$ é diferenciável em $(x_o\,,y_o)$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_o+h\,,y_o+k) - \overbrace{f(x_o\,,y_o)}^{=O_n} - A(h\,,k)}{\|(h\,,k)\|} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_o+h\,,y_o+k) - A(h\,,k)}{\|(h\,,k)\|}\,, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente:

$$f(x_o+h\,,y_o+k) - \overbrace{f(x_o\,,y_o)}^{=O_n} = A(h\,,k) + r(h\,,k)\,, \tag{5.167}$$

onde

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0\,. \tag{5.168}$$

Logo

$$\begin{aligned} F(x_o+h, y_o+k) - F(x_o, y_o) &\overset{(5.164)}{=} (f(x_o+h, y_o+k)), y_o+k) - \Big(\overbrace{f(x_o, y_o)}^{=O_n}, y_o\Big) \\ &= (f(x_o+h, y_o+k), k) \\ &\overset{(5.167)}{=} (A(h,k)+r(h,k), k) \\ &= (A(h,k), k) + (r(h,k), O_m)\,. \end{aligned} \tag{5.169}$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{\|F(x_o+h, y_o+k) - F(x_o, y_o) - (A(h,k), k)\|_{\mathbb{R}^{n+m}}}{\|(h,k)\|} &\overset{(5.169)}{=} \frac{\|(r(h,k), O_m)\|_{\mathbb{R}^{n+m}}}{\|(h,k)\|} \\ &= \frac{\|r(h,k)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|(h,k)\|} \overset{(5.168)}{\to} 0\,, \end{aligned}$$

quando $(h,k) \to (0,0)$.

Portanto vale (5.166).

Notemos também, que se

$$\overbrace{O}^{=(O_n, O_m)} = F'(x_o, y_o)(h,k) = (A(h,k), k)\,,$$

$$\text{então,} \quad \begin{cases} k = O_m \\ O_n = A(h, O_m) = A_x(h) \end{cases}.$$

Como o operador linear $\underline{A_x}$ é inversível, segue que

$$\begin{aligned} &h = O_n\,, \\ \text{ou ainda,} \quad &(h,k) = (O_n, O_m) = O\,, \end{aligned}$$

ou seja, o operador linear $F'(x_o, y_o)$ é injetor e portanto bijetor (pois é um operador linear).

Portanto

$$F'(x_o, y_o) \in L(\mathbb{R}^{n+m})$$

será um operador linear inversível.

Logo podemos aplicar o Teorema da função inversa à função $\underline{F}$ (ou seja, o Teorema (5.5.1)) e com isto poderemos obter um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^{n+m}, d_{\mathbb{R}^{n+m}})$, que indicaremos por

$$U \doteq U(x_o, y_o) \subseteq E$$

e um subconjunto aberto também de $(\mathbb{R}^{n+m}, d_{\mathbb{R}^{n+m}})$, que denotaremos por

$$V \doteq V(F(x_o, y_o)) \overset{(5.165)}{=} V(O_n, y_o) \subseteq \mathbb{R}^{n+m}\,,$$

de modo que a função $F : U \to V$ será bijetora e $F^{-1} \in C^1(U\,;V)$.

Definamos

$$W \doteq \{y \in \mathbb{R}^m ; \, (O_n\,, y) \in V\}.$$

Observemos que

$$y_o \in W\,, \quad \text{pois} \quad (O_n\,, y_o) \in V\,.$$

Além disso, o conjunto $\underline{W}$ é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^m\,, d_{\mathbb{R}^m})$

De fato, pois como a função $i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m}$, dada por

$$i(y) \doteq (O_n\,, y)\,, \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}^m\,,$$

é uma função contínua em $(\mathbb{R}^n\,, d_{\mathbb{R}^n})$ e como o conjunto $\underline{V}$ é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^{n+m}\,, d_{\mathbb{R}^{n+m}})$, segue que

$$W = i^{-1}(V)\,,$$

será um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^n\,, d_{\mathbb{R}^n})$ (onde i^{-1} denota a imagem inversa, associada a função $\underline{i}$).

Notemos também que, se $y \in W$, segue que existe $(x\,, y) \in U$, tal que

$$F(x\,, y) = (O_n\,, y)\,,$$

pois a função $F : U \to V$ é bijetora.

Mas

$$(O_n\,, y) = F(x\,, y) \overset{(5.164)}{=} (f(x\,, y)\,, y)\,,$$
$$\text{ou seja,} \quad f(x\,, y) = O_n\,,$$

ou seja, para cada $y \in W$ existe, pelo menos um, $\underline{x}$ tal que

$$(x\,, y) \in W \quad \text{e} \quad f(x\,, y) = O_n\,.$$

Afirmamos que $\underline{x}$ é único com a propriedade acima.

De fato, suponhamos que $(x\,', y) \in U$ é tal que

$$f(x\,, y) = O_n = f(x\,', y)\,.$$

Logo

$$\begin{aligned} F(x\,', y) &= (f(x\,', y)\,, y) \\ &= (f(x\,, y)\,, y) \\ &= F(x\,, y)\,. \end{aligned}$$

Como a função $\underline{F}$ é injetora em $\underline{U}$, segue que

$$x\,' = x\,.$$

Com isto podemos concluir que, para cada $y \in W$, existe um único $x = g(y)$, ou ainda, uma função $g : W \to \mathbb{R}^n$, tal que

$$f(g(y)\,,y) = O_n\,,$$

completando a demonstração dos itens 1., 2. e parte do item 3., faltando mostrar que $g \in C^1(W;\,\mathbb{R}^n)$ e vale a identidade (5.163).

Para isto, consideremos a função $g : W \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$g(y) \doteq x\,, \quad \text{para cada} \quad y \in W\,, \tag{5.170}$$

onde $\underline{x}$ é o único elemento pertencente a $\underline{W}$, tal que

$$(x\,,y) \in U \quad \text{e} \quad f(x\,,y) = O_n\,,$$

obtido na 1.a parte da demonstração, ou seja,

$$f(g(y),y) = O_n\,, \quad \text{para cada} \quad y \in W\,, \tag{5.171}$$

Com isto teremos

$$\begin{aligned} F(g(y)\,,y) &\overset{(5.170)}{=} F(x\,,y) \\ &\overset{(5.164)}{=} (\underbrace{f(x\,,y)}_{=O_n}\,,y) \\ &= (O_n\,,y)\,, \quad \text{para cada} \quad y \in W\,. \end{aligned} \tag{5.172}$$

Definindo-se a função

$$G \doteq F^{-1} : V \to U$$

então, do Teorema da função inversa (ver Teorema (5.5.1)), segue que $G \in C^1(V\,;U)$.

Mas

$$\begin{aligned} F(g(y)\,,y) &\overset{(5.172)}{=} (O_n\,,y) \\ &\overset{G=F^{-1}}{=} F[G(O_n\,,y)]\,, \quad \text{para cada} \quad y \in W\,. \end{aligned}$$

Como a função $\underline{F}$ é injetora em $\underline{U}$, da identidade acima, segue que

$$(g(y)\,,y) = G(O_n\,,y)\,, \quad \text{para cada} \quad y \in W\,.$$

Logo se considerarmos as funções $\Pi_1 : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ dada por (é uma transformação linear, logo pertence a $C^1(\mathbb{R}^{n+m}\,;\mathbb{R}^n)$)

$$\Pi_1(x\,,y) \doteq x\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^{n+m}\,,$$

e $H : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ dada por (é uma transformação linear, logo pertence a $C^1(\mathbb{R}^{n+m}\,;\mathbb{R}^{n+m})$)

$$H(x\,,y) \doteq (O_n\,,y)\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^{n+m}\,,$$

segue que

$$g(y) = [\Pi_1 \circ G \circ H](x, y), \quad \text{para cada} \quad (x, y) \in V.$$

Como

$$G \in C^1(V; W), \ \Pi_1 \in C^1(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^n) \ \text{ e } \ H \in C^1(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^n),$$
$$\text{segue que} \quad g \in C^1(W; \mathbb{R}^n).$$

Para finalizar, precisamos mostrar (5.163).

Para isto, observemos que se considerarmos a função $\varphi : W \to \mathbb{R}^{n+m}$ dada por

$$\varphi(y) \doteq (g(y), y), \quad \text{para cada} \quad y \in W, \tag{5.173}$$

segue que $\varphi \in C^1(W; \mathbb{R}^{n+m})$ e, para $y \in W$, teremos (de modo semelhante como fizemos para mostrar (5.166))

$$\varphi'(y)(k) = (g'(y)(k), k), \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{R}^m. \tag{5.174}$$

Notemos que, para $y = y_o$, teremos

$$\begin{aligned} \varphi(y_o) &= (\underbrace{g(y_o)}_{=x_o}, y_o) \\ &= (x_o, y_o). \end{aligned} \tag{5.175}$$

Como

$$\begin{aligned} f[\varphi(y)] &\overset{(5.173)}{=} f(g(y), y) \\ &\overset{(5.171)}{=} O_n, \quad \text{para cada} \quad y \in W, \end{aligned}$$

segue, da Regra da cadeia, que

$$\{f'[\varphi(y)] \circ \varphi'(y)\}(k) = O_n, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{R}^m. \tag{5.176}$$

Mas

$$f'[\varphi(y_o)] \overset{(5.175)}{=} f'(x_o, y_o) = A,$$

e assim, de (5.176), teremos

$$[A \circ \varphi'(y_o)](k) = O_n, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{R}^m,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} O_n &= A \left[\underbrace{\varphi'(y_o)\, k}_{\overset{(5.174)}{=} (g'(y_o)(k), k) = (g'(y_o)(k), O_m) + (O_n, k)} \right] \\ &\overset{A \text{ é oper. linear}}{=} A\,[g'(y_o)(k), O_m) + (O_n, k)] \\ &= A\,[g'(y_o)(k), O_m)] + A\,[(O_n, k)] \\ &\overset{(5.156) \text{ e } (5.157)}{=} A_x[g'(y_o)k] + A_y(k) \end{aligned}$$

ou seja,

$$[A_x \circ g'(y_o)](k) + A_y(k) = O_n\,,$$
$$\text{ou ainda,}\quad [A_x \circ g'(y_o)](k) = -A_y(k)\,.$$

Aplicando A_x^{-1} a identidade acima, obteremos:

$$g'(y_o)(k) = -\left[A_x^{-1} \circ A_y\right](k)\,,$$

mostrando (5.163) e completando a demonstração do resultado.

□

Observação 5.6.3 *Em termos das componentes da função* $\underline{f}$ *e da função* $\underline{g}$ *a expressão (5.163) tornar-se-á a seguinte:*

Para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *e* $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$ *teremos:*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o, y_o)\,\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(y_o) = -\frac{\partial f_i}{\partial z_{n+k}}(x_o, y_o)\,,$$

onde

$$z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}\,.$$

Para ver isto, basta notar que

$$[A_x] = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o, y_o)\right)_{n\times n},$$
$$[g'(x_o, y_o)] = \left(\frac{\partial g_j}{\partial y_k}(x_o, y_o),\right)_{n\times m}$$
$$[A_y] = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_{n+k}}(x_o, y_o)\right)_{n\times m},$$

e assim

$$[A_x]\,[g'(y_o)] = -[A_y]\,,$$

que nos fornecerá a expressão acima.

Para finalizar consideremos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 5.6.1 *Seja* $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ *a função dada por*

$$f = (f_1, f_2), \tag{5.177}$$

onde $f_1, f_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ *são dadas por*

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \doteq 2\,e^{x_1} + x_2\,y_1 - 4\,y_2 + 3\,, \tag{5.178}$$
$$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \doteq x_2\,\cos(x_1) - 6\,x_1 + 2\,y_1 - y_3\,, \tag{5.179}$$

para $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^5$.

