Notas de Aula de SMA301 - CÁLCULO I (6 créditos)

Wagner Vieira Leite Nunes
Departamento de Matemática
ICMC - USP

20 de novembro de 2015

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Estas notas tem com o objetivo ajudar os alunos a fixarem melhor o conteúdo desenvolvido na disciplina de Cálculo I.

Ao longo do curso serão introduzidos vários conceitos importantes que serão úteis em outras disciplinas do curso de graduação (por exemplo: Física I, Física II entre outras).

1.1 Cometários

Como disse Galileo Galilei (1564-1642): "O Grande Livro da Natureza está escrito em símbolos matemáticos".

O Cálculo é uma parte da matemática cujo propósito primário é estudar movimentos e mudanças no comportamento das funções a valores reais.

Será uma ferramenta indispensável em quase todos os campos das ciências puras e aplicadas, por exemplo, na Física, Química, Biologia entre outras.

Por quaisquer critérios que usem, os métodos e aplicações do Cálculo constituem uma das grandes realizações para as aplicações em problemas relacionados com nosso universo.

Entre os elementos de nosso estudos no curso de Cálculo I estarão as funções, mais especificamente, as funções, a valores reais, de uma variável real.

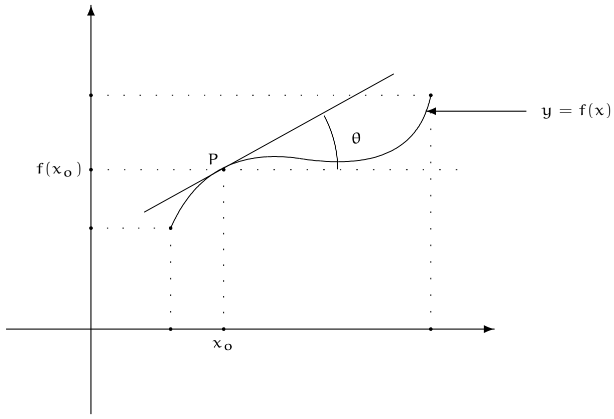
Falaremos sobre estas mais adiante.

O curso de Cálculo I é, em princípio, dividido em duas partes principais, a saber: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral.

Um problema básico relacionado com o **Cálculo Diferencial** é o "problema da tangente", isto é, encontrar a inclinação da reta tangente a uma curva plana num ponto P dado da mesma.

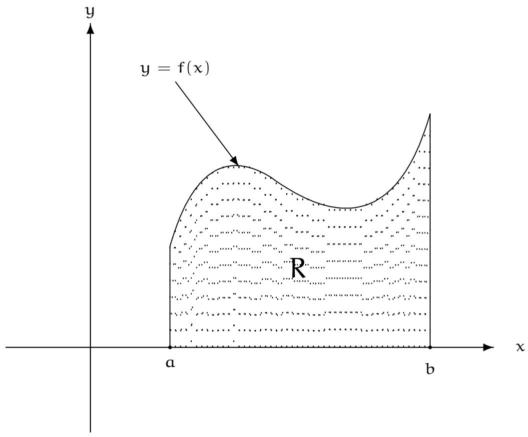
Suponhamos que a curva em questão seja a representação geométrica do gráfico de uma função $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $x_o \in I$ e $P = (x_o, f(x_o))$.

A questão tornar-se-á encontrar a tangente do ângulo θ, onde o ângulo θ é dado na figura abaixo.



Um problema básico relacionado com o **Cálculo Integral** é o "problema da área", isto é, calcular a área da região plana R, limitada do plano xOy, delimitada por uma curva, pelas retas verticais $x = a$, $x = b$ e pelo do eixo Ox.

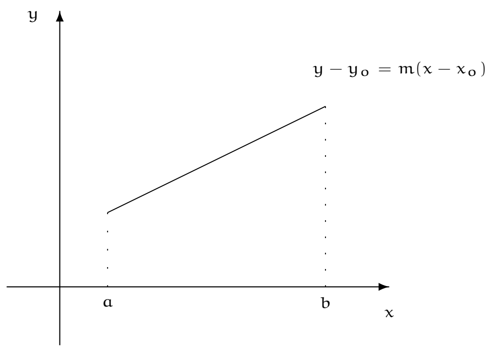
Vamos supor que a curva em questão seja a representação geométrica do gráfico de uma função $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ (veja figura abaixo).



Para alguns tipos particulares de curvas sabemos responder as duas questões acima, como por exemplo, no caso da curva plana ser um segmento de reta contido no plano xOy, dado pela equação

$$y - y_o = m(x - x_o), \quad x \in [a, b]$$

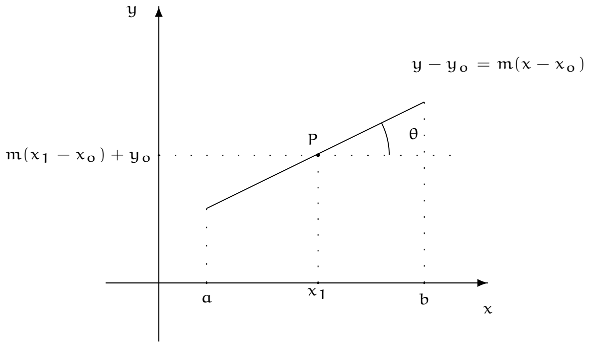
(veja figura abaixo).



No caso acima, para obter a inclinação θ da reta tangente ao gráfico da curva (que é um segmento de reta!) num ponto do gráfico da curva, que denotaremos por $P = (x_1, m(x_1 - x_o) + y_o)$, basta lembrar que

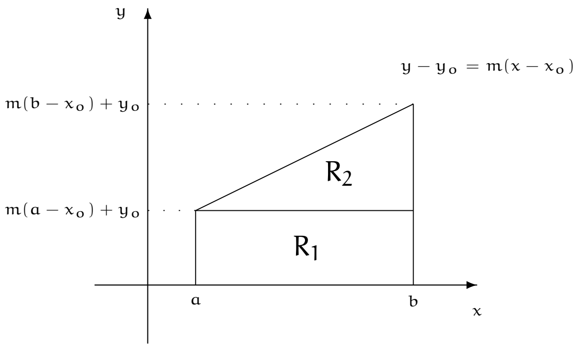
$$tg(\theta) = m,$$

onde o ângulo θ é dado pela figura abaixo.



De modo semelhante, para encontrarmos a área A da região plana limitada do plano xOy, delimitada pelo gráfico da curva acima (o segmento de reta), pelas retas verticais $x = a$, $x = b$ e pelo eixo Ox, basta verificarmos que a região pode ser dividida em duas, que denotaremos por R_1 e R_2, cujas áreas indicaremos por A_1 e A_2, respectivamente.

Assim teremos que R_1 será um retângulo (que tem como base o intervalo $[a, b]$ e altura $m(a - x_o) + y_o$) e R_2 será um triângulo, que tem como base o intervalo $[a, b]$ e altura $[m(b - x_o) + y_o] - [m(a - x_o) + y_o] = m(b - a)$ (veja figura abaixo).



Assim a área A da região R será dada por:

$$A = A_1 + A_2 = (b - a)\,[m(a - x_o) + y_o] + \frac{(b - a)\,[m(b - a)]}{2}.$$

Todavia, se a curva for mais "complicada" a dificuldade será grande para resolvermos os dois problemas acima.

Só para ilustrar, pense em tentar resolver os dois problemas acima para o caso em que a curva é a representação geométrica do gráfico da função

$$y = x^2, \quad x \in [0, 2].$$

Tente encontrar a inclinação da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função acima no ponto $P = (1, 1)$ e a área da região limitada do plano xOy, delimitada pelo gráfico da função acima, pelas retas verticais $x = 0$, $x = 2$ e pelo eixo Ox.

Entre outros, nosso objetivo será resolver os dois problemas acima.
Para tanto temos um longo caminho pela frente...
Começaremos pelo Cálculo Diferencial e depois trataremos do Cálculo Integral.

Observação 1.1.1

1. *O modo como estudaremos o Cálculo (Diferencial e Integral) foi concebido por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).*

   O Cálculo, na verdade, é produto de um longo processo evolutivo iniciado na Grécia Antiga.

   Uma das grandes contribuições de Newton e Leibniz foi reconhecer a conexão entre os dois problemas acima colocados (da tangente e da área).

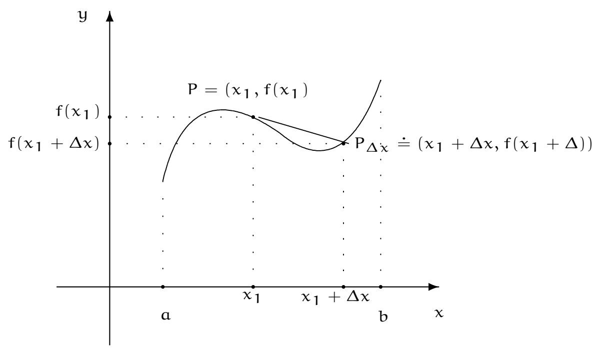
   Eles foram os primeiros a entender o significado do Teorema Fundamental do Cálculo que, de certo modo, relaciona o problema da tangente com o problema da área, como veremos ao longo do curso.

2. *Na Roma Antiga, a palavra Calculus, significava pedra pequena ou seixo, utilizado para contagem em jogos.*

3. *Vale observar que para encontrarmos a inclinação da reta tangente poderíamos agir da seguinte forma:*

   Escolha um número real positivo, que indicaremos por $\Delta x > 0$ *(poderia ser negativo), e considere a reta secante ao gráfico da curva (que vamos supor seja a representação geométrica do gráfico de uma função* $y = f(x)$, $x \in [a, b]$*) pelos pontos (veja figura abaixo)*

$$P = (x_1, f(x_1) \quad e \quad P_{\Delta x} \doteq (x_1 + \Delta x, f(x_1 + \Delta x)).$$



   Com isto podemos encontrar o coeficiente angular, m_{Δ_x}*, da reta secante à representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *passando pelos pontos (tente encontrar!)*

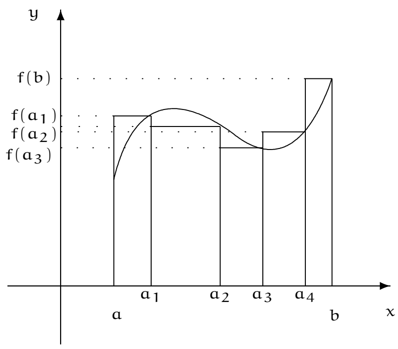
$$P = (x_1, f(x_1) \quad e \quad P_{\Delta x} \doteq (x_1 + \Delta x, f(x_1 + \Delta)).$$

   Podemos agora pensar em diminuir o acréscimo $\Delta x > 0$ *cada vez mais.*

   Provavelmente, quanto mais diminuirmos o acréscimo $\Delta x > 0$ *mais próximo* m_{Δ_x} *ficará do coeficiente angular, que denotaremos por* m*, da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *no ponto* $P = (x_1, f(x_1)$.

4. *De modo semelhante, podemos pensar em tentar encontrar o valor da área* A *da região plana* R *limitada, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, *pelas retas verticais* $x = a$, $x = b$ *e pelo eixo* Ox, *aproximando o valor da mesma por valores de áreas de regiões planas que sabemos calcular, por exemplo, retângulos!*

   Para isso, dividimos o intervalo $[a, b]$ *em vários sub-intervalos, não justapostos, e assim podemos dividir a região inicial em sub-regiões cujas áreas serão aproximadas por áreas de retângulos (vide figura abaixo).*



   Com isto sabemos calcular a soma das áreas dos retângulos, ue têm como bases os intervalos $[a_{j-1}, a_j]$ *e altura* $f(a_j)$, *para cada* $j \in \{1, 2, \cdots n\}$.

   Assim obtemos uma aproximação do valor da área da região incial.

   Quanto maior for a divisão do intervalo $[a, b]$ *mais próximos ficará o valor da soma das áreas dos retângulos da área da região inicial.*

5. *A questão que surge é quando paramos os processos acima?*

   Devemos ficar o resto das nossas vidas dividindo, dividindo...sem nunca conseguir obter o valor **<u>exato</u>** *para os elementos que estamos interessados em encontrar?*

6. *Na verdade os dois processos dependem de um método de aproximação.*

   Para não ficarmos o resto de nossas vidas fazendo aproximações, precisaremos desenvolver uma teoria que possa nos ajudar a acelerar o processo.

   Essa teoria é o que denominamos a **<u>Teoria dos Limites</u>** *que será estudada logo a seguir e terá um papel fundamental no dois processos acima, entre outras aplicações.*

7. *Como o instrumento básico do Cálculo são as funções, começaremos nossos estudos por elas.*

   Antes porém falaremos um pouco sobre os números reais e suas propriedades, cujos subconjuntos serão os domínios e contra-domínios das funções que consderaremos nesta disciplina.

   As funções que serão consideradas ao longo deste curso serão, a valores reais, de uma variável real.

   Depois passaremos ao estudo da Teoria dos Limites que será a base para tratarmos dos dois problemas iniciais.

Capítulo 2

Números Reais, Operações e Propriedades

2.1 Os números reais

A introdução do conjunto dos números reais pode ser feita baseando-se na existência dos números naturais, que denotaremos por $\mathbb{N}$, a saber:

$$\mathbb{N} \doteq \{0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

A partir deste podemos construir os números inteiros $\mathbb{Z}$, isto é,

$$\mathbb{Z} \doteq \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

A seguir podemos considerar os números racionais, que denotaremos por $\mathbb{Q}$, a saber:

$$\mathbb{Q} \doteq \left\{\frac{p}{q};\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\} = \{\text{números cuja representação decimal é finita ou infinita e periódica}\}.$$

Por último introduzimos os números irracionais, que denotaremos por $\mathbb{I}$, a saber:

$$\mathbb{I} \doteq \{\text{números cuja representação decimal é infinita e não periódica}\}.$$

Assim definimos o conjunto dos reais, $\mathbb{R}$, como sendo

$$\mathbb{R} \doteq \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

2.2 Adição e multiplicação no conjunto dos números reais

Podemos definir duas operações no conjunto dos números reais, a saber,

Definição 2.2.1 *uma denominada* <u>**adição de números reais**</u>

$$\begin{aligned} + \ :\quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & (a, b) \mapsto a + b \end{aligned}$$

que tem as seguintes propriedades:

A1. Comutativa da Adição:

$$a + b = b + a, \quad \text{para todo} \quad a, b \in \mathbb{R};$$

A2. Associativa da Adição:

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad \text{para todo} \quad a,b,c \in \mathbb{R};$$

A3. Elemento Neutro da Adição: existe um número real, 0 (dito número real zero), tal que

$$a+0 = a, \quad \text{para todo} \quad a \in \mathbb{R};$$

O número real 0 será dito **elemento neutro da adição** de números reais;

A4. Elemento Oposto da Adição: dado um número real, a, existe um número real, que será indicado por $-a$, tal que

$$a+(-a) = 0\,.$$

O número real $-a$ será dito **elemento oposto** associado ao número real a.

Definição 2.2.2 *A segunda operação será denominada* **multiplicação de números reais**

$$\begin{aligned} . \ : \ & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & (a,b) \mapsto a.b \end{aligned}$$

que tem as seguintes propriedades:

M1. Comutativa da Multiplicação:

$$a.b = b.a, \quad \text{para todo} \quad a,b \in \mathbb{R};$$

M2. Associativa da Multiplicação:

$$(a.b).c = a.(b.c), \quad \text{para todo} \quad a,b,c \in \mathbb{R};$$

M3. Elemento Neutro da Multiplicação: existe um número real, 1, tal que

$$a.1 = a, \quad \text{para todo} \quad a \in \mathbb{R};$$

O número real 1 será dito **elemento neutro da multiplicação** de números reais;

M4. Elemento Inverso da Multiplicação: dado um número real, a, diferente de 0, existe um número real, que será indicado por a^{-1}, tal que

$$a.\left(a^{-1}\right) = 1\,;$$

O número real a^{-1} será dito **elemento inverso da multiplicação** associado ao número real a (diferente de 0).

M5. Distributiva da Adição pela Multiplicação:

$$(a+b).c = a.c + b.c, \quad \text{para todo} \quad a,b,c \in \mathbb{R};$$

M6. Se $a.b = 0$ se, e somente se, $a = 0$ ou $b = 0$.

Observação 2.2.1

1. *Para* $x, y \in \mathbb{R}$, *definiremos:*
$$x - y \doteq x + (-y).$$

2. *Com as propriedades acima podemos obter outras propriedades que são úteis nas operações com números reais que podem ser encontradas na* O.^{a} *lista exercício e cuja resolução será deixada a cargo do leitor.*

3. *Nos casos em que formos simplificar expressões algébricas com números reais devemos tomar muito cuidado para evitar erros do seguinte tipo:*

$$\text{Se } x = y \neq 0 \quad \overset{\cdot x}{\Rightarrow} \quad x^2 = xy \quad \overset{-y^2}{\Rightarrow} \quad x^2 - y^2 = xy - y^2$$
$$\Rightarrow \quad (x+y)(x-y) = (x-y)y \quad \overset{(*)}{\Rightarrow} \quad x + y = y \Rightarrow \quad x = 0,$$

o que é um absurdo pois $x \neq 0$.

Onde está o erro?

O erro está em (*), já que nesta simplificação que fizemos, não levamos em conta que como $x = y$, *ou seja,* $x - y = 0$, *e portanto não podemos fazer a simplificação (*).*

Portanto todo cuidado é pouco na hora de fazermos simplificações.

2.3 Axiomas de ordem no conjunto dos números reais

Para ordenarmos os elementos do conjunto dos números reais precisaremos introduzir o seguinte axioma:

Axioma 2.3.1 *Existe um subconjunto, não vazio, dos números reais, que indicaremos por* $\mathcal{P}$, *que será denominado* <u>**conjunto dos números reais positivos**</u> *que tem as seguintes propriedades:*

P1. *Se* $a \in \mathbb{R}$ *então ou* $a \in \mathcal{P}$, *ou* $-a \in \mathcal{P}$ *ou* $a = 0$ *;*

P2. *Se* $a, b \in \mathcal{P}$ *então* $a + b \in \mathcal{P}$ *;*

P3. *Se* $a, b \in \mathcal{P}$ *então* $a.b \in \mathcal{P}$.

Com isto podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 2.3.1 *Diremos que um número real* $\underline{a}$ *será dito* <u>**negativo**</u> *se* $-a \in \mathcal{P}$.

Observação 2.3.1

1. *Vamos fixar que* $0 = -0 \notin \mathcal{P}$, *ou seja* 0 *não é nem um número real positivo, nem negativo.*

2. *Deste modo podemos dividir o conjunto dos números reais, excetuando-se o número real zero, em dois conjuntos disjuntos muito bem definidos, a saber, os conjuntos formados pelos números reais positivos e os números reais negativos.*

Com isto temos as seguintes definições:

Definição 2.3.2 *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$.

1. *Diremos que o número real* $\underline{a}$ *é* **menor que** *o número real* $\underline{b}$*, indicando por* $a < b$*, se* $(b - a) \in \mathcal{P}$ *;*

2. *Diremos que o número real* $\underline{a}$ *é* **menor ou igual que** *o número real* $\underline{b}$*, indicando por* $a \leq b$*, se* $a < b$ *ou* $a = b$ *;*

3. *Diremos que o número real* $\underline{a}$ *é* **maior que** *o número real* $\underline{b}$*, indicando por* $a > b$*, se* $(a - b) \in \mathcal{P}$ *;*

4. *Diremos que o número real* $\underline{a}$ *é* **maior ou igual que** *o número real* $\underline{b}$*, indicando por* $a \geq b$*, se* $a > b$ *ou* $a = b$ *.*

Podemos então obter o seguinte resultado:

Proposição 2.3.1 *Sejam* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*. Temos que:*

1. $a > 0$ *se, e somente se,* $a \in \mathcal{P}$ *;*

2. $a < 0$ *se, e somente se,* $(-a) \in \mathcal{P}$ *;*

3. *Se* $a < b$ *e* $b < c$ *então* $a < c$ *;*

4. *Se* $a < b$ *então* $a + c < b + c$*;*

5. *Se* $a < b$ *e* $c < d$ *então* $a + c < b + d$ *;*

6. *Se* $a < b$ *e* $c > 0$ *então* $a.c < b.c$ *;*

7. *Se* $a < b$ *e* $c < 0$ *então* $a.c > b.c$ *.*

Demonstração:

De 1.:

Da Definição (2.3.2) item 3. temos que

$$a > 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad (a - 0) \in \mathcal{P},$$

que é equivalente escrever $a \in \mathcal{P}$ (pois $a - 0 = a$), como queríamos mostrar.

De 2.:

Da Definição (2.3.2) item 1. temos que

$$a < 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad 0 - a \in \mathcal{P},$$

que é o mesmo que escrever $-a \in \mathcal{P}$ (pois $0 - a = -a$), como queríamos mostrar.

De 3.:

Da Definição (2.3.2) item 1., temos que

$$\text{se} \quad a < b \quad \text{e} \quad b < c\,, \quad \text{então} \quad (b - a) \in \mathcal{P} \quad \text{e} \quad (c - b) \in \mathcal{P}.$$

Do Axioma (2.3.1) item P2. segue que

$$\underbrace{(b - a) + (c - b)}_{=c-a} \in \mathcal{P}, \quad \text{isto é,} \quad (c - a) \in \mathcal{P}.$$

Logo, da Definição (2.3.2) item 1., segue que

$$a < c,$$

como queríamos mostrar.

De 4.:

Da Definição (2.3.2) item 1.,

$$\text{se} \quad a < b \quad \text{então} \quad (b - a) \in \mathcal{P}.$$

Mas,

$$(b + c) - (a + c) = b - a\,, \quad \text{ou seja,} \quad (b + c) - (a + c) \in \mathcal{P}.$$

Logo, da Definição (2.3.2) item 1., segue que

$$a + c < b + c,$$

como queríamos mostrar.

De 5.:

Da Definição (2.3.2) item 1.,

$$\text{se} \quad a < b \quad \text{então} \quad (b - a) \in \mathcal{P}.$$

De modo análogo,

$$\text{se} \quad c < d \quad \text{então} \quad (d - c) \in \mathcal{P}.$$

Do Axioma (2.3.1) item P2. segue que

$$\underbrace{(b - a) + (d - c)}_{=(b+d)-(a+c)} \in \mathcal{P}\,, \quad \text{isto é,} \quad [(b + d) - (a + c)] \in \mathcal{P}.$$

Logo, da Definição (2.3.2) item 1. segue que

$$a + c < b + d,$$

como queríamos mostrar.

De 6.:

Da Definição (2.3.2) item 1.,

$$\text{se} \quad a < b \quad \text{então} \quad (b - a) \in \mathcal{P}\,, \quad \text{e se} \quad c > 0 \quad \text{então} \quad (c - 0) \in \mathcal{P}.$$

Do Axioma (2.3.1) item P3. segue que

$$\underbrace{[(b - a).\overbrace{(c - 0)}^{=c}]}_{=(b-a).c=c.b-c.a} \in \mathcal{P}\,, \quad \text{isto é,} \quad (c.b - c.a) \in \mathcal{P}.$$

Logo, da Definição (2.3.2) item 1., segue que

$$c.a < c.b,$$

como queríamos mostrar.

De 7.:

Da Definição (2.3.2) item 1.,

$$\text{se} \quad a < b \quad \text{então} \quad (b - a) \in \mathcal{P}, \quad \text{e se} \quad c < 0 \quad \text{então} \quad -c \in \mathcal{P}.$$

Do Axioma (2.3.1) item P3. segue que

$$[\underbrace{(\overbrace{b - a}^{=b+(-a)}).(-c)}_{=(-c).b+(-c).(-a)=c.a-c.b}] \in \mathcal{P}, \quad \text{isto é,} \quad (c.a - c.b) \in \mathcal{P}.$$

Logo, da Definição (2.3.2) item 1., segue que

$$c.b < c.a,$$

como queríamos mostrar.

□

Observação 2.3.2

1. *As propriedades 3., 4. e 5. valem se substituirmos o sinal $<$ pelo sinal $\leq$.*

   O enunciados e as respectivas demonstrações destes novos casos serão deixados como exercício para o leitor.

2. *As propriedades 6. e 7. valem se substituirmos o sinal $<$ pelo $\leq$ e o sinal > 0 pelo sinal ≥ 0, respectivamente.*

   O enunciados e as respectivas demonstrações desses novos casos serão deixados como exercício para o leitor.

3. *Como as operações acima podemos colocar o conjunto dos números reais em ordem, ou seja, podemos ordená-lo completamente.*

   Isto será de grande valia na próxima seção.

2.4 A reta numerada

Observemos que o conjunto dos números reais está em correspondência bijetora (injetora e sobrejetora) com os pontos de uma reta geométrica, isto é, a cada número real podemos fazer corresponder um único ponto da reta e reciprocamente, a cada ponto da reta corresponderá um único número real.

Para vermos isto, fixemos uma reta $\underline{r}$ e um segmento, cujo comprimento será nossa unidade de comprimento $\underline{u}$ (que denominaremos apenas por unidade).

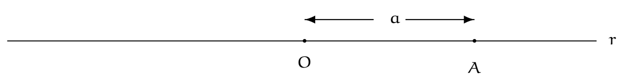
Sobre a reta $\underline{r}$, que será denominada **eixo**, fixemos um ponto O, que será denominado **origem**.

Ao número real 0 associaremos o ponto O da reta fixado acima e reciprocamente.

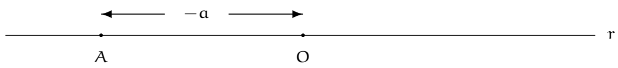
Podemos supor, sem perda de generalidade que a reta está na posição horizontal.

A seguir diremos como associar a cada número real, um único ponto da reta $\underline{r}$ e reciprocamente.

Dado um número real $\underline{a}$, diferente de 0, se ele for positivo, associaremos a este um ponto A sobre a reta $\underline{r}$, que dista $\underline{a}$ unidades da origem O (isto é, $d(O, A) = a$) e está à direita da mesma (vide figura abaixo).



Se o número real a for negativo, associaremos a este um ponto A sobre a reta r, que dista $-a$ unidades da origem O (isto é, $d(O, A) = -a$) e está à esquerda da mesma (como a é negativo temos que $-a$ é positivo; vide figura abaixo).



Deste modo identificamos a cada número real a um ponto da reta r e reciprocamente, a cada ponto da reta podemos associar um número real (por exemplo, se A é um ponto da reta r diferente da origem, calculando-se a distância do mesmo à origem O, que indicaremos por $d(O, A)$ e ele estiver à direita da origem o número real será $a \doteq d(O, A)$ e se estiver à esquerda da origem o número real será $a \doteq -d(O, A)$).

Notação 2.4.1 *À reta assim obtida daremos o nome de* **reta numerada**.

Observação 2.4.1 *Devido à relação bijetora acima obtida entre o conjunto dos números reais e pontos da reta r, nos referiremos ao conjunto dos números reais como sendo à reta $\mathbb{R}$ (sem nos preocupar com as diferenças entre ambos, isto é, pontos da reta e números reais).*

2.5 Intervalos da reta $\mathbb{R}$

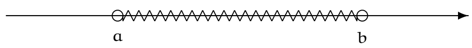
Introduziremos, a seguir, uma série de subconjuntos da reta $\mathbb{R}$ que serão de grande importância no desenvolvimento dos próximos capítulos, a saber, os intervalos da reta.

Definição 2.5.1 *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *com* $a < b$.
Definimos:

1. *o* **intervalo aberto de extremos nos pontos a e b**, *indicado por* (a, b), *como sendo o seguinte subconjunto da reta* $\mathbb{R}$:

$$(a, b) \doteq \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a < x < b\},$$

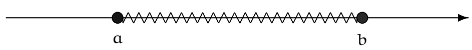
cuja representação geométrica é dada pela figura abaixo:



2. *o* **intervalo fechado de extremos nos pontos a e b**, *indicado por* $[a, b]$, *como sendo o seguinte subconjunto da reta* $\mathbb{R}$:

$$[a, b] \doteq \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a \leq x \leq b\},$$

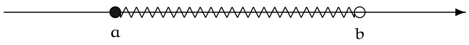
cuja representação geométrica é dada pela figura abaixo:



3. *o* **intervalo semi-aberto à direita de extremos nos pontos a e b** *(ou* **intervalo semi-fechado à esquerda de nos pontos extremos a e b***), indicado por* $[a, b)$, *como sendo o seguinte subconjunto da reta* $\mathbb{R}$:

$$[a, b) \doteq \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a \leq x < b\},$$

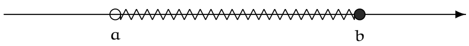
cuja representação geométrica é dada pela figura abaixo:



4. *o* **intervalo semi-aberto à esquerda de extremos nos pontos** a **e** b *(ou* **intervalo semi-fechado à direita de extremos nos pontos** a **e** b*), indicado por* $(a, b]$*, como sendo o seguinte subconjunto da reta* $\mathbb{R}$*:*

$$(a, b] \doteq \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a < x \leq b\},$$

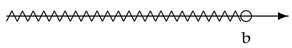
cuja representação geométrica é dada pela figura abaixo:



5. *o intervalo aberto*

$$(-\infty, b) \doteq \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x < b\},$$

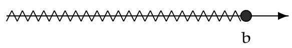
cuja representação geométrica é dada pela figura abaixo:



6. *o intervalo fechado*

$$(-\infty, b] \doteq \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x \leq b\},$$

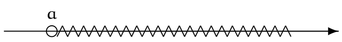
cuja representação geométrica é dada pela figura abaixo:



7. *o intervalo aberto*

$$(a, \infty) \doteq \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x > a\},$$

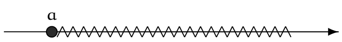
cuja representação geométrica é dada pela figura abaixo:



8. *o intervalo fechado*

$$[a, \infty) \doteq \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x \geq a\},$$

cuja representação geométrica é dada pela figura abaixo:



9. *o intervalo aberto*

$$(-\infty, \infty) \doteq \mathbb{R},$$

cuja representação geométrica é dada pela figura abaixo:

2.6 Módulo ou valor absoluto de um número real

Podemos definir uma outra operação sobre os números reais, a saber:

Definição 2.6.1 *Seja* $a \in \mathbb{R}$.
Definimos o **módulo ou valor absoluto** *do número real* $\underline{a}$, *indicado por* $|a|$, *como sendo*

$$|a| \doteq \begin{cases} a, & se\ a \geq 0 \\ -a, & se\ a < 0 \end{cases} .$$

Exemplo 2.6.1 *Temos que*

$$|5| = 5 \quad e \quad |-\pi| = \pi.$$

Com isto temos as seguintes propriedades relacionadas ao módulo de números reais:

Proposição 2.6.1 *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *com* $a > 0$.
Então:

1. $|a| \geq 0$;
2. $|-a| = |a|$;
3. $|a| < b$ *se, e somente se,* $-b < a < b$;
   Vale o mesmo trocando-se o sinal $<$ *pelo sinal* $\leq$;
4. $|a| > b$ *se, e somente se,* $a > b$ *ou* $a < -b$;
   Vale o mesmo trocando-se o sinal $>$ *pelo sinal* $\geq$ *e o o sinal* $<$ *pelo sinal* $\leq$, *respectivamente;*
5. $-|a| \leq a \leq |a|$;
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$;
7. $|a - b| \leq |a| + |b|$;
8. $||a| - |b|| \leq |a - b|$;
9. $|a| = \sqrt{a^2}$;
10. $|a.b| = |a|.|b|$.

Demonstração:

De 1.:

Observemos que

$$\text{se} \quad a \geq 0\,, \quad \text{então} \quad |a| \overset{\text{Def. (2.6.1)}}{=} a \geq 0.$$

Por outro lado,

$$\text{se} \quad a < 0\,, \quad \text{então} \quad |a| \overset{\text{Def. (2.6.1)}}{=} -a > 0.$$

Logo, podemos concluir que

$$|a| \geq 0\,, \quad \text{para cada} \quad a \in \mathbb{R},$$

como queríamos mostrar.

De 2.:

Notemos que, da Proposição (2.3.1) item 7., segue que

$$\text{se} \quad a \geq 0\,, \quad \text{então} \quad -a = (-1).a \leq 0.$$

Logo

$$|a| \overset{\text{Def. (2.6.1)}}{=} a \quad \text{e} \quad |-a| \overset{\text{Def. (2.6.1)}}{=} -(-a) = a,$$

isto é,

$$|-a| = |a|.$$

Por outro lado, também da Proposição (2.3.1) item 7., segue que

$$\text{se} \quad a < 0\,, \quad \text{então} \quad -a = (-1).a > (-1).0 = 0.$$

Logo

$$|a| \overset{\text{Def. (2.6.1)}}{=} -a \quad \text{e} \quad |-a| \overset{\text{Def. (2.6.1)}}{=} -a,$$

isto é,

$$|-a| = |a|.$$

Logo, podemos concluir que

$$|a| = |-a|, \quad \text{para cada} \quad a \in \mathbb{R},$$

como queríamos mostrar.

De 3.:

Suponhamos que

$$|a| < b. \tag{2.1}$$

$$\text{Se} \quad a \geq 0\,, \quad \text{teremos} \quad a = |a| \overset{(2.1)}{<} b,$$

logo

$$a < b. \tag{2.2}$$

Como

$$b > 0 \quad \text{segue, da Proposição (2.3.1) item 7., que} \quad -b = (-1).b < 0,$$

logo

$$a > 0 > -b\,, \quad \text{segueque} \quad -b < a \overset{(2.2)}{<} b.$$

Por outro lado,

$$\text{se} \quad a < 0\,, \quad \text{teremos} \quad -a = |a| \overset{(2.1)}{<} b,$$

logo

$$-a < b$$

e, da Proposição (2.3.1) item 7., segue que

$$a = (-1).(-a) \overset{\text{Prop. (2.3.1) item 7.}}{>} (-1).b = -b.$$

Como

$$a < 0 < b\,, \quad \text{segue que} \quad -b < a < b,$$

mostrando que

$$\text{se} \quad |a| < b\,, \quad \text{teremos} \quad -b < a < b.$$

Suponhamos agora que

$$-b \overset{(*)}{<} a \overset{(**)}{<} b$$

e mostremos que

$$|a| < b.$$

Se $a \geq 0$, segue de (**), que

$$|a| = a \overset{\text{de } (**)}{<} b, \quad \text{o que implicará em} \quad |a| < b.$$

Por outro lado, se $a < 0$, segue de (*) e da Proposição (2.3.1) item 7., que

$$|a| = -a = (-1).a \overset{\text{de } (*) \text{ e da Prop. } (2.3.1) \text{ item 7.}}{<} (-1).(-b) = -(-b) = b.$$

Logo

$$|a| < b,$$

como queríamos mostrar.

Vale o mesmo resultado, trocando-se o sinal $<$ pelo sinal $\leq$, cuja verificação será deixada como exercício para o leitor.

De 4.:

Suponhamos que

$$|a| > b. \tag{2.3}$$

Notemos que,

$$\text{se} \quad a \geq 0 \quad \text{teremos} \quad a = |a| \overset{(2.3)}{>} b, \quad \text{ou seja,} \quad a > b. \tag{2.4}$$

Por outro lado,

$$\text{se} \quad a < 0 \quad \text{teremos} \quad -a = |a| \overset{(2.3)}{>} b, \quad \text{ou seja,} \quad -a > b \tag{2.5}$$

e da Proposição (2.3.1) item 7. segue que

$$a = (-1).(-a) \overset{(2.5) \text{ e a Prop. } (2.3.1) \text{ item 7.}}{<} (-1).b = -b. \tag{2.6}$$

Logo, de (2.5) e (2.6), segue

$$\text{ou} \quad a > b\,, \quad \text{ou} \quad a < -b.$$

Suponhamos agora que

$$b \overset{(*)}{<} a \quad \text{ou} \quad a \overset{(**)}{<} -b.$$

Notemos que, se $a \geq 0$, segue de (*), que

$$|a| = a > b, \quad \text{ou seja,} \quad |a| > b.$$

Por outro lado, se $a < 0$, segue de (**) e da Proposição (2.3.1) item 7., que

$$|a| = -a = (-1).a > (-1).(-b) = -(-b) = b.$$

Logo

$$|a| > b\,, \quad \text{para cada} \quad a, b \in \mathbb{R},$$

como queríamos mostrar.

Vale o mesmo trocando-se o sinal $<$ pelo sinal $\leq$ e o sinal $>$ pelo sinal $\geq$, respectivamente, cuja verificação será deixada como exercício para o leitor.

De 5.:

Observemos que se $a \geq 0$ então

$$|a| = a \leq a\,, \quad \text{ou seja,} \quad |a| \leq a.$$

Por outro lado, se $a < 0$ então

$$|a| = -a \geq -a.$$

Logo, da Proposição (2.3.1) item 7., segue que

$$-|a| \leq a \leq |a|, \quad \text{para cada} \quad a \in \mathbb{R}.$$

De 6.:

Do item (5) temos que

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad \text{e} \quad -|b| \leq b \leq |b|.$$

Da Proposição (2.3.1) item 5. segue que

$$\underbrace{-|a| + (-|b|)}_{-(|a|+|b|)} \leq a + b \leq |a| + |b|,$$

ou seja,

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Portanto, do item 3., podemos concluir que

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad \text{para cada} \quad a, b \in \mathbb{R},$$

como queríamos mostrar.

De 7.:

Do item 6. acima temos que

$$|a - b| \leq |a| + \underbrace{|-b|}_{\overset{\text{do item 2.}}{=}|b|} = |a| + |b|,$$

para cada $a, b \in \mathbb{R}$, como queríamos mostrar.

De 8.:

Suponhamos que

$$|a| \geq |b| \tag{2.7}$$

Notememos que

$$|a| = |a + \underbrace{0}_{=b-b}| = |a + (-b + b)| = |(a - b) + b)| \overset{\text{do item 5.}}{\leq} |a - b| + |b|,$$

ou seja,

$$|a| - |b| \leq |a - b| \tag{2.8}$$

Por outro lado,

$$|\,|a| - |b|\,| \overset{(2.7)}{=} |a| - |b| \overset{(2.8)}{\leq} |a - b|,$$

ou seja

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

De modo semelhante podemos mostrar que a desigualdade acima ocorre no caso de $|a| \leq |b|$.

Para mostrar isto, basta trocar, na demonstração, acima $\underline{a}$ com $\underline{b}$.

Deixaremos os detalhes deste caso como exercício para o leitor.

Logo

$$|\,|a| - |b|\,| \leq |a - b|,$$

para cada $a, b \in \mathbb{R}$, como queríamos mostrar.

De 9.:

Notemos que,

$$\text{se} \quad a \geq 0 \quad \text{teremos} \quad \sqrt{a^2} = a = |a|.$$

Por outro lado

$$\text{se} \quad a < 0 \quad \text{teremos} \quad \sqrt{a^2} = -a = |a|,$$

ou seja,

$$\sqrt{a^2} = |a|,$$

para cada $a \in \mathbb{R}$, como queríamos mostrar.

De 10.:

Temos que

$$|a.b| \overset{\text{do item 9.}}{=} \sqrt{(a.b)^2} = \sqrt{a^2.b^2} = \sqrt{a^2}.\sqrt{b^2} \overset{\text{item 9.}}{=} |a|.|b|$$

para cada $a, b \in \mathbb{R}$, como queríamos mostrar.

□

A seguir consideraremos alguns exempos de equações e inequações envolvendo o módulo de números reais.

Começaremos com um exemplo relacionado do uma equação envolvendo módulo de números reais, mais precisamente:

Exemplo 2.6.2 *Encontre o conjunto solução da equação*

$$|x - 5| = 7, \tag{2.9}$$

isto é, o conjunto, que denotaremos por $\mathcal{S}$, formado por todos os números reais $\underline{x}$ que satisfazem a equação acima.

Resolução:

Temos duas possibilidades:

1. Se
$$x-5 \geq 0 \tag{2.10}$$
então a equação que teremos que resolver será
$$x-5 \overset{(2.10)}{=} |x-5| = 7,$$
ou seja,
$$x-5=7,$$
cuja solução será
$$x=12.$$
Observemos que $x=12$ satisfaz a condição (2.10), pois, $12-5=7 \geq 0$.

Logo $x=12$ pertence ao conjunto solução da equação, ou seja,
$$12 \in \mathcal{S}. \tag{2.11}$$

2. Por outro lado, se
$$x-5<0 \tag{2.12}$$
então a equação que teremos que resolver será
$$-(x-5) \overset{(2.12)}{=} |x-5| = 7,$$
ou seja,
$$-x+5=7$$
cija solução será
$$x=-2.$$
Observemos que $x=-2$ satisfaz a condição (2.12), pois, $-2-5=-7<0$.

Logo $x=-2$ pertence ao conjunto solução da equação, ou seja,
$$-2 \in \mathcal{S}. \tag{2.13}$$

Logo, de (2.11) e (2.13), segue que o conjunto solução da equação (2.9) será
$$\mathcal{S} = \{-2, 12\}.$$

A seguir temos os seguintes exercícios resolvidos:

Exercício 2.6.1 *Encontre o conjunto solução da equação*
$$|3x-6| = |x+8|, \tag{2.14}$$
isto é, o conjunto, que indicaremos por $\mathcal{S}$, formado por todos os números reais $\underline{x}$ que satisfazem a equação acima.

Resolução:

Temos as seguintes possibilidades:

1. Se
$$3x - 6 \geq 0\,, \tag{2.15}$$
ou, equivalente, a
$$x \geq 2, \tag{2.16}$$
então a equação que teremos que resolver será
$$3x - 6 \overset{(2.14)}{=} |3x - 6| = |x + 8|,$$
ou seja, deveremos resolver a equação
$$3x - 6 = |x + 8|. \tag{2.17}$$
Para, esta equação, temos as seguinte duas possibilidades:

1.(a) Se
$$x + 8 \geq 0 \tag{2.18}$$
ou, equivalentemente, a
$$x \geq -8\,, \tag{2.19}$$
então a equação (2.17), tornar-se-á
$$3x - 6 = |x + 8| \overset{(2.19)}{=} x + 8,$$
ou seja, deveremos resolver a equação
$$3x - 6 = x + 8\,, \quad \text{isto é}, \quad 2x = 14,$$
cuja solução será
$$x = 7.$$
Precisamos verificar se $x = 7$ satisfaz as condições (2.16) e (2.19).
Como
$$3.7 - 6 = 15 \geq 0,$$
isto é, $x = 7$ satisfaz a condição (2.16) e
$$7 + 8 = 15 \geq 0\,,$$
isto é, $x = 7$ satisfaz a condição (2.19), teremos que $x = 7$ pertencerá ao conjunto solução, associado a equação do exemplo, isto é,
$$7 \in \mathcal{S}. \tag{2.20}$$

1.(b) Por outro lado, se
$$x + 8 < 0 \tag{2.21}$$
ou, equivalentemente,
$$x < -8\,, \tag{2.22}$$
então a equação que teremos que resolver será
$$3x - 6 = |x + 8| \overset{(2.22)}{=} -(x + 8),$$

ou seja, deveremos resolver a equação

$$3x - 6 = -x - 8\,, \quad \text{isto é,} \quad 4x = -2,$$

cuja solução será

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Observemos que as condições (2.16) e (2.22) nos fornecem o conjunto vazio, pois

$$x \geq 2 \quad \text{e} \quad x < -8.$$

Assim não existirá solução que satisfaz a estas duas condições.

Logo não temos nenhuma equação para resolver e nenhuma nova solução ocorrerá neste caso.

2. Por outro lado, se

$$3x - 6 < 0 \tag{2.23}$$

ou, equivalentemente,

$$x < 2 \tag{2.24}$$

então a equação que teremos que resolver será

$$-(3x - 6) \overset{(2.23)}{=} |3x - 6| = |x + 8|,$$

ou seja, deveremos resolver a equação

$$-3x + 6 = |x + 8|.$$

Para isto temos as seguintes duas possibilidades:

2.(a) Se

$$x + 8 \geq 0 \tag{2.25}$$

ou, equivalentemente,

$$x \geq -8\,, \tag{2.26}$$

então a equação que teremos que resolver será

$$-3x + 6 = |x + 8| \overset{(2.25)}{=} x + 8,$$

ou seja, deveremos resolver a equação

$$-3x + 6 = x + 8\,, \quad \text{isto é,} \quad 4x = -2\,,$$

cuja solução será

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Precisamos verificar se $x = -\frac{1}{2}$ satisfaz as condições (2.24) e (2.26).

Observemos que

$$-3.\left(-\frac{1}{2}\right) - 6 = -\frac{9}{2} < 0\,,$$

isto é,$x = -\dfrac{1}{2}$, satisfaz a condição (2.23) e

$$-\frac{1}{2} + 8 = \frac{15}{2} \geq 0\,,$$

isto é, $x = -\dfrac{1}{2}$ satisfaz a condição (2.26), teremos que $x = -\dfrac{1}{2}$ pertencerá ao conjunto solução associado a equação (2.14), isto é,

$$-\frac{1}{2} \in \mathcal{S}. \tag{2.27}$$

2.(b) Por outro lado, se

$$x + 8 < 0 \tag{2.28}$$

ou, equivalentemente,

$$x < -8\,, \tag{2.29}$$

então a equação que teremos que resolver será

$$-3x + 6 = |x + 8| \overset{(2.28)}{=} -(x + 8),$$

ou seja, deveremos resolver a equação

$$-3x + 6 = -x - 8\,, \quad \text{isto é,} \quad 2x = 14,$$

cuja solução será

$$x = 7.$$

Precisamos verificar se $x = 7$ satisfaz as condições (2.24) e (2.29).
Notemos que

$$-3.7 + 6 = -15 < 0\,,$$

isto é, $x = -7$ satisfaz a condição (2.24) e

$$-7 - 8 = -15 < 0\,,$$

isto é, $x = 7$ satisfaz a condição (2.29), teremos que $x = 7$ pertencerá ao conjunto solução associado a equação (2.14), isto é,

$$7 \in \mathcal{S}. \tag{2.30}$$

Logo, de (2.20), (2.27) e (2.30) o conjunto solução da equação acima será

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}, 7\right\}.$$

Observação 2.6.1 *Vale observar que no exemplo acima $x = 7$ aparece duas vezes como solução das equações envolvidas na resolução do problema.*

A seguir temos um exercício com inequações envolvendo o módulo de números reais.

Exercício 2.6.2 *Encontre o conjunto solução da inequação*

$$|x + 4| \leq |2x - 6|, \tag{2.31}$$

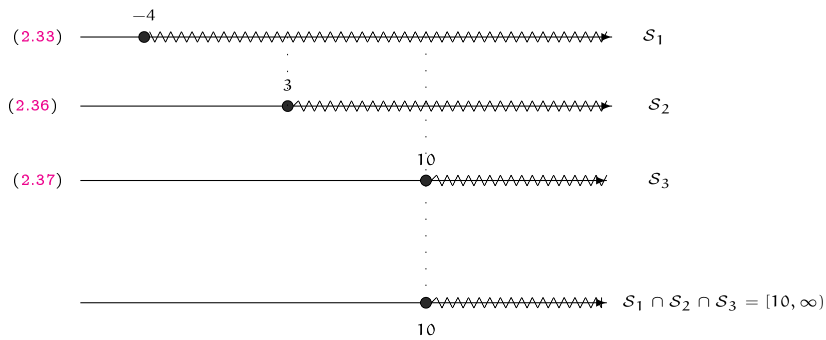
isto é, o conjunto, que denotaremos por $\mathcal{S}$, formado por todos os números reais $\underline{x}$ que satisfazem a inequação acima.

Resolução:

Temos as seguintes possibilidades:

1. Se
$$x + 4 \geq 0 \tag{2.32}$$
ou, equivalentemente
$$x \geq -4 \tag{2.33}$$
então a inequação que teremos que resolver será
$$x + 4 \overset{(2.32)}{=} |x + 4| \leq |2x - 6|,$$
ou seja, deveremos resolver a inequação
$$x + 4 \leq |2x - 6|, \tag{2.34}$$
se (2.33) ocorrer.
Para isto temos as seguintes duas possibilidades:

1.(a) Se
$$2x - 6 \geq 0 \tag{2.35}$$
ou, equivalentemente
$$x \geq 3 \tag{2.36}$$
então a inequação que teremos que resolver será
$$x + 4 \leq |2x - 6| = 2x - 6,$$
ou seja, deveremos resolver a inequação
$$x + 4 \leq 2x - 6\,, \quad \text{ou seja, deveremos ter,} \quad 10 \leq x\,. \tag{2.37}$$
Precisamos atender as condições (2.33) e (2.36), além da condição (2.37), ou seja, precisamos fazer a intersecção dos seguintes três conjuntos:
$$\mathcal{S}_1 \doteq [-4, \infty), \quad \mathcal{S}_2 \doteq [3, \infty) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_3 \doteq [10, \infty).$$
Para isto vejamos o diagrama abaixo:



Logo
$$[10, \infty) \subseteq \mathcal{S}\,. \tag{2.38}$$

1.(b) Se

$$2x - 6 < 0 \tag{2.39}$$

ou,equivalentemente

$$x < 3\,, \tag{2.40}$$

então a inequação que teremos que resolver será

$$x + 4 \leq |2x - 6| \overset{(2.39)}{=} -(2x - 6),$$

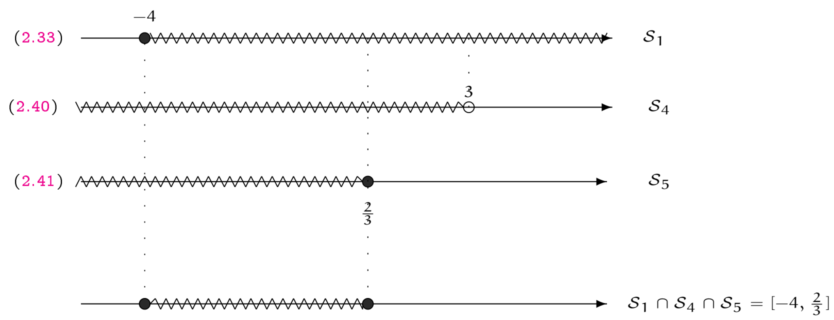
ou seja, deveremos resolver a inequação

$$x + 4 \leq -2x + 6, \quad \text{ou seja, teremos} \quad x \leq \frac{2}{3}\,. \tag{2.41}$$

Precisamos atender as condições (2.33) e (2.40), além da condição (2.41), ou seja precisamos fazer a intersecção dos seguintes três conjuntos:

$$\mathcal{S}_1 \doteq [-4, \infty), \quad \mathcal{S}_4 \doteq (-\infty, 3) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_5 \doteq \left(-\infty, \frac{2}{3}\right].$$

Para isto vejamos o diagrama abaixo:



Logo

$$\left[-4, \frac{2}{3}\right] \subseteq \mathcal{S}\,. \tag{2.42}$$

2. Se

$$x + 4 < 0 \tag{2.43}$$

ou, equivalentemente,

$$x < -4\,, \tag{2.44}$$

então a inequação que teremos que resolver será

$$-(x + 4) \overset{(2.43)}{=} |x + 4| \leq |2x - 6|,$$

ou seja, deveremos resolver a inequação

$$-x - 4 \leq |2x - 6|\,, \tag{2.45}$$

se (2.44) ocorrer.

Para isto temos duas possibilidades:

2.(a) Se

$$2x - 6 \geq 0 \tag{2.46}$$

ou, equivalentemente

$$x \geq 3 \tag{2.47}$$

então a inequação que teremos que resolver

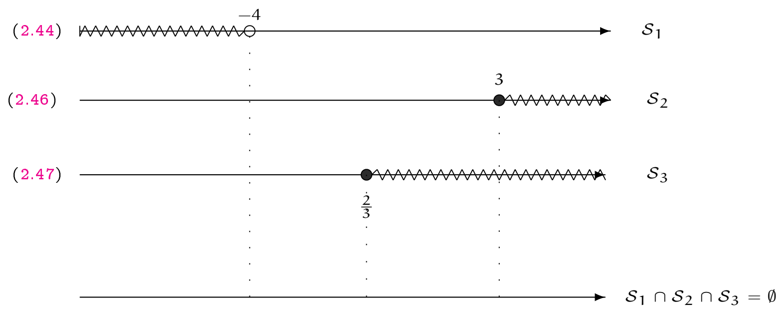
$$-x - 4 \leq 2x - 6\,, \quad \text{isto é, deveremos ter} \quad \frac{2}{3} \leq x\,. \tag{2.48}$$

Precisamos atender as condições (2.44) e (2.47) além da condição (2.48), ou seja precisamos fazer a intersecção dos seguintes três conjuntos:

$$\mathcal{S}_1 \doteq (-\infty, -4), \quad \mathcal{S}_2 \doteq [3, \infty) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_3 \doteq \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$$

que nos dá o conjunto vazio.

Para isto vejamos o diagrama abaixo:



2.(b) Se

$$2x - 6 < 0 \tag{2.49}$$

ou, equivalentemente

$$x < 3\,, \tag{2.50}$$

então a inequação que teremos que resolver será

$$-x - 4 \leq |2x - 6| \overset{(2.49)}{=} -(2x - 6),$$

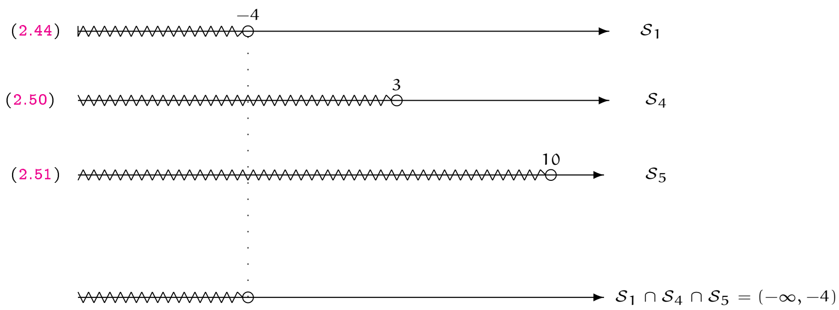
ou seja, deveremos resolver a inequação

$$-x - 4 \leq -2x + 6, \quad \text{isto é, deveremos ter} \quad x \leq 10\,. \tag{2.51}$$

Precisamos atender as condições (2.44) e (2.50), além da condição (2.51), ou seja precisamos fazer a intersecção dos seguintes três conjuntos:

$$\mathcal{S}_1 \doteq (-\infty, -4), \quad \mathcal{S}_4 \doteq (-\infty, 3) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_5 \doteq (-\infty, 10).$$

Para isto vejamos o diagrama abaixo:



Logo

$$(-\infty, -4) \subseteq \mathcal{S} \tag{2.52}$$

Logo dos itens 1. e 2., isto é, de (2.38), (2.42), (2.52), segue que o conjunto solução asscociado a inequação dada será

$$\mathcal{S} = (-\infty, -4) \cup \left[-4, \frac{2}{3}\right] \cup [10, \infty) = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [10, \infty).$$

2.7 Plano numérico $\mathbb{R}^2$

Nesta seção relembraremos um outro conceito que será de grande importância no estudo dos capítulos que virão a seguir.

Definição 2.7.1 *Denotemos por $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado por todos os pares ordenados formados por números reais, isto é,*

$$\mathbb{R}^2 \doteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \doteq \{(a, b)\,;\, a, b \in \mathbb{R}\},$$

que será denominado **plano numérico**.

Observação 2.7.1 *Assim como no caso do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, podemos identificar o plano numérico $\mathbb{R}^2$ com o conjunto dos pontos de um plano geométrico.*

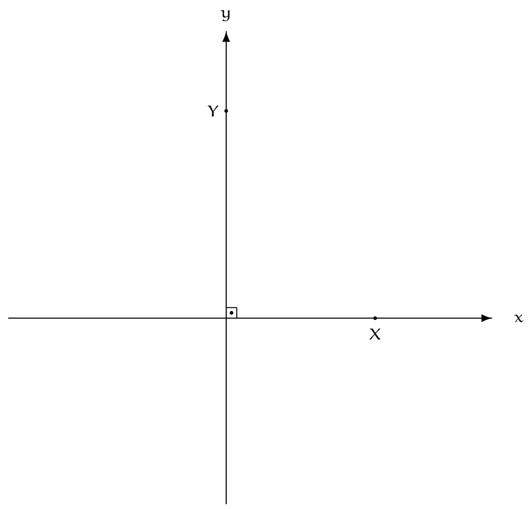
Para isto escolhamos num plano uma reta horizontal, que denotaremos por **eixo dos x's ou Ox** *e será chamado de* **eixo das abscissas**, *e uma reta vertical, que denotaremos por* **eixo dos y's ou Oy** *e será chamado de* **eixo das ordenadas**, *perpendiculares entre si.*

O ponto de intersecção dessas duas retas será indicado por O e denominado **origem**.

A cada par ordenado do plano numérico, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, iremos associar um ponto do plano geométrico que contém as duas retas acima da seguinte forma:

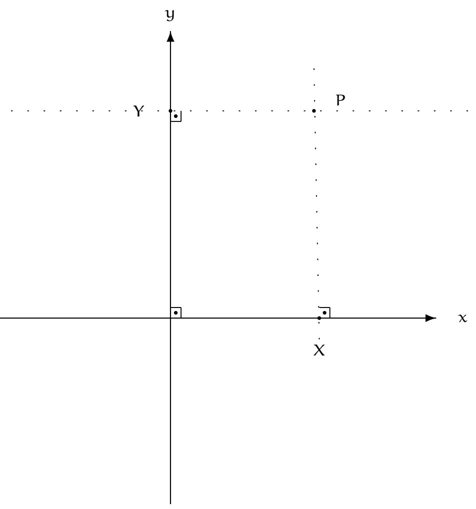
Fixemos uma unidade de comprimento $\underline{u}$ e encontremos sobre o eixo Ox, o único ponto, que chamaremos de X, associado ao número real $\underline{a}$ (como na seção 2.4 - veja a figura abaixo).

De modo análogo, encontremos sobre o eixo Oy, o único ponto, que chamaremos de Y, associado ao número real $\underline{b}$ (como na seção 2.4 - veja a figura abaixo).



Tracemos pelos pontos X *e* Y *retas paralelas aos eixos* Oy *e* Ox*, respectivamente.*

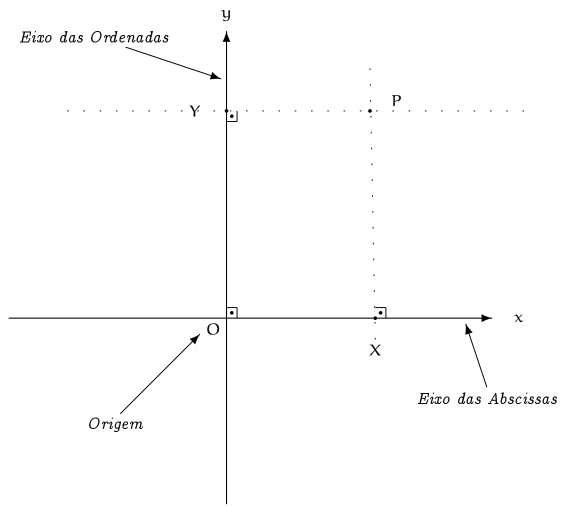
O ponto P *obtido da intersecção das retas acima será associado ao par ordenado* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *(veja a figura abaixo).*



Deste modo podemos associar a cada par ordenado do plano numérico, um único ponto do plano geométrico e reciprocamente, a cada ponto do plano geométrico (fixadas as duas retas perpendiculares) temos associado um único par ordenado de números reais (basta traçar as retas perpendiculares aos eixos Ox *e* Oy*, que contém o ponto do plano geométrico, encontrar suas intersecções com os eixos* Ox *e* Oy *e encontrar os números reais que estão associados a cada um desses pontos sobre as retas* Ox *e* Oy*, respectivamente e, finalmente, construir o par ordenado do plano numérico).*

Em geral vamos identificar o plano geométrico com o plano numérico (sem nos esquecer, quando necessário, que na verdade são objetos diferentes).

Notação 2.7.1 *Utilizaremos as seguintes notações para os elementos do plano geométrico acima mencionado:*



2.8 Gráfico de um equação no plano $\mathbb{R}^2$

Lembremos que

Definição 2.8.1 *O* **gráfico de uma equação** *é o conjunto formado por todos os pontos do plano numérico $\mathbb{R}^2$, cujas coordenadas dos mesmos satisfazem a equação dada.*

Observação 2.8.1 *Podemos representar, geometricamente, o gráfico de uma equação do plano numérico $\mathbb{R}^2$ no plano geométrico.*

A seguir exibiremos um exemplo desta situação.

Exemplo 2.8.1 *Consideremos a equação em $\mathbb{R}^2$ dada por*

$$y^2 - \left(x^2 + 2x\right) y + 2x^3 = 0.$$

Represente geometricamente, no plano numérico, o gráfico da equação acima.

Resolução:

Observemos que a equação acima pode ser colocada na seguinte forma

$$\underbrace{(y - 2x)\left(y - x^2\right)}_{=y^2-(x^2+2x)\,y+2x^3} = 0 \iff y - 2x = 0 \quad ou \quad y - x^2 = 0.$$

Logo o gráfico da equação dada será o conjunto

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = 2x \quad ou \quad y = x^2\right\}.$$

No plano geométrico, temos uma reta, a saber

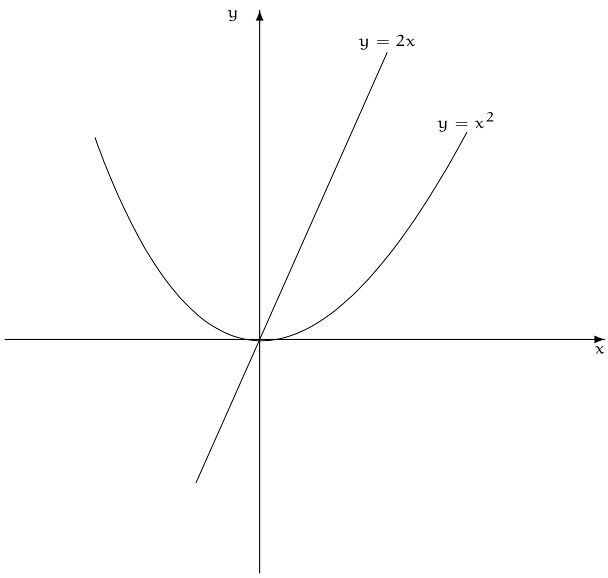
$$y = 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

e uma parábola, a saber,

$$y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

e assim podemos representar a equação acima (que é dada no plano numérico), geometricamente no plano geométrico.

A figura abaixo é a representação geométrica do gráfico da equação dada.



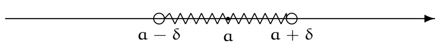
2.9 Pontos de acumulação de subconjuntos de $\mathbb{R}$

A seguir introduziremos alguns conceitos que serão fundamentais no estudo da Teoria de Limites que será tratada em um capítulo mais a frente.

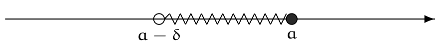
Começaremos pela:

Definição 2.9.1 *Sejam* $a \in \mathbb{R}$ *e* $\delta > 0$ *fixados.*

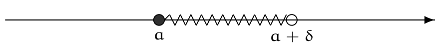
1. *Daremos o nome de* **vizinhança de centro no ponto a e raio δ**, *que será denotada por* $V_\delta(a)$, *ao intervalo aberto*
$$V_\delta(a) \doteq (a - \delta, a + \delta)\,.$$



2. *Daremos o nome de* **vizinhança à esquerda de centro no ponto a e raio δ**, *que será denotada por* $V_{\delta^-}(a)$, *ao intervalo semi-aberto à esquerda*
$$V_{\delta^-}(a) \doteq (a - \delta, a].$$



3. *Daremos o nome de* **vizinhança à direita de centro no ponto a e raio δ**, *que será denotada por* $V_{\delta^+}(a)$, *ao intervalo semin-aberto à direita*
$$V_{\delta^+}(a) \doteq [a, a + \delta).$$



Exemplo 2.9.1 *Se* $a = 1$ *e* $\delta = \dfrac{1}{2}$ *então teremos que:*

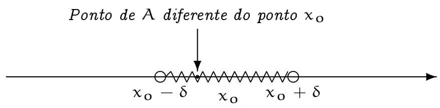
$$V_\delta(a) = V_{\frac{1}{2}}(1) = \left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right);$$
$$V_{\delta^-}(a) = V_{\frac{1}{2}^-}(1) = \left(1 - \frac{1}{2}, 1\right] = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$
$$V_{\delta^+}(a) = V_{\frac{1}{2}^+}(1) = \left[1, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left[1, \frac{3}{2}\right).$$

Com isto temos o seguinte conceito que será de grande importância no desenvolvimento da Teoria dos Limites, a saber:

Definição 2.9.2 *Sejam* $A \subseteq \mathbb{R}$ *e* $x_o \in \mathbb{R}$.

Diremos que o ponto x_o *é* **ponto de acumulação do conjunto** A *se, para cada* $\delta > 0$, *a vizinhança de centro no ponto* x_o *e raio* δ, *isto é, o conjunto* $V_\delta(x_o)$, *interceptar o conjunto* A *em, pelo menos, um ponto diferente do ponto* x_o *(caso* x_o *pertença ao conjunto* A*), isto é, para cada* $\delta > 0$ *deveremos ter:*

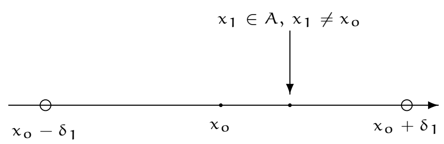
$$(V_\delta(x_o) \cap A) \setminus \{x_o\} \neq \emptyset.$$



Observação 2.9.1 *Observemos que se o ponto* $x_o \in \mathbb{R}$ *é um ponto de acumulação do conjunto* A *então qualquer vizinhança do ponto* x_o *possuirá infinitos pontos distintos do conjunto* A.

De fato, se tomarmos $\delta = \delta_1 > 0$, *da definição do ponto* $x_o \in \mathbb{R}$ *ser um ponto de acumulação do conjunto* A, *segue que podemos encontrar* $x_1 \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x_1 \in (A \cap V_{\delta_1}(x_o)) \setminus \{x_o\}.$$

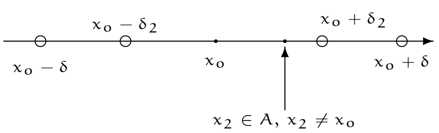


Como $x_1 \neq x_o$ *temos, tomando-se*

$$0 < \delta_2 \doteq |x_1 - x_o| < \delta_1$$

que, da definição do ponto $x_o \in \mathbb{R}$ *ser um ponto de acumulação do conjunto* A, *segue que podemos encontrar* $x_2 \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x_2 \in (A \cap V_{\delta_2}(x_o)) \setminus \{x_o\}.$$



Em particular, $x_2 \neq x_1$ *(pois se* $x_2 \in V_{\delta_2}(x_o)$ *então* $|x_2 - x_o| < \delta_2 = |x_1 - x_o|$*, logo* $x_2 \neq x_1$*).*
Como $x_2 \neq x_o$ *temos que tomando-se*

$$0 < \delta_3 \doteq |x_2 - x_o| < \delta_1, \delta_2,$$

da definição do ponto $x_o \in \mathbb{R}$ *ser um ponto de acumulação do conjunto* A*, segue que podemos encontrar* $x_3 \in \mathbb{R}$

$$x_3 \in (A \cap V_{\delta_3}(x_o)) \setminus \{x_o\}.$$

Em particular, $x_3 \neq x_2$ *(pois se* $x_3 \in V_{\delta_3}(x_o)$ *então* $|x_3 - x_o| < \delta_3 = |x_2 - x_o|$*, logo* $x_3 \neq x_2$*, além disso,* $x_3 \neq x_1$ *pois* $|x_3 - x_o| < \delta_3 \leq |x_2 - x_o| < \delta_2 = |x_1 - x_o|$*, assim* $x_3 \neq x_1$*).*

Prosseguindo o processo acima podemos obter uma coleção infinita de pontos distintos de A*, a saber*

$$\{x_1, x_2, x_3, \cdots\} \subseteq A$$

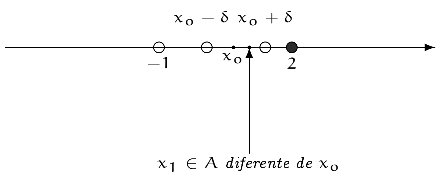
tal que todos esses pontos estão na vizinhança $V_\delta(x_o)$*.*

Exemplo 2.9.2

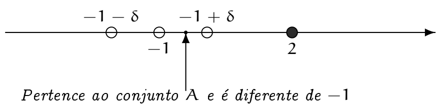
1. *Consideremos* $A \doteq (-1, 2]$*.*

   Afirmamos que todo ponto do conjunto A *é ponto de acumulação do conjunto* A*.*

   De fato, pois se $x_o \in A$ *e* $\delta > 0$ *então toda vizinhança do ponto* x_o *de raio* δ *intercepta o conjunto* A *em, pelo menos, um ponto,* x_1*, diferente de* x_o *(veja figura abaixo).*



   Observemos que $-1 \notin A$ *mas também é ponto de acumulação do conjunto* A*, pois toda vizinhança do ponto* -1 *de raio* δ *intercepta o conjunto* A *em, pelo menos, um ponto* x_1*, diferente de* -1 *(veja figura abaixo).*



   Conclusão: *o conjunto formado por todos os pontos de acumulação do conjunto* A *será o intervalo fechado* $[-1, 2]$*.*

2. *Consideremos* $A \doteq (-1, 2] \cup \{3\}$*.*

   Do Exemplo acima segue que todo ponto do conjunto $[-1, 2]$ *será ponto de acumulação do conjunto* A*.*

   Observemos que o ponto 3 **não** *é ponto de acumulação do conjunto* A *pois se considerarmos* $\delta \doteq 1$*, teremos que*

$$V_1(3) \cap A \setminus \{3\} = \emptyset.$$

   Logo o conjunto formado por todos os pontos de acumulação do conjunto A *é o intervalo fechado* $[-1, 2]$ *(isto é, é o mesmo do Exemplo anterior).*

3. *Consideremos* $A \doteq \left\{\dfrac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

   Afirmamos que o único ponto de acumulação do conjunto A *é* 0.

   De fato, primeiro vejamos que 0 *é ponto de acumulação do conjunto* A.

   Para isto dado $\delta > 0$ *observemos que toda vizinhança do ponto* 0 *de raio* δ *intercepta o conjunto* A *em, pelo menos, um ponto diferente de* x_o, *isto é, podemos encontrar* $n_o \in \mathbb{N}$ *tal que*

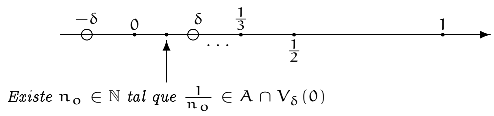
$$0 < \frac{1}{n_o} < \delta,$$

   isto é, o número real $\dfrac{1}{n_o}$ *pertence ao conjunto* A *e ao conjunto* $V_\delta(0)$ *e além disso é diferente de* 0, *mostrando que* 0 *é ponto de acumulação do conjunto* A.

   Por outro lado dado qualquer número real $x_o \neq 0$ *então podemos mostrar que o ponto* x_o **não** *poderá ser ponto de acumulação do conjunto* A *(ele estará a uma distância positiva do elemento do conjunto* A *mais próximo dele).*

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

   Logo o conjunto formado por todos os pontos de acumulação do conjunto A *é formado por um único ponto, isto é,* $\{0\}$.



Observação 2.9.2

1. *Existem subconjuntos infinitos de* $\mathbb{R}$ *que nenhum ponto é ponto de acumulação do mesmo.*

   Por exemplo, se $A \doteq \mathbb{N}$ *então nenhum ponto da reta* $\mathbb{R}$ *será de acumulação do conjunto* A.

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Existem subconjuntos próprios de* $\mathbb{R}$ *(isto é, que estão contidos em* $\mathbb{R}$ *mas não são todo* $\mathbb{R}$*) tal que todo ponto* $\mathbb{R}$ *é ponto de acumulação do mesmo.*

   Por exemplo, se $A \doteq \mathbb{Q}$ *então todo ponto da reta* $\mathbb{R}$ *será de acumulação do conjunto* A.

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2.10 Ordem de importância dos resultados na Matemática

Na Matemática existem vários tipos de resultados que são, de certo modo, classificados de acordo com sua importância e/ou utilidade.

A seguir daremos um breve resumo de como alguns destes resultados podem ocorrer e suas importâncias dentro do assunto estudado.

1. **Axioma ou Postulado:** são elementos da Matemática que são aceitos como verdadeiros (por exemplo, na Geometria de Euclides, temos o primeiro Axioma ou Postulado que nos diz: "Existe ponto");

2. **Teorema:** são resultados da Matemática que são demonstrados a partir dos Axiomas (ou outros resultados), por exemplo: Teorema de Pitágoras;

3. **Proposição:** são resultados da Matemática que são demonstrados a partir dos Axiomas e/ou Teoremas que não são tão importantes quanto os Teoremas;

4. **Lema:** são resultados da Matemática que são demonstrados a partir dos Axiomas e/ou Teoremas e que serão utilizados na demonstração de um Teorema e/ou Proposição;

5. **Corolário:** são resultados da Matemática que são demonstrados facilmente a partir dos Axiomas, Teoremas e/ou Proposições;

Notação 2.10.1 *Utilizaremos ao longo destas notas alguns símbolos os quais destacamos:*

1. *pontos do plano geométrico serão indicados por letras maiúsculas:* $A, B, C, \cdots$;

2. *retas do plano geométrico serão indicados por letras minúsculas:* $a, b, c, \cdots$;

3. *as letras gregas minúsculas,* α *(leia-se: alfa),* δ *(leia-se: delta),* ε *(leia-se: episilon),* γ *(leia-se: gama),* β *(leia-se: beta), indicarão números reais positivos que são pequenos;*

A seção a seguir foi omitida das aulas mas poderá ser estudada pelos alunos que tenham um interesse em se aprofundar em alguns conceitos básicos importantes de Matemática.

2.11 Apêndice: supremo e ínfimo de subconjuntos da reta

A seguir introduziremos alguns conceitos que são importantes no aprofundamento no estudo dos números reais.

Começaremos pela:

Definição 2.11.1 *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio.*

Diremos que o subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ *é* <u>**limitado superiormente**</u> *em* $\mathbb{R}$ *se existir um número real* L *tal que*

$$a \leq L, \quad \textit{para todo} \quad a \in A.$$

No caso acima, o número real L *será dito* <u>**limitante superior**</u> *em* $\mathbb{R}$ *do subconjunto* A.

Com isto temos a:

Proposição 2.11.1 *Se* L *é um limitante superior em* $\mathbb{R}$ *do subconjunto, não vazio,* A *da reta* $\mathbb{R}$ *e* $L' \geq L$ *então* L' *também será um limitante superior em* $\mathbb{R}$ *do subconjunto* A.

<u>**Demonstração:**</u>

De fato, como L é um limitante superior em $\mathbb{R}$ do subconjunto A então $a \leq L$ para todo $a \in A$.

Logo

$$a \leq L \leq L' \quad \text{para todo} \quad a \in A,$$

isto é, $a \leq L'$ para todo $a \in A$, mostrando que L' também é um limitante superior em $\mathbb{R}$ do subconjunto A, como queríamos mostrar.

$\square$

Definição 2.11.2 *Diremos que o subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é* **limitado inferiormente** *em $\mathbb{R}$ se existir um número real $\underline{l}$ tal que*

$$a \geq l, \quad \textit{para todo} \quad a \in A.$$

No caso acima, o número real $\underline{l}$ será dito **limitante inferior** *em $\mathbb{R}$ do subconjunto A.*

Com isto temos a:

Proposição 2.11.2 *Se $\underline{l}$ é um limitante inferior em $\mathbb{R}$ do subconjunto, não vazio, A da reta $\mathbb{R}$ e $l' \leq l$ então l' também será um limitante inferior em $\mathbb{R}$ do subconjunto A.*

Demonstração:

De fato, como $\underline{l}$ é um limitante inferior em $\mathbb{R}$ do subconjunto A então $a \geq l$ para todo $a \in A$.

Logo

$$a \geq l \geq l' \quad \text{para todo} \quad a \in A,$$

isto é, $a \geq l'$ para todo $a \in A$, mostrando que l' também é um limitante inferior em $\mathbb{R}$ do subconjunto A, como queríamos mostrar.

□

Uma outro conceito importante é dado pela:

Definição 2.11.3 *Diremos que o subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é* **limitado** *em $\mathbb{R}$ se ele for limitado superiormente e inferiormente em $\mathbb{R}$.*

Consideremos os seguintes exemplos:

Exemplo 2.11.1

1. *Seja $A \doteq (0, 4] \subseteq \mathbb{R}$.*

   Então $L = 4$ é um limitante superior em $\mathbb{R}$, pois se $a \in A$ então $a \leq L = 4$, e $l = 0$ é um limitante inferior em $\mathbb{R}$ do conjunto A, pois se $a \in A$ então $a \geq L = 0$.

   Portanto o conjunto A é limitado superiormente e inferiormente em $\mathbb{R}$, ou seja, ele é limitado em $\mathbb{R}$.

2. *Seja $A \doteq \left\{ \frac{1}{n} \,;\, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$.*

   Então $L = 1$ é um limitante superior em $\mathbb{R}$, pois $\frac{1}{n} \leq L = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $l = 0$ é um limitante inferior em $\mathbb{R}$ do conjunto A, pois $\frac{1}{n} \geq l = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Portanto o conjunto A é limitado superiormente e inferiormente em $\mathbb{R}$, ou seja, ele é limitado em $\mathbb{R}$.

3. *Seja $A \doteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.*

   Então A **não** *é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ e também* **não** *é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$.*

   As verificarções desses fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Observação 2.11.1 *No Exemplo (2.11.1) item 1. temos que o conjunto A é limitado em $\mathbb{R}$ (isto é, é limitado superiormente e inferiormente em $\mathbb{R}$).*

Observemos que podemos encontrar um menor limitante superior em $\mathbb{R}$ (que é 4) e um maior limitante inferior em $\mathbb{R}$ (que é 0).

Daremos um nome "especial" a cada um desses números reais, a saber:

Definição 2.11.4 *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$, não vazio, limitado superiormente em $\mathbb{R}$.*

Diremos que $S \in \mathbb{R}$ é o **supremo** *do conjunto A se:*

S_1: *S é um limitante superior em $\mathbb{R}$ do conjunto A em $\mathbb{R}$;*

S_2: *S é o menor número real com a propriedade acima, isto é, é o menor limitante superior em $\mathbb{R}$ do conjunto A, ou ainda, se S' é um limitante superior em $\mathbb{R}$ do conjunto A então*

$$S' \geq S.$$

Neste caso denotaremos S, o supremo de A, por $\sup(A)$.

De modo análogo temos a:

Definição 2.11.5 *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$, não vazio, limitado inferiormente em $\mathbb{R}$.*

Diremos que $s \in \mathbb{R}$ é o **ínfimo** *do conjunto A em $\mathbb{R}$ se:*

s_1: *s é um limitante inferior em $\mathbb{R}$ do conjunto A;*

s_2: *s é o marior número real com a propriedade acima, isto é, é o maior limitante inferior em $\mathbb{R}$ do conjunto A, ou ainda, se s' é um limitante inferior em $\mathbb{R}$ do conjunto A então*

$$s' \leq s.$$

Neste caso denotaremos s, o ínfimo de A, por $\inf(A)$.

Observação 2.11.2

1. *Observemos que se o supremo (ou o ínfimo) de um conjunto A existe ele será único.*

   A demostração desses fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

2. *Vale observar também que se o conjunto A é limitado em $\mathbb{R}$ então podemos pensar em encontrar $\sup(A)$ e $\inf(A)$.*

   Na verdade o resultado a seguir garante, nestes casos, a existência do supremo e do ínfimo de tais subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Com isto temos o seguinte resultado cuja demonstração será omitida.

Teorema 2.11.1

1. *Todo subconjunto da reta $\mathbb{R}$ limitado superiormente em $\mathbb{R}$ possui supremo.*

2. *De modo semelhante, todo subconjunto da reta $\mathbb{R}$ limitado inferiormente em $\mathbb{R}$ possui ínfimo.*

3. *Em particular, todo subconjunto da reta que é limitado em $\mathbb{R}$ possui supremo e ínfimo.*

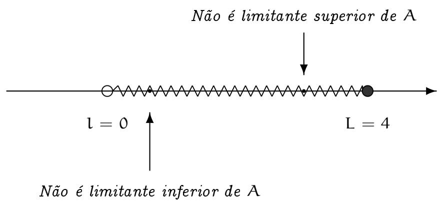
Exemplo 2.11.2

1. *Seja* $A \doteq (0, 4] \subseteq \mathbb{R}$.

   Como conjunto A *é limitado em* $\mathbb{R}$, *segue do Teorema acima que o conjunto* A *admite* $\sup(A)$ *e* $\inf(A)$ *em* $\mathbb{R}$.

   Observemos que $L = 4$ *é o menor limitante superior do conjunto* A *em* $\mathbb{R}$ *(qualquer número real menor que* 4 *não será limitante superior do conjunto* A *em* $\mathbb{R}$*), isto é,* $\sup(A) = 4$.

   De modo semelhante, $l = 0$ *é o maior limitante inferior do conjunto* A *em* $\mathbb{R}$ *(qualquer número real maior que* 0 *não será limitante inferior do conjunto* A *em* $\mathbb{R}$*), isto é,* $\inf(A) = 0$.

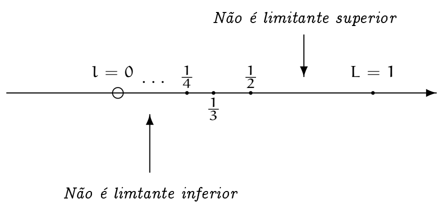


2. *Seja* $A \doteq \left\{ \frac{1}{n} \, ; \, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$.

   Como conjunto A *é limitado em* $\mathbb{R}$, *segue do Teorema acima, que o conjunto* A *admite* $\sup A$ *e* $\inf A$.

   Observemos que $L = 1$ *é o menor limitante superior do conjunto* A *em* $\mathbb{R}$. *pois qualquer número real menor que* 4 *não será limitante superior do conjunto* A *em* $\mathbb{R}$, *isto é,* $\sup(A) = 1$.

   De modo semelhante, $l = 0$ *é o maior limitante inferior do conjunto* A *em* $\mathbb{R}$, *pois qualquer número real maior que* 0 *não será limitante inferior do conjunto* A *em* $\mathbb{R}$, *isto é,* $\inf(A) = 0$.



Um resultado muito útil no estudo do supremo e/ou do ínfimo de subconjuntos de $\mathbb{R}$ é dado pelo:

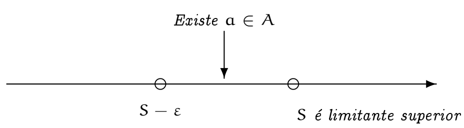
Teorema 2.11.2

1. *Consideremos* $A \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio e limitado superiormente em* $\mathbb{R}$.

   Então $S = \sup(A)$ *se, e somente se, as seguites condições estão satisafeitas:*

   S'_1 *: S é um limitante superior em* $\mathbb{R}$ *do conjunto* A*;*

   S'_2 *: Dado o número real* $\varepsilon > 0$ *podemos encontrar* $a \in A$ *tal que* $S - \varepsilon < a$.

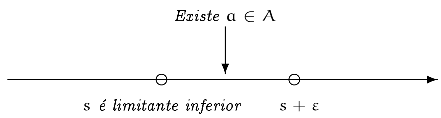


2. *Consideremos* $A \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio e limitado inferiormente em* $\mathbb{R}$.

   Então $s = \inf(A)$ *se, e somente se, as seguites condições estão satisafeitas:*

   s'_1 *: s é um limitante inferior do conjunto A;*

   s'_2 *: Dado o número real* $\varepsilon > 0$ *podemos encontrar* $a \in A$ *tal que* $a < s + \varepsilon$.



Demonstração:

Mostraremos o item 1..

A verificação do item 2. será deixada como exercício para o leitor.

Mostremos primeiramente que se $S = \sup(A)$ então S'_1 e S'_2 serão verdadeiras.

Como $S = \sup A$ temos que S é um limitante superior em $\mathbb{R}$ do conjunto A, isto é S'_1 é verdadeira.

Dado $\varepsilon > 0$, temos que $S - \varepsilon < S$, logo $S - \varepsilon$ não poderá ser limitante superior em $\mathbb{R}$ do conjunto A (pois S é o menor limitante superior do conjunto A em $\mathbb{R}$).

Assim, deve existir $a \in A$ tal que $S - \varepsilon < a$, isto é, S'_2 é verdadeira.

Mostremos agora que se S'_1 e S'_2 são verdadeiras então $S = \sup A$.

Para isto observemos que de S'_1 temos que S é um limitante superior em $\mathbb{R}$ do conjunto A.

Suponhamos que $S' < S$ e mostremos que S' não pode ser limitante superior do conjunto A em $\mathbb{R}$.

Para isto consideremos $\varepsilon \doteq S - S' > 0$.

De S'_2 segue que podemos encontrar $a \in A$ tal que $S - \varepsilon < a$, isto é,

$$a > S - \varepsilon = S - (S - S') = S',$$

ou seja, S' não é limitante superior do conjunto A em $\mathbb{R}$.

Portanto S é o menor limitante superior do conjunto A em $\mathbb{R}$, ou seja, $S = \sup(A)$, como queríamos demonstrar.

□

Observação 2.11.3 *No Exemplo (2.11.1) item 1. temos que*

$$\sup(A) = 4 \in A \quad e \quad \inf(A) = 0 \notin A.$$

Quando o supremo (ou ínfimo) de um conjunto pertence ao mesmo daremos um nome "especial", a saber:

Definição 2.11.6 *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio, limitado superiormente em* $\mathbb{R}$.

Se $S = \sup(A)$ *pertence ao conjunto A diremos que S é o* **máximo** *do conjunto A em* $\mathbb{R}$ *e escreveremos* $\max(A) = S$, *isto é,*

$$\max(A) = \sup(A).$$

De modo análogo temos: seja $A \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio, limitado inferiormente em* $\mathbb{R}$.

Se $s = \inf A$ *pertence ao conjunto A diremos que s é o* **mínimo** *do conjunto A em* $\mathbb{R}$ *e escreveremos* $\min(A) = s$, *isto é,*

$$\min(A) = \inf(A).$$

Observação 2.11.4 *O Exemplo (2.11.1) item 1. temos que*

$$\sup(A) = 4 \in A \quad e \quad \inf(A) = 0 \notin A,$$

isto é, o conjunto A tem máximo em $\mathbb{R}$ *mas* **não** *tem mínimo em* $\mathbb{R}$.

Capítulo 3

Funções Reais de Uma Variável Real

Neste capítulo trataremos de um dos elementos que serão a base de todo o estudo que faremos mais adiante, a saber, as funções reais de uma variável real, isto é $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Relembraremos alguns conceitos importantes associados a estas e definiremos algumas novas funções que serão utilizados em algumas aplicações num futuro próximo.

3.1 Definições e exemplos

Começaremos considerando um exemplo simples porém interessante.

Exercício 3.1.1 *Suponhamos que um homem está num barco em um rio, à 2 kms ao leste de sua casa, que situa-se em uma das margens desse rio.*

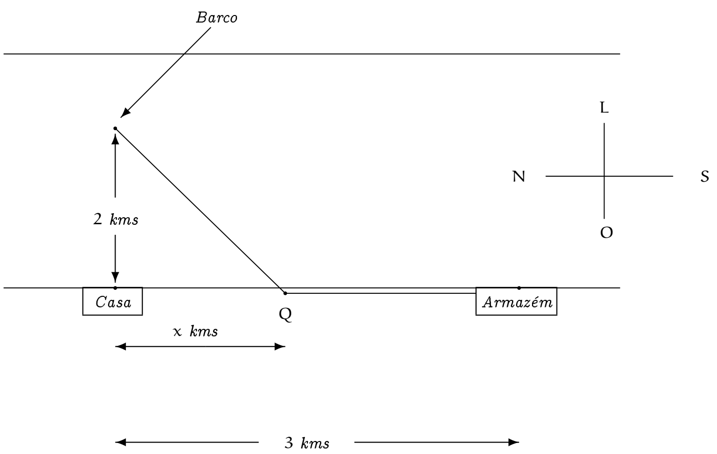
A margem é do rio é reta e vai do sentido norte-sul.

Ele deseja ir a um armazém que fica a 3 kms ao sul de sua casa, na margem do rio que está a sua casa.

Sademos que ele pode remar a uma velocidade (constante) de $\frac{2}{3}$ km/h e pode correr a uma velocidade (constante) de 6 km/h.

Pergunta-se: quanto tempo ele levará para chegar ao armazém se ele remar diretamente até um ponto Q (fixado) da margem que está a $\underline{x}$ kms (fixado) ao sul de sua casa e correr pela margem até o armazém?

Para ilustrar veja a figura abaixo:



Resolução:

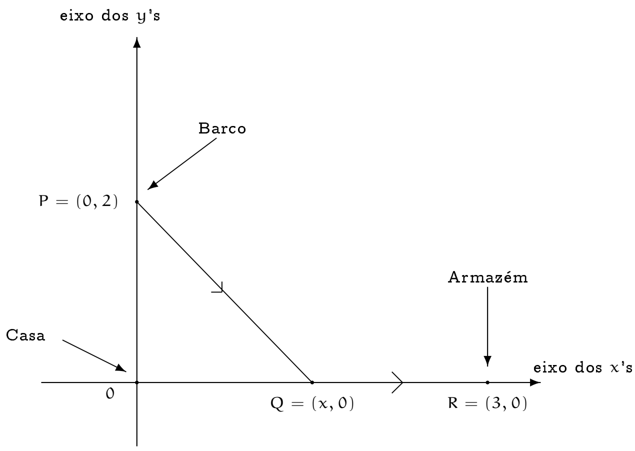
Primeiramente fixemos um sistema de coordenadas nos quais poderemos escrever equações que descrevem o nosso problema.

Para facilitar escolheremos o eixo Oy como sendo a reta que une a casa e o barco (orientado no sentido oeste-leste).

O eixo Ox corresponderá a reta determinada pela margem do rio (perpendicular à outra reta e orientado no sentido norte-sul).

Deste modo a casa ficará na origem do sistema de coordenadas (cartesianas).

Veja figura abaixo:



Denotemos por $\underline{x}$ a distância do ponto que ele vai chegar à margem (isto é, o ponto Q) à sua casa.

Sejam t_1 e t_2 os tempos que ele levará para ir do barco (ponto P) até o ponto da margem (ponto Q) e desse ponto da margem (ponto Q) até o armazém (ponto R), respectivamente.

Queremos encontrar uma expressão para

$$t \doteq t_1 + t_2,$$

isto é, o tempo que o homem levará para percorrer a poligonal PQR.

Observemos que t_1 e t_2 (e portanto $\underline{t}$) devem depender de $\underline{x}$ (isto é, do ponto Q), como ficará mais claro a seguir.

Da Mecância temos que (movimento retilíneo uniforme cuja velocidade é dada por $\frac{2}{3}$ km/h)

$$\overline{PQ} = \frac{2}{3} t_1,$$

Logo

$$t_1 = \frac{\overline{PQ}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\overline{PQ}. \tag{3.1}$$

Observemos que o triângulo ΔPOQ é retângulo logo

$$\left(\overline{PQ}\right)^2 = 2^2 + x^2,$$

ou seja,

$$\overline{PQ} = \sqrt{x^2 + 4}. \tag{3.2}$$

Logo substituindo (3.2) em (3.1) obtemos

$$t_1 = t_1(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 4}. \tag{3.3}$$

De modo semelhante, temos que da Mecância temos que (movimento retilíneo uniforme cuja velocidade é dada por 6 km/h)

$$\overline{QR} = 6t_2.$$

Logo

$$t_2 = \frac{\overline{QR}}{6}. \tag{3.4}$$

Mas

$$\overline{QR} = 3 - x,$$

logo substituindo esse valor de $\overline{QR}$ em (3.4) obteremos

$$t_2 = \frac{3-x}{6}. \tag{3.5}$$

Portanto de (3.3) e (3.5) segue que o tempo total para percorrer a poligonal PQR será dado por:

$$t = t(x) = t_1(x) + t_2(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x^2+4} + \frac{3-x}{6},$$

que, como previmos, dependerá de $\underline{x}$ (ou seja, do ponto Q).

Observemos que para o problema devermos ter $x \in [0, 3]$.

Observação 3.1.1

1. *A questão que poderíamos colocar é a seguinte: qual a posição do ponto* Q *para que o tempo gasto para percorrer a poligonal* PQR *seja o menor possível?*

   A resposta a este problema será dada mais adiante (no Cálculo Diferencial).

   Para os curiosos, o ponto Q *deverá situar-se a* $\frac{\sqrt{20}}{20}$ *km ao sul da casa.*

2. *O problema acima nos motiva a estudar com mais detalhes um conceito que será nosso "companheiro" ao longo de todo o desenvolvimento do curso, a saber, as Funções.*

Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não vazios.

Definição 3.1.1 *Uma* **<u>função</u>** *definida no conjunto* A *assumindo valores no conjunto* B *é uma relação que associa a cada elemento* $x \in A$ *um, e somente um, elemento* $y \in B$ *que será indicado por* $f(x)$.

Denotaremos tal função por:

$$f : A \to B \qquad ou \qquad A \xrightarrow{f} B.$$

Se $x \in A$*, o elemento* $y = f(x) \in B$ *será dito* **<u>valor da função $\underline{f}$ em $\underline{x}$ ou imagem do valor $\underline{x}$ pela função f</u>**.

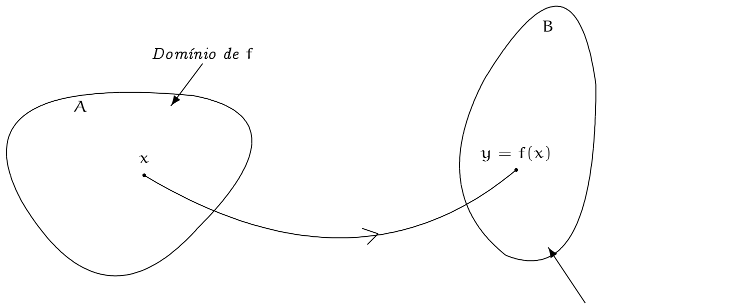
O conjunto A *será dito* **<u>domínio da função f</u>** *e indicado por* $\mathrm{Dom}(f)$.

O conjunto B *será dito* **<u>contra-domínio da função f</u>**.

O conjunto formado por todos os elementos de B *que são imagem de valores da função* $\underline{f}$ *será dito* **<u>conjunto imagem da função f</u>** *e indicado por* $\mathrm{Im}(f)$*, isto é,*

$$\mathrm{Im}(f) \doteq \{y \in B\,;\, y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}.$$

Definição 3.1.2 *Podemos interpretar a situação acima olhando o seguinte diagrama de Venn:*



Cada $x \in A$ está associado a um, e somente um, $y = f(x) \in B$

Consideremos alguns exemplos

Exemplo 3.1.1

1. *Para o problema que iniciou este capítulo temos que a função que descreve o problema é a seguinte:* $t : A \to B$, *onde* $A \doteq [0, 3]$, $B \doteq [0, \infty)$ *e*

$$t(x) \doteq \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 4} + \frac{3 - x}{6}, \quad x \in A.$$

2. *Um outro exemplo,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Neste caso $A = B \doteq \mathbb{R}$.

3. *Ou ainda,* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \sqrt{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

   Neste caso $A = (0, \infty)$ *e* $B \doteq \mathbb{R}$.

4. *Ou* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

   Neste caso $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $B \doteq \mathbb{R}$.

Temos também a:

Definição 3.1.3 *Seja* $f : A \to B$ *uma função dada.*

Definimos o **gráfico da função** f, *denotado por* $G(f)$, *como sendo o conjunto dos pontos do plano numérico* $\mathbb{R}^2$ *que são da forma* $(x, f(x))$ *para* $x \in A$, *isto é,*

$$G(f) \doteq \{(x, f(x))\,;\, x \in A\}.$$

Observação 3.1.2 *Tendo o gráfico da função* $\underline{f}$ *podemos representá-lo geometricamente no plano geométrico (que é identificado com o plano numérico* $\mathbb{R}^2$*) como mostram os exemplos abaixo:*

Exemplo 3.1.2

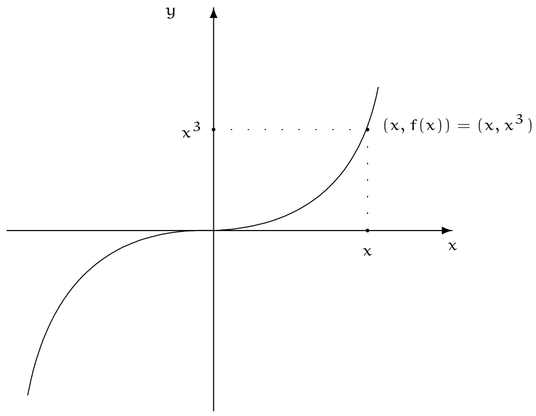
1. *Se a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq x^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

então o gráfico da função $\underline{f}$ *é dado por*

$$G(f) = \{(x, x^3)\,;\, x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

cuja representação geométrica será dada pela figura abaixo.



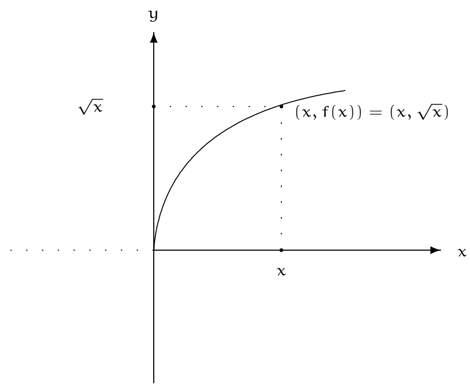
2. *Se a função* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq \sqrt{x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

então o gráfico da função $\underline{f}$ *é dado por*

$$G(f) = \{(x, \sqrt{x})\,;\, x \in [0, \infty)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

cuja representação geométrica será dada pela figura abaixo.



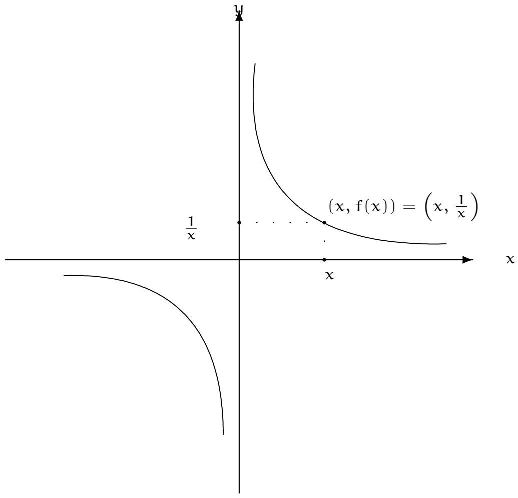
3. *Se a função* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

então o gráfico da função $\underline{f}$ *é dado por*

$$G(f) = \left\{ \left(x, \frac{1}{x}\right)\,;\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

cuja representação geométrica será dada pela figura abaixo.



3.2 Operações com funções reais de uma variável real

Podemos fazer as seguintes operações com funções reais de uma variável real:

Definição 3.2.1 *Sejam* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *duas funções funções reais de uma variável real definidas em um mesmo subconjunto* A *da reta* $\mathbb{R}$.

Com isto podemos definir as seguintes funções:

1. *a* **adição** *da função* $\underline{f}$ *com a função* g*, indicada por* $f + g$*, como sendo a função real de uma variável real* $f + g : A \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$(f + g)(x) \doteq f(x) + g(x), \quad x \in A;$$

2. *a* **diferença** *da função* $\underline{f}$ *pela função* g*, indicada por* $f - g$*, como sendo a função real de uma variável real* $f - g : A \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$(f - g)(x) \doteq f(x) - g(x), \quad x \in A;$$

3. *a* **multiplicação (ou produto)** *da função* $\underline{f}$ *com a função* g*, indicada por* $f.g$*, como sendo a função real de uma variável real* $f.g : A \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$(f.g)(x) \doteq f(x).g(x), \quad x \in A;$$

4. *a* **divisão (ou quociente)** *da função* $\underline{f}$ *com a função* g*, indicada por* $\frac{f}{g}$ *ou* f/g*, como sendo a função real de uma variável real* $\frac{f}{g} : A \setminus \{x \in A\,;\, g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \doteq \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in A \setminus \{x\,;\, g(x) = 0\}.$$

Observação 3.2.1 *Vale observar que todas as quatro funções acima estão bem definidas nos seus respectivos domínios.*

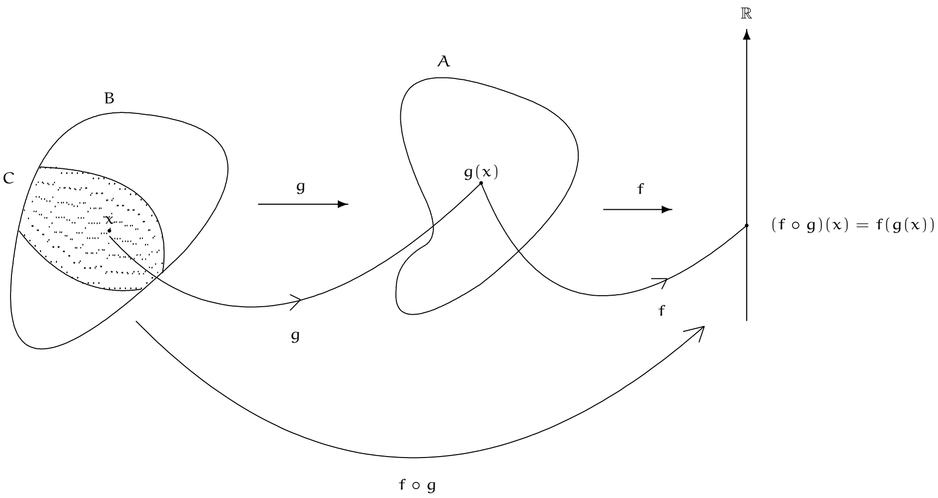
Uma outra operação importante é definida na

Definição 3.2.2 *Consideremos duas funções reais de uma variável real* $f : A \to \mathbb{R}$ *e* $g : B \to \mathbb{R}$*, onde* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *são não vazios.*

Definimos a função **composta** *da função* $\underline{f}$ *pela função* g*, indicada por* $f \circ g$*, como sendo a sequinte função real de uma variável real:* $f \circ g : C \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$C \doteq \{x \in B \,;\, g(x) \in A\}$$
$$(f \circ g)(x) \doteq f(g(x)), \quad x \in C.$$

Observação 3.2.2 *O diagrama de Venn abaixo ilustra a definição acima:*



Considereremos alguns exercícios:

Exercício 3.2.1

1. *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções reais de uma variável real dadas por*

$$f(y) \doteq |y|, \quad y \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g(x) \doteq 8x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então a função composta $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está bem definida e será dada por*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(8x) = |8x + 1|, \quad x \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$(f \circ g)(x) = |8x + 1|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que podemos considerar a função composta $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que será dada por*

$$(g \circ f)(y) = g(f(y)) = g(|y|) = 8|y| + 1, \quad y \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$(g \circ f)(x) = 8|y| + 1, \quad y \in \mathbb{R}.$$

2. *Sejam* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *e* $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *duas funções reais de uma variável real dadas por*

$$f(y) \doteq \frac{2}{y}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{e} \quad g(x) \doteq \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty).$$

Então a função composta $f \circ g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *está bem definida e será dada por*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad x \in (0, \infty),$$

isto é,

$$(f \circ g)(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad x \in (0, \infty).$$

Observemos que podemos considerar a função composta $g \circ f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *que será dada por*

$$(g \circ f)(y) = g(f(y)) = g\left(\frac{2}{y}\right) = \sqrt{\frac{2}{y}}, \quad y \in (0, \infty),$$

isto é,

$$(g \circ f)(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}, \quad y \in (0, \infty).$$

Observação 3.2.3 *Observemos que nos dois exemplo acima as funções* $(f \circ g)$ *e* $(g \circ f)$ *são diferentes.*

3.3 Exemplos importantes de funções reais de uma variável real

A seguir exibiremos uma lista de exemplos importantes de funções a valores reais, de uma variável real, que serão utilizados ao longo de todo o desenvolvimento destas notas.

1. **Função maior inteiro**:

   A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

   $$f(x) \doteq [x], \quad x \in \mathbb{R},$$

   onde

   $$[x] \doteq n, \quad \text{se} \quad x \in [n, n+1), \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{Z}$$

   será denominada **função maior inteiro (menor que)**.

   Observação 3.3.1 *Vale observar que dado um número real* $\underline{x}$ *sempre podemos encontrar um número inteiro* $\underline{n}$ *tal que*

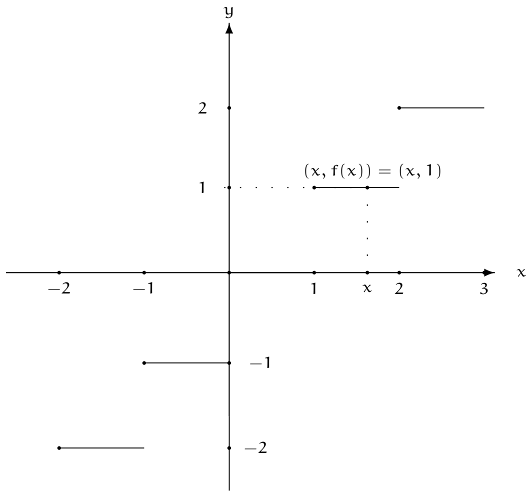
   $$n \leq x < n + 1.$$

   Deste modo, a relação acima definide uma função.

   Em particular temos que:

   $$\begin{aligned} [x] &= 0, \quad \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \quad (\text{neste caso } n = 0) \\ [x] &= 1, \quad \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \quad (\text{neste caso } n = 1) \\ [x] &= 2, \quad \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \quad (\text{neste caso } n = 2), \cdots \end{aligned}$$

   Segue, na figura abaixo, a representação geométrica do gráfico da função maior inteiro:



Observação 3.3.2 *O nome dado a função acima é por que ela associa a cada número real* $\underline{x}$*, o maior inteiro menor, do que o número real* $\underline{x}$*, ou ainda, se o número* $\underline{x}$ *possue uma representação decimal então o número real* $[x]$ *nos fornece o número inteiro da representação decimal do número real* $\underline{x}$*.*

Por exemplo: se $x = 3,141617$ *então* $[x] = 3$*.*

2. **Função constante**:

   Uma função será denominada <u>**função constante**</u> se ela puder ser escrita da seguinte forma: $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq C, \quad x \in A,$$

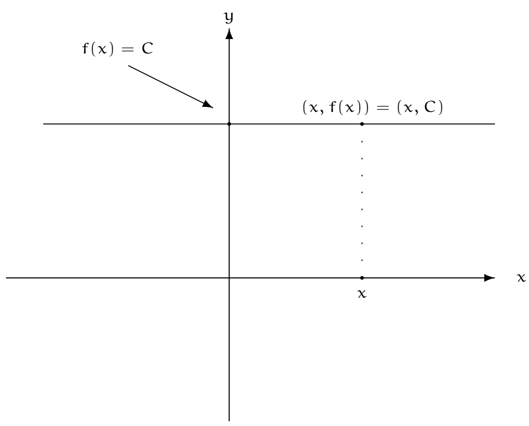
   onde $C \in \mathbb{R}$ está fixado.

Exemplo 3.3.1 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

é uma função constante (no caso $C = 2$*).*

Observação 3.3.3 *A representação geométrica do gráfico de uma função constante é um segmento (ou uma reta) horizontal (veja figura abaixo).*



3. **Função polinomial**:

   Uma função será denominada **função polinomial** se ela puder ser escrita da seguinte forma: $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

   $$f(x) \doteq a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad x \in A,$$

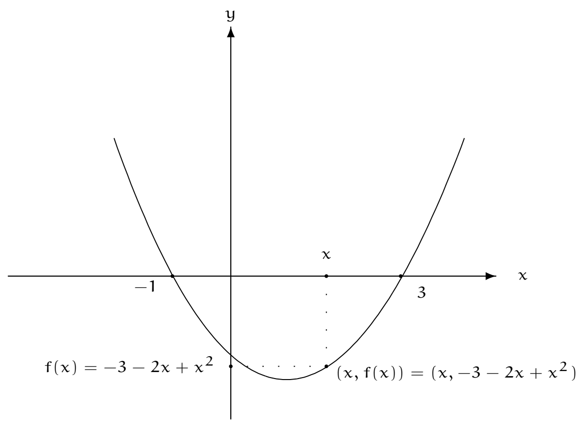
   onde $a_o, a_1, a_2, \cdots a_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ estão fixos.

   Exemplo 3.3.2 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

   $$f(x) \doteq -3 - 2x + x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

   é uma função polinomial (no caso $a_o = -3, a_1 = -2, a_2 = 1$*).*

   Neste caso temos que a representação geométrica do gráfico da função f será dado pela figura abaixo.



   Observação 3.3.4

   1. *Uma função é uma função polinomial se, e somente se, sua lei de associação for dada por um polinômio.*
   2. *Observemos que toda função constante é uma função polinomial.*
      Para ver isto, basta considerar $a_o = C$ *e* $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.
   3. *Se uma função polinomial* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

      $$p(x) \doteq a_o + a_1 x, \quad x \in \mathbb{R}$$

      (neste caso $a_2 = a_3 \cdots = a_n = 0$*) ela será denominada* **função linear afim**. *Na situação acima, se* $a_o = 0$ *ela será dita* **linear**.
   4. *Se uma função polinomial* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

      $$p(x) \doteq a_o + a_1 x + a_2 x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

      (neste caso $a_3 = a_4 \cdots = a_n = 0$*) ela será denominada* **função quadrática**.
   5. *Se uma função polinomial* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

      $$p(x) \doteq a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

      (neste caso $a_4 = a_5 \cdots = a_n = 0$*) ela será denominada* **função cúbica**.

4. **Função racional**:

   Uma função será denominada **função racional** se ela puder ser escrita com uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{p(x)}{q(x)}, \quad x \in A \doteq \{x \in A : q(x) \neq 0\}, \tag{3.6}$$

   onde $\underline{p}$ e $\underline{q}$ são funções polinomiais.

   Exemplo 3.3.3 *A função* $f : A \doteq \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1 - 3x + x^2 - 10x^3}{-3 - 2x + x^2}, \quad x \in A$$

   é uma função racional.

   Para ver isto, basta considerar as funções polinomiais $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$p(x) = 1 - 3x + x^2 - 10x^3 \quad e \quad q(x) = -3 - 2x + x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

   que são funções polinomiais.

   Observação 3.3.5 *Vale observar que toda função polinomial é uma função racional.*

   Para ver isto, basta, na expressão (3.6), considerar a função polinomial $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $q(x) \doteq 1$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

5. **Função par**:

   Uma função será denominada **função par** se ela tem a seguinte propriedade: $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e, para cada $x \in A$ tal que $-x \in A$, deveremos ter

$$f(-x) = f(x).$$

   Exemplo 3.3.4 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq |x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

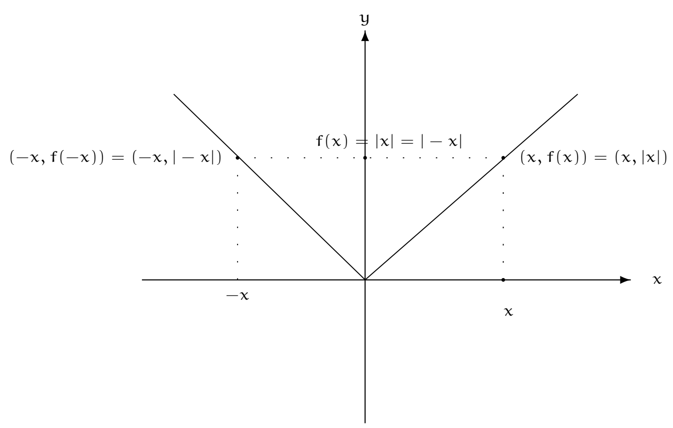
   é uma função par.

   Resolução:

   De fato, pois

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

   A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *será dado pela figura abaixo:*



Observação 3.3.6 *Vale observar que a representação geométrica do gráfico de uma função par será simétrico em relação ao eixo dos* Oy *(como se o eixo* Oy *fosse um espelho).*

6. **Função ímpar**:

Uma função será denominada <u>**função ímpar**</u> se ela tem a seguinte propriedade: $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e, para cada $x \in A$ tal que $-x \in A$, deveremos ter

$$f(-x) = -f(x).$$

Exemplo 3.3.5 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

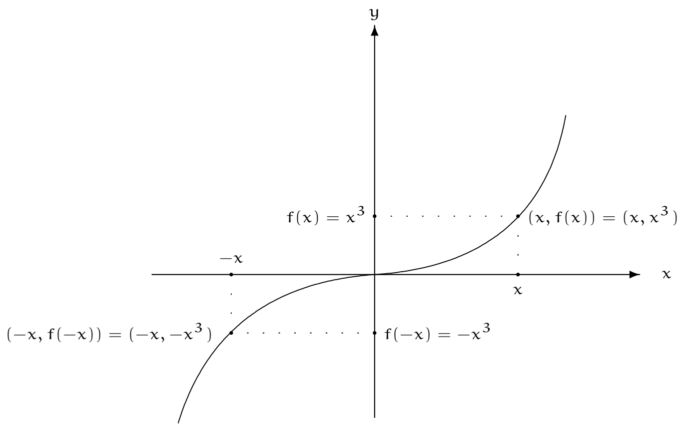
é uma função ímpar.

<u>Resolução:</u>

De fato, pois

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)x^3 = -x^3 = -f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *será dado pela figura abaixo:*



Observação 3.3.7 *Vale observar que a representação geométrica do gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação a origem* $O = (0, 0)$.

7. **Função periódica**:

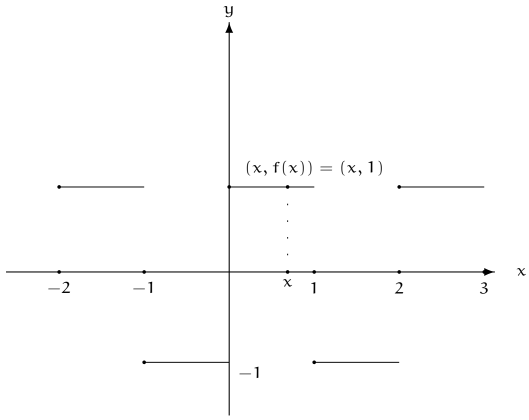
Uma função, não constante, será denominada <u>**função periódica**</u> se ela tem a seguinte propriedade: $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e podemos encontrar $T > 0$ de modo que, para cada $x \in A$ tal que $x + T \in A$, deveremos ter

$$f(x + T) = f(x). \tag{3.7}$$

Exemplo 3.3.6 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por:*

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq -1, \quad \textit{se} \quad x \in [-1, 0) \\ f(x) &\doteq 1, \quad \textit{se} \quad x \in [0, 1) \\ f(x+2) &= f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Observemos que a função $\underline{f}$ é uma função periódica (basta, por exemplo, considerar $T = 2$).
A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ será dado por:



Observação 3.3.8

1. *Notemos que se uma função é periódica deverá existir um menor valor de $T > 0$ para os quais (3.7) será verdade.*

   A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

   Este menor valor de $T > 0$ será dito **período fundamental** *da função periódica $\underline{f}$ e, neste caso, diremos que a função $\underline{f}$ é T-periódica.*
2. *No Exemplo (3.3.6) acima, a função $\underline{f}$ é 2-periódica.*
3. *Vale observar que a representação geométrica do gráfico de uma função periódica repete-se indefinidamente, ou melhor, se conhecermos a representação geométrica do gráfico de uma função periódica num intervalo de comprimento T então poderemos encontrar a representação geométrica do gráfico da função em todo o seu domínio.*

   Para este fim bastará transladar, à direira, ou à esquerda, a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ no intervalo de comprimento T dado inicialmente.

8. **Função sobrejetora**:

Uma função será denominada **função sobrejetora** se o seu contra-domínio for igual ao seu conjunto imagem, isto é, se $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ então

$$f(A) = B.$$

Exemplo 3.3.7 *Seja $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada por*

$$f(x) \doteq x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então a função $\underline{f}$ será uma função sobrejetora, pois se $y \in [0, \infty)$ (contra-domínio) então tomando-se

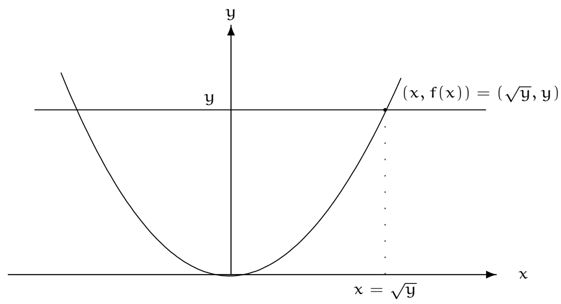
$$x \doteq \sqrt{y} \in \mathbb{R}$$

temos que

$$f(x) = f(\sqrt{y}) = [\sqrt{y}]^2 = |y| = y,$$

mostrando que todo elemento do contra-domínio da função $\underline{f}$ *(que é* $[0, \infty)$*) é imagem de algum elemento do domínio da função (que é a reta* $\mathbb{R}$*).*

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *é dada pela figura abaixo:*



Observação 3.3.9

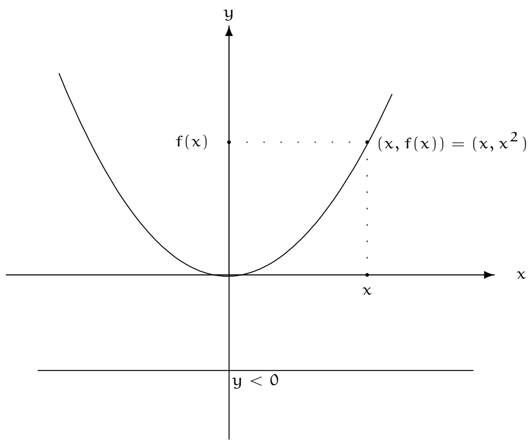
1. *Do ponto de vista da representação geométrica do gráfico, uma função é sobrejetora se, e somente se, toda reta horizontal* $y = c$ *que intercepta o contra-domínio da função, interceptará a representação geométrica do gráfico da função em, pelo menos, um ponto.*
2. *Todo cuidado na análise da situação acima!*

   Observemos que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

   $$g(x) \doteq x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

   <u>não</u> *é sobrejetora, pois seu contra-domínio é a reta* $\mathbb{R}$ *e assim se tomarmos* $y < 0$ *(que está no contra-domínio)* **<u>não</u>** *podemos encontrar* $x \in \mathbb{R}$ *(domínio da função) tal que* $f(x) = y$*!*

   Na figura abaixo, uma reta horizontal que intercepta o eixo negativo de Oy, **<u>não</u>** *interceptará a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *.*



   Observemos que a função $\underline{g}$ *acima é diferente da função* $\underline{f}$ *do Exemplo* (3.3.7) *acima.*

9. **Função injetora**:

Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ será denominada **<u>função injetora</u>** se dados $x_1, x_2 \in A$,

$$x_1 \neq x_2 \quad \text{então} \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

De modo equivalente, se $f(x_1) = f(x_2)$, para $x_1, x_2 \in A$ então, necessariamente, deveremos ter

$$x_1 = x_2.$$

Exemplo 3.3.8 *Seja* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então a função $\underline{f}$ *será uma função injetora.*

<u>Resolução:</u>

De fato, pois se

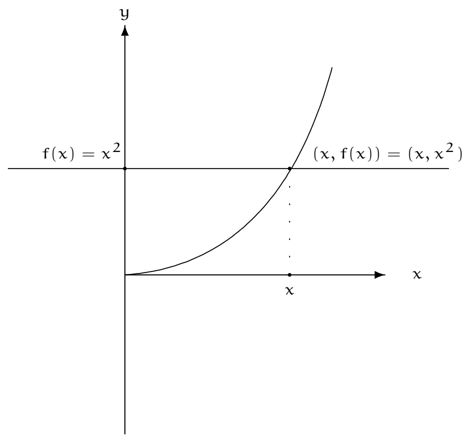
$$x_1, x_2 \in [0, \infty), \quad x_1 \neq x_2 \quad \textit{teremos} \quad f(x_1) = x_1^2 \neq x_2^2 = f(x_2).$$

De outro modo, se tivermos

$$x_1^2 = f(x_1) = f(x_2) = x_2^2, \quad \textit{então} \quad x_1^2 = x_2^2, \quad \textit{mas} \quad x_1, x_2 \in [0, \infty), \quad \textit{logo} \quad x_1 = x_2,$$

mostrando que $\underline{f}$ *é uma função injetora.*

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *é dada pela figura abaixo:*



Observação 3.3.10

1. *Do ponto de vista da representação geométrica do gráfico, uma função será injetora se, e somente se, toda reta horizontal* $y = c$ *intercepta a representação geométrica do gráfico da função em, no máximo, um ponto.*
2. *Observemos que se a função* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$g(x) \doteq x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

então a função $\underline{g}$ ***<u>não</u>*** *será uma função injetora pois, por exemplo,*

$$g(1) = 1 = g(-1).$$

Notemos que a função $\underline{g}$ *acima é diferente da função* $\underline{f}$ *do Exemplo* (3.3.8) *acima.*

10. **Função bijetora**:

    Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ será denominada **função bijetora** se ela for uma função sobrejetora e injetora.

    Exemplo 3.3.9 *Seja* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *dada por*

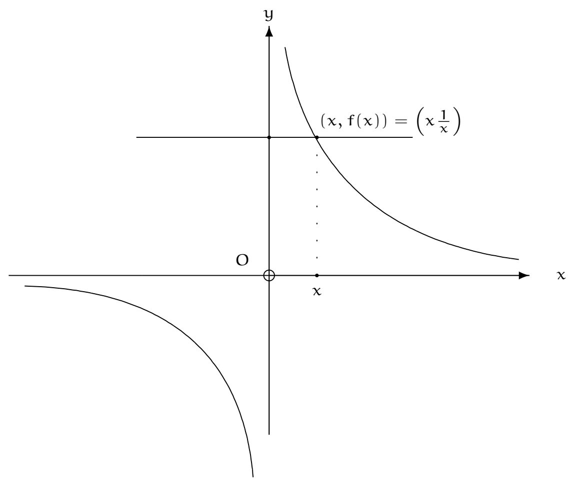
    $$f(x) \doteq \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

    Então função $\underline{f}$ *será uma função bijetora.*

    Resolução:

    A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

    A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *é dada pela figura abaixo:*

    Observação 3.3.11 *Do ponto de vista a representação geométrica do gráfico, uma função é bijetora se, e somente se, toda reta horizontal* $y = c$ *que intercepta o contra-domínio da função, interceptará a representação geométrica do gráfico da função em um único ponto.*

11. **Função inversa associada a uma função**:

    Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ uma função dada.

    Se existir uma função $g : B \to A$ tal que

    $$(f \circ g)(y) \,, = y \quad \text{para cada} \quad y \in B, \tag{3.8}$$
    $$(g \circ f)(x) = x \,, \quad \text{para cada} \quad x \in A, \tag{3.9}$$

    diremos que a função $\underline{f}$ **admite uma função inversa**.

    Observação 3.3.12 *Se a função* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ *admite uma função inversa* $g : B \to A$ *então a função* $\underline{g}$ *será a única função com as propriedades (3.8) e (3.9).*

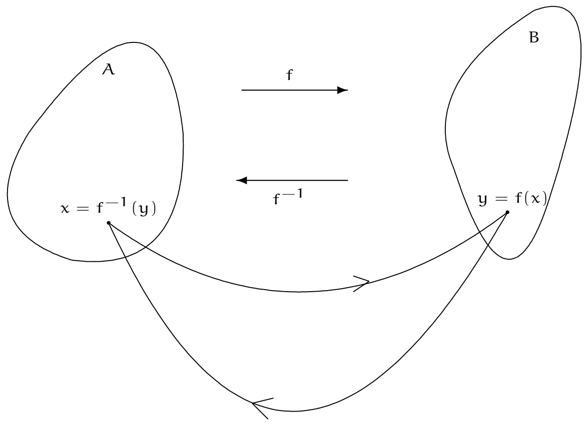
    Deixarem a demonstração deste fato como exercício para o leitor.

Definição 3.3.1 *Na situação da definição acima, a função* g *será dita* **função inversa associada à função** f *e indicada por* f^{-1}*, isto é, tal função terá as seguintes propriedades:*

$$
\begin{aligned}
& f^{-1} : B \to A \\
& \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y, \quad \textit{para cada} \quad y \in B, \\
& \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x, \quad \textit{para cada} \quad x \in A.
\end{aligned}
$$

Observação 3.3.13

1. *A grosso modo, a função inversa associada a uma função desfaz o que a função faz.*
2. *O diagrama de Venn abaixo ilustra a situação:*



Exemplo 3.3.10 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então a função f *admite uma função inversa.*

Resolução:

De fato, se considerarmos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(y) \doteq \sqrt[3]{y}, \quad y \in \mathbb{R}$$

então teremos:

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f\left(\sqrt[3]{y}\right) = [\sqrt[3]{y}]^3 = y,$$

para cada $y \in \mathbb{R}$*.*

Por outro lado,

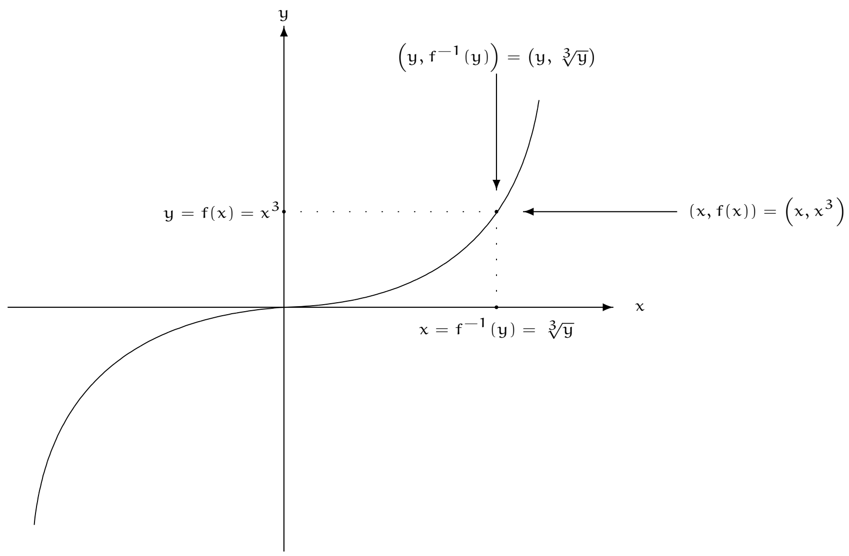
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^3\right) = \sqrt[3]{x^3} = x,$$

para cada $x \in \mathbb{R}$*.*

Logo podemos concluir que a função f *admite uma função inversa e que a função inversa associada a função* f *será a função* $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *onde*

$$f^{-1}(y) \doteq \sqrt[3]{y}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

A representação geométrica do gráfico da função f *é dada na figura abaixo:*



Observação 3.3.14

1. *Do ponto de vista do gráfico, uma função admite função inversa se pudermos "escrever", na equação* $y = f(x)$, *a variável* $\underline{x}$ *em termos da variável* $\underline{y}$, *ou seja,* $x = f^{-1}(y)$.
2. *Além disso, como* $\underline{f}$ *é uma função, toda reta vertical que intercepta o domínio da função* $\underline{f}$ *deve interceptar a representação geométrica do gráfico da mesma em um único ponto.*

   Para que a todo $\underline{y}$ *do contra-domínio da função* $\underline{f}$ *esteja associado um único* $\underline{x}$ *do domínio da mesma (lembre-se que* f^{-1} *deve ser função!) podemos concluir que se* $\underline{f}$ *admite função inversa então ela deverá ser bijetora.*

   Na verdade os dois conceitos são equivalentes, isto é, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.3.1 *Uma função* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ *admite função inversa se, e somente se, a função* $\underline{f}$ *é bijetora.*

Demonstração:

Suponhamos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ admite função inversa.

Mostremos que $\underline{f}$ deve ser bijetora.

De fato, para cada $y \in B$ sabemos que $f^{-1}(y) = x \in A$ e além disso,

$$f(x) = f\left(f^{-1}(y)\right) = \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y,$$

logo $\underline{y}$ deverá pertencer ao conjunto imagem da função $\underline{f}$, assim a função $\underline{f}$ será sobrejetora.

Por outro lado, se $f(x_1) = f(x_2)$ então $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$, isto é,

$$x_1 = \left(f^{-1} \circ f\right)(x_1) = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = \left(f^{-1} \circ f\right)(x_2) = x_2,$$

ou seja, $x_1 = x_2$ mostando que a função $\underline{f}$ será injetora.

Portanto a função $\underline{f}$ é bijetora.

Suponhamos agora que a função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ é bijetora.

Mostremos que a função $\underline{f}$ admite função inversa.

Para isto consideremos $g : B \to A$ dada por:

$$g(y) = x, \tag{3.10}$$

onde $y = f(x)$ para algum $x \in A$.

Observemos que $\underline{f}$ sendo bijetora, será sobrejetora logo exitirá um $x \in A$ com a propriedade (3.10); do fato que $\underline{f}$ é injetora tal $x \in A$ deverá ser único, deste modo a relação (3.10) define uma função.

De (3.10) temos que

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y,$$

para todo $y \in B$ e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x,$$

para todo $x \in A$, mostrando que a função $\underline{f}$ é uma função que admite função inversa.

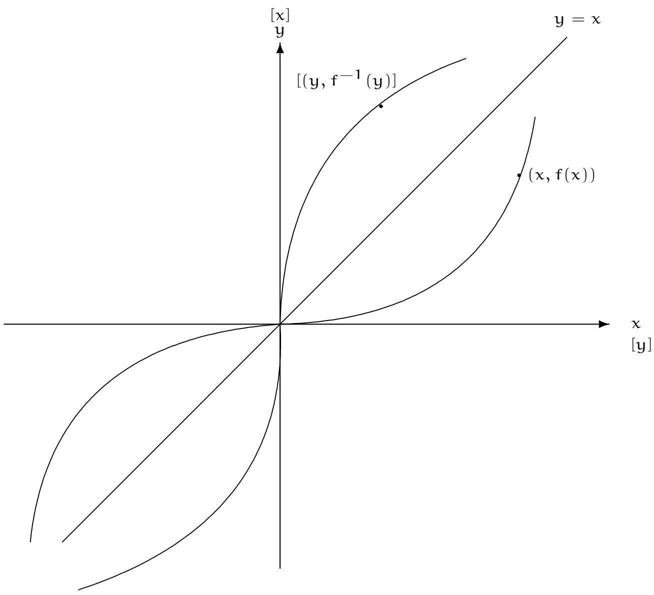
□

Observação 3.3.15

1. *Tendo a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ e sabendo-se que ela é uma função bijetora, para traçarmos a representação geométrica do gráfico da função inversa da função $\underline{f}$ bastará refletirmos a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ em torno da reta $y = x$.*

   A representação geométrica do gráfico obtido será a representação geométrica do gráfico da função inversa da função $\underline{f}$ (onde trocamos os nomes dos eixos, isto é, o eixo horizontal será o eixo Oy e o eixo vertical será o eixo Ox).

   No exemplo acima temos a seguinte situação geométrica:



2. *Cuidado para **não** confundir a função inversa, f^{-1}, de uma função dada $\underline{f}$ com o inverso da função $\underline{f}$, isto é, $\frac{1}{f}$ (caso existam).*

12. **Função limitada**:

    Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será denominada **função limitada (no conjunto A)** se existirem constantes $M, m \in \mathbb{R}$ tais que
$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in A.$$

Observação 3.3.16

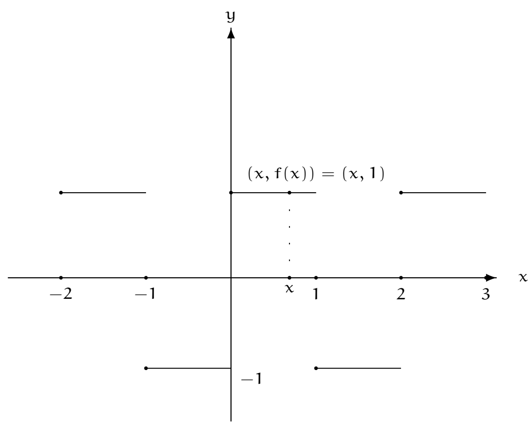
1. *Uma outra caracterização equivalente a dada acima é: a função $\underline{f}$ será uma função limitada (no conjunto A) se existir $L > 0$ tal que*
$$|f(x)| \leq L, \quad \textit{para cada} \quad x \in A.$$
   A demonstração da equivalência desta caracterização com a definição acima será deixada como exercício para o leitor.
2. *Geometricamente, uma função será limitada se a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ estiver contido em uma faixa horizontal de largura finita.*

Exemplo 3.3.11 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:*
$$\begin{aligned} &f(x) \doteq -1, \quad \textit{se} \quad x \in [-1, 0) \\ &f(x) \doteq 1, \quad \textit{se} \quad x \in [0, 1) \\ &f(x+2) = f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
é uma função limtada em $\mathbb{R}$.

Resolução:

De fato, se considerarmos $M = 1$ e $m = -1$ teremos que
$$m = -1 \leq f(x) \leq 1 = M, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



Outra classe que será importante é dada pela:

Definição 3.3.2 *Sejam* $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A$.

Diremos que a função $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *é* **limitada no ponto** $x = a$ *se pudermos encontrar* $\delta > 0$ *e* $M, m \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$m \leq f(x) \leq M$$

para cada $x \in A \setminus \{a\}$, *que satisfaz* $0 < |x - a| < \delta$, *ou seja, para*

$$a - \delta < x < a + \delta, \quad x \in A \quad e \quad x \neq a.$$

Observação 3.3.17

1. *A definição acima nos diz que uma função é limitada num ponto se ela for limitada "perto" do ponto em questão.*

   Vale observar que a função **não** *precisa, necessariamente, estar definida no ponto em questão.*

2. *A definição acima nos diz que uma função* $\underline{f}$ *é limitada no ponto* $x = a$ *se, e somente se, existir* $\delta > 0$, *de modo que a restrição da função* $\underline{f}$ *ao conjunto* $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, *seja uma função limitada no conjunto* $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$.

3. *Observemos que a definição acima é equivalente a seguinte caracterização: uma função é limitada no ponto* $x = a$ *se, e somente se, existirem* $L, \delta > 0$ *tais que*

   $$|f(x)| \leq L \quad \textit{para} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

   De fato, se existirem $L, \delta > 0$ *tais que*

   $$|f(x)| \leq L \quad \textit{para} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

   segue que

   $$-L \leq f(x) \leq L \quad \textit{para} \quad 0 < |x - a| < \delta,$$

   e assim tomando-se $m \doteq -L$ *e* $M \doteq L$ *teremos que*

   $$m \leq f(x) \leq M \quad \textit{para} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

   Por outro lado, se

   $$m \leq f(x) \leq M \quad \textit{para} \quad 0 < |x - a| < \delta,$$

   tomando-se $L \doteq \max\{|M|, |m|\} \geq 0$ *temos que*

   $$M \leq L \tag{3.11}$$
   $$-L \leq m. \tag{3.12}$$

   Assim se $0 < |x - a| < \delta$ *teremos que*

   $$-L \overset{(3.12)}{\leq} m \leq f(x) \overset{(3.11)}{\leq} M \leq L, \quad \textit{isto é}, \quad |f(x)| \leq L,$$

   como queríamos mostrar.

Temos o

Exercício 3.3.1 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^2 + 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

é limitada em $x = 1$.

Resolução:

De fato, se tomarmos, $\delta \doteq 1$, $M = 2$, $m = 0$ temos que

$$0 = m \leq f(x) \leq 8$$

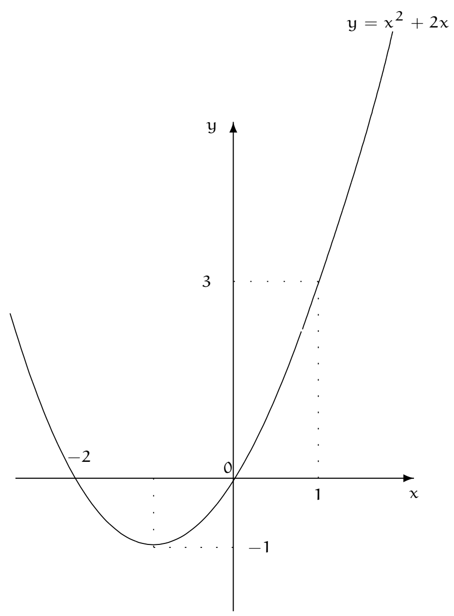
para cada

$$x \in (1 - \delta, 1 + \delta) = (0, 2).$$

Neste caso, a função está definida no ponto $x = 1$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



Observação 3.3.18

1. *Na verdade, no exemplo acima, temos que a função* $\underline{f}$ *será limitada em* $x = a$, *para cada* $a \in \mathbb{R}$, *ou seja, para cada* $x = a \in \mathbb{R}$, *existirão* $L_a, \delta_a > 0$ *tais que*

$$|f(x)| \leq L_a \quad \textit{para} \quad |x - a| < \delta_a.$$

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Notemos que a função* $\underline{f}$ *do exemplo acima* **não** *é limitada em* $\mathbb{R}$.

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

13. **Função (estritamente) crescente**

    Diremos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **crescente** se para $x_1, x_2 \in A$ tal que

    $$x_1 \leq x_2 \quad \text{tenhamos} \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

    De modo análogo, diremos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **estritamente crescente** se para $x_1, x_2 \in A$ tal que

    $$x_1 < x_2 \quad \text{tenhamos} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Observação 3.3.19 *Temos que toda função estritamente crescente também será uma função crescente, mas a recíprova é falsa, isto é, nem toda função crescente é estritamente crescente (o exemplo a seguir mostra isso).*

Exemplo 3.3.12 *A função maior inteiro (ver item (1) desta seção) é crescente, mas* **não** *é estritamente crescente.*

Resolução:

A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Exemplo 3.3.13 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^3 + x - 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então a função $\underline{f}$ *é estritamente crescente.*

Resolução:

De fato, pois se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *e* $x_1 < x_2$ *teremos que*

$$f(x_1) = x_1^3 + x_1 - 2 \overset{x_1 < x_2}{<} x_2^3 + x_2 - 2 = f(x_2),$$

mostrando que a afirmação é verdadeira.

Observação 3.3.20 *Vale observar que toda função estritamente crescente será uma função injetora.*

De fato, se

$$x_1, x_2 \in A \quad e \quad x_1 \neq x_2 \quad \text{então ou} \quad x_1 < x_2 \quad \text{ou} \quad x_2 < x_1.$$

Assim, ou

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{ou} \quad f(x_2) < f(x_1)$$

e em qualquer dos casos acima, teremos

$$f(x_1) \neq f(x_2),$$

mostrando que a função $\underline{f}$ *é injetora.*

O mesmo **não** *é válido para funções crescentes, isto é, existem funções crescentes que* **não** *são injetoras.*

Deixaremos como exercício para o leitor encontrar um exemplo que isto ocorre.

14. **Função (estritamente) decrescente**

    Diremos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **decrescente** se para $x_1, x_2 \in A$ tal que

    $$x_1 \leq x_2 \quad \text{tenhamos} \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

    De modo análogo, diremos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **estritamente decrescente** se para $x_1, x_2 \in A$ tal que

    $$x_1 < x_2 \quad \text{tenhamos} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

    Observação 3.3.21 *Temos que toda função estritamente decrescente também será uma função decrescente, mas a recíprova é falsa, isto é, nem toda função decrescente será uma função estritamente decrescente.*

    Deixaremos como exercício para o leitor encontrar um exemplo que isto ocorre.

    Exemplo 3.3.14 *Seja* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

    $$f(x) \doteq \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

    Então a função $\underline{f}$ *é estritamente decrescente em* $(0, \infty)$.

    Resolução:

    De fato, pois se $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ *e*

    $$x_1 < x_2 \quad \textit{teremos que} \quad f(x_1) = \frac{1}{x_1} \overset{x_1 < x_2}{>} \frac{1}{x_2} = f(x_2),$$

    mostrando que a afirmação é verdadeira.

    Observação 3.3.22 *Observemos que toda função estritamente decrescente será uma função injetora, pois se* $x_1, x_2 \in A$ *e*

    $$x_1 \neq x_2 \quad \textit{então} \quad x_1 < x_2 \quad \textit{ou} \quad x_2 < x_1 \quad \textit{e assim} \quad f(x_1) > f(x_2) \quad \textit{ou} \quad f(x_2) > f(x_1)$$

    e em qualquer caso teremos $f(x_1) \neq f(x_2)$ *, mostrando que a função* $\underline{f}$ *será injetora.*

    O mesmo **não** *é válido para funções decrescentes, isto é, existem funções decrescentes que* **não** *são injetoras.*

    Deixaremos como exercício para o leitor encontrar um exemplo que isto ocorre.

15. **Função Monótona**

    Diremos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **monótona** se ela for uma função crescente ou decrescente.

    Exemplo 3.3.15 *As funções do item (1) desta seção e dos Exemplos (3.3.13) e (3.3.14) são funções monótonas.*

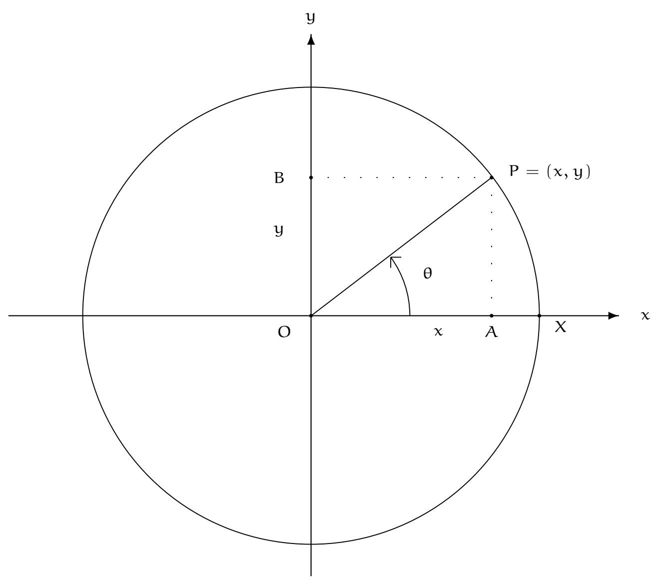
16. **Funções trigonométricas:**

A seguir vamos relembrar como são definidas todas as funções trigométricas.

Começaremos considerando um ponto $P = (x, y)$ sobre uma circunferência de centro na origem e raio 1.

Seja X o ponto de intersecção da circunferência acima com o semi-eixo positivo do eixo dos Ox.

Consideremos $\theta \in \mathbb{R}$ o ângulo (mais precisamente, o comprimento arco de circunferência $\overset{\frown}{XP}$) que a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ forma com a semi-reta $\overrightarrow{OX}$, orientado no sentido anti-horário (vide figura abaixo).