Aplique o Teorema da função implícita à equação

$$f(x, y) = (0, 0)\,, \quad \text{para} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3\,,$$

em uma vizinhança do ponto

$$P_o \doteq (0, 1, 3, 2, 7)\,. \tag{5.180}$$

Resolução:

Observemos que se

$$X_o \doteq (0\,,1) \quad \text{e} \quad Y_o \doteq (3\,,2\,,7) \in \mathbb{R}^3\,, \tag{5.181}$$

então

$$P_o = (X_o\,,Y_o) \tag{5.182}$$

$$f_1(X_o\,,Y_o) = f_1(0\,,1\,,3\,,2\,,7) \overset{(5.178)}{=} 2\,e^0 + 1\cdot 3 - 4\cdot 2 + 3 = 0\,, \tag{5.183}$$

$$\begin{aligned} f_2(X_o\,,Y_o) &= f_2(0\,,1\,,3\,,2\,,7) \\ &\overset{(5.179)}{=} 1\cdot\cos(0) - 6\cdot 0 + 2\cdot 3 - 7 \\ &= 0\,, \end{aligned} \tag{5.184}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(P_o) &\overset{(5.182)}{=} f(X_o\,,Y_o) \\ &\overset{(5.177)}{=} (f_1(X_o\,,Y_o)\,,f_2(X_o\,,Y_o)) \\ &\overset{(5.183)\text{ e }(5.184)}{=} (0\,,0) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Notemos também que

$$[f\,'(X_o,Y_o)] \overset{\text{Exercício}}{=} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

assim,

$$[A_x] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [A_y] = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Em particular, a matriz $[A_x]$ é inversível, pois

$$\det[A_x] = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 18 = 20 \neq 0\,.$$

Logo, pelo Teorema da função implícita, existem vizinhanças dos pontos $\underline{X_o}$ e $\underline{Y_o}$, em $\left(\mathbb{R}^2\,,d_{\mathbb{R}^2}\right)$ e $\left(\mathbb{R}^3\,,d_{\mathbb{R}^3}\right)$, respectivamente, que denotaremos por

$$U \doteq U(X_o) \quad \text{e} \quad V \doteq V(Y_o)\,,$$

respectivamente, e uma função $g : V \to U$ de pertence a $C^1(V\,;U)$, que satisfaz:

$$g(Y_o) = X_o\,, \quad \text{que, de (5.181), é equivalente a,} \quad g(3\,,2\,,7) = (0\,,1)\,,$$

$$f(g(y)\,,y) = (0,0)\,, \quad \text{para cada} \quad y \in U$$

e

$$\begin{aligned}
[g'(Y_o)] &= -A_x^{-1}A_y \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} \\ \\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5.7 Teorema de Schwarz

Começaremos esta seção, introduzindo o conceito de derivadas de ordem superior para funções de várias variáveis reais, a valores reais.

Definição 5.7.1 *Sejam $\underline{E}$, um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função que possui todas as derivadas parciais de 1.a ordem em $\underline{E}$.*

Se, para $i_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$ fixado, a função $\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_o}} : E \to \mathbb{R}$ for uma função diferenciável em $x_o \in E$ então, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, diremos que a função $\underline{f}$ possui **derivada parcial de segunda ordem, em relação à $\underline{x_{i_o}}$ e a $\underline{x_j}$, em $\underline{x_o}$**.

Neste caso definiremos, a **derivada parcial de segunda da função $\underline{f}$, em relação à $\underline{x_{i_o}}$ e $\underline{x_j}$, em $\underline{x_o}$**, *que será indicada por $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_{i_o}}(x_o)$, como sendo:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_{i_o}}(x_o) \doteq \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_o}}\right)(x_o). \tag{5.185}$$

Se a função $\underline{f}$ e todas as derivadas parciais de 1.a e 2.a ordem da função $\underline{f}$ forem funções contínuas em $\underline{E}$, diremos que a função $\underline{f}$ é de **classe C^2 em $\underline{E}$** *e escreveremos*

$$f \in C^2(E; \mathbb{R}), \tag{5.186}$$

ou seja, o conjunto $C^2(E; \mathbb{R})$ é formado por todas as funções, a valores reais, de classe C^2 em $\underline{E}$.

Observação 5.7.1

1. *Uma função $f : E \overset{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ será uma função de classe C^2 em $\underline{E}$, se cada uma das suas funções componentes pertencer $C^2(E; \mathbb{R})$.*

   Assim, o conjunto
   $$C^2(E; \mathbb{R}^m)$$
   é formado por todas as funções, a valores em $\mathbb{R}^m$, de classe C^2 em $\underline{E}$.

2. *Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que*

$$\left(C^2(E\,;\mathbb{R}^m),+,\cdot\right)$$

é um espaço vetorial real, onde as operações $\underline{+}$ e $\underline{\cdot}$ são as operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função, respectivamente.

Consideremos o:

Exemplo 5.7.1 *Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x\,,y)\doteq\begin{cases}\dfrac{x\,y^3}{x^2+y^2}\,, & \textit{para}\quad (x\,,y)\neq(0\,,0)\\ 0\,, & \textit{para}\quad (x\,,y)=(0\,,0)\end{cases}. \tag{5.187}$$

Mostre que a função $\underline{f}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, mas **<u>não</u>** *é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.*

Além disso, afirmamos que:

1. $f\,,\dfrac{\partial f}{\partial x}\,,\dfrac{\partial f}{\partial x}\in C\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)$, *isto é,* $f\in C^1\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)$*;*

2. *para cada $(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0\,,0)\}$, existem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x\,,y)\,,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y)$ e estas são funções contínuas em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0\,,0)\}$;*

3. *Temos que:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0\,,0)=1 \qquad e \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0\,,0)=0\,.$$

Notemos que, o item 3., nos diz que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0\,,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0\,,0)\,.$$

<u>**Resolução:**</u>

<u>**1.:**</u>

<u>Continuidade da função $\underline{f}$:</u>

De fato, a função $\underline{f}$ é contínua em $(x_o,y_o)\neq(0\,,0)$, pois é uma função racional cujo denominador, só se anula em $(x\,,y)=(0\,,0)$.

Notemos que, para cada $(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0\,,0)\}$, teremos

$$\begin{aligned}\left|\frac{x\,y^3}{x^2+y^2}\right| &\overset{|x\,y^3|\leq|x\,y|\,y^2\leq|x\,y|\,\left(x^2+y^2\right)}{\leq} |x\,y|\,\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\\ &=|x\,y|\,,\end{aligned}$$

ou seja, para cada $(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0\,,0)\}$, temos

$$-|x\,y|\leq\frac{x\,y^3}{x^2+y^2}\leq|x\,y|\,.$$

Como

$$\lim_{(x\,y)\to(0\,,0)} |x\,y| = 0\,,$$

do Teorema do Confronto (ou Sanduiche), segue que

$$\begin{aligned}\lim_{(x\,,y)\to(0\,,0)} f(x\,,y) &\overset{(5.187)}{=} \lim_{(x\,,y)\to(0\,,0)} \left[\frac{x\,y^3}{x^2+y^2}\right]\\ &= 0 \overset{(5.187)}{=} f(0\,,0)\,,\end{aligned}$$

ou seja, a função $\underline{f}$ é contínua em $(0\,,0)$.

Portanto $f \in C\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)$.

Observemos que se $(x\,,y) \neq (0,0)$, teremos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) &\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{y^3\left(x^2+y^2\right) - x\,y^3\,2\,x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ &= \frac{y^5 - x^2\,y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,, \qquad (5.188)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) &\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{3\,x\,y^2\left(x^2+y^2\right) - x\,y^3\,2\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ &= \frac{x\,y^4 + 3\,x^3\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,. \qquad (5.189)\end{aligned}$$

Estudemos a existência das derivadas paricias, de 1.a ordem, da função $\underline{f}$ em $(0\,,0)$.

Para isto notemos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(h\,,0) - f(0\,,0)}{h} &\overset{h\neq 0 \text{ e } (5.187)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h\cdot 0^3}{h^2+0^2} - 0}{h}\\ &= 0 \qquad (5.190)\\ \lim_{k\to 0} \frac{f(0\,,k) - f(0\,,0)}{k} &\overset{k\neq 0 \text{ e } (5.187)}{=} \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{0\cdot k^3}{0^2+k^2} - 0}{k}\\ &= 0\,, \qquad (5.191)\end{aligned}$$

ou seja, existem as derivadas paricias, de 1.a ordem, da função $\underline{f}$ em $(0\,,0)$ e, além disso,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) \overset{(5.190)}{=} 0 \qquad (5.192)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0) \overset{(5.191)}{=} 0\,. \qquad (5.193)$$

Logo, de (5.188), (5.189), (5.192) e (5.193), segue que as funções $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ serão dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) = \begin{cases} \dfrac{y^5 - x^2\,y^3}{(x^2+y^2)^2}\,, & \text{para} \quad (x\,,y) \neq (0\,,0) \\ 0\,, & \text{para} \quad (x\,,y) = (0\,,0) \end{cases}\,, \tag{5.194}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^4 + 3\,x^3\,y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, & \text{para} \quad (x\,,y) \neq (0\,,0) \\ 0\,, & \text{para} \quad (x\,,y) = (0\,,0) \end{cases}\,. \tag{5.195}$$

Observemos que as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$.

De fato, elas são funções contínuas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,,0)\}$, pois são funções racionais e portanto contínuas em seus domínios, a saber, em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,,0)\}$.

Para verificar a continuidade das funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ no ponto $(0\,,0)$ observamos que, para $(x\,,y) \neq (0,0)$, teremos

$$\begin{aligned} 0 \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y)\right| &\stackrel{(5.194)}{=} \left|\frac{y^5 - x^2\,y^3}{(x^2+y^2)^2}\right| \\ &= \left|\frac{y^3\;(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right| \\ &= \frac{\overbrace{|y^3|}^{=y^2\,|y|}\;\overbrace{|y^2 - x^2|}^{\leq x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^2} \\ &\leq \frac{\overbrace{y^2}^{\leq x^2+y^2}\;|y|\;(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &\leq \frac{(x^2+y^2)^2\;|y|}{(x^2+y^2)^2} \\ &= |y|\,, \end{aligned}$$

ou seja, para cada $(x\,,y) \neq (0\,,0)$, temos que

$$-\,|y| \leq \frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) \leq |y|\,. \tag{5.196}$$

Como

$$\lim_{(x\,,y)\to(0\,,0)} |y| = 0\,,$$

do Teorema do Sanduiche, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{(x\,,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) &\stackrel{(5.196)\text{ e Teor. Sanduiche}}{=} 0 \\ &\stackrel{(5.194)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0)\,. \end{aligned}$$

Temos também que, para $(x, y) \neq (0, 0)$, teremos

$$
\begin{aligned}
0 \leq \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| &\overset{(5.195)}{=} \left|\frac{x\, y^4 + 3\, x^3\, y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right| \\
&= \left|\frac{3\, x\, y^2 \left(\frac{1}{3}\, y^2 + x^2\right)}{(x^2 + y^2)^2}\right| \\
&= \frac{3\, |x|\, y^2 \overbrace{\left(\frac{1}{3}\, y^2 + x^2\right)}^{\leq x^2+y^2}}{(x^2 + y^2)^2} \\
&\leq 3\, \frac{|x| \overbrace{y^2}^{\leq x^2+y^2} (x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
&\leq \frac{|x|\, (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \\
&= |x|
\end{aligned}
$$

ou seja, para cada $(x, y) \neq (0, 0)$, temos que

$$
-\, |x| \leq \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \leq |x| \,. \tag{5.197}
$$

Como

$$
\lim_{(x, y) \to (0, 0)} |x| = 0 \,,
$$

do Teorema do Sanduiche, segue que

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x, y) \to (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &\overset{(5.197) \text{ e Teor. Sanduiche}}{=} 0 \\
&\overset{(5.195)}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \,.
\end{aligned}
$$

Portanto as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas em $(0, 0)$ e assim serão funções contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Portanto a função $\underline{f}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, isto é, $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}\right)$.

Observemos também que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0\,,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right](0\,,0) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(h\,,0) - \overbrace{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0\,,0)}^{\overset{(5.195)}{=}0}}{h} \\
&\overset{h\neq 0 \text{ e } (5.195)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h\cdot 0^4 + 3\cdot h^3\cdot 0^2}{(h^2+0^2)^2} - 0}{h} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{5.198}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0\,,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](0\,,0) \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0\,,k) - \overbrace{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0\,,0)}^{\overset{(5.194)}{=}0}}{k} \\
&\overset{k\neq 0 \text{ e } (5.194)}{=} \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{k^5 - 0^2\cdot k^3}{(0^2+k^2)^2} - 0}{k} \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{5.199}
$$

ou seja,

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0\,,0) \overset{(5.198)}{=} 0 \neq 1 \overset{(5.199)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0\,,0)\,,
$$

como afirmamos.

□

Observação 5.7.2 *Notemos que a função* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ ***não*** *é contínua em* $(0, 0)$*, em particular, a função* $\underline{f}$ ***não*** *é de classe* C^2 *em* $\mathbb{R}^2$*.*

Notemos que, derivando parcialmente a função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$*, relativamente a* $\underline{x}$*, no ponto* $(x\,,y) \neq (0\,,0)$*, obteremos:*

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right](x\,,y)
$$

$$
\overset{(5.195)\ com\ (x\,,y)\neq(0\,,0)}{=} \frac{\left(y^4 + 9\,x^2\,y^2\right)\left(x^2+y^2\right)^2 - 4\,x\,\left(x\,y^4 + 3\,x^3\,y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4}\,.
$$

Logo da identidade acima e de (5.198), segue que a função $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *será dada por*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x\,,y) = \begin{cases} \dfrac{(y^4 + 9\,x^2\,y^2)\,(x^2+y^2)^2 - 4\,x\,(x\,y^4 + 3\,x^3\,y^2)\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}\,, & se\ (x\,,y) \neq (0\,,0) \\ 0\,, & se\ (x\,,y) = (0\,,0) \end{cases}. \tag{5.200}$$

Mostremos que a função $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ ***não*** *é contínua em* $(x\,,y) = (0\,,0)$*, ou seja,*

$$\lim_{(x\,,y)\to(0\,,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x\,,y) \neq 0 \overset{(5.198)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0\,,0). \tag{5.201}$$

Para isto calcularemos o limite acima à esquerda, ao longo da curva parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$\gamma(t) \doteq (t\,,t)\,, \quad para\ cada \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Com isto, obteremos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(t\,,t) \overset{t\neq 0\ e\ (5.200)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{(t^4 + 9\,t^2\,t^2)\,(t^2+t^2)^2 - 4t\,(t\,t^4 + 3\,t^3\,t^2)\,(t^2+t^2)}{(t^2+t^2)^4} \overset{Exercício}{=} \frac{1}{2}$$

e observamos que este é distinto de

$$0 \overset{(5.198)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0\,,0)\,,$$

independente do limite à esquerda em (5.201) acima, existir ou não.

Logo a função $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ ***não*** *é uma função contínua em* $(x\,,y) = (0\,,0)$*, mostrando que a função* $\underline{f}$ ***não*** *é de classe* C^2 *em* $\mathbb{R}^2$ *e, além disso,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0\,,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0\,,0)\,. \tag{5.202}$$

Na verdade a função $\underline{f}$ *não é de classe* C^2*, em qualquer subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^2$ *que contenha a origem* $(0\,,0)$ *e fora desse conjunto ela será de classe* C^∞*.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Nosso objetivo é encontrar condições suficientes para que a indentidade (5.202) acima venha a ocorrer.

Para isto, precisaremos do:

Lema 5.7.1 *Sejam* $\underline{E}$, *um subconjunto aberto de* $\left(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2}\right)$, $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $\underline{E}$, *tal que a derivada parcial de 1.a ordem* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *e a derivada parcial de 2.a ordem* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ *existam em* $\underline{E}$, *ou seja, estão bem definidas as funções*

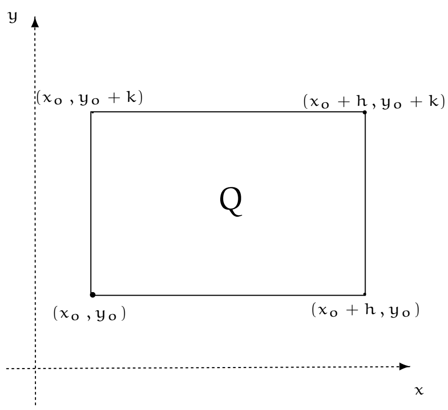
$$\frac{\partial f}{\partial x} : E \to \mathbb{R} \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} : E \to \mathbb{R} .$$

Denotemos por $\underline{Q}$, *um retângulo fechado, cujos lados são paralelos aos eixos coordenados, inteiramente contido em* $\underline{E}$, *tendo os pontos*

$$(x_o, y_o) \quad e \quad (x_o + h, y_o + k) ,$$

como seus vértices opostos, com $h, k \neq 0$ *(veja a figura abaixo) e definamos*

$$\Delta(f, Q) \doteq f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o + k) + f(x_o, y_o) . \qquad (5.203)$$



Então, existe $(\bar{x}, \bar{y}) \in \overset{\circ}{Q}$ *de modo que*

$$\Delta(f, Q) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(\bar{x}, \bar{y})\, h\, k . \qquad (5.204)$$

Demonstração:

Consideraremos o caso que

$$h, k > 0 .$$

Os outros casos são semelhantes e suas demonstrações ficarão à cargo do leitor.

Consideremos $u_k : [x_o, x_o + h] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$u_k(t) \doteq f(t, y_o + k) - f(t, y_o) , \quad \text{para} \quad t \in [x_o, x_o + h] . \qquad (5.205)$$

Observemos que, por hipótese, a função $\underline{f}$ tem derivada parcial de 1.a ordem, em relação à $\underline{x}$ (isto é, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$) em $\underline{E}$.

Em particular, isto implicará que as funções

$$t \mapsto f(t, y_o + k) \quad e \quad t \mapsto f(t, y_o)$$

são contínuas $[x_o\,, x_o + h]$ e diferenciáveis em $(x_o\,, x_o + h)$.

Logo, aplicando-se o Teorema do Valor Médio (visto na disciplina Análise 1) à função $u_k : [x_o\,, x_o + h] \to \mathbb{R}$, segue que existirá $\bar{x} \in (x_o\,, x_o + h)$ tal que

$$\begin{aligned}
\Delta(F\,, Q) &\overset{(5.203)\text{ e }(5.205)}{=} u_k(x_o + h) - u_k(x_o) \\
&\overset{\text{Teor. Valor Médio}}{=} u_k{}'(\bar{x})\; h \\
&\overset{(5.205)}{=} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}\,, y_o + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}\,, y_o)\right] h
\end{aligned} \tag{5.206}$$

Consideremos a função $\nu : [y_o\,, y_o + k] \to \mathbb{R}$, dada por

$$\nu(t) \doteq \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}\,, t)\,, \quad \text{para} \quad t \in [y_o\,, y_o + k]\,. \tag{5.207}$$

Observemos que a função $\underline{\nu}$ é contínua em $[y_o\,, y_o + k]$ e diferenciável em $(y_o\,, y_o + k)$ pois, por hipótese, a função $\underline{f}$ tem derivada parcial de 2.a ordem, em relação à $\underline{y}$ e $\underline{x}$ (isto é, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$) em $\underline{E}$.

Logo, aplicando-se o Teorema do Valor Médio (visto na disciplina Análise 1) à função $\nu : [y_o\,, y_o + k] \to \mathbb{R}$, segue que existirá $\bar{y} \in (y_o\,, y_o + k)$ tal que

$$\begin{aligned}
\Delta(F\,, Q) &\overset{(5.206)}{=} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}\,, y_o + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}\,, y_o)\right] h \\
&\overset{\text{Teor. Valor Médio e }(5.207)}{=} \nu\,'(\bar{y})\, k \\
&\overset{(5.207)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(\bar{x}\,, \bar{y})\; h\, k\,,
\end{aligned} \tag{5.208}$$

completando a demonstração.

□

Podemos agora, enunciar e demonstrar o Teorema de Schwarz, a saber:

Teorema 5.7.1 *Suponhamos que a função* $f : E \overset{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *contínua em* $\underline{E}$ *é tal que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *existem em* $\underline{E}$ *e a função* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ *seja contínua em* $(x_o\,, y_o) \in E$.

Então existe $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_o\,, y_o)$ *e, além disso,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_o\,, y_o) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x_o\,, y_o)\,. \tag{5.209}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Seja

$$A \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x_o\,, y_o)\,. \tag{5.210}$$

Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ é uma função contínua em $(x_o\,, y_o)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se

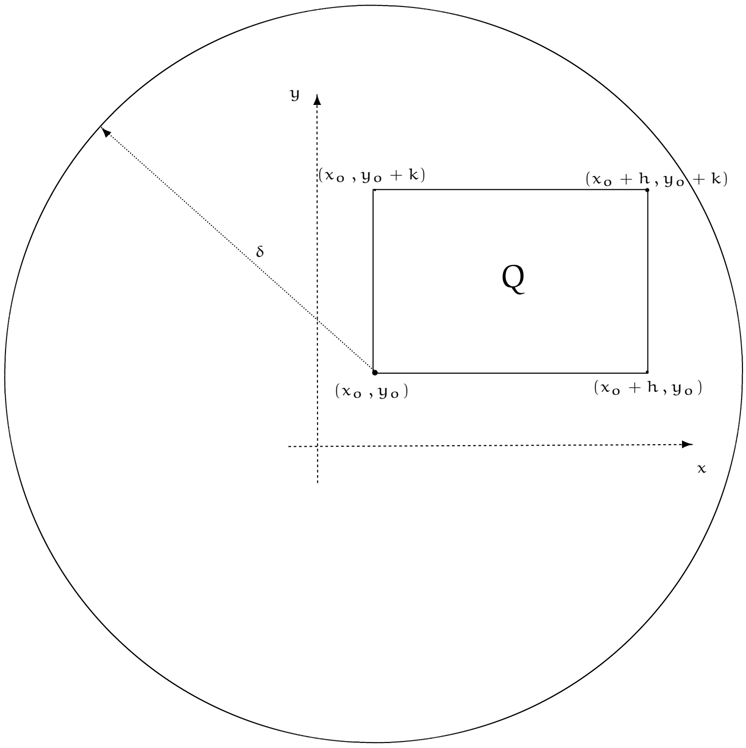
$$\|(x\,, y) - (x_o\,, y_o)\|_{\mathbb{R}^2} < \delta\,, \quad \text{deveremos ter} \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x\,, y) - A\right| < \varepsilon\,. \tag{5.211}$$

Denotemos por $\underline{Q}$, um retângulo fechado, como na hipótese do Lema (5.7.1), de modo que, se $(x, y) \in Q$ tenhamos

$$\|(x, y) - (x_o, y_o)\| < \delta, \tag{5.212}$$

ou seja, (veja a figura abaixo)

$$Q \subseteq \mathcal{B}((x_o, y_o); \delta). \tag{5.213}$$



Assim, do Lema (5.7.1), existe

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \overset{\circ}{Q} = (x_o, x_o + h) \times (y_o, y_o + k) \overset{(5.213)}{\subseteq} \mathcal{B}((x_o, y_o); \delta), \tag{5.214}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\Delta(f, Q)}{h\,k} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x_o, y_o) \right| &\overset{(5.210)}{=} \left| \frac{\Delta(f, Q)}{h\,k} - A \right| \\
&\overset{(5.204)}{=} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(\bar{x}, \bar{y}) - A \right| \\
&\overset{(5.214),(5.212) \text{ e } (5.211)}{<} \varepsilon.
\end{aligned} \tag{5.215}$$

Logo, de (5.203) e (5.215), para cada $h, k > 0$, tal que $Q \subset \mathcal{B}((x_o, y_o); \delta)$, teremos

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> \left| \frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o + k) + f(x_o, y_o)}{h\,k} - A \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \left[\frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o + h, y_o)}{k} - \frac{f(x_o, y_o + k) + f(x_o, y_o)}{k} \right] - A \right|.
\end{aligned} \tag{5.216}$$

Notemos que, da existência da derivada parcial de 1.a ordem $\frac{\partial f}{\partial y}$ em $\underline{E}$, segue que, para cada $h \neq 0$ fixado, temos que

$$\frac{f(x_o+h, y_o+k) - f(x_o+h, y_o)}{k} - \frac{f(x_o, y_o+k) + f(x_o, y_o)}{k} \to \frac{\partial f}{\partial y}(x_o+h, y_o) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o).$$

quando $k \to 0^+$.