Com isto temos as :

16.1 A função cosseno

Definição 3.3.3 *Definimos o* <u>**cosseno do arco (ou ângulo)** θ</u>*, indicado por* $\cos(\theta)$*, como sendo o valor* <u>x</u> *(o primeiro elemento do par ordenado associado ao ponto* P *fixado acima).*

Observação 3.3.23 *Com isto podemos definir a* <u>**função cosseno**</u>*, indicada por*

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dada por:

$$\cos(\theta) \doteq x, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

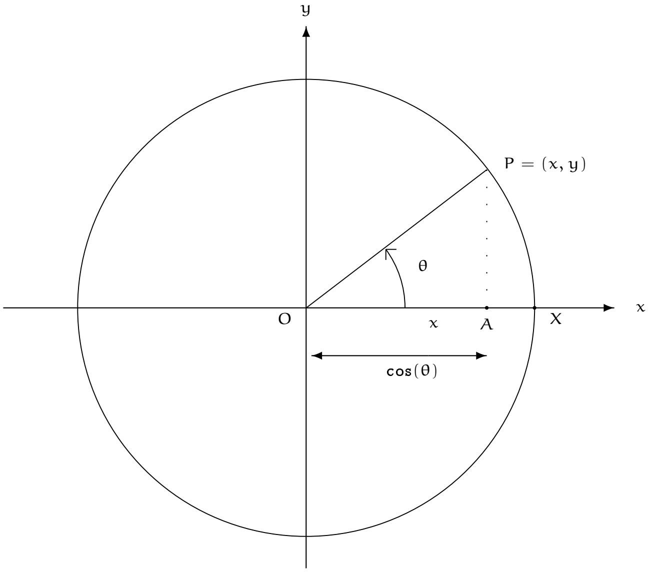
onde <u>x</u> *é o comprimento do segmento* $\overline{OA}$ *para cada*

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$$

ou menos o comprimento do segmento $\overline{OA}$ *se*

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \quad \textit{onde} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Restringindo-se ao intervalo $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\, \frac{\pi}{2}\right]$ *temos a seguinte situação geométrica:*



Temos as seguintes propriedades básicas da função cosseno, cujas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor:

Propriedades 3.3.1

i. a função cosseno é uma função 2π-periódica, isto é,

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R};$$

ii. a função cosseno é uma função limitada, mais especificamente, temos que

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

iii. Temos que

$$0 \leq \cos(\theta) \leq 1 \quad \textit{se} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$$

e

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 0 \quad \textit{se} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

iv. $\cos(\theta) = 1$ *se, e somente se,* $\theta = 2k\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$;

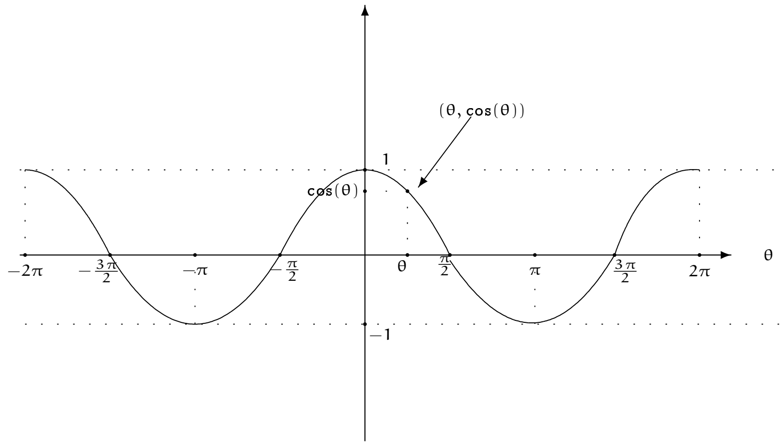
v. $\cos(\theta) = -1$ *se, e somente se,* $\theta = (2k+1)\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$;

vi. $\cos(\theta) = 0$ *se, e somente se,* $\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$;

vii. a função cosseno é uma função par, isto é,

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}; \tag{3.13}$$

viii. A representação geométrica do gráfico da função cosseno é dado pela figura abaixo:



16.2 A função seno

Definição 3.3.4 *Definimos o* **seno do arco (ou ângulo)** θ, *indicado por* $\text{sen}(\theta)$, *como sendo o valor* $\underline{y}$ *(o segundo elemento do par ordenado associado ao ponto* P *fixado acima).*

Observação 3.3.24 *Com isto podemos definir a* **função seno**, *indicada por*

$$\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dada por:

$$\text{sen}(\theta) \doteq y, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

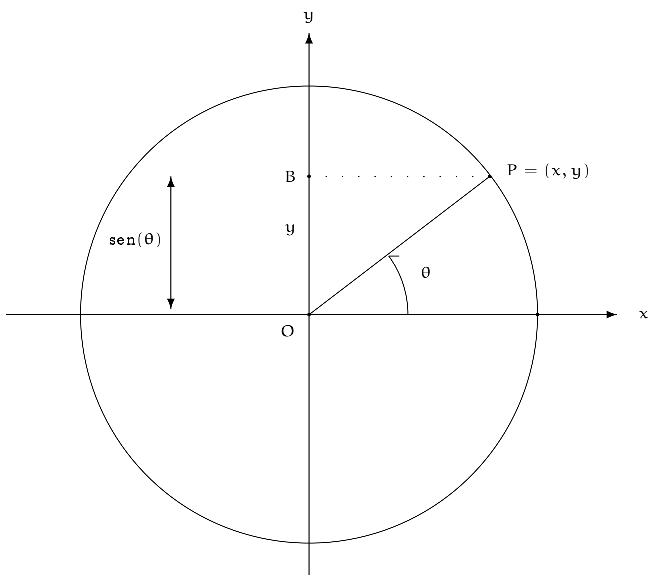
onde $\underline{y}$ *é o comprimento do segmento* $\overline{OB}$ *se*

$$\theta \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \quad k \in \mathbb{Z}$$

ou menos o comprimento do segmento $\overline{OB}$ *se*

$$\theta \in [(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

No intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$ *temos a seguinte situação geométrica:*



Temos as seguintes propriedades básicas da função seno, cujas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor:

Propriedades 3.3.2

i. *a função seno é uma função 2π-periódica,isto é,*

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R};$$

ii. *a função seno é uma função limitada, mais especificamente,*

$$-1 \leq \operatorname{sen}(\theta) \leq 1, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

iii.

$$0 \leq \operatorname{sen}(\theta) \leq 1 \quad \textit{se} \quad \theta \in [2k\pi\,,\,(2k+1)\pi]$$

e

$$-1 \leq \operatorname{sen}(\theta) \leq 0 \quad \textit{se} \quad \theta \in [(2k+1)\,,\,2(k+1)\pi]\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

iv. $\operatorname{sen}(\theta) = 1$ *se, e somente se,* $\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ *com* $k \in \mathbb{Z}$*;*

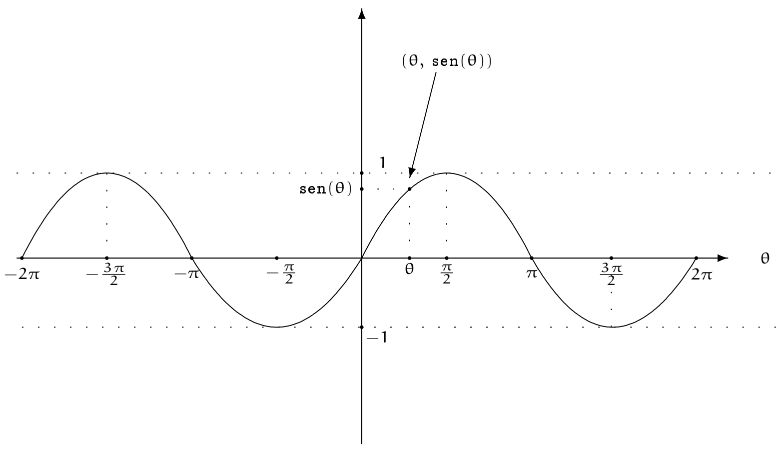
v. $\operatorname{sen}(\theta) = -1$ *se, e somente se,* $\theta = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ *com* $k \in \mathbb{Z}$*;*

vi. $\operatorname{sen}(\theta) = 0$ *se, e somente se,* $\theta = k\pi$ *com* $k \in \mathbb{Z}$*;*

vii. *a função seno é uma função ímpar, isto é,*

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}; \tag{3.14}$$

viii. *A representação geométrica do gráfico da função seno é dado pela figura abaixo:*



As funções cosseno e seno também possuem as seguintes propriedades, cujas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor:

Propriedades 3.3.3 *Para todo* $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ *temos:*

i.

$$\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1; \tag{3.15}$$

ii.

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1).\cos(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1).\operatorname{sen}(\theta_2); \tag{3.16}$$

iii. Segue de (3.16) que

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) \tag{3.17}$$
$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta) \tag{3.18}$$
$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(\theta) \tag{3.19}$$
$$\cos(\theta_1).\cos(\theta_2) = \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2)}{2} \tag{3.20}$$

A penúltima identidade nos diz que podemos obter uma representação geométrica do gráfico da função seno (cosseno, respectivamente) transladando-se de $\frac{\pi}{2}$ *a representação geométrica gráfico da função cosseno (seno, respectivamente) na direção horizontal no sentido positivo (no sentido negativo, respectivamente).*

iv.

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}(\theta_1).\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1).\operatorname{sen}(\theta_2); \tag{3.21}$$

v. Segue de (3.21) que

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta).\cos(\theta) \tag{3.22}$$
$$\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen}(\theta) \tag{3.23}$$
$$\operatorname{sen}(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta) \tag{3.24}$$
$$\operatorname{sen}(\theta_1).\operatorname{sen}(\theta_2) = \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2)}{2} \tag{3.25}$$

Com as funções cosseno e seno podemos definir outras funções importantes, a saber: e

16.3 A função tangente

Definição 3.3.5 *Para* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$*, definimos a* **tangente do arco (ou ângulo)** θ*, indicado por* $\operatorname{tg}(\theta)$*, como sendo:*

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Observação 3.3.25

1. *Na figura abaixo, os triângulos* ΔOAP *e* ΔOXT *são semelhantes (caso AAA). Logo lados correspondentes guardam a mesma proporção, em particular temos:*

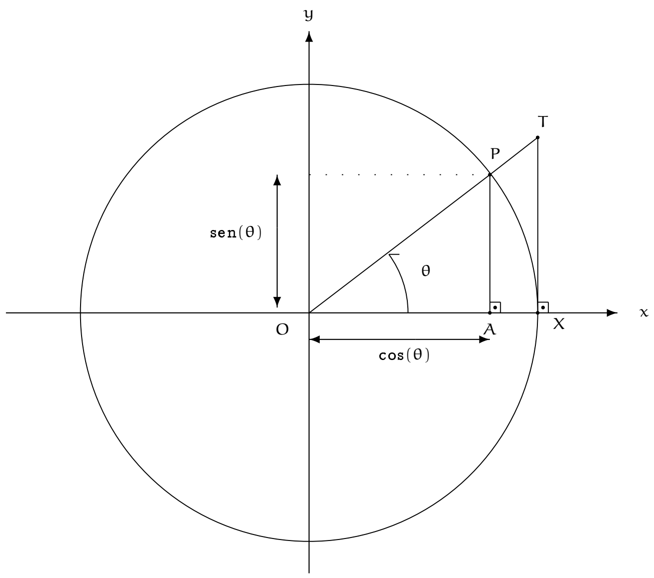
$$\frac{\overline{XT}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OA}}, \quad \textit{isto é}, \quad \overline{XT} = \frac{\overline{OX}.\overline{AP}}{\overline{OA}}.$$

Como

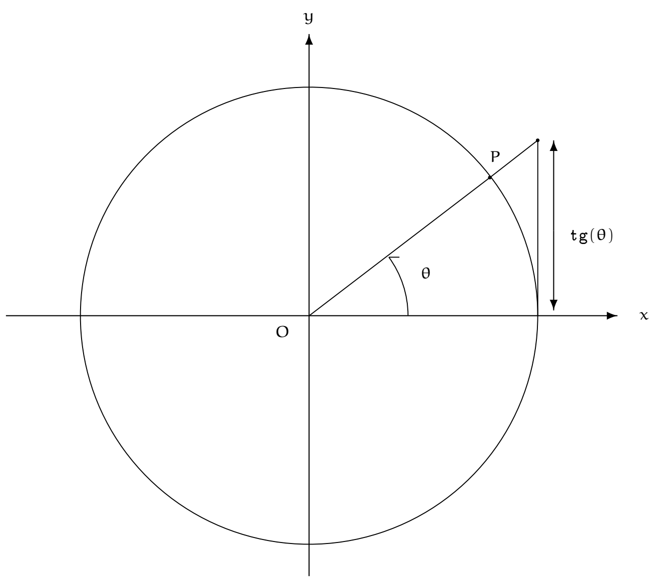
$$\overline{OX} = 1, \quad \overline{OA} = \cos(\theta) \quad e \quad \overline{AP} = \operatorname{sen}(\theta)$$

da relação acima segue que

$$\overline{XT} = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \operatorname{tg}(\theta).$$



Conclusão: *do ponto de vista dá circunferência unitária que utilizamos para definir o cosseno e o seno de um arco* θ *temos que a tangente do arco* θ *correponde, em módulo, ao comprimento do segmento* $\overline{XT}$*, onde* T *é o ponto de intersecção da semi-reta* $\overline{OP}$ *com a reta perpendicular ao eixo* Ox *que passa pelo ponto* X *(veja figura abaixo).*



2. *Podemos assim definir a* **função tangente***, indicada por*

$$\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$

dada por:

$$\operatorname{tg}(\theta) \doteq \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}, \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

A seguir exibiremos algumas propriedades da função tangente, cujas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor:

Propriedades 3.3.4 *Sejam* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$*. Então:*

i. $\mathrm{tg}(\theta) = 0$ *se, e somente se,* $\theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

ii. $\mathrm{tg}(\theta) = 1$ *se, e somente se,* $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

iii. $\mathrm{tg}(\theta) = -1$ *se, e somente se,* $\theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

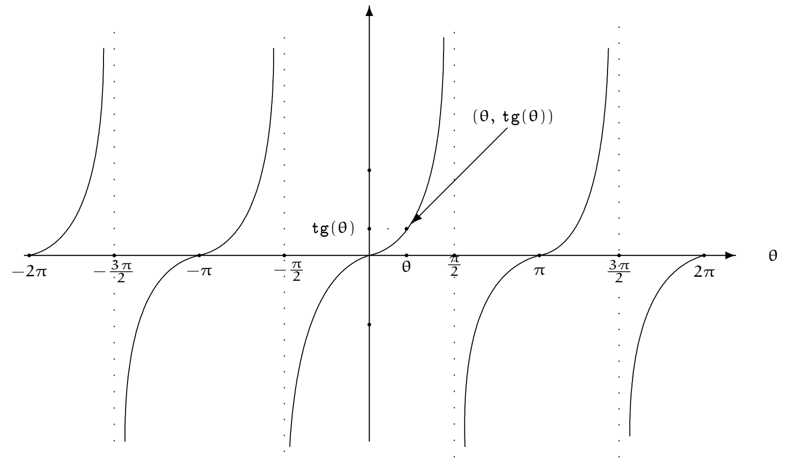
iv. *A função tangente é uma função π-periódica, isto é,*

$$\mathrm{tg}(\theta + \pi) = \mathrm{tg}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\};$$

v. *A função tangente é uma função ímpar, isto é,*

$$\mathrm{tg}(-\theta) = -\,\mathrm{tg}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

A representação geométrica do gráfico da função tangente é dada pela figura abaixo:



16.4 A função cotangente

Definição 3.3.6 *Para* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, *definimos a* **cotangente do arco (ou ângulo)** θ, *indicado por* $\mathrm{cotg}(\theta)$, *como sendo:*

$$\mathrm{cotg}(\theta) \doteq \frac{\cos(\theta)}{\mathrm{sen}(\theta)}.$$

Observação 3.3.26

1. *Na figura abaixo, os triângulos ΔOBP e ΔOYT são semelhantes (caso AAA). Logo lados correspondentes guardam a mesma proporção, por exemplo:*

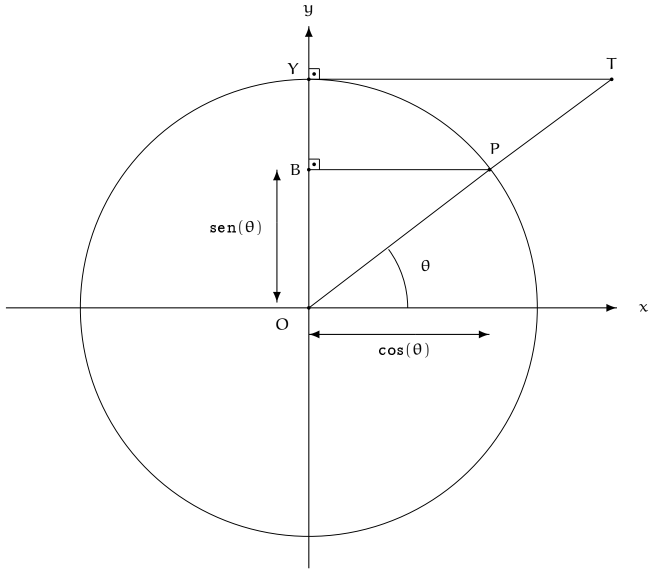
$$\frac{\overline{YT}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{OY}}{\overline{OB}}, \quad \text{isto é,} \quad \overline{YT} = \frac{\overline{OY}.\overline{BP}}{\overline{OB}}.$$

Como

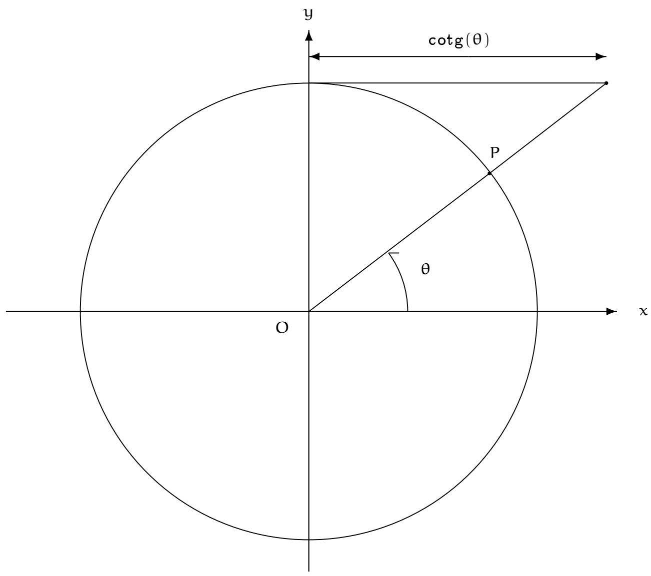
$$\overline{OY} = 1 \quad \overline{OB} = \mathrm{sen}(\theta) \quad e \quad \overline{BP} = \cos(\theta)$$

da relação acima segue que

$$\overline{YT} = \frac{\cos(\theta)}{\mathrm{sen}(\theta)} = \mathrm{cotg}(\theta).$$



Conclusão: *do ponto de vista dá circunferência unitária que utilizamos para definir o cosseno e o seno de um arco* θ *temos que a cotangente do arco* θ *correponde, em módulo, ao comprimento do segmento* $\overline{YT}$, *onde* T *é o ponto de intersecção da semi-reta* $\overline{OP}$ *com a reta perpendicular ao eixo* Oy *que passa pelo ponto* Y *(veja figura abaixo).*



2. *Podemos assim definir a* **função cotangente**, *indicada por*

$$\text{cotg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

dada por:

$$\text{cotg}(\theta) \doteq \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}, \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

A seguir exibiremos algumas propriedades da função cotangente cujas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor:

Propriedades 3.3.5 *Sejam* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$. *Então:*

i. $\text{cotg}(\theta) = 0$ *se, e somente se,* $\theta = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

ii. $\text{cotg}(\theta) = 1$ *se, e somente se,* $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

iii. $\text{cotg}(\theta) = -1$ *se, e somente se,* $\theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

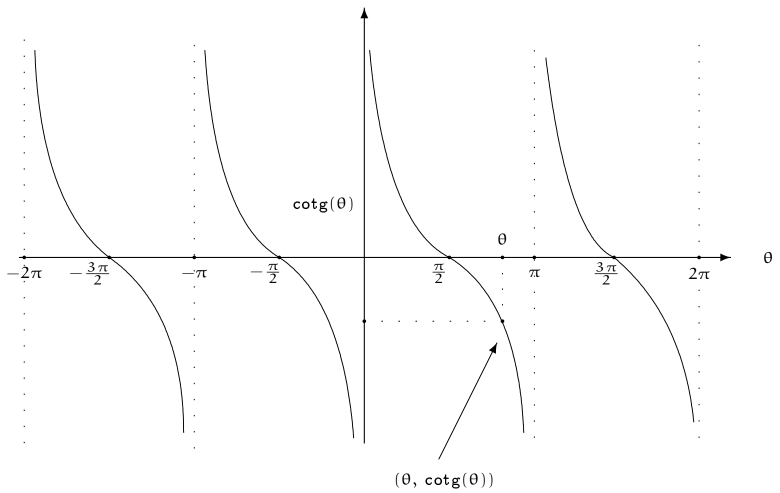
iv. A função cotangente é uma função π*-periódica, isto é,*

$$\text{cotg}(\theta + \pi) = \text{cotg}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\};$$

v. A função cotangente é uma função ímpar, isto é,

$$\text{cotg}(-\theta) = -\text{cotg}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

A representação geométrica do gráfico da função cotangente é dada pela figura abaixo:



Observação 3.3.27

1. *As funções tangente e cotangente se relacionam da seguinte forma:*

$$\text{tg}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{cotg}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Como conseqüência da identidade acima segue que a representação geométrica do gráfico da função cotangente (tangente, respectivamente) pode ser obtida da representação geométrica do gráfico da função tangente (cotangente, respectivamente) transladando-se este último de* $\frac{\pi}{2}$ *na direção horizontal em qualquer um dos sentidos e refletindo-se em torno do eixo* Ox.

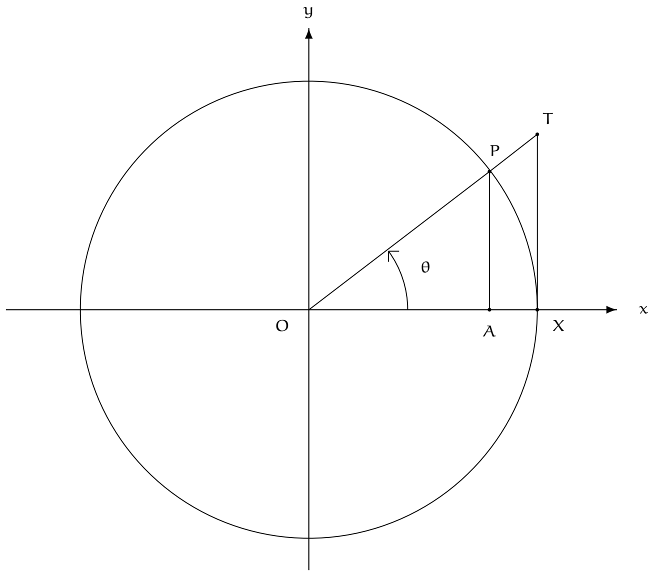
16.5 A função secante

Definição 3.3.7 *Para* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, *definimos a* <u>**secante do arco (ou ângulo)** θ</u>, *indicado por* $\sec(\theta)$, *como sendo:*

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

Observação 3.3.28

1. *Na figura abaixo, os triângulos* ΔOAP *e* ΔOXT *são semelhantes (caso AAA).*



Logo lados correspondentes guardam a mesma proporção, em particular:

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OA}}, \quad \textit{isto é,} \quad \overline{OT} = \frac{\overline{OX}.\overline{OP}}{\overline{OA}}.$$

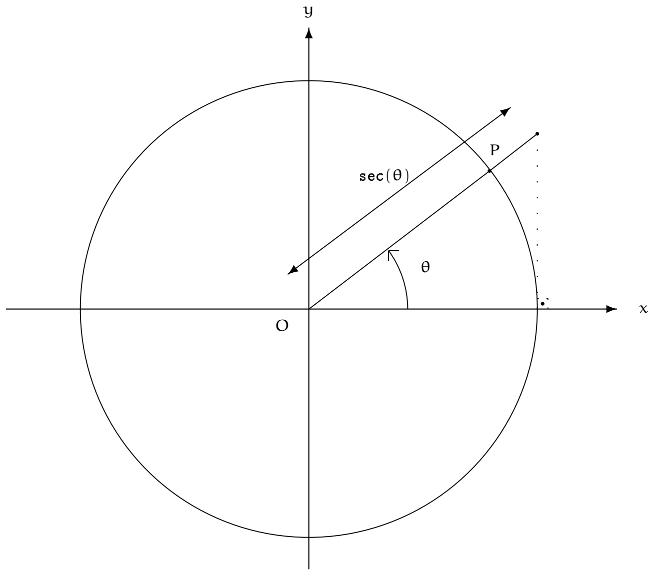
Como

$$\overline{OX} = \overline{OP} = 1 \quad e \quad \overline{OA} = \cos(\theta)$$

da relação acima segue que

$$\overline{OT} = \frac{1}{\cos(\theta)} = \sec(\theta).$$

<u>Conclusão:</u> *do ponto de vista dá circunferência unitária que utilizamos para definir o cosseno e o seno de um arco* θ *temos que a secante do arco* θ *correponde, em módulo, ao comprimento do segmento* $\overline{OT}$, *onde* T *é o ponto de intersecção da semi-reta* $\overline{OP}$ *com a reta perpendicular ao eixo* Ox *que passa pelo ponto* X *(veja figura abaixo).*



2. *Podemos assim definir a* **função secante**, *indicada por*

$$\sec : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$

dada por:

$$\sec(\theta) \doteq \frac{1}{\cos(\theta)}, \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A seguir exibiremos algumas propriedades da função secante cujas demonstrações serão deixadaa como exercício para o leitor:

Propriedades 3.3.6 *Sejam* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z} \right\}$. *Então:*

i. $1 \leq |\sec(\theta)|$, *para todo* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z} \right\}$*);*

ii. $\sec(\theta) = 1$ *se, e somente se,* $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$*;*

iii. $\sec(\theta) = -1$ *se, e somente se,* $\theta = (2k+1)k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$*;*

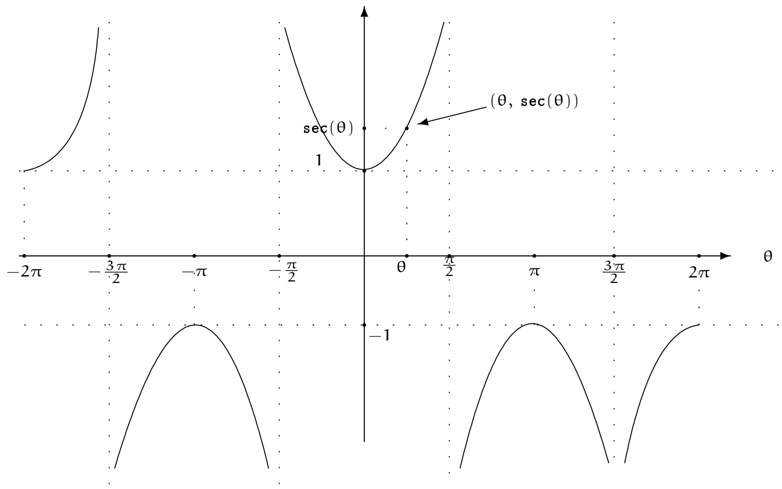
iv. A função secante é uma função 2π*-periódica, isto é,*

$$\sec(\theta + 2\pi) = \sec(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z} \right\};$$

v. A função secante é uma função par, isto é,

$$\sec(-\theta) = \sec(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A representação geométrica do gráfico da função secante é dada pela figura abaixo:



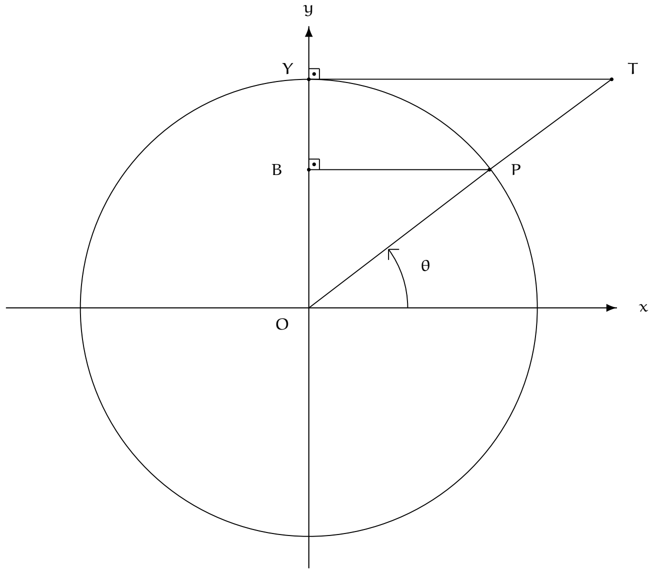
16.6 A função cossecante

Definição 3.3.8 *Para cada* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$, *definimos a* **cossecante do arco (ou ângulo)** θ, *indicado por* $\operatorname{cossec}(\theta)$, *como sendo:*

$$\operatorname{cossec}(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}.$$

Observação 3.3.29

1. *Na figura abaixo, os triângulos* ΔOBP *e* ΔOYT *são semelhantes (caso AAA).*



Logo lados correspondentes guardam a mesma proporção, em particular:

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OY}}{\overline{OB}}, \quad \textit{isto é,} \quad \overline{OT} = \frac{\overline{OY}.\overline{OP}}{\overline{OB}}.$$

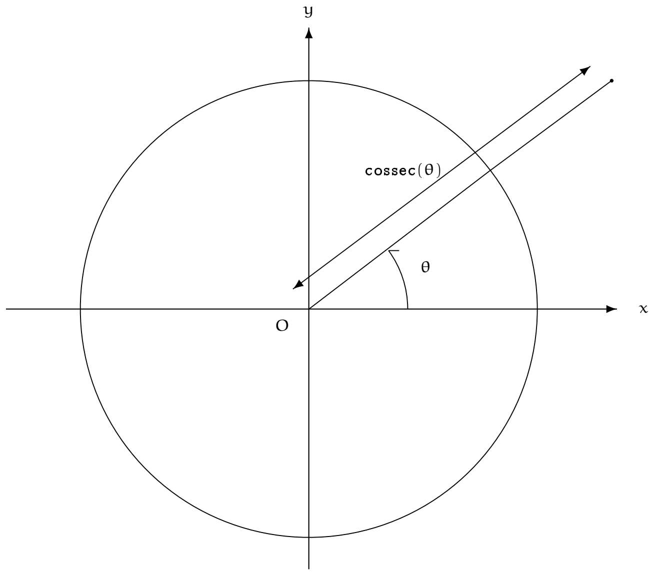
Como

$$\overline{OY} = \overline{OP} = 1 \quad e \quad \overline{OB} = \text{sen}(\theta)$$

da relação acima segue que

$$\overline{OT} = \frac{1}{\text{sen}(\theta)} = \text{cossec}(\theta).$$

Conclusão: do ponto de vista dá circunferência unitária que utilizamos para definir o cosseno e o seno de um arco θ *temos que a cossecante do arco* θ *correponde, em módulo, ao comprimento do segmento* $\overline{OT}$, *onde* T *é o ponto de intersecção da semi-reta* $\overline{OP}$ *com a reta perpendicular ao eixo* Oy *que passa pelo ponto* Y *(veja figura abaixo).*



2. Com isto podemos definir a **função cossecante**, *indicada por*

$$\mathrm{cossec} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

dada por:

$$\mathrm{cossec}(\theta) \doteq \frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)}, \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

A seguir exibiremos algumas propriedades da função secante, cujas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor:

Propriedades 3.3.7 *Sejam* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$. *Então:*

i. $1 \leq |\mathrm{cossec}(\theta)|$, *para todo* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$*);*

ii. $\mathrm{cossec}(\theta) = 1$ *se, e somente se,* $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$*;*

iii. $\mathrm{cossec}(\theta) = -1$ *se, e somente se,* $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$*;*

iv. A função cossecante é uma função 2π*-periódica, isto é,*

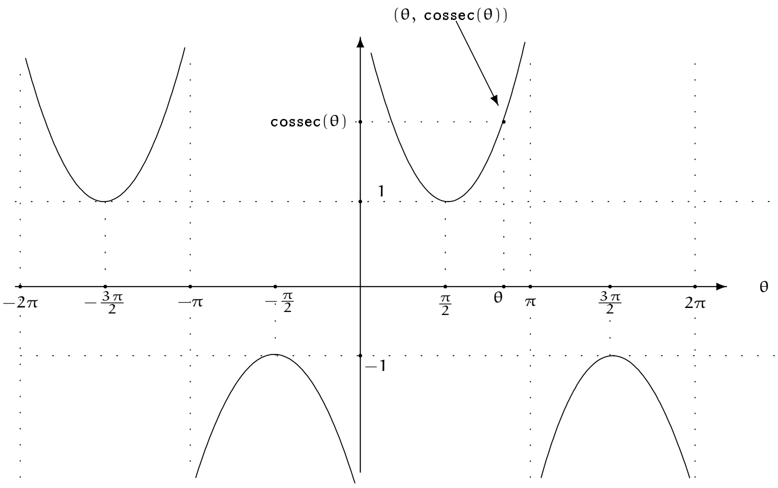
$$\mathrm{cossec}(\theta + 2\pi) = \mathrm{cossec}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\};$$

v. A função cossecante é uma função ímpar, isto é,

$$\mathrm{cossec}(-\theta) = \mathrm{cossec}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

vi. $\sec\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{cossec}(\theta)$ *para todo* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$.

A representação geométrica do gráfico da função cossecante é dada pela figura abaixo:



As funções dos item (16.1) até (16.6) são denominadas **funções trigonométricas**.

Temos algumas propriedades que envolvem várias das funções trigonométricas, cujas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor:

Propriedades 3.3.8

(a) Se $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *então*

$$\mathrm{tg}^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta); \tag{3.26}$$

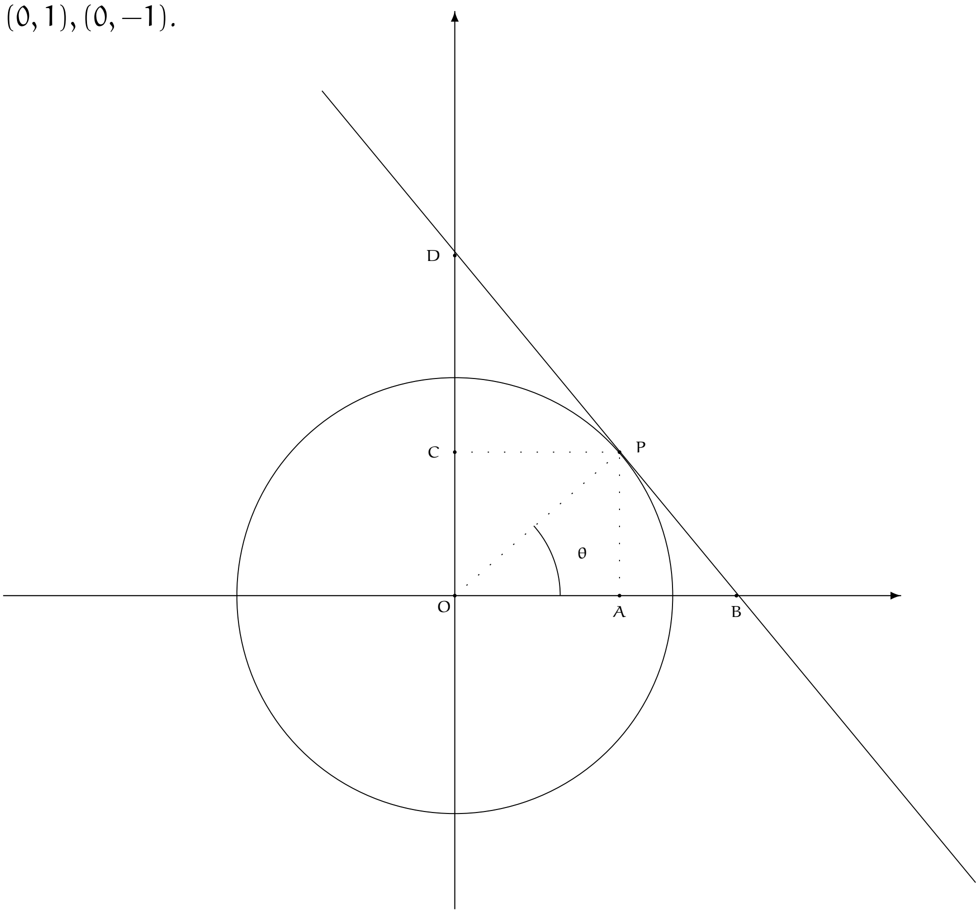
(b) Se $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$ *então*

$$\operatorname{cotg}^2(\theta) + 1 = \operatorname{cossec}^2(\theta); \tag{3.27}$$

Observação 3.3.30 *Um outro modo de ver, geometricamente, as funções trigométricas acima definidas é dado da seguinte forma: consideremos o ponto*

$$P \in \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

com $P \neq (0, 1), (0, -1)$.



Logo

$$\overline{OA} = \cos(\theta), \quad \overline{OB} = \operatorname{sen}(\theta), \quad \overline{OP} = 1.$$

Como os triângulos ΔOAP *e* ΔOBP *são semelhantes (caso AAA), segue que*

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}, \quad \textit{isto é}, \quad \overline{PB} \overset{\overline{OP}=1}{=} \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} \overset{\overline{AP}=\overline{OC}}{=} \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)},$$

ou seja,

$$\operatorname{tg}(\theta) = \overline{PB}.$$

Dessa semelhança também segue que

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}, \quad \textit{isto é}, \quad \overline{OB} \overset{\overline{OP}=1}{=} \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\cos(\theta)},$$

ou seja,

$$\sec(\theta) = \overline{OB}.$$

De modo análogo, como os triângulos ΔOCP *e* ΔODP *são semelhantes (caso AAA), segue que*

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OC}}, \quad \textit{isto é}, \quad \overline{PD} \overset{\overline{OP}=1}{=} \frac{\overline{CP}}{\overline{OC}} \overset{\overline{CP}=\overline{OA}}{=} \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)},$$

ou seja,

$$\operatorname{cotg}(\theta) = \overline{PD}.$$

Dessa semelhança também segue que

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OC}}, \quad \textit{isto é}, \quad \overline{OD} \overset{\overline{OP}=1}{=} \frac{1}{\overline{OC}} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)},$$

ou seja,

$$\operatorname{cossec}(\theta) = \overline{OD}.$$

A seguir trataremos das

17. **Funções trigonométricas inversas:**

Nesta seção vamos restringir, de modo, conveniente, cada uma das funções trigonométricas exibidas na seção anterior para que possamos obter suas correspondentes funções inversas.

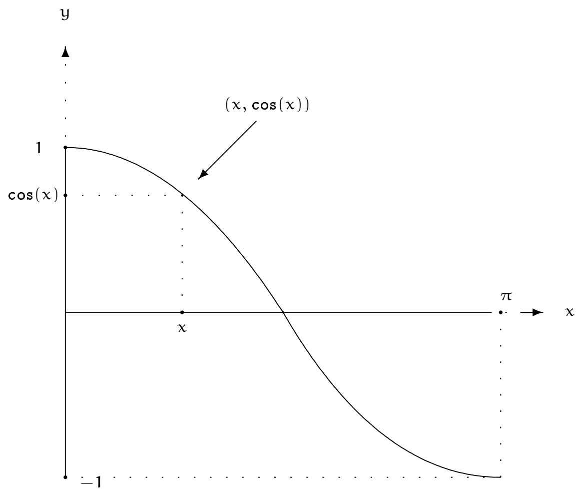
Começaremos pela:

17.1 A função arco-cosseno

Consideremos a função

$$f : [0, \pi] \to [-1, 1] \quad \text{dada por} \quad f(x) \doteq \cos(x), \quad x \in [0, \pi],$$

cuja representação geométrica do seu gráfico é dada pela figura abaixo:



Nesta situação, podemos mostrar (será deixado como exercício para o leitor) que a função f é estritamente decrescente (logo será uma função injetora) e sobrejetora.
Portanto f é uma função bijetora logo admite função inversa $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

Definição 3.3.9 *A função inversa,* f^{-1}*, obtida acima será denominada* **função arco-cosseno** *e indicada por* arccos *(ou* $\cos^{-1}$*).*

A função arco-cosseno tem as seguintes propriedades, cujas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor:

Propriedades 3.3.9

i. $\cos(\arccos(y)) = y$, *se* $y \in [-1, 1]$*;*

ii. $\arccos(\cos(x)) = x$, *se* $x \in [0, \pi]$*;*

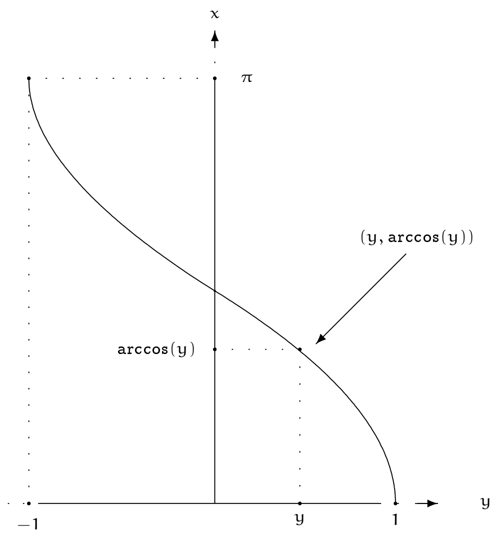
iii. $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$*;*

iv. $\arccos(1) = 0$*;*

v. $\arccos(-1) = \pi$*;*

vi. arccos *é uma função estritamente decrescente;*

A representação geométrica do gráfico da função arccos é dada pela figura abaixo:



Observação 3.3.31 *Poderíamos ter escolhido outras restrições da função cosseno, a outros intervalos de* $\mathbb{R}$*, para considerar sua função inversa, por exemplo: intervalos do tipo:* $[k\pi, (k+1)\pi]$*, onde* $k \in \mathbb{Z}$*.*

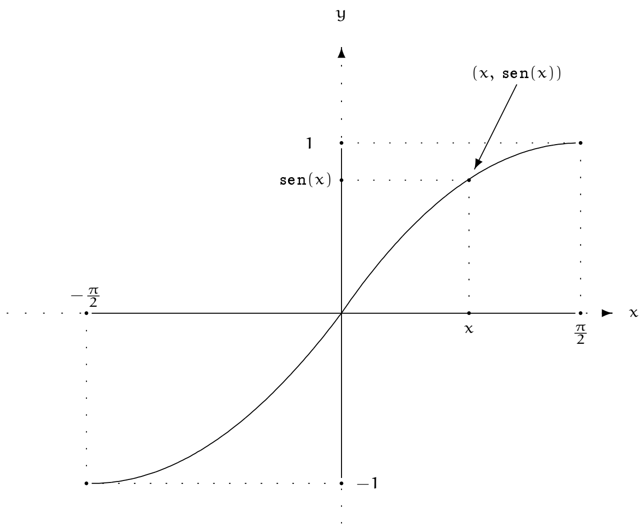
Para cada uma dessas escolhas teremos uma função inversa diferente associadada à escolha do domínio da restrição da função cosseno que fizemos.

17.2 A função arco-seno

Consideremos a função

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \quad \text{dada por} \quad f(x) \doteq \text{sen}(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

cuja representação geométrica do seu gráfico é dada pela figura abaixo:



Nesta situação, podemos mostrar (será deixado como exercício para o leitor) que a função $\underline{f}$ é estritamente crescente (logo será uma função injetora) e sobrejetora.
Portanto $\underline{f}$ é uma função bijetora logo admite função inversa $f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

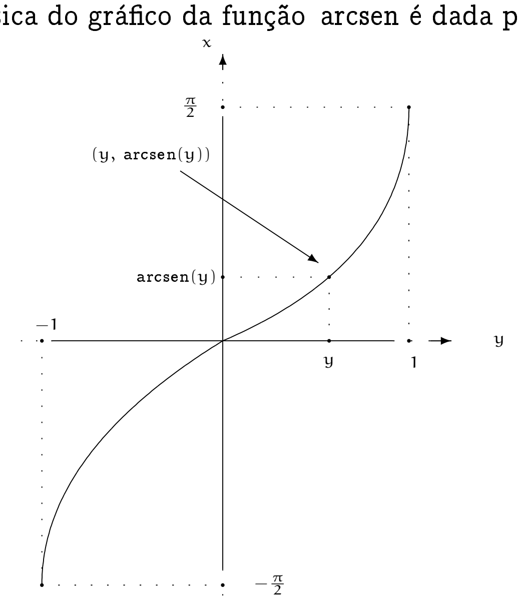
Definição 3.3.10 *A função inversa,* f^{-1}*, obtida acima será denominada* **<u>função arco-seno</u>** *e indicada por* arcsen *(ou* sen^{-1}*).*

A função arco-seno tem as seguintes propriedades, cujas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor:

Propriedades 3.3.10

i. $\text{sen}(\text{arcsen}(y)) = y$, *se* $y \in [-1, 1]$*;*
ii. $\text{arcsen}(\text{sen}(x)) = x$, *se* $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$*;*
iii. $\text{arcsen}(0) = 0$*;*
iv. $\text{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}$*;*
v. $\text{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2}$*;*
vi. arcsen *é uma função estritamente crescente;*

A representação geomética do gráfico da função arcsen é dada pela figura abaixo:



Observação 3.3.32

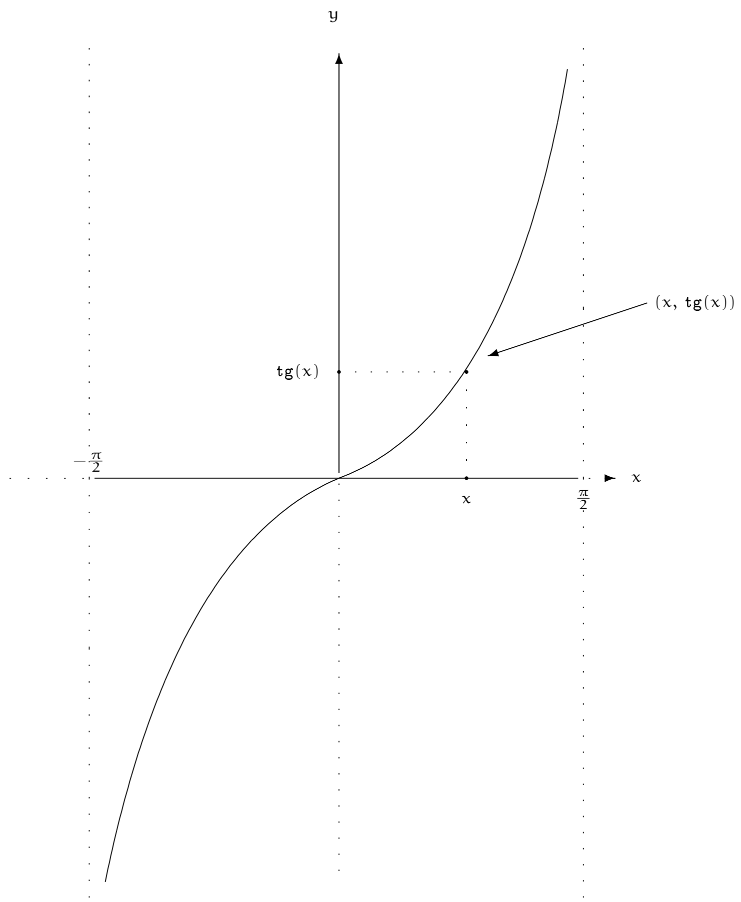
1. *Observemos que a função* $\underline{f}$ *é ímpar e sua função inversa também é uma função ímpar.*
2. *Poderíamos ter escolhido como domínio da restrição da função seno outros intervalos para considerar sua função inversa, por exemplo: intervalos do tipo:* $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$*, onde* $k \in \mathbb{Z}$*.*
Para cada uma dessas escolhas teremos uma função inversa diferente associadada à escolha da restrição da função seno que fizemos.

17.3 A função arco-tangente

Consideremos a função

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x) \doteq \mathrm{tg}(x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

cuja representação geométrica do gráfico é dada pela figura abaixo:



Nesta situação, podemos mostrar (será deixado exercício para o leitor) que a função $\underline{f}$ é estritamente crescente (logo será uma função injetora) e sobrejetora.
Portanto $\underline{f}$ é uma função bijetora logo admite função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Definição 3.3.11 *A função inversa,* f^{-1}*, obtida acima será denominada* **<u>função arco-tangente</u>** *e indicada por* arctg *(ou* tg^{-1}*).*

A função arco-tangente tem as seguintes propriedades, cuja demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor:

Propriedades 3.3.11

i. $\mathrm{tg}(\,\mathrm{arctg}(y)) = y$, *se* $y \in \mathbb{R}$*;*

ii. $\mathrm{arctg}(\,\mathrm{tg}(x)) = x$, *quad se* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$*;*

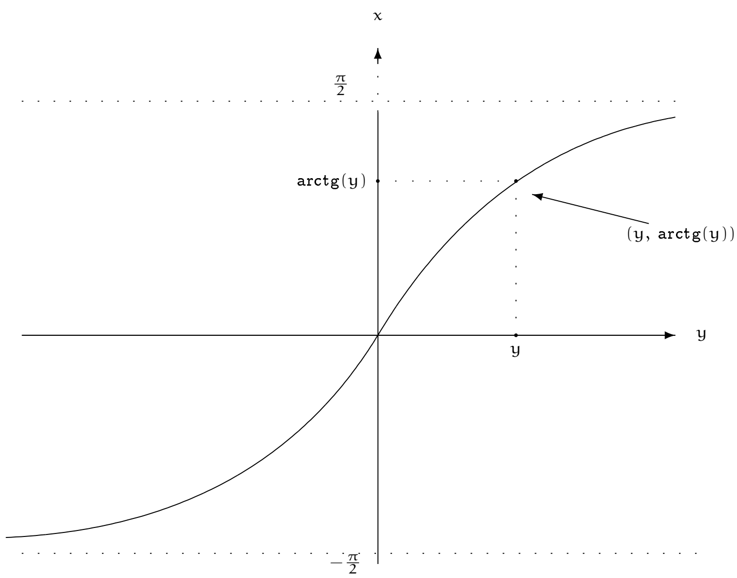
iii. $\mathrm{arctg}(0) = 0$*;*

iv. $\mathrm{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$*;*

v. $\mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$*;*

vi. arctg *é uma função estritamente crescente;*

A representação geométrica do gráfico da função arctg é dada pela figura abaixo:



Observação 3.3.33

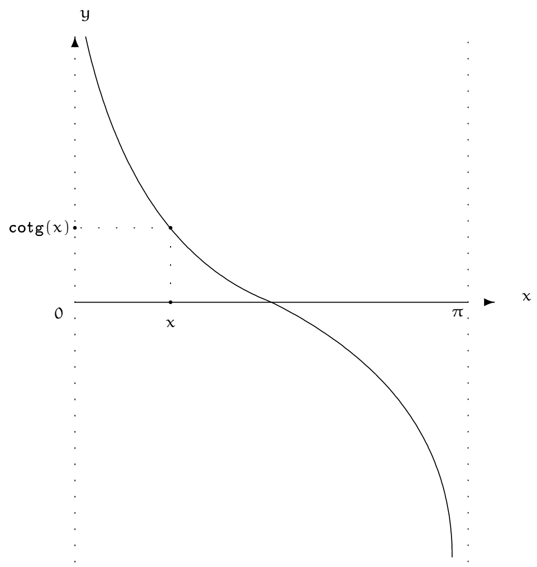
1. *Observemos que a função* $\underline{f}$ *é ímpar e sua função inversa também é uma função ímpar.*
2. *Poderíamos ter escolhido a restrição da função tangente a outros intervalos para considerar sua função inversa, por exemplo: intervalos do tipo:* $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, *onde* $k \in \mathbb{Z}$.
   Para cada uma dessas escolhas teremos uma função inversa diferente associadada à escolha restrição da função tangente que fizemos.

17.4 A função arco-cotangente

Consideremos a função

$$f : (0, \pi) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x) \doteq \mathrm{cotg}(x), \quad x \in (0, \pi),$$

cuja representação geométrica do gráfico é dada pela figura abaixo:



Nesta situação, podemos mostrar (será deixado como exercício para o leitor) que a função $\underline{f}$ é estritamente decrescente (logo será uma função injetora) e sobrejetora.
Portanto $\underline{f}$ é uma função bijetora logo admite função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$.

Definição 3.3.12 *A função inversa, f^{-1}, obtida acima será denominada* **função arco-cotangente** *e indicada por* arccotg *(ou* cotg^{-1}*).*

A função arco-cotangente tem as seguintes propriedades, cujas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor:

Propriedades 3.3.12

i. $\text{cotg}(\text{arccotg}(y)) = y$, *se* $y \in \mathbb{R}$;

ii. $\text{arccotg}(\text{cotg}(x)) = x$, *se* $x \in (0, \pi)$;

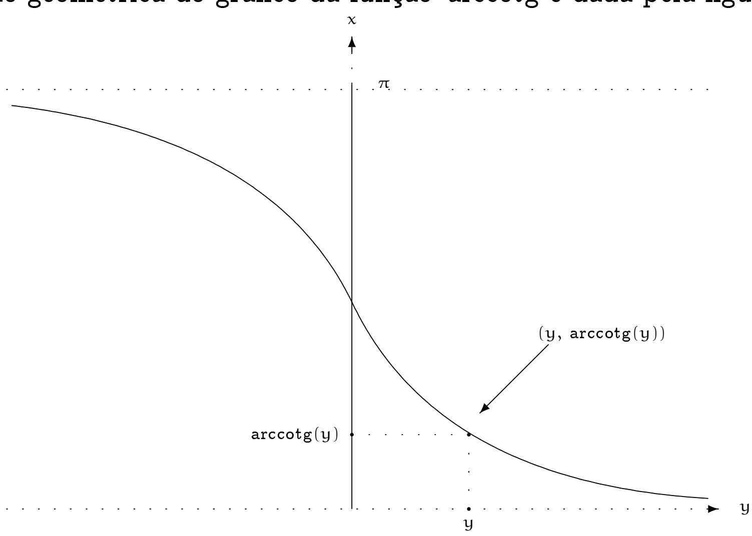
iii. $\text{arccotg}(0) = \dfrac{\pi}{2}$;

iv. $\text{arccotg}(1) = \dfrac{\pi}{4}$;

v. $\text{arccotg}(-1) = \dfrac{3\pi}{4}$;

vi. arccotg *é uma função estritamente decrescente;*

A representação geométrica do gráfico da função arccotg é dada pela figura abaixo:



Observação 3.3.34 *Poderíamos ter escolhido a restrição da função cotangente a outros intervalos como domínio da função* $\underline{f}$ *para considerar sua função inversa, por exemplo: intervalos do tipo:* $(k\pi, (k+1)\pi)$*, onde* $k \in \mathbb{Z}$*.*

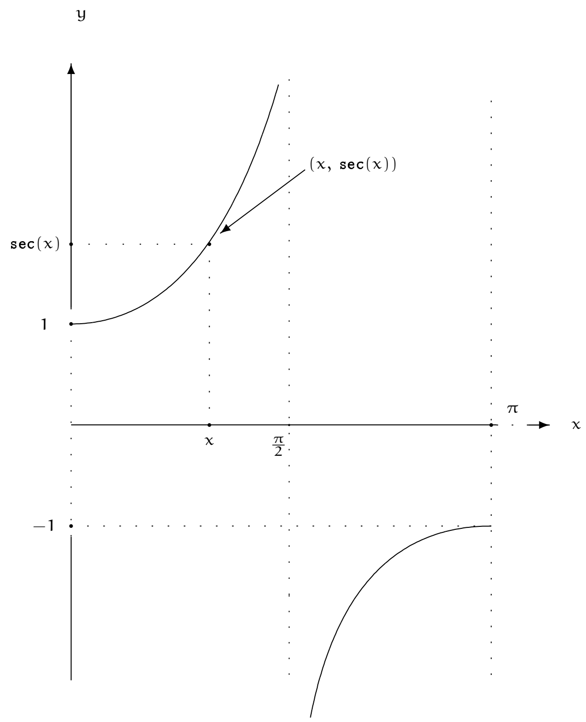
Para cada uma dessas escolhas teremos uma função inversa diferente associadada à escolha da restrição da função cotangente que fizemos.

17.5 A função arco-secante

Consideremos a função

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \quad \text{dada por} \quad f(x) \doteq \sec(x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

cuja representação geométrica do gráfico é dada pela figura abaixo:



Nesta situação, podemos mostrar (será deixado como exercício para o leitor) que a função $\underline{f}$ é estritamente crescente em cada um dos intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (logo será uma função injetora) e sobrejetora.

Portanto $\underline{f}$ é uma função bijetora logo admite função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Definição 3.3.13 *A função inversa,* f^{-1}*, obtida acima será denominada* **<u>função arco-secante</u>** *e indicada por* arcsec *(ou* $\sec^{-1}$*).*

A função arco-secante tem as seguintes propriedades, cujas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor:

Propriedades 3.3.13

i. $\sec(\operatorname{arcsec}(y)) = y$, *se* $y \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$;

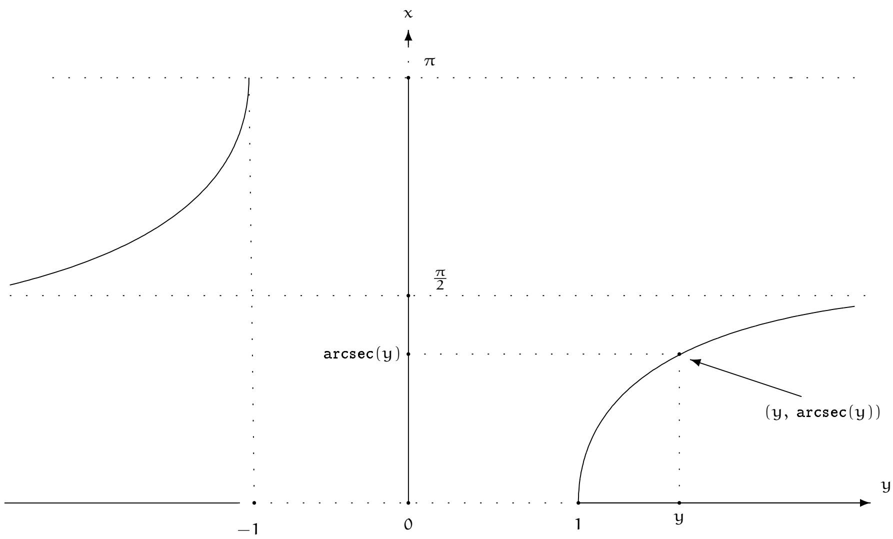
ii. $\operatorname{arcsec}(\sec(x)) = x$, *se* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$;

iii. $\operatorname{arcsec}(1) = 0$;

iv. $\operatorname{arcsec}(-1) = \pi$;

v. arcsec *é uma função estritamente crescente em cada um dos intervalos* $(-\infty, -1]$ *e* $[1, \infty)$.

A representação geométrica do gráfico da função arcsec é dada pela figura abaixo:



Observação 3.3.35 *Poderíamos ter escolhido a restrição da função secante a outros subconjuntos do domínio da função secante para considerar sua função inversa, por exemplo: retirando os intervalos do tipo:* $\left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi\right]$*, onde* $k \in \mathbb{Z}$.

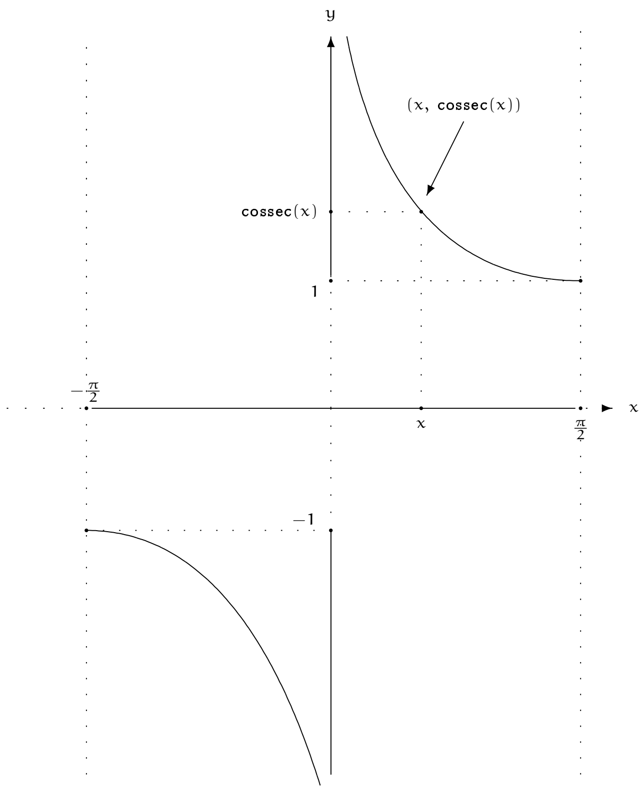
Para cada uma dessas escolhas teremos uma função inversa diferente associadada à escolha da restrição da função secante que fizemos.

17.6 A função arco-cossecante

Consideremos a função

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \quad \text{dada por} \quad f(x) \doteq \operatorname{cossec}(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right],$$

cuja representação geométrica do gráfico é dada pela figura abaixo:



Nesta situação, podemos mostrar (será deixado como exercício para o leitor) que a função f é estritamente decrescente em cada um dis intervalos $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ (logo será uma função injetora) e sobrejetora.

Portanto f é uma função bijetora logo admite função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Definição 3.3.14 *A função inversa,* f^{-1}*, obtida acima será denominada* **função arco-cossecante** *e indicada por* arccossec *(ou* cossec^{-1}*).*

Logo a função arco-cossecante tem as seguintes propriedades, cujas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor:

Propriedades 3.3.14

i. $\text{cossec}(\text{arccossec}(y)) = y$, *se* $y \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$;

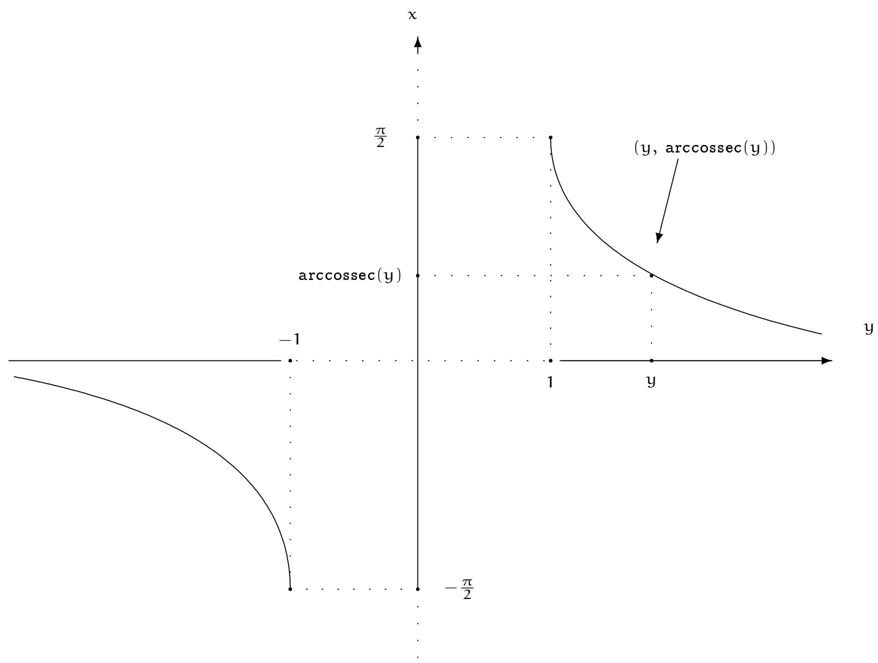
ii. $\text{arccossec}(\text{cossec}(x)) = x$, *se* $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$;

iii. $\text{arccossec}(1) = \frac{\pi}{2}$;

iv. $\text{arccossec}(-1) = -\frac{\pi}{2}$;

v. arccossec *é uma função estritamente decrescente em cada um dos intervalos* $(-\infty, -1]$ *e* $[1, \infty)$.

A representação geométrica do gráfico da função arccossec é dada pela figura abaixo:



Observação 3.3.36

1. *Observemos que a função* $\underline{f}$ *é uma função ímpar e a função* f^{-1} *também é uma função ímpar.*
2. *Poderíamos ter escolhido a restrição da função cossecante a outros subconjuntos do domínio da função cossecante para considerar sua função inversa, por exemplo: intervalos do tipo:* $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\pi\right) \cup \left(k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right]$, *onde* $k \in \mathbb{Z}$.
   Para cada uma dessas escolhas teremos uma função inversa diferente associadada à escolha da restrição da função cossecantee que fizemos.

18. **A função logarítmo natural**

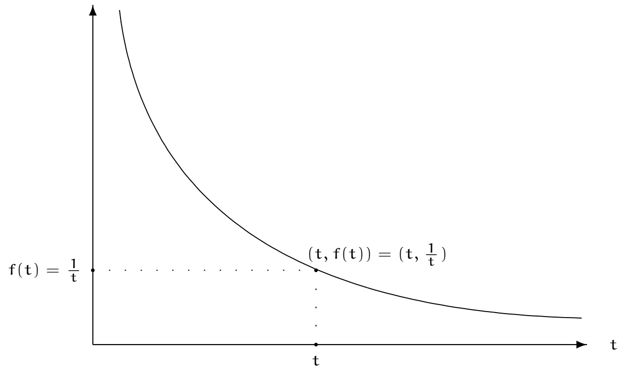
O que faremos a seguir será refeito mais adiante, de um modo mais rigoroso, quando estudarmos o Cálculo Integral.

Por hora, o que faremos a seguir será suficiente para introduzirmos outras funções muito importantes, a saber, a função logarímo natural e a função exponencial, entre outras.

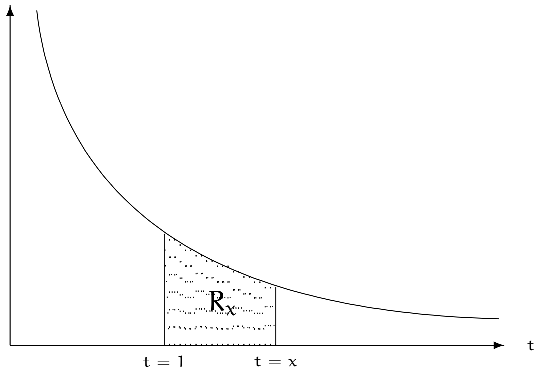
Consideremos o gráfico da função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) \doteq \frac{1}{t}, \quad t \in (0, \infty),$$

cuja representação geométrica do seu gráfico é dada pela figura abaixo:



Para cada $x > 0$ fixado, consideremos a região plana limitada, que será indicada por R_x, delimitada pela representações geométricas do gráfico da função $\underline{f}$, pelas retas $t = 1$, $t = x$ e do eixo Ox (veja figura abaixo).

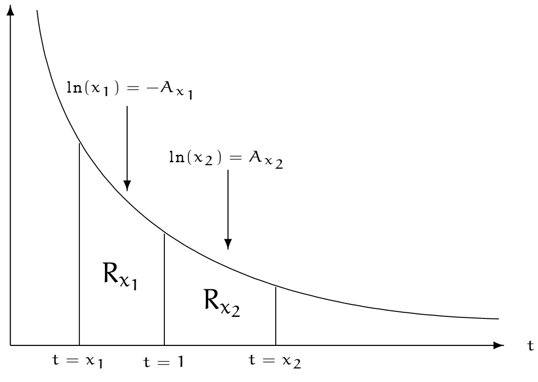


Indiquemos a área da região R_x por A_x.

Definição 3.3.15 *Para cada $x > 0$, definimos o* **<u>logarítmo natural de x</u>**, *indicado por* $\ln(x)$, *como sendo:*

$$\ln(x) \doteq \begin{cases} A_x, & se \quad x > 1; \\ -A_x, & se \quad 0 < x < 1; \\ 0, & se \quad x = 1. \end{cases} ,$$

isto é, $\ln(x)$ *será igual ao valor da área da região* R_x*, para* $x > 1$*, será menos o valor da área da região* R_x*, para* $0 < x < 1$*, e igual a* 0*, se* $x = 1$ *(veja figura abaixo).*



Deste modo podemos definir uma função, denominada **logarítmo natural**, *denotada por*

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

cujo valor para cada $x > 0$ *será o logarítmo natural de* $\underline{x}$.

Temos as seguintes propriedades para a função logarítmo natural:

Propriedades 3.3.15

(a) $\ln(1) = 0$;

(b) a função $\ln$ *é estritamente crescente (logo é uma função injetora);*

(c) a função $\ln$ *é sobrejetora (logo, do item 2., segue que ela será bijetora);*

(d) Se $x, y \in (0, \infty)$ *então*
$$\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y);$$

(e) Se $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0, \infty)$ *então*
$$\ln(x_1.x_2 \cdots x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \cdots + \ln(x_n);$$

(f) Se $x \in (0, \infty)$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *então*
$$\ln(x^n) = n.\ln(x);$$

(g) Se $x \in (0, \infty)$ *então*
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x), \quad \textit{isto é}, \quad \ln\left(x^{-1}\right) = -\ln(x);$$

(h) Se $x, y \in (0, \infty)$ *então*
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

Demonstração:

Do item (a):

Segue da definição da função logarítimo natural.

Do item (b):

Temos três possibilidades:

Se

(i) $0 < x_1 < x_2 < 1$ então a $A_{x_1} > A_{x_2} > 0$.
Como $0 < x_1 < x_2 < 1$ temos que
$$\ln(x_1) = -A_{x_1} < -A_{x_2} = \ln(x_2),$$
isto é, $\ln(x_1) < \ln(x_2)$;

(ii) $0 < x_1 < 1 < x_2$ então como $0 < x_1 < 1 < x_2$ temos que
$$\ln(x_1) = -A_{x_1} < 0 < A_{x_2} = \ln(x_2),$$
isto é, $\ln(x_1) < \ln(x_2)$;

(iii) $1 < x_1 < x_2$ então a $A_{x_1} < A_{x_2}$.
Como $1 < x_1 < x_2$ temos que

$$\ln(x_1) = A_{x_1} < A_{x_2} = \ln(x_2),$$

isto é, $\ln(x_1) < \ln(x_2)$,

logo podemos concluir que, independente do caso, se

$$0 < x_1 < x_2 \quad \text{teremos} \quad \ln(x_1) < \ln(x_2),$$

o que mostra que a função é estritamente crescente.

Do item (c):

A demonstração da sobrejetividade da função logarítimo será omitida no momento. Será feita mais a frente, no desenvolvimento do curso.

Do item (d):

A demonstração desse fato será será omitida no momento. Será feita mais a frente, no desenvolvimento do curso.

Do item (e):

A demonstração desta identidade segue do item (d) e de utilizar indução matemática e os detalhes serão deixados como exercício para o leitor.

Do item (f):

A demonstração desta identidade segue do item (e), bastando para isto considerar

$$x_1 = x_2 = \cdots x_n = x.$$

Do item (g):

Observemos que se $x > 0$ temos que

$$0 = \ln(1) = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln\left(x.\frac{1}{x}\right) \stackrel{\text{item (d)}}{=} \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

Da identidade acima podemos concluir que

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

mostrando que a afirmação é verdadeira.

Do item (h):

Logo se $x, y > 0$ teremos:

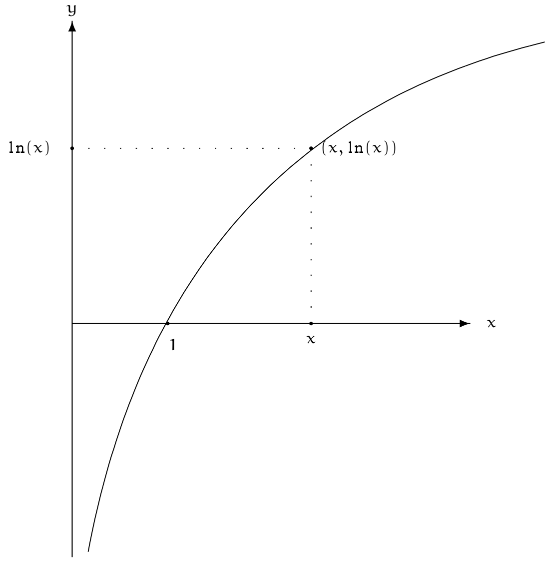
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x.\frac{1}{y}\right) \stackrel{\text{item (d)}}{=} \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) \stackrel{\text{item (g)}}{=} \ln(x) - \ln(y),$$

completando a demonstração das afirmações.

$\square$

A figura abaixo nos dá uma representação geométrica do gráfico da função logarítmo natural.

A construção do mesmo será vista com detalhes mais adiante, no desenvolvimento do curso.



19. **A função logarítmo na base $\underline{a}$**

Podemos definir, a partir da função logarítmo natural, outras funções logarítmas da seguinte forma:

Definição 3.3.16 *Seja $a > 0$, $a \neq 1$ fixado.*

Dado $x > 0$, definimos o **logarítmo na base $\underline{a}$ do valor $\underline{x}$**, *indicado por $\log_a(x)$, como sendo:*

$$\log_a(x) \doteq \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Com isto podemos definir a **função logarítmo na base $\underline{a}$**, *indicada por*

$$\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R},$$

cujo valor, para $x > 0$, será $\log_a(x)$.

A função logarítmo na base $\underline{a}$ tem propriedades semelhantes as da função logarítimo natural, a saber:

Propriedades 3.3.16 *Se $a > 0$ e $a \neq 1$ temos que:*

(a) $\log_a(1) = 0$;

(b) a função $\log_a$ é estritamente crescente se $a > 1$ e estritamente decrescente se $0 < a < 1$ (logo, em qualquer um dos casos, é uma função injetora);

(c) a função $\log_a$ é sobrejetora (logo, do item 2., segue que ela será bijetora);

(d) Se $x, y \in (0, \infty)$ então

$$\log_a(x.y) = \log_a(x) + \log_a(y);$$

(e) Se $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0, \infty)$ então

$$\log_a(x_1.x_2 \cdots x_n) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) + \cdots + \log_a(x_n);$$

(f) Se $x \in (0, \infty)$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *então*

$$\log_a(x^n) = n.\log_a(x);$$

(g) Se $x \in (0, \infty)$ *então*

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x), \qquad \textit{isto é,} \quad \log_a\left(x^{-1}\right) = -\log_a(x);$$

(h) Se $x, y \in (0, \infty)$ *então*

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y).$$

Demonstração:

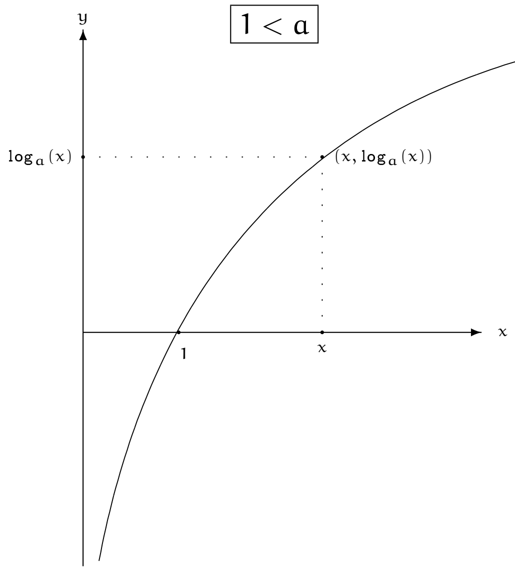
As demonstrações serão dos itens (a), (b), (e), (f), (g) e (h) deixadas como exercício para o leitor.

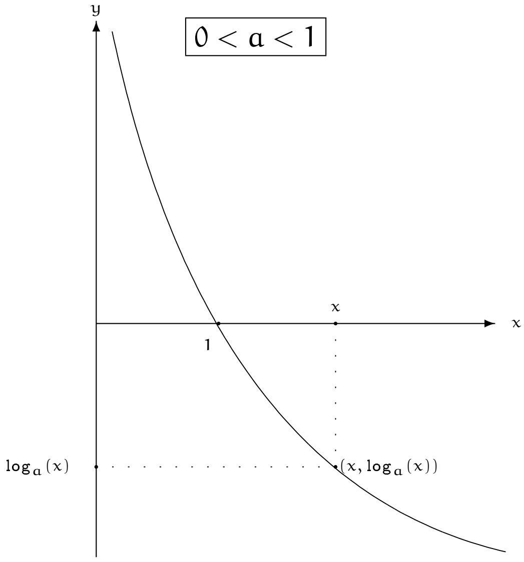
As demonstrações serão dos itens (c) e (d) serão exibidas mais adiante, no desenvolvimento do curso.

$\square$

As figuras abaixo nos dizem como podem ser as representações geométricas dos gráficos da função logarítmo na base $\underline{a}$.

A construção dos mesmos será vista, com detalhes, mais adiante, no desenvolvimento do curso.





20. **A função exponencial**

Do item (c) da Proposição (3.3.15) temos que a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \ln(x), \quad x \in (0, \infty)$$

é um função bijetora, logo admite função inversa $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Com isto temos a:

Definição 3.3.17 *A função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ associada a função $\underline{f}$ acima será denominada* **função exponencial** *e indicada por $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ (ou $\ln^{-1}$).*

Da proposição (3.3.15) seguem as seguintes propriedades para a função exponencial:

Propriedades 3.3.17

(a) $\exp(0) = 1$;

(b) a função $\exp$ *é estritamente crescente ;*

(c) Se $x, y \in \mathbb{R}$ *então*
$$\exp(x + y) = \exp(x).\exp(y);$$

(d) Se $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ *então*
$$\exp(x_1 + x_2 \cdots + x_n) = \exp(x_1).\exp(x_2). \cdots .\exp(x_n);$$

(e) Se $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *então*
$$\exp(nx) = [\exp(x)]^n;$$

(f) Se $x \in \mathbb{R}$ *então*
$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)},$$

isto é,
$$\exp(-x) = [\exp(x)]^{-1};$$

(g) Se $x, y \in \mathbb{R}$ *então*

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

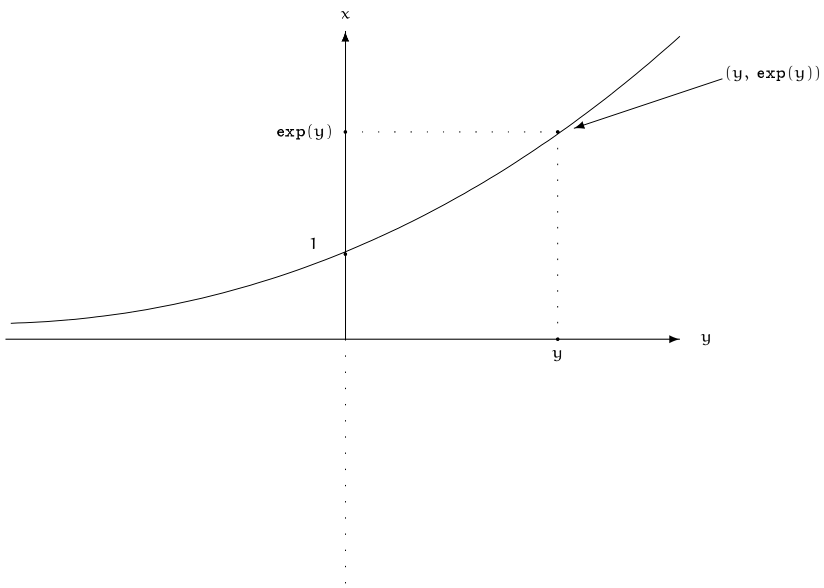
Demonstração:

As demonstrações das propriedades acima seguem das propriedades da função logarítmo natural e serão deixadas como exercício para o leitor.

$\square$

A figura abaixo nos diz como pode ser a representação geométrica do gráfico da função exponencial.

A construção dos mesmos será vista, com detalhes, mais adiante, no desenvolvimento do curso.



21. **A função potenciação**

Podemos definir outras funções do tipo exponenciais, a saber:

Definição 3.3.18 *Dado* $a > 0$ *e* $x \in \mathbb{R}$ *definimos* **a elevado a x**, *indicado por* a^x, *como:*

$$a^x \doteq \exp[x \ln(a)].$$

Assim podemos definir a **função potenciação com base a (fixada) e expoente x**, *como sendo a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$f(x) \doteq \exp[x \ln(a)], \quad x \in \mathbb{R},$$

que será denotada por a^x, *isto é,*

$$a^x \doteq \exp[x \ln(a)], \quad x \in \mathbb{R}.$$

De modo semelhante, dado $c \in \mathbb{R}$ *e* $x > 0$, *definimos* **x elevado a c**, *indicado por* x^c, *como:*

$$x^c \doteq \exp[c \ln(x)], \quad x \in (0, \infty).$$

Assim podemos definir a **<u>função potenciação com base $\underline{x}$ e expoente $\underline{c}$ (fixado)</u>**, *como sendo a função $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$g(x) \doteq \exp[c \ln(x)], \quad x \in (0, \infty),$$

que será denotada por x^c, isto é,

$$x^c \doteq \exp[c \ln(x)], \quad x \in (0, \infty).$$

Da Proposição (3.3.18) seguem as seguintes propriedades para das funções acima definidas:

Propriedades 3.3.18

(a) Para todo $a > 0$ temos $a^0 = 1$;

(b) Se $a > 1$ a função

$$x \mapsto a^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

será estritamente crescente.
Se $0 < a < 1$ a função

$$x \mapsto a^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

será estritamente decrescente.
Se $c > 0$ a função

$$x \mapsto x^c, \quad x \in (0, \infty)$$

será estritamente crescente.
Se $c < 0$ a função

$$x \mapsto x^c, \quad x \in (0, \infty)$$

será estritamente decrescente;

(c) Para todo $a > 0$, se $x, y \in \mathbb{R}$ temos que

$$a^{x+y} = a^x . a^y;$$

(d) Para todo $a > 0$ e $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ temos que

$$a^{x_1 + x_2 \cdots + x_n} = a^{x_1} . a^{x_2} . \cdots . a^{x_n};$$

(e) Para todo $a > 0$, se $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ então

$$a^{nx} = (a^x)^n;$$

(f) Se $x \in \mathbb{R}$ então

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

isto é,

$$a^{-x} = (a^x)^{-1};$$

(g) Para todo $a > 0$, se $x, y \in \mathbb{R}$ então

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}.$$

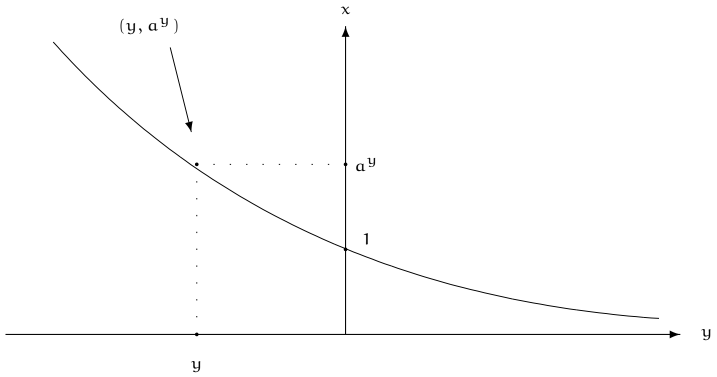
Demonstração:

As demonstrações das propriedades acima serão deixadas como exercício para o leitor.

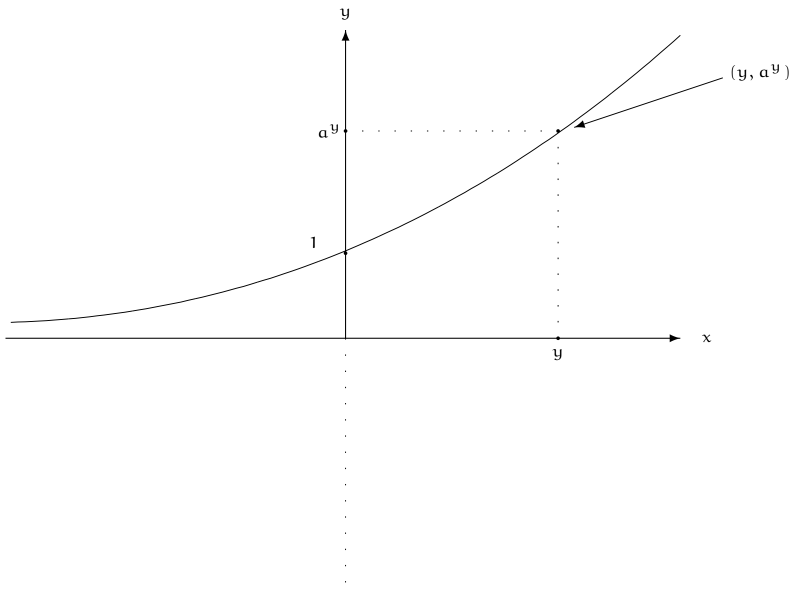
□

As representações geométricas dos gráficos das funções definidas acima são dadas pelas figuras abaixo.

$\boxed{0 < a < 1}$



$\boxed{a > 1}$



Mais adiante mostraremos, precisamente, que estas figuras são as representações geométricas dos gráficos das funções acima.

Observação 3.3.37 *Se $a > 0$, vale observar que a função $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ dada por*

$$g(y) \doteq a^y, \quad y \in \mathbb{R}$$

é a função inversa da função associada a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \log_a(x), \quad x \in (0, \infty).$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Com isto podemos introduzir:

Definição 3.3.19 *Definimos o* **número de Euler**, *indicado por* $\underline{e}$, *como sendo*

$$e \doteq \exp(1),$$

ou seja,

$$\ln(e) = 1.$$

Observação 3.3.38 *Com isto, da Definição* (3.3.18), *segue que*

$$e^x \doteq \exp[x\ln(e)] \overset{\ln(e)=1}{=} \exp(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, se $a > 0$ *segue que*

$$a^x \doteq e^{x\ln(a)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

e se $c \in \mathbb{R}$ *temos que*

$$x^c \doteq e^{x\ln(x)}, \quad x \in (0, \infty).$$

Com isto a Proposição (3.3.18) pode ser reescrita da seguinte forma (cuja demonstração é imediata e será deixada como exercício para o leitor) :

Propriedades 3.3.19

(a) $e^0 = 1$;

(b) a função $y = e^x$ *é estritamente crescente ;*

(c) $\ln(e^y) = y$, *se* $y \in \mathbb{R}$ *e* $e^{\ln(x)} = x$, *se* $x > 0$;

(d) Se $x, y \in \mathbb{R}$ *então*

$$e^{x+y} = e^x.e^y;$$

(e) Se $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ *então*

$$e^{x_1+x_2\cdots+x_n} = e^{x_1}.e^{x_2}.\cdots.e^{x_n};$$

(f) Se $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *então*

$$e^{nx} = (e^x)^n;$$

(g) Se $x \in \mathbb{R}$ *então*

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x},$$

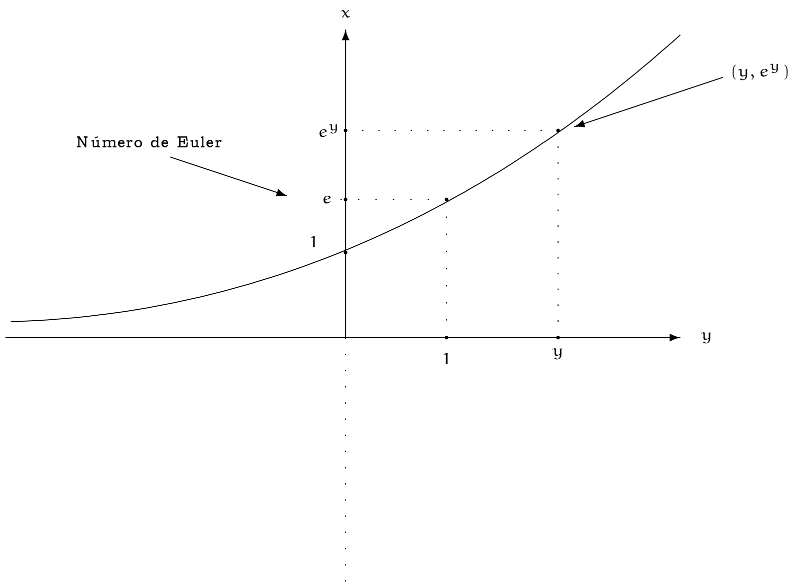
isto é,

$$e^{-x} = (e^x)^{-1};$$

(h) Se $x, y \in \mathbb{R}$ *então*

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

A representação geométrica do gráfico da função exponencial é dada pela figura abaixo:



22. **As funções hiperbólicas:**

Tendo definida a função exponencial podemos definir as seguintes funções, denominadas **funções hiperbólicas**:

22.1 A função cosseno-hiperbólico

Definição 3.3.20 *Para cada* $x \in \mathbb{R}$ *definimos o* **cosseno-hiperbólico do número real** $\underline{x}$, *que será indicado por* $\cosh(x)$, *como sendo:*

$$\cosh(x) \doteq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Assim podemos definir a função, denominada **função cosseno-hiperbólico**, *da seguinte forma:* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *onde*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A função cosseno-hiperbólico tem as seguintes propriedades:

Propriedades 3.3.20

i. $\cosh(x) = 1$ *se, e somente se,* $x = 0$;

ii. $\cosh(x) \geq 1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$;

iii. O conjunto imagem da função cosseno-hiperbólico é $[1, \infty)$, *isto é,* $\mathrm{Im}(\cosh) = [1, \infty)$.

iv. A função cosseno-hiperbólico é uma função par, isto é,

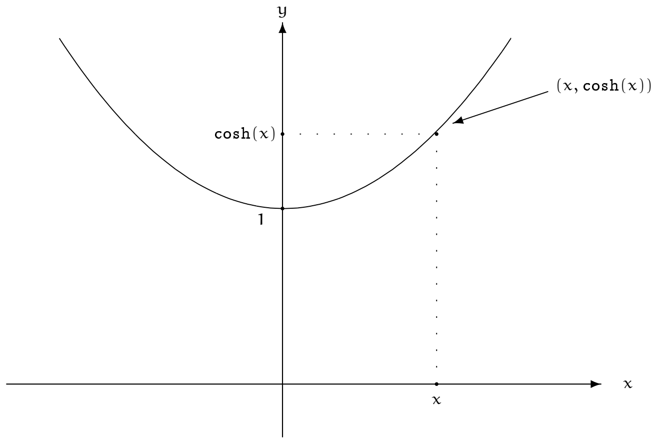
$$\cosh(-x) = \cosh(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função cosseno-hiperbólico é dada pela figura abaixo.



Será mostrado, precisamente, mais adiante no desenvolvimento do conteúdo que a representação geométrica do gráfico da função cosh é dada pela figura acima.

22.2 A função seno-hiperbólico

Definição 3.3.21 *Para cada* $x \in \mathbb{R}$ *definimos o* **seno-hiperbólico do número real x**, *que será indicado por* $\operatorname{senh}(x)$, *como sendo:*

$$\operatorname{senh}(x) \doteq \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Com isto podemos definir uma função, denominada **função seno-hiperbólico**, *da seguinte forma:* $\operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *onde*

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A função seno-hiperbólico tem as seguintes propriedades:

Propriedades 3.3.21

i. $\operatorname{senh}(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

ii. O conjunto imagem da função seno-hiperbólico é $\mathbb{R}$, *isto é,* $\operatorname{Im}(\operatorname{senh}) = \mathbb{R}$.

iii. A função seno-hiperbólico é uma função ímpar,isto é,

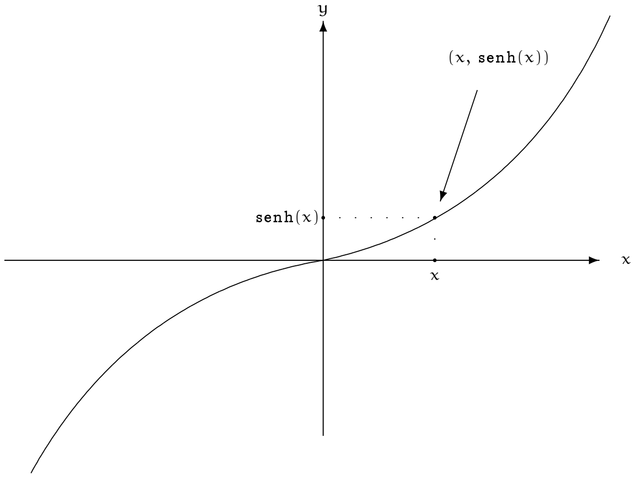
$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função seno-hiperbólico é dada pela figura abaixo.



Será mostrado, precisamente, mais adiante no desenvolvimento do conteúdo que a representação geométrica do gráfico da função senh é dada pela figura acima.

22.3 A função tangente-hiperbólica

Definição 3.3.22 *Para cada* $x \in \mathbb{R}$, *definimos a* **tangente-hiperbólica do número real** $\underline{x}$, *que será indicado por* $\operatorname{tgh}(x)$, *como sendo:*

$$\operatorname{tgh}(x) \doteq \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Com isto podemos definir uma função, denominada **função tangente-hiperbólica**, *da seguinte forma:* $\operatorname{tgh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *onde*

$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A função tangente-hiperbólica tem as seguintes propriedades:

Propriedades 3.3.22

i. $\operatorname{tgh}(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

ii. *O conjunto imagem da função tangente-hiperbólica é* $(-1, 1)$, *isto é,* $\operatorname{Im}(\operatorname{tgh}) = (-1, 1)$.

iii. *A função tangente-hiperbólica é uma função ímpar, isto é,*

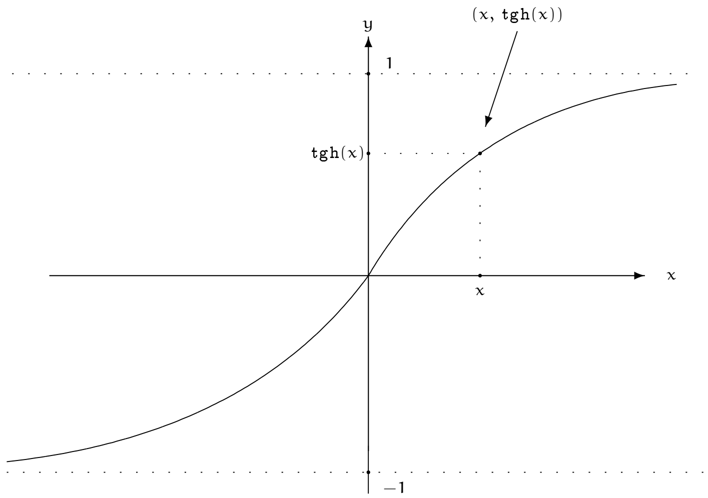
$$\operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tgh}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função tangente-hiperbólica é dada pela figura abaixo.



Será mostrado, precisamente, mais adiante no desenvolvimento do conteúdo que a representação geométrica do gráfico da função tgh é dada pela figura acima.

22.4 A função cotangente-hiperbólica

Definição 3.3.23 *Para cada* $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *definimos a* **cotangente-hiperbólica do número real** $\underline{x}$, *que será indicado por* $\operatorname{cotgh}(x)$, *como sendo:*

$$\operatorname{cotgh}(x) \doteq \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Com isto podemos definir uma função, denominada **função cotangente-hiperbólica**, *da seguinte forma:* $\operatorname{cotgh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *onde*

$$\operatorname{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A função cotangente-hiperbólica tem as seguintes propriedades:

Propriedades 3.3.23

i. $|\operatorname{cotgh}(x)| \geq 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

ii. *O conjunto imagem da função cotangente-hiperbólica é* $\mathbb{R}\backslash[-1, 1]$, *isto é,* $\operatorname{Im}(\operatorname{cotgh}) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

iii. *A função cotangente-hiperbólica é uma função ímpar, isto é,*

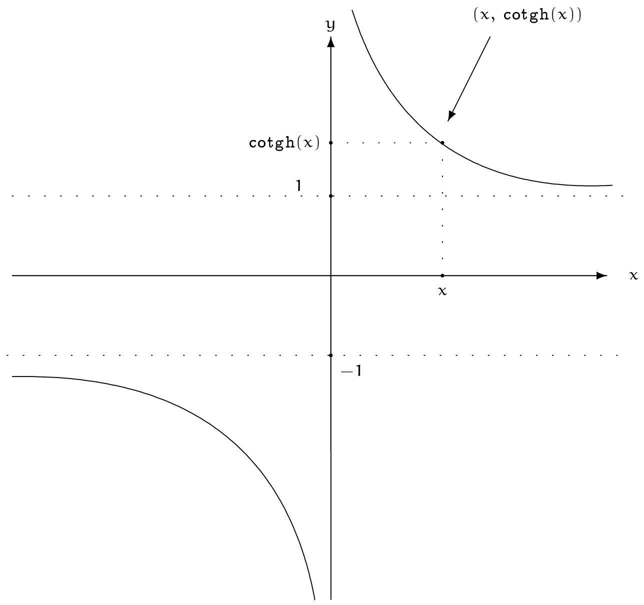
$$\operatorname{cotgh}(-x) = -\operatorname{cotgh}(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Demonstração:

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função cotangente-hiperbólica é dada pela figura abaixo.



Será mostrado, precisamente, mais adiante no desenvolvimento do conteúdo que a representação geométrica do gráfico da função cotgh é dada pela figura acima.

22.5 A função secante-hiperbólica

Definição 3.3.24 *Para cada* $x \in \mathbb{R}$ *definimos a* **secante-hiperbólica do número real** $\underline{x}$, *que será indicado por* $\operatorname{sech}(x)$, *como sendo:*

$$\operatorname{sech}(x) \doteq \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Com isto podemos definir uma função, denominada **função secante-hiperbólica**, *da seguinte forma:* $\operatorname{sech} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *onde*

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A função secante-hiperbólica tem as seguintes propriedades:

Propriedades 3.3.24

i. $\operatorname{sech}(x) = 1$ *se, e somente se,* $x = 0$;

ii. O conjunto imagem da função secante-hiperbólica é $(0, 1]$, *isto é,* $\operatorname{Im}(\operatorname{sech}) = (0, 1]$.

iii. A função secante-hiperbólica é uma função par,isto é,

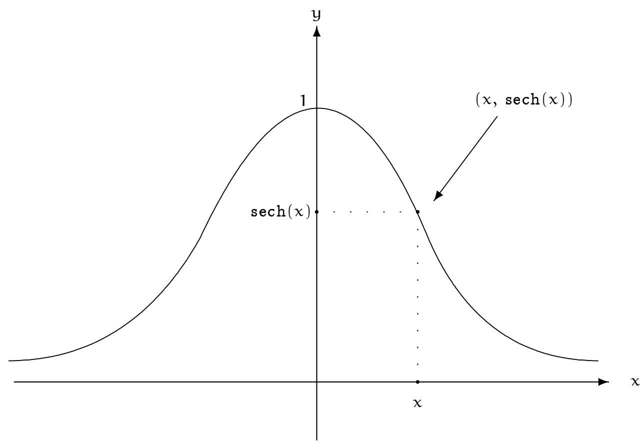
$$\operatorname{sech}(-x) = -\operatorname{sech}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função secante-hiperbólica é dada pela figura abaixo.



Será mostrado, precisamente, mais adiante no desenvolvimento do conteúdo que a representação geométrica do gráfico da função sech é dada pela figura acima.

22.6 A função cossecante-hiperbólica

Definição 3.3.25 *Para cada* $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *definimos a* **cossecante-hiperbólica do número real** $\underline{x}$, *que será indicado por* $\operatorname{cossech}(x)$, *como sendo:*

$$\operatorname{cossech}(x) \doteq \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Com isto podemos definir uma função, denominada **função cossecante-hiperbólica**, *da seguinte forma:* $\operatorname{cossech} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, *onde*

$$\operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

A função cossecante-hiperbólicao tem as seguintes propriedades:

Propriedades 3.3.25

i. $\operatorname{cossech}(x) \neq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$;

ii. O conjunto imagem da função cossecante-hiperbólica é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *isto é,* $\operatorname{Im}(\operatorname{cossech}) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

iii. A função cossecante-hiperbólica é uma função ímpar, isto é,

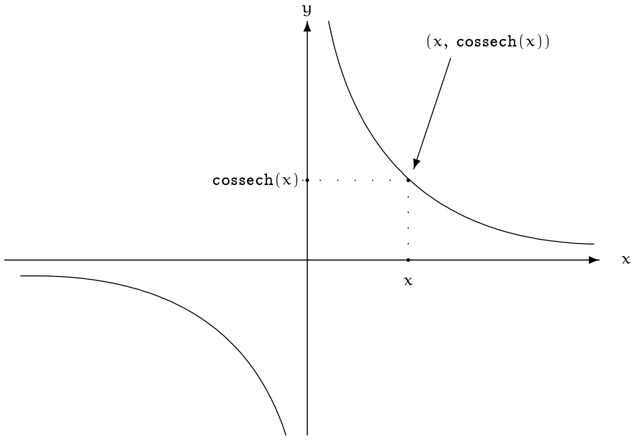
$$\operatorname{cossech}(-x) = -\operatorname{cossech}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função cossecante-hiperbólica é dada pela figura abaixo.



Será mostrado, precisamente, mais adiante no desenvolvimento do conteúdo que a representação geométrica do gráfico da função cossech é dada pela figura acima.

Temos as seguintes propriedades básicas das funções hiperbólicas definidas acima

Propriedades 3.3.26 *Para todo* $x \in \mathbb{R}$, *pertencente aos respectivos domínios das funções abaixo, temos que:*

(a) $\cosh^2(x) - \text{senh}^2(x) = 1$;

(b) $\cosh(x) + \text{senh}(x) = e^x$;

(c) $\text{tgh}^2(x) + \text{sech}^2(x) = 1$;

(d) $\text{cotgh}^2(x) - \text{cossech}^2(x) = 1$.

Demonstração:

Faremos a demonstração do item 1).

As demonstrações dos outros itens serão deixados como exercício para o leitor.

Observemos que:

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \text{senh}^2(x) &= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]^2 - \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]^2 \\ &= \frac{\left[e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right] - \left[e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right]}{4} = \frac{4}{4} = 1,\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

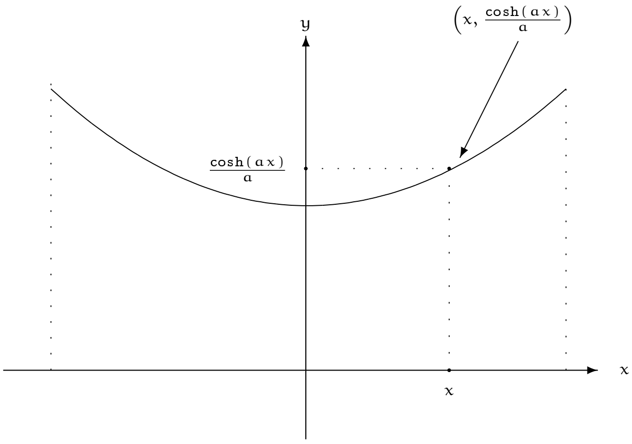
□

Observação 3.3.39 *Será visto em outra disciplina (Equações Diferenciais Ordinárias) que, dado* $a > 0$, *a representação geométrica do gráfico da função*

$$f(x) \doteq \frac{\cosh(ax)}{a}$$

descreve a posição de equilíbrio de um fio homogêneo com extremidades presas a uma mesma altura, deixado sob a ação da força da gravidade.

Tal curva é denominada de **catenária**.



23. **As Funções Hiperbólicas Inversas:**

A seguir trataremos de obter as funções inversas de cada uma das funções hiperbólicas definidas no item anteior.

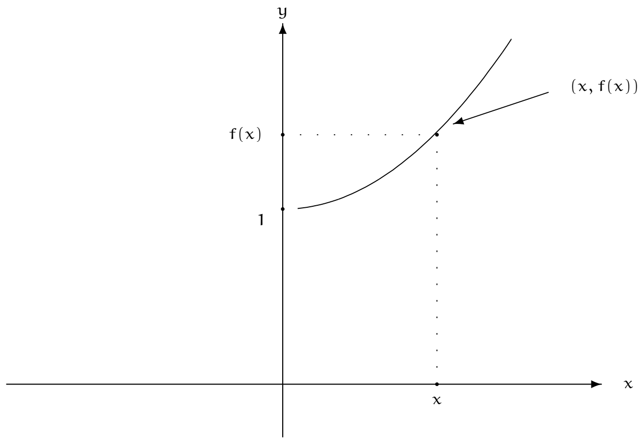
23.1 A função arco-cosseno-hiperbólico

Consideremos a função $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$ dada por

$$f(x) \doteq \cosh(x), \quad x \in [0, \infty).$$

Observemos que a função $\underline{f}$ é estritamente crescente (logo a função $\underline{f}$ será injetora) e sobrejetora (isto é, $Im(f) = [1, \infty)$), ou seja, ela é um função bijetora.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo.



Logo da Proposição (3.3.1) segue que a função $\underline{f}$ admite função inversa, $f^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty)$, com isto temos a:

Definição 3.3.26 *A função inversa* $f^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ *associada a função* $\underline{f}$ *acima obtida será denominada* **função arco-cosseno-hiperbólico** *e denotada por* arccosh, *isto é,*

$$\operatorname{arccosh} : [1, \infty) \to [0, \infty).$$

A função arco-cosseno-hiperbólico tem as seguintes propriedades:

Propriedades 3.3.27

i. $\cosh(\operatorname{arccosh}(y)) = y$, *para cada* $y \in [1, \infty)$;

ii. $\operatorname{arccosh}(\cosh(x)) = x$, *para cada* $x \in [0, \infty)$;

iii. $\operatorname{arccosh}(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = 1$;

iv. $\operatorname{arccosh}(x) \geq 0$, *para cada* $x \in [1, \infty)$;

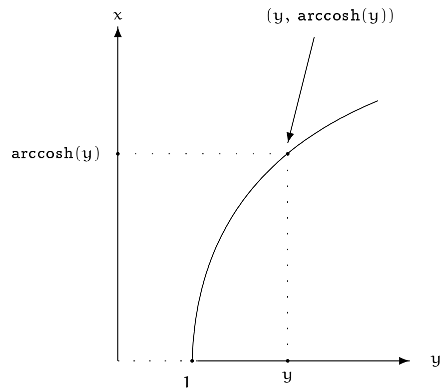
v. O conjunto imagem da função arco-cosseno-hiperbólico é $[0, \infty)$, *isto é,* $\operatorname{Im}(\operatorname{arccosh}) = [0, \infty)$.

Demonstração:

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função arco-cosseno-hiperbólico é dada pela figura abaixo,



Será mostrado, precisamente, mais adiante no desenvolvimento do conteúdo que a representação geométrica do gráfico da função $\operatorname{arccosh}$ é dada pela figura acima.

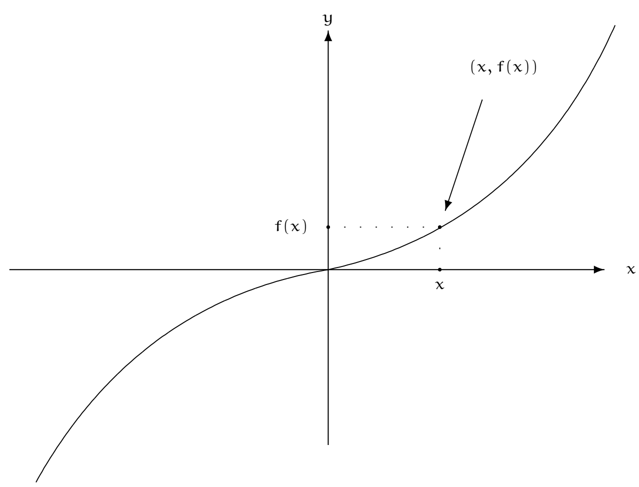
23.2 A função arco-seno-hiperbólico

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \operatorname{senh}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que a função $\underline{f}$ é estritamente crescente (logo a função $\underline{f}$ será injetora) e sobrejetora (isto é, $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$), ou seja, ela é uma função bijetora.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo.



Logo da Proposição (3.3.1) segue que a função $\underline{f}$ admite função inversa, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com isto temos a:

Definição 3.3.27 *A função inversa* $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *associada a função* $\underline{f}$ *acima obtida será denominada* **função arco-seno-hiperbólico** *e denotada por* arcsenh, *isto é,*

$$\operatorname{arcsenh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

A função arco-seno-hiperbólico tem as seguintes propriedades:

Propriedades 3.3.28

i. $\operatorname{senh}(\operatorname{arcsenh}(y)) = y$, *para cada* $y \in \mathbb{R}$;

ii. $\operatorname{arcsenh}(\operatorname{senh}(x)) = x$, *para cada* $x \in \mathbb{R}$;

iii. $\operatorname{arcsenh}(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

iv. *O conjunto imagem da função arco-seno-hiperbólico é* $\mathbb{R}$, *isto é,* $\operatorname{Im}(\operatorname{arcsenh}) = \mathbb{R}$.

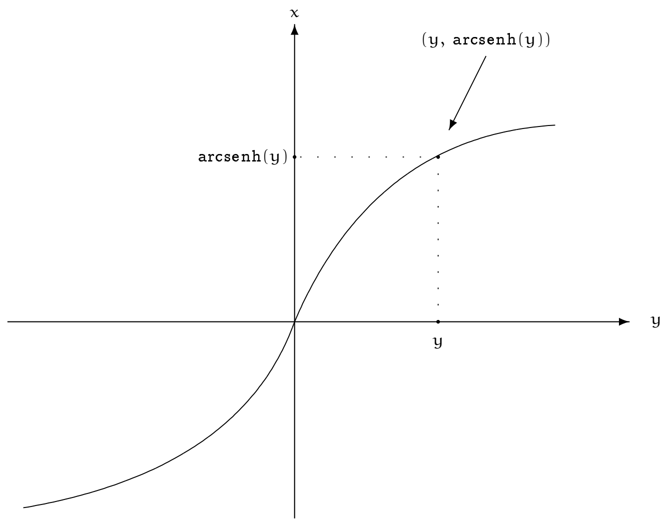
v. *A função arco-seno-hiperbólico é uma função ímpar, isto é,*

$$\operatorname{arcsenh}(-y) = -\operatorname{arcsenh}(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:
As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função arco-seno-hiperbólico é dada pela figura abaixo.



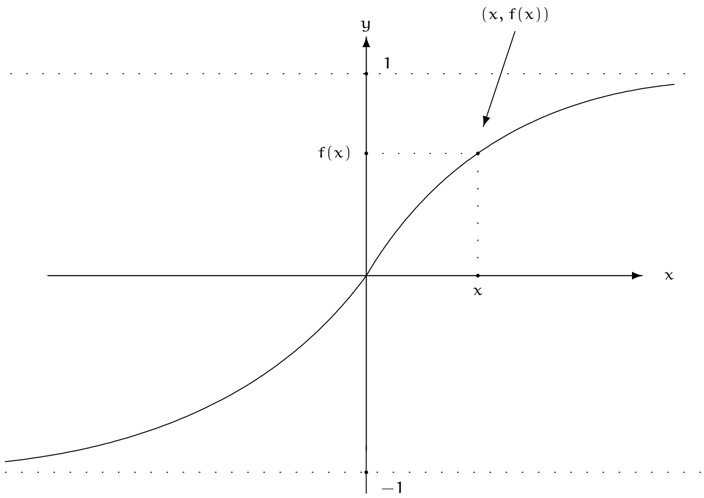
Será mostrado, precisamente, mais adiante no desenvolvimento do conteúdo que a representação geométrica do gráfico da função arcsenh é dada pela figura acima.

23.3 A função arco-tangente-hiperbólica

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ dada por

$$f(x) \doteq \operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que a função $\underline{f}$ é estritamente crescente (logo a função $\underline{f}$ será injetora) e sobrejetora (isto é, $\operatorname{Im}(f) = (-1, 1)$), ou seja, ela é uma função bijetora.
A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo.



Logo da Proposição (3.3.1) segue que a função $\underline{f}$ admite função inversa, $f^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, com isto temos a:

Definição 3.3.28 *A função inversa $f^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ associada a função $\underline{f}$ acima obtida será denominada* **função arco-tangente-hiperbólica** *e denotada por* arctgh, *isto é,*

$$\operatorname{arctgh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}.$$

A função arco-tangente-hiperbólica tem as seguintes propriedades:

Propriedades 3.3.29

i. $\operatorname{tgh}(\operatorname{arctgh}(y)) = y$, *para cada* $y \in (-1, 1)$*;*

ii. $\operatorname{arctgh}(\operatorname{tgh}(x)) = x$, *para cada* $x \in \mathbb{R}$*;*

iii. $\operatorname{arctgh}(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$*;*

iv. O conjunto imagem da função arco-tangente-hiperbólica é $\mathbb{R}$*, isto é,* $\operatorname{Im}(\operatorname{arctgh}) = \mathbb{R}$.

v. A função arco-tangente-hiperbólica é uma função ímpar, isto é,

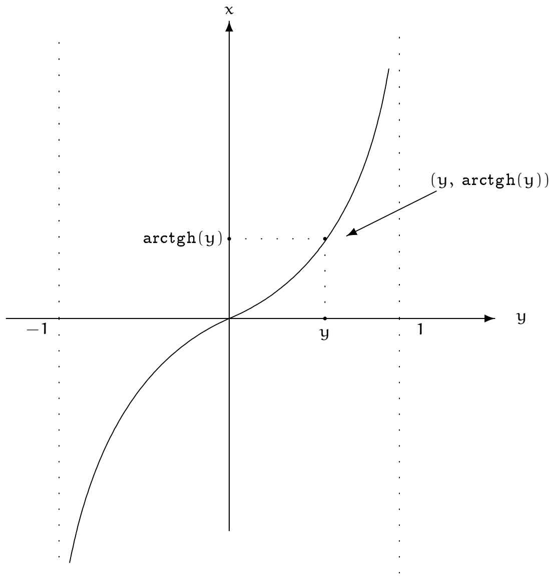
$$\operatorname{arctgh}(-y) = -\operatorname{arctgh}(y), \quad y \in (-1, 1).$$

Demonstração:

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função arco-tangente-hiperbólica é dada pela figura abaixo.



Será mostrado, precisamente, mais adiante no desenvolvimento do conteúdo que a representação geométrica do gráfico da função arctgh é dada pela figura acima.

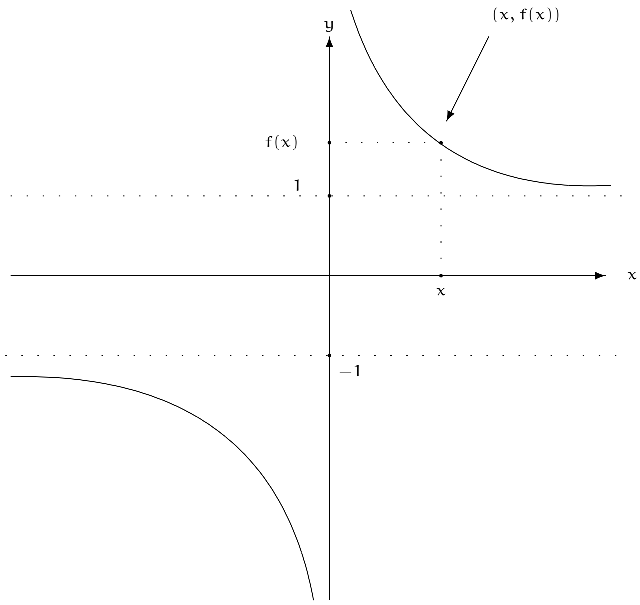
23.4 A função arco-cotangente-hiperbólica

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ dada por

$$f(x) \doteq \text{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\text{senh}(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Observemos que a função $\underline{f}$ é estritamente decrescente em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ (logo a função $\underline{f}$ será injetora) e sobrejetora (isto é, $\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$), ou seja, ela é uma função bijetora.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo.



Logo da Proposição (3.3.1) segue que a função $\underline{f}$ admite função inversa, $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, com isto temos a:

Definição 3.3.29 *A função inversa* $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus [-1,1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *associada a função* $\underline{f}$ *acima obtida será denominada* **<u>função arco-cotangente-hiperbólica</u>** *e denotada por* arccotgh, *isto é,*

$$\text{arccotgh} : \mathbb{R} \setminus [-1,1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A função arco-cotangente-hiperbólica tem as seguintes propriedades:

Propriedades 3.3.30

i. $\text{cotgh}(\,\text{arccotgh}(y)) = y$, *para cada* $y \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$;

ii. $\text{arccotgh}(\,\text{cotgh}(x)) = x$, *para cada* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

iii. O conjunto imagem da função arco-cotangente-hiperbólica é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *isto é,* $\text{Im}(\,\text{arccotgh}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

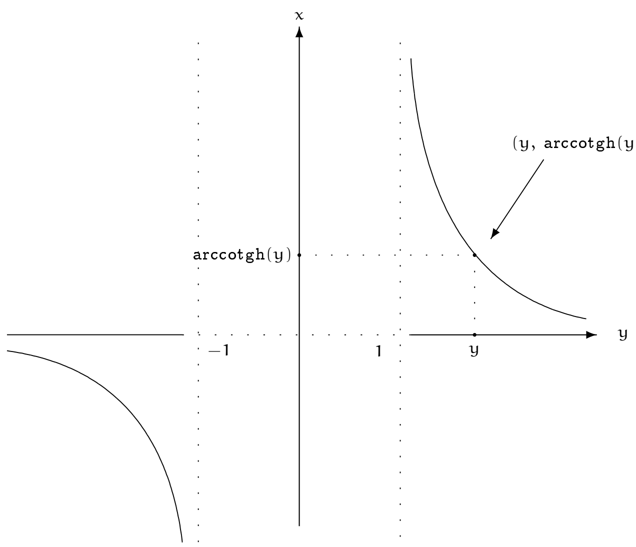
iv. A função arco-cotangente-hiperbólica é uma função ímpar, isto é,

$$\text{arccotgh}(-y) = -\,\text{arccotgh}(y), \quad y \in \mathbb{R} \setminus [-1,1].$$

<u>Demonstração:</u>
As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função arco-cotangente-hiperbólica é dada pela figura abaixo.



Será mostrado, precisamente, mais adiante no desenvolvimento do conteúdo que a representação geométrica do gráfico da função arccotgh é dada pela figura acima.

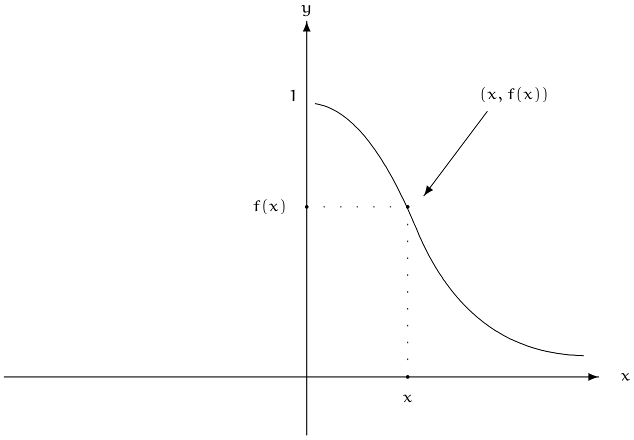
23.5 A função arco-secante-hiperbólica

Consideremos a função $f : [0,\infty) \to (0,1]$ dada por

$$f(x) \doteq \text{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \quad x \in [0,\infty).$$

Observemos que a função $\underline{f}$ é estritamente decrescente (logo a função $\underline{f}$ será injetora) e sobrejetora (isto é, $\text{Im}(f) = (0,1]$), ou seja, ela é uma função bijetora.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo.



Logo da Proposição (3.3.1) segue que a função $\underline{f}$ admite função inversa, $f^{-1} : (0,1] \to [0,\infty)$, com isto temos a:

Definição 3.3.30 *A função inversa* $f^{-1} : (0,1] \to [0,\infty)$ *associada a função* $\underline{f}$ *acima obtida será denominada* **<u>função arco-secante-hiperbólica</u>** *e denotada por* arcsech, *isto é,*

$$\operatorname{arcsech} : (0,1] \to [0,\infty).$$

A função arco-secante-hiperbólica tem as seguintes propriedades:

Propriedades 3.3.31

i. $\operatorname{sech}(\operatorname{arcsech}(y)) = y$, *para cada* $y \in [0,1)$;

ii. $\operatorname{arcsech}(\operatorname{sech}(x)) = x$, *para cada* $x \in [0,\infty)$;

iii. $\operatorname{arcsech}(x) = 1$ *se, e somente se,* $x = 0$;

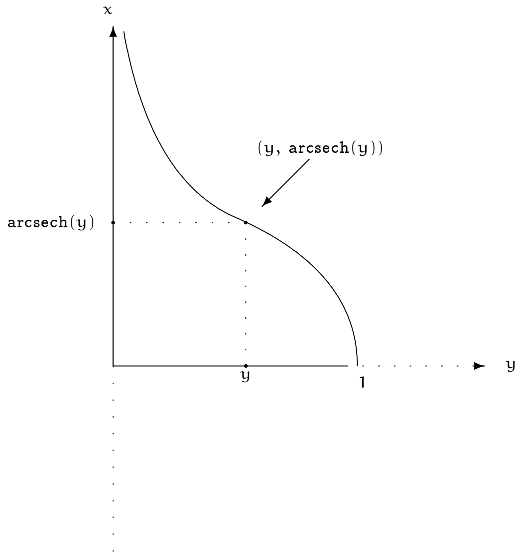
iv. *O conjunto imagem da função arco-secante-hiperbólica é* $[0,\infty)$, *isto é,* $\operatorname{Im}(\operatorname{arcsech}) = [0,\infty)$.

<u>Demonstração:</u>

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função arco-secante-hiperbólica é dada pela figura abaixo.



Será mostrado, precisamente, mais adiante no desenvolvimento do conteúdo que a representação geométrica do gráfico da função arcsech é dada pela figura acima.

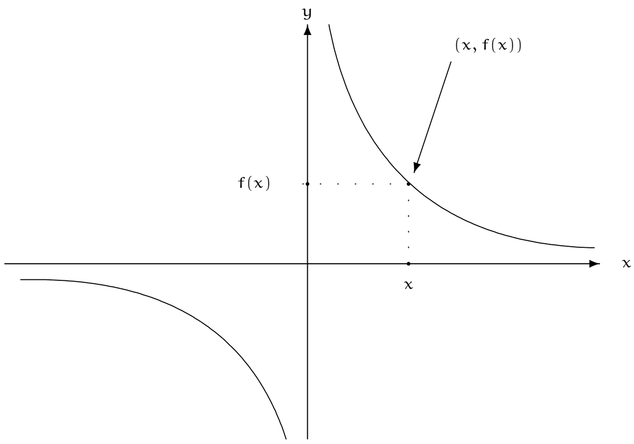
23.6 A função arco-cossecante-hiperbólica

Consideremos a função $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ dada por

$$f(x) \doteq \text{cossech}(x) = \frac{1}{\text{senh}(x)}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Observemos que a função $\underline{f}$ é estritamente decrescente em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ (logo a função $\underline{f}$ será injetora) e sobrejetora (isto é, $Im(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$), ou seja, ela é uma função bijetora.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo.



Logo da Proposição (3.3.1) segue que a função $\underline{f}$ admite função inversa, $f^{-1} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$, com isto temos a:

Definição 3.3.31 *A função inversa $f^{-1} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ associada a função $\underline{f}$ acima obtida será denominada* **função arco-cossecante-hiperbólica** *e denotada por* arccossech*, isto é,*

$$\text{arccossech} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

A função arco-cossecante-hiperbólica tem as seguintes propriedades:

Propriedades 3.3.32

i. $\operatorname{sech}(\operatorname{arccossech}(y)) = y$, *para cada* $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

ii. $\operatorname{arccossech}(\operatorname{cossech}(x)) = x$, *para cada* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

iii. O conjunto imagem da função arco-cossecante-hiperbólico é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *isto é,* $\operatorname{Im}(\operatorname{arccossech}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

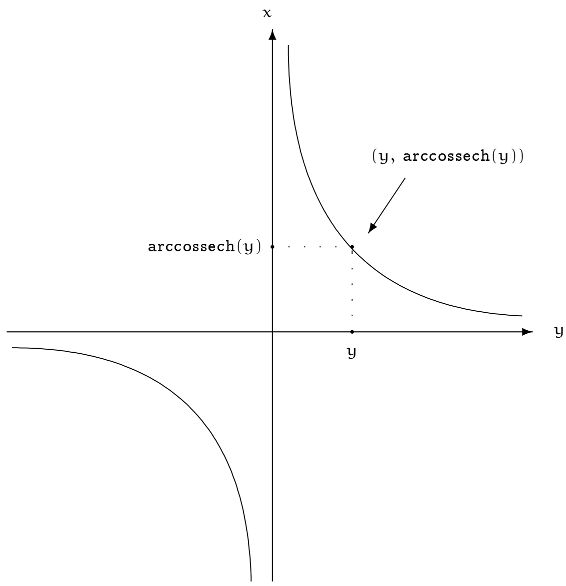
iv. A função arco-cossecante-hiperbólica é uma função ímpar,isto é,

$$\operatorname{arccossech}(-y) = -\operatorname{arccossech}(y), \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

<u>**Demonstração:**</u>
As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função arco-cossecante-hiperbólica é dada pela figura abaixo.



Será mostrado, precisamente, mais adiante no desenvolvimento do conteúdo que a representação geométrica do gráfico da função arccossech é dada pela figura acima.

Capítulo 4

Teoria dos Limites

4.1 Motivação

A seguir tratarenos de um problema que colocamos no início destas notas.

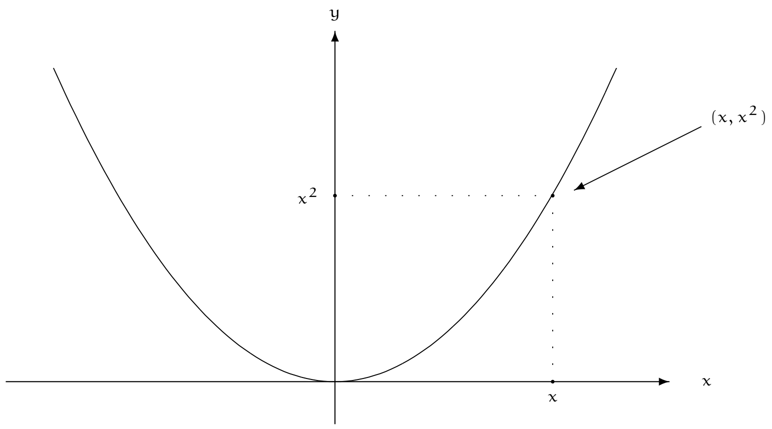
Observação 4.1.1

Encontrar a equação da reta tangente, que denotaremos por $\underline{t}$, *à representação geométrica do gráfico da curva* $y = x^2$ *no ponto do gráfico* $(2, 4)$.

Observemos que o ponto acima corresponde ao seguinte ponto do gráfico da função $\underline{f}$: $(x_o, f(x_o))$, *onde* $x_o = 2$ *e a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

cuja representação geométrica do gráfico é dada pela figura abaixo.



Notemos que basta encontrar o coeficiente angular, que denotaremos por m_t, *da reta tangente* $\underline{t}$.

De fato, pois neste caso a equação da reta $\underline{t}$ *será:*

$$y - y_o = m_t(x - x_o).$$

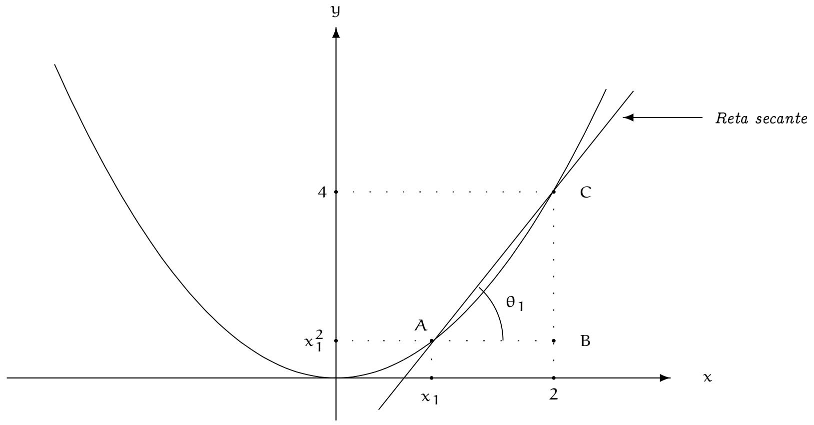
Mas $y_o = f(x_o) = x_o^2$ *e como* $x_o = 2$, *teremos* $y_o = 4$ *assim, se conhecermos o coeficiente angular* m_t *teremos que a equação da reta tangente à representação geométrica do gráfico da curva* $y = x^2$ *(ou à representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *) no ponto* $(2, 4)$ *será dada por:*

$$y - 4 = m_t(x - 2).$$

A questão é como encontrar o coeficiente angular m_t*?*

Para isto, consideremos um outro ponto da representação geométrica do gráfico da curva $y = x^2$ *(ou da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *) diferente do ponto* $(2, 4)$*, digamos* $(x_1, y_1) \neq (2, 4)$*.*

Como os pontos (x_1, y_1) *e* $(x_o, y_o) = (2, 4)$ *são diferentes segue que podemos encontrar a equação da reta que contém esses dois pontos (que será uma reta secante à representação geométrica do gráfico da curva* $y = x^2$*, ou à representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *), ou ainda, podemos encontrar o coeficiente angular dessa reta, que indicaremos por* m_s *(veja figura abaixo).*



Sabemos que (ver figura acima)

$$m_s = tg(\theta_1) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{4 - x_1^2}{2 - x_1} = \frac{(2 - x_1)(2 + x_1)}{2 - x_1} \overset{x_1 \neq 2}{=} 2 + x_1,$$

ou seja, o coeficiente angular da reta secante à representação geométrica do gráfico da curva $y = x^2$ *(ou da função* $\underline{f}$ *), que passa pelos pontos* $(x_o, y_o) = (2, 4)$ *e* $(x_1, y_1)(\neq (2, 4))$*, será dado por:*

$$m_s = 2 + x_1.$$

Se fizermos o ponto $A = (x_1, f(x_1)) = \left(x_1, x_1^2\right)$ *"deslocar-se" sobre à representação geométrica do gráfico da curva (ou sobre à representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *) em direção ao ponto* $C = (x_o, y_o)$*, o coeficiente angular da reta secante, isto é,* m_s*, irá "aproximar-se" do coeficiente angular da reta tangente* $\underline{t}$*, isto é, de* m_t*, ou seja:*

$$\textit{se} \quad \left(x_1, x_1^2\right) \sim (2, 4), \qquad \textit{teremos que} \quad m_s \sim m_t,$$

ou ainda,

$$\textit{se} \quad x_1 \sim 2, \qquad \textit{teremos} \quad m_s \sim m_t.$$

Mas quando $x_1 \sim 2$*, como* $m_s = 2 + x_1$*, segue que* $m_s \sim 4$*, ou seja,*

$$\textit{se} \quad x_1 \sim 2, \qquad \textit{teremos} \quad m_t \sim 4.$$

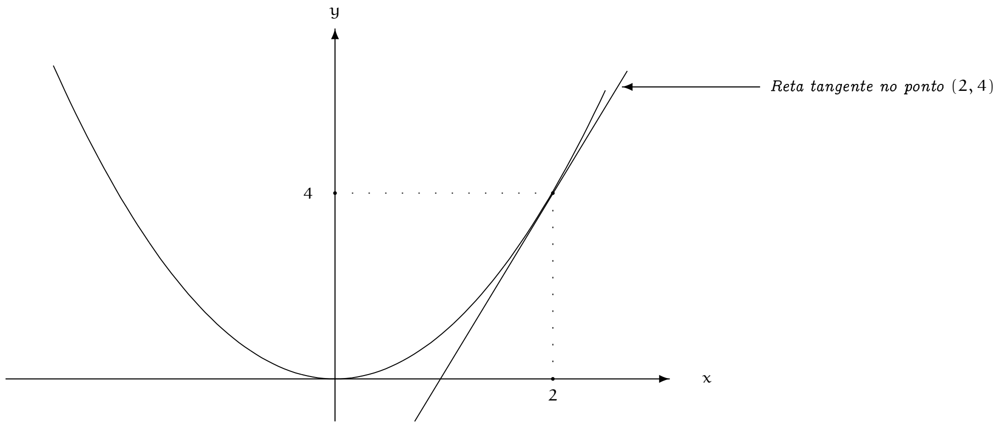
Mostraremos neste capítulo que, realmente, $m_t = 4$*.*

Deste modo o coeficiente angular da reta tangente à representação geométrica do gráfico da curva $y = x^2$ *(ou à representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$*) no ponto* $(2, 4)$ *será* $m_t = 4$*.*

Com isto, a equação da reta tangente ao gráfico da curva $y = x^2$ *(ou do gráfico da função* $\underline{f}$ *) no ponto* $(2, 4)$ *será:*

$$y - 4 = 4(x - 2), \qquad \textit{isto é}, \qquad y = 4x - 4.$$

Geometricamente teremos:



O processo acima envolve uma situação extrema !

No problema acima, em nenhum momento, a reta secante será a reta tangente.

Porém na "situação extrema" (ou limite) irá tornar-se, isto é, quando o ponto x_1 *estiver* <u>*arbitrariamente*</u> *próximo do ponto* $x_o = 2$*.*

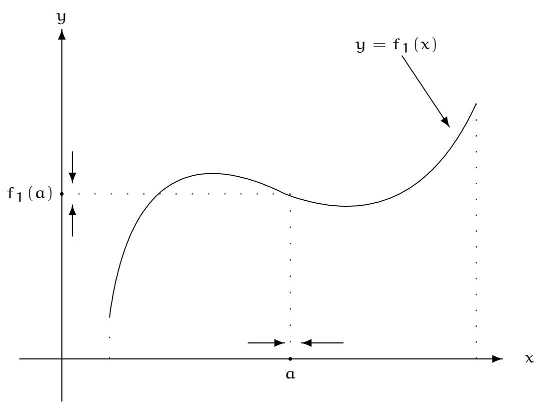
4.2 Definição de limite e exemplos

A teoria que começaremos a estudar a seguir foi estruturada por Cauchy (1789-1857) e denominada de Teoria dos Limites.

Antes de introduzir o conceito principal estudemos os casos geométricos abaixo:

Observação 4.2.1 *Consideremos as funções abaixo representadas pelas representações geométricas dos seus gráficos:*

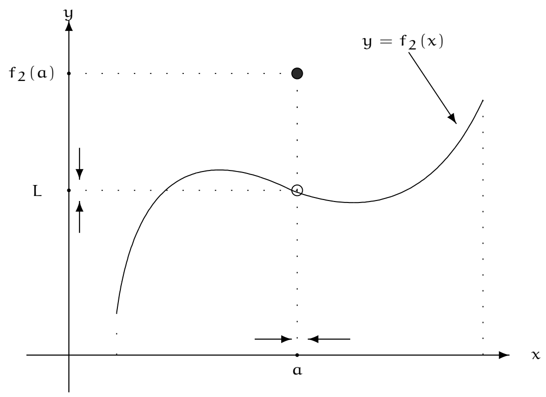
<u>1.o Caso:</u>



Neste caso a função f_1 *está definida em* $x = a$ *e valores "próximos" de* $x = a$ *são levados, pela função* f_1*, em valores "próximos" do valor* $y = f_1(a)$*.*

De qualquer modo, quando nos "aproximamos" do valor $x = a$*, as imagens desses valores, pela função* f_1*, "aproximam-se" do valor* $y = f_1(a)$*.*

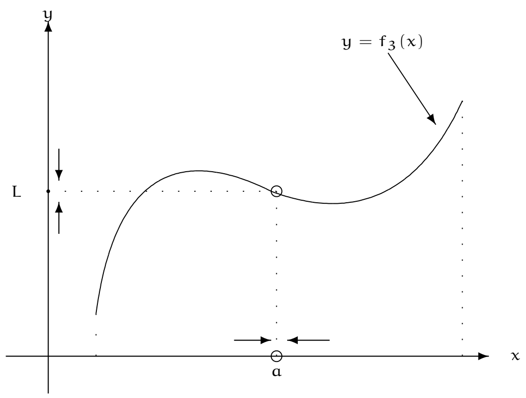
2.o Caso:



Neste caso a função f_2 *está definida em* $x = a$ *e valores "próximos" de* $x = a$ *são levados, pela função* f_2*, em valores "próximos" do valor* $y = L$ *(que é diferente do valor* $y = f_2(a)$*).*

De qualquer modo, quando nos "aproximamos" do valor $x = a$*, as imagens desses valores, pela função* f_2*, "aproximam-se" do valor* $y = L$*.*

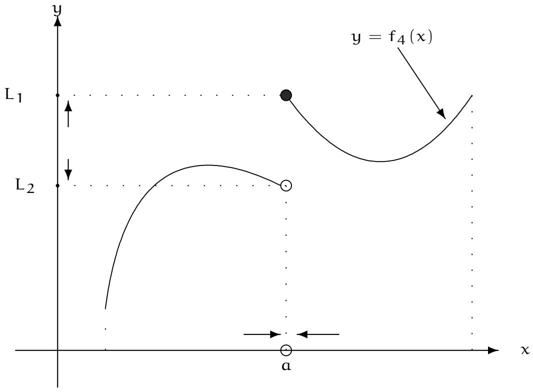
3.o Caso:



Neste caso a função f_3 **não** *está definida em* $x = a$ *e valores "próximos" de* $x = a$ *são levados, pela função* f_3*, em valores "próximos" do valor* $y = L$ *.*

De qualquer modo, quando nos "aproximamos" do valor $x = a$*, as imagens desses valores, pela função* f_3*, "aproximam-se" do valor* $y = L$*.*

4.o Caso:

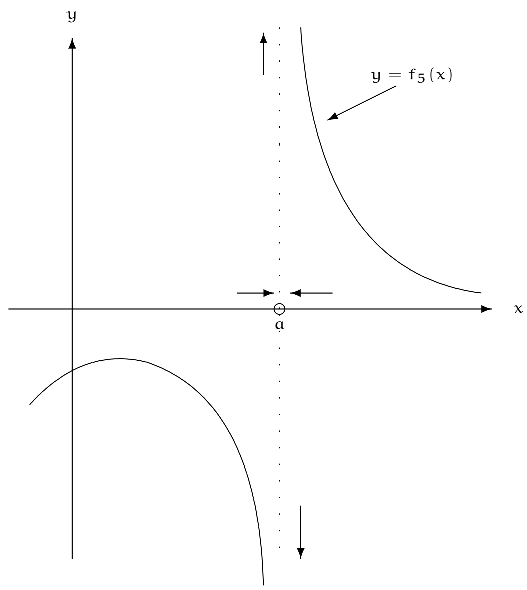


Neste caso a função f_4 *está definida em* $x = a$ *e valores "próximos" de* $x = a$, *maiores que* $\underline{a}$, *são levados, pela função* f_4, *em valores "próximos" do valor* $y = L_1$ *e valores "próximos" de* $x = a$, *menores que* $\underline{a}$, *são levados, pela função* f_4, *em valores "próximos" do valor* $y = L_2$.

Notemos que, $L_1 \neq L_2$.

Neste caso, quando nos "aproximamos" do valor $x = a$, *as imagens desses valores pela função* f_4 **não** *"aproximam-se" de nenhum valor do eixo dos* Oy.

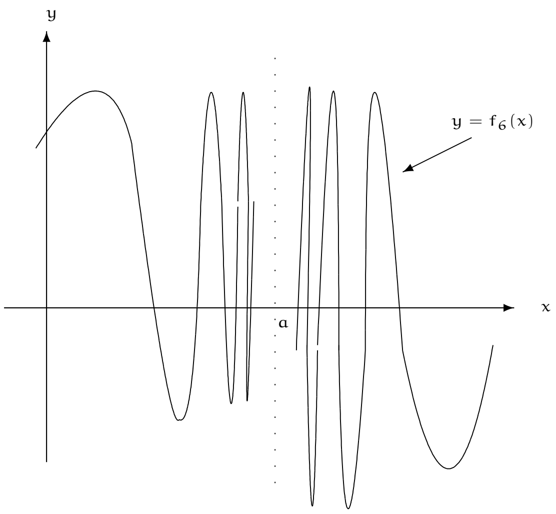
5.o Caso:



Neste caso a função f_5 **não** *está definida em* $x = a$ *e valores "próximos" de* $x = a$, *maiores que* $\underline{a}$, *são levados, pela função* f_5, *em valores cada vez maiores, ilimitamente, e valores "próximos" de* $x = a$, *menores que* $\underline{a}$, *são levados, pela função* f_5, *em valores cada vez menores, ilimitadamente.*

Neste caso, quando nos "aproximamos" do valor $x = a$, *as imagens desses valores pela função* f_5 *não "aproximam-se" de nenhum valor real sobre o eixo dos* Oy *(na verdade as imagens crescem ou decrescem ilimitadamente).*

6.o Caso:



Neste caso a função f_6 **não** *está definida em* $x = a$ *e valores "próximos" de* $x = a$*, maiores ou menores que* $\underline{a}$*, são levados, pela função* f_6*, em valores que oscilam cada vez mais bruscamente.*

Neste caso, quando nos "aproximamos" do valor $x = a$*, as imagens desses valores pela função* f_6 **não** *"aproximam-se" de nenhum valor sobre do eixo dos* Oy *(na vedade oscilam abruptamente).*

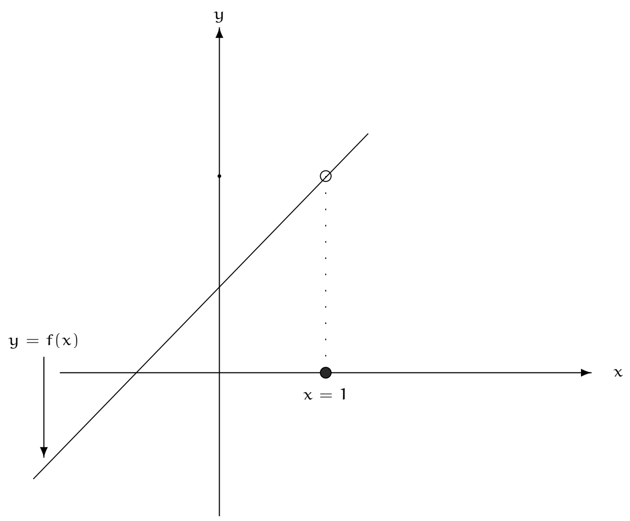
O que faremos a seguir e em alguns dos próximos capítulos é caracterizar, do ponto de vista Matemático, esses comportamentos das funções acima perto do valor $x = a$.

Antes de introduzir o primeiro conceito que nos interessará, consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.2.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} \quad , \quad x \in \mathbb{R},$$

cuja representação geométrica do gráfico é dada pela figura abaixo.



Estudemos o comportamento da função para valores próximos do valor $x = 1$ e diferentes do mesmo.

Resolução:

Façamos duas tabelas formadas por valores próximos do valor $x = 1$, diferentes do mesmo.

Uma com duas colunas, sendo a primiera coluna formada pelos valores que são maiores que $x = 1$ e a outra coluna formada pelos respectivos valores das imagens pela função. A outra tabela, do mesmo tipo, com uma coluna com valores que são menores que $x = 1$ e a outra coluna formada dos respectivos valores das imagens pela função $\underline{f}$:

$x > 1$	$f(x)$		$x < 1$	$f(x)$
2	$2 + 1 = 3$		0	$0 + 1 = 1$
1.5	$1.5 + 1 = 2.5$		0.5	$0.5 + 1 = 1.5$
1.1	$1.1 + 1 = 2.1$		0.9	$0.9 + 1 = 1.9$
1.01	$1.01 + 1 = 2.01$	e	0.99	$0.99 + 1 = 1.99$
1.001	$1.001 + 1 = 2.001$		0.999	$0.999 + 1 = 1.999$
1.0001	$1.0001 + 1 = 2.0001$		0.9999	$0.9999 + 1 = 1.9999$
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$
1	2		1	2

Logo, empiricamente, temos que:

1. Quando $\underline{x}$ "aproxima-se" do valor $\underline{1}$, por valores maiores que $\underline{1}$, suas imagens pela função $\underline{f}$, "aproximam-se" do valor $\underline{2}$;

2. Quando $\underline{x}$ "aproxima-se" do valor $\underline{1}$, por valores menores que $\underline{1}$, suas imagens pela função $\underline{f}$, "aproximam-se" do valor $\underline{2}$.

Conclusão: quando $\underline{x}$ "aproxima-se" do valor $\underline{1}$ (por valores maiores ou menores que $\underline{1}$) suas respectivas imagens, pela função $\underline{f}$, "aproximam-se" do valor $\underline{2}$.

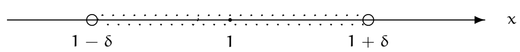
A questão que se coloca é: como caracterizar a noção de "estar próximo"?. Mais precisamente, quando sabemos que um ponto está próximo de outro?

Para isto usaremos os intervalos.

Observemos que para caracterizarmos que um ponto $\underline{x}$ está a uma distância menor que $\delta > 0$ do ponto $\underline{1}$, sobre o eixo Ox, basta escrevermos

$$x \in (1 - \delta, 1 + \delta).$$

Geometricamente temos:



Mas,

$x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$, é equivalente a, $1 - \delta < x < 1 + \delta$, que é equivalente a, $-\delta < x - 1 < \delta$,

ou ainda, equivalente a,

$$|x - 1| < \delta.$$

Ou seja, para escrevermos que o número real $\underline{x}$ está a uma distância menor que o número real positivo $\underline{\delta}$, do número real $\underline{1}$, basta escrevermos

$$|x-1|<\delta.$$

Por outro lado, se queremos dizer que o número real $\underline{x}$ **não** é igual ao número real $\underline{1}$ basta escrevermos

$$0<|x-1|.$$

Portanto para escrevermos que o número $\underline{x}$ está a uma distância, menor do que o número real positivo $\underline{\delta}$, do número real $\underline{1}$ e é diferente deste, basta escrevermos

$$0<|x-1|<\delta.$$

De modo semelhante, para escrevermos que o número real $f(x)$ está a uma distância, menor que o número real positivo $\underline{\varepsilon}$, do número real $\underline{2}$ basta escrevermos

$$|f(x)-2|<\varepsilon.$$

Logo podemos caracterizar a propriedade acima da seguinte forma: podemos ficar tão perto de $L=2$ quanto **se queira**, por valores da função $\underline{f}$, desde que, no domínio da função $\underline{f}$, estejamos **suficientemente** próximos do valor $x_o=1$.

Com isto podemos caracterizar a noção observada nos exemplos acima da seguinte forma:

Definição 4.2.1 *Sejam $A\subseteq\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A e $\underline{f}$ uma função, a valores reais, definida em A, exceto, eventualmente, em $x=a$ (isto é, $f:A\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$).*

Diremos que $L\in\mathbb{R}$ é o **limite da função $\underline{f}$ quando $\underline{x}$ aproxima-se de (ou tende à) $x=a$** *se, e somente se:*

Para cada número real, que denotaremos por $\varepsilon>0$, fixado, porém arbitrário, conseguirmos encontrar um outro número real, que denotaremos por $\delta>0$, de tal modo que, para cada $x\in A$ que satisfaz

$$\textit{se}\quad 0<|x-a|<\delta\,,\qquad \textit{deveremos ter}\quad |f(x)-L|<\varepsilon. \tag{4.1}$$

Neste caso escreveremos:

$$L=\lim_{x\to a}f(x).$$

Observação 4.2.2

1. *Se*

$$L=\lim_{x\to a}f(x),$$

para cada $\varepsilon>0$ fixado, porém arbitrário, deveremos encontrar um outro número real $\delta>0$ que, em geral, poderá depender de $\underline{\varepsilon}$.

Por exemplo, quanto menor for tomado o número real $\varepsilon>0$, em geral, menor será o valor do número real $\delta>0$ que precisaremos para que (4.1) ocorra na definição (4.2.1).