Logo fazendo, para cada $h > 0$ fixado, de modo que $(h, k) \in Q$, fazendo $k \to 0^+$ em (5.216) (e utilizando o fato que a $|\cdot|$ é contínua em $\mathbb{R}$), obteremos:

$$\left| \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_o+h, y_o) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)}{h} - \underbrace{A}_{\overset{(5.210)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x_o, y_o)} \right| < \varepsilon. \tag{5.217}$$

Donde segue que existirá o limite $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_o+h, y_o) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)}{h}$ e, além disso, valerá a igualdade

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_o, y_o) &\overset{\text{Def. de } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_o, y_o)}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_o+h, y_o) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)}{h} \\
&\overset{(5.217)}{=} A \\
&\overset{(5.210)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x_o, y_o)
\end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

□

5.8 Fórmula e Polinômio de Taylor para Funções a Valores Reais, de Duas Variáveis

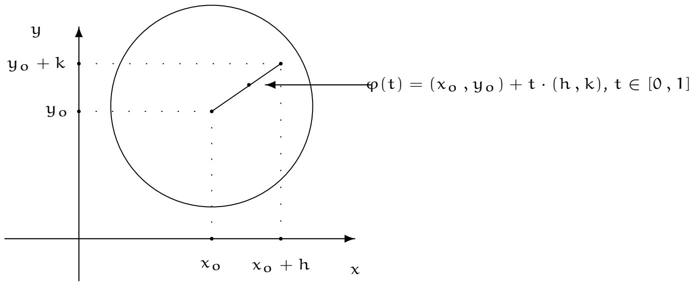
Nosso objetivo é encontrar uma expressão semelhante ao que foi feito para funções a valores reais, de uma variável real, no curso de Análise 1, para funções a valores reais, de n-variáveis reais.

Iniciaremos tratando do caso de funções a valores reais, de duas variáveis reais (isto é, o caso $n = 2$).

Observação 5.8.1 *Para isto consideremos $\underline{\mathcal{A}}$ um subconjunto aberto de $\left(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2}\right)$, $P_o \doteq (x_o, y_o) \in \mathcal{A}$ e $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, de modo que*

$$(x_o, y_o) + t \cdot (h, k) \in \mathcal{A}, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, 1],$$

que é possível pois o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ é um subconjunto aberto em $\left(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2}\right)$ e $P_o \in \mathcal{A}$ (veja figura abaixo).



Consideremos a função $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, *de classe* C^{n+1} *em* $\underline{\mathcal{A}}$ *e, a partir dela, definamos a função* $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(t) \doteq f(x_o + t\,h, y_o + t\,k), \quad \textit{para cada} \quad t \in [0, 1], \tag{5.218}$$

ou seja, a função $g \doteq f \circ \varphi$, *onde a função* $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ *é dada por*

$$\varphi(t) \doteq (x(t), y(t)) \doteq (x_o + t\,h, y_o + t\,k), \quad \textit{para cada} \quad t \in [0, 1], \tag{5.219}$$

que é uma parametrização do segmento de reta contido em $\underline{\mathcal{A}}$, *cujos extremos são os pontos* (x_o, y_o) *e* $(x_o + h, y_o + k)$, *ou ainda, que imagem da função* $\underline{\varphi}$ *é o segmento de reta que une o ponto* (x_o, y_o) *ao ponto* $(x_o + h, y_o + k)$, *contido no conjunto* $\underline{\mathcal{A}}$ *(veja a figura acima).*

Notemos que

$$\varphi'(t) \doteq (x'(t), y'(t)) \doteq (h, k), \quad \textit{para cada} \quad t \in [0, 1], \tag{5.220}$$

Como a função $\underline{\varphi}$ *é de classe* C^∞ *em* $[0, 1]$, *segue que a função* $\underline{g}$ *será uma função de classe* C^{n+1} *em* $[0, 1]$, *pois ela é a composta da função* $\underline{f}$ *com a função* $\underline{\varphi}$.

Podemos assim aplicar o Teorema de Taylor (isto é, o Teorema Taylor de Análise 1), para a função $\underline{g}$ *e obter a fórmula de Taylor para a função* $\underline{g}$, *com*

$$a = 0 \quad \textit{e} \quad b = 1\,.$$

Notemos que

$$\varphi(0) = (x_o, y_o) = P_o, \quad g(0) = f(P_o) \quad \textit{e} \quad g(1) = f(x_o + h, y_o + k)\,. \tag{5.221}$$

Fazendo uso da Regra da Cadeia (isto é, o Teorema (5.2.1)) teremos:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}[\varphi(t)]\,\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}[\varphi(t)]\,\frac{dy}{dt}(t) \\ &\overset{(5.220)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}[(x(t), y(t))]\,h + \frac{\partial f}{\partial y}[(x(t), y(t))]\,k, \end{aligned} \tag{5.222}$$

$$\begin{aligned} g''(t) &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[\varphi(t)]\,\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}[\varphi(t)]\,\frac{dy}{dt}(t)\right] h + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}[\varphi(t)]\,\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}[\varphi(t)]\frac{dy}{dt}(t)\right] k \\ &\overset{(5.220)}{=} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[\varphi(t)]\,h + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}[\varphi(t)]\,k\right] h + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}[\varphi(t)]\,h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}[\varphi(t)]\,k\right] k \\ &\overset{\textit{Teor. Schwarz:}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[(x(t), y(t))]\,h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}((x(t), y(t)]\,k\,h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}[(x(t), y(t)]\,k^2 \end{aligned} \tag{5.223}$$

$$
\begin{aligned}
g'''(t) &= \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}[\varphi(t)]\,\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}[\varphi(t)]\frac{dy}{dt}(t)\right]\,h^2 \\
&\quad + 2\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x}[\varphi(t)]\,\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x}[\varphi(t)]\frac{dy}{dt}(t)\right]\,k\,h \\
&\quad + \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}[\varphi(t)]\,\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}[\varphi(t)]\,\frac{dy}{dt}(t)\right]\,k^2 \\
&\overset{(5.220)}{=} \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}[\varphi(t)]h + \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}[\varphi(t)]k\right]\,h^2 + 2\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x}[\varphi(t)]\,h + \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x}[\varphi(t)]\,k\right]\,k\,h \\
&\quad + \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}[\varphi(t)]\,h + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}[\varphi(t)]\,k\right]\,k^2 \\
&\overset{T.\ Schwarz:}{=} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}[\varphi(t)]\,h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}[\varphi(t)]\,h^2\,k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x}[\varphi(t)]\,h\,k^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}[\varphi(t)]k^3
\end{aligned}
\tag{5.224}
$$

$$\vdots$$

$$g^k(t) = \cdots, \quad \textit{para cada} \quad k \in \{3, 4, \cdots, n+1\}.$$

Fazendo-se $t = 0$ *nas expressões acima, obtemos (lembremos que* $\varphi(0) = P_o$*):*

$$
\begin{aligned}
g'(0) &\overset{(5.222)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(P_o)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(P_o)\,k, \\
g''(0) &\overset{(5.223)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o)\,h^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(P_o)\,h\,k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_o)\,k^2, \\
g'''(0) &\overset{(5.224)}{=} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(P_o)h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}(P_o)\,h^2\,k + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}(P_o)\,h\,k^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(P_o)\,k^3.
\end{aligned}
\tag{5.225}
$$

Em geral, teremos:

$$g^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\,\partial y^j}(P_o)\,h^{n-j}\,k^j \tag{5.226}$$

$$g^{(n+1)}(c) = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\,\partial y^j}(x_o + c\,h, y_o + c\,k)\,h^{n+1-j}\,k^j, \tag{5.227}$$

para algum $c \in (0, 1)$.

Deste modo, teremos:

$$
\begin{aligned}
f(x_o + h, y_o + k) = g(1) &\overset{Teor.\ de\ Taylor\ de\ Análise\ 1}{=} g(0) + g'(0)\cdot 1 + \frac{g''(0)}{2!}\cdot 1^2 + \cdots \\
&\quad + \frac{g^{(n)}(0)}{3!}\cdot 1^3 + \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot 1^{n+1} \\
&\overset{(5.225)\ e\ (5.227)}{=} f(x_o, y_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)\ h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)\ k\right) \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_o, y_o)\,h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_o, y_o)\,h\,k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_o, y_o)\,k^2\right) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\,\partial y^j}(x_o, y_o)\,h^{n-j}\,k^j + R_{n+1}(h, k),
\end{aligned}
\tag{5.228}
$$

onde

$$R_{n+1}(h\,,k) \doteq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\,\partial y^{j}}(x_o + c\,h\,,y_o + c\,k)\,h^{n+1-j}\,k^{j}\,, \qquad (5.229)$$

para algum $c \in (0\,,1)$.

Notemos que, embora $\underline{c}$ *possa variar com* $(h\,,k)$, *temos que:*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\,\partial y^{j}}(x_o + c\,h\,,y_o + c\,k) = \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\,\partial y^{j}}(x_o\,,y_o)\,, \qquad (5.230)$$

pois a função $\underline{f}$ *é de classe* C^{n+1} *em* $\underline{\mathcal{A}}$, *logo a função* $\dfrac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\,\partial y^{j}}$ *será uma função contínua em* $(x_o\,,y_o) \in \mathcal{A}$ *e* $c \in (0\,,1)$.

Além do mais, para

$$j \in \{0\,,1\,,\cdots n\}\,,$$

teremos :

$$\begin{aligned}
\frac{|h^{n+1-j}\,k^{j}|}{\|(h\,,k)\|^{n}} &= \left|\frac{h^{n+1-j}\,k^{j}}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{n}{2}}}\right| \\
&= \frac{|h|^{n+1-j}}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{n-j}{2}}}\,\frac{|k|^{j}}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{j}{2}}} \\
&\overset{h^2+k^2\geq h^2,\,k^2}{\leq} \frac{|h|^{n+1-j}}{\left(h^2\right)^{\frac{n-j}{2}}}\,\frac{|k|^{j}}{\left(k^2\right)^{\frac{j}{2}}} \\
&= \frac{|h|^{n+1-j}}{|h|^{n-j}}\,\frac{|k|^{j}}{|k|^{j}} = |h|\,. \qquad (5.231)
\end{aligned}$$

Para

$$j = n+1\,,$$

teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{|h^{n+1-j}\,k^{j}|}{\|(h\,,k)\|^{n}} &= \left|\frac{h^{n+1-j}\,k^{j}}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{n}{2}}}\right| \\
&\overset{n+1=j}{=} \frac{|k|^{n+1}}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{n}{2}}} \\
&\overset{h^2+k^2\geq k^2}{\leq} \frac{|k|^{n+1}}{\left(k^2\right)^{\frac{n}{2}}} \\
&= |k|. \qquad (5.232)
\end{aligned}$$

Assim, do Teorema do Sanduiche, segue, de (5.231) *e* (5.232), *que para cada* $j \in \{0\,,1\,,\cdots\,,n+1\}$, *teremos:*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^{n+1-j}\,k^{j}}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{n}{2}}} = 0\,. \qquad (5.233)$$