2. *De outro modo, a definição acima pode ser reescrita na seguinte forma abreviada:*

$$L=\lim_{x\to a}f(x)$$

se, e somente se, dado o número real $\varepsilon>0$, podemos encontrar um outro número real $\delta>0$, de modo que, para cada $x\in A$ que satisfaz

$$0<|x-a|<\delta\,,\qquad \textit{deveremos ter}\quad |f(x)-L|<\varepsilon.$$

3. *Do ponto de vista de definição* (4.2.1) *podemos reescrevê-la da seguinte forma:*

   Dado um intervalo aberto contendo L *(no caso da definição* (4.2.1)*: o intervalo aberto*

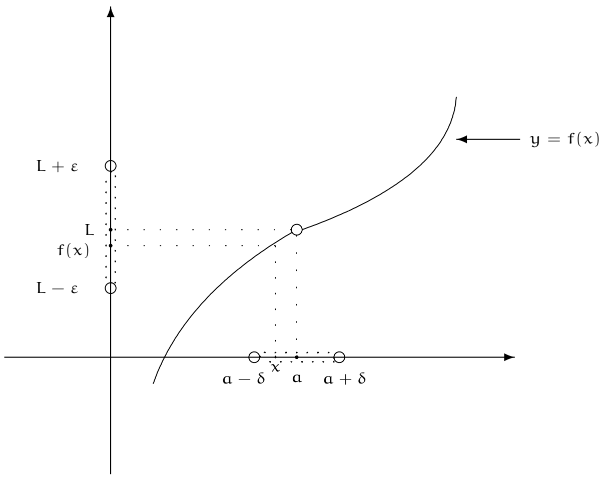
$$(L - \varepsilon, L + \varepsilon) \tag{4.2}$$

   deveremos poder encontrar um outro intervalo aberto contendo $\underline{a}$ *(no caso da definição* (4.2.1)*: o intervalo aberto*

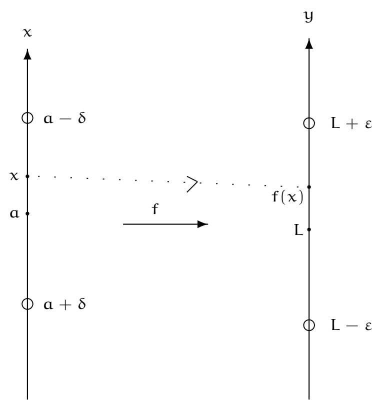
$$(a - \delta, a + \delta) \tag{4.3}$$

   de tal que todo ponto pertencente ao segundo intervalo, (no caso a defınção (4.2.1)*, o intervalo (4.3)), que pertença ao domínio da função, exceto, eventualmente, o ponto* $\underline{a}$*, deverá ser levado, pela função* $\underline{f}$ *, dentro do intervalo dado inicialmente (no caso da definição* (4.2.1)*, o intervalo (4.2)).*

   Geometricamente temos a seguinte situação:



4. *Um outro modo de entender a situação apresentada na definição* (4.2.1) *seria, segundo o diagrama de Venn:*



5. *Na definição* (4.2.1)*,* **não** *mencionamos nada sobre o valor da função* $\underline{f}$ *no ponto* $\underline{a}$ *(veja que consideramos somente os valores* $\underline{x}$ *tais que* $\underline{0 <} |x - a| < \delta$*, em particular,* $x \neq a$*), ou seja, a função* **não** *precisa, necessariamente, estar definida no ponto* $\underline{a}$ *para podermos pensar em estudar a existência do limite da mesma no ponto* $\underline{a}$*.*

Consideraremos a seguir dois exemplos:

Exemplo 4.2.2 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq 4x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que existe o limite $\lim_{x \to 2} f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 8.$$

Resolução:

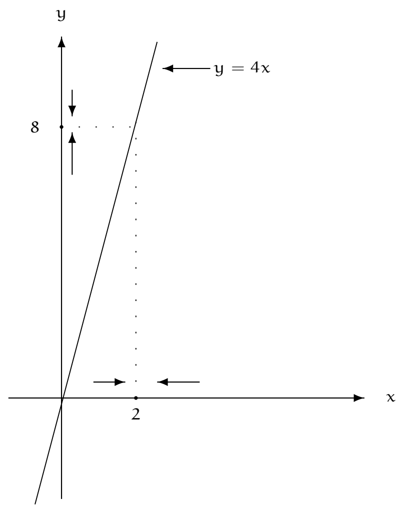
Empiricamente temos as seguintes tabelas:

$x > 2$	$f(x)$
3	$4.3 = 12$
$2,5$	$4.2,5 = 10$
$2,1$	$4.2,1 = 8,4$
$2,01$	$4.2,01 = 8.04$
$2,001$	$4.2,001 = 8,004$
$\downarrow$	$\downarrow$
2	8

e

$x < 2$	$f(x)$
1	$4.1 = 4$
1.5	$4.1,5 = 6$
1.9	$4.1,9 = 7,6$
1.99	$4.1,99 = 7,96$
1.999	$4.1,999 = 7,996$
$\downarrow$	$\downarrow$
2	8

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



Mostremos, **matematicamente**, que realmente, existe o limite $\lim_{x \to 2} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 8.$$

Neste caso $a \doteq 2$ e $L \doteq 8$.

Para tanto, precisamos mostrar que para um dado número real positivo, escolhido arbitrariamente, que denotaremos por $\underline{\varepsilon}$ (isto é, $\varepsilon > 0$), conseguiremos encontrar, explicitamente, um outro número real positivo, que chamaremos de $\underline{\delta}$ (isto é, $\delta > 0$), de tal modo que, para os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$0 < |x - \underbrace{2}_{=a}| < \delta, \quad \text{deveremos ter} \quad |f(x) - \underbrace{8}_{=L}| < \varepsilon,$$

isto é,

$$\text{se} \quad 0 < |x - 2| < \delta\,, \quad \text{deveremos ter} \quad |4x - 8| < \varepsilon.$$

Para isto, dado o número real $\varepsilon > 0$ fixo, porém arbitrário, escolhamos o número real

$$\delta \doteq \frac{\varepsilon}{4} > 0. \tag{4.4}$$

Com isto, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < |x - 2| < \delta \tag{4.5}$$

então teremos

$$|f(x) - 8| = |4x - 8| = |4(x - 2)| = \underbrace{|4|}_{=4} \underbrace{|x - 2|}_{\overset{(4.5)}{<} \delta} < 4\delta \overset{(4.4)}{=} 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

isto é,

$$\text{se} \quad 0 < |x - 2| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - 8| < \varepsilon.$$

Com isto mostramos, <u>**matematicamente**</u>, que existe o limite $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 8.$$

Observação 4.2.3 *Observemos que no exemplo acima temos*

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 8 = 4.2 = f(2).$$

Consideremos o:

Exemplo 4.2.3 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que existe o limite $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 9.$$

<u>**Resolução:**</u>

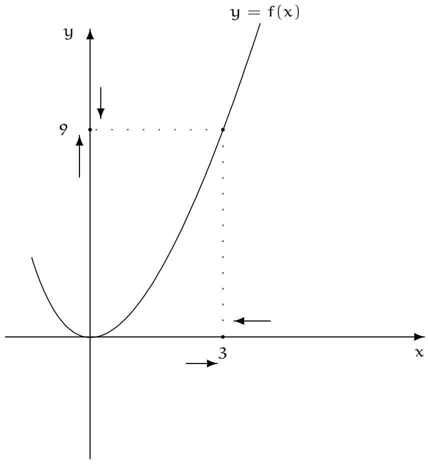
Empiricamente temos as tabelas:

$x > 3$	$f(x)$
4	$4^2 = 16$
$3,5$	$(3,5)^2 = 12,25$
$3,1$	$(3,1)^2 = 9,61$
$3,01$	$(3,01^{)}2 = 9,0601$
$3,001$	$(3,001)^2 = 9,006001$
$\downarrow$	$\downarrow$
3	9

e

$x < 3$	$f(x)$
2	$2^2 = 4$
2.5	$(2,5)^2 = 6,25$
$2,9$	$(2,9)^2 = 8,41$
2.99	$(2,99)^2 = 8,9401$
2.999	$(2,999)^2 = 8,994001$
$\downarrow$	$\downarrow$
3	9

A representação geométrica do gráfico da função <u>f</u> é dada pela figura abaixo:



Mostremos, **matematicamente**, que realmente, que existe o limite $\lim_{x \to 3} f(x)$ e além disso $\lim_{x \to 3} f(x) = 9$ (neste caso $a \doteq 3$ e $L \doteq 9$).

Para tanto, precisamos mostrar que para um dado número real positivo, escolhido arbitráriamente, que denotaremos por $\underline{\varepsilon}$, conseguiremos encontrar, explicitamente, um outro número real positivo, que chamaremos de $\underline{\delta}$, de tal modo que para os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem

$$0 < |x - \underbrace{3}_{=a}| < \delta, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - \underbrace{9}_{=L}| < \varepsilon,$$

isto é, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{teremos} \quad \left|x^2 - 9\right| < \varepsilon.$$

Para isto, dado o número real $\varepsilon > 0$ escolhamos o número real

$$\delta \doteq \frac{\sqrt{36 + 4\varepsilon} - 6}{2} > 0.$$

Será deixado como exercício para o leitor verificar que

$$\delta^2 + 6\delta = \varepsilon. \tag{4.6}$$

Com isto, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < |x - 3| < \delta \tag{4.7}$$

então teremos

$$|f(x) - 9| = \left|x^2 - 9\right| = |(x-3)(x+3)| = |x-3|\,|x+3| = |x-3|\,|(x-3)+6|$$

$$\overset{|a+b| \le |a|+|b|}{\le} |x-3|\,[|x-3| + 6 \underbrace{|x-3|}_{\overset{(4.7)}{<}\delta} \left[\underbrace{|x-3|}_{\overset{(4.7)}{<}\delta} + 6\right] < \delta(\delta + 6) = \delta^2 + 6\delta \overset{(4.6)}{=} \varepsilon,$$

isto é, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - 9| < \varepsilon,$$

Com isto mostramos, **matematicamente**, que existe o limite $\lim_{x \to 3} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 9.$$

Observação 4.2.4 *Observemos que no exemplo acima temos*

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 9 = f(3).$$

A seguir daremos um exercício resolvido que aplica o conceito de limite introduzido acima em um exemplo prático de controle de qualidade.

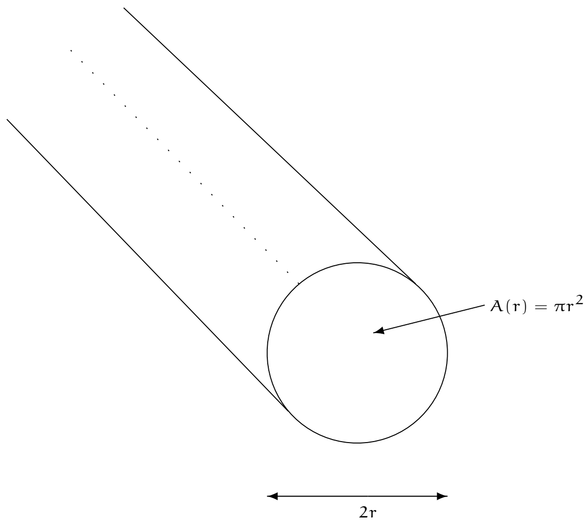
Exercício 4.2.1 *Pretende-se instalar em uma fábrica de tubos de plástico (onde cada tudo tem a forma de um cilindro circular reto) um mecanismo que nos forneça um controle de precisão da área transversal de cada tudo (que é a área de um círculo) produzido, visto que este está diretamente relacionado com a vazão do mesmo e portanto com a resistência e/ou durabilidade do mesmo.*

Resolução:

O modo mais simples de fazermos isto seria medir medir o diâmetro do tubo, dado por $2r$, onde $r > 0$ é o raio do tudo cilíndrico e assim a área transversal do mesmo, que indicaremos por $A = A(r)$, será dada por

$$A(r) = \pi r^2.$$

A questão é saber quanto podemos errar no diâmetro do cilindro de modo que a área da região transversal do cilindro varie entre, por exemplo, $4\pi - 0.1\,cm^2$ e $4\pi + 0.1\,cm^2$ (o erro permitido na área será de $0.1\,cm^2$)?



É fácil ver que o raio $\underline{r}$ deverá estar próximo de $2\,cm$ (pois $A(2) = 4\pi$).

A questão é saber quão próximo deveremos estar de $r = 2$, para que o valor $A(r)$, varie entre $4\pi - 0.1\,cm^2$ e $4\pi + 0.1\,cm^2$?

Observemos que queremos encontrar um intervalo de variação de $\underline{r}$ (ou de $2r$) de tal modo que quando $\underline{r}$ estiver nesse intervalo, $A(r)$ esteja no intervalo $(4\pi - 0.1\,,\, 4\pi + 0.1)$.

Isto pode ser colocado da seguinte forma: queremos encontrar $\delta > 0$ de modo que

$$\text{se} \quad r \in (2-\delta, 2+\delta)\,, \quad \text{tenhamos} \quad A(r) \in (4\pi - 0.1, 4\pi + 0.1),$$

ou seja, o valor 0.1 fará o papel do número real $\varepsilon > 0$ da definição de limites.

Escolhamos

$$\delta \doteq \frac{\sqrt{16+\frac{4.\varepsilon}{\pi}}-4}{2} > 0.$$

Então (será deixado como exercício para o leitor a verificação deste fato)

$$\pi\,\delta\,(\delta+4) = \varepsilon. \tag{4.8}$$

Assim se, $r \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < |r-2| < \delta \tag{4.9}$$

teremos

$$\begin{aligned}|A(r)-4\pi| &= \left|\pi r^2 - 4\pi\right| = \pi\left|r^2-4\right| = \pi|r-2|\,|r+2| = \pi|r-2|\,|(r-2)+4| \\ &\overset{[|a+b|\le|a|+|b|]}{\le} \pi\underbrace{|r-2|}_{\overset{(4.9)}{<}\delta}\,[\underbrace{|r-2|}_{\overset{(4.9)}{<}\delta}+4] < \pi\,\delta\,(\delta+4) \overset{(4.8)}{=} \varepsilon = 0.1.\end{aligned}$$

Observemos que

$$\delta \doteq \frac{\sqrt{16+\frac{4.\varepsilon}{\pi}}-4}{2} = \frac{\sqrt{16+\frac{4.0,1}{\pi}}-4}{2} \sim 0.0079 \quad (\text{pois } \pi \sim 3.1416).$$

Assim o diâmetro pode variar entre $2-0.0158\,\text{cm}$ e $2+0.0158\,\text{cm}$, para que a área da seção reta do tubo varie entre $4\pi - 0.1\,\text{cm}^2$ e $4\pi+0.1\,\text{cm}^2$.

Observação 4.2.5 *Na verdade estamos usando o fato que existe o limite $\lim\limits_{r\to 2} A(r) = 4\pi$ e além disso*

$$\lim_{r\to 2} A(r) = 4\pi.$$

Será deixado como exercício para o leitor mostrar, pela definição de limite, que, de fato, isto é verdade.

4.3 Limites laterais e exemplos

Observação 4.3.1 *Em várias situações estaremos interessados em estudar o limite de uma função em um valor, para valores maiores ou menores que o valor dado.*

Por exemplo, se queremos conhecer uma certa medida à pressão zero então só fará sentido tomarmos medidas no laboratório para valores da pressão maiores que zero.

Isto nos leva a estudar os denominados **limites laterais** *de funções, cujas definições serão introduzidas a seguir.*

Antes porém, consideraremos o seguinte exemplo:

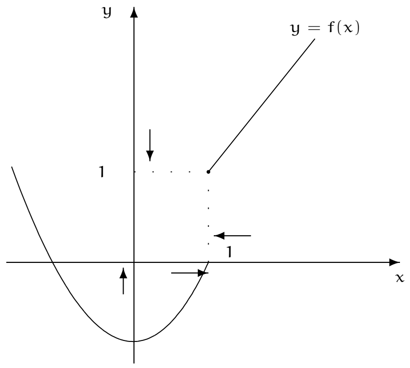
Exemplo 4.3.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} x\,, & se \quad x \ge 1 \\ x^2-1\,, & se \quad x < 1 \end{cases} \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Encontrar o limite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, se existir.

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função f é dada pela figura abaixo:



Logo podemos observar, empiricamente, que quando

$$x \sim 1, \quad x > 1, \quad \text{teremos} \quad f(x) \sim 1.$$

Por outro lado, quando

$$x \sim 1, \quad x < 1, \quad \text{teremos} \quad f(x) \sim 0.$$

Logo parece intuitivo que possamos concluir que **não** existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
A verificação rigorosa deste fato será obtida mais adiante.

Observação 4.3.2

1. *Na verdade podemos mostrar, no exemplo acima, que para todo número real* $L \in \mathbb{R}$ *temos que* $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq L$, *ou seja, não existe o limite* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Para que possamos estudar o comportamento de funções do tipo acima precisamos saber caracterizar o comportamento da mesma para pontos perto do valor* $x = 1$, *com* $x > 1$ *e o comportamento da mesma para pontos perto do valor* $x = 1$, *com* $x < 1$, *ou seja, se existe o "limite pela direita" de* $x = 1$ *e/ou o "limite pela esquerda" de* $x = 1$ *para a função dada.*

   Estes serão denominados **limites laterais** *da função* f *em* $x = 1$ *e, caso existam, escreveremos*

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \quad e \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0.$$

Mais precisamente, temos a

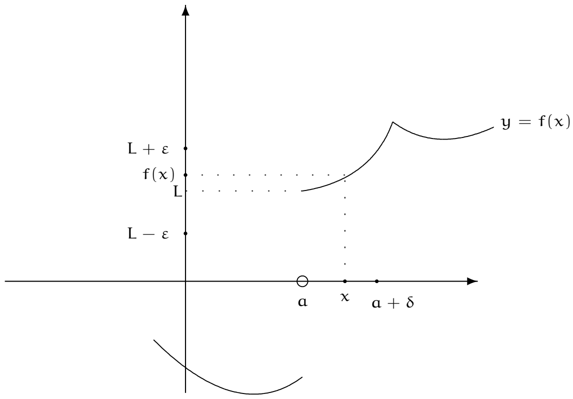
Definição 4.3.1 *Sejam* $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* A *e* $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$.

Diremos que $L \in \mathbb{R}$ *é o* **limite da função f, quando x tende à a, pela direita**, *denotando por*

$$L = \lim_{x\to a^+} f(x),$$

se dado um número real $\varepsilon > 0$ *fixado, porém arbitrário, podemos encontrar um outro número real* $\delta > 0$ *de modo que, se* $x \in A$ *satisfaz*

$$0 < x - a < \delta, \quad \textit{deveremos ter} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

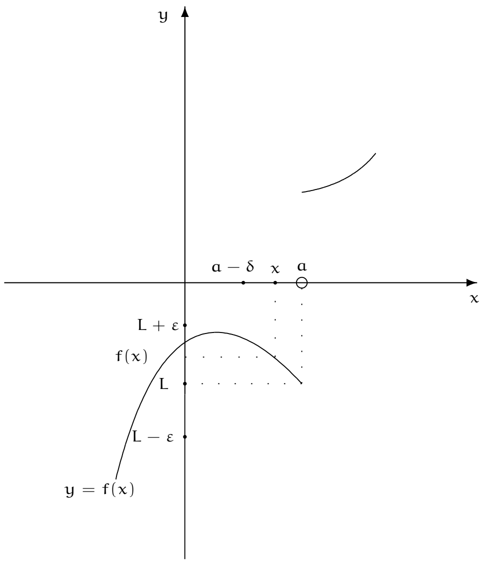


De modo análogo, diremos que $L \in \mathbb{R}$ *é o* **limite da função $\underline{f}$, quando $\underline{x}$ tende à $\underline{a}$, pela esquerda**, *denotando por*

$$L = \lim_{x \to a^-} f(x),$$

se dado um número $\varepsilon > 0$ *fixado, porém arbitrário, podemos encontrar um outro número real* $\delta > 0$ *de modo que, se* $x \in A$ *satisfaz*

$$-\delta < x - a < 0\,, \quad \textit{deveremos ter} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$



Consideremos alguns exemplos.

Exemplo 4.3.2 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} 1\,, & \textit{se} \quad x > 0 \\ 0\,, & \textit{se} \quad x = 0 \\ -1\,, & \textit{se} \quad x < 0 \end{cases}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

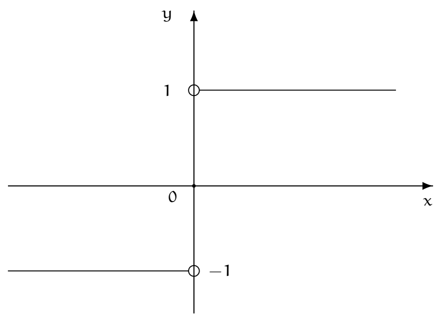
denominada função **sinal de $\underline{x}$**.

Calular, caso existam, os seguintes limites laterais:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \quad \textit{e} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x).$$

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dado pela figura abaixo:



Afirmamos que existe o limite lateral $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1,$$

ou seja, segundo a definição de limites laterais temos que $a \doteq 0$ e $L \doteq 1$.

De fato, dado o número real $\varepsilon > 0$ escolhamos o número real

$$\delta \doteq 1 > 0 \qquad \text{(poderia ser qualquer número real maior que zero).}$$

Logo se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < x - 0 < \delta = 1\,, \quad \text{segue que} \quad 0 < x < 1$$

assim

$$|f(x) - 1| \overset{\text{se } 0<x\text{, teremos } f(x)=1}{=} |1 - 1| = 0 < \varepsilon,$$

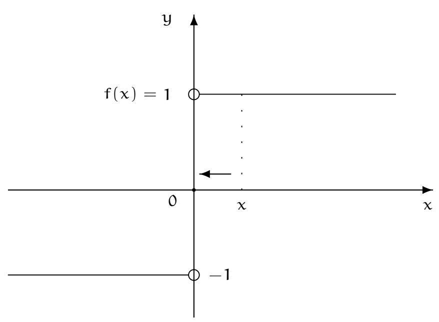
isto é, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < x - 0 < \delta\,, \quad \text{segue que} \quad |f(x) - 1| < \varepsilon,$$

ou seja, existe o limite lateral $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Geometricamente temos:



De modo análogo afirmamos que existe o limite lateral $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1,$$

ou seja, segundo a definição de limites laterais temos que $a \doteq 0$ e $L \doteq -1$.

De fato, dado o número real $\varepsilon > 0$ escolhamos o número real

$$\delta \doteq 1 > 0 \qquad \text{(poderia ser qualquer número real maior que zero).}$$

Logo se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$-1 = -\delta < x - 0 < 0\,, \quad \text{segue que} \quad -1 < x < 0$$

assim

$$|f(x) - (-1)| \overset{\text{se } x<0 \text{, segue que } f(x)=-1]}{=} |-1+1| = 0 < \varepsilon,$$

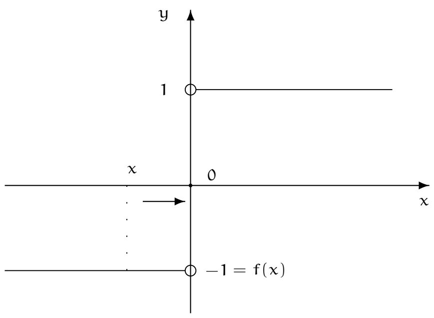
isto é, se $X \in R$ satisfaz

$$\text{se} \quad -\delta < x - 0 < 0\,, \quad \text{segue que} \quad |f(x) - (-1)| < \varepsilon,$$

ou seja, existe o limite lateral $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

Geometricamente temos:



Observação 4.3.3 *Para o exemplo acima, afirmamos que* **<u>não</u>** *existe* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 4.3.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq [x], \quad x \in \mathbb{R},$$

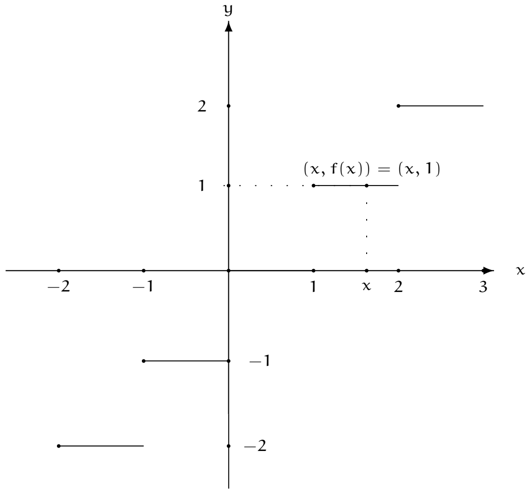
ou seja, a função maior inteiro menor que $\underline{x}$.

Mostrar que se $n \in \mathbb{Z}$ *está fixado, então mostre que existem os limites laterais* $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x\to n^+} f(x) = n \quad e \quad \lim_{x\to n^-} f(x) = n - 1.$$

<u>Resolução:</u>

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dado pela figura abaixo:



Afirmamos que existe o limite lateral $\lim\limits_{x \to n^+} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = n,$$

ou seja, segundo a definição de limites laterais temos que $a \doteq n$ e $L \doteq n$.

De fato, dado o número real $\varepsilon > 0$ escolhamos o número real

$$\delta \doteq \frac{1}{2} > 0 \quad \text{(poderia ser qualquer número real maior que zero e menor que um).}$$

Observemos que se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < x - n < \delta = \frac{1}{2}, \quad \text{segue que} \quad n < x < n + \frac{1}{2}$$

logo

$$|f(x) - n| \overset{\text{se } n<x<n+\frac{1}{2}<n+1\text{, segue que } f(x)=n}{=} |n - n| = 0 < \varepsilon,$$

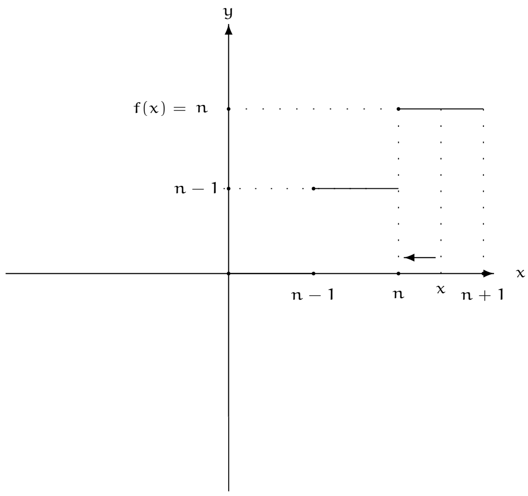
isto é, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < x - n < \delta, \quad \text{segue que} \quad |f(x) - n| < \varepsilon,$$

ou seja, existe o limite lateral $\lim\limits_{x \to n^+} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = n.$$

Geometricamente temos



Afirmamos que existe o limite lateral $\lim\limits_{x \to n^-} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = n - 1,$$

ou seja, segundo a definição de limites laterais temos que $a \doteq n$ e $L \doteq n - 1$.

De fato, dado o número real $\varepsilon > 0$ escolhamos o número real

$$\delta \doteq \frac{1}{2} > 0 \quad \text{(poderia ser qualquer número real maior que zero e menor que um).}$$

Observemos que se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$-\frac{1}{2} = -\delta < x - n < 0\,, \quad \text{segue que} \quad n - \frac{1}{2} < x < n$$

logo

$$|f(x) - (n-1)| \overset{\text{se } n-1<n-\frac{1}{2}<x<n\text{, segue que} f(x)=n-1}{=} |(n-1) - n + 1)| = 0 < \varepsilon,$$

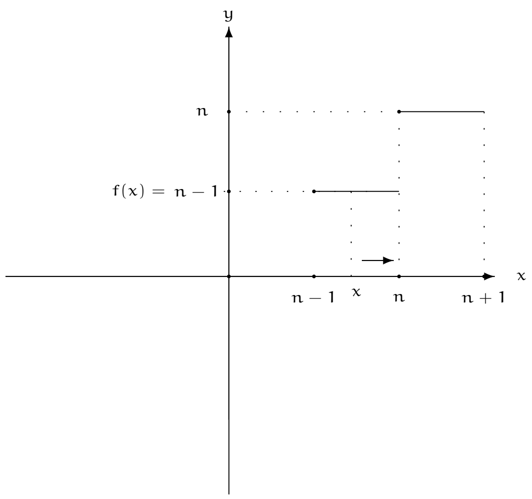
isto é, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$-\delta < x - n < 0\,, \quad \text{segue que} \quad |f(x) - (n-1)| < \varepsilon,$$

ou seja, existe o limite lateral $\lim\limits_{x \to n^-} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = n - 1.$$

Geometricamente temos



Observação 4.3.4 *Para o exemplo acima, afirmamos que* **<u>não</u>** *existe o limite*

$$\lim_{x \to n} f(x).$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

A seguir exibimos outro exercício resolvido.

Exercício 4.3.2 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

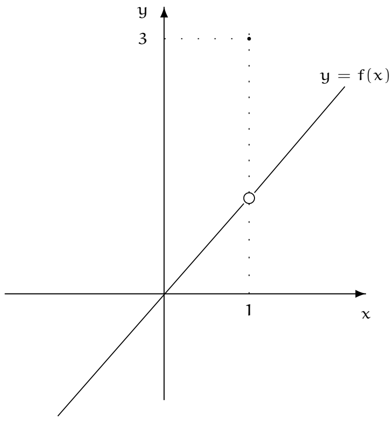
$$f(x) \doteq \begin{cases} x\,, & se \quad x \neq 1 \\ 3\,, & se \quad x = 1 \end{cases} \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calular, caso existam, os seguintes limites laterais

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x).$$

<u>**Resolução:**</u>

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dado pela figura abaixo:



Afirmamos que existe o limite lateral $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1,$$

ou seja, segundo a definição de limites laterais temos que $a = 1$ e $L = 1$.

De fato, dado o número real $\varepsilon > 0$ escolhamos o número real

$$\delta \doteq \varepsilon > 0. \tag{4.10}$$

Logo, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < x - 1 < \delta \tag{4.11}$$

segue que

$$|f(x) - 1| \overset{\text{se } 1<x,\text{ teremos } f(x)=x}{=} |x - 1| \overset{x-1>0}{=} x - 1 \overset{(4.11)}{<} \delta \overset{(4.10)}{=} \varepsilon,$$

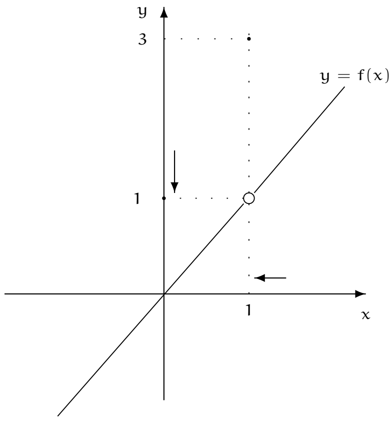
isto é, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < x - 1 < \delta\,, \quad \text{segue que} \quad |f(x) - 1| < \varepsilon,$$

ou seja, existe o limite lateral $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1.$$

Geometricamente temos



Afirmamos que existe o limite lateral $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1,$$

ou seja, segundo a definição de limites laterais temos que $a = 1$ e $L = 1$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ seja

$$\delta \doteq \varepsilon > 0. \tag{4.12}$$

Logo, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$-\delta < x - 1 < 0, \tag{4.13}$$

teremos

$$|f(x) - 1| \overset{\text{se } x<1\text{, segue que } f(x)=x]}{=} |x - 1| \overset{x-1<0}{=} 1 - x \overset{(4.13)}{<} \delta \overset{(4.12}{=} \varepsilon,$$

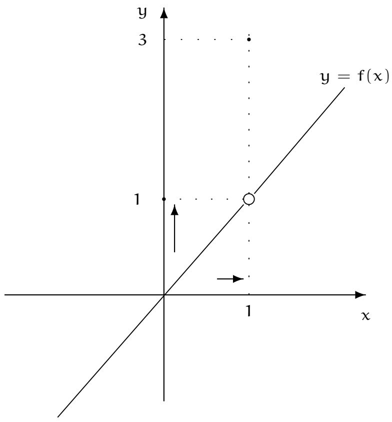
isto é, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$-\delta < x - 1 < 0\,, \quad \text{segue que} \quad |f(x) - 1| < \varepsilon,$$

ou seja, existe o limite lateral $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1.$$

Geometricamente temos:



Observação 4.3.5

1. *No Exercício acima temos que existe o limite da função* $\underline{f}$ *no ponto* $x = 1$ *e*

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Observemos que nos dois Exemplos anteriores existem os limites laterais, são diferentes e* **<u>não</u>** *existe o limite das funções envolvidas no ponto em questão.*

   Já no Exercício acima, os limites laterias além de existirem, são iguais e a função tem limite no ponto em questão e além disso o valor do limite da função no ponto é igual ao valor dos limites laterais da função no ponto em questão.

   Como veremos a seguir isto é um fato geral, a saber:

Proposição 4.3.1 *Sejam* $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* A *e* $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *e*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, e somente se, existem os limites laterais

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

e são iguais a L*, isto é,*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

.

<u>Demonstração:</u>

Suponhamos que exista

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}.$$

Mostremos que existem os limites laterais

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

e são iguais a L.

Dado o número real $\varepsilon > 0$, como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

podemos encontrar um outro número real $\delta > 0$ de modo que, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

ou seja, se $x \in A$ satisfaz

$$-\delta < x - a < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < x - a < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em particular, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < x - a < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

ou se $x \in A$ satisfaz

$$-\delta < x - a < 0\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \varepsilon,$$

ou seja, existem os limites laterais

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

e são iguais a L.

Por outro lado, se existem os limites laterais

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

e são iguais a L então, dado $\varepsilon > 0$, poderemos encontrar dois números reais, que indicaremos por $\delta_+, \delta_- > 0$, de modo que

$$\text{se} \quad 0 < x - a < \delta_+\,,\, x \in A \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \varepsilon, \tag{4.14}$$

e

$$\text{se} \quad -\delta_- < x - a < 0\,,\, x \in A \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{4.15}$$

Escolhamos o número real

$$\delta \doteq \min\{\delta_+, \delta_-\} > 0.$$

Com isto temos que

$$0 < \delta \leq \delta_+,\ \delta_-.$$

Portanto, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \begin{cases} 0 < x - a < \delta \leq \delta_+\,, & \text{logo (4.14) implicará que} \quad |f(x) - L| < \varepsilon. \\ -\delta_- \leq -\delta < x - a < 0\,, & \text{logo (4.15) implicará que} \quad |f(x) - L| < \varepsilon, \end{cases}$$

isto é, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{segue que} \quad |f(x) - L| < \varepsilon,$$

ou seja, existe o limite

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

e seu valor será L, como queríamos demonstrar.

□

Observação 4.3.6 *Com este resultado fica mais fácil mostrar que nos dois primeiros exemplos acima os limites envolvidos* **não** *existem nos valores em questão (pois os respectivos limites laterais existem, mas são diferentes).*

4.4 Propriedades de limites e exemplos

A seguir exibiremos algumas propriedades de limites que serão úteis no cálculo dos mesmos.

Começaremos pelo

Proposição 4.4.1 *(Unicidade do limite) Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A e $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ uma função.*

Se existir o limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

então L será o único com essa propriedade.

Demonstração:

Suponhamos que existe o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e além disso

$$M = \lim_{x\to a} f(x).$$

Mostremos que

$$M = L\,.$$

Para isto, dado o número real $\varepsilon > 0$, como existe o limite

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

podemos encontrar um número real $\delta_1 > 0$ de modo que, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.16}$$

De modo semelhante, como existe o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x\to a} f(x) = M,$$

podemos encontrar um número real $\delta_2 > 0$ de modo que, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.17}$$

Logo, para cada $x \in A \setminus \{a\}$, teremos

$$|L - M| = |L + [-f(x) + f(x)] - M| = |[L - f(x)] + [f(x) - M]| \overset{|a+b|\leq|a|+|b|}{\leq} |L - f(x)| + |f(x) - M|\ .$$

Escolhamos o número real

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Logo, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta \leq \delta_1, \delta_2\,,$$

teremos, da desigualdade obtida acima, que

$$|L - M| \leq |L - f(x)| + |f(x) - M| \overset{(4.16),(4.17)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para cada $\varepsilon > 0$, ou seja,

$$|L - M| < \varepsilon$$

, para cada $\varepsilon > 0$, o que implicará em $M = L$, como queríamos mostrar.

$\square$

Observação 4.4.1

1. *No final da demonstração acima utilizamos o seguinte fato: um número real é zero se, e somente se, ele, em módulo, é menor que qualquer número real maior que zero, isto é,*

$$a = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad |a| < b, \quad \textit{para cada} \quad b > 0.$$

2. *Vale um resultado análogo ao da proposição acima para limites laterais (isto é, se o limite lateral existe ele será único) cujo enunciado e a demonstração serão deixados como exercício para o leitor.*

Outro resultado importante é:

Proposição 4.4.2 *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A e $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ uma função.*

Se existe o limite

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

então a função $\underline{f}$ será limitada no ponto $x = a$.

Demonstração:

Como existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to a} f(x) = L\,,$$

dado o número real $\varepsilon = 1$, poderemos encontrar um outro número real $\delta > 0$ de modo que, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \varepsilon = 1\,. \tag{4.18}$$

Mas se $x \in A$ satisfaz $0 < |x - a| < \delta$ (isto é, $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$), teremos

$$|f(x)| - |L| \overset{|a|-|b| \leq |a-b|}{\leq} |f(x) - L| \overset{(4.18)}{<} 1\,, \quad \text{ou seja,} \quad |f(x)| < |L| + 1\,,$$

mostrando que no conjunto $A \cap (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ a função $\underline{f}$ é limitada, ou seja, a função $\underline{f}$ é limitada no ponto $x = a$, como queríamos mostrar.

□

Observação 4.4.2 *Vale um resultado análogo ao da proposição acima para limites laterais.*

Por exemplo, se o limite lateral pela direita existe então a função será limitada, à direita, do valor em questão, cujos enunciados e a demonstrações serão deixados como exercício para o leitor.

Temos também

Proposição 4.4.3 *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A e $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ uma função.*

Então, existe o limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, e somente se, existe o limite

$$\lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0.$$

Demonstração:

Temos que existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, e somente se, dado o número real $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um outro número real $\delta > 0$, de modo que, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

ou, equivalentemente,

$$|[f(x) - L] - 0| < \varepsilon,$$

isto é, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{segue que} \quad |[f(x) - L] - 0| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0,$$

mostrando equivalência afirmada no resultado.

□

Observação 4.4.3 *Vale um resultado análogo ao da proposição acima para limites laterais cujos enunciados e as demonstrações serão deixados como exercício para o leitor.*

Os próximos resultados tratam do cálculo de limites de algumas funções importantes.

Proposição 4.4.4 *Sejam* $a, b, m \in \mathbb{R}$ *fixos.*
Então

$$\lim_{x \to a} [mx + b] = ma + b,$$

isto é, se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq mx + b, \quad x \in \mathbb{R}$$

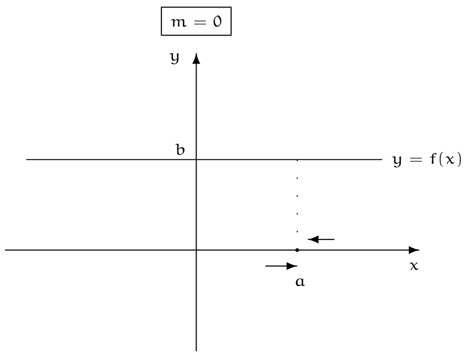
então existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} f(x) = ma + b.$$

Demonstração:

Consideremos primeiramente o caso que $m = 0$.

Neste caso, a representação geométrica do gráfico da função f será dada pela figura abaixo:



Neste caso temos, segundo a definição de limite, que $L = b$.

Logo dado o número real $\varepsilon > 0$ escolhamos o número real $\delta \doteq 1$ (neste caso poderíamos ter escolhido qualquer número real maior que zero).

Assim, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - b| = |(mx + b) - b| \overset{m=0}{=} 0 < \varepsilon,$$

isto é, se $x \in R$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{segue que} \quad |f(x) - (ma + b)| < \varepsilon,$$

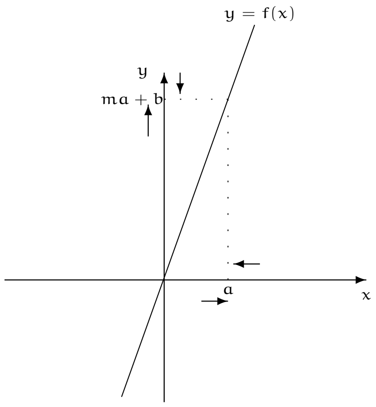
mostrando que

$$\lim_{x \to a}[mx + b] = ma + b\,, \quad \text{quando} \quad m = 0.$$

Consideremos agora o caso que $m \neq 0$.

Neste caso, a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ será dada pela figura abaixo:

$\boxed{m \neq 0}$



Neste caso temos, segundo a definição de limite, que $L \doteq ma + b$.

Logo dado o número real $\varepsilon > 0$ escolhamos o número real

$$\delta \doteq \frac{\varepsilon}{|m|} > 0. \tag{4.19}$$

Se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta \tag{4.20}$$

teremos:

$$\begin{aligned}|f(x) - (ma + b)| &= |(mx + b) - (ma + b)| = |mx - ma| = |m(x - a)| \\ &= |m|\,|x - a| \overset{(4.20)}{<} |m|\delta \overset{(4.19)}{=} |m|\frac{\varepsilon}{|m|} = \varepsilon,\end{aligned}$$

isto é, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{segue que} \quad |f(x) - (ma + b)| < \varepsilon,$$

mostrando que

$$\lim_{x \to a}[mx + b] = ma + b,$$

como queríamos mostrar.

$\square$

Observação 4.4.4 *Em particular, na situação acima, como* $f(a) = ma + b$, *mostramos que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Como consequência imediata da Proposição acima, temos os seguintes resultados:

Corolário 4.4.1 *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$.

Então

$$\lim_{x \to a} b = b,$$

isto é, se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq b, \quad x \in \mathbb{R}$$

então

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Demonstração:

Basta tomar na Proposição acima $m = 0$.

□

Corolário 4.4.2 *Temos*

$$\lim_{x \to a} x = a,$$

isto é, se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq x, \quad x \in \mathbb{R}$$

então

$$\lim_{x \to a} f(x) = a.$$

Demonstração:

Basta tomar na Proposição acima $m = 1$ e $b = 0$.

□

O resultado a seguir nos dá condições suficientes para realizarmos as operações básicas com limites, a saber:

Proposição 4.4.5 *Sejam* $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* A *e* $f, g : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *duas funções.*

Suponhamos que existam os limites $\lim_{x \to a} f(x)$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = M$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = M.$$

Então:

(a) existe o limite $\lim_{x \to a} [f + g](x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} [f + g](x) = L + M,$$

isto é,

$$\lim_{x \to a} [f + g](x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

(b) existe o limite $\lim\limits_{x\to a}[f.g](x)$ *e além disso*

$$\lim_{x\to a}[f.g](x) = L.M,$$

isto é,

$$\lim_{x\to a}[f.g](x) = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right] . \left[\lim_{x\to a} g(x)\right] .$$

(c) se $M \neq 0$*, existe o limite* $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f}{g}\right](x)$ *e além disso*

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f}{g}\right](x) = \frac{L}{M},$$

isto é,

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f}{g}\right](x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Demonstração:

Do item (a):

Dado o número real $\varepsilon > 0$, como existem os limites

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M,$$

podemos encontrar números reais $\delta_1, \delta_2 > 0$ de modo que, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x-a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.21}$$

e se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x-a| < \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.22}$$

Considerarmos

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0.$$

Notemos que se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x-a| < \delta$$

segue que

$$0 < |x-a| < \delta \leq \delta_1 \quad \text{logo, de (4.21), teremos} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.23}$$

$$0 < |x-a| < \delta \leq \delta_2\,, \quad \text{logo, de (4.22), teremos} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.24}$$

Assim, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x-a| < \delta$$

teremos

$$\begin{aligned} |[f+g](x) - (L+M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\overset{|a+b|\leq|a|+|b|}{\leq} |f(x) - L| + |g(x) - M| \overset{(4.23),\,(4.14)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x-a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |[f+g](x) - [L+M]| < \varepsilon,$$

ou seja, existe o limite $\lim\limits_{x\to a}[f+g](x)$ e além disso

$$\lim_{x\to a}[f+g](x) = L + M.$$

Do item (b):

Dado o número real $\varepsilon > 0$, como existe o limite $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, pela Proposição (4.4.2), segue que a função $\underline{g}$ será limitada no ponto $x = a$, isto é, podemos encontrar um número real $\delta_1 > 0$ e $K > 0$ de modo que, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x-a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |g(x)| \leq K. \tag{4.25}$$

Além disso, como existem os limites

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M,$$

podemos encontrar números reais $\delta_2, \delta_3 > 0$ tais que, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x-a| < \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2K} \tag{4.26}$$

e se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x-a| < \delta_3\,, \quad \text{teremos} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2[|L|+1]}. \tag{4.27}$$

Escolhamos o número real

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0.$$

Logo, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x-a| < \delta$$

teremos

$$0 < |x-a| < \delta \leq \delta_1\,, \quad \text{logo, de (4.25), teremos} \quad |g(x)| \leq K; \tag{4.28}$$

$$0 < |x-a| < \delta \leq \delta_2\,, \quad \text{logo, de (4.26), teremos} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2K}; \tag{4.29}$$

$$0 < |x-a| < \delta \leq \delta_3\,, \quad \text{logo, de (4.27), teremos} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2[|L|+1]}, \tag{4.30}$$

assim, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x-a| < \delta\,,$$

segue que

$$\begin{aligned}
|[f.g](x) - L.M| &= |f(x).g(x) - L.g(x) + L.g(x) - LM| \overset{|a+b|\leq|a|+|b|}{\leq} |f(x).g(x) - L.g(x)| + |L.g(x) - LM| \\
&= |[f(x) - L].g(x)| + |L[g(x) - M]| = |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M| \\
&\overset{(4.28),(4.29),(4.30)}{<} \frac{\varepsilon}{2K}.K + |L|\frac{\varepsilon}{2[|L|+1]} \overset{[\frac{|L|}{|L|+1}<1]}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

isto é, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x-a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |[f.g](x) - [L.M]| < \varepsilon,$$

ou seja, existe o limite $\lim\limits_{x\to a}[f.g](x)$ e além disso

$$\lim_{x\to a}[f.g](x) = L.M.$$

Do item (c):

Se mostrarmos que

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{g}\right](x)=\frac{1}{M},$$

utilizando-se o item (b), teremos que

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f}{g}\right](x)=\lim_{x\to a}\left[f.\frac{1}{g}\right](x)\overset{\text{item (b)}}{=}L.\frac{1}{M}=\frac{L}{M}.$$

Dado o número real $\varepsilon>0$, como existe o limite

$$\lim_{x\to a}g(x)=M,$$

podemos encontrar os números reais $\delta_1,\delta_2>0$ de modo que, se $x\in A$ satisfaz

$$0<|x-a|<\delta_1,\quad \text{teremos}\quad |g(x)|\leq\frac{|M|}{2}, \tag{4.31}$$

$$0<|x-a|<\delta_2,\quad \text{teremos}\quad |g(x)-M|\leq\frac{\varepsilon|M|^2}{2} \tag{4.32}$$

(no caso acima, para obter (4.31)), tomamos da definição do limite $\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$, $\varepsilon=\dfrac{|M|}{2}$; verifique!).

Logo

$$|M|-|g(x)|\leq|M-g(x)|=|g(x)-M|\overset{(4.31)}{<}\frac{|M|}{2}.$$

Assim, como $M\neq 0$, teremos

$$|g(x)|>\frac{2}{|M|},$$

ou seja, se $x\in A$ satisfaz

$$0<|x-a|<\delta_1,\quad \text{teremos}\quad \frac{1}{|g(x)|}<\frac{2}{|M|}. \tag{4.33}$$

Vale observar que será mostrado mais adiante (ver Teorema (4.4.1)) que se $M\neq 0$, então $g(x)\neq 0$ em uma vizinhança do ponto $\underline{a}$, excetuando-se o ponto $x=a$.

Tomemos

$$\delta\doteq\min\{\delta_1,\delta_2\}>0.$$

Logo, se $x\in A$ satisfaz

$$0<|x-a|<\delta,\quad \text{teremos}\quad 0<|x-a|<\delta\leq\delta_1,\ \delta_2,$$

assim

$$\left|\left[\frac{1}{g}\right](x)-\frac{1}{M}\right|=\left|\frac{M-g(x)}{g(x).M}\right|=\frac{|g(x)-M|}{|g(x)|.|M|}\overset{(4.33)}{<}2\frac{|g(x)-M|}{|M|.|M|}$$
$$\overset{(4.32)}{<}\frac{2}{|M|^2}\frac{\varepsilon|M|^2}{2}=\varepsilon,$$

isto é, se $x\in A$ satisfaz

$$0<|x-a|<\delta,\quad \text{teremos}\quad \left|\frac{1}{g}(x)-\frac{1}{M}\right|\leq\varepsilon,$$

ou seja, existe o limite $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{1}{g}\right](x)$ e além disso

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{1}{g}\right](x) = \frac{1}{M}$$

completando a demonstração da Proposição.

$\square$

Como consequência do resultado acima temos o

Corolário 4.4.3 *Com as hipóteses da Proposição acima temos que existe o limite* $\lim\limits_{x \to a}[f - g](x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a}[f - g](x) = L - M,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to a}[f - g](x) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x).$$

Demonstração:

Observemos que

$$[f - g](x) = \{f + [(-1).g]\}(x), \quad x \in A \setminus \{a\}.$$

Logo, dos itens (a), (b) da Proposição acima e do Corolário (4.4.1), segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a}[f - g](x) &= \lim_{x \to a}\{f + [(-1).g]\}(x) \overset{\text{item (a)}}{=} \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a}[(-1).g](x) \\
&\overset{\text{item (b)}}{=} \lim_{x \to a} f(x) + \left[\lim_{x \to a}(-1)\right].\left[\lim_{x \to a} g(x)\right] \overset{\text{Corolário (4.4.1)}}{=} \lim_{x \to a} f(x) + (-1).\lim_{x \to a} g(x) \\
&= \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x),
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

$\square$

Observação 4.4.5 *Valem as mesmas propriedades dadas pela proposição acima para limites laterais.*

Deixaremos como exercício para o leitor enunciá-las e demonstrá-las,

Podemos generalizar a Proposição acima, a saber:

Corolário 4.4.4 *Sejam,* $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* A *e* $f_1, \cdots, f_n : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *funções.*

Suponhamos que existam os limites

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1, \cdots, \lim_{x \to a} f_n(x) = L_n.$$

Então:

(a) existe o limite o limite $\lim\limits_{x \to a}[f_1 + \cdots + f_n](x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a}[f_1 + \cdots + f_n](x) = L_1 + \cdots + L_n,$$

isto é,

$$\lim_{x \to a}[f_1 + \cdots + f_n](x) = \lim_{x \to a} f_1(x) + \cdots + \lim_{x \to a} f_n(x).$$

(b) existe o limite o limite $\lim\limits_{x\to a}[f_1.\cdots.f_n](x)$ *e além disso*

$$\lim_{x\to a}[f_1.\cdots.f_n](x) = L_1.\cdots.L_n,$$

isto é,

$$\lim_{x\to a}[f_1.\cdots.f_n](x) = \left[\lim_{x\to a} f_1(x)\right].\cdots.\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right].$$

Demonstração:

A demonstração é feita utilizando-se indução finita e a Proposição acima.

Do item (a):

A Proposição acima, item (a), garante que, para $n = 2$, a afirmação é verdadeira.

Suponhamos que a afirmação é verdadeira para $n = k$ e provemos que o mesmo ocorrerá para $n = k + 1$.

Observemos que, pela hipótese de indução, temos que existe o limite

$$\lim_{x\to a}[f_1 + \cdots + f_k](x)$$

e além disso,

$$\lim_{x\to a}[f_1 + \cdots + f_k](x) = L_1 + \cdots + L_k.$$

Logo, da Proposição acima item (a), segue que existirá o limite

$$\lim_{x\to a}\{[f_1 + \cdots + f_k] + f_{k+1}\}(x)$$

e além disso

$$\lim_{x\to a}\{[f_1 + \cdots + f_k] + f_{k+1}\}(x) = [L_1 + \cdots + L_k] + L_{k+1},$$

ou seja, existirá o limite

$$\lim_{x\to a}[f_1 + \cdots + f_k + f_{k+1}](x)$$

e teremos que

$$\lim_{x\to a}[f_1 + \cdots + f_{k+1}](x) = L_1 + \cdots + +L_{k+1},$$

como queríamos mostrar.

Do item (b):

A Proposição acima, item (b), garante que, para $n = 2$, a afirmação é verdadeira.

Suponhamos que a afirmação é verdadeira para $n = k$ e provemos que o mesmo ocorrerá para $n = k + 1$.

Observemos que, pela hipótese de indução, temos que existe o limite

$$\lim_{x\to a}[f_1.\cdots.f_k](x)$$

e além disso,

$$\lim_{x\to a}[f_1.\cdots.f_k](x) = L_1.\cdots.L_k.$$

Logo, da Proposição acima item (b), segue que existe o limite

$$\lim_{x\to a}\{[f_1.\cdots.f_k].f_{k+1}\}(x)$$

e além disso

$$\lim_{x\to a}\{[f_1.\cdots.f_k].f_{k+1}\}(x) = [L_1.\cdots.L_k].L_{k+1},$$

ou seja, existirá o limite

$$\lim_{x \to a} [f_1 . \cdots . f_k . f_{k+1}](x)$$

e teremos que

$$\lim_{x \to a} [f_1 . \cdots . f_{k+1}](x) = L_1 . \cdots . L_{k+1},$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.4.6 *Valem as mesmas propriedades obtidas pela proposição acima para limites laterais.*

Deixaremos como exercício para o leitor enunciá-las e demonstrá-las,

Uma consequência do Corolário acima é dado pelo:

Corolário 4.4.5 *Sejam,* $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* A *e* $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *função.*

Suponhamos que exista o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ *e*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Então existe o limite

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n$$

e além disso,

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n,$$

isto é,

$$\lim_{x \to a} f^n(x) = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^n.$$

Demonstração:

Basta definir $f_1, f_2, \cdots, f_n : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) \doteq f(x), \quad x \in A \setminus \{a\}$$

e aplicar o Corolário acima, item (b).

□

Observação 4.4.7 *Valem as mesmas propriedades dadas pela proposição acima para limites laterais.*

Deixaremos como exercício para o leitor enunciá-las e demonstrá-las,

A seguir exibiremos alguns outros resultados gerais de limites.

Começaremos pela

Teorema 4.4.1 *(Teorema da conservação do sinal) Sejam* $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* A *e* $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *função.*

Suponhamos que exista o limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \neq 0.$$

Então podemos encontrar $\delta > 0$ *de modo que, para cada* $x \in A \cap (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ *temos que* $f(x)$ *tem o mesmo sinal de* L.

<u>**Demonstração:**</u>

Como existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \neq 0, \, ,$$

dado o número real $\varepsilon \doteq \dfrac{|L|}{2} > 0$ (pois $L \neq 0$) podemos encontrar um outro número real $\delta > 0$ tal que, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta \,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| \leq \varepsilon = \frac{|L|}{2},$$

ou, equivalentemente,

$$-\frac{|L|}{2} < f(x) - L < \frac{|L|}{2},$$

ou ainda,

$$L - \frac{|L|}{2} \overset{(1)}{<} f(x) \overset{(2)}{<} L + \frac{|L|}{2}.$$

Se $L > 0$ segue que $|L| = L$, logo, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta \,,$$

teremos, por (1), que

$$0 < \frac{L}{2} = L - \frac{L}{2} \overset{L=|L|}{=} L - \frac{|L|}{2} < f(x).$$

Por outro lado, se $L < 0$ segue que $|L| = -L$, logo, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta \,,$$

teremos, por (2), que

$$f(x) < L + \frac{|L|}{2} \overset{-L=|L|}{=} L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} < 0,$$

mostrando, em ambos os casos, que para $x \in A \cap (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ temos que o número real $f(x)$ tem o mesmo sinal de L, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.4.8 *Valem as mesmas propriedades obtidas pelo teorema acima para limites laterais.*

Deixaremos como exercício para o leitor enunciá-las e demonstrá-las,

Como consequência temos o

Corolário 4.4.6 *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A e $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ função tal que*

$$f(x) \geq 0 \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A \setminus \{a\}$$

(respectivamente, $f(x) \leq 0$, para $x \in A \setminus \{a\}$).

Suponhamos que exista o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Então teremos

$$L \geq 0$$

(respectivamente, $L \leq 0$).

Demonstração:

Suponhamos que

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para} \quad x \in A \setminus \{a\}. \tag{4.34}$$

Mostremos que $L \geq 0$.

Vamor supor, por absurdo, que $L < 0$.

Logo do Teorema da Conservação do Sinal (isto é, Teorema (4.4.1)) segue que podemos encontrar um número real $\delta > 0$ tal que

$$f(x) < 0\,, \quad \text{para} \quad x \in A \cap (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$$

o que contraria a hipótese (4.34).

Logo deveremos ter $L \geq 0$.

Será deixado como exercício para o leitor mostrar que se $f(x) \leq 0$, para $x \in A \setminus \{a\}$, então deveremos ter $L \leq 0$.

□

Temos também a

Teorema 4.4.2 *(Teorema da comparação) Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A e $f, g : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ funções que satisfazem*

$$f(x) \leq g(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in A \setminus \{a\}. \tag{4.35}$$

Suponhamos que existam os limites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \textit{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = M.$$

Então

$$L \leq M,$$

isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que $L > M$, isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) > \lim_{x \to a} g(x),$$

ou seja,

$$0 < \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) \overset{\text{Corolário (4.4.3)}}{=} \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)].$$

Logo,do Teorema da Convervação do Sinal (isto é, Teorema (4.4.1)), segue que podemos encontrar um número real $\delta > 0$, de modo que, se $x \in A$ satisfaz

$$0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad 0 < f(x) - g(x), \quad \text{isto é}, \quad g(x) < f(x),$$

o que contraria (4.35).

Portanto $L \leq M$, ou ainda,

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x),$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.4.9 *Valem as mesmas propriedades obtidas pelo teorema acima para limites laterais.*

Deixaremos como exercício para o leitor enunciá-las e demonstrá-las,

Outro resultado importante é o

Teorema 4.4.3 *(Teorema do confronto ou do sanduiche) Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A e $f, g, h : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ funções que satisfazem*

$$f(x) \overset{(1)}{\leq} g(x) \overset{(2)}{\leq} h(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in A \setminus \{a\}.$$

Suponhamos que existam os limites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} h(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L.$$

Então existirá o limite $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

<u>**Demonstração:**</u>

Dado um número real $\varepsilon > 0$, como existem os limites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} h(x)$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

podemos encontrar números reais $\delta_1, \delta_2 > 0$ de modo que, se $x \in A$ e

$$0 < |x - a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \varepsilon, \quad \text{ou seja,} \quad -\,\varepsilon \overset{(3)}{<} f(x) - L < \varepsilon,$$
$$0 < |x - a| < \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad |h(x) - L| < \varepsilon, \quad \text{ou seja,} \quad -\,\varepsilon < h(x) - L \overset{(4)}{<} \varepsilon.$$

Escolhamos o número real

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0.$$

Logo, se $x \in A$ e

$$0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{teremos:}$$
$$0 < |x - a| < \delta \leq \delta_1\,, \quad \text{(3) e (1) implicarão} \quad -\,\varepsilon < f(x) - L \leq g(x) - L, \tag{4.36}$$
$$0 < |x - a| < \delta \leq \delta_2\,, \quad \text{(2) e (4) implicarão} \quad g(x) - L \leq h(x) - L < \varepsilon. \tag{4.37}$$

Logo (4.36) e (4.37) implicarão que, se $x \in A$ e

$$0 < |x - a| < \delta\,, \qquad \text{teremos} \quad -\,\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon, \quad \text{ou seja,} \quad |g(x) - L| < \varepsilon,$$

mostrando que o existe o limite $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to a} g(x) = L,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.4.10 *Valem as mesmas propriedades dadas obtidas pelo teorema acima para limites laterais.*

Deixaremos como exercício para o leitor enunciá-las e demonstrá-las.

Para o próximo resultado é conveniente introduzirmos a seguinte definição:

Definição 4.4.1 *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A e $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ uma função.*

Diremos que a função $\underline{f}$ é um **infinitésimo no ponto $x = a$** *se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

A seguir temos alguns exemplos de funções que são infinitésimos no ponto $x = a$.

Exercício 4.4.1

1. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada por*

$$f(x) \doteq x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

então a função $\underline{f}$ é um infinitésimo no ponto $x = -1$.

De fato, pois

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (x + 1) \overset{\text{Prop. (4.4.5) item (a)}}{=} \lim_{x \to -1} x + \lim_{x \to -1} 1 \overset{\text{Cor. (4.4.1) e (4.4.2)}}{=} -1 + 1 = 0.$$

2. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada por*

$$f(x) \doteq x^2 - 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

então a função $\underline{f}$ é um infinitésimo no ponto $x = 2$ (e no ponto $x = -2$).

De fato, pois

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \left(x^2 - 4\right) \overset{\text{Prop. (4.4.5) item (a)}}{=} \lim_{x \to 2} x^2 - \lim_{x \to 2} 4 \overset{\text{Cor. (4.4.1), (4.4.4) e (4.4.2)}}{=} 2^2 - 4 = 0.$$

De modo semelhante temos que $\lim_{x \to -2} f(x) = 0$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Com isto temos a

Proposição 4.4.6 *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A e $f, g : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ duas funções.*

Suponhamos que a função $\underline{f}$ é um infinitésimo no ponto $x = a$ e a função $\underline{g}$ é limitada no ponto $x = a$.

Então a função $f.g$ será um infinitésimo no ponto $x = a$, ou seja,

$$\lim_{x \to a} (f.g)(x) = 0.$$

Demonstração:

Como a função $\underline{g}$ é limitada no ponto $x = a$, existirão números reais δ_1, $K > 0$, de modo que, se $x \in A$ e

$$0 < |x - a| < \delta_1, \quad \text{teremos} \quad |g(x)| \leq K. \tag{4.38}$$

Dado o número real $\varepsilon > 0$, como a função $\underline{f}$ é um infinitésimo no ponto $x = a$, segue podemos encontrar um outro número real $\delta_2 > 0$, de modo que, se $x \in A$ e

$$0 < |x - a| < \delta_2, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{K}. \tag{4.39}$$

Consideremos

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0.$$

Notemos que se $x \in A$ e

$$0 < |x - a| < \delta \leq \delta_1, \, \delta_2,$$

teremos

$$|(f.g)(x) - 0| = |f(x)|\,|g(x)| \overset{(4.38)}{\leq} |f(x)|\,K \overset{(4.39)}{<} \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon,$$

isto é, se $x \in A$ e

$$0 < |x - a| < \delta, \quad \text{teremos} \quad |(f.g)(x)| \leq \varepsilon,$$

mostrando que

$$\lim_{x \to a} (f.g)(x) = 0,$$

ou seja, a função $f.g$ é um inifinitésimo no ponto $x = a$, como queríamos mostrar.

$\square$

Observação 4.4.11

1. *Poderíamos ter utilizado o Teorema do Sanduiche para obter o resultado acima.*

   De fato, como a função $\underline{g}$ é limitada em $x = a$, existirão constantes $\delta, K > 0$ tal que

   $$|g(x)| \leq K, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}.$$

   Assim teremos

   $$|(f.g)(x)| \leq K|f(x)|, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\},$$

   ou seja, para $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ teremos

   $$-K\,f(x) \leq (f.g)(x) \leq K\,f(x).$$

   Notemos que

   $$\lim_{x \to a} [-K\,f(x)] = \lim_{x \to a} [K\,f(x)] = 0.$$

   Logo, do Teorema do Sanduiche, segue que

   $$\lim_{x \to a} (f.g)(x)] = 0,$$

   como queríamos demonstrar.

2. *Valem as mesmas propriedades obtidas pelo teorema acima para limites laterais.*

   Deixaremos como exercício para o leitor enunciá-las e demonstrá-las.

O resultado a seguir será exibido sem demonstração.

Proposição 4.4.7 *Sejam,* $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* A *e* $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *função tal que* $f(x) \geq 0$, *para cada* $x \in A \setminus \{a\}$.

Suponhamos que exista o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *e*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

(o Corolário (4.4.6) implicará que $L \geq 0$*).*

Então existe o limite $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)}$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L},$$

isto é,

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}.$$

Demonstração:

Sua demonstração será feita mais adiante.

$\square$

A seguir aplicaremos as propriedades acima para o estudo de alguns limites de funções conhecidas.

Exemplo 4.4.1 *Calcular, se existir, o seguinte limite*

$$\lim_{x \to 1} \left(2x^2 - 4x + 3\right).$$

Resolução:

Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \left(2x^2 - 4x + 3\right) &\overset{\text{Cor. (4.4.4) item (a)}}{=} \lim_{x \to 1} \left(2.x^2\right) - \lim_{x \to 1} (4.x) + \lim_{x \to 1} 3 \overset{\text{Cor. (4.4.4) item (b)}}{=} \\
&= \left(\lim_{x \to 1} 2\right) . \left(\lim_{x \to 1} x\right) . \left(\lim_{x \to 1} x\right) - \left(\lim_{x \to 1} 4\right) . \left(\lim_{x \to 1} x\right) + \lim_{x \to 1} 3 \overset{\text{Cor. (4.4.1) e (4.4.2) item (b)}}{=} \\
&= 2.1.1 - 4.1 + 3 = 1,
\end{aligned}$$

logo existe o limite $\lim\limits_{x \to 1} \left(2x^2 - 4x + 3\right)$ e além disso

$$\lim_{x \to 1} \left(2x^2 - 4x + 3\right) = 1.$$

Observação 4.4.12

1. *No exemplo acima, se definirmos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *por*

   $$f(x) \doteq 2x^2 - 4x + 3, \quad x \in \mathbb{R},$$

   então mostramos que

   $$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

2. *Se* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função polinomial e* $a \in \mathbb{R}$ *então segue do Corolário (4.4.4) que existe o limite* $\lim_{x \to a} p(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a).$$

De fato, sabemos que

$$p(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

para $a_o, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ *fixados.*

Assim existe o limite $\lim_{x \to a} p(x)$ *e além disso*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} p(x) &= \lim_{x \to a} \left(a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \right) \\
&\overset{\text{Corolário (4.4.4) item (a)}}{=} \lim_{x \to a} a_o + \lim_{x \to a} (a_1 x) + \lim_{x \to a} \left(a_2 x^2 \right) + \cdots + \lim_{x \to a} (a_n x^n) \\
&\overset{\text{Corolário (4.4.4) item (b)}}{=} \lim_{x \to a} a_o + \left(\lim_{x \to a} a_1 \right) . \left(\lim_{x \to a} x \right) + \left(\lim_{x \to a} a_2 \right) . \left(\lim_{x \to a} x^2 \right) \\
&\quad + \cdots + \left(\lim_{x \to a} a_n \right) . \left(\lim_{x \to a} x^n \right) \\
&\overset{\text{Corolário (4.4.5)}}{=} \lim_{x \to a} a_o + \left(\lim_{x \to a} a_1 \right) . \left(\lim_{x \to a} x \right) + \left(\lim_{x \to a} a_2 \right) . \left(\lim_{x \to a} x \right)^2 \\
&\quad + \cdots + \left(\lim_{x \to a} a_n \right) . \left(\lim_{x \to a} x \right)^n \\
&\overset{\text{Corolários (4.4.1) e (4.4.2)}}{=} a_o + a_1 . a + a_2 . a^2 \cdots + a_n . a^n \\
&= p(a),
\end{aligned}$$

completando a demonstração da afirmação.

3. *Se* $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ *é uma função racional e* $a \in \mathrm{Dom}(f)$ *então segue do Corolário (4.4.4) que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

De fato, sabemos que

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad x \in \mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R};\, q(x) \neq 0\}$$

onde $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções polinomiais.*

Assim, se $a \in \mathrm{Dom}(f)$ *temos que* $q(a) \neq 0$ *e assim, do item acima e da Proposição (4.4.5) item 3, segue que existe o limite* $\lim_{x \to a} f(x)$ *e*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} \overset{q(a) \neq 0}{=} \frac{\lim_{x \to a} p(x)}{\lim_{x \to a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a).$$

Exemplo 4.4.2 *Calcular, se existir, o seguinte limite*

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^3 + x^2}{x + 4}}.$$

Resolução:

Temos que

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x+4}} \overset{\text{Prop. (4.4.7)}}{=} \sqrt{\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3+x^2}{x+4}\right)} \overset{\text{Prop. (4.4.5) item (c)}}{=} \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 2} x^3 + \lim\limits_{x\to 2} x^2}{\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 4}}$$

$$\overset{\text{Cor. (4.4.4) item (b)}}{=} \sqrt{\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^3 + \left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^2}{\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 4}} \overset{\text{Cor. (4.4.1) e (4.4.2))}}{=} \sqrt{\frac{2^3+2^2}{2+4}} = \sqrt{2},$$

logo existe o limite $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^3+x^2}{x+4}}$ e além disso

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x+4}} = \sqrt{2}.$$

Observação 4.4.13 *No exemplo acima, se definirmos a função* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ *por*

$$f(x) \doteq \sqrt{\frac{x^3+x^2}{x+4}}, \quad x\in(0,\infty),$$

então mostramos que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2).$$

Exemplo 4.4.3 *Calcular, se existir, o seguinte limite*

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}.$$

Resolução:

Observemos que o limite do denominador é zero, isto é,

$$\lim_{x\to 3}(x-3) = 0\,.$$

Assim <u>**não**</u> podemos aplicar a Proposição (4.4.5) item (c).

Para resolver este problema notamos que

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \overset{x\neq 3}{=} \lim_{x\to 3}(x+3) \overset{\text{Prop. (4.4.5) item (a)}}{=} \lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 3$$

$$\overset{\text{Cor. (4.4.1) e (4.4.2))}}{=} 3+3 = 6,$$

logo, existe o limite $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ e além disso

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6.$$

Observação 4.4.14

1. *A propriedade que utilizamos no exemplo acima é que quando estamos calculando um limite de uma função em um certo ponto, **não** interessa o que ocorre com a função no próprio ponto.*

2. *No exemplo acima, se definirmos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \textit{para cada} \quad x \neq 3 \\ 6, & \textit{para} \quad x = 3 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

então mostramos que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

3. *Se* $a, b \in \mathbb{R}$, *a expressão* $(a+b)$ *é denominada* **conjudada algébrica** *da expressão* $(a-b)$.

Exemplo 4.4.4 *Calcular, se existir, o seguinte limite*

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}.$$

Resolução:

Observemos que o limite do denominador é zero, isto é,

$$\lim_{x \to 1}(x-1) = 0.$$

Assim **não** podemos aplicar a Proposição (4.4.5) item (c).

Para resolver este problema utilizaremos o conjugado algébrico da expressão $(\sqrt{x}-1)$, isto é, a expressão $(\sqrt{x}+1)$, mais precisamente:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \overset{\sqrt{x}+1 \neq 0}{=} \lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} . \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$\overset{x \neq 1}{=} \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} \overset{\text{Prop. (4.4.5) item (c)}}{=} \frac{\lim\limits_{x \to 1} 1}{\lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x}+1)} \overset{\text{Prop. (4.4.5) item (a)}}{=} \frac{\lim\limits_{x \to 1} 1}{\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} + \lim\limits_{x \to 1} 1}$$

$$\overset{\text{Pro. (4.4.7)}}{=} \frac{\lim\limits_{x \to 1} 1}{\sqrt{\lim\limits_{x \to 1} x} + \lim\limits_{x \to 1} 1} \overset{\text{Cor. (4.4.1) e (4.4.2))}}{=} \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

logo existe o limite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ e além disso

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

Observação 4.4.15 *No exemplo acima, se definirmos a função* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & \textit{para cada} \quad x \neq 1 \\ \\ \dfrac{1}{2}, & \textit{para} \quad x = 1 \end{cases}, \quad x \in [0, \infty),$$

então mostramos que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Exemplo 4.4.5 *Mostre que que existe o limite* $\lim\limits_{x\to 0}[(x-2)\,\mathrm{sen}(x)]$ *e além disso*

$$\lim_{x\to 2}[(x-2)\,\mathrm{sen}(x)] = 0.$$

Resolução:

Consideremos as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) \doteq x - 2 \quad \text{e} \quad g(x) \doteq \mathrm{sen}(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que a função $\underline{f}$ é um infinitésimo em $x = 2$, pois

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x-2) = 0.$$

Além disso a função $\underline{g}$ é uma função limitada em $\mathbb{R}$, pois

$$|g(x)| = |\,\mathrm{sen}(x)| \leq 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

em particular, ela será uma função limitada no ponto $x = 2$.

Logo, pela Proposição (4.4.6), segue que a função $(f.g)$ será um infinitésimo no ponto $x = 2$, isto é,

$$\lim_{x\to 2}[(x-2)\,\mathrm{sen}(x)] = \lim_{x\to 2}(f.g)(x) = 0.$$

Exemplo 4.4.6 *Mostre que existe o limite* $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{sen}(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{sen}(x) = 0.$$

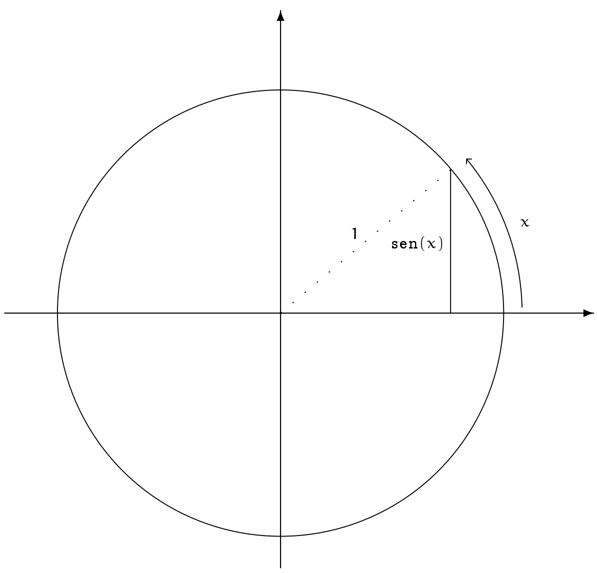
Resolução:

Como $x \to 0$ podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Observemos que se $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ então (veja figura abaixo).

$$|\,\mathrm{sen}(x)| \leq |x|. \tag{4.40}$$



Logo, dado o número real $\varepsilon > 0$ (podemos supor, sem perda de generalidade, que $\varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) escolhamos o número real

$$\delta \doteq \varepsilon > 0.$$

Assim, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < \underbrace{|x - 0|}_{=|x|} < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad \underbrace{|\operatorname{sen}(x) - 0|}_{=|\operatorname{sen}(x)|} = |\operatorname{sen}(x)| \overset{(4.40)}{\leq} |x| < \delta = \varepsilon,$$

isto é, se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$0 < |x - 0| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |\operatorname{sen}(x) - 0| < \varepsilon,$$

ou seja, existe o limite $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0,$$

como queríamos mostrar.

Observação 4.4.16 *Observemos que se considerarmos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

então o Exemplo acima garante que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Como consequência temos

Exemplo 4.4.7 *Mostre que que existe o limite $\lim\limits_{x \to 0} \left[\operatorname{sen}^2(x)\right]$ e além disso*

$$\lim_{x \to 0} \left[\operatorname{sen}^2(x)\right] = 0.$$

Resolução:

Basta observar que

$$\lim_{x \to 0} \left[\operatorname{sen}^2(x)\right] = \lim_{x \to 0} [\operatorname{sen}(x).\operatorname{sen}(x)] \overset{\text{Prop. (4.4.5) item (b)}}{=} \left[\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x)\right] . \left[\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x)\right]$$
$$\overset{\text{Exemplo (4.4.6)}}{=} 0.0 = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to 0} \left[\operatorname{sen}^2(x)\right] = 0,$$

ou seja, existe o limite $\lim\limits_{x \to 0} \left[\operatorname{sen}(x)^2\right]$ e além disso

$$\lim_{x \to 0} \left[\operatorname{sen}^2(x)\right] = 0,$$

Com isto temos

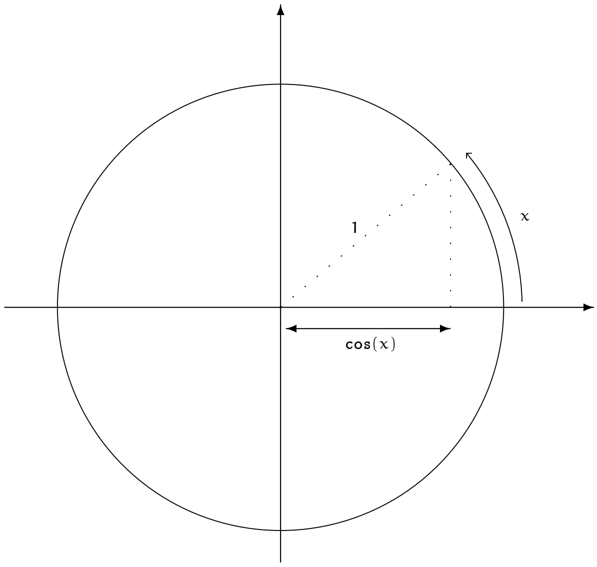
Exemplo 4.4.8 *Mostre que existe o limite $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x)$ e além disso*

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1.$$

<u>**Resolução:**</u>

Como $x \to 0$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, o que implicará em (veja figura abaixo)

$$0 \leq \cos(x), \quad \text{ou seja,} \quad \cos(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(x)}. \tag{4.41}$$



Logo

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) \overset{(4.41)}{=} \lim_{x \to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(x)} \overset{\text{Prop. (4.4.7)}}{=} \sqrt{\lim_{x \to 0} \left[1 - \operatorname{sen}^2(x)\right]} \overset{\text{Prop. (4.4.5) item (a)}}{=}$$
$$= \sqrt{\lim_{x \to 0} 1 - \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}^2(x)} \overset{\text{Exemplo (4.4.7)}}{=} \sqrt{\lim_{x \to 0} 1 - 0} = 1,$$

mostrando que existe o limite $\lim_{x \to 0} \cos(x)$ e além disso que

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1,$$

como queríamos mostrar.

Observação 4.4.17 *Observemos que se considerarmos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

então o Exemplo acima garante que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

4.5 1.o Limite Fundamental e exemplos

Teorema 4.5.1 *(1.o Limite Fundamental) Existe o limite $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ e além disso*

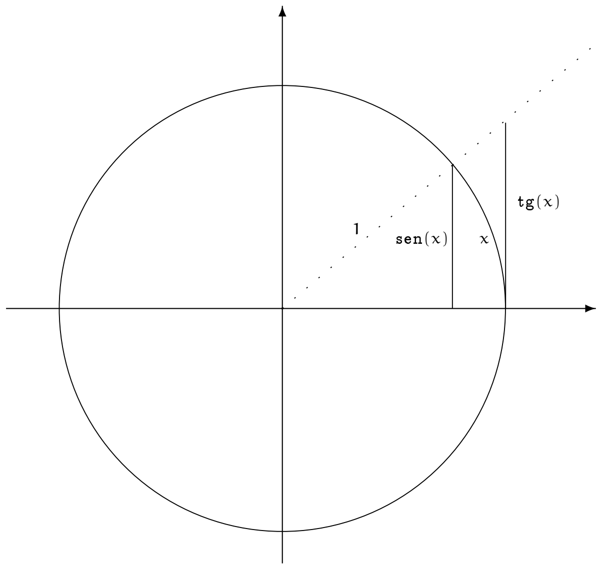
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1. \tag{4.42}$$

Demonstração:

Como $x \to 0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$.
Neste caso temos a seguinte desigualdade (veja figura abaixo):

$$|\operatorname{sen}(x)| \leq |x| \leq |\operatorname{tg}(x)|, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}. \tag{4.43}$$

Geometricamente temos:



Notemos que se

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}, \quad \text{segue que} \quad |\operatorname{sen}(x)| > 0.$$

Logo, dividindo a expressão (4.43) por $|\operatorname{sen}(x)|$ (que é maior que zero) obteremos:

$$\frac{|\operatorname{sen}(x)|}{|\operatorname{sen}(x)|} \leq \frac{|x|}{|\operatorname{sen}(x)|} \leq \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{|\cos(x)|} \frac{1}{|\operatorname{sen}(x)|},$$

ou seja,

$$1 \leq \frac{|x|}{|\operatorname{sen}(x)|} \leq \frac{1}{|\cos(x)|}, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}. \tag{4.44}$$

Lembremos que

$$\text{se} \quad 0 < a < b, \quad \text{então} \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Utilizando este fato na desigualdade (4.44) obteremos:

$$1 \geq \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{|x|} \geq |\cos(x)|, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}. \tag{4.45}$$

Notemos também que se

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}, \quad \text{teremos} \quad \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} > 0 \quad \text{e} \quad \cos(x) > 0,$$

pois se $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$, teremos que $\operatorname{sen}(x)$ e $\underline{x}$ têm o mesmo sinal e $\cos(x) > 0$.

Logo (4.45) tornar-se-á

$$\cos(x) \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}. \tag{4.46}$$

Observemos que se definirmos as funções $f, h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) \doteq \cos(x), \quad h(x) \doteq 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\},$$

então, de (4.46), obteremos

$$f(x) \leq \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\doteq g(x)} \leq h(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}.$$

Mas como vimos anteriormente,

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \cos(x) \overset{\text{Exemplo (4.4.8)}}{=} 1.$$

Logo segue, do Teorema do Sanduiche (isto é, Teorema (4.4.3)), que existe o limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ e além disso

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1,$$

isto é,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1,$$

como queríamos mostrar.

□

A seguir aplicaremos este fato para calcularmos alguns limites que não são possíveis de calcular com as propriedades básicas desenvolvidas na seção anterior.

Exemplo 4.5.1 *Calcular, se existir, o seguite limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x}.$$

Resolução:

Observemos que não podemos aplicar as propriedades básicas desenvolvidas na seção anterior (pois o limite do denominador é zero, ou seja, $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$).

Para tentar resolver vejamos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} . \frac{1}{\cos(x)}\right] = \left[\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right] . \left[\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)}\right] =$$

$$= \left[\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right] . \left[\frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} \cos(x)}\right] \overset{\text{1.o Lim. Fund. e Exemplo (4.4.8)}}{=} 1.1 = 1.$$

Portanto existe o limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x}$ e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = 1.$$

Para o próximo exemplo precisaremos do seguinte resultado:

Proposição 4.5.1 *Sejam* A, B *intervalos abertos de* $\mathbb{R}$, $a \in A$, $b \in B$, $g : A \backslash \{a\} \to B$ *e* $f : B \backslash \{b\} \to \mathbb{R}$ *funções.*

Suponhamos que existam os limites $\lim_{x \to a} g(x)$, $\lim_{y \to b} f(y)$ *e*

$$\lim_{x \to a} g(x) = b \in B \quad e \quad \lim_{y \to b} f(y) = L.$$

Então existe o limite

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x)$$

e além disso

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = L,$$

isto é,

$$\lim_{x \to a} f[g(x)] = L.$$

Demonstração:

Como existe o limite $\lim_{y \to b} f(y)$ e

$$\lim_{y \to b} f(y) = L,$$

dado o número real $\varepsilon > 0$, segue que podemos encontrar um número $\lambda > 0$ de modo que

$$\text{se} \quad 0 < |y - b| < \lambda\,, \quad \text{teremos} \quad |f(y) - L| < \varepsilon. \tag{4.47}$$

Por outro lado, como existe $\lim_{x \to a} g(x)$ e

$$\lim_{x \to a} g(x) = b,$$

poderemos encontrar um outro número real $\delta > 0$ de modo que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |g(x) - b| < \lambda. \tag{4.48}$$

Logo

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{por (4.48), teremos} \quad \left| \underbrace{g(x)}_{=y} - b \right| < \lambda, \quad \text{e por (4.47), teremos} \quad \left| f[\underbrace{g(x)}_{=y}] - f(b) \right| < \varepsilon,$$

isto é,

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{teremos que} \quad |(f \circ g)(x) - L| < \varepsilon,$$

mostrando que existe o limite $\lim_{x \to a} f[g(x)]$ e

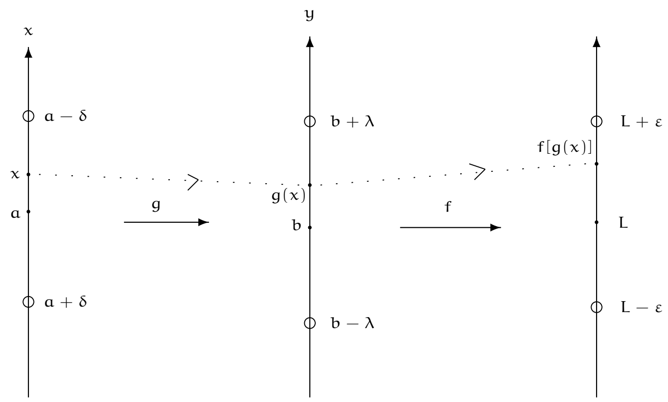
$$\lim_{x \to a} f[g(x)] = L,$$

completando a demonstração.

$\square$

Observação 4.5.1

1. *Segundo o diagrama de Venn teremos a seguinte situação:*



2. *A Proposição acima nos diz como "mudar de variáveis" quando estamos calculando limites, mais precisamente:*

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to a}f[g(x)]\stackrel{\textit{se definirmos } y\doteq g(x),\ \textit{quando } x\to a,\ \textit{teremos } y=g(x)\to b}{=}\lim_{y\to b}f(y).$$

3. *Podemos enunciar e demonstra um resultado semelhante ao da proposição acima para limites laterais.*

   Deixaremos a cargo do leitor a elaboração e demonstração dos mesmos.

Podemos agora utilizar o resultado acima para o

Exemplo 4.5.2 *Calcular, se existir, o seguinte limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(8x)}.$$

<u>**Demonstração:**</u>

Observemos que <u>**não**</u> podemos aplicar as propriedades básicas desenvolvidas na seção anterior, pois o limite do denominador é zero, pois $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}(8x)=0$.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Para resolver isto vejamos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(8x)}&\stackrel{x\neq 0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3x.\operatorname{sen}(3x)}{3x}}{\dfrac{8x.\operatorname{sen}(8x)}{8x}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3x}{8x}.\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}{\dfrac{\operatorname{sen}(8x)}{8x}}\right]=\left[\lim_{x\to 0}\frac{3x}{8x}\right].\left[\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}{\dfrac{\operatorname{sen}(8x)}{8x}}\right]\\&\stackrel{x\neq 0}{=}\left[\lim_{x\to 0}\frac{3}{8}\right].\left[\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}{\dfrac{\operatorname{sen}(8x)}{8x}}\right]=\frac{3}{8}.\left[\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(8x)}{8x}}\right].\end{aligned}\tag{4.49}$$

Logo precisamos mostrar que existem e saber calcular os seguites limites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}\quad \text{e}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(8x)}{8x}.$$

Para isto utilizaremos a Proposição acima.

Consideremos as funções $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}, \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) \doteq 3x, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aplicaremos a Proposição acima para as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$.

Temos que

$$\lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \overset{\text{1.o Lim. Fund.}}{=} 1$$

e

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} 3x = 3.0 = 0$$

(ou seja, $a = 0$, $b = 0$ e $L = 1$ na Proposição acima) .

Logo a Proposição acima garante que

$$1 = \lim_{x\to 0} f[g(x)] = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}[g(x)]}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}.$$

De modo semelhante temos (mais diretamente utilizando a Observação acima item 2.):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(8x)}{8x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{definindo-se} \quad y \doteq 8x, \\ \text{quando} \quad x \to 0, \quad \text{teremos} \quad y = 8x \to 0 \end{array} \right\} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \overset{\text{1.o Lim. Fund.}}{=} 1.$$

Logo pela Proposição acima segue que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(8x)} \overset{(4.49)}{=} \frac{3}{8}.\frac{1}{1} = \frac{3}{8}.$$

A seguir temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 4.5.1 *Calcular, se existir, o seguinte limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}.$$

Resolução:

Observemos que **não** podemos aplicar as propriedades básicas desenvolvidas na seção anterior (pois o limite do denominador é zero).

Neste caso, como $x \to 0$ podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$1 + \cos(x) \neq 0,$$

que é o conjugado algébrico da expressão $1 - \cos(x)$.

Logo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &\overset{1+\cos(x)\neq 0}{=} \lim_{x\to 0} \left[\frac{1 - \cos(x)}{x^2}.\frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1^2 - \cos^2(x)}{x^2}.\frac{1}{1 + \cos(x)} \right] \\
&\overset{1-\cos^2(x)=\operatorname{sen}^2(x)}{=} \lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}.\frac{1}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right]^2 . \left[\lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + \cos(x)} \right] \\
&= \left[\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right]^2 . \frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0} [1 + \cos(x)]} \overset{\text{1.o Lim. Fund. e Exemplo (4.4.8)}}{=} 1^2.\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, existe o limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ e além disso

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Capítulo 5

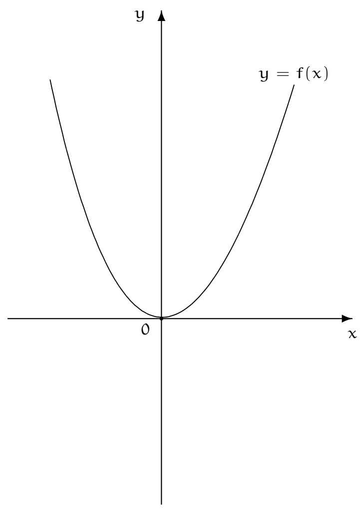
Funções Contínuas

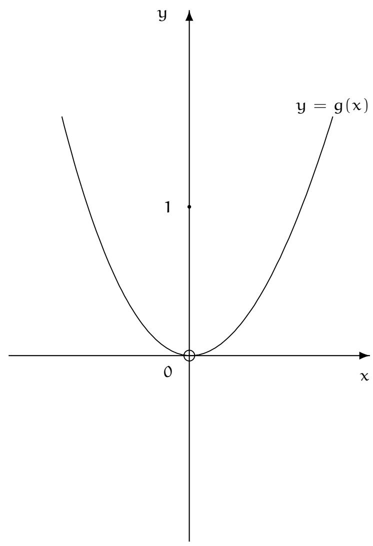
5.1 Motivação

Consideremos as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) \doteq x^2, \quad g(x) \doteq \begin{cases} x^2, & \text{para cada} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R},$$

cujas representações geométricas dos gráficos são dadas pelas figuras abaixo:





Observemos que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0 = f(0)$$

por outro lado,

$$\lim_{x \to 0} g(x) \overset{x \neq 0}{=} \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \neq 1 = g(0).$$

Assim podemos concluir que as duas funções têm o mesmo limite em $x = 0$ mas, no caso da função $\underline{f}$ este limite é igual ao valor da função no ponto $x = 0$, enquanto no caso da função $\underline{g}$ isto não ocorre (pois o valor da função $\underline{g}$ em $x = 0$ é 1, isto é $g(0) = 1 \neq \lim_{x \to 0} g(x)$).

Neste capítulo estaremos interessados em estudar as funções que têm o comportamento da função $\underline{f}$, isto é, o limite da função $\underline{f}$ num ponto é igual ao valor da mesma naquele ponto.

Observação 5.1.1 *Observemos que nos casos acima, a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ será uma "curva contínua" (podemos desenhá-lo sem tirar o lápis do papel) enquanto a representação geométrica do gráfico da função $\underline{g}$* **não** *é uma "curva contínua" (não conseguiremos desenhá-lo sem tirar o lápis do papel).*

Devido a esta propriedade diremos que a função $\underline{f}$ é contínua no ponto $x = 0$ (e que a função $\underline{g}$ não é contínua em $x = 0$).

Mais precisamente temos a:

5.2 Definição de função contínua e exemplos

Definição 5.2.1 *Sejam A um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $a \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$.*

Diremos que a função $\underline{f}$ é **contínua em $x = a$** *se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Observação 5.2.1 *Baseado na definição acima, as condições necessárias e suficientes para que uma função $\underline{f}$ seja contínua em um ponto $x = a$ são:*

1. *a função $\underline{f}$ deverá estar definida no ponto $x = a$, isto é, $x = a$ deverá pertencer ao domínio da função $\underline{f}$;*
2. *deverá existir o limite $\lim_{x \to a} f(x)$;*
3. *e $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Definição 5.2.2 *Na situação da definição acima, diremos que a função $\underline{f}$ é* **contínua no conjunto $\underline{A}$** *se a função $\underline{f}$ for contínua em cada um dos pontos do conjunto A.*

Temos também a:

Definição 5.2.3 *Na situação da definição acima se a função $\underline{f}$ não é contínua em $a \in A$ então diremos que a função $\underline{f}$ é* **descontínua no ponto $x = a$**.

Exemplo 5.2.1 *Consideremos $\underline{f}$ e $\underline{g}$ como no início do capítulo.*

Então a função $\underline{f}$ será contínua em $\mathbb{R}$ e a função $\underline{g}$ será contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (ou seja, o único ponto onde a função $\underline{g}$ é descontínua será $x = 0$).

A verificação destes fatos serão deixados como exercício para o leitor.

Observação 5.2.2

1. *Na situação da Definição (5.2.1), utilizando a definição de limite, temos que uma função $\underline{f}$ será contínua em $x = a$ se, e somente se, dado um número real $\varepsilon > 0$, podemos encontrar outro número real $\delta > 0$ de modo que se $x \in A$ satisfaz*

$$|x - a| < \delta, \quad \textit{teremos} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

2. *Diferentemente com o que ocorre na definição de limite (veja Observação (4.2.2) item 2.), para a continuidade é importante levarmos em conta o valor da função no ponto em questão.*

3. *Uma função $\underline{f}$ será descontínua em $x = a$ se, pelo menos, uma das situações abaixo ocorre:*

   (a) *a função $\underline{f}$ não está definida no ponto $x = a$;*

   (b) *não existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;*

   (c) *$\underline{f}$ está definida em $x = a$, existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ mas*

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a).$$

A seguir consideraremos alguns exemplos.

Exemplo 5.2.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} x\,, & \textit{para cada} \quad x \in (1, \infty) \\ 2 - x^2\,, & \textit{para cada} \quad x \in (-\infty, 1) \end{cases}.$$

Então a função $\underline{f}$ será contínua em $\mathbb{R}$.

Resolução:

De fato, se $x \in (1, \infty)$ temos que

$$f(x) = x$$

que é uma função contínua em $(1, \infty)$ pois, para cada $a \in (1, \infty)$ teremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

A verificação deste fato será deixado como exercício para o leitor.

Logo podemos concluir que a função $\underline{f}$ será contínua em $(1, \infty)$.

De modo semelhante, se $x \in (-\infty, 1)$ temos que

$$f(x) = 2 - x^2\,,$$

logo uma função contínua em $(-\infty, 1)$ pois, para cada $a \in (-\infty, 1)$ teremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

A verificação deste fato será deixado como exercício para o leitor.

Logo podemos concluir que a função $\underline{f}$ será uma função contínua em $(-\infty, 1)$.

Logo para completar, precisamos estudar a continuidade da função $\underline{f}$ em $x = 1$.

Observemos que $f(1) = 1$ e

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) \overset{x>1\,,\ \text{logo}\ f(x)=x}{=} \lim_{x \to 1^+} x \overset{\text{Exercício}}{=} 1\,;$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \overset{x<1\,,\ \text{logo}\ f(x)=2-x^2}{=} \lim_{x \to 1^-} \left(2 - x^2\right) \overset{\text{Exercício}}{=} 1.$$

Assim, da Proposição (4.3.1), como

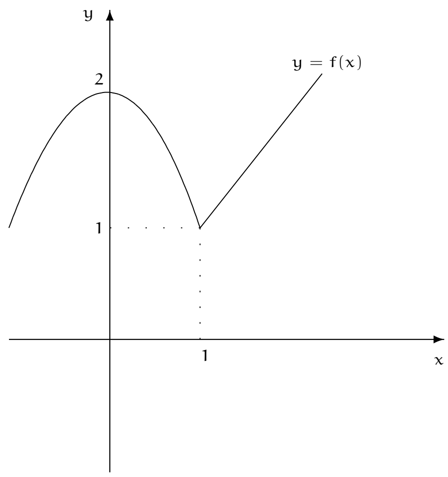
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1,$$

segue que existirá o limite $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ e

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1),$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é uma função contínua em $x = 1$ e concluindo que a função $\underline{f}$ será uma função contínua em $\mathbb{R}$.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



A seguir temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 5.2.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & se \quad x \neq 0 \\ 0, & se \quad x = 0 \end{cases}.$$

Então a função $\underline{f}$ *será contínua em* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e é descontínua em* $x = 0$.

Resolução:

De fato, se $x \neq 0$ temos que

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

que é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pois, para cada $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ teremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

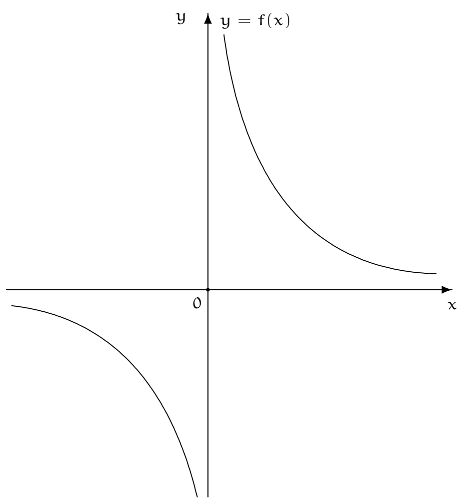
A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Por outro lado a função $\underline{f}$ será descontínua em $x = 0$ pois **não** existe

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



Temos também o:

Exemplo 5.2.3 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então a função $\underline{f}$ *será contínua em* $x = 0$.

Resolução:

De fato, temos que

$$f(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$$

e do Exemplo (4.4.6) segue que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) \overset{\text{Exemplo (4.4.6)}}{=} 0 = f(0),$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é contínua em $x = 0$.

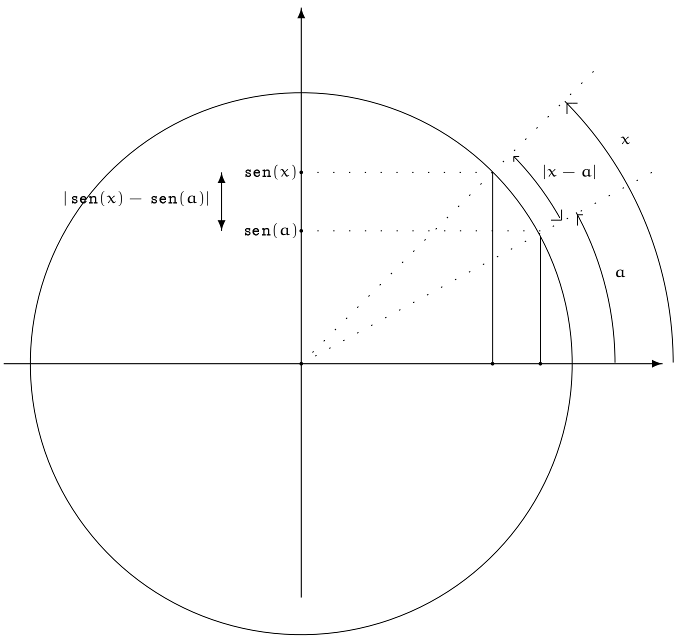
Observação 5.2.3 *Na verdade podemos mostrar que a função* $\underline{f}$, *do Exemplo acima, é uma função contínua em* $\mathbb{R}$.

De fato, mostremos que $\underline{f}$ *é contínua em cada* $a \in \mathbb{R}$.

Notemos que, como $x \to a$ *podemos supor, sem perda de generalidade, que* $|x - a| < \dfrac{\pi}{2}$.

Assim teremos que (veja figura abaixo)

$$|f(x) - f(a)| = |\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)| \le |x - a|, \quad \textit{para cada}| \quad |x - a| < \frac{\pi}{2}. \tag{5.1}$$



Logo dado $\varepsilon > 0$ *(podemos supor, sem perda de generalidade, que* $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$*) escolhamos*

$$\delta \doteq \varepsilon > 0. \tag{5.2}$$

Assim , se $x \in \mathbb{R}$ *satisfaz*

$$|x - a| < \delta \tag{5.3}$$

teremos

$$|f(x) - f(a)| \overset{(5.1)}{\leq} |x - a| \overset{(5.3)}{<} \delta \overset{(5.2)}{=} \varepsilon,$$

mostrando que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

isto é, a função $\underline{f}$ *é contínua em* $a \in \mathbb{R}$.

Como $a \in \mathbb{R}$ *é arbitrário, segue que a função* $\underline{f}$ *será contínua em* $\mathbb{R}$.

Com isto temos o:

Exemplo 5.2.4 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então a função $\underline{f}$ *é contínua em* $x = 0$.

Resolução:

De fato, temos que

$$f(0) = \cos(0) = 1$$

e do Exemplo (4.4.8) segue que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \cos(x) \overset{\text{Exemplo (4.4.8)}}{=} 1 = f(0),$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é contínua em $x = 0$.

Como exercício para o leitor temos o:

Exercício 5.2.2 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} -x\,, & \textit{para cada} \quad x \in (-\infty, -2] \\ 6 - x^2\,, & \textit{para cada} \quad x \in (-2, 2) \\ x\,, & \textit{para cada} \quad x \in [2, \infty) \end{cases}.$$

Mostre que a função $\underline{f}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$.

Encontre a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.

5.3 Operações com funções contínuas e exemplos

Temos a:

Proposição 5.3.1 *Sejam* A *intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, $a \in A$ *e* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *funções.*

Suponhamos que as funções $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$ *são contínuas em* $x = a$.

Então:

1. *a função* $(f+g)$ *será contínua em* $x=a$;
2. *a função* $(f-g)$ *será contínua em* $x=a$;
3. *a função* $(f.g)$ *será contínua em* $x=a$;
4. *se* $g(a)\neq 0$, *a função* $\dfrac{f}{g}$ *será contínua em* $x=a$.

Demonstração:

Como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são contínuas em $x=a$ segue que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a). \tag{5.4}$$

Para o item 1.:

Da Proposição (4.4.5) item (a), segue que

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) \overset{\text{Proposição (4.4.5) item (a)}}{=} \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \overset{(5.4)}{=} f(a)+g(a) = (f+g)(a),$$

mostrando que a função $(f+g)$ é contínua em $x=a$.

Para o item 2.:

Do Corolário (4.4.3), segue que

$$\lim_{x\to a}(f-g)(x) \overset{\text{Corolário (4.4.3)}}{=} \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) \overset{(5.4)}{=} f(a)-g(a) = (f-g)(a),$$

mostrando que a função $(f-g)$ é contínua em $x=a$.

Para o item 3.:

Da Proposição (4.4.5) item (b), segue que

$$\lim_{x\to a}(f.g)(x) \overset{\text{Proposição (4.4.5) item (b)}}{=} \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x) \overset{(5.4)}{=} f(a).g(a) = (f.g)(a),$$

mostrando que a função $(f.g)$ é contínua em $x=a$.

Para o item 4.:

Como $g(a)\neq 0$, da Proposição (4.4.5) item (c), segue que

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) \overset{\text{Proposição (4.4.5) item (c)}}{=} \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \overset{(5.4)}{=} \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a),$$

mostrando que a função $\dfrac{f}{g}$ é contínua em $x=a$ e completando a demonstração.

□

Como consequência imediata da Proposição acima temos o:

Corolário 5.3.1 *Sejam* A *intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, $a\in$ *e* $f,g:A\to\mathbb{R}$ *funções.*
Suponhamos que as funções $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$ *são contínuas em* A.
Então:

1. *a função* $(f+g)$ *será contínua em* A;
2. *a função* $(f-g)$ *será contínua em* A;
3. *a função* $(f.g)$ *será contínua em* A;

4. se $g(x) \neq 0$ *para* $x \in A$, *a função* $\dfrac{f}{g}$ *será contínua em* A.

Demonstração:

Basta aplicarmos a Proposição acima em cada um dos pontos do conjunto A.

$\square$

A seguir exibiremos duas classes importantes formadas por funções contínuas, a saber

Proposição 5.3.2 *Toda função polinomial é contínua em* $\mathbb{R}$.

Demonstração:

Se $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial então existem $n \in \mathbb{N}$ e $a_o, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Seja $a \in \mathbb{R}$.

Mostremos que a função $\underline{p}$ é contínua em $x = a$.

Para isto notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} p(x) &= \lim_{x \to a} \left[a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right] \overset{\text{Cor. (4.4.4) itens (a) e (b)}}{=} \\
&= \lim_{x \to a} a_o + \lim_{x \to a} a_1 . \lim_{x \to a} x + \lim_{x \to a} a_2 \left[\lim_{x \to a} x\right]^2 + \cdots + \lim_{x \to a} a_n . \left[\lim_{x \to a} x\right]^n \\
&\overset{\text{Cor. (4.4.1) e (4.4.2)}}{=} a_o + a_1 . a + a_2 a^2 + \cdots + a_n . a^n = p(a),
\end{aligned}$$

mostrando que

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a),$$

ou seja, a função $\underline{p}$ é uma função contínua em $a \in \mathbb{R}$, completando a demonstração.

$\square$

Proposição 5.3.3 *Toda função racional é contínua em seu domínio.*

Demonstração:

Se $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ é uma função racional então

$$f(x) \doteq \frac{p(x)}{q(x)}, \quad x \in \mathrm{Dom}(f) \doteq \{x \in \mathbb{R};\, q(x) \neq 0\}$$

onde e p, q são funções polinomiais.

Logo, das Proposições (5.3.2) e (5.3.1) item 4., segue que a função $\underline{f}$ será uma função contínua em $\mathrm{Dom}(f)$, completando a demonstração.

$\square$

Um outro resultado muito importante é dado pela:

Proposição 5.3.4 *Sejam* A, B *intervalos abertos de* $\mathbb{R}$, $a \in A$, $g : A \to B$ *e* $f : B \to \mathbb{R}$.

Suponhamos que exista o limite $\lim_{x \to a} g(x)$,

$$\lim_{x \to a} g(x) = b \in B$$

e a função $\underline{f}$ *seja contínua em* $y = b$.

Então existirá o limite $\lim_{x \to a} (f \circ g)(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b),$$

isto é,

$$\lim_{x \to a} f[g(x)] = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

Demonstração:

Para mostrar que a afirmação é verdadeira, precisamos mostrar que dado um número real $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um outro número real $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |(f \circ g)(x) - f(b)| < \varepsilon.$$

Para isto, dado $\varepsilon > 0$, como a função $\underline{f}$ é contínua em $\underline{b}$, segue que

$$\lim_{y \to b} f(y) = f(b),$$

ou seja, podemos encontrar um número real $\lambda > 0$ tal que

$$\text{se} \quad |y - b| < \lambda\,, \quad \text{teremos} \quad |f(y) - f(b)| < \varepsilon. \tag{5.5}$$

Por outro lado, como

$$\lim_{x \to a} g(x) = b,$$

podemos encontrar um número real $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{teremos} \quad |g(x) - b| < \lambda. \tag{5.6}$$

Logo

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{por (5.6), teremos} \quad |\underbrace{g(x)}_{=y} - b| < \lambda, \quad \text{e por (5.5), teremos} \quad |f[\underbrace{g(x)}_{=y}] - f(b)| < \varepsilon,$$

mostrando que

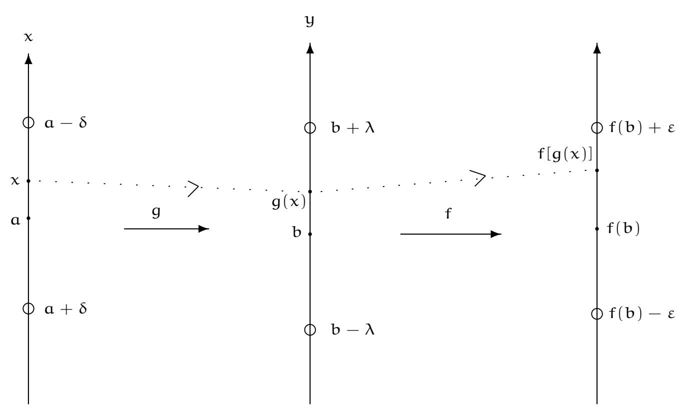
$$\lim_{x \to a} f[g(x)] = f(b),$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 5.3.1

1. *O o diagrama de Venn abaixo ilustra a situação da proposição acima:*



2. *Poderíamos ter utilizado a Proposição (4.5.1) para obter o resultado acima.*

   De fato, temos que
$$\lim_{x \to a} g(x) = b \qquad e \qquad \lim_{y \to b} f(y) = f(b)\ (\doteq L)$$
   e assim, pela Proposição citada, podemos concluir que
$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b).$$

3. *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *a função dada por*
$$f(x) \doteq \sqrt[n]{x}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0, \infty).$$
   Mais adiante (no Exercício (5.5.3) a seguir) mostraremos que a função $\underline{f}$ *é contínua em* $(0, \infty)$*, isto é, para todo* $a \in (0, \infty)$ *temos*
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$
   ou seja,
$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}.$$

4. *Segue da Observação acima, da Proposição (5.3.4) e do fato que a função seno é contínua em* $\mathbb{R}$*, que a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*
$$f(x) \doteq \cos(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$
   será contínua em $\mathbb{R}$ *(lembremos que* $\cos(x) = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(x)}$*, para cada* $x \in \mathbb{R}$*).*

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Consideremos o:

Exemplo 5.3.1 *Calcular, se existir, o seguinte limite:*
$$\lim_{x \to 0} \cos\left[\frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x}\right].$$

Resolução:

Observemos que nenhuma das propriedades básicas de limites pode ser aplicada (verifique!).
Para resolver este problema, consideraremos a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por
$$g(x) \doteq \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x}, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
Observemos que
$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{x}{x} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right]$$
$$= \lim_{x \to 0} 1 - \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \overset{1.\text{o Lim. Fund.}}{=} 1 - 1 = 0\ (\doteq b).$$
Como vimos anteriormente, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(y) \doteq \cos(y), \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}$$

é contínua em $y = 0 \, (= b)$.

Assim, da Proposição (5.3.4), segue que

$$\lim_{x \to 0} \cos\left[\frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x}\right] = \lim_{x \to 0} f[g(x)] \overset{\text{Proposição (5.3.4)}}{=} f\left[\lim_{x \to 0} g(x)\right] = f(0) = \cos(0) = 1,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to 0} \cos\left[\frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x}\right] = 1.$$

Como consequência da Proposição acima temos também o:

Corolário 5.3.2 *Sejam A, B intervalos abertos de $\mathbb{R}$, $a \in A$, $g : A \to B$ e $f : B \to \mathbb{R}$.*

Suponhamos que a função $\underline{g}$ seja contínua em $x = a$ e a função $\underline{f}$ seja contínua em $y = g(a)$.

Então a função $f \circ g$ será contínua em $x = a$.

Demonstração:

Como a função $\underline{g}$ é contínua em $x = a$ temos que

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \ (\doteq b).$$

De modo análogo, como $\underline{f}$ é contínua em $y = g(a)$ temos que

$$\lim_{y \to b} f(y) = f(b).$$

Logo, da Proposição (5.3.4) segue que

$$\lim_{x \to a} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = f[g(a)],$$

ou seja,

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(a),$$

mostrando que a função $f \circ g$ será contínua em $x = a$ e completando a demonstração.

□

Como consquência temos o

Corolário 5.3.3 *A composta de duas funções contínuas será uma função contínua.*

Demonstração:

É consequência do corolário acima.

□

5.4 Funções contínuas à direita e à esquerda de um ponto

Assim como no caso de limites laterais podemos, em princípio, estudar a continuidade de uma função à direita e/ou à esquerda de um ponto de seu domínio, mais especificamente temos a:

Definição 5.4.1 *Sejam A intervalo de $\mathbb{R}$, $a \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função.*

Diremos que a função $\underline{f}$ é **contínua à direita de $x = a$** *se*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

De modo análogo, diremos que a função $\underline{f}$ é **contínua à esquerda de $x = a$** *se*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Observação 5.4.1 *Na situação acima,* $\underline{f}$ *será contínua à direita (respectivamente, à esquerda) em* $x = a$ *se, e somente se,*

1. *existe* $f(a)$*;*
2. *existe o limite lateral* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ *(respectivamente,* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$*);*
3. *vale a igualdade:*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad (\textit{respectivamente, } \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)).$$

Com isto temos o seguinte exemplo:

Exemplo 5.4.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} x\,, & \textit{se} \quad x \in [0, \infty) \\ 1\,, & \textit{para cada} \quad x \in (-\infty, 0) \end{cases}.$$

Então a função $\underline{f}$ *é contínua à direita de* $x = 0$ *mas* **não** *é contínua à esquerda de* $x = 0$.

Resolução:

Observemos que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \overset{x>0\,,\ \text{logo}\ f(x)=x}{=} \lim_{x \to 0^+} x = 0 = f(0),$$

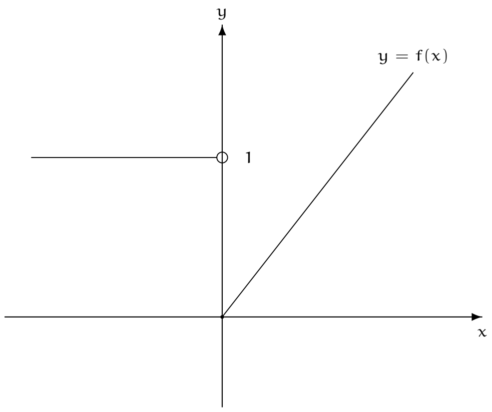
mostrando que a função $\underline{f}$ é contínua à direita de $x = 0$.

Por outro lado,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \overset{x<0\,,\ \text{logo}\ f(x)=1}{=} \lim_{x \to 0^-} 1 = 1 \neq 0 = f(0),$$

mostrando que a função $\underline{f}$ **não** é contínua à esquerda de $x = 0$.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



Observação 5.4.2 *Observemos que no Exemplo acima a função* $\underline{f}$ *é contínua em* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *mas* **não** *é contínua em* $x = 0$.

A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Para nos ajudar a estudar a continuidade de funções cuja lei de associação seja dada por partes (do tipo do Exemplo acima), temos o seguinte resultado:

Proposição 5.4.1 *Sejam* A *intervalo aberto,* $a \in A$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Então a função $\underline{f}$ *é contínua em* $x = a$ *se, e somente se, a função* $\underline{f}$ *é contínua à direita e à esquerda de* $x = a$*.*

Demonstração:

Observemos que a função $\underline{f}$ é contínua em $x = a$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

que, pela Proposição (4.3.1), é equivalente a

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a),$$

ou seja, a função $\underline{f}$ é contínua à direita e à esquerda de $x = a$.

□

Observação 5.4.3 *Valem as propiedades básicas de continuidade para a continuidade à direita e continuidade à esquerda.*

Deixaremos como exercício para o leitor a elaboração e a demonstração destes correspondentes resultados.

Com isto podemos introduzir o seguinte conceito:

Definição 5.4.2 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **contínua em** $[a, b]$ *se:*

1. *a função* $\underline{f}$ *é contínua em* (a, b)*;*
2. *a função* $\underline{f}$ *é contínua à esquerda do ponto* $\underline{b}$*;*
3. *a função* $\underline{f}$ *é contínua à direita do ponto* $\underline{a}$*.*

Observação 5.4.4

1. *De modo semelhante podemos definir quando uma função* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $f : (a, b] \to \mathbb{R}$*) é* **contínua em** $[a, b)$ *(respectivamente,* $(a, b]$*).*

   Deixaremos como exercício para o leitor o enunciado de tais definições.

2. *Podemos, de modo análogo, definir continuidade de funções definidas em intervalos do tipo* $(-\infty, b]$ *ou intervalos do tipo* $[a, \infty)$*.*

   Deixaremos como exercício para o leitor o enunciado de tais definições.

3. *Valem as propiedades básicas de continuidade para continuidade em intervalos dos tipos acima.*

   Deixaremos como exercício para o leitor a elaboração e a demonstração destes correspondentes resultados.

Com isto temos o seguinte exemplo:

Exercício 5.4.1 *Seja* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \sqrt{1 - x^2}, \quad \textit{para cada} \quad x \in [-1, 1].$$

Então a função $\underline{f}$ *é contínua em* $[-1, 1]$.

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é contínua em $(-1, 1)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Além disso,

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \sqrt{1 - x^2} \overset{\text{Prop. (4.4.7)}}{=} \sqrt{\lim_{x \to -1^+} \left(1 - x^2\right)} \overset{\text{Exercício}}{=} \sqrt{1 - 1} = 0 = f(-1),$$

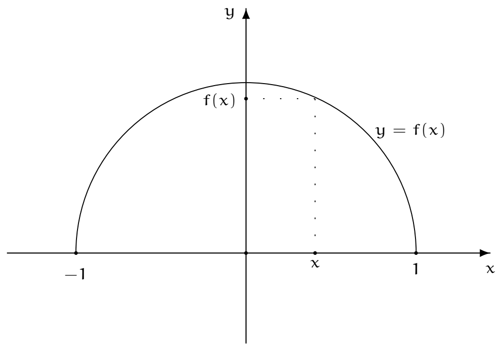
mostrando que a função $\underline{f}$ é contínua à direita de $x = -1$ e

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x^2} \overset{\text{Prop. (4.4.7)}}{=} \sqrt{\lim_{x \to 1^-} \left(1 - x^2\right)} \overset{\text{Exercício}}{=} \sqrt{1 - 1} = 0 = f(1),$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é contínua à esquerda de $x = 1$.

Portanto a função $\underline{f}$ é contínua em $[-1, 1]$.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dado pela figura abaixo:



5.5 Propriedades de funções a valores reais, contínuas definidas no intervalo $[a, b]$

Começaremos pelo:

Teorema 5.5.1 *(Teorema do anulamento) Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$ *tal que*

$$f(a).f(b) < 0.$$

Então existirá, pelo menos um,

$$c \in (a, b), \quad \textit{de modo que} \quad f(c) = 0.$$

Demonstração:

A demonstração é para os alunos que estudaram o apêndice do Capitulo 3.

Definamos

$$A \doteq \{x \in [a,b]\,;\, f(x) < 0\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Observemos que A é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$.

De fato, pois como $f(a).f(b) < 0$, deveremos ter ou $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, assim teremos $a \in A$ ou, $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, e neste caso teremos $b \in A$.

Além disso, A é limitado superiormente por $\underline{b}$ (pois $A \subseteq [a,b]$).

Logo deverá existir

$$c \doteq \sup(A).$$

Afirmamos que

$$f(c) = 0.$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$f(c) \neq 0.$$

Com isto temos duas possibilidades:

1. Se $f(c) < 0$, pelo Teorema da Conservação do Sinal (isto é, Teorema (4.4.1)) segue que existe $\delta > 0$ tal que

   $$f(x) < 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (c-\delta, c+\delta).$$

   Logo

   $$x_o \doteq c + \frac{\delta}{2} \in (c-\delta, c+\delta)$$

   e assim teríamos

   $$f(x_o) < 0, \quad \text{ou seja,} \quad x_o \in A.$$

   Mas

   $$x_o = c + \frac{\delta}{2} > c = \sup(A),$$

   o que é um absurdo, pois $x_o \in A$ e $x_o > c = \sup(A)$.

   Portanto deveremos ter $f(c) \leq 0$.

2. De modo semelhante, se $f(c) > 0$, pelo Teorema da Conservação do Sinal (isto é, Teorema (4.4.1)) segue que existe $\delta > 0$ tal que

   $$f(x) > 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (c-\delta, c+\delta).$$

   Logo

   $$x_1 \doteq c - \frac{\delta}{2} \in (c-\delta, c+\delta)$$

   e assim teremos $f(x_1) > 0$, isto é,

   $$x_1 = c - \frac{\delta}{2} < c = \sup(A) \quad \text{e} \quad f(x_1) > 0,$$

   o que é um absurdo, pois $\underline{c}$ é o supremo de A.

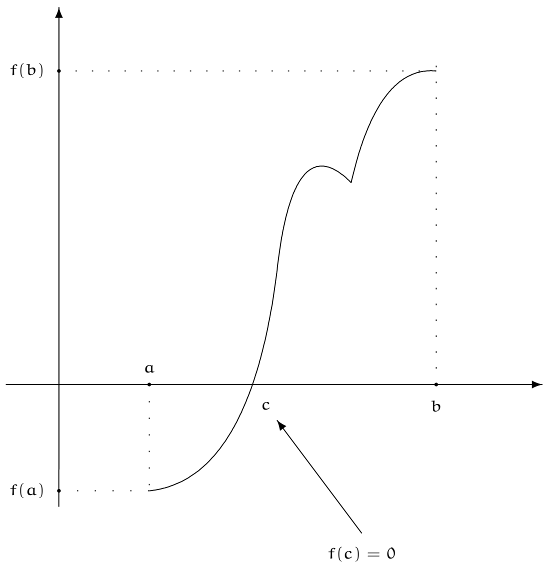
Portanto dos itens acima podemos concluir que $f(c) = 0$, concluindo a demonstração do resultado.

□

Observação 5.5.1

1. *A hipótese* $f(a).f(b) < 0$ *é equivalente a dizer que os números reais* $f(a)$ *e* $f(b)$ *têm sinais opostos.*

2. *Do ponto de vista da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *poderemos ter a seguinte situação para o resultado acima:*



Podemos aplicar o Teorema do Anulamento ao seguinte exemplo:

Exemplo 5.5.1 *A função polinômial* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$p(x) \doteq x^3 - 2x^2 + x - 1\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

tem, pelo menos, um zero que pertence ao intervalo $(0, 2)$ *(isto é, o polinômio correspondente tem, pelo menos, uma raiz no intervalo aberto* $(0, 2)$*).*

Resolução:

Para tanto, consideremos a função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq x^3 - 2x^2 + x - 1, \quad \text{para cada} \quad x \in [0, 2].$$

Observemos que a função $\underline{f}$ é contínua em $[0, 2]$ (pois é uma função polinomial),

$$f(0) = 0^3 - 2.0^2 + 0 - 1 = -1$$

e

$$f(2) = 2^3 - 2.2^2 + 2 - 1 = 1.$$

Assim

$$f(0).f(2) = -1 < 0.$$

Logo do Teorema do Anulamento (isto é, Teorema (5.5.1)), segue que existe

$$c \in (0, 2)\,, \quad \text{de modo que} \quad f(c) = 0,$$

ou seja, uma raiz do polinômio dado no intervalo $(0, 2)$, como afirmamos.

Um outro resultado importante é o

Teorema 5.5.2 *(Teorema de Bolzano-Weierstrass ou do valor intermediário) Seja* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$.

Se $K \in \mathbb{R}$ *está entre* $g(a)$ *e* $g(b)$ *então existe*

$$c \in (a, b), \quad \textit{de modo que} \quad g(c) = K.$$

Demonstração:

Suponhamos que

$$g(a) \overset{(1)}{<} K \overset{(2)}{<} g(b). \tag{5.7}$$

A demonstração do caso

$$g(b) < K < g(a)$$

é semelhante e será deixada como exercício para o leitor.

Definamos a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq g(x) - K, \quad x \in [a, b].$$

Observemos que a função $\underline{f}$ é uma função contínua em $[a, b]$ (pois é diferença das funções $\underline{g}$, que por hipótese é contínua em $[a, b]$, e da função constante igual a $\underline{K}$, que é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, em $[a, b]$).

Além disso, de (5.7), temos que

$$f(a).f(b) = \underbrace{[g(a) - K]}_{\overset{\text{de } (1)}{<} 0} . \underbrace{[g(b) - K]}_{\overset{\text{de } (2)}{>} 0} < 0.$$

Logo, segue do Teorema do anulamento (isto é, Teorema (5.5.1)), que existe

$$c \in (a, b), \quad \text{de modo que} \quad f(c) = 0,$$

ou seja,

$$g(c) = K,$$

como queríamos mostrar.

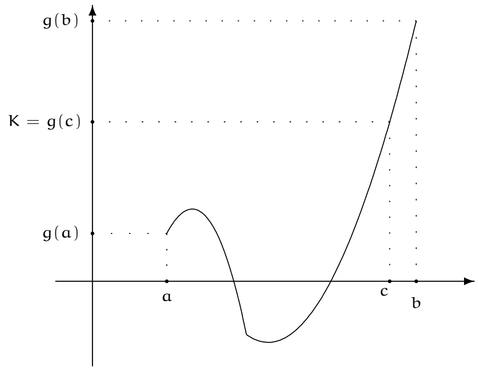
□

Observação 5.5.2 *O resultado acima nos diz que uma função contínua definida em um intervalo fechado e limitado assume todos os valores entre os valores da função nos extremos do intervalo, ou seja, a imagem de um intervalo fechado e limitado por uma função contínua a valores reais contém um intervalo fechado e limitado.*

Na verdade, podemos mostrar que a imagem de um intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$ *por meio de uma função contínua será um intervalo fechaco e limitado.*

A demonstraçaõ deste fatoserá omitida.

Do ponto de vista da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *podemos ter a seguinte situação:*



Um outro resultado importante é dado pelo:

Teorema 5.5.3 *(de Weierstrass) Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua em* $[a, b]$.
Então existem $s_o, t_o \in [a, b]$ *tais que*

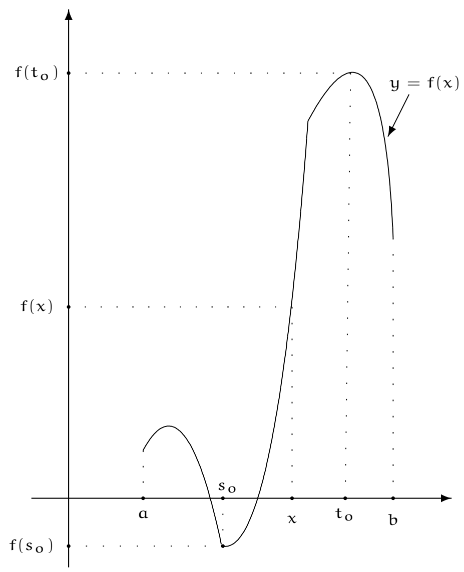
$$f(s_o) \le f(x) \le f(t_o), \quad x \in [a, b].$$

Demonstração:
A demonstração será omitida e poderá ser encontrada no livro [?] pg.89 - Teorema 4.16.

□

Observação 5.5.3 *O resultado acima nos diz que toda função a valores reais, contínua definida em um intervalor fechado e limitado assume os valores máximo e mínimo globais, no intervalo fechado e limitado.*

Do ponto de vista da representação geométrica do gráfico da função f *podemos ter a seguinte situação:*



Para finalizar temos a:

Proposição 5.5.1 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $x_o \in [a, b]$ *e estritamente crescente em* $[a, b]$.

Então a função $\underline{f}$, tomada sobre seu conjunto imagem, admitirá função inversa,

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b],$$

esta será estritamente crescente em $[f(a), f(b)]$ e além disso a função f^{-1} será uma função contínua em

$$y_o \doteq f(x_o) \in [f(a), f(b)].$$

Demonstração:

Observemos que como a função $\underline{f}$ é estritamente crescente segue que $f(a) < f(b)$.

Além disso temos que:

(i) A função $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ é injetora (ver Observação (3.3.20)) e, pelo Teorema (5.5.2), ela será sobrejetora.

Portanto a função $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ é bijetora, assim existe a função inversa associada a função $\underline{f}$, isto é, a função

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b].$$

(ii) A função $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ é estritamente crescente em $[f(a), f(b)]$.

De fato, se $y_1, y_2 \in [f(a), f(b)]$ com

$$y_1 < y_2 \tag{5.8}$$

então, pelo Teorema (5.5.2), existirão

$$x_1, x_2 \in [a, b] , \quad \text{de modo que} \quad f(x_1) = y_1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = y_2,$$

isto é,

$$x_1 = f^{-1}(y_1) \quad \text{e} \quad x_2 = f^{-1}(y_2).$$

Suponhamos, por absurdo, que $x_1 < x_2$.

Como a função $\underline{f}$ é estritamente crescente deveríamos ter

$$y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2,$$

contrariando (5.8).

Portanto deveremos ter

$$f^{-1}(y_1) = x_1 \geq x_2 = f^{-1}(y_2).$$

Suponhamos, por absurdo, que $x_1 = x_2$.

Com isto teríamos $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, contrariando (5.8).

Portanto deveremos ter

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2),$$

mostrando que a função $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ é é estritamente crescente em $[f(a), f(b)]$.

(iii) A função $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ é contínua em $y_o \doteq f(x_o) \in [f(a), f(b)]$.

Suponhamos que

$$y_o \in (f(a), f(b)) \tag{5.9}$$

Observemos que neste caso deveremos ter $x_o \in (a, b)$, pois a função f^{-1} é estritamente crescente em $[f(a), f(b)]$ assim, de (5.9), segue que

$$\underbrace{f^{-1}[f(a)]}_{=a} < \underbrace{f^{-1}(y_o)}_{=x_o} < \underbrace{f^{-1}[f(b)]}_{=b},$$

isto é, $a < x_o < b$.

Para mostrar a continuidade da função f^{-1} em y_o precisamos mostrar que dado o número real $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um outro número real $\delta > 0$, de modo que

$$\text{se} \quad |y - y_o| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)\right| < \varepsilon.$$

Para tanto, dado o número real $\varepsilon > 0$, como $x_o \in (a, b)$ e (a, b) é um intervalo aberto, podemos encontrar um número real $k \geq 1$ tal que

$$x_o + \frac{\varepsilon}{k}\,,\, x_o - \frac{\varepsilon}{k} \in (a, b).$$

Como

$$x_o - \frac{\varepsilon}{k} < x_o < x_o + \frac{\varepsilon}{k}$$

e a função $\underline{f}$ é estritamente crescente em $[a, b]$, segue que

$$f\left(x_o - \frac{\varepsilon}{k}\right) < \underbrace{f(x_o)}_{=y_o} < f\left(x_o + \frac{\varepsilon}{k}\right). \tag{5.10}$$

Consideremos

$$\delta \doteq \min\left\{y_o - f\left(x_o - \frac{\varepsilon}{k}\right), f\left(x_o + \frac{\varepsilon}{k}\right) - y_o\right\}.$$

Logo

$$\delta \leq f\left(x_o + \frac{\varepsilon}{k}\right) - y_o \quad \text{e} \quad -\delta \geq -\left[y_o - f\left(x_o - \frac{\varepsilon}{k}\right)\right]. \tag{5.11}$$

Observemos que (5.10) implica que $\delta > 0$.

Assim, se

$$|y - y_o| < \delta,$$

teremos

$$-\delta < y - y_o < \delta.$$

Logo, de (5.11), segue que

$$-\left[y_o - f\left(x_o - \frac{\varepsilon}{k}\right)\right] < y - y_o < f\left(x_o + \frac{\varepsilon}{k}\right) - y_o,$$

ou seja,

$$f\left(x_o - \frac{\varepsilon}{k}\right) < y < f\left(x_o + \frac{\varepsilon}{k}\right).$$

Como a função inversa f^{-1} é estritamente crescente em $[f(a), f(b)]$ segue que

$$\underbrace{f^{-1}\left[f\left(x_o - \frac{\varepsilon}{k}\right)\right]}_{=x_o - \frac{\varepsilon}{k}} < f^{-1}(y) < \underbrace{f^{-1}\left[f\left(x_o + \frac{\varepsilon}{k}\right)\right]}_{=x_o + \frac{\varepsilon}{k}},$$

ou seja,

$$x_o - \varepsilon \overset{\frac{\varepsilon}{k}<\varepsilon}{<} x_o - \frac{\varepsilon}{k} < f^{-1}(y) < x_o + \frac{\varepsilon}{k} \overset{\frac{\varepsilon}{k}<\varepsilon}{<} x_o + \varepsilon.$$

Mas $x_o = f^{-1}(y_o)$ assim teremos

$$f^{-1}(y_o) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_o) + \varepsilon, \quad \text{isto é,} \quad \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)\right| < \varepsilon,$$

mostrando que f^{-1} é contínua em $y_o \in (f(a), f(b))$.

Suponhamos que $y_o = f(a)$.

Neste caso mostraremos que a função f^{-1} é contínua à direita de $y_o = f(a)$.

Observemos que $x_o = a$ (pois a função f^{-1} é estritamente crescente em $[f(a), f(b)]$).

Dado o número real $\varepsilon > 0$, como $a < b$, podermos encontra um outro número real $k \geq 1$ tal que

$$a + \frac{\varepsilon}{k} < b.$$

Como

$$a < a + \frac{\varepsilon}{k}$$

e a função $\underline{f}$ é estritamente crescente em $[a, b]$, segue que

$$f(a) < f\left(a + \frac{\varepsilon}{k}\right). \tag{5.12}$$

Consideremos

$$\delta \doteq f\left(a + \frac{\varepsilon}{k}\right) - f(a) > 0. \tag{5.13}$$

Observemos que (5.12) implica que o número real $\delta > 0$.

Se

$$0 < y - f(a) < \delta,$$

de (5.13), teremos

$$0 < y - f(a) < f\left(a + \frac{\varepsilon}{k}\right) - f(a),$$

ou seja,

$$f(a) < y < f\left(a + \frac{\varepsilon}{k}\right).$$

Como a função inversa f^{-1} é estritamente crescente em $[f(a), f(b)]$ segue que

$$\underbrace{f^{-1}[f(a)]}_{=a} < f^{-1}(y) < \underbrace{f^{-1}\left[f\left(a + \frac{\varepsilon}{k}\right)\right]}_{=a+\frac{\varepsilon}{k}},$$

ou seja,

$$a < f^{-1}(y) < a + \frac{\varepsilon}{k} \overset{\frac{\varepsilon}{k}<\varepsilon}{<} a + \varepsilon.$$

Mas $a = f^{-1}(f(a))$ assim segue que

$$f^{-1}(f(a)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(a)) + \varepsilon, \quad \text{isto é,} \quad \left|f^{-1}(y) - f^{-1}[f(a)]\right| < \varepsilon,$$

mostrando que a função f^{-1} é contínua em $y_o = f(a)$.

De modo análogo, mostra-se a continuidade à esquerda da função f^{-1} em $f(b)$, que será deixada como exercício para o leitor e com isto completamos a demonstração do resultado.

□

Observação 5.5.4

1. *Temos um resultado análogo a Proposição acima trocando-se a hipótese da função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ser contínua em* $[a, b]$ *ser estritamente crescente em* $[a, b]$ *por ser uma função contínua e estritamente decrescente em* $[a, b]$.

   Neste caso, a função inversa $f^{-1} : [f(b), f(a)] \to [a, b]$ *será contínua e estritamente decrescente em* $[f(b), f(a)]$.

   A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

2. *Temos um resultado semelhante à Proposição acima trocando-se o intervalo* $[a, b]$ *por um intervalo limitado qualquer da reta* $\mathbb{R}$ *(isto é, do tipo:* (a, b), $[a, b)$ *ou* $(a, b]$*) ou por um intervalo não limitado da reta* $\mathbb{R}$ *(isto é, do tipo:* (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$ *ou* $(-\infty, b]$*).*

   O enunciados e as demonstrações são, essencialmente, os mesmos do Teorema acima e assim serão deixados, assim como suas demonstrações, como exercício para o leitor.

3. *A Proposição acima implica que se a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *for estritamente crescente e contínua em* $[a, b]$ *então a função inversa associada a mesma, isto é,* $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ *será contínua em* $[f(a), f(b)]$.

4. *Vale o mesmo para o caso da função* $\underline{f}$ *ser estritamente decrescente ou para os outros tipos de intervalos citados nos item 2. acima.*

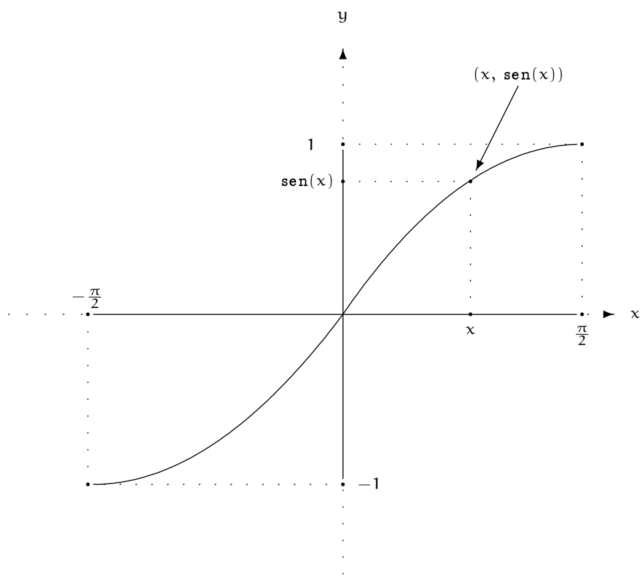
   A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Um exemplo importante para os quais podemos aplicar o resultado acima é:

Exemplo 5.5.2 *Seja* $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \mathrm{sen}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

cuja representação geométrica do seu gráfico é dada pela figura abaixo:



Mostre que a função $\underline{f}$ *acima admite função inversa,* $f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *e esta será uma função contínua em* $[-1, 1]$.

Resolução:

Da Observação (5.2.3) temos que a função $\underline{f}$ é contínua em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

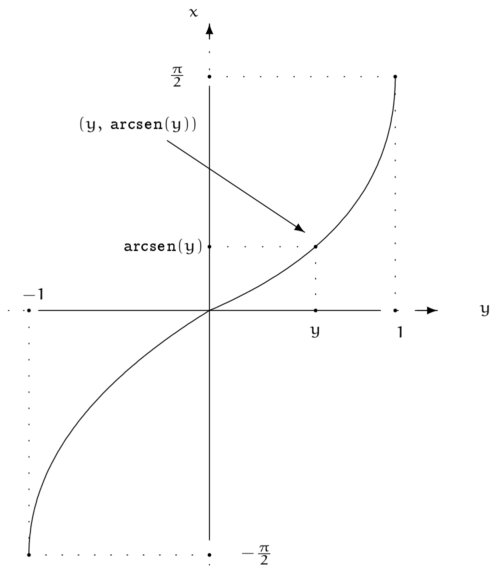
Além disso a função $\underline{f}$ é estritamente crescente (logo injetora) e sobrejetora.

Logo da Proposição (5.5.1) segue que existe a função inversa associada a função $\underline{f}$,

$$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

e esta será estritamente crescente e contínua em $[-1, 1]$.

Como vimos na subseção (17)-1, a função acima é a função arco-seno, indicada por $\underline{\text{ arcsen}}$, cuja representação geométrica do gráfico é dada pela figura abaixo.



Podemos aplicar a Proposição acima (mais precisamente, a Observação acima) também ao:

Exercício 5.5.1 *A função* $f : [2, 3] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{x-1}, \quad \textit{para cada} \quad x \in [2, 3],$$

admite função inversa contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é contínua em $[2, 3]$ (pois é uma função racional e seu denominador não se anula em $[2, 3]$).

Além disso, é uma função estritamente decrescente em $[2, 3]$, pois se $x_1, x_2 \in [2, 3]$ com

$$x_1 > x_2, \quad \text{teremos} \quad x_1 - 1 > x_2 - 1 > 0$$

e portanto

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1 - 1} < \frac{1}{x_2 - 1} = f(x_2).$$

Observemos também que

$$f(2) = \frac{1}{2-1} = 1 \quad \text{e} \quad f(3) = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

e assim, da Observação (3.3.20), teremos que a função $f : [2,3] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ será sobrejetora (e portanto bijetora).

Logo da Observação acima item 3., segue que existe a função inversa associada a função $\underline{f}$, isto é, a função $f^{-1} : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to [2,3]$, e esta função será estritamente decrescente e contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Observação 5.5.5 *Vale observar que, no exemplo acima, podemos obter a função inversa explicitamente.*

Para isto basta resolvermos a equação

$$f(x) = y$$

em termos de $\underline{x}$, isto é,

$$\frac{1}{x-1} = f(x) = y \quad \textit{se, e somente se,} \quad x - 1 = \frac{1}{y} \quad \textit{ou, equivalentemente} \quad x = \frac{1}{y} + 1,$$

ou ainda, a função $f^{-1} : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to [2,3]$ será dada por

$$f^{-1}(y) \doteq \frac{1}{y} + 1, \quad \textit{para cada} \quad y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

que é uma função contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (pois é uma função racional e seu denominador não se anula em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.)

Será deixado como exercício para o leitor verificar que a função acima é a função inversa associada a função $\underline{f}$ dada.

Podemos agora demonstrar a Observação (5.3.1) item 3. e com isto obter uma demonstração para a Proposição (4.4.7) com o:

Exemplo 5.5.3 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função dada por*

$$f(x) \doteq \sqrt[n]{x}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0, \infty).$$

Mostre que a função $\underline{f}$ é contínua em $(0, \infty)$.

Resolução:

Observemos que a função $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(y) \doteq y^n, \quad \text{para cada} \quad y \in (0, \infty)$$

é uma função contínua em $(0, \infty)$, estritamente crescente em $(0, \infty)$ e sua imagem é $(0, \infty)$.

Logo, considerada sobre a sua imagem, ela será uma função bijetora e, da Proposição (5.5.1), segue que a função inversa $g^{-1} : (0, \infty) \to (0, \infty)$ existe e será uma função contínua em $(0, \infty)$.

Mas:

$$(f \circ g)(y) = f[g(y)] = \sqrt[n]{y^n} \overset{y>0}{=} y\,, \quad \text{para cada} \quad y \in (0, \infty)$$

e

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \left[\sqrt[n]{x}\right]^n \overset{x>0}{=} x\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty)\,,$$

mostrando que $f = g^{-1}$.

Portanto podemos concluir que a função $\underline{f}$ é uma função contínua em $(0, \infty)$, como havíamos afirmado.

Observação 5.5.6

1. *Podemos mostrar que a função $\underline{f}$ do Exercício acima é contínua em $[0, \infty)$, isto é, é contínua em $(0, \infty)$, como mostra o Exercício acima, e tambem é contínua à direita de $x = 0$.*

   A verificação deste último fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, a função $\underline{f}$ do Exercício acima pode ser definida em $\mathbb{R}$, isto é, podemos definir a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq \sqrt[n]{x}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Utilizando as mesmas idéias do Exemplo acima, podemos mostrar que a função $\underline{f}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

3. *Lembrando uma vez mais, com o Exemplo acima e a Proposição (5.3.4) pode-se provar a Proposição (4.4.7).*

4. *Podemos aplicar a Proposição (5.5.1) (ou a Observação (5.5.4)) para mostrar que existem e são contínuas todas as funções inversas associada as funções definidas no Capítulo 4 (ver seção (17), onde são definidas as funções arco-cosseno, arco-tangente, arco-secante, arco-cossecante.)*

   A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

5. *A continuidade da função logarítmo natural em $(0, \infty)$ será mostrada no próximo capítulo.*

6. *Quando isto for feito, utilizando novamente a Proposição (5.5.1) (ou a Observação (5.5.4)) poderemos mostrar que as funções exponecial, seno-hiperbólico, cosseno-hiperbólico, tangente-hiperbólico, cotangente-hiperbólico, secante-hiperbólico, cossecante-hiperbólico, arco-seno-hiperbólico, arco-cosseno-hiperbólico, arco-tangente-hiperbólico, arco-cotangente-hiperbólico, arco-secante-hiperbólico e arco-cossecante-hiperbólico serão contínuas nos seus respectivos domínios (ver as seções 20, 21, 22 e 23 do Capítulo 4 onde são definidas as funções citadas).*

   A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Capítulo 6

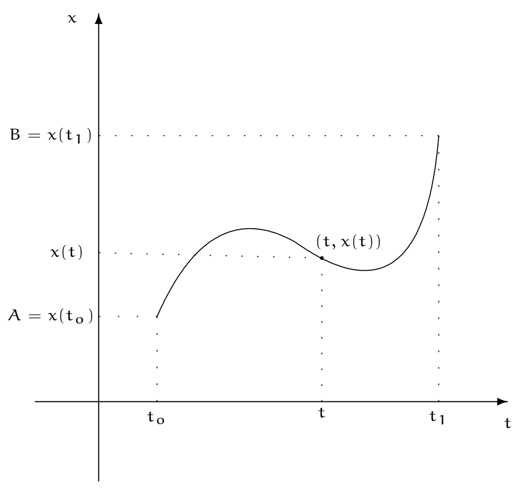
Funções Diferenciáveis - A Derivada

6.1 Motivação

A seguir consideraremos dois problemas que nos levarão a um mesmo conceito Matemático.

6.1.1 Velocidade instantânea

Consideremos uma partícula movendo-se ao longo de uma reta, de um ponto A até um ponto B, cuja posição é dada como uma função do tempo, isto é, $x = x(t)$, onde $x(t)$ é a posição da partícula no instante $t \in [t_o, t_1]$, com $x(t_o) = A$ e $x(t_1) = B$ (na figura abaixo temos a representação geométrica do gráfico da função $x = x(t)$).



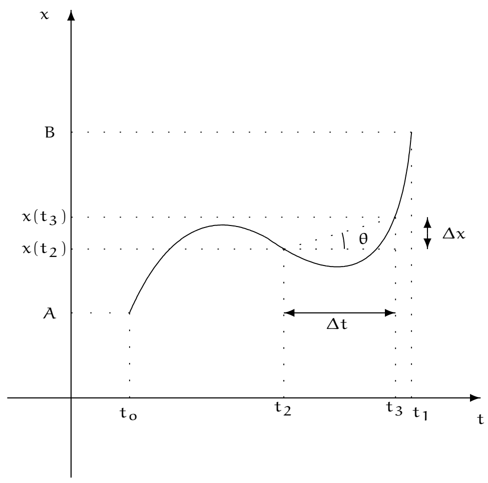
Se $t_2, t_3 \in [t_o, t_1]$, então a **velocidade média** da partícula entre os instantes $t = t_2$ e $t = t_3$, que indicaremos por $v_{[t_2,t_3]}$, será dada por

$$v_{[t_2,t_3]} = \frac{x(t_3) - x(t_2)}{t_3 - t_2} = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

onde denotaremos por

$$\Delta x \doteq x(t_3) - x(t_2) \quad \text{e} \quad \Delta t \doteq t_3 - t_2.$$

Geometricamente, temos que a velocidade média $v_{[t_2,t_3]}$ será o coeficiente angular da reta que contém os pontos $(t_2, x(t_2))$ e $(t_3, x(t_3))$, da representação geométrica do gráfico da função $x = x(t)$ (ou seja, $\operatorname{tg}(\theta) = v_{[t_2,t_3]}$ - veja figura abaixo).



Gostaríamos de encontrar a velocidade no instante $t = t_2$, denominada **velocidade instantânea** da partícula em $t = t_2$.

Para isto, intuitivamente, deslocaremos o ponto $(t_3, x(t_3))$, sobre a representação geométrica do gráfico de $x = x(t)$, em direção ao ponto $(t_2, x(t_2))$, ou seja, faremos t_3 aproximar-se de t_2.

Deste modo as velocidades médias, em cada um dos intervalos $[t_2, t_3]$ deverá, possivelmente, aproximar-se da velocidade instantênea da partícular no instante $t = t_2$, que indicaremos por $v(t_2)$, , isto é,

$$v(t_2) = \lim_{t_3 \to t_2} v[t_2, t_3] = \lim_{t_3 \to t_2} \frac{x(t_3) - x(t_2)}{t_3 - t_2}, \qquad (6.1)$$

caso o limite exista.

Apliquemos as idéias acima ao:

Exemplo 6.1.1 *Suponhamos que uma partícula movimente-se em uma reta de acordo com a equação da posição* $\underline{x}$ *(dada em metros) em relação ao tempo* $\underline{t}$ *(dado em segundos), dada por:*

$$x(t) \doteq 2t^2 - 3t, \quad t \in [0, \infty). \qquad (6.2)$$

Determinar a velocidade da partícula no instante $t = 2\,s$.

Resolução:

1.o Modo:

A equação de um Movimento Retilíneo Uniformemente Variado é dada por

$$x(t) = x_o + v_o t + \frac{a_o}{2} t^2, \quad t \in [0, \infty),$$

onde x_o é a posição inicial da partícula (em metros), v_o é a velocidade inicial da partícula (em metros por segundo) e a_o é aceleração da partícula (em metros por segundo ao quadrado).

Comparando esta equação com a equação (6.2) obteremos

$$x_o = 0\,m, \quad v_o = -3\,m/s \quad \text{e} \quad a_o = 4\,m/s^2.$$

Mas sabemos, neste caso, que a velocidade instantânea no instante $\underline{t}$ será dada por:

$$v(t) = v_o + a_o t = -3 + 4t, \quad t \in [0, \infty).$$

Assim a velocidade em $t = 2\,s$ será dada por:

$$v(2) = -3 + 4.2 = 5\,m/s,$$

isto é, a velocidade instantânea no instante $t = 2\,s$ será $v = 5\,m/s$.