Combinando as identidades (5.230) e (5.233), vemos que $R_{n+1}(h\,,k)$*, deverá satisfazer:*

$$\lim_{(h\,,k)\to(0,0)} \frac{R_{n+1}(h\,,k)}{\underbrace{\|(h\,,k)\|}_{=(h^2+k^2)^{\frac{n}{2}}}} \overset{(5.229)}{=} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\,\partial y^j}(x_o + c\,h\,, y_o + c\,k)\,h^{n+1-j}\,k^j}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\underbrace{\left[\lim_{(h\,,k)\to(0\,,0)} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\,\partial y^j}(x_o + c\,h\,, y_o + c\,k)\right]}_{\overset{continuidade}{=} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\,\partial y^j}(x_o\,,y_o)}\underbrace{\lim_{(h\,,k)\to(0\,,0)} \frac{h^{n+1-j}\;k^j}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{n}{2}}}}_{\overset{(5.233)}{=}0}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\,\partial y^j}(x_o\,, y_o)\cdot 0 = 0\,.$$

Portanto

$$\lim_{(h\,,k)\to(0\,,0)} \frac{R_{n+1}(h\,,k)}{\|(h\,,k)\|^n} = 0\,.$$

Com isto podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 5.8.1 *Considerando-se*

$$x \doteq x_o + h \qquad e \qquad y \doteq y_o + k$$

na expressão obtida em (5.228), definiremos **o polinômio de Taylor de grau (no máximo)** $\underline{n}$ **associado a função** $\underline{f}$ **no ponto** $P_o \doteq (x_o, y_o)$, *como sendo o polinômio* p_n *(nas duas variáveis* x *e* y*)) dado por:*

$$\begin{aligned} p_n(x\,,y) \doteq f(x_o\,,y_o) &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)\,(x-x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,(y-y_o)\right) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_o\,,y_o)\,(x-x_o)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_o\,,y_o)\,(x-x_o)\,(y-y_o) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_o\,,y_o)\,(y-y_o)^2\right) \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\,\partial y^j}(x_o\,,y_o)\,(x-x_o)^{n-j}\,(y-y_o)^j\,, \end{aligned} \tag{5.234}$$

e o **resto de Taylor associado a função** $\underline{f}$**, de ordem** $\underline{n+1}$**, no ponto** $P_o = (x_o\,,y_o)$, *indicado por* $R_{n+1}(h\,,k)$*, como sendo:*

$$R_{n+1}(h\,,k) \doteq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\,\partial y^j}(x_o + c\,h\,, y_o + c\,k)\,h^{n+1-j}\,k^j\,, \tag{5.235}$$

para algum $c \in (0\,,1)$.

Observação 5.8.2

(a) *A expressão (5.234) é conhecida como* **Fórmula de Taylor, de ordem $\underline{n}$ associado a função $\underline{f}$ no ponto $P_o = (x_o\,, y_o)$** .

(b) *Notemos que o polinômio de Taylor de grau $\underline{1}$, associado a função $\underline{f}$, no ponto $P_o = (x_o\,, y_o)$, será dado por:*

$$p_1(x\,, y) = f(P_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_o)\,(x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_o)\,(y - y_o) \tag{5.236}$$

cuja representação geométrica do gráfico é o plano tangente à representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ no ponto $\underline{P_o = (x_o\,, y_o)}$.

(c) *Já o polinômio de Taylor de grau $\underline{2}$, associado a função $\underline{f}$, no ponto $\underline{P_o = (x_o\,, y_o)}$, será dado por:*

$$\begin{aligned} p_2(x\,, y) &= f(P_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_o)\,(x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_o)\,(y - y_o) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o)\,(x - x_o)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(P_o)\,(x - x_o)\,(y - y_o) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_o)\,(y - y_o)^2\right), \end{aligned} \tag{5.237}$$

cuja representação geométrica do seu gráfico é uma quádrica, melhor aproxima (entre todas as quádricas) a representação geomética gráfico da função $\underline{f}$, perto do ponto $\underline{P_o = (x_o\,, y_o)}$.

(d) *Nos exemplos que seguem procuraremos identificar o comportamento da função $\underline{f}$, próximo ao ponto $P_o = (x_o\,, y_o)$, analisando a representação geométrica o gráfico do seu polinômio de Taylor de grau $\underline{2}$, associado à função $\underline{f}$, no ponto $P_o = (x_o\,, y_o)$.*

(e) *Podemos desenvolver um raciocínio análogo para funções de mais de duas variáveis reais, a valores reais.*

Deixaremos o desenvolvimento destas idéias como exercício para o leitor.

5.9 Máximos e Mínimos Locais de Funções, a Valores Reais, de Várias Variáveis Reais

Nesta seção, faremos uso de alguns resultados de Álgebra Linear, para classificar os pontos críticos de uma função $f : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que é de classe C^2, onde $\underline{\mathcal{A}}$ é subconjunto aberto e $(\mathbb{R}^n\,, d_{\mathbb{R}^n})$.

Para isto, lembremos que a **matriz hessiana da função $\underline{f}$ no ponto $P \in \mathcal{A}$**, indicada por $\mathrm{Hess}_f(P)$, será dada por:

$$\mathrm{Hess}_f(P) \doteq \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(P) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(P) \end{pmatrix}. \tag{5.238}$$

O determinante da matriz acima, será denotado por $H_f(P)$, e denominado **hessiano da função $\underline{f}$ no ponto $P \in \mathcal{A}$**, isto é,

$$H_f(P) \doteq \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(P) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(P) \end{vmatrix}. \tag{5.239}$$

Notemos que, para cada $P \in \mathcal{A}$, como $f \in C^2(\mathcal{A};\mathbb{R})$, do Teorema de Schwarz (isto é, o Teorema (5.7.1)), segue, para cada $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_j}(P).$$

Com isto temos que a matriz hessiana de $\underline{f}$ no ponto $P \in \mathcal{A}$, isto é, a matriz quadrada $\mathrm{Hess}_f(P)$, dada por (5.239), é uma matriz simétrica.

Portanto podemos aplicar um resultado da Álgebra Linear, que garante a existência de $\underline{n}$ autovalores reais, associados à matriz hessiana de $\underline{f}$ no ponto $\underline{P}$.

Além disso, existe uma base ortonormal do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, formada somente por autovetores associados à matriz matriz hessiana da função $\underline{f}$ no ponto $\underline{P}$, relativamente aos $\underline{n}$ autovalores reais associados à matriz hessiana de $\underline{f}$, no ponto $\underline{P}$.

Teorema 5.9.1 *(***Classificação de pontos críticos por meio de autovalores***)*

Seja $f : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em $\underline{\mathcal{A}}$, onde o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$.

Suponhamos que o ponto $P_o \in \mathcal{A}$ é um ponto crítico da função $\underline{f}$, isto é,

$$\nabla f(P_o) = O \in \mathbb{R}^n.$$

Sejam

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$

os autovalores (que serão números reais) associados à matriz hessiana da função $\underline{f}$ no ponto crítico $\underline{P_o}$.

Então:

(i) *se*

$$\lambda_j > 0\,, \quad \textit{para todo} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,, \tag{5.240}$$

então o ponto crítico $\underline{P_o}$*, da função* $\underline{f}$*, será um ponto de mínimo local da função* $\underline{f}$*.*

(ii) *se*

$$\lambda_j < 0\,, \quad \textit{para todo} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,, \tag{5.241}$$

então o ponto crítico $\underline{P_o}$*, da função* $\underline{f}$*, será um ponto de máximo local da função* $\underline{f}$*.*

(iiii) *se existirem dois autovalores* λ_{j_1} *e* λ_{j_2}*, para* $j_1\,,j_2 \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$*, com sinais opostos, por exemplo,*

$$\lambda_{j_1} > 0 \quad e \quad \lambda_{j_2} < 0\,,$$

então o ponto crítico $\underline{P_o}$*, da função* $\underline{f}$*, será um ponto de sela da função* $\underline{f}$*.*

(iv) *nos demais casos, isto é,*

(a) se $\lambda_j \geq 0$*, para todo* $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$ *e existe, pelo menos, um autovalor*

$$\lambda_i = 0\,,$$

ou

(b) se $\lambda_j \leq 0$*, para todo* $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$ *e existe, pelo menos um, um autovalor*

$$\lambda_i = 0\,,$$

não podemos afirmar nada sobre a natureza do ponto crítico $\underline{P_o}$ *da função* $\underline{f}$*.*

Demonstração:

Daremos a seguir uma idéia da demonstração.

Ao invés de usarmos a base canônica do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n\,,+\,\cdot)$, usaremos um resultado de Álgebra Linear, que nos garante a existência uma base ortonormal

$$\{\vec{v}_1\,,\vec{v}_2\,,\cdots\,,\vec{v}_n\}$$

de $(\mathbb{R}^n\,,+\,\cdot)$, formada por autovetores associados a matriz hessiana da função $\underline{f}$, no ponto $\underline{P_o}$.

Além disso, todos os seus autovalores são reais.

Em particular, teremos

$$\mathrm{Hess}(P_o)\vec{v}_j = \lambda_j \cdot \vec{v}_j\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}. \tag{5.242}$$

Consideremos a função $g : [0\,,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(t) \doteq f\,(P_o + t \cdot \vec{u})\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0\,,1]\,, \tag{5.243}$$

onde o vetor $\underline{\vec{u}}$ é um vetor não nulo e, com norma suficientemente pequena, para que o ponto

$$P_o + t \cdot \vec{u} \in A\,, \quad \text{para todo} \quad t \in [0\,,1]\,.$$

Notemos que isto é sempre possível, pois o conjunto $\underline{\mathcal{A}}$ é um subconjunto aberto em $(\mathbb{R}^n\,, d_{\mathbb{R}^n})$ e $P_o \in \mathcal{A}$.

Usando a Regra da Cadeia, podemos mostrar que,

$$g\,'(0) = \nabla f(P_o) \bullet \vec{u} = 0 \quad \text{e} \quad g\,''(0) = [\mathrm{Hess}_f(P_o)\vec{u}] \bullet \vec{u}\,. \tag{5.244}$$

A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Observemos que, da Fórmula de Taylor de ordem $\underline{2}$, para a função $\underline{f}$ no ponto $\underline{P_o}$ (veja (5.226) e (5.227)), quando a norma do vetor $\underline{\vec{u}}$ é pequena o bastante, o valor $\underline{f(P)}$, para $P = P_o + \vec{u}$, ficará suficiente próximo de

$$f(P_o) + \frac{1}{2}\,[\mathrm{Hess}_f(P_o)\vec{u}] \bullet \vec{u}\,.$$

Com isto, escrevendo o vetor $\underline{\vec{u}}$ na forma (lembremos que $\{\vec{v}_1\,, \vec{v}_2\,, \ldots, \vec{v}_n\}$ é uma base de $(\mathbb{R}^n\ +\ \cdot)$)

$$\vec{u} = h_1 \cdot \vec{v}_1 + h_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + h_n \cdot \vec{v}_n\,,$$

teremos que:

$$\begin{aligned}
2\,[f(P) - f(P_o)] &\sim [\mathrm{Hess}_f(P_o)\vec{u}] \bullet \vec{u} \\
&= [\mathrm{Hess}_f(P_o)(h_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + h_n \cdot \vec{v}_n)] \bullet (h_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + h_n \cdot \vec{v}_n) \\
&= [h_1\,\mathrm{Hess}_f(P_o)\,\vec{v}_1 + \cdots + h_n\,\mathrm{Hess}_f(P_o)\,\vec{v}_n] \bullet (h_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + h_n \cdot \vec{v}_n) \\
&\overset{\mathrm{Hess}_f(P_o)\vec{v}_j = \lambda_j \cdot \vec{v}_j}{=} [(h_1\,\lambda_1) \cdot \vec{v}_1 + \cdots + (h_n\,\lambda_n) \cdot \vec{v}_n] \bullet (h_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + h_n \cdot \vec{v}_n) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (\lambda_i h_i h_j)\,(\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j) \\
&\overset{\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = \delta_{ij}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,h_i^2 \\
&= \lambda_1\,h_1^2 + \cdots + \lambda_n\,h_n^2,
\end{aligned} \tag{5.245}$$

pelo fato dos autovetores associados a matriz hessiana da função $\underline{f}$, no ponto crítico $\underline{P_o}$, formarem uma base ortonormal de $(\mathbb{R}^n\,, +\,, \cdot)$.