2.o Modo:

Aplicando (6.1), teremos

$$\begin{aligned} v(2) &= \lim_{t\to 2} \frac{x(t) - x(2)}{t-2} = \lim_{t\to 2} \frac{\left(2t^2 - 3t\right) - \left(2.2^2 - 3.2\right)}{t-2} \\ &= \lim_{t\to 2} \frac{2t^2 - 3t - 2}{t-2} = \lim_{t\to 2} \frac{(2t+1)(t-2)}{t-2} \overset{t\neq 2}{=} \lim_{t\to 2}(2t+1) = 5, \end{aligned}$$

mostrando, por de um outro modo, que a velocidade instantânea no instante $t = 2\,s$ será $v = 5\,m/s$.

Observação 6.1.1 *Vale observar que, no Exemplo acima, o 1.o Modo só se aplica para o MRUV (ou MRU) enquanto o 2.o Modo (isto é, (6.1)) aplica-se a todas as situações (desde que exista o limite em questão).*

6.1.2 Coeficiente angular da reta tangente

Consideremos uma função $f : A \to \mathbb{R}$, onde A é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $a \in A$.

Nosso problema é encontrar a equação da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ no ponto $P = (a, f(a))$ (caso exista).

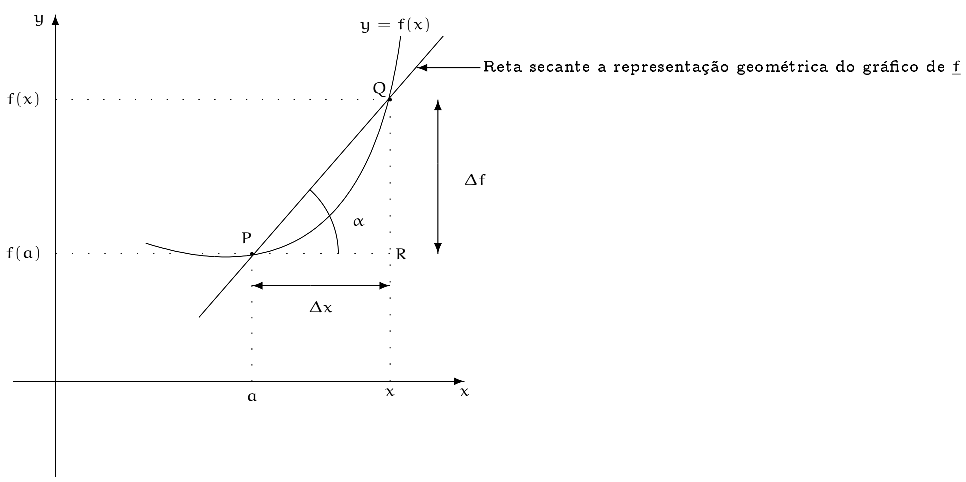
Observemos que a equação da tal reta será do tipo

$$y - f(a) = m_p(x - a),$$

onde m_p indicará o coeficiente angular da reta tangente procurada.

Logo basta encontrarmos o coeficiente angular, m_P, da tal reta tangente.

Para isto observemos que se $Q \doteq (x, f(x))$, $x \in A$ é um ponto do gráfico da função $\underline{f}$, diferente do ponto P, então podemos obter a reta secante à representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ passando pelos pontos P e Q (veja figura abaixo).



Sabemos que o coeficiente angular, que indicaremos por m_{PQ}, da reta secante à representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, que passa pelos pontos P e Q, é dado por:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\Delta f}{\Delta x}, \tag{6.3}$$

onde indicaremos por:

$$\Delta x \doteq x - a \quad \text{e} \quad \Delta f \doteq f(x) - f(a).$$

Lembremos que

$$m_{PQ} = \operatorname{tg}(\alpha),$$

onde α é o ângulo entre as semiretas $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PQ}$ (veja figura acima).

Se o ponto Q aproximar-se do ponto P, sobre a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, isto é, se $\underline{x}$ aproximar-se de $\underline{a}$, teremos que o coeficiente angular da reta secante, m_{PQ}, provavelmente, aproximar-se-á do coeficiente angular da reta tangente procurada, isto é, de m_P, ou seja:

$$m_P = \lim_{x \to a} m_{PQ},$$

ou ainda, por (6.3), teremos:

$$m_P = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

se o limite existir.

Podemos aplicar estas idéias ao:

Exemplo 6.1.2 *Encontre, se existir, a equação da reta tangente ao gráfico da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^2 - 4x + 3\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

no ponto $(1, 0)$.

<u>Resolução:</u>

Observemos que o ponto $(1, 0)$ é um ponto do gráfico da função $\underline{f}$, pois

$$f(1) = 1^2 - 4.1 + 3 = 0\,.$$

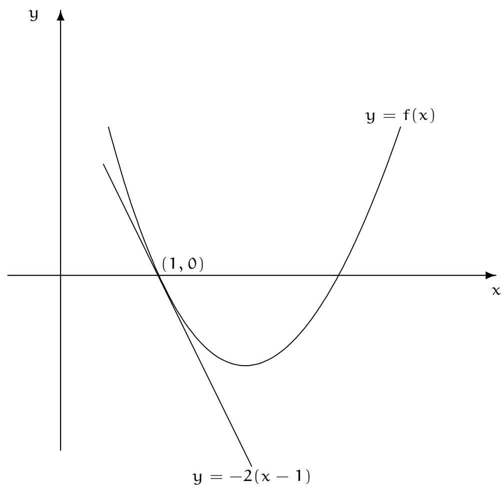
Logo, para encontrar o coeficiente angular, m_P, da reta tangente ao gráfico da função $\underline{f}$ no ponto $P = (1, 0)$ basta encontrarmos o seguinte limite:

$$\begin{aligned} m_P &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{a=1}{=} \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3 - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 1} \overset{x \neq 1}{=} \lim_{x \to 1} (x - 3) = -2. \end{aligned}$$

Logo a equação da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ no ponto $P = (1, 0)$ será dada por:

$$y - \underbrace{f(a)}_{=0} = \underbrace{m_P}_{=-2} (x - \underbrace{a}_{=1}), \quad \text{ou seja,} \quad y = -2(x - 1).$$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ e da reta tangente procurada são dadas na figura abaixo:



6.2 A derivada de uma função real de uma variável real

Observação 6.2.1

1. *Para encontrar a velocidade instantânea no instante* $t = t_o$ *de uma partícula movimentando-se numa reta, onde sua posição é dada pela fução* $x = x(t)$ *precisamos estudar o limite*

$$\lim_{t_3 \to t_2} \frac{x(t_3) - x(t_2)}{t_3 - t_2}.$$

2. *Para encontrar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função* $y = f(x)$ *no ponto* $(a, f(a))$ *precisamos estudar o limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

3. *Observemos que os dois limites acima são do mesmo tipo (a saber, limite de um quociente onde, no numerador temos a variação da função e no denominador a variação da variável independente).*

   Logo podemos cololocá-los dentro de um mesmo conceito, a saber:

Definição 6.2.1 *Sejam* A *é um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, $a \in A$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função.*
Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **diferenciável em $x = a$** *se existir o limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Neste caso, o limite acima será denominado **derivada da função $\underline{f}$ em $x = a$** *e denotada por* $f'(a)$, *ou seja,*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Observação 6.2.2

1. *Se a função* $\underline{f}$ *é diferenciável em* $a \in A$, *também poderemos indicar a derivada da função* $y = f(x)$ *em* $x = a$ *por:*

$$\frac{df}{dx}(a), \quad ou \quad f^{(1)}(a), \quad ou \quad \frac{dy}{dx}(a), \quad ou \quad y'(a), \quad ou \quad D_x y(a),$$

ou ainda,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{|x=a}, \quad \textit{ou} \quad D_x y_{|x=a}.$$

2. *Se indicarmos por*

$$\Delta f \doteq f(x) - f(a), \quad \Delta x \doteq x - a \tag{6.4}$$

então, da Proposição (4.5.1) (ou a Observação (4.5.1) item 2.), segue que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{\Delta x \doteq x - a, x \to a \Rightarrow \Delta x \to 0}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

3. *Nos Exemplos acima, que motivaram a Definição (6.2.1), temos que*

$$v(t_2) = x\,'(t_2) \quad e \quad m_p = f\,'(a).$$

4. *O quociente*

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \overset{(6.4)}{=} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

será denominado **razão incremental** *da função* $\underline{f}$, *ou* **taxa de variação média** *da função* $\underline{f}$ *no intervalo* $[x, x_o]$, *se* $x < x_o$ *(ou em* $[x_o, x]$, *se* $x > x_o$*).*

5. *Neste caso, a derivada* $f\,'(x_o)$, *se existir, será denominada* **taxa de variação instantânea** *(em relação a* $\underline{x}$*) da função* $\underline{f}$, *em* $x = x_o$.

Definição 6.2.2 *Se a função* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em cada um dos pontos de* A *então diremos que a função* $\underline{f}$ *é* **diferenciável no conjunto** A.

Neste caso, podemos considerar a função **derivada da função** $\underline{f}$, *que será indicada por* f', *definida por:*

$$\begin{aligned} f\,' : \; & A \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f\,'(x) \end{aligned}.$$

A seguir consideraremos alguns exemplos.

Exemplo 6.2.1 *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq 2x, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}$$

e $a = 1$.

Mostre que a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $x = 1$ *e encontre a derivada da função* $\underline{f}$ *em* $x = 1$, *isto é,* $f\,'(1)$.

Resolução:

Observemos que para sabermos se a função $\underline{f}$ é diferenciável no ponto $x = 1$ basta verificarmos a existência do limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

Para isto, notemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 2.1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x - 1)}{x - 1} \overset{x \neq 1}{=} \lim_{x \to 1} 2 = 2, \tag{6.5}$$

ou seja, a função $\underline{f}$ é diferenciável em $x = 1$.

Logo a derivada da função $\underline{f}$ em $x = 1$ será dada por

$$f\,'(1) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \overset{(6.5)}{=} 2.$$

Observação 6.2.3 *Observemos que, na verdade, a função f, do Exemplo acima, é diferenciável em $\mathbb{R}$ e*

$$f'(x) = 2\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

De fato, se $a \in \mathbb{R}$ está fixado, mostremos que a função f é diferenciável no ponto $x = a$, ou seja, existe do limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Para isto notemos que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{2x - 2.a}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{2(x - a)}{x - a} \overset{x\neq a}{=} \lim_{x\to a} 2 = 2,$$

mostrando que a função f é diferenciável em $x = a$, para cada $a \in \mathbb{R}$.

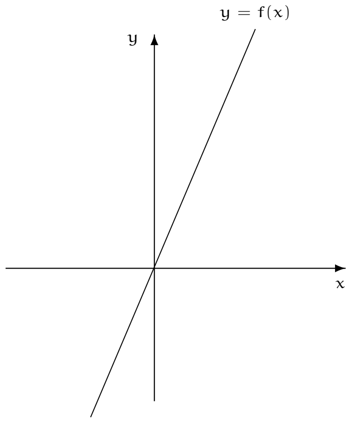
Além disso, a derivada da função f em $x = a$ será dada por:

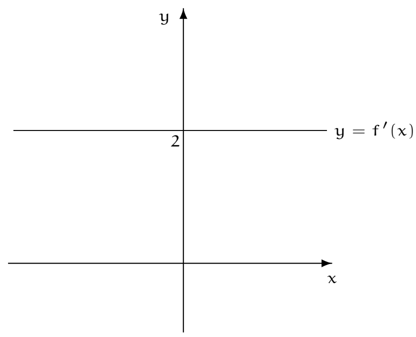
$$f\,'(a) = 2, \quad \textit{para cada} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Assim podemos obter a função derivada da função f , isto é, a função $f\,' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que será dada por

$$f\,'(x) = 2, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

As representações geométricas dos gráficos das funções f e f′ são dadas pelas figuras abaixo:





Um outro exemplo é:

Exemplo 6.2.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x) \doteq |x|, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Afirmamos que a função f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Além disso a função derivada da função f será a função $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f\,'(x) = \begin{cases} 1\,, & \textit{para} \quad x \in (-0, \infty) \\ -1\,, & \textit{para} \quad x \in (-\infty, 0) \end{cases}.$$

Resolução:

Mostremos que a função f é diferenciável em $(0, \infty)$ e que

$$f\,'(a) = 1, \quad \text{para cada} \quad a \in (0, \infty)\,.$$

De fato, se $a > 0$ teremos:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{|x|-|a|}{x-a} \overset{a>0}{=} \lim_{x\to a}\frac{|x|-a}{x-a}.$$

Como $x \to a$ e $a > 0$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $\underline{x}$ tem o mesmo sinal de $\underline{a}$ isto é, $x > 0$, assim

$$\lim_{x\to a}\frac{|x|-a}{x-a} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a} \overset{x\neq a}{=} \lim_{x\to a} 1 = 1,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $x = a$, se $a > 0$ e, além disso,

$$f'(a) = 1, \quad \text{para cada} \quad a \in (0, \infty).$$

Mostremos que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $(-\infty, 0)$ e que

$$f'(a) = -1, \quad \text{para cada} \quad a \in (-\infty, 0)\,.$$

De fato, se $a < 0$ teremos:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{|x|-|a|}{x-a} \overset{a<0}{=} \lim_{x\to a}\frac{|x|-(-a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{|x|+a}{x-a}.$$

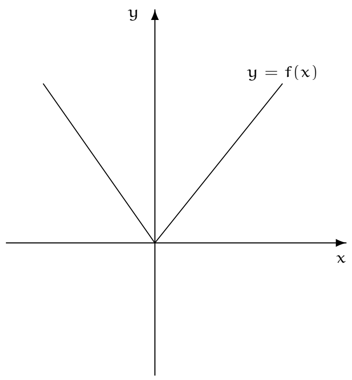
Como $x \to a$ e $a < 0$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $\underline{x}$ tem o mesmo sinal de $\underline{a}$, isto é, $x < 0$, assim

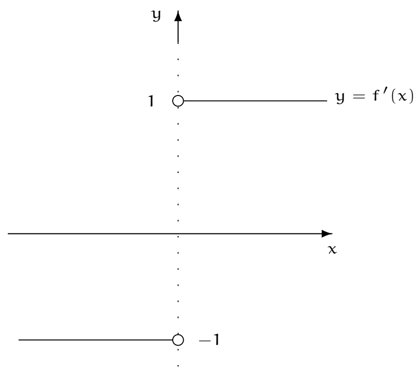
$$\lim_{x\to a}\frac{|x|+a}{x-a} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to a}\frac{-x+a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{-(x-a)}{x-a} \overset{[x\neq a]}{=} \lim_{x\to a} -1 = -1,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ será diferenciável em $x = a$, se $a < 0$ e, além disso,

$$f'(a) = -1, \quad \text{para cada} \quad a \in (-\infty, 0).$$

As representações geométricas dos gráficos das funções $\underline{f}$ e $\underline{f'}$ são dadas pelas figuras abaixo:





Observação 6.2.4

1. *Observemos que a função $\underline{f}$ acima* **<u>não</u>** *é diferenciável em $x = 0$.*

   Afirmamos que **<u>não</u>** *existe o limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\,.$$

De fato, se tentarmos calcular limite o acima, pela direita de $x = 0$, isto é, com $x \to 0^+$, poderemos supor, sem perda de generalidade, que $x > 0$, assim teremos que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} \overset{x>0}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} \overset{x \neq 0}{=} \lim_{x \to 0^+} 1 = 1.$$

Por outro lado, se tentarmos calcular limite o acima, pela esquerda de $x = 0$, isto é, com $x \to 0^-$, poderemos supor, sem perda de generalidade, que $x < 0$,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} \overset{x<0}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} \overset{x \neq 0}{=} \lim_{x \to 0^-} -1 = -1.$$

Logo, pela Proposição (4.3.1), **<u>não</u>** *existirá o limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

ou seja, a função <u>f</u> **<u>não</u>** *é diferenciável em $x = 0$.*

Definição 6.2.3 *Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $x_o \in A$.*

Diremos que a função <u>f</u> é **<u>diferenciável à direita em x_o</u>** *se existir o limite lateral à direita:*

$$\lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.$$

Neste caso denotaremos o limite acima por $f'_+(x_o)$, que será dito **<u>derivada da função f à direita de x_o</u>**.

De modo semelhante, diremos que a função <u>f</u> é **<u>diferenciável à esquerda em x_o</u>** *se existir o limite lateral à esquerda:*

$$\lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.$$

Neste caso denotaremos o limite acima por $f'_-(x_o)$, que será dito **<u>derivada da função f à esquerda de x_o</u>**.

Com isto temos a:

Propriedades 6.2.1 *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $x_o \in A$ e $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

A função <u>f</u> é diferenciável em x_o se, e somente se, a função <u>f</u> é diferenciável à direita e à esquerda em x_o e além disso as derivadas à direita e à esquerda em x_o forem iguais, isto é,

$$f'_+(x_o) = f'_-(x_o).$$

Neste caso teremos

$$f'(x_o) = f'_+(x_o) = f'_-(x_o).$$

<u>Demonstração:</u>

Segue como consequência da Proposição (4.3.1).

□

Consideremos o

Exemplo 6.2.3 *Seja a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} x^2 + x\,, & \text{para} \quad x \in [0, \infty) \\ x\,, & \text{para} \quad x \in (-\infty, 0) \end{cases} .$$

A função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $x_o = 0$*? Caso seja diferenciável em* $x_o = 0$*, encontre o valor da derivada da função* $\underline{f}$ *em* $x_o = 0$*, isto é,* $f'(0)$*.*

Resolução:

Para estudar a diferenciabilidade da função $\underline{f}$ em $x = 0$, utilizaremos a Proposição acima.

Observemos que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{x<0}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{x - 0}{x - 0} \overset{x \neq 0}{=} \lim_{x \to 0^-} 1 = 1.$$

Logo a função $\underline{f}$ é diferenciável à esquerda de $x_o = 0$ e

$$f'_-(0) = 1.$$

Por outro lado, temos que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{x \geq 0}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{(x^2 + x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x+1)}{x} \overset{x \neq 0}{=} \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1.$$

Logo a função $\underline{f}$ é diferenciável à direita de $x_o = 0$ e

$$f'_+(0) = 1.$$

Como

$$f'_-(0) = 1 = f'_+(0),$$

pela Proposição (6.2.1), segue que a função $\underline{f}$ será diferenciável em $x_o = 0$ e além disso

$$f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0) = 1.$$

Observação 6.2.5

1. *Vale observar que a função* $\underline{f}$ *do Exemplo acima é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e além disso, a função derivada da função* $\underline{f}$ *, isto é, a função* $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *será dada por*

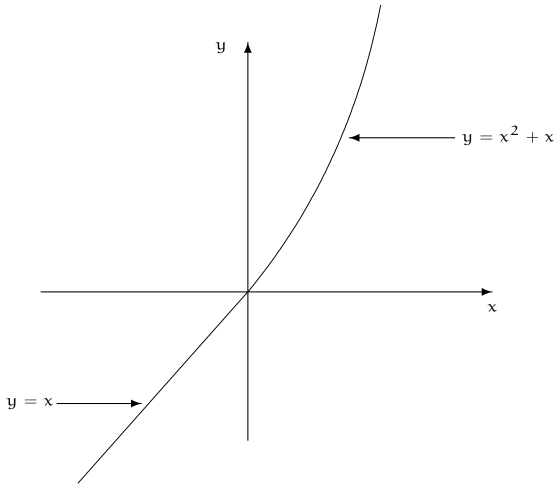
$$f'(x) \doteq \begin{cases} 2x + 1\,, & \text{para} \quad x \in [0, \infty) \\ 1\,, & \text{para} \quad x \in (-\infty, 0) \end{cases} .$$

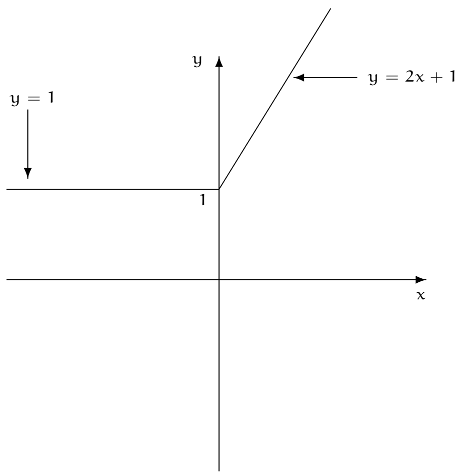
   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. *Notemos que a função* $\underline{f}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$*.*

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

3. *As representações geométricas dos gráficos das funções* $\underline{f}$ *e* $\underline{f'}$ *do Exemplo acima, são dadas pelas figuras abaixo:*





Temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 6.2.1 *Seja a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} x+2, & \textit{para} \quad x \in (-\infty, -1) \\ x^2, & \textit{para} \quad x \in [-1, 1] \\ 2-x, & \textit{para} \quad x \in (1, \infty) \end{cases} .$$

A função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $x_o = \pm 1$*? justifique sua resposta.*

Resolução:

Para estudar a diferenciabilidade da função $\underline{f}$, utilizaremos a Proposição (6.2.1).

Observemos que se $x_o = 1$ temos

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \overset{-1 \leq x < 1}{=} \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} \overset{x \neq 1}{=} \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2.$$

Logo a função $\underline{f}$ é diferenciável à esquerda de $x_o = 1$ e

$$f'_-(1) = 2.$$

Temos também que

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \overset{x \geq 1}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{(2-x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-(x-1)}{x - 1} \overset{x \neq 1}{=} \lim_{x \to 1^+} -1 = -1.$$

Logo a função $\underline{f}$ é diferenciável à direita de $x_o = 1$ e

$$f'_+(1) = -1.$$

Como

$$f'_-(1) \neq f'_+(1),$$

pela Proposição (6.2.1), segue que a função $\underline{f}$ **não** será diferenciável em $x_o = 1$.

De modo semelhante temos, para $x_o = -1$, que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \overset{x \leq -1}{=} \lim_{x \to -1^-} \frac{(x+2) - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x+1}{x+1} \overset{x \neq -1}{=} \lim_{x \to -1^-} 1 = 1.$$

Logo a função $\underline{f}$ é diferenciável à esquerda de $x_o = -1$ e

$$f'_-(-1) = 1.$$

Temos também que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \overset{-1 \leq x < 1}{=} \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} \overset{x \neq -1}{=} \lim_{x \to -1^+} (x - 1) = -2.$$

Logo a função $\underline{f}$ é diferenciável à direita de $x_o = -1$ e

$$f'_+(-1) = -2.$$

Como

$$f'_-(-1) \neq f'_+(-1),$$

pela Proposição (6.2.1), segue que a função $\underline{f}$ **não** será diferenciável em $x_o = -1$.

Observação 6.2.6

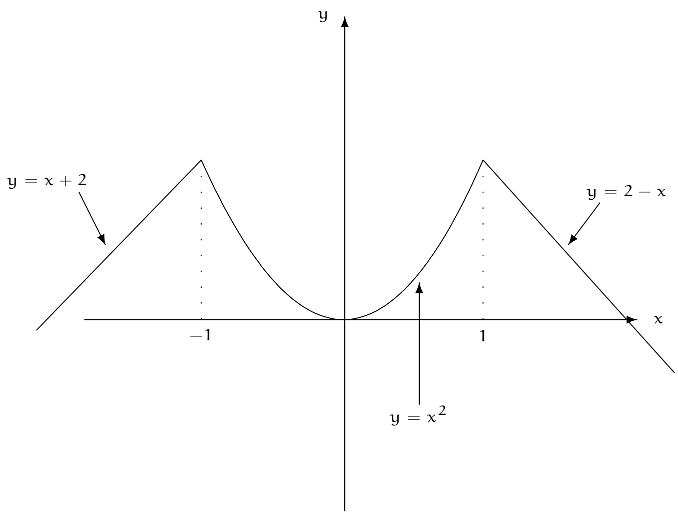
1. *A função $\underline{f}$ do Exercício acima é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.*

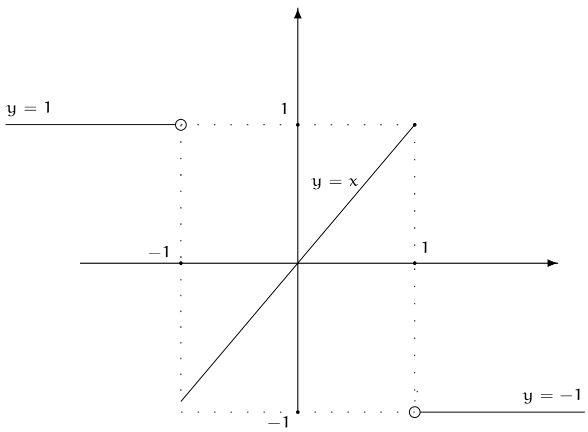
   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

   Além disso temos que a função derivada da função $\underline{f}$, isto é, a função $f' : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, será dada por:

$$f'(x) \doteq \begin{cases} 1\,, & para \quad x \in (-\infty, -1) \\ 2x\,, & para \quad x \in (-1, 1) \\ -1\,, & para \quad x \in (1, \infty) \end{cases} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

2. *Na figura abaixo temos as representações geométricas dos gráficos das funções $\underline{f}$ e $\underline{f'}$:*





3. *A função $\underline{f}$ acima é contínua em $\mathbb{R}$, em particualr, em $x_o = \pm 1$ mas **não** é diferenciável nesses pontos.*

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

4. *Observemos que a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ tem "bicos" nos pontos $(1, f(1)) = (1, 1)$ e $(-1, f(-1)) = (-1, 1)$ e assim **não** existirão as retas tangentes à representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, em cada um desses pontos.*

Com o conceito de derivada à direita e à esquerda podemos introduzir a:

Definição 6.2.4 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função.*
Diremos que a função $\underline{f}$ é **diferenciável em $[a, b]$** *se:*

(i) a função $\underline{f}$ é diferenciável em (a, b);

(ii) a função $\underline{f}$ é diferenciável à esquerda de $x = b$;

(iii) a função $\underline{f}$ é diferenciável à direita de $x = a$.

Neste caso definimos a **função derivada de $\underline{f}$** *, que será indicada por $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$, como sendo*

$$f'(x) \doteq \begin{cases} f'_+(a), & \text{para} \quad x = a, \\ f'(x), & \text{para} \quad x \in (a, b) \\ f'_-(b), & \text{para} \quad x = b \end{cases} \quad , \quad x \in [a, b].$$

Observação 6.2.7 *De modo semelhante podemos definir diferenciabilidade de uma função definida nos seguinte intervalos:*

$$(a, b], \quad [a, b), \quad [a, \infty) \quad e \quad (-\infty, b].$$

A elaboração dessas definições será deixada como exercício para o leitor.

A seguir temos o exercício resolvido:

Exercício 6.2.2 *Consederemos a função $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq x^2, \quad \text{para} \quad x \in [1, 5].$$

Mostre que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $[1, 5]$ e que a função derivada da função $\underline{f}$, $f' : [1, 5] \to \mathbb{R}$ será dada por

$$f'(x) = 2x, \quad \text{para} \quad x \in [1, 5].$$

Resolução:
De fato:

(i) a função $\underline{f}$ é diferenciável em $(1, 5)$, pois se $x_o \in (1, 5)$, temos que

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \overset{1<x_o<5}{=} \lim_{x \to x_o} \frac{x^2 - x_o^2}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{(x - x_o)(x + x_o)}{x - x_o}$$
$$\overset{x \neq x_o}{=} \lim_{x \to x_o} (x + x_o) = 2x_o,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é diferenciável em x_o e além disso

$$f'(x_o) = 2x_o, \quad \text{para} \quad x_o \in (1, 5).$$

(ii) $\underline{f}$ é diferenciável á direita de $x_o = 1$, pois:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \overset{1<x<5}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1^2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$\overset{x\neq 1}{=} \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é diferenciável á direita em $x_o = 1$ e além disso

$$f'_+(1) = 2;$$

(iii) a função $\underline{f}$ é diferenciável á esquerda de $x_o = 5$, pois:

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} \overset{1<x<5}{=} \lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-5^2}{x-5} = \lim_{x\to 5^-} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$$
$$\overset{x\neq 5}{=} \lim_{x\to 5^-} (x+5) = 10,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é diferenciável á esquerda em $x_o = 5$ e além disso

$$f'_-(5) = 10.$$

Portanto a função $\underline{f}$ é diferenciável em $[1,5]$ e além disso a função $f' : [1,5] \to \mathbb{R}$ será dada por

$$f'(x) = 2x\,, \quad \text{para} \quad x \in [1,5].$$

Observação 6.2.8 *No Exemplo (6.2.2), temos que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $x_o \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e é contínua em cada um desses pontos.*

Notemos também que em x_o a função $\underline{f}$ é contínua mas ***não*** *é diferenciável nesse ponto.*

Baseado nisto, perguntamos: será que existe algum relação entre diferenciabilidade e continuidade de uma função em um determinado ponto?

A resposta a esta questão é dado seguinte resultado:

Proposição 6.2.1 *Se uma função é diferenciável em um ponto então ela será contínua nesse ponto, mais especificamente, sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $x_o \in A$ e a função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é diferenciável em $x_o \in A$.*

Então a função $\underline{f}$ será contínua em x_o.

Demonstração:

Como a função $\underline{f}$ diferenciável em $x_o \in A$ temos que existe o limite:

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}.$$

Calculemos

$$\lim_{x\to x_o} [f(x)-f(x_o)] \overset{x\neq x_o}{=} \lim_{x\to x_o} \left[(x-x_o).\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right]$$
$$= \left[\lim_{x\to x_o}(x-x_o)\right]\left[\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right] = 0.f'(x_o) = 0.$$

Logo, da Proposição (4.4.3), segue que

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o),$$

mostrando que a função $\underline{f}$ será contínua em x_o, como queríamos demonstrar.

□

Observação 6.2.9

1. ***Não*** *vale a recíproca do resultado acima, isto é, existem funções que são contínuas em um ponto, mas* ***não*** *são diferenciáveis nesse ponto, como exemplo, a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*
$$f(x) \doteq |x|, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$
A função $\underline{f}$ *é contínua em* $x_o = 0$ *(deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor) mas, como vimos na Observação (6.2.4) item 1.,* ***não*** *é diferenciável em* $x_o = 0$.

2. *Observemos que no Exemplo considerado acima* ***não*** *existe o limite* $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, *quando* $x_o = 0$, *mas existem os limites laterais:*
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \quad e \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$
e têm valores distintos (ver Observação (6.2.4) item 1.).

Neste caso diremos que a função $\underline{f}$ *é diferenciável à direita e à esquerda no ponto* $x_o = 0$ *ou, mais geralmente, temos a:*

A seguir daremos um resultado relacionado com as operações básicas com funções diferenciáveis, a saber:

Proposição 6.2.2 *Sejam* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *duas funções, onde* $A \subseteq \mathbb{R}$ *é um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$ *e* $x_o \in A$.

Suponhamos que as funções $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$ *são diferenciáveis em* x_o.

Então:

(i) a função $(f + g)$ *será diferenciável em* x_o *e*
$$(f + g)'(x_o) = f'(x_o) + g'(x_o)\,,$$

(ii) a função $(f - g)$ *será diferenciável em* x_o *e*
$$(f - g)'(x_o) = f'(x_o) - g'(x_o)\,,$$

(iii) a função $(f.g)$ *será diferenciável em* x_o *e*
$$(f.g)'(x_o) = f'(x_o).g(x_o) + f(x_o).g'(x_o)\,,$$

(iv) se $g(x_o) \neq 0$, *a função* $\dfrac{f}{g}$ *será diferenciável em* x_o *e*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f'(x_o).g(x_o) - f(x_o).g'(x_o)}{[g(x_o)]^2}\,.$$

<u>**Demonstração:**</u>

<u>Do item (i):</u>

Como as funções f e g são diferenciáveis em x_o temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_o} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_o)}{x-x_o} &= \lim_{x\to x_o} \frac{[f(x)-f(x_o)]+[g(x)-g(x_o)]}{x-x_o} \\
&= \lim_{x\to x_o} \left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} + \frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\right] \\
&= \underbrace{\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}}_{=f'(x_o)} + \underbrace{\lim_{x\to x_o} \frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}}_{=g'(x_o)} = f\,'(x_o)+g\,'(x_o),
\end{aligned}$$

mostrando que a função $(f+g)$ é diferenciável em $x_o \in A$ e além disso

$$(f+g)'(x_o) = f\,'(x_o)+g\,'(x_o).$$

Do item (ii):
Como as funções f e g são diferenciáveis em x_o temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_o} \frac{(f-g)(x)-(f-g)(x_o)}{x-x_o} &= \lim_{x\to x_o} \frac{[f(x)-f(x_o)]-[g(x)-g(x_o)]}{x-x_o} \\
&= \lim_{x\to x_o} \left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} - \frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\right] \\
&= \underbrace{\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}}_{=f\,'(x_o)} - \underbrace{\lim_{x\to x_o} \frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}}_{=g\,'(x_o)} = f\,'(x_o)-g\,'(x_o),
\end{aligned}$$

mostrando que a função $(f-g)$ é diferenciável em $x_o \in A$ e além disso

$$(f-g)'(x_o) = f\,'(x_o)-g\,'(x_o).$$

Do item (iii):
Como as funções f e g são diferenciáveis em x_o temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_o} \frac{(f.g)(x)-(f.g)(x_o)}{x-x_o} &= \lim_{x\to x_o} \frac{f(x).g(x)-f(x_o).g(x)+f(x_o).g(x)-f(x_o)g(x_o)}{x-x_o} \\
& \lim_{x\to x_o} \frac{[f(x)-f(x_o)]\,.g(x)+f(x_o).\,[g(x)-g(x_o)]}{x-x_o} \\
&= \lim_{x\to x_o} \left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}.g(x)+f(x_o)\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\right] \\
&= \left[\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right]\left[\lim_{x\to x_o} g(x)\right] + \left[\lim_{x\to x_o} f(x_o)\right]\left[\lim_{x\to x_o} \frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\right].
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Como a função g é diferenciável em $x_o \in A$ segue, da Proposição (6.2.2), que a função g será contínua em x_o, ou seja,

$$\lim_{x\to x_o} g(x) = g(x_o).$$

Além disso, temos que

$$\lim_{x\to x_o} f(x_o) = f(x_o).$$

Aplicando-se estas informações, juntamente com o fato que as função $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são diferenciáveis em x_o, e as propriedades básicas de limites, segue de (6.6) que:

$$\lim_{x\to x_o} \frac{(f.g)(x)-(f.g)(x_o)}{x-x_o} = \underbrace{\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}}_{=f\,'(x_o)} . \underbrace{\lim_{x\to x_o} g(x)}_{=g(x_o)} + \underbrace{\lim_{x\to x_o} f(x_o)}_{=f(x_o)} . \underbrace{\lim_{x\to x_o} \frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}}_{=g\,'(x_o)}$$
$$= f\,'(x_o).g(x_o) + f(x_o).g\,'(x_o),$$

mostrando que a função $(f.g)$ é diferenciável em $x_o \in A$ e além disso

$$(f.g)'(x_o) = f\,'(x_o).g(x_o) + f(x_o).g\,'(x_o).$$

<u>Do item (iv):</u>

Como a função $\underline{g}$ é diferenciável em x_o segue, da Proposição (6.2.2) que a função $\underline{g}$ será contínua em x_o.

Como $g(x_o) \neq 0$, do Teorema da Conservação do Sinal (isto é, Teorema (4.4.1)) segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$g(x) \neq 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)\,.$$

Como as funções $\underline{f}$, $\underline{g}$ são diferenciáveis em x_o e $g(x) \neq 0$, para cada $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$, segue que:

$$\lim_{x\to x_o} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_o)}{g(x_o)}}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{\frac{g(x_o).f(x)-f(x_o).g(x)}{g(x_o).g(x)}}{x-x_o}$$
$$= \lim_{x\to x_o} \frac{g(x_o).f(x)-g(x_o).f(x_o)+g(x_o).f(x_o)-f(x_o).g(x)}{[g(x_o).g(x)].(x-x_o)}$$
$$= \lim_{x\to x_o} \frac{[f(x)-f(x_o)].g(x_o)+f(x_o).[g(x)-g(x_o)]}{[g(x_o).g(x)].(x-x_o)}$$
$$= \lim_{x\to x_o} \left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}.g(x_o) + f(x_o).\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\right].\frac{1}{g(x).g(x_o)}$$
$$= \left\{\left[\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right].\left[\lim_{x\to x_o} g(x_o)\right]\right.$$
$$\left. + \left[\lim_{x\to x_o} f(x_o)\right].\left[\lim_{x\to x_o} \frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\right]\right\}.\frac{\left[\lim_{x\to x_o} 1\right]}{\left[\lim_{x\to x_o} g(x)\right].\left[\lim_{x\to x_o} g(x_o)\right]}. \tag{6.7}$$

Como a função $\underline{g}$ é diferenciável em $x_o \in A$ segue, da Proposição (6.2.2), que a função $\underline{g}$ será contínua em x_o, ou seja,

$$\lim_{x\to x_o} g(x) = g(x_o).$$

Além disso, como $g(x_o) \neq 0$, segue que

$$\lim_{x\to x_o} \frac{1}{g(x).g(x_o)} = \frac{1}{\lim_{x\to x_o} g(x).\lim_{x\to x_o} g(x_o)} = \frac{1}{g^2(x_o)}.$$

Observemos também que

$$\lim_{x\to x_o} f(x_o) = f(x_o) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_o} g(x_o) = g(x_o).$$

Aplicando-se estas informações e a diferencibilidade das funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ em x_o a (6.7), obteremos:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_o)}{x - x_o} = \left\{ \left[\underbrace{\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}}_{= f\,'(x_o)} \right] \cdot \left[\underbrace{\lim_{x \to x_o} g(x_o)}_{= g(x_o)} \right] \right.$$
$$\left. + \left[\underbrace{\lim_{x \to x_o} f(x_o)}_{= f(x_o)} \right] \cdot \left[\underbrace{\lim_{x \to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o)}}_{= g\,'(x_o)} \right] \right\} \cdot \frac{\left[\overbrace{\lim_{x \to x_o} 1}^{=1} \right]}{\left[\underbrace{\lim_{x \to x_o} g(x)}_{= g(x_o)} \right] \cdot \left[\underbrace{\lim_{x \to x_o} g(x_o)}_{= g(x_o)} \right]}$$
$$= \frac{f\,'(x_o).g(x_o) - f(x_o).g\,'(x_o)}{[g(x_o)]^2},$$

mostrando que a função $\dfrac{f}{g}$ é diferenciável em $x_o \in A$ e além disso

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f\,'(x_o).g(x_o) - f(x_o).g\,'(x_o)}{[g(x_o)]^2},$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

A seguir exibiremos uma série de funções diferenciáveis e suas respectivas derivadas.

6.3 Diferenciabilidade e a derivada de algumas funções importantes

Começaremos pela

Proposição 6.3.1 *Consideremos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq C, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $C \in \mathbb{R}$ *está fixado.*

Então a função $\underline{f}$ *será diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e além disso, a função derivada* $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *será dada por*

$$f\,'(x) = 0, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

De fato, se $x_o \in \mathbb{R}$ temos que:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{C - C}{x - x_o} \overset{x \neq x_o}{=} \lim_{x \to x_o} 0 = 0,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $x_o \in \mathbb{R}$ e além disso temos que

$$f\,'(x_o) = 0, \quad \text{para cada} \quad x_o \in \mathbb{R},$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

A seguir temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 6.3.1 *Estudar a diferenciabilidade da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq \pi, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução:

Da Proposição acima, segue que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e além disso a função derivada $f\,' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será dada por

$$f\,'(x) = 0\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Como consequência da Proposição acima e da Proposição (6.2.2) temos o:

Corolário 6.3.1 *Seja* $g : A \to \mathbb{R}$ *um função,* $A \subseteq \mathbb{R}$ *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$ *e* $x_o \in A$.

Suponhamos que a função $\underline{g}$ *é diferenciável em* x_o *e que* $g(x_o) \neq 0$.

Então a função $\dfrac{1}{g}$ *será diferenciável em* $x_o \in A$ *e além disso a função derivada* $\left(\dfrac{1}{g}\right)$ *em* x_o *será dada por*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_o) = \frac{-g\,'(x_o)}{[g(x_o)]^2}.$$

Demonstração:

Se considerarmos $f : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq 1, \quad \text{para cada} \quad x \in A\,,$$

segue da Proposição acima que a função $\underline{f}$ será diferenciável em $x_o \in A$ e além disso

$$f\,'(x_o) = 0.$$

Como a função $\underline{g}$ é deferenciável em x_o e $g(x_o) \neq 0$ segue, da Proposição (6.2.2) item (iv), que a função $\dfrac{1}{g} = \dfrac{f}{g}$ será diferenciável em $x_o \in A$ e

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_o) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f\,'(x_o).g(x_o) - f(x_o).g\,'(x_o)}{[g(x_o)]^2} = \frac{0.g(x_o) - 1.g\,'(x_o)}{[g(x_o)]^2} = \frac{-g\,'(x_o)}{[g(x_o)]^2},$$

como queríamos mostrar.

□

Para a estudar a diferenciabilidade de uma função polinomial precisaremos da:

Proposição 6.3.2 *(Teorema do Binômio de Newton) Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

Então

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j,$$

onde

$$\binom{n}{j} \doteq \frac{n!}{(n-j)!\,j!}.$$

Demonstração:

A demonstração é feita por indução sobre $n \in \mathbb{N}$ e sua elaboração será deixada como exercício para o leitor.

□

Proposição 6.3.3 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *está fixado.*

Então a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e além disso a função derivada* $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *será dada por*

$$f'(x) = n x^{n-1}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

De fato, se $x_o \in \mathbb{R}$ temos que::

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \overset{\Delta x \doteq x - x_o \,,\, x \to x_o \text{ implicará que } \Delta x \to 0}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_o + \Delta x)^n - x_o^n}{\Delta x} \overset{\text{Binômio de Newton}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x_o^{n-j} [\Delta x]^j - x_o^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left\{ x_o^n + n x_o^{n-1} \Delta x + \dfrac{n(n-1)}{2} x_o^{n-2} [\Delta x]^2 + \cdots + n x_o [\Delta x]^{n-1} + [\Delta x]^n \right\} - x_o^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n x_o^{n-1} \Delta x + \dfrac{n(n-1)}{2} x_o^{n-2} [\Delta x]^2 + \cdots + n x_o [\Delta x]^{n-1} + [\Delta x]^n}{\Delta x}$$

$$\overset{\Delta x \neq 0}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ n x_o^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x_o^{n-2} \Delta x + \cdots + n x_o [\Delta x]^{n-2} + [\Delta x]^{n-1} \right\}$$

$$\overset{\text{Exercício}}{=} n x_o^{n-1}$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $x_o \in \mathbb{R}$.

Além disso, da identidade acima, segue que

$$f'(x_o) = n\, x_o^{n-1}, \quad \text{para cada} \quad x_o \in \mathbb{R},$$

como queríamos mostrar.

□

A seguir temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 6.3.2 *Estudar a diferenciabilidade da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq x^3, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

e encontrar a função derivada associada à mesma.

Resolução:

Da Proposição acima (considerando-se $n = 3$), segue que a função $\underline{f}$ será diferenciável em $\mathbb{R}$ e além disso a função derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será dada por

$$f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observação 6.3.1

1. *Utilizando a Proposição (6.2.2) e a Proposição acima podemos estudar a diferenciabilidade para funções polinomiais e encontrar, explicitamente, as expressões de suas, respectivas, derivadas.*

   Mais especificamente se a função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

   onde $n \in \mathbb{N}$ *e* $a_o, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ *estão fixados, então, pela Proposição (6.2.2) itens (i), (ii) e (iii), segue que a função* $\underline{f}$ *será diferenciável em* $\mathbb{R}$ *(pois é a soma de produtos de funções dos tipos dos exibidos na Proposições acima, que são funções diferenciáveis em* $\mathbb{R}$*).*

   Além disso temos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n\right] \\
&= \frac{d}{dx}[a_o] + \frac{d}{dx}[a_1 x] + \frac{d}{dx}\left[a_2 x^2\right] + \cdots + \frac{d}{dx}\left[a_{n-1} x^{n-1}\right] + \frac{d}{dx}\left[a_n x^n\right] \\
&= 0 + \left\{\frac{d}{dx}[a_1].x + a_1.\frac{d}{dx}[x]\right\} + \left\{\frac{d}{dx}[a_2].x^2 + a_2.\frac{d}{dx}[x^2]\right\} \\
&\quad + \cdots + \left\{\frac{d}{dx}[a_{n-1}].x^{n-1} + a_{n-1}.\frac{d}{dx}\left[x^{n-1}\right]\right\} + \left\{\frac{d}{dx}[a_n].x^n + a_n.\frac{d}{dx}\left[x^n\right]\right\} \\
&= \{0.x + a_1.1\} + \left\{0.x^2 + a_2.2x\right\} + \cdots + \left\{0.'x^{n-1} + a_{n-1}.(n-1)x^{n-2}\right\} + \left\{0.x^n + a_n.nx^{n-1}\right\} \\
&= a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1}, \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

   ou seja, a função $\underline{f'}$ *também será uma função polinomial, em particular, toda função polinomial será diferenciável em* $\mathbb{R}$*.*

2. *Pela expressão (6.8) acima, vemos que se a função polinomial* $\underline{f}$ *tem por sua expressão um polinômio de grau* $\underline{n}$ *(isto é,* $a_n \neq 0$*) então a função derivada* $\underline{f'}$*, também será uma função polinomial e terá por sua expressão um polinômio de grau igual a* $\underline{n-1}$ *(pois neste caso temos que* $a_n \neq 0$ *e vemos na expressão (6.8) que o grau do polinômio que define a função* $\underline{f'}$ *será* $(n-1)$*).*

3. *A Proposição (6.2.2) e a Observação acima garantem que uma função racional é diferenciável no seu domínio.*

   Mais especificamente, se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

   onde $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções polinomiais então, pela Proposição (6.2.2) itens (iv) e a Observação acima, segue que a função* $\underline{f}$ *será diferenciável no seu domínio, ou seja, em*

$$\mathrm{Dom}(f) \doteq \{x \in \mathbb{R};\, q(x) \neq 0\}.$$

   Isto decorre devido ao fato que a função $\underline{f}$ *é o quociente de funções polinomiais que, por sua vez, são diferenciáveis em* $\mathbb{R}$*.*

   Além disso temos

$$f'(x) = \left(\frac{p}{q}\right)'(x) = \frac{p'(x).q(x) - p(x).q'(x)}{[q(x)]^2}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathrm{Dom}(f),$$

em particular, a função $\underline{f'}$ *também será uma função racional, com o mesmo domínio da função* $\underline{f}$.

A seguir temos os seguintes exercícios resolvidos:

Exercício 6.3.3 *Estudar a diferenciabilidade das seguintes funções e encontrar, onde existir, as suas respectivas funções derivadas:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*
$$f(x) \doteq 4x^3 - 2x + 1, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R};$$

2. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*
$$f(x) \doteq \left(4x^5 + 3x^3 - 1\right) . \left(2x^2 - 4x\right), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R};$$

3. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*
$$f(x) \doteq \frac{3x^2 - x}{x^2 + 1}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução:

Do item 1.:

Temos que a função $\underline{f}$ é uma função polinomial, logo, pela Observação acima item 1., será uma função diferenciável em $\mathbb{R}$.

Além disso, para $x \in \mathbb{R}$ temos, pela Observação acima item 1., que:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[4x^3 - 2x + 1\right] = 4.\left[3x^{3-1}\right] - 2\left[x^{1-1}\right] + 0 = 12x^2 - 2.$$

Do item 2.:

Temos que a função $\underline{f}$ é uma função polinomial (pois é o produto de duas funções polinomiais).

Logo, pela Observação acima item 1., será uma função diferenciável em todo $\mathbb{R}$.

Além disso, para $x \in \mathbb{R}$ temos, pela regra de derivação do produto e a Observação acima item 1., que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\left(4x^5 + 3x^3 - 1\right) . \left(2x^2 - 4x\right)\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[4x^5 + 3x^3 - 1\right] . \left(2x^2 - 4x\right) + \left(4x^5 + 3x^3 - 1\right) . \frac{d}{dx}\left[2x^2 - 4x\right] \\
&= \left[4\left(5.x^{5-1}\right) + 3.\left(3x^{3-1}\right) - 0\right] . \left(2x^2 - 4x\right) + \left(4x^5 + 3x^3 - 1\right) . \left[2\left(x^{2-1}\right)x - 4\left(x^{1-1}\right)\right] \\
&= \left[20x^4 + 9x^2\right] . \left(2x^2 - 4x\right) + \left(4x^5 + 3x^3 - 1\right) . [4x - 4] .
\end{aligned}$$

Do item 3.:

Temos que a função $\underline{f}$ é uma função racional, logo, pela Observação acima item 2., será uma função diferenciável em todo o seu domínio.

Observemos que como $x^2 + 1 \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, teremos que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Além disso, para $x \in \mathbb{R}$ temos, pela regra de derivação do quociente e a Observação acima item 1., que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{d}{dx}\left[3x^2 - x\right].\left(x^2+1\right) - \left(3x^2 - x\right).\frac{d}{dx}\left[x^2+1\right]}{\left[x^2+1\right]^2} \\ &= \frac{\left[3\left(2x^{2-1}\right) - 1.x^{1-1}\right].\left(x^2+1\right) - \left(3x^2-x\right).\left[\left(2.x^{2-1}\right)+0\right]}{\left[x^2+1\right]^2} \\ &= \frac{(6x-1).\left(x^2+1\right) - \left(3x^2-x\right).2x}{\left[x^2+1\right]^2}. \end{aligned}$$

Temos a seguinte aplicação das técnicas acima:

Exercício 6.3.4 *Suponhamos que uma partícula move-se ao longo de uma reta segundo a seguinte lei:* $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$x(t) \doteq 3t^3 + 4t^2 - t + 1, \quad \textit{para cada} \quad t \in [0, \infty).$$

Pede-se:

1. *encontrar a velocidade da partícula no instante* $t = 2\,s$*;*
2. *faça um esboço da representação geométrica do gráfico da velocidade* $\times$ *tempo;*
3. *a partícula para em algum instante* $t \geq 0$*? em que instante?*

Resolução:

Sabemos que a função $x = x(t)$ é diferenciável em $[0, \infty)$ (pois é uma função polinomial, logo diferenciável).

Logo a velocidade em um instante $t \in [0, \infty)$ será dada pela derivada da função $x = x(t)$ em relação a $\underline{t}$.

Da Observação (6.3.1) segue que

$$\begin{aligned} v(t) = x'(t) &= \frac{d}{dt}\left[3t^3 + 4t^2 - t + 1\right] = 3.\frac{d}{dt}\left[t^3\right] + 4.\frac{d}{dt}\left[t^2\right] - \frac{d}{dt}[t] + \frac{d}{dt}[1] \\ &= 3.\left[3t^2\right] + 4.(2t) - 1 + 0 = 9t^2 + 8t - 1, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Do item 1.:

Logo a velocidade isntantânea da partícula no instante $t = 2\,s$ será dada por

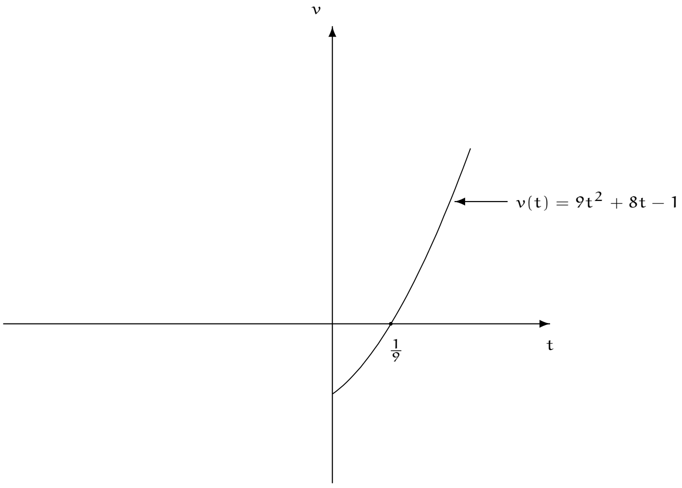
$$v(2) = x'(2) = 9.2^2 + 8.2 - 1 = 51\,m/s.$$

Do item 2.:

A representação geométrica do gráfico da função

$$v(t) = 9t^2 + 8t - 1, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R},$$

é dada pela figura abaixo.



<u>Do item 3.:</u>

A partícula para no instante $t = \frac{1}{9}$ s pois, teremos que $v\left(\frac{1}{9}\right) = 9\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 8.\left(\frac{1}{9}\right) - 1 = 0$.

6.4 Diferenciabilidade e derivadas das funções trigonométricas

Nesta seção trataremos da questão da diferenciabilidade de todas as funções trigonométricas.

6.4.1 Função seno

Proposição 6.4.1 *A função seno é diferenciável em $\mathbb{R}$, isto é, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq \text{sen}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}$ e além disso a função $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será dada por

$$f'(x) = \cos(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}\,\text{sen}(x) = \cos(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

<u>**Demonstração:**</u>

De fato, para cada $x_o \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} &\overset{\Delta x \doteq x - x_o,\, x \to x_o \Rightarrow \Delta x \to 0}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(x_o + \Delta x) - \text{sen}(x_o)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[\text{sen}(x_o).\cos(\Delta x) + \text{sen}(\Delta x).\cos(x_o)] - \text{sen}(x_o)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x}.\,\text{sen}(x_o) + \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x}.\cos(x_o) \right) \\
&= \left\{ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} \right\}.\left\{ \lim_{\Delta x \to 0} \text{sen}(x_o) \right\} + \left\{ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \right\}.\left\{ \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x_o) \right\}. \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} &\overset{\cos(\Delta x)+1 \neq 0}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} . \frac{\cos(\Delta x) + 1}{\cos(\Delta x) + 1} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\cos^2(\Delta x) - 1}{\Delta x} . \frac{1}{\cos(\Delta x) + 1} \right) \\
&\overset{\cos^2(\Delta x) - 1 = -\operatorname{sen}^2(\Delta x)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{-\operatorname{sen}^2(\Delta x)}{\Delta x} . \frac{1}{\cos(\Delta x) + 1} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} . \operatorname{sen}(\Delta x) . \frac{1}{\cos(\Delta x) + 1} \right) \\
&\overset{\text{Prop. (4.4.5)}}{=} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} . \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}(\Delta x) . \frac{\lim_{\Delta x \to 0} 1}{\lim_{\Delta x \to 0} \cos(\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} 1} \\
&\overset{\text{Teor. (4.42), Exemplos (4.4.6), (4.4.8)}}{=} -1.0.\frac{1}{1+1} = 0 \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

Além disso, temos que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}(x_o) = \operatorname{sen}(x_o) \qquad (6.11)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos(x_o) = \cos(x_o). \qquad (6.12)$$

Logo substituindo (6.10), (6.11) e (6.12) em (6.9) obteremos

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = 0.\operatorname{sen}(x_o) + 1.\cos(x_o) = \cos(x_o),$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $x_o \in \mathbb{R}$ e que

$$f'(x_o) = \cos(x_o), \quad \text{para cada} \quad x_o \in \mathbb{R},$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 6.4.1 *A Proposição acima nos mostra a importância do 1.o Limite Fundamental, a saber, para o estudo da diferenciabilidade da função seno.*

6.4.2 Função cosseno

Proposição 6.4.2 *A função cosseno é diferenciável em $\mathbb{R}$, isto é, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}$ e além disso a função $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será dada por:

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\operatorname{sen}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

De fato, para cada $x_o \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} &\overset{\Delta x \doteq x - x_o,\, x\to x_o \Rightarrow \Delta x \to 0}{=} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(x_o+\Delta x)-\cos(x_o)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[\cos(x_o)\,\cos(\Delta x) - \operatorname{sen}(x_o)\,\operatorname{sen}(\Delta x)] - \cos(x_o)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left(\cos(x_o)\,\frac{[\cos(\Delta x)-1]}{\Delta x} - \operatorname{sen}(x_o)\frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}\right) \\
&= \left\{\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x_o)\right\}\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}\right\} - \left\{\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{sen}(x_o)\right\}\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}\right\}. \qquad (6.13)
\end{aligned}$$

Vimos na demonstração da Proposição acima que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[\cos(\Delta x)-1]}{\Delta x} \overset{(6.10)}{=} 0, \qquad (6.14)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x_o) = \cos(x_o), \qquad (6.15)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{sen}(x_o) = \operatorname{sen}(x_o). \qquad (6.16)$$

Logo substituindo (6.14), (6.15) e (6.16) em (6.13) obteremos

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \cos(x_o).0 - \operatorname{sen}(x_o).1 = -\operatorname{sen}(x_o),$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $x_o \in \mathbb{R}$ e que

$$f'(x_o) = -\operatorname{sen}(x_o), \quad \text{para cada} \quad x_o \in \mathbb{R},$$

completando a demonstração do resultado.

□

6.4.3 Função tangente

Proposição 6.4.3 *A função tangente é diferenciável em seu domínio, isto é, a função*

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2};\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$

é dada por

$$f(x) \doteq \operatorname{tg}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2};\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

é uma função diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2};\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Além disso a função $f' : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2};\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ *será dada por*

$$f'(x) = \sec^2(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2};\, k \in \mathbb{Z}\right\},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg}(x) = \sec^2(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2};\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Demonstração:

Como as funções cosseno e seno são diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e

$$\cos(x) \neq 0\,, \qquad \text{para} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

segue, da Proposição (6.2.2) item (iv), que a função $\underline{f}$ será diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Além disso, para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, teremos:

$$f\,'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right] = \frac{\left[\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x)\right].\cos(x) - \operatorname{sen}(x).\left[\frac{d}{dx}\cos(x)\right]}{[\cos(x)]^2}$$

$$\overset{\text{Prop. (6.4.1) e (6.4.2)}}{=} \frac{\cos(x).\cos(x) - \operatorname{sen}(x).[-\operatorname{sen}(x)]}{[\cos(x)]^2} = \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{[\cos(x)]^2}$$

$$= \frac{1}{[\cos(x)]^2} = \sec^2(x),$$

completando a demonstração do resultado.

□

6.4.4 Função cotangente

Proposição 6.4.4 *A função cotangente é diferenciável em seu domínio, isto é, a função*

$$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) \doteq \operatorname{cotg}(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$$

é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Além disso a função $f\,' : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ *será dada por*

$$f\,'(x) = -\operatorname{cossec}^2(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cotg}(x) = -\operatorname{cossec}^2(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Demonstração:

Como as as funções seno e cosseno são diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e

$$\cos(x) \neq 0 \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\},$$

segue, da Proposição (6.2.2) item (iv), que a função $\underline{f}$ será diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Além disso, se $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$, teremos:

$$f\,'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right] = \frac{\left[\frac{d}{dx}\cos(x)\right].\operatorname{sen}(x) - \cos(x).\left[\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x)\right]}{[\operatorname{sen}(x)]^2}$$

$$\overset{\text{[Prop. (6.4.1) e (6.4.2)]}}{=} \frac{-\operatorname{sen}(x).\operatorname{sen}(x) - \cos(x).\cos(x)}{[\operatorname{sen}(x)]^2} = \frac{-\left[\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)\right]}{[\operatorname{sen}(x)]^2}$$

$$= -\frac{1}{[\operatorname{sen}(x)]^2} = -\operatorname{cossec}^2(x),$$

completando a demonstração do resultado.

□

6.4.5 Função secante

Proposição 6.4.5 *A função secante é diferenciável em seu domínio, isto é, a função*

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) \doteq \sec(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Além disso, a função $f' : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$ *será dada por*

$$f'(x) = \sec(x).\operatorname{tg}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx} \sec(x) = \sec(x).\operatorname{tg}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Demonstração:

Como a função cosseno é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$\cos(x) \neq 0 \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

segue, do Corolário (6.3.1), que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Além disso, para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$, teremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\cos(x)}\right] = -\frac{\frac{d}{dx}[\cos(x)]}{[\cos(x)]^2} = -\frac{[-\operatorname{sen}(x)]}{[\cos(x)]^2} = \frac{1}{\cos(x)}.\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \\ &= \sec(x).\operatorname{tg}(x), \end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

□

6.4.6 Função cossecante

Proposição 6.4.6 *A função cossecante é diferenciável em seu domínio, isto é, a função*

$$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) \doteq \operatorname{cossec}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$$

é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$.

Além disso, a função $f' : \mathbb{R} \setminus \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ *será dada por:*

$$f'(x) = -\operatorname{cossec}(x).\operatorname{cotg}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cossec}(x) = -\operatorname{cossec}(x).\operatorname{cotg}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Demonstração:

Como a função seno é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$\operatorname{sen}(x) \neq 0 \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$$

segue, do Corolário (6.3.1), que a função $\underline{f}$ será diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Além disso, para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, teremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right] = -\frac{\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x)]}{\operatorname{sen}^2(x)} = -\frac{[\cos(x)]}{\operatorname{sen}^2(x)} = -\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} . \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \\ &= -\operatorname{cossec}(x) . \operatorname{cotg}(x), \end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

□

6.5 Diferenciabilidade e derivada da função inversa

O resultado a seguir será muito útil para estudarmos a diferenciabilidade e encontrarmos uma expressão da derivada da função inversa (quando for possível aplicá-lo).

Teorema 6.5.1 *(da Derivada da Função Inversa) Sejam A um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $x_o \in A$. Suponhamos que a função $f : A \to \mathbb{R}$ seja estritamente crescente (ou estritamente decrescente) em A, diferenciável em x_o e*

$$f'(x_o) \neq 0.$$

Então a função inversa associada a função $\underline{f}$, $f^{-1} : f(A) \to A$, será diferenciável em $y_o \doteq f(x_o)$ e além disso

$$\frac{d f^{-1}}{dy}(y_o) = \frac{1}{\frac{d f}{dx}(x_o)} . \tag{6.17}$$

Demonstração:

Do fato que a função $\underline{f}$ é estritamente crescente (ou estritamente decrescente) segue que ela será uma função injetora em A.

Logo a função $f : A \to f(A)$ será uma função bijetora, portanto admite função inversa, $f^{-1} : f(A) \to A$.

Mostremos que a função f^{-1} é diferenciável em $y_o = f(x_o) \in f(A)$.

Para isto, observemos que, como a função $\underline{f}$ é diferenciável em $x_o \in A$, temos que

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}. \tag{6.18}$$

Em particular, da Proposição (6.2.2), segue que a função $\underline{f}$ será contínua em $x_o \in A$, isto é,

$$f(x_o) = \lim_{x \to x_o} f(x). \tag{6.19}$$

A Proposição (5.5.1) garante que a função inversa f^{-1} será contínua em $y_o = f(x_o)$.

Observemos também que

$$y = f(x) \quad \text{se, e somente se,} \quad x = f^{-1}(y). \tag{6.20}$$

Logo, da continuidade da função f^{-1} e de (6.20), segue que

$$\text{se} \quad y \to y_o\,, \quad \text{então} \quad x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_o) = x_o.$$

Portanto, da Proposição (4.5.1) (ou da Observação (4.5.1) item 2.), segue que

$$\lim_{y\to y_o} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)}{y - y_o} \overset{x=f^{-1}(y),\, x_o=f^{-1}(y_o),\, y=f(x),\, y_o=f(y_o)}{=} \lim_{x\to x_o} \frac{x - x_o}{f(x) - f(x_o)}$$
$$\overset{x\neq x_o}{=} \lim_{x\to x_o} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}} \overset{6.18}{=} \frac{1}{\dfrac{d\,f}{dx}(x_o)},$$

mostrando que a função f^{-1} é diferenciável em $y_o = f(x_o)$ e além disso

$$\frac{d\,f^{-1}}{dy}(y_o) = \frac{1}{\dfrac{d\,f}{dx}(x_o)},$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 6.5.1 *Em resumo, se as hipóteses do resultado acima estão satisfeitas, temos que a derivada da função inversa é o inverso da derivada da função (aplicadas nos correspondentes pontos).*

A seguir aplicaremos o resultado acima para estudar a diferenciabilidade de todas as funções inversas das funções trigonométricas.

Começaremos pela:

6.5.1 Função arco-seno

Proposição 6.5.1 *Consideremos a função* $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1, 1)$ *dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Então a função $\underline{f}$ admite função inversa, $f^{-1} : (-1, 1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, *que será diferenciável em* $(-1, 1)$.

Além disso, a função $\dfrac{d\,f^{-1}}{dy} : (-1, 1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *será dada por*

$$\frac{d\,f^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in (-1, 1),$$

ou seja,

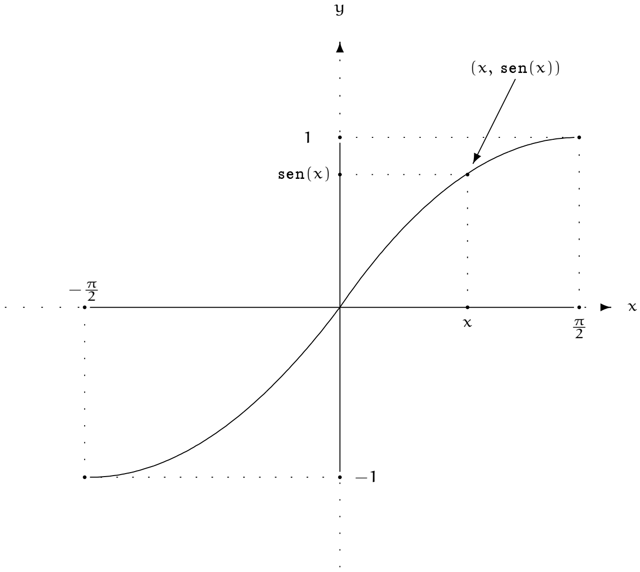
$$\frac{d}{dy} \operatorname{arcsen}(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in (-1, 1). \tag{6.21}$$

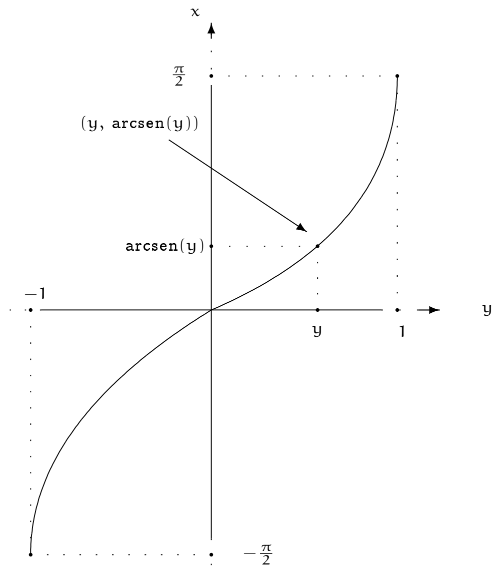
<u>**Demonstração:**</u>

Observemos que a função $\underline{f}$ é estritamente crescente em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e sobrejetora.

Logo admite função inversa que, como vimos anteriormente, é denominada função arco-seno e indicada por arcsen (ou sen^{-1}).

As representações geométricas dos gráficos da função $\underline{f}$ e de sua função inversa f^{-1} são dadas pelas figuras abaixo.





Como a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e

$$f'(x) = \cos(x) \neq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

segue, do Teorema da Derivada da Função Inversa (isto é, Teorema (6.5.1)), que a função f^{-1} será diferenciável em $(-1, 1)$.

Além disso, para cada $y \in (-1, 1)$, existe um único $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ de modo que $y = f(x) = \text{sen}(x)$, e assim teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{d f^{-1}}{dy}(y) &\overset{(6.17)}{=} \frac{1}{\dfrac{df}{dx}(x)} = \frac{1}{\dfrac{d}{dx}[\text{sen}(x)]} = \frac{1}{\cos(x)} \\
&\overset{\text{se } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ teremos } \cos(x) > 0, \text{ logo } \cos(x) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(x)}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(x)}} \\
&\overset{\text{sen}(x) = y}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração do resultado.

□

Observação 6.5.2 *Em resumo: a função* $\text{arcsen} : (-1, 1) \to \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *é diferenciável em* $(-1, 1)$ *e*

$$\frac{d}{dy}\,\text{arcsen}(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad \textit{para cada} \quad y \in (-1, 1). \tag{6.22}$$

6.5.2 Função arco-coseno

Proposição 6.5.2 *Consideremos a função* $f : (0, \pi) \to (-1, 1)$ *dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in (0, \pi).$$

Então a função $\underline{f}$ admite função inversa, $f^{-1} : (-1, 1) \to (0, \pi)$, que será diferenciável em $(-1, 1)$.

Além disso, a função $\dfrac{d f^{-1}}{dy} : (-1, 1) \to (0, \pi)$ será dada por

$$\frac{d f^{-1}}{dy}(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad \textit{para cada} \quad y \in (-1, 1),$$

ou seja,

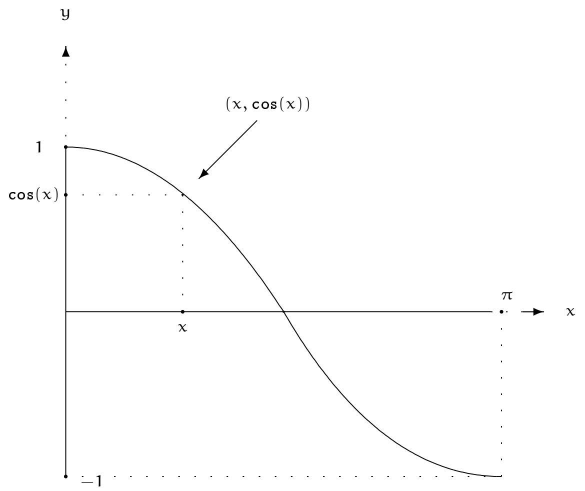
$$\frac{d}{dy} \arccos(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad \textit{para cada} \quad y \in (-1, 1). \tag{6.23}$$

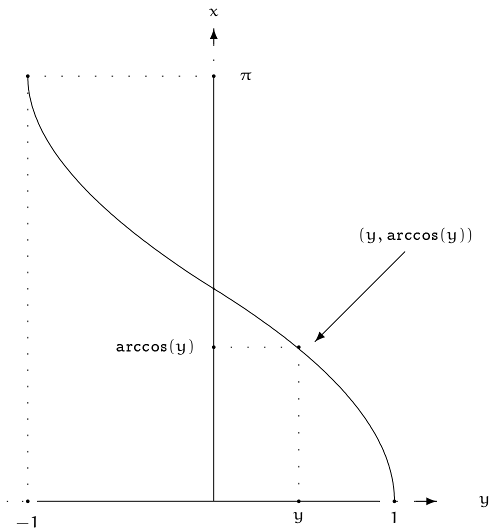
Demonstração:

Observemos que a função $\underline{f}$ é estritamente decrescente em $(0, \pi)$ e sobrejetora.

Logo admite função inversa que, como vimos anteriormente, é denominada função arco-coseno e indicada por arccos (ou $\cos^{-1}$).

As representações geométricas dos gráficos da função $\underline{f}$ e de sua função inversa f^{-1} são dadss pelas figuras abaixo.





Como a função $\underline{f}$ é diferenciável em $(0, \pi)$ e

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x) \neq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \pi)$$

segue, do Teorema da Derivada da Função Inversa (isto é, Teorema (6.5.1)), que a função f^{-1} será diferenciável em $(-1, 1)$.

Além disso, para cada $y \in (-1, 1)$, existe um único $x \in (-\pi, \pi)$ de modo que $y = f(x) = \cos(x)$, e assim teremos:

$$\frac{d f^{-1}}{dy}(y) \overset{(6.17)}{=} \frac{1}{\dfrac{d f}{dx}(x)} = \frac{1}{\dfrac{d}{dx}[\cos(x)]} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(x)}$$

$$\overset{\text{se } x \in (0,\pi), \text{ teremos } \operatorname{sen}(x) > 0, \text{ logo } \operatorname{sen}(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}}{=} \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}}$$

$$\overset{\cos(x) = y}{=} \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}, \tag{6.24}$$

concluindo a demonstração do resultado.