Com isto podemos completar a demonstração deste resultado, tratando cada um dos casos separadamente.

Mostremos que (i) ocorre.

Para isto, suponhamos

$$\lambda_j > 0\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,, 2\,, \cdots n\}\,. \tag{5.246}$$

Então (5.246) implicará que

$$\lambda_1\,h_1^2 + \cdots + \lambda_n\,h_n^2 > 0\,, \quad \text{pois} \quad \vec{u} = h_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + h_n \cdot \vec{v}_n \neq \vec{O}\,.$$

Logo, de (5.245), teremos

$$2[f(P) - f(P_o)] \sim \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, h_i^2 > 0\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad f(P) > f(P_o)\,, \quad \text{para cada} \quad P \sim P_o\,,$$

que nos diz que a função $\underline{f}$ tem um ponto de mínimo local no ponto crítico $\underline{P_o}$.

Mostremos que (ii) ocorre.

Para isto, suponhamos

$$\lambda_j < 0\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,\cdots\,,n\}\,. \tag{5.247}$$

Então (5.247) implicará que

$$\lambda_1 \, h_1^2 + \cdots + \lambda_n \, h_n^2 < 0\,, \quad \text{pois} \quad \vec{u} = h_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + h_n \cdot \vec{v_n} \neq \vec{O}\,.$$

Logo, de (5.245), teremos

$$2[f(P) - f(P_o)] \sim \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, h_i^2 < 0\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad f(P) < f(P_o)\,, \quad \text{para cada} \quad P \sim P_o\,,$$

que nos diz que a função $\underline{f}$ tem um ponto de máximo local no ponto crítico $\underline{P_o}$.

Com isto mostramos (i) e (ii).

Mostremos que (iii) ocorre.

Suponhamos agora que existam

$$\lambda_i < 0 \quad \text{e} \quad \lambda_j > 0\,, \quad \text{para algum} \quad i\,,j \in \{1\,,2\,\cdots\,,n\}\,. \tag{5.248}$$

Consideremos

$$P_1 \doteq P_o + h_i \cdot \vec{v_i} \in A\,, \quad \text{onde} \quad h_i \neq 0\,, \tag{5.249}$$

$$P_2 \doteq P_o + h_j \cdot \vec{v_j} \in A\,, \quad \text{onde} \quad h_j \neq 0\,. \tag{5.250}$$

Deste modo temos, uma conta semelhante à (5.245), garante que:

$$\begin{aligned}
2\,[f(P_1) - f(P_o)] &\sim [\mathrm{Hess}_f(P_o)(h_i \cdot \vec{v_i})] \bullet (h_i \cdot \vec{v_i}) \\
&= h_i^2 \; [\mathrm{Hess}_f(P_o)\vec{v_i}] \bullet \vec{v_i} \\
&\overset{\mathrm{Hess}_f(P_o)\vec{v_i} = \lambda_i \cdot \vec{v_i}}{=} h_i^2 \, [\lambda_i \cdot \vec{v_i} \bullet \vec{v_i}] \\
&\overset{\vec{v_i} \bullet \vec{v_i} = 1}{=} \lambda_i \, h_i^2 \overset{(5.248) \text{ e } (5.249)}{<} 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
2[f(P_2) - f(P_o)] &\sim [\mathrm{Hess}_f(P_o)(h_j \cdot \vec{v_j})] \bullet (h_j \cdot \vec{v_j}) \\
&= h_j^2 \; [\mathrm{Hess}_f(P_o)\vec{v_j}] \bullet \vec{v_j} \\
&\overset{\mathrm{Hess}_f(P_o)\vec{v_j} = \lambda_j \cdot \vec{v_j}}{=} h_j^2 \, [\lambda_j \cdot \vec{v_j} \bullet \vec{v_j}] \\
&\overset{\vec{v_j} \bullet \vec{v_j} = 1}{=} \lambda_j \, h_j^2 \overset{(5.248) \text{ e } (5.250)}{>} 0\,.
\end{aligned}$$

Estas duas desigualdades mostram que,

$$f(P_1) < f(P_o) \quad \text{e} \quad f(P_2) > f(P_o), \quad \text{para} \quad P_1, P_2 \sim P_o,$$

completando a demonstração de (iii), isto é, que a função $\underline{f}$ tem um ponto de sela no ponto crítico $\underline{P_o}$.

O caso (iv) segue de exemplos semelhantes ao do Teorema do caso bidimensional.

Por exemplo, se considerarmos as funções $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \doteq x_1^4 + x_2^4, \quad g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \doteq -x_1^4 - x_2^4 \quad \text{e} \quad h(x_1, x_2, \cdots, x_n) \doteq x_1^4 - x_2^4,$$

onde $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então teremos que que a origem

$$P_o \doteq (0, 0, \cdots, 0)$$

será um ponto de mínimo local (que também será ponto mínimo global) para a função $\underline{f}$, será um ponto máximo local (que também será ponto de máximo global) para a função $\underline{g}$ e também será um ponto sela para a função $\underline{h}$.

A verificação destes fatos será deixado como exercício para o leitor.

Note que nos três casos, os autovalores associados as respectivas matrizes hessianas das funções $\underline{f}$, $\underline{g}$ e $\underline{h}$, no ponto crítico $\underline{P_o}$, serão todos nulos.

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação destes fatos.

□

Apliquemos o resultado acima ao exemplo:

Exemplo 5.9.1 *Classifique os pontos críticos da função* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y, z) \doteq x^3 - 3x + y^2 + z^2 - 2z, \quad \textit{para cada} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \tag{5.251}$$

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$ e para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3x^2 - 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z - 2, \tag{5.252}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 2, \tag{5.253}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y, z) \overset{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y, z) = 0, \tag{5.254}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x}(x, y, z) \overset{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z}(x, y, z) = 0, \tag{5.255}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}(x, y, z) \overset{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y}(x, y, z) = 0. \tag{5.256}$$

Encontremos os pontos críticos da função $\underline{f}$ a saber:

$$(0,0,0) = \nabla f(x,y,z) \overset{(5.252)}{=} (3x^2-3, 2y, 2z-2)$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} 3x^2-3=0 \\ 2y=0 \\ 2z-2=0 \end{cases},$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$P_1 \doteq (1,0,1) \quad \text{ou} \quad P_2 \doteq (-1,0,1), \tag{5.257}$$

são os únicos pontos críticos da função f.

A matriz hessiana associada a função $\underline{f}$ em $P=(x,y,z)$ será dada por:

$$\text{Hess}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$\overset{(5.253),(5.254),(5.255)\text{ e }(5.256)}{=} \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{5.258}$$

Desta forma teremos, para o ponto crítico $P_1=(1,0,1)$ da função $\underline{f}$, que

$$\text{Hess}_f(P_1) = \text{Hess}_f(1,0,1) \overset{(5.258)}{=} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz acima é uma matriz diagonal, seus autovalores são os elementos da diagonal principal, isto é, os autovalores associados a matriz $\text{Hess}_f(P_1)$ serão:

$$\lambda_1 = 6 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2. \tag{5.259}$$

Logo todos os autovalores associados a matriz hessiana de $\underline{f}$, no seu ponto crítico $\underline{P_1}$, são positivos (isto é, maiores que zero).

Portanto, do Teorema (5.9.1) item (i), segue que o ponto crítico $P_1=(1,0,1)$ é um ponto de mínimo local da função $\underline{f}$.

Para o ponto crítico $P_2 = (-1, 0, 1)$ da função $\underline{f}$, teremos:

$$\mathrm{Hess}_f(P_2) = \mathrm{Hess}_f(-1, 0, 1) \overset{(5.258)}{=} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz acima é uma matriz diagonal, seus autovalores são os elementos da diagonal principal, isto é, os autovalores associados a matriz $\mathrm{Hess}_f(P_1)$ serão:

$$\lambda_1 = -6 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2. \tag{5.260}$$

Logo os autovalores da matriz hessiana de $\underline{f}$ em P_2,

$$\lambda_1 = -6 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2$$

têm sinais contrários.

Portanto, do Teorema (5.9.1) item (iii), segue que o ponto crítico $P_2 = (-1, 0, 1)$ é ponto de sela da função $\underline{f}$.

□

A seguir temos um exemplo para uma função a valores reais, de quatro variáveis reais, a saber:

Exemplo 5.9.2 *Classifique os pontos críticos da função* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y, z, w) \doteq 2xy + 2yz + y^2 + z^2 - 2w^2 \quad \textit{para cada,} \quad (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4. \tag{5.261}$$

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$ e, para $P = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 2x + 2z - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 2y + 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial w}(P) = -4w, \tag{5.262}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(P) = -4, \tag{5.263}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(P) \overset{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(P) = 2, \tag{5.264}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x}(P) \overset{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z}(P) = 0, \tag{5.265}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(P) \overset{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y}(P) = 2, \tag{5.266}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial w}(P) \overset{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial w\, \partial x}(P) = 0, \tag{5.267}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial w}(P) \overset{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial w\, \partial y}(P) = 0, \tag{5.268}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial w}(P) \overset{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial w\, \partial z}(P) = 0. \tag{5.269}$$

Encontremos os pontos críticos associados à função $\underline{f}$, a saber:

$$(0\,,0\,,0\,,0) = \nabla f(x\,,y\,,z\,,w) \overset{(5.262)}{=} (2\,y\,,2\,x + 2\,y + 2\,z\,,2\,y + 2\,z\,,-4\,w)$$

que é equivalente ao sistema linear:

$$\begin{cases} 2\,y = 0 \\ 2\,x + 2\,y + 2\,z = 0 \\ 2\,y + 2\,z = 0 \\ -4\,w = 0 \end{cases}, \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$P_o \doteq (0\,,0\,,0\,,0) \tag{5.270}$$

será o o único ponto crítico da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}^4$.

Temos que

$$\mathrm{Hess}_f(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z,w) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y,z,w) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(x,y,z,w) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial w}(x,y,z,w) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y,z,w) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z,w) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(x,y,z,w) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial w}(x,y,z,w) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}(x,y,z,w) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}(x,y,z,w) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z,w) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial w}(x,y,z,w) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial w\,\partial x}(x,y,z,w) & \frac{\partial^2 f}{\partial w\,\partial y}(x,y,z,w) & \frac{\partial^2 f}{\partial w\,\partial z}(x,y,z,w) & \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(x,y,z,w) \end{pmatrix}$$

$$\overset{(5.263),(5.264),(5.265),(5.266),(5.267),(5.268)\text{ e }(5.269)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \tag{5.271}$$

para cada $(x\,,y\,,z\,,w) \in \mathbb{R}^4$ (isto é, é uma matriz constante).

Em particular, no ponto crítico $P_o = (0\,,0\,,0\,,0)$ da função $\underline{f}$, teremos:

$$\mathrm{Hess}_f(P_o) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico associado à matriz $\mathrm{Hess}(P_o)$ será dado por:

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= |\mathrm{Hess}_f(P_o) - \lambda I_4| \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^4 - 20\lambda^2 - 8\lambda + 32 \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} (4+\lambda)\left(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 8\right) . \qquad (5.272)
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\lambda_1 = -4 < 0$$

é uma raiz do polinômio caraterístico p_A.

Logo um autovalor associado a matriz hessiana da função $\underline{f}$, no seu ponto crítico $\underline{P_o}$, será

$$\lambda_1 = -4.$$

Como a função $\underline{p_A}$ é uma função contínua em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$ (pois é uma função polinomial) e

$$p_A(0) \overset{(5.272)}{=} 32 > 0 \quad \text{e} \quad p_A(2) \overset{(5.272)}{=} -48 < 0,$$

segue, do Teorema do Valor Intermediário (ou do Anulamento), que existe $\lambda_2 \in (0\,,2)$ tal que

$$p_A(\lambda_2) = 0,$$

ou seja, existe um autovalor $\underline{\lambda_2}$, associado a matriz hessiana da função $\underline{f}$ no seu ponto crítico $\underline{P_o}$, que é positivo, ou seja,

$$\lambda_2 > 0.$$

Portanto, do Teorema acima item (iii) (temos que $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$), segue que o ponto crítico $P_o = (0\,,0\,,0\,,0)$ é um ponto de sela da função $\underline{f}$.

O resultado a seguir, que também é um resultado de Álgebra Linear, nos fornece uma condição **necessária e suficiente** para decidir se uma **matriz simétrica** apresenta todos os autovalores positivos ou todos autovalores negativos.

Para enunciá-lo precisaremos da:

Definição 5.9.1 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem $\underline{n}$ e $k \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$.*

Definimos **o menor principal de ordem $\underline{k}$ associado a matriz A**, *como sendo o determinante da sub-matriz $A_k = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq k}}$, que será denotado por $m_k(A)$, ou seja, se a matriz A é dada por*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & a_{(k+1)3} & \cdots & a_{(k+1)k} & \cdots & a_{(k+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

então

$$m_k(A) \doteq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Exemplo 5.9.3 *Suponhamos que a matriz quadrada $\underline{A}$ é dada por*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Encontre todos os menores principais da matriz $\underline{A}$.

Resolução:

Temos que

$$m_4[A] = \det(A)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} 32, \tag{5.273}$$

$$m_3[A] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} 8, \tag{5.274}$$

$$m_2[A] = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6, \tag{5.275}$$

$$m_1[A] = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{5.276}$$

□

Com isto temos o seguinte resultado:

Teorema 5.9.2 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz (quadrada) simétrica de ordem $\underline{n}$.*

(i) *Todos os autovalores associados à matriz $\underline{A}$ são maiores que zero se, e somente se,*

$$m_k(A) > 0, \quad \textit{para cada} \quad k \in \{1, 2, \cdots n\}. \tag{5.277}$$

(ii) *Todos os autovalores associados à matriz $\underline{A}$ são menores que zero se, e somente se, $m_k(A) < 0$, para cada $k \in \{1, \cdots, n\}$ que é ímpar, e $m_k(A) > 0$, para cada $k \in \{1, \cdots, n\}$ que é par, ou seja,*

$$m_{2k+1}(A) < 0, \quad \textit{de modo que} \quad 2k+1 \in \{1, 3, \cdots, n\} \tag{5.278}$$

e

$$m_{2k}(A) > 0, \quad 2k \in \{2, 4, \cdots, n\}. \tag{5.279}$$

Demonstração:

A demonstração deste resultado será omitida.

□

Observação 5.9.1 *A parte (ii) segue da parte (i) trocando-se a matriz A pela matriz $-A$ e notando-se que*

$$m_k(-A) = (-1)^k\, m_k(A)\,.$$

A demonstração da identidade acima será deixada como exercício para o leitor.

Com isto podemos tratar do seguinte exemplo :

Exemplo 5.9.4 *Suponhamos que a matriz hessiana de uma função $f : A \subseteq \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, de classe C^2 em A, no ponto crítico $P_o \in A$, onde A é um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^4$, seja dada por:*

$$\mathrm{Hess}_f(P_o) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{5.280}$$

Classifique o ponto crítico $\underline{P_o}$ da função $\underline{f}$.

Resolução:

Observemos que:

$$m_4[\mathrm{Hess}_f(P_o)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} 4 > 0\,,$$

$$m_3[\mathrm{Hess}_f(P_o)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} 1 > 0\,,$$

$$m_2[\mathrm{Hess}_f(P_o)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0\,,$$

$$m_1[\mathrm{Hess}_f(P_o)] = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1 > 0\,.$$

Como

$$m_k[\mathrm{Hess}_f(P_o)] > 0\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \{1\,,2\,,3\,,4\},$$

segue, do Teorema (5.9.2) item (i), que todos os autovalores da matriz $\mathrm{Hess}_f(P_o)$ são maiores que zero.

Logo, do Teorema (5.9.1) item (i), segue que a função $\underline{f}$ tem um mínimo local no ponto crítico $\underline{P_o}$.

□

5.10 Exercícios

Capítulo 6

Existência e Unicidade de Soluções para o PVI de EDO's

Neste capítulo estudaremos a existência e unicidade de soluções do, assim denominado, PVI associado a uma EDO de 1.a ordem.

Mais exlicitamente, consideremos $t_o \in \mathbb{R}$, $x_o \in \mathbb{R}^n$, $a, b > 0$ e denotemos por

$$I_a \doteq [t_o - a\,, t_o + a]\,, \quad \mathcal{B}_b \doteq \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \|x - x_o\| \leq b\}\,,$$

$$\Omega \doteq I_a \times \mathcal{B}_b \subseteq R \times \mathbb{R}^n\,.$$

e uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ que seja contínua em Ω.

Com isto podemos considerar o problema de encontar solução, $x = x(t)$, do seguinte problema:

$$x'(t) = f(t\,, x(t))\,, \quad \text{para} \quad t \in I_\alpha \tag{6.1}$$

$$x(t_o) = x_o \tag{6.2}$$

$$x \in C^1(I_\alpha\,; \mathcal{B}_b)\,, \tag{6.3}$$

para algum $\alpha > 0$.

6.1 Teorema de Picard

Com as notações acima, nesta seção, faremos uma aplicação do Teorema de Ponto Fixo de Banach (isto é, o Teorema (5.4.1)) para demonstrar o::

Teorema 6.1.1 (Teorema de Picard) *Suponhamos que a função $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é contínua e limitada em $\underline{\Omega}$, isto é, existe $M \in (0\,, \infty)$ tal que*

$$\|f(t\,, x)\| \leq M\,, \quad \textit{para todo} \quad (t\,, x) \in \Omega \tag{6.4}$$

e, além disso, uma função <u>**Lipschitiziana em relação á segunda variável em Ω**</u>*, ou seja, existe $K \in [0\,, \infty)$, de modo que*

$$|f(t\,, x) - f(t\,, y)| \leq K\,|x - y|\,, \quad \textit{para todo} \quad (t\,, x)\,, (t\,, y) \in \Omega\,. \tag{6.5}$$

Então existe uma única solução $x = x(t)$ *do PVI* (6.1)-(6.2)-(6.3), *definida em* I_α, *onde*

$$\alpha \doteq \left\{ a \,, \frac{b}{M} \right\} . \tag{6.6}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Definamos

$$X \doteq C\left(I_\alpha \,; \mathcal{B}_b\right) \tag{6.7}$$

que tornar-se-á um espaço métrico completo quando munido da métrica d_∞ (isto é, a métrica da convergência uniforme), ou seja, para $\phi \,, \psi \in X$, definimos

$$d_\infty(\phi \,, \psi) \doteq \sup_{t \in I_\alpha} |\phi(t) - \psi(t)| . \tag{6.8}$$

Para cada $\phi \in X$, definamos a função $F(\phi) : I_\alpha \to \mathbb{R}$, dada por

$$F(\phi)(t) \doteq x_o + \int_{t_o}^{t} f(s \,, \phi(s))\, ds \,, \quad \text{para cada} \quad t \in I_\alpha . \tag{6.9}$$

Observemos que:

1. $F(X) \subseteq X$ isto é,
$$F : X \to X ; \tag{6.10}$$

2. para $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, temos que $F^n : X \to X$ é uma contração.

De fato, para mostrar 1. notemos, primeiramente, que do fato que a função $\underline{f}$ é contíuna em $\underline{\Omega}$, e de (6.9), segue que $F(\phi) \in C(I_\alpha \,; \mathbb{R})$

Observemos também que, para cada $t \in I_\alpha$, teremos:

$$\begin{aligned} |F(\phi)(t) - x_o| &\overset{(6.9)}{=} \left| x_o + \int_{t_o}^{t} f(s \,, \phi(s))\, ds - x_o \right| \\ &= \left| \int_{t_o}^{t} f(s \,, \phi(s))\, ds \right| \\ &\leq \int_{t_o}^{t} |f(s \,, \phi(s))|\, ds \\ &\overset{(6.4)}{=} \int_{t_o}^{t} M\, ds \\ &= M\, \alpha \\ &\overset{(6.6)}{=} b \,, \end{aligned} \tag{6.11}$$

isto é,

$$F(\phi)(t) \in \mathcal{B}_b \,, \quad \text{para todo} \quad t \in I_\alpha \,,$$

ou ainda,

$$F(\phi) \in C(I_\alpha \,; \mathcal{B}_b) = X \,,$$

mostrando o item 1.

Para mostrar o item 2., consideremos $\phi, \psi \in X$ e $n \in \mathbb{Z}^+$.

Afirmamos que, para todo $t \in I_\alpha$, teremos:

$$|F^n(\phi)(t) - F^n(\psi)(t)| \leq \frac{K^n\,|t-t_o|^n}{n!}\, d_\infty(\phi, \psi)\,. \tag{6.12}$$

A demonstração da identidade (6.12) acima será feita por indução.

Notemos que (6.12) é válida para $n = 0$, pois

$$\begin{aligned}
\left|F^0(\phi)(t) - F^0(\psi)(t)\right| &= |F(\phi)(t) - F(\psi)(t)| \\
&\overset{(6.9)}{=} \left|\left[x_o + \int_{t_o}^t f(s, \phi(s))\, ds\right] - \left[x_o + \int_{t_o}^t f(s, \psi(s))\, ds\right]\right| \\
&= \left|\int_{t_o}^t f(s, \phi(s))\, ds - \int_{t_o}^t f(s, \psi(s))\, ds\right| \\
&= \left|\int_{t_o}^t \underbrace{[f(s, \phi(s))\, ds - f(s, \psi(s))]}_{\overset{(6.5)}{\leq} K\,|\phi(s)-\psi(s)|}\, ds\right| \\
&\leq \int_{t_o}^t K \underbrace{|\phi(s) - \psi(s)|}_{\leq \sup_{s\in I_\alpha} |\phi(s)-\psi(s)|}\, ds \\
&\leq \int_{t_o}^t K\, d_\infty(\phi, \psi), ds \\
&= K\,|t - t_o|\, d_\infty(\phi, \psi)\,,
\end{aligned}$$

mostrando que (6.12) é válida para $n = 0$.

Suponhamos agora, que (6.12) é válida para $n = m$, ou seja,

$$|F^m(\phi)(t) - F^m(\psi)(t)| \leq \frac{K^m\,|t-t_o|^m}{m!}\, d_\infty(\phi, \psi)\,. \tag{6.13}$$

e mostremos que a mesma ocorrerá para $n = m + 1$.

Para tanto, notemos que, para cada $t \in I\alpha$, temos:

$$\begin{aligned}
\left|F^{m+1}(\phi)(t) - F^{m+1}(\psi)(t)\right| &= |F\,(F^m)\,(\phi)(t) - F\,(F^m)\,(\psi)(t)|\,, \\
&\overset{(6.9)}{=} \left|\left[x_o + \int_{t_o}^t f(s, F^m(\phi)(s))\, ds\right] - \left[x_o + \int_{t_o}^t f(s, F^m(\psi)(s))\, ds\right]\right| \\
&= \left|\int_{t_o}^t f(s, F^m(\phi)(s))\, ds - \int_{t_o}^t f(s, F^m(\psi)(s))\, ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_o}^t [f(s, F^m(\phi)(s)) f(s, F^m(\psi)(s))]\, ds\right| \\
&\leq \int_{t_o}^t \underbrace{|f(s, F^m(\phi)(s)) - f(s, F^m(\psi)(s))|}_{\overset{(6.5)}{\leq} K\,|F^m(\phi)(s))-F^m(\psi)(s)|}\, ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{Hip. de induçao}}{\leq} \int_{t_o}^{t} K \underbrace{|F^m(\phi)(s)) - F^m(\psi)(s)|}_{\overset{(6.13)}{\leq} \frac{K^m |s-t_o|^m}{m!} d_\infty(\phi,\psi)} ds \\
&\leq K \int_{t_o}^{t} \frac{K^m (s-t_o)^m}{m!} d_\infty(\phi, \psi)\, ds \\
&\leq \frac{K^{m+1}}{m!} d_\infty(\phi, \psi) \int_{t_o}^{t} (s-t_o)^m\, ds \\
&\overset{\text{Teor. Fund. Cálc.}}{=} \frac{K^{m+1}}{m!} d_\infty(\phi, \psi) \left[\frac{(s-t_o)^{m+1}}{m+1}\right]\Bigg|_{s=t_o}^{s=t} \\
&= \frac{K^{m+1} |t-t_o|^m}{(m+1)!} d_\infty(\phi, \psi)
\end{aligned}
$$

completando a demonstração da validade da identidade (6.12).

Como consequência de (6.12), para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ e $t \in I_\alpha$, teremos:

$$
\begin{aligned}
|F^n(\phi)(t) - F^n(\psi)(t)| &\leq \frac{K^n \overbrace{|t-t_o|}^{\leq \alpha}{}^n}{n!} d_\infty(\phi, \psi) \\
&\leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d_\infty(\phi, \psi)\,.
\end{aligned} \tag{6.14}
$$

Notemos que, a série numérica abaixo é convergente:

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(K\alpha)}{n!} = e^{K\alpha}\,.
$$

Logo, do Critério da divergência, segue que

$$
\frac{K^n \alpha^n}{n!} = \frac{(K\alpha)^n}{n!} \to 0\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.
$$

Portanto, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$
0 < \frac{K^N \alpha^N}{N!} < 1\,,
$$

que, de (6.14), implicará em:

$$
\left|F^N(\phi)(t) - F^N(\psi)(t)\right| \leq \underbrace{\frac{K^N \alpha^N}{N!}}_{\doteq L} d_\infty(\phi, \psi)\,, \tag{6.15}
$$

com

$$
0 < L < 1\,,
$$

ou seja, $F^N : X \to X$ é uma contração em (X, d_∞).

Como consequência do Teorema de ponto fixo de Banach, segue que existe um único ponto fixo da aplicação F^N em $\underline{X}$.

Portanto, do Corolário (5.4.1), segue que existe um único ponto fixo da fução $\underline{F}$ em $\underline{X}$, ou seja, existe uma única $x \in X = C(I_\alpha\,;\mathcal{B}_b)$ tal que

$$x = F(x)\,,$$

que, de (6.9), é equivalente a, para cada $t \in I_\alpha$:

$$x(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s\,,x(s))\,ds \tag{6.16}$$

Notemos que, como $x \in C(I_\alpha\,;\mathbb{R}^n)$ e $f \in C(\Omega\,;\mathbb{R}^n)$, de (6.16), segue que

$$x \in C^1\,(I_\alpha\,;\mathbb{R}^n)$$

e, além disso, do Teorema Fundamental do Cálculo (versão 1, isto é o Teorema (2.4.1)), teremos

$$\begin{aligned} x'(t) &\overset{(6.16)}{=} \frac{d}{dt}\left[x_o + \int_{t_o}^{t} f(s\,,x(s))\,ds\right] \\ &= \frac{d}{dt}\int_{t_o}^{t} f(s\,,s(s))\,ds \\ &\overset{\text{Teor. Fund. Cálc.}}{=} f(t\,,x(t))\,, \end{aligned}$$

e

$$x(t_o) \overset{(6.16)}{=} x_o + \int_{t_o}^{t_o} f(s\,,x(s))\,ds = x_o\,,$$

isto é, a função $x = x(t)$, dada por (6.16), é a única solução do do PVI (6.1)-(6.2)-(6.3), como queríamos demonstrar.

□

6.2 Teorema de Peano

Com as notações do início deste capitulo, nesta seção, faremos uma aplicação do Teorema de Arzelá-Ascoli (isto é, o Teorema (3.3.3)) para demonstrar o::

Teorema 6.2.1 (Teorema de Peano) *Suponhamos que a função $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é contínua e limitada em $\underline{\Omega}$, isto é, existe $M \in (0\,,\infty)$ tal que*

$$\|f(t\,,x)\| \leq M\,, \quad \textit{para todo} \quad (t\,,x) \in \Omega \tag{6.17}$$

Então existe, pelo menos, uma solução $x = x(t)$ do PVI (6.1)-(6.2)-(6.3), definida em I_α, onde $\alpha \in (0, \infty)$ é dado por (6.6).

Demonstração:

Como $f \in C(\Omega\,;\mathbb{R}^n)$, do Teorema de Stone versão real (isto é, o Teorema (3.4.3), ou ainda, o item 1. da Observação (3.4.2)) temos que existe uma sequência de funções $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ onde, para cada $k \in \mathbb{N}$, cada uma das componentes da função $f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$ são polinômios e

$$f_k \overset{\text{uniformemente}}{\to} f\,, \quad \text{quando} \quad k \to \infty\,. \tag{6.18}$$

Como consequência da convergência uniforme e do fato que a função $\underline{f}$ é limitada, temos que existe $N \in (0\,,\infty)$ e $K_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\|f_k(t\,,x)\| \leq N\,, \quad \text{para todo} \quad (t\,,x) \in \Omega\,, \tag{6.19}$$

para todo $k \geq K_o$.

Deixaremos os detalhes da demonstração deste fato como exercício para o leitor.

Notemos que, para cada $k \geq K_o$, a função $\underline{f_k}$ irá satisfazer as hipóteses do Teorema de Picard (isto é, do Teorema (6.1.1)).

De fato, pois a função $\underline{f_k}$ será contínua e limitada em $\underline{\Omega}$ (se $k \geq K_o$, por (6.19)), pois suas componentes são funções polinomiais definidas em $\underline{\Omega}$, logo contínuas em $\underline{\Omega}$.

Mostremos que a função $\underline{f_k}$ é Lipschitiziana em relação a segunda variável em $\underline{\Omega}$.

Afirmamos que, como as componentes da função $\underline{f_k}$ são funções polinomiais definidas em $\underline{\Omega}$ segue, em particular, que as derivadas parciais em relação a "segunda variável", serão uniformemente limitadas no compacto $\underline{\Omega}$.

De fato, como $\Omega = I_\alpha \times \mathcal{B}_b$ é um compacto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, as derivadas parciais de 1.a ordem

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(t\,,\underbrace{x}_{=(x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n)})$$

são funções contínuas em $\underline{\Omega}$, segue, que existe $L \in (0\,,\infty)$, tal que

$$\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(t\,,x)\right| \leq L\,, \quad \text{para todo} \quad (t\,,x) \in \Omega\,.$$

Logo, do Teorema do valor médio para funções de várias variáveis reais (isto é, o Corolário (5.3.1)), segue que

$$\|f_k(t\,,x) - f_k(t\,,y)\| \leq K\,\|x-y\|\,, \quad \text{para todo} \quad (t\,,x) \in \Omega\,, \tag{6.20}$$

ou seja, a função $\underline{f_k}$ é Lipschitiziana em relação à segunda variável em $\underline{\Omega}$.

Logo, para cada $k \geq K_o$, podemos aplicar o Teorema de Picard (ou seja, o Teorema (6.1.1)) para garantir a existência de uma única solução, que indicaremos por $x_k = x_k(t)$, do PVI

$$x_k{}'(t) = f_k(t\,,x_k(t))\,, \quad \text{para} \quad t \in I_\alpha \tag{6.21}$$

$$x_k(t_o) = x_o \tag{6.22}$$

$$x_k \in C^1(I_\alpha\,;\mathcal{B}_b)\,, \tag{6.23}$$

onde

$$\alpha \doteq \left\{a\,,\frac{b}{M}\right\}.$$

Notemos que (6.21)-(6.22)-(6.23) é equivalente à:

$$x_k(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f_k(s\,,x_k(s))\,ds\,, \quad \text{para} \quad t \in I_\alpha\,. \tag{6.24}$$

Observemos que:

1. a sequência de funções $(x_k)_{k \geq K_o}$ é equicontínua em I_α

   e

2. a sequência de funções $(x_k)_{k \geq K_o}$ é uniformemente limitada em I_α

   De fato, para $k \geq k_o$ temos:

$$
\begin{aligned}
|x_k(t) - x_k(s)| &\overset{(6.24)}{=} \left| \left[x_o + \int_{t_o}^{t} f_k(r, x_k(r))\, dr \right] - \left[x_o + \int_{t_o}^{s} f_k(r, x_k(r))\, dr \right] \right| \\
&= \left| \int_{t_o}^{t} f_k(r, x_k(r))\, dr - \int_{t_o}^{s} f_k(r, x_k(r))\, dr \right| \\
&= \left| \int_{s}^{t} f_k(r, x_k(r))\, dr \right| \\
&\leq \left| \int_{s}^{t} \underbrace{|f_k(r, x_k(r))|}_{\overset{(6.17)}{\leq} M}\, dr \right| \\
&\leq M\, |t - s|,
\end{aligned}
$$

implicando que a sequência de funções $(x_k)_{k \geq K_o}$ é equicontínua em I_α.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\|x_k(t)\| - \|x_o\| \leq \|x_k(t) - x_o\| &\overset{(6.21)\text{ e }(6.22)}{=} \left\| \left[x_o + \int_{t_o}^{t} f_k(r, x_k(r))\, dr \right] - x_o \right\| \\
&= \left\| \int_{t_o}^{t} f_k(r, x_k(r))\, dr \right\| \\
&\leq \left| \int_{t_o}^{t} \underbrace{\|f_k(r, x_k(r))\|}_{\overset{(6.19)}{\leq} N}\, dr \right| \\
&\leq N\, |t - t_o| \\
&\overset{t \in I_\alpha}{\leq} N\, \alpha \\
&\overset{(6.6)}{\leq} b,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\|x_k(t)\| \leq \|x_o\| + b, \quad \text{para todo} \quad t \in I_\alpha \ \text{ e } k \geq K_o,
$$

mostrando que a sequência de funções $(x_k)_{k \geq K_o}$ é uniformemente limitada em I_α.

Logo, do de Arzelá-Ascoli (isto é, o Teorema (3.3.3)), segue que existe uma subsequência da sequência de funções $(x_k)_{k \geq K_o}$, que será denotada como a mesma, isto é, $(x_k)_{k \geq K_o}$, que é uniformemente convergente em I_α, para uma função $x = x(t)$, definida em I_α, ou seja,

$$
x_k \overset{\text{uniformemente}}{\longrightarrow} x, \quad \text{em} \quad I_\alpha. \tag{6.25}
$$

Para cada $s \in I_\alpha$ e $k \geq K_o$ temos:

$$\begin{aligned}
\|f_k(s, x_k(s)) - f(s, x(s))\| &= \|\,[f_k(s, x_k(s)) - f(s, x_k(s))] + [f(s, x_k(s)) - f(s, x(s))]\,\| \\
&\leq \underbrace{\|f_k(s, x_k(s)) - f(s, x_k(s))\|}_{\overset{\text{uniformemente em } I_\alpha}{\longrightarrow} 0\,,\ \text{por } (6.18)} + \underbrace{\|f(s, x_k(s)) - f(s, x(s))\|}_{\overset{\text{uniformemente em } I_\alpha}{\longrightarrow} 0\,,\ \text{por } (6.25)} \\
&\overset{\text{uniformemente em } I_\alpha}{\longrightarrow} 0\,, \quad \text{quando} \quad k \to \infty\,. \qquad (6.26)
\end{aligned}$$

Logo, passando o limite, quando $k \to \infty$, em (6.24) (e utilizando, em cada componete das funções envolvidas, o Teorema (3.2.6)) segue que:

$$x(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s, x(s))\, ds\,, \quad \text{para cada} \quad t \in I_\alpha\,, \qquad (6.27)$$

ou seja, a função $x = x(t)$ satisfaz o PVI (6.1)-(6.2)-(6.3), definida em I_α, onde $\alpha \in (0, \infty)$ é dado por (6.6), finalizando a demonstração do resulado.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Rudin, W. -*Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, (1976). 2.1, 3.2.1, 2, 4.1, 4.1, 3

[2] Lima, E. L. - *Curso de Análise - Vol.1 e 2*, Projeto Euclides, IMPA, (1987).

Índice Remissivo