□

Observação 6.5.3 *Em resumo: a função* $\arccos : (-1, 1) \to (0, \pi)$ *é diferenciável em* $(-1, 1)$ *e*

$$\frac{d}{dy} \arccos(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad \textit{para cada} \quad y \in (-1, 1). \tag{6.25}$$

6.5.3 Função arco-tangente

Proposição 6.5.3 *Consideremos a função* $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{tg}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Então a função $\underline{f}$ *admite função inversa,* $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$*, que será diferenciável em* $\mathbb{R}$*.*

Além disso, a função $\frac{d f^{-1}}{dy} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *será dada por*

$$\frac{d f^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{1 + y^2}, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R},$$

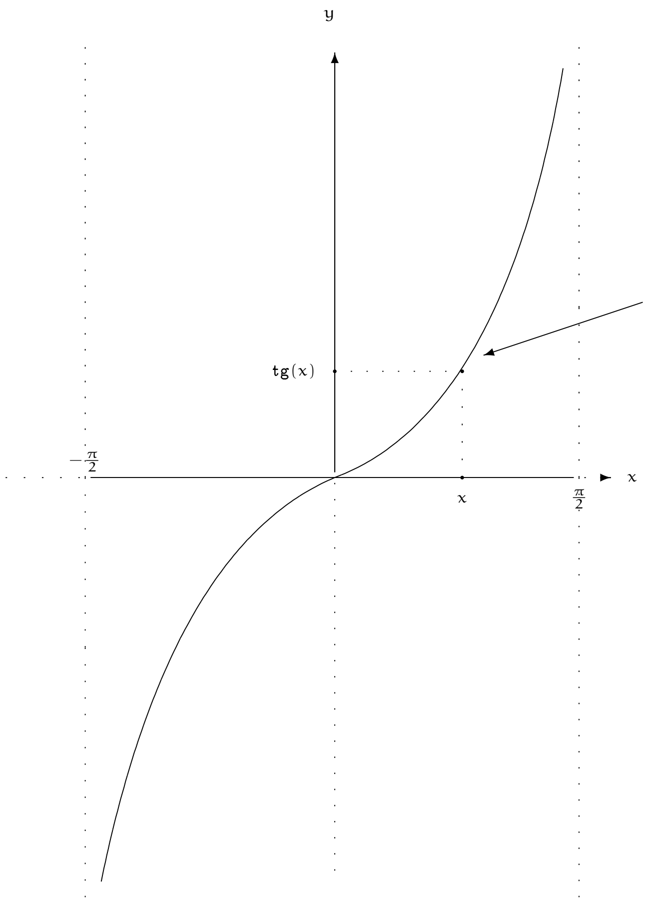
ou seja,

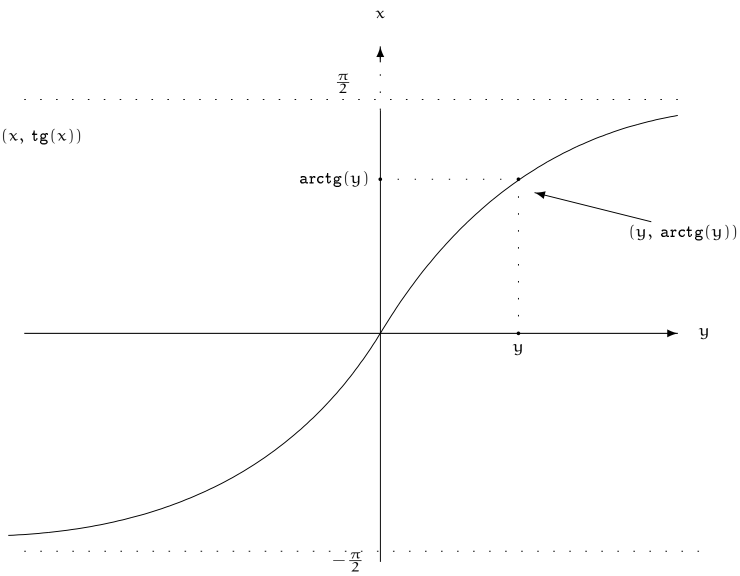
$$\frac{d}{dy} \operatorname{arctg}(y) = \frac{1}{1 + y^2}, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R}. \tag{6.26}$$

Demonstração:

Observemos que a função $\underline{f}$ é estritamente crescente em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e sobrejetora, logo admite função inversa que, como vimos anteriormente, é denominada função arco-tangente e indicada por arctg (ou tg^{-1}).

As representações geométricas dos gráficos da função $\underline{f}$ e de sua função inversa f^{-1} são dadas pelas figuras abaixo.





Como a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e

$$f'(x) \overset{\text{Prop. (6.4.3)}}{=} \sec^2(x) \neq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

segue, do Teorema da Derivada da Função Inversa, que a função f^{-1} será diferenciável em $(-1, 1)$.

Além disso, para cada $y \in \mathbb{R}$, segue que existe um único $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de modo que $y = f(x) = \operatorname{tg}(x)$, e assim teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{d f^{-1}}{dy}(y) &\overset{(6.17)}{=} \frac{1}{\dfrac{d f}{dx}(x)} = \frac{1}{\dfrac{d}{dx}[\operatorname{tg}(x)]} = \frac{1}{\sec^2(x)} \\
&\overset{\sec^2(x)=\operatorname{tg}^2(x)+1}{=} \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(x)} \\
&\overset{\operatorname{tg}(x)=y}{=} \frac{1}{1+y^2},
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 6.5.4 *Em resumo: a função* $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e*

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arctg}(y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R}. \tag{6.27}$$

6.5.4 Função arco-cotangente

Proposição 6.5.4 *Consideremos a função* $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{cotg}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in (0, \pi).$$

Então a função $\underline{f}$ *admite função inversa,* $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$*, que será diferenciável em* $\mathbb{R}$*.*

Além disso a função $\dfrac{d\,f^{-1}}{dy} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ *será dada por*

$$\frac{d\,f^{-1}}{dy}(y) = \frac{-1}{1 + y^2}, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R},$$

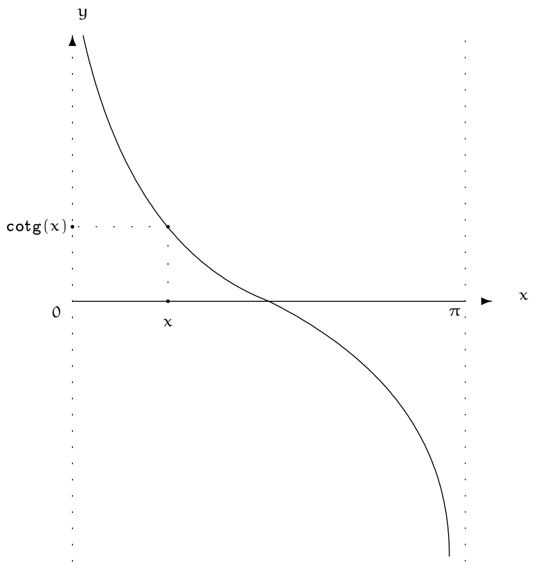
ou seja,

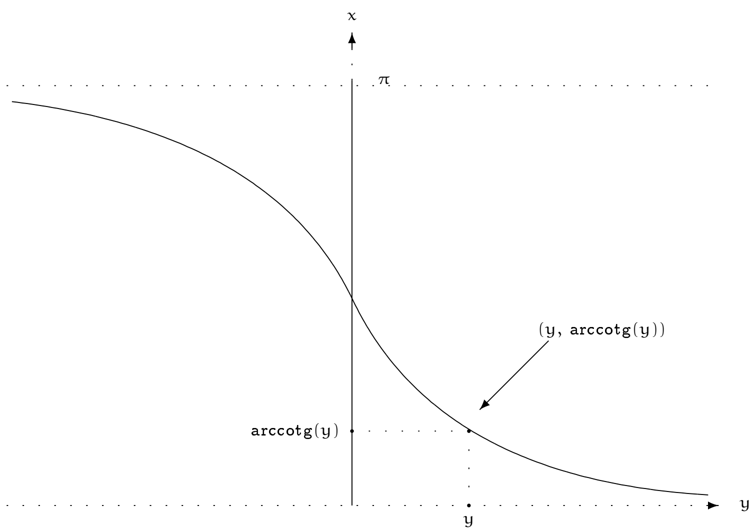
$$\frac{d}{dy} \operatorname{arccotg}(y) = \frac{-1}{1 + y^2}, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R}. \tag{6.28}$$

Demonstração:

Observemos que a função $\underline{f}$ é estritamente decrescente em $(0, \pi)$ e sobrejetora, logo admite função inversa que, como vimos anteriormente, é denominada função arco-cotangente e indicada por arccotg (ou cotg^{-1}).

As representações geométricas dos gráficos da função $\underline{f}$ e de sua função inversa f^{-1} são dadas pelas figuras abaixo.





Como a função $\underline{f}$ é diferenciável em $(0, \pi)$ e

$$f'(x) \overset{\text{Prop. (6.4.4)}}{=} -\operatorname{cossec}^2(x) \neq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \pi),$$

segue, do Teorema da Derivada da Função Inversa, que a função f^{-1} será diferenciável em $(-1, 1)$.

Além disso, para $y \in \mathbb{R}$, existe um único $x \in (0, \pi)$ de modo que $y = f(x) = \operatorname{cotg}(x)$, e assim teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{d\,f^{-1}}{dy}(y) &\overset{(6.17)}{=} \frac{1}{\dfrac{d\,f}{dx}(x)} = \frac{1}{\dfrac{d}{dx}[\operatorname{cotg}(x)]} = \frac{1}{-\operatorname{cossec}^2(x)} \\
&\overset{\operatorname{cossec}^2(x) = \operatorname{cotg}^2(x) + 1}{=} \frac{-1}{1 + \operatorname{cotg}^2(x)} \\
&\overset{\operatorname{cotg}(x) = y}{=} \frac{-1}{1 + y^2},
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração do resultado.

□

Observação 6.5.5 *Em resumo: a função* $\operatorname{arccotg}: \mathbb{R} \to (0, \pi)$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e*

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arccotg}(y) = \frac{-1}{1+y^2}, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R}. \tag{6.29}$$

6.5.5 Função arco-secante

Proposição 6.5.5 *Consideremos a função* $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \to \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ *dada por*

$$f(x) \doteq \sec(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

Então a função $\underline{f}$ *admite função inversa*

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

que será diferenciável em $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

Além disso, a função $\frac{d f^{-1}}{dy}: \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ *será dada por:*

$$\frac{d f^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{|y|\sqrt{y^2-1}}, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1],$$

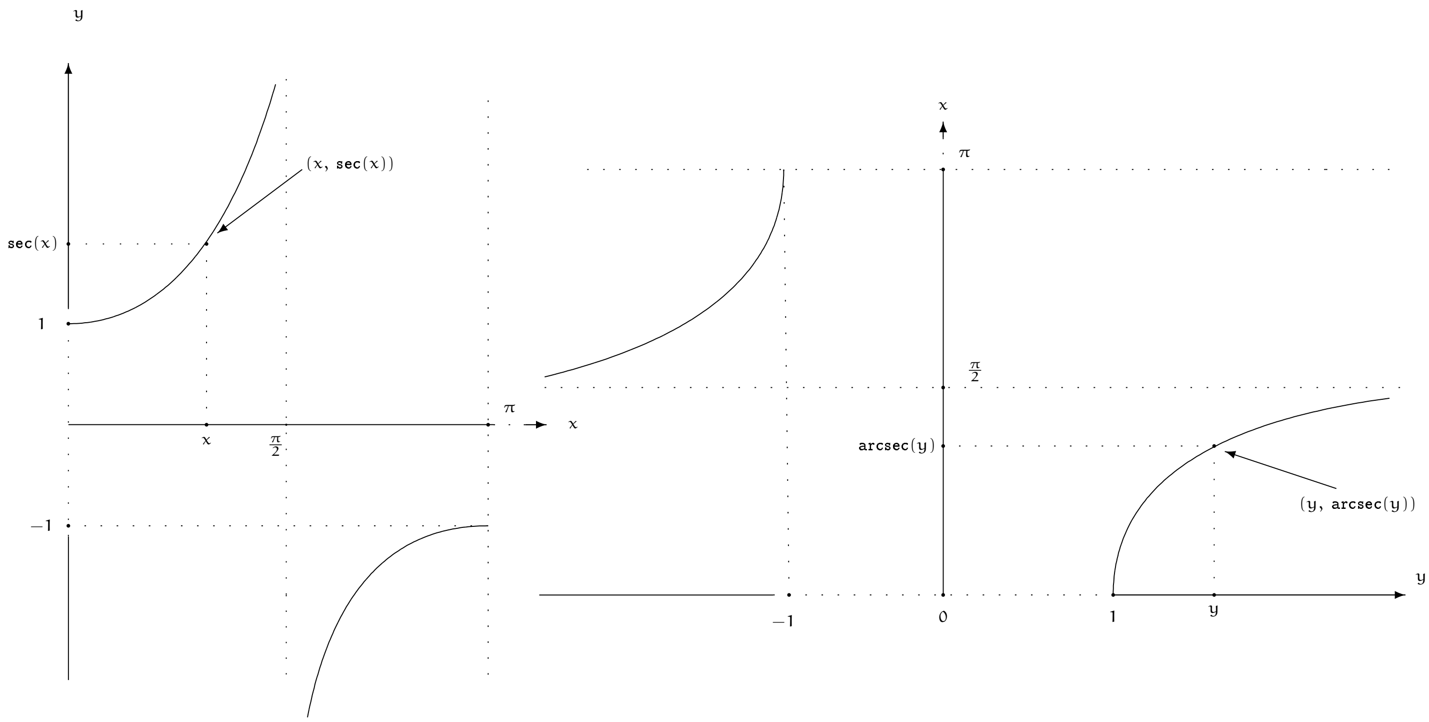
ou seja,

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arcsec}(y) = \frac{1}{|y|\sqrt{y^2-1}}, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \tag{6.30}$$

Demonstração:

Observemos que a função $\underline{f}$ é estritamente crescente em cada um dos intervalos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ e sobrejetora, logo admite função inversa que, como vimos anteriormente, é denominada função arco-secante e indicada por arcsec (ou $\sec^{-1}$).

As representações geométricas dos gráficos da função $\underline{f}$ e de sua função inversa f^{-1} são dadas pelas figuras abaixo.



Como a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ e

$$f'(x) \overset{\text{Prop. (6.4.5)}}{=} \sec(x)\,\mathrm{tg}(x) \neq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

segue, do Teorema da Derivada da Função Inversa que a função f^{-1} será diferenciável em $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

Além disso, para cada $y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, existe um único $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ de modo que $y = f(x) = \sec(x)$, e assim teremos:

$$\frac{d f^{-1}}{dy}(y) \overset{(6.17)}{=} \frac{1}{\frac{d f}{dx}(x)} = \frac{1}{\frac{d}{dx}[\sec(x)]} = \frac{1}{\sec(x)\,\mathrm{tg}(x)}. \tag{6.31}$$

Observemos que se

$$\cos(x) > 0, \quad \text{teremos} \quad \cos(x) = \sqrt{\cos^2(x)}.$$

Logo, quando $\cos(x) > 0$ teremos:

$$\cos(x).\cos(x) = \cos(x)\sqrt{\cos^2(x)} \overset{|\cos(x)|=\cos(x)}{=} |\cos(x)|\sqrt{\cos^2(x)}. \tag{6.32}$$

Por outro lado, se

$$\cos(x) < 0 \quad \text{teremos} \quad \cos(x) = -\sqrt{\cos^2(x)}.$$

Logo $\cos(x) < 0$ teremos

$$\cos(x).\cos(x) = -\cos(x)\sqrt{\cos^2(x)} \overset{|\cos(x)|=-\cos(x)}{=} |\cos(x)|\sqrt{\cos^2(x)}. \tag{6.33}$$

Logo de (6.32) e (6.33) segue que, independente do sinal de $\cos(x)$,w teremos:

$$\cos(x).\cos(x) = |\cos(x)|\sqrt{\cos^2(x)}. \tag{6.34}$$

Por outro lado, notemos que $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, teremos que $\operatorname{sen}(x) > 0$.

Logo

$$\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \tag{6.35}$$

Assim, para cada $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ teremos:

$$\sec(x).\operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\cos(x)}.\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \overset{(6.34)\ \text{e}\ (6.35)}{=} \frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{|\cos(x)|\sqrt{\cos^2(x)}}$$
$$= \frac{1}{|\cos(x)|}\sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)} - 1} = |\sec(x)|\sqrt{\sec^2(x)-1}.$$

Para cada $y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, substituindo esta expressão em (6.31), obteremos

$$\frac{d\,f^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{|\sec(x)|\sqrt{\sec^2(x)-1}} \overset{\sec(x)=y}{=} \frac{1}{|y|\sqrt{y^2-1}},,$$

concluindo a demonstração do resultado.

□

Observação 6.5.6 *Em resumo: a função* $\operatorname{arcsec} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ *é diferenciável em* $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ *e*

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arcsec}(y) = \frac{1}{|y|\sqrt{y^2-1}}\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \tag{6.36}$$

6.5.6 Função arco-cossecante

Proposição 6.5.6 *Consideremos a função* $f : \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ *dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{cossec}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Então a função $\underline{f}$ *admite função inversa,* $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$*, que será diferenciável em* $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

Além disso, a função $\frac{d\,f^{-1}}{dy} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *será dada por:*

$$\frac{d\,f^{-1}}{dy}(y) = \frac{-1}{|y|\sqrt{y^2-1}}\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1],$$

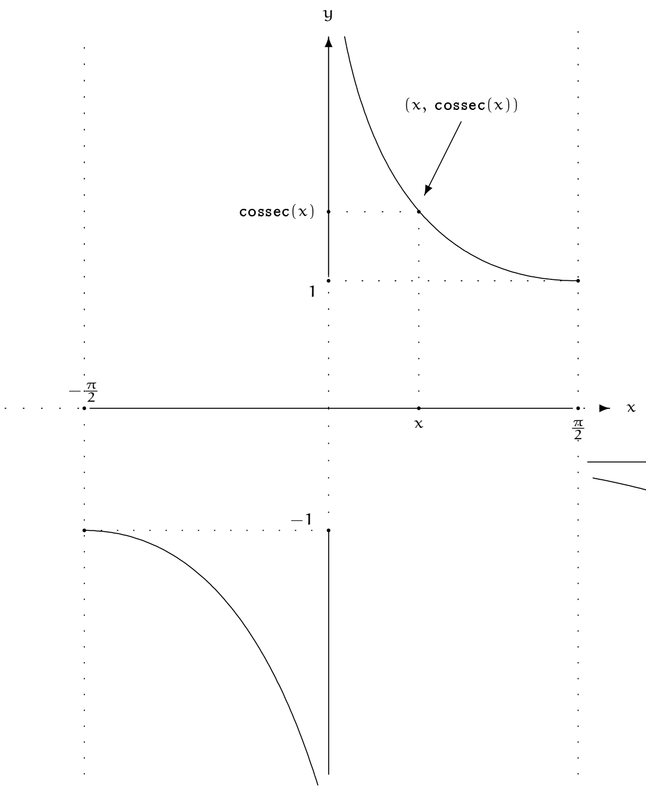
ou seja,

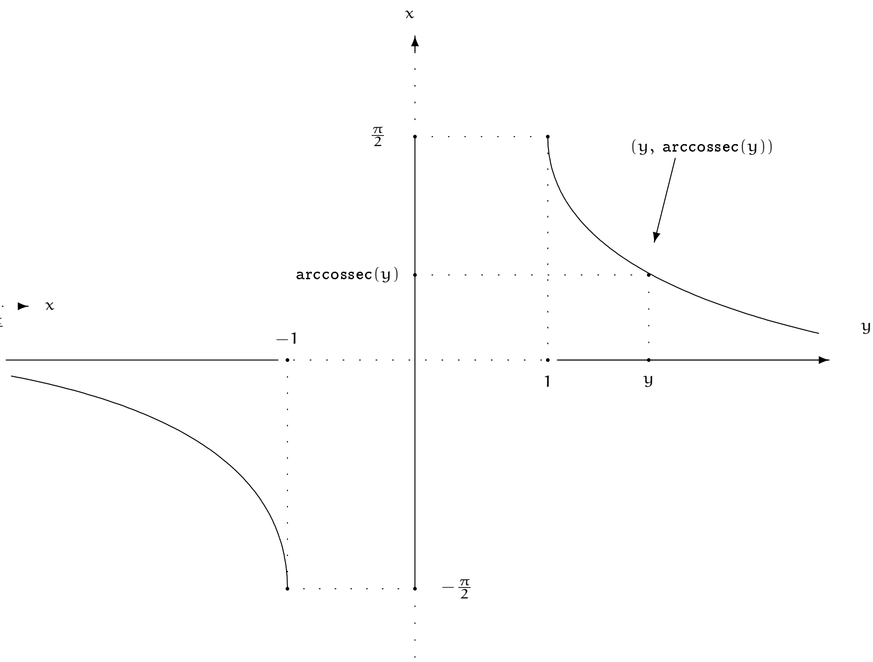
$$\frac{d}{dy}\operatorname{arccossec}(y) = \frac{-1}{|y|\sqrt{y^2-1}}\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \tag{6.37}$$

Demonstração:

Observemos que a função $\underline{f}$ é estritamente crescente em cada um dos intervalos $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e sobrejetora, logo admite função inversa que, como vimos anteriormente, é denominada função arco-cossecante e indicada por arccossec (ou $\operatorname{cossec}^{-1}$).

As representações geométricas dos gráficos da função $\underline{f}$ e de sua função inversa f^{-1} são dadas pelas figuras abaixo.





Como função $\underline{f}$ é diferenciável em $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e

$$f'(x) \overset{\text{Prop. (6.4.6)}}{=} -\operatorname{cossec}(x)\operatorname{cotg}(x) \neq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

segue do Teorema da Derivada da Função Inversa que a função f^{-1} é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

Além disso, para cada $y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, existe um único $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ de modo que $y = f(x) = \operatorname{cossec}(x)$, e assim teremos:

$$\frac{d\,f^{-1}}{dy}(y) \overset{(6.17)}{=} \frac{1}{\dfrac{d\,f}{dx}(x)} = \frac{1}{\dfrac{d}{dx}[\operatorname{cossec}(x)]} = \frac{1}{-\operatorname{cossec}(x)\operatorname{cotg}(x)}. \tag{6.38}$$

Observemos que se

$$\operatorname{sen}(x) > 0, \quad \text{teremos} \quad \operatorname{sen}(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^2(x)}.$$

Logo

$$\operatorname{sen}(x).\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x)\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)} \overset{|\operatorname{sen}(x)| = \operatorname{sen}(x)}{=} |\operatorname{sen}(x)|\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)}. \tag{6.39}$$

Por outro lado, se

$$\operatorname{sen}(x) < 0, \quad \text{teremos} \quad \operatorname{sen}(x) = -\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)}.$$

Logo

$$\operatorname{sen}(x).\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(x)\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)} \overset{|\operatorname{sen}(x)| = -\operatorname{sen}(x)}{=} |\operatorname{sen}(x)|\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)}. \tag{6.40}$$

Logo, de (6.39) e (6.40), segue que

$$\operatorname{sen}(x).\operatorname{sen}(x) = |\operatorname{sen}(x)|\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)}. \tag{6.41}$$

Por outro lado, notemos que $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, segue que $\cos(x) > 0$.

Logo

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(x)}, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{6.42}$$

Assim, para cada $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, teremos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cossec}(x).\operatorname{cotg}(x) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}.\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \overset{(6.41) \text{ e } (6.42)}{=} \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}}{|\operatorname{sen}(x)|\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)}} \\
&= \frac{1}{|\operatorname{sen}(x)|}\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} - 1} = |\operatorname{cossec}(x)|\sqrt{\operatorname{cossec}^2(x) - 1}.
\end{aligned}$$

Portanto, para cada $y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, substituindo a expressão acima em (6.38), obteremos

$$\frac{d\, f^{-1}}{dy}(y) = \frac{-1}{|\operatorname{cossec}(x)|\sqrt{\operatorname{cossec}^2(x) - 1}} \overset{\operatorname{cossec}(x)=y}{=} \frac{-1}{|y|\sqrt{y^2-1}},$$

concluindo a demonstração do resultado.

□

Observação 6.5.7 *Em resumo: a função* $\operatorname{arccossec} : \mathbb{R}\setminus[-1,1] \to \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *é diferenciável em* $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ *e*

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arccossec}(y) = \frac{-1}{|y|\sqrt{y^2-1}}, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \tag{6.43}$$

A seguir temos os seguintes exercícios resolvidos:

Exercício 6.5.1 *Calcular, se existir, a derivada* $f'(0)$ *onde* $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ *é a função dada por*

$$f(x) \doteq 3 \operatorname{arcsen}(x) - 2 \operatorname{arctg}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1, 1).$$

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $(-1, 1)$, pois a função arcsen é diferenciável $(-1, 1)$ e a função arctg é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Além disso, para cada $x \in (-1, 1)$, das propriedades básicas de derivação, segue que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}[3 \operatorname{arcsen}(x) - 2 \operatorname{arctg}(x)] = 3.\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen}(x)] - 2\frac{d}{dx}[\operatorname{arctg}(x)] \\
&= 3\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2.\frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Em particular, teremos

$$f'(0) = 3\frac{1}{\sqrt{1-0^2}} - 2\frac{1}{1+0^2} = 1.$$

Exercício 6.5.2 *Encontre, se existir, a equação da reta tangente a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *do Exercício acima no ponto* $P_o \doteq (0, 0)$.

Resolução:

Observemos que o ponto $(0, 0)$ é um ponto do gráfico da função $\underline{f}$ pois

$$f(0) = 3 \operatorname{arcsen}(0) - 2 \operatorname{arctg}(0) = 3.0 - 2.0 = 0.$$

Do Exercício acima temos que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $(-1, 1)$, em particular, será diferenciável em $x = 0$.

Logo o coeficiente angular da equação da reta tangente a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ no ponto $(0, 0)$ será dado por

$$m_{P_o} = f'(0) \overset{\text{Exercício acima}}{=} 1.$$

Portanto a equação da reta tangente a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ no ponto $(0, 0)$ será dada por:

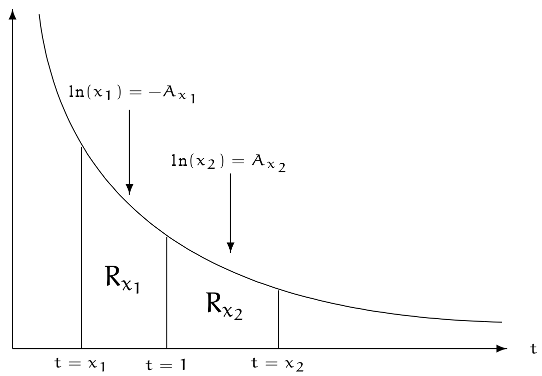
$$y - \underbrace{f(x_o)}_{=0} = \underbrace{m_{P_o}}_{=1}(x - \underbrace{x_o}_{=0}) \quad \text{isto é,} \quad y = x.$$

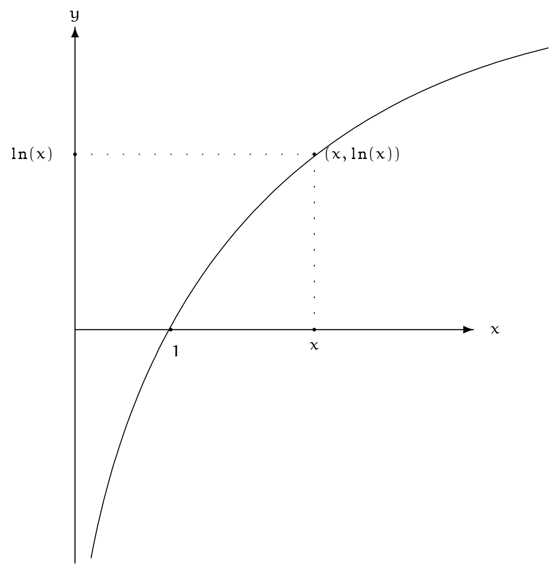
6.6 Função logarítmo (natural)

Observação 6.6.1 *Para cada $x \in (0, \infty)$, definimos o logarítmo natural de $\underline{x}$ (Seção 18 do Capítulo 4, página 99) como sendo a área da região limitada, delimitada pelos gráficos da função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{t}, \quad t \in (0, \infty),$$

pelas retas $t = 1$, $t = x$ e pelo eixo Ox se $x \in (1, \infty)$, menos o valor da área se $x \in (0, 1)$ e zero se $x = 1$ (veja a figura abaixo).





A função logarítmo natural é denotada por $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ e definida como acima.

Com isto temos a:

Proposição 6.6.1 *A função $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $(0, \infty)$.*

Além disso a sua função derivada será dada por:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0, \infty). \tag{6.44}$$

Demonstração:

Seja $x_o \in (0, \infty)$ e mostremos que a função $y = \ln(x)$ é diferenciável em x_o.

Lembremos que, da Proposição (4.5.1) (ou a Observação (4.5.1) item 2.), segue:

$$\lim_{x\to x_o} \frac{\ln(x)-\ln(x_o)}{x-x_o} \overset{\Delta x \doteq x-x_o,\ \text{como}\ x\to x_o,\ \text{implicará em}\ \Delta x\to 0}{=} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x_o+\Delta x)-\ln(x_o)}{\Delta x}.$$

Mostraremos a existência dos limites:

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\ln(x_o+\Delta x)-\ln(x_o)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{\ln(x_o+\Delta x)-\ln(x_o)}{\Delta x}$$

e a igualdade

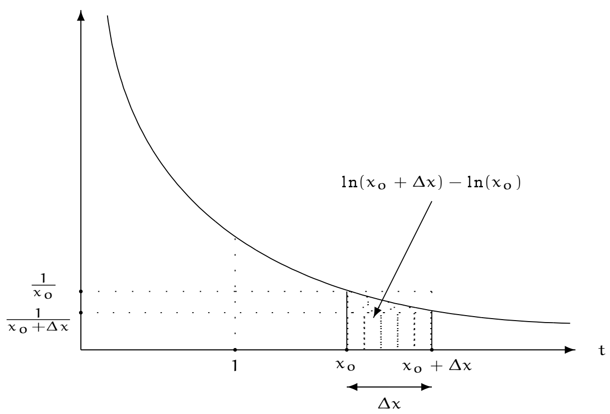
$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\ln(x_o+\Delta x)-\ln(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{\ln(x_o+\Delta x)-\ln(x_o)}{\Delta x},$$

e com isso a função logarítmo natural será diferenciável em x_o e aigualdade acima nos fornecerá o valor da derivada da função logarítmo em x_o.

Observemos que

1. Se $\Delta x > 0$ teremos (veja figura abaixo):

$$\Delta x \frac{1}{x_o+\Delta x} \leq \ln(x_o+\Delta x)-\ln(x_o) \leq \Delta x \frac{1}{x_o}.$$



Como $\Delta x > 0$, dividindo-se a desigualdade acima por Δx, obteremos

$$\frac{1}{x_o+\Delta x} \leq \frac{\ln(x_o+\Delta x)-\ln(x_o)}{\Delta x} \leq \frac{1}{x_o}. \tag{6.45}$$

Notemos que

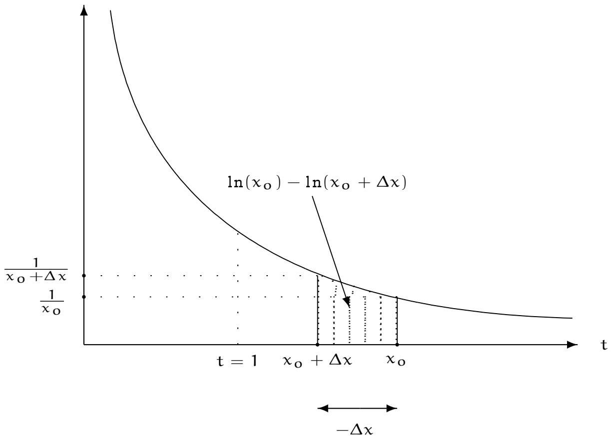
$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{1}{x_o+\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{1}{x_o} = \frac{1}{x_o}.$$

Logo, da desigualdade (6.45) e do Teorema do Confronto (ou Sanduiche), segue que:

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\ln(x_o+\Delta x)-\ln(x_o)}{\Delta x} = \frac{1}{x_o}. \tag{6.46}$$

2. Se $\Delta x < 0$ teremos (veja figura abaixo):

$$(-\Delta x)\frac{1}{x_o} \leq \ln(x_o)-\ln(x_o+\Delta x) \leq (-\Delta x)\frac{1}{x_o+\Delta x}.$$



Como $\Delta x < 0$, dividindo-se-se a desigualdade acima por $-\Delta x$, segue que

$$\frac{1}{x_o} \leq \frac{\ln(x_o) - \ln(x_o + \Delta x)}{-\Delta x} \leq \frac{1}{x_o + \Delta x},$$

ou seja,

$$\frac{1}{x_o} \leq \frac{\ln(x_o + \Delta x) - \ln(x_o)}{\Delta x} \leq \frac{1}{x_o + \Delta x}. \tag{6.47}$$

Notemos que

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{1}{x_o} = \frac{1}{x_o} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{1}{x_o + \Delta x}.$$

Logo, da desigualdade (6.47) e do Teorema do Confronto (ou Sanduiche), segue que:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\ln(x_o + \Delta x) - \ln(x_o)}{\Delta x} = \frac{1}{x_o}. \tag{6.48}$$

Logo, de (6.46) e (6.48) segue que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x_o + \Delta x) - \ln(x_o)}{\Delta x} = \frac{1}{x_o},$$

mostrando que função logarítmo natural é diferenciável em $x_o \in (0, \infty)$ e além disso

$$\frac{d}{dx} \ln(x_o) = \frac{1}{x_o},$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 6.6.2

1. *Como a função $y = \ln(x)$ é diferenciável em $(0, \infty)$ segue, da Proposição (6.2.2), que ela será uma função contínua em $(0, \infty)$.*

2. *Notemos que se $a > 0$, a função $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por (ver seção 19 do Capítulo 4, página 102)*

$$\log_a(x) \doteq \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0, \infty)$$

será diferenciável em $(0, \infty)$ e, das propriedades básicas de derivação, segue que:

$$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0, \infty). \tag{6.49}$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

6.7 Função exponencial

Temos a

Proposição 6.7.1 *A função* $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$.

Além disso, a sua função derivada será dada por:

$$\frac{d}{dy} \exp(y) = \exp(y), \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R}. \tag{6.50}$$

Demonstração:

Como vimos anteriormente (veja seção 20 do Capítulo 4, pág. 104) a função logarítmo natural, $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, é bijetora.

Logo admite função inversa, que foi denominada função exponencial e denotada por

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty).$$

Como a função $y = \ln(x)$ é diferenciável em $(0, \infty)$ e

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} \neq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty)$$

segue, do Teorema da Derivada da Função Inversa, que a função inversa, $x = \exp(y)$, será diferenciável em $\mathbb{R}$.

Além disso, para cada $y \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\frac{d}{dy} \exp(y) \overset{\exp(y)=\ln^{-1}(y)}{=} \frac{d}{dy}\left[\ln^{-1}(y)\right] \overset{(6.44)}{=} \frac{1}{\frac{d}{dx}[\ln(x)]} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \overset{x=\exp(y)}{=} \exp(y).$$

Portanto

$$\frac{d}{dy} \exp(y) = \exp(y), \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R},$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 6.7.1

1. *Lembremos que*

$$e^y = \exp(y), \quad y \in \mathbb{R}$$

assim, da Proposição acima, segue que a função, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(y) \doteq e^y, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R},$$

será diferenciável em $\mathbb{R}$ *e além disso*

$$\frac{d}{dy} e^y \overset{(6.50)}{=} e^y, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R}.$$

2. *Com isto podemos concluir que a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq e^x, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$*, que tem a seguinte propriedade:*

$$f'(x) = f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.51}$$

3. *Pode-se mostrar (como veremos mais à frente) que uma função que seja diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e que satisfaz a equação (6.51) (denominada Equação Diferencial Ordinária - será estudada na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias) deverá ser da seguinte forma:*

$$f(x) = c\, e^x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$ *fixada.*

4. *Como a função exponencial é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *segue, da Proposição (6.2.2), que ela será uma função contínua em* $\mathbb{R}$.

6.8 Função potenciação

Temos a:

Proposição 6.8.1 *Seja* $a \in (0, \infty)$, $a \neq 1$.

Então a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(y) \doteq a^y\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R}$$

será diferenciável em $\mathbb{R}$.

Além disso a sua derivada será dada por:

$$\frac{d}{dy}\, a^y = \ln(a)\, a^y\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R}. \tag{6.52}$$

Demonstração:

Sabemos que, como $a \in (0, \infty)$, $a \neq 1$, a função logarítmo na base $\underline{a}$, $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, será bijetora e diferenciável em $(0, \infty)$.

Além disso

$$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x\, \ln(a)} \neq 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty).$$

Sua função inversa será $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ dada por

$$f^{-1}(y) \doteq a^y\,, \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Logo segue, do Teorema da Derivada da Função Inversa, que a função inversa f^{-1} será diferenciável em $\mathbb{R}$.

Além disso, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy}\, a^y &= \frac{d\, f^{-1}}{dy}(y) \overset{(6.44)}{=} \frac{1}{\dfrac{d\, f}{dx}(x)} \overset{f(x)=\log_a(x)}{=} \frac{1}{\dfrac{d}{dx}\,[\log_a(x)]} \overset{(6.49)}{=} \frac{1}{\dfrac{1}{x\, \ln(a)}} \\
&= x\, \ln(a) \overset{x=a^y}{=} \ln(a)\, a^y, \quad y \in \mathbb{R}),
\end{aligned}$$

ou seja, a função potenciação com base $\underline{a}$, é diferenciável em $\mathbb{R}$ e além disso

$$\frac{d}{dy}\, a^y = \ln(a)\, a^y\,, \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}\,,$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 6.8.1 *Em particular, segue, da Proposição (6.2.2), que a função potenciação com base* $\underline{a}$ *é uma função contínua em* $\mathbb{R}$, *para cada* $a \in (0, \infty)$ *e* $a \neq 1$.

6.9 Regra da cadeia

O objetivo desta seção será mostrar que a composta de duas funções diferenciáveis é uma função diferenciável e exibir uma expressão para a derivada da função composta, mais precisamente:

Teorema 6.9.1 *(da Regra da Cadeia) Sejam* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *intervalos abertos,* $f : A \to B$ *e* $g : B \to \mathbb{R}$ *funções diferenciáveis em* $x_o \in A$ *e* $y_o \doteq f(x_o) \in B$*, respectivamente.*

Então a função composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *será diferenciável em* x_o*.*

Além disso temos que:

$$\frac{d\,(g \circ f)}{dx}(x_o) = \frac{d\,g}{dy}[f(x_o)]\,\frac{d\,f}{dx}(x_o), \tag{6.53}$$

ou, de modo abreviado:

$$[g \circ f]'(x_o) = g\,'(y_o)\,f\,'(x_o)\,. \tag{6.54}$$

Demonstração:

De fato, consideremos a função $h : B \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(y) \doteq \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_o)}{y - y_o} - g\,'(y_o)\,, & \text{se} \quad y \neq y_o, \\ 0\,, \quad \text{se} \quad y = y_o \end{cases}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \lim_{y \to y_o} h(y) &\overset{y \neq y_o}{=} \lim_{y \to y_o} \left[\frac{g(y) - g(y_o)}{y - y_o} - g\,'(y_o) \right] \\ &= \underbrace{\lim_{y \to y_o} \frac{g(y) - g(y_o)}{y - y_o}}_{= g\,'(y_o)} - \underbrace{\lim_{y \to y_o} g\,'(y_o)}_{= g'(y_o)} \\ &= g\,'(y_o) - g\,'(y_o) = 0 = h(y_o), \end{aligned} \tag{6.55}$$

ou seja, a função h é contínua em $y = y_o$.

Além disso, se $y \neq y_o$ temos que

$$h(y)(y - y_o) \overset{y \neq y_o}{=} \left[\frac{g(y) - g(y_o)}{y - y_o} - g\,'(y_o) \right] (y - y_o) = g(y) - g(y_o) - g'(y_o)(y - y_o),$$

assim

$$g(y) - g(y_o) = \left[h(y) + g\,'(y_o) \right] (y - y_o)\,, \quad \text{se} \quad y \neq y_o. \tag{6.56}$$

Em particular, se considerarmos $y = f(x)$ e $y_o = f(x_o)$ em (6.56), teremos:

$$g(f(x)) - g(f(x_o)) = \left\{ h[f(x)] + g\,'(y_o) \right\} (f(x) - f(x_o)).$$

Dividindo a expressão acima por $x - x_o$ (estamos supondo que $x \neq x_o$) obteremos

$$\frac{g[f(x)] - g[f(x_o)]}{x - x_o} = \left\{ h[f(x)] + g'(y_o) \right\} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}. \tag{6.57}$$

Como a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\underline{x_o}$ segue que a função $\underline{f}$ será contínua em x_o, assim

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o),$$

ou seja, se

$$x \to x_o \quad \text{segue que} \quad y = f(x) \to f(x_o) = y_o.$$

Assim, aplicando a Proposição (4.5.1) (ou a Observação (4.5.1) item 2.), obteremos:

$$\lim_{x \to x_o} h[f(x)] \overset{\text{como } y=f(x)\text{, se } x\to x_o\text{, teremos } y=f(x)\to f(x_o)=y_o}{=} \lim_{y \to y_o} h(y) \overset{(6.55)}{=} h(y_o) = 0. \tag{6.58}$$

Logo, fazendo $x \to x_o$ em (6.57), obteremos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_o} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_o)}{x - x_o} &= \lim_{x \to x_o} \frac{g[f(x)] - g[f(x_o)]}{x - x_o} \\
&\overset{(6.57)}{=} \lim_{x \to x_o} \left\{ \left[h[f(x)] + g\,'(y_o)\right] \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \right\} \\
&= \left\{ \left[\underbrace{\lim_{x \to x_o} h[f(x)]}_{\overset{(6.58)}{=} 0} + \underbrace{\lim_{x \to x_o} g'(y_o)}_{= g'(y_o)} \right] \underbrace{\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}}_{= f'(x_o)} \right\} \\
&= [0 + g\,'(y_o)] f\,'(x_o) = g'(y_o)\, f\,'(x_o),
\end{aligned}$$

mostrando que a função $g \circ f$ é diferenciável em x_o e que

$$[g \circ f]'\,(x_o) = g\,'(y_o)\, f\,'(x_o),$$

como queríamos mostrar.

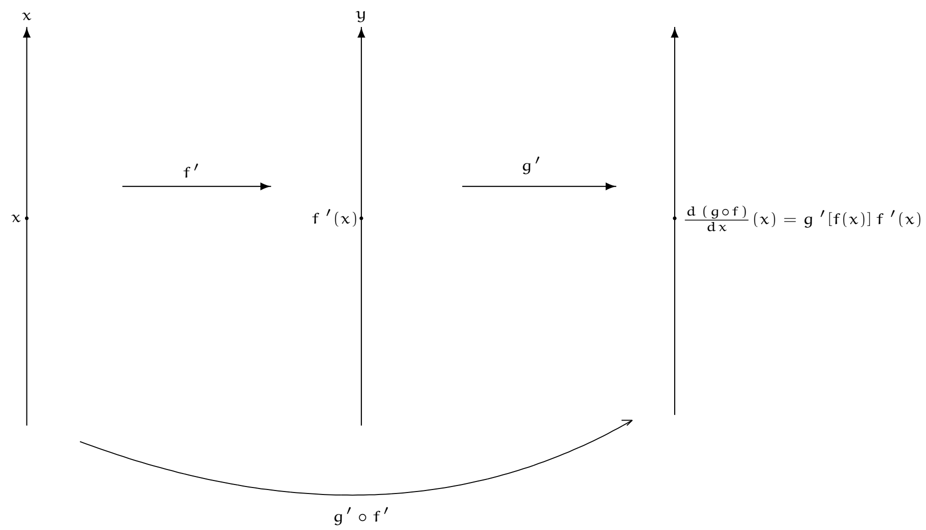
□

Observação 6.9.1

1. *No Teorema acima, se a função* $\underline{f}$ *é diferenciável em* A *e a função* $\underline{g}$ *em* B *então a função* $(g \circ f)$ *será diferenciável em* A.

   Além diss,o a sua função derivada será dada por (veja diagrama de Venn abaixo):

   $$[g \circ f]'(x) = g\,'[f(x)]\, f\,'(x)\,, \textit{para cada} \qquad x \in A.$$



2. *A Regra da Cadeia pode ser reescrita da seguinte forma: se as funções*

$$y = y(x) \quad e \quad z = z(y)$$

são diferenciáveis em x_o *e* $y_o = y(x_o)$, *respectivamente, então a função*

$$Z(x) = (z \circ y)(x)$$

será diferenciável em x_o *e além disso*

$$\frac{dZ}{dx}(x_o) = \frac{dz}{dy}(y_o)\,\frac{dy}{dx}(x_o),$$

ou, equivalentemente,

$$D_x Z(x_o) = D_y z(y_o)\, D_x y(x_o).$$

3. *O resultado acima pode ser estendido para um número finito de compostas de funções diferenciáveis.*

   Por exemplo, para o caso de considerarmos a composta de três funções diferenciáveis teremos a seguinte situação: se $f : A \to B$, $g : B \to C$ *e* $h : C \to \mathbb{R}$ *são diferenciáveis em*

$$x_o \in A\,, \quad y_o \doteq f(x_o) \in B \quad e \quad z_o \doteq g(y_o) \in C,$$

   respectivamente, então a função $h \circ g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *será uma função diferenciável em* $x_o \in A$ *e além disso*

$$\frac{d\,(h \circ g \circ f)}{dx}(x_o) = \frac{dh}{dz}(z_o)\,\frac{dg}{dy}(y_o)\,\frac{df}{dx}(x_o),$$

   ou, de modo abreviado:

$$[h \circ g \circ f]'(x_o) = h'(z_o)\, g'(y_o)\, f'(x_o)\,.$$

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

4. *Utilizando-se a Regra da Cadeia podemos reobter a derivada da função inversa de uma função que satisfaz as condições do Teorema da Derivada da Função Inversa, da seguinte forma:*

   Suponhamos que as funções $f : A \to B$ *e* $f^{-1} : B \to A$ *são diferenciáveis em* x_o *e* $y_o = f(x_o)$, *respectivamente.*

   Observemos que

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y\,, \quad \text{para cada} \quad y \in B\,.$$

   Diferenciando-se ambos os membros da igualdade acima, com relação a $\underline{y}$, *no ponto* $y = y_o$, *obteremos:*

$$1 = \frac{dy}{dy}(y_o) = \frac{d\,\left(f \circ f^{-1}\right)}{dy}(y_o) \overset{\text{Regra da Cadeia}}{=} \frac{df}{dx}\left(f^{-1}(y_o)\right)\,\frac{df^{-1}}{dy}(y_o)$$
$$\overset{x_o = f^{-1}(y_o)}{=} \frac{df}{dx}(x_o)\,\frac{df^{-1}}{dy}(y_o)\,.$$

Mas, pela hipótese do Teorema da Derivada da Função Inversa temos que $\dfrac{d\,f}{dx}(x_o) \neq 0$, *segue da identidade acima que:*

$$\frac{d\,f^{-1}}{dy}(y_o) = \frac{1}{\dfrac{d\,f}{dx}(x_o)}\,,$$

como mostramos no Teorema da Derivada da Função Inversa.

Temos os seguintes resultados importantes que são conseqüência da Regra da Cadeia:

Proposição 6.9.1 *Suponhamos que a função* $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ *seja uma função diferenciável no intervalo aberto* $(-a, a)$ *e é uma função par, isto é,* $f(-x) = f(x)$, *para* $x \in (-a, a)$.

Então a função derivada $f\,' : (-a, a) \to \mathbb{R}$ *será uma função ímpar em* $(-a, a)$, *isto é,*

$$f\,'(-x) = -f\,'(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-a, a)\,.$$

Demonstração:

De fato, para cada $x \in (-a, a)$, da Regra da Cadeia, temos que

$$\frac{d}{dx}[f(-x)] = f\,'(-x)\,\frac{d}{dx}[-x] = -f'(-x)\,. \tag{6.59}$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dx}[f(-x)] \overset{f(-x)=f(x)}{=} \frac{d}{dx}[f(x)] = f\,'(x)\,. \tag{6.60}$$

Logo, de (6.59) e (6.60), segue que

$$f\,'(-x) = -f\,'(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-a, a)\,,$$

ou seja, a função $f\,'$ é uma função ímpar em $(-a, a)$, como queríamos demonstrar.

□

De modo semelhante temos a:

Proposição 6.9.2 *Suponhamos que* $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ *seja uma função diferenciável no intervalo aberto* $(-a, a)$ *e é uma função ímpar, isto é,* $f(-x) = -f(x)$, *para* $x \in (-a, a)$.

Então a função derivada $f\,' : (-a, a) \to \mathbb{R}$ *será um função par em* $(-a, a)$, *ou seja,*

$$f\,'(-x) = f\,'(x)\,, \ \textit{para cada} \quad x \in (-a, a)\,.$$

Resolução:

De fato, para cada $x \in (-a, a)$, da Regra da Cadeia, temos que

$$\frac{d}{dx}[f(-x)] = f\,'(-x)\,\frac{d}{dx}[-x] = -f\,'(-x)\,. \tag{6.61}$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dx}[f(-x)] \overset{f(-x)=-f(x)}{=} \frac{d}{dx}[-f(x)] = -f\,'(x)\,. \tag{6.62}$$

Logo, de (6.61) e (6.62), segue que

$$-f\,'(-x) = -f\,'(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-a, a),$$

ou, equivalentemente,

$$f\,'(-x) = f\,'(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-a, a)\,,$$

ou seja, a função $f\,'$ é uma função par em $(-a, a)$, como queríamos demonstrar.

□

Para finalizar temos a:

Proposição 6.9.3 *Suponhamos que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *seja uma função diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e* T*-periódica, isto é,* $f(x+T) = f(x)$*, para* $x \in \mathbb{R}$.

Então a função derivada $f\,' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *será um função* T*-periódica em* $\mathbb{R}$*, isto é,*

$$f\,'(x+T) = f\,'(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Demonstração:

De fato, para cada $x \in \mathbb{R}$, da Regra da Cadeia, temos que

$$\frac{d}{dx}[f(x+T)] = f\,'(x+T)\,\frac{d}{dx}[x+T] = f\,'(x+T)\,.1 = f\,'(x+T)\,. \tag{6.63}$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dx}[f(x+T)] \overset{f(x+T)=f(x)}{=} \frac{d}{dx}[f(x)] = f\,'(x)\,. \tag{6.64}$$

Logo, de (6.63) e (6.64), segue que

$$f\,'(x+T) = f\,'(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja, a função f' é uma função T-periódica em $\mathbb{R}$, como queríamos demonstrar.

□

A seguir aplicaremos os resultados acima a vários exemplos.

Exemplo 6.9.1 *Encontrar o maior subconjunto de* $\mathbb{R}$ *onde a função* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$h(x) \doteq \left(3x^2 - 5x + 1\right)^2\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

seja diferenciável.

Além disso encontrar a expressão da função derivada, $\underline{h'}$*, onde existir, e de* $h'(x_o)$*, para* $x_o = 1$.

Resolução:

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq 3x^2 - 5x + 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

e a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(y) \doteq y^2\,, \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Observemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, teremos

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = [f(x)]^2 = \left(3x^2 - 5x + 1\right)^2 = h(x)\,,$$

isto é,

$$h = g \circ f.$$

Como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}$ (são funções polinomiais) segue, da Regra da Cadeia, que a função $h = g \circ f$ também será diferenciável em $\mathbb{R}$.

Além disso, a função derivada, $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, será dada por:

$$\begin{aligned} h\,'(x) = [g \circ f]'(x) &\overset{(6.54)}{=} g\,'[f(x)]\,f\,'(x) \overset{g\,'(y)=2y \text{ e } f\,'(x)=6x-5}{=} [2\,f(x)]\,[6x-5] \\ &= 2\left(3x^2 - 5x + 1\right)(6x-5)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Em particular,

$$h'(1) = 2\left(3.1^2 - 5.1 + 1\right)(6.1 - 5) = -2.1 = -2.$$

A seguir temos os seguintes exercícios resolvidos:

Exercício 6.9.1 *Encontrar o maior subconjunto de* $\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ *onde a função* $h:\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$h(x)\doteq 3\,\mathrm{sen}^2(x)+4\,\mathrm{tg}\left(x^2\right), \quad \textit{para cada} \quad x\in\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

seja diferenciável.

Além disso encontrar a expressão da função derivada, $\underline{h'}$*, onde existir, e* $h'(x_o)$ *para* $x_o=0$*.*

Resolução:

Consideremos as funções $h_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $h_2:\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\to\mathbb{R}$ dadas por

$$h_1(x)\doteq 3\,\mathrm{sen}^2(x)\,,\ \text{para cada } x\in\mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h_2(x)\doteq 4\,\mathrm{tg}\left(x^2\right)\,,\ \text{para cada } x\in\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right).$$

Com isto temos que

$$h(x)=h_1(x)+h_2(x) \quad \text{para cada} \quad x\in\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right).$$

Logo basta estudar a diferenciabilidade das funções h_1 e h_2 nos seus respectivos domínios.

Consideremos as funções $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f_1(x)\doteq \mathrm{sen}(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x\in\mathbb{R}$$

e $g_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$g_1(y)\doteq 3y^2\,, \quad \text{para cada} \quad y\in\mathbb{R}.$$

Observemos que

$$(g_1\circ f_1)(x)=g_1[f_1(x)]=3[f_1(x)]^2=3\,[\mathrm{sen}(x)]^2=h_1(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x\in\mathbb{R},$$

isto é,

$$h_1(x)=(g_1\circ f_1)(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Como as funções f_1 e g_1 são diferenciáveis em $\mathbb{R}$ segue, da Regra da Cadeia, que a função $h_1=g_1\circ f_1$ será diferenciável em $\mathbb{R}$.

Além disso,

$$\begin{aligned} {h_1}'(x) &= [g_1\circ f_1]\,'(x) \overset{(6.54)}{=} {g_1}'[f_1(x)]\,{f_1}'(x) \overset{{g_1}'(y)=6y \text{ e } {f_1}'(x)=\cos(x)}{=} [6\,f_1(x)]\,[\cos(x)] \\ &= 6\,\mathrm{sen}(x)\,\cos(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Consideremos as funções $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f_2(x)\doteq x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x\in\mathbb{R}$$

e $g_2:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ dada por

$$g_2(y)\doteq 4\,\mathrm{tg}(y)\,, \quad \text{para cada} \quad y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Observemos que, para cada $x\in\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$, teremos

$$(g_2\circ f_2)(x)=g_2[f_2(x)]=4\,\mathrm{tg}[f_2(x)]=4\,\mathrm{tg}\left(x^2\right)=h_2(x)\,,$$

isto é,

$$h_2(x) = (g_2 \circ f_2)(x) \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right).$$

Como as funções f_2 e g_2 são diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, respectivamente, segue, da Regra da Cadeia, que a função $h_2 = g_2 \circ f_2$ será diferenciável em $\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$.

Além disso,

$$\begin{aligned} h_2{}'(x) &= [g_2 \circ f_2]\,'(x) = g_2{}'[f_2(x)]\, f_2{}'(x) \overset{g_2{}'(y)=4\sec^2(y) \text{ e } f_2{}'(x)=2x}{=} 4\sec^2[f_1(x)]\,[2x] \\ &= 4\sec^2\left(x^2\right)\, 2x = 8x\left[\sec\left(x^2\right)\right]^2, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Logo a função $h = h_1 + h_2$ será diferenciável em $\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$.

Além disso a sua função derivada, $h' : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ será dada por:

$$h'(x) = h_1'(x) + h_2'(x) = 6\ \text{sen}(x)\ \cos(x) + 8x\left[\sec\left(x^2\right)\right]^2, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Em particular,

$$h'(0) = 6\ \text{sen}(0)\ \cos(0) + 8.0.\left[\sec\left(0^2\right)\right]^2 = 0.$$

Temos também o:

Exercício 6.9.2 *Calcular, para cada um dos itens abaixo, a função derivada* h', *onde existir, e* $h'(x_o)$ *para o valor de* x_o *dado.*

1. $h(x) \doteq \text{sen}\left\{\cos^2\left[\text{tg}\left(x^2 - 4x\right)\right]\right\}$ *e* $x_o = 4$.

2. $h(x) \doteq \text{arcsen}\left[\cos^2\left(x^3\right)\right]$ *e* $x_o = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$.

Resolução:

Do item 1.:

Consideremos as funções $a, c, d, e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$a(x) \doteq x^2 - 4x, \quad b(y) \doteq \text{tg}(y), \quad c(z) \doteq \cos(z), \quad d(t) \doteq t^2, \quad \text{e} \quad e(s) \doteq \text{sen}(s),$$

onde $x, z, t, s \in \mathbb{R}$ e $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Observemos que

$$\begin{aligned} (e \circ d \circ c \circ b \circ a)(x) &= e[(d \circ c \circ b \circ a)(x)] = \text{sen}\{d[(c \circ b \circ a)(x)]\} \\ &= \text{sen}\left\{[c(b \circ a)(x))]^2\right\} = \text{sen}\left\{[\cos(b(a(x))]^2\right\} = \\ &= \text{sen}\left\{\cos^2[\text{tg}(a(x))]\right\} = \text{sen}\left\{\cos^2\left[\text{tg}\left(x^2 - 4x\right)\right]\right\} = h(x), \end{aligned}$$

isto é,

$$h = e \circ d \circ c \circ b \circ a.$$

Como as funções a, b, c, d e e são diferenciáveis nos seus respectivos domínios segue, da Regra da Cadeia, que a função $h = e \circ d \circ c \circ b \circ a$ também será diferenciável no seu domínio.

Além disso sua função derivada será dada por:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= [e \circ d \circ c \circ b \circ a]'(x) = e'[(d \circ c \circ b \circ a)(x)].[d \circ c \circ b \circ a]'(x) \\
&\overset{e'(s)=\cos(s)}{=} \cos\{(d \circ c \circ b \circ a)(x)\}.d'[(c \circ b \circ a)(x)].[c \circ b \circ a]'(x) \\
&\overset{d'(t)=2t}{=} \cos\left\{\cos^2\left[\operatorname{tg}\left(x^2-4x\right)\right]\right\} 2[(c \circ b \circ a)(x)]\, c'[(b \circ a)(x)]\, [b \circ a]'(x) \\
&\overset{c'(z)=-\operatorname{sen}(z)}{=} \cos\left\{\cos^2\left[\operatorname{tg}\left(x^2-4x\right)\right]\right\} 2\left[\cos\left(\operatorname{tg}\left(x^2-4x\right)\right)\right]\left[-\operatorname{sen}\left(\operatorname{tg}\left(x^2-4x\right)\right)\right] b'[a(x)]a'(x) \\
&\overset{b'(y)=\sec^2(y)}{=} -\cos\left\{\cos^2\left[\operatorname{tg}\left(x^2-4x\right)\right]\right\} 2\left[\cos\left(\operatorname{tg}\left(x^2-4x\right)\right)\right] \operatorname{sen}\left[\operatorname{tg}\left(x^2-4x\right)\right] \sec^2[a(x)]\, a'(x) \\
&\overset{a'(x)=2x-4}{=} -2\cos\left\{\cos^2\left[\operatorname{tg}\left(x^2-4x\right)\right]\right\}\left[\cos\left(\operatorname{tg}(x^2-4x\right)\right] \operatorname{sen}\left[\operatorname{tg}\left(x^2-4x\right)\right]\left[\sec\left(x^2-4x\right)\right]^2. \\
&\qquad .[2x-4]\,.
\end{aligned}
$$

Com isto temos que

$$
\begin{aligned}
h'(x_o) &= h'(4) \\
&= -2\cos\left\{\cos^2\left[\operatorname{tg}\left(4^2-4.4.4\right)\right]\right\}\left[\cos\left(\operatorname{tg}\left(4^2-4.4\right)\right)\right] \operatorname{sen}\left[\operatorname{tg}\left(4^2-4.4\right)\right]\left[\sec\left(4^2-4.4\right)\right]^2. \\
&\qquad .\,[2.4-4] \\
&= -2\cos\left\{\cos^2[\operatorname{tg}(0)]\right\}[\cos(\operatorname{tg}(0))]\,.\operatorname{sen}[\operatorname{tg}(0)].[\sec(0)]^2.4 \\
&= -2\cos\left\{\cos^2[0]\right\}\ [\cos(0)]\ \underbrace{\operatorname{sen}[0]}_{=0}.[1]^2.4 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

<u>Do item 2.:</u>

Consideremos as funções $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $d : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$a(x) \doteq x^3, \quad b(y) \doteq \cos(y), \quad c(z) \doteq z^2 \quad \text{e} \quad d(t) \doteq \operatorname{arcsen}(t),$$

onde $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $t \in (-1, 1)$.

Observemos que se $x \in \mathrm{Dom}(h)$, segue que

$$
\begin{aligned}
(d \circ c \circ b \circ a)(x) &= d[(c \circ b \circ a)(x)] \\
&= \operatorname{arcsen}\{c[b \circ a)(x)]\} = \operatorname{arcsen}\{[b(a(x))]^2\} = \\
&= \operatorname{arcsen}\left\{[\cos(a(x))]^2\right\} = \operatorname{arcsen}\left\{\left[\cos\left(x^3\right)\right]^2\right\} = h(x),
\end{aligned}
$$

isto é,

$$h = d \circ c \circ b \circ a.$$

Como as funções a, b, c e d são diferenciáveis nos seus respectivos domínios segue, da Regra da Cadeia, que a função $h = d \circ c \circ b \circ a$ será diferenciável no seu domínio.

Além disso sua função derivada será dada por:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= [d \circ c \circ b \circ a]'(x) = d'[(c \circ b \circ a)(x)]\,[c \circ b \circ a]'(x) \\
&\overset{d'(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-[(c \circ b \circ a)(x)]^2}} c'[(b \circ a)(x)][b \circ a]'(x) \\
&\overset{c'(z)=2z}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\left[\cos\left(x^3\right)\right]^4}} 2(b \circ a)(x) b'(a(x)) a'(x) \\
&\overset{b'(y)=-\operatorname{sen}(y)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-[\cos\left(x^3\right)]^4}} 2\cos\left(x^3\right)[-\operatorname{sen}(a(x))]\, a'(x) \\
&\overset{a'(x)=3x^2}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\left[\cos\left(x^3\right)\right]^4}} 2\cos\left(x^3\right)\left[-\operatorname{sen}\left(x^3\right)\right] 3x^2 \\
&= \frac{-6x^2\cos\left(x^3\right)\operatorname{sen}\left(x^3\right)}{\sqrt{1-\left[\cos\left(x^3\right)\right]^4}}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
h'(x_o) = h'\left(\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right)
&= \frac{-6\left[\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right]^2 \cos\left(\left[\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right]^3\right) \operatorname{sen}\left(\left[\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right]^3\right)}{\sqrt{1-\left[\cos\left(\left[\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right]^3\right)\right]^4}} \\
&= \frac{-6\left[\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right]^2 \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\underbrace{1-\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^4}_{=1}}} = 0.
\end{aligned}
$$

Podemos aplicar a Regra da Cadeia ao seguinte exemplo:

Exemplo 6.9.2 *Encontrar, se existir, a equação da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$
h(x) \doteq \operatorname{sen}\left(x^3 + 2x^2 + x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},
$$

no ponto $P_o \doteq (0, 1)$.

Resolução:

Notemos que o ponto $(0, 1)$ é um ponto do gráfico da função $\underline{h}$, pois

$$
h(0) = \operatorname{sen}\left(0^3 + 2.0^2 + 0 + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.
$$

Observemos que se a função $\underline{h}$ for diferenciável em $x = 0$ então a equação da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função $\underline{h}$ no ponto $(x_o, y_o) = (0, 1)$ (onde $y_o = h(x_o)$) será dada por:

$$y - 1 = m_{P_o}\,(x - 0),$$

onde

$$m_{P_o} = h\,'(x_o) = h\,'(0).$$

Consideremos as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) \doteq x^3 + 2x^2 + x + \frac{\pi}{2}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g(y) \doteq \text{sen}(y)\,, \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

Observemos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \text{sen}[f(x)] = \text{sen}\left(x^3 + 2x^2 + x + \frac{\pi}{2}\right) = h(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$h = g \circ f.$$

Como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}$ segue, da Regra da Cadeia, que a função $h = g \circ f$ também será diferenciável em $\mathbb{R}$.

Além disso sua função derivada será dada por:

$$h\,'(x) = [g \circ f]'(x) \overset{(6.54)}{=} g\,'[f(x)]\,g\,'(x) \overset{g\,'(y)=\cos(y) \text{ e } f\,'(x)=3x^2+4x+1}{=} \cos[f(x)]\,\left[3x^2 + 4x + 1\right]$$
$$= \cos\left(x^3 + 2x^2 + x + \frac{\pi}{2}\right)\left(3x^2 + 4x + 1\right)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Assim

$$m_{P_o} = h'(0) = \cos\left(0^3 + 2.0^2 + 0 + \frac{\pi}{2}\right)\left(3.0^2 + 4.0 + 1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).1 = 0.$$

Portanto a equação da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função $\underline{h}$ no ponto $(0, 1)$ será

$$y - 1 = 0.(x - 0) = 0,$$

isto é,

$$y = 1$$

(ou seja, uma reta é horizontal).

Observação 6.9.2 *Observemos que a função* $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$h(x) \doteq \ln(|x|)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Além disso, a função derivada, $h' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *será dada por*

$$h'(x) \doteq \frac{1}{x}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

De fato, se

$$x \in (0, \infty)\,, \quad \textit{segue que} \quad |x| = x\,, \quad \textit{logo} \quad \frac{d}{dx}[\ln(|x|)] = \frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x}\,;$$
$$x \in (-\infty, 0), \quad \textit{segue que} \quad |x| = -x\,, \quad \textit{logo} \quad \frac{d}{dx}[\ln(|x|)] = \frac{d}{dx}[\ln(-x)] \overset{\textit{Regra da Cadeia}}{=} \frac{1}{-x}.(-1) = \frac{1}{x}\,.$$

Portanto a função $\underline{h}$ *será diferenciável em* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e*

$$\frac{d}{dx}\,[\ln(|x|)] = \frac{1}{x}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{6.65}$$

Para finalizar esta seção temos mais dois exercícios resolvidos:

Exercício 6.9.3 *Consideremos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

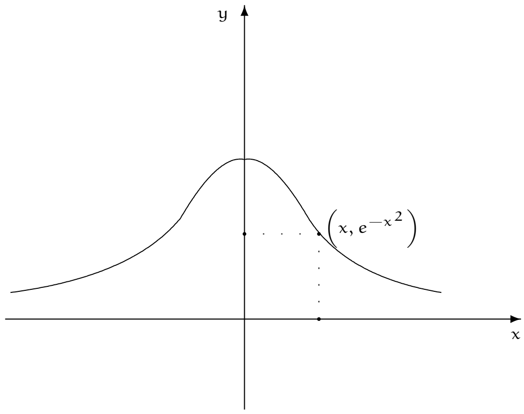
$$f(x) \doteq e^{-x^2}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que a função $\underline{f}$ *será diferenciável em* $\mathbb{R}$.
Além disso, verifique a função $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *será dada por:*

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



Sejam $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_1(x) \doteq -x^2 \quad \text{e} \quad f_2(y) \doteq e^y,$$

onde $x, y \in \mathbb{R}$.

Então temos que

$$(f_2 \circ f_1)(x) = e^{f_1(x)} = e^{-x^2} = f(x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$f = f_2 \circ f_1.$$

As funções $\underline{f_1}$ e $\underline{f_2}$ são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$.

Logo, da Regra da Cadeia, a função $f = f_2 \circ f_1$ também será diferenciável em $\mathbb{R}$.

Além disso sua função derivada será dada por:

$$f'(x) = [f_2 \circ f_1]'(x) = f_2'[f_1(x)]\, f_1'(x) \overset{f_2'(y)=e^y \text{ e } f_1'(x)=-2x}{=} -2xe^{-x^2}, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

como afirmamos acima.

Exercício 6.9.4 *Consideremos* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *dada por*

$$f(x) \doteq e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \textit{para cada} \quad x \neq 0.$$

Então a função $\underline{f}$ *será diferenciável em* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e além disso a função derivada da função* $\underline{f}$, $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *será dada por*

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \textit{para cada} \quad x \neq 0.$$

Resolução:

Sejam $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ e $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_1(x) \doteq -\frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad f_2(y) \doteq e^y,$$

onde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $y \in \mathbb{R}$.

Então temos que

$$(f_2 \circ f_1)(x) = e^{f_1(x)} = e^{-\frac{1}{x^2}} = f(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

isto é,

$$f = f_2 \circ f_1.$$

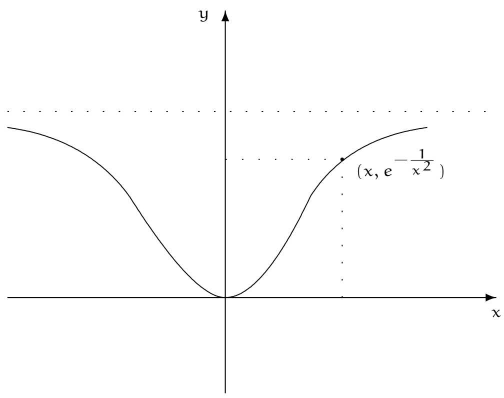
As funções $\underline{f_1}$ e $\underline{f_2}$ são funções diferenciáveis em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e em $\mathbb{R}$, respectivamente logo, da Regra da Cadeia, a função $f = f_2 \circ f_1$ também será diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Além disso sua função derivada será dada por:

$$f'(x) = [f_2 \circ f_1]'(x) = f_2'[f_1(x)]\, f_1'(x) \overset{f_2'(y) = e^y \text{ e } f_1'(x) = \frac{2}{x^3}}{=} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

como afimramos acima.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



Observação 6.9.3 *No Exercício acima se definirmos*

$$f(0) \doteq 0$$

então pode-se mostrar que a função $\underline{f}$ será diferenciável em $\mathbb{R}$ (ou seja, será diferenciável em $x = 0$) e que a função derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}\,, & \textit{para} \quad x \neq 0 \\ 0\,, & \textit{para} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Isto será mostrado mais adiante.

Podemos agora completar o estudo da diferenciabilidade de todas as funções básicas apresentadas no Capítulo 4.

6.10 Função potenciação utilizando a regra da cadeia

A seguir aplicaremos a Regra da Cadeia para reobter a derivada da função potenciação (vista na Proposição (6.8.1)) entre outras.

Observação 6.10.1

1. *Seja* $a > 0$, $a \neq 1$.

   Um outro modo de estudarmos a difereciabilidade da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*
$$h(x) \doteq a^x \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$
   é lembrarmos que a função potenciação com base $\underline{a}$ *é definida por:*
$$a^x \doteq e^{x\ln(a)} \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \,.$$
   Assim se considerarmos as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por*
$$f(x) \doteq x\,\ln(a) \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \quad e \quad g(y) \doteq e^y \,, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R} \,,$$
   teremos que
$$(g \circ f)(x) = e^{f(x)} = e^{x\ln(a)} = h(x) \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$
   ou seja,
$$h = g \circ f.$$
   Como as funções $\underline{f}$ *e* g *são diferenciáveis em* $\mathbb{R}$ *segue, da Regra da Cadeia, que a função* $h = g \circ f$ *será diferenciável em* $\mathbb{R}$.

   Além disso, para $x \in \mathbb{R}$, *teremos*
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[a^x] = [g \circ f]'(x) &\overset{(6.54)}{=} g'[f(x)]\,f'(x) \overset{g'(y)=e^y \;e\; f'(x)=\ln(a)}{=} e^{f(x)}.\ln(a)\\ &= e^{x\ln(a)}\,\ln(a) = \ln(a)\,a^x \,,\end{aligned}$$
   ou seja, a função derivada será dada por:
$$\frac{d}{dx}a^x = \ln(a)a^x \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \,,$$
   como foi obtido anteriormente na Proposição (6.8.1), utilizando-se outro modo.

2. *Seja* $c \in \mathbb{R}$.

   Lembremos que a função potenciação com expoente $\underline{c}$ *é a função* $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*
$$x^c \doteq e^{c\ln(x)} \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0, \infty).$$
   Assim se considerarmos as funções $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por*
$$f(x) \doteq c\,\ln(x) \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0, \infty) \qquad e \qquad g(y) \doteq e^y \,, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R} \,,$$
   segue que
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = e^{f(x)} = e^{c\ln(x)} = h(x) \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0, \infty),$$

ou seja,

$$h = g \circ f.$$

Como as funções $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$ *são diferenciáveis em seus respectivos domínios segue, pela Regra da Cadeia, que a função* $h = g \circ f$ *será diferenciável em* $(0, \infty)$.

Além disso, se $x \in (0, \infty)$ *temos*

$$\frac{d}{dx}[x^c] = [g \circ f]'(x) \stackrel{(6.54)}{=} g\,'[f(x)]\, f\,'(x) \stackrel{g'(y)=e^y \ e \ f'(x)=c\frac{1}{x}}{=} e^{f(x)}.c.\frac{1}{x} = c\,\underbrace{e^{c\ln(x)}}_{=x^c}.x^{-1} = c\,x^{c-1},$$

ou seja, a função derivada será dada por:

$$\frac{d}{dx}x^c = c\,x^{c-1}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0, \infty), \tag{6.66}$$

<u>Conclusão:</u> *vale a mesma regra que valia quando* $c \in \{2, 3, 4, \cdots\}$.

Podemos com isto considerar o seguinte exercício resolvido:

Exercício 6.10.1 *Mostre que a função* $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$h(x) \doteq \sqrt{x + \sqrt{x+1}}, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, \infty)$$

é diferenciável em $[0, \infty)$ *e encontre a sua função derivada,* $h' : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

<u>Resolução:</u>

Consideremos as funções $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) \doteq x + \sqrt{x+1}, \quad \text{para cada} \quad x \in [0, \infty) \quad \text{e} \quad g(y) \doteq \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para cada} \quad y \in [0, \infty).$$

Além disso, consideremos as funções $t, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$t(x) \doteq x, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s(z) \doteq z + 1, \quad \text{para cada} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Como as funções $\underline{g}$, $\underline{t}$ e $\underline{s}$ são diferenciáveis em seus respectivos domínios segue, da Regra da Cadeia e das operações elementares de diferenciação, que a função $t + (g \circ s)$ também será diferenciável em $[0, \infty)$.

Mas

$$[t + (g \circ s)](x) = t(x) + g[s(x)] = x + \sqrt{x+1} = f(x), \quad \text{para cada} \quad x \in [0, \infty),$$

ou seja, a função $\underline{f}$ é diferenciável em $[0, \infty)$.

Além disso

$$f\,'(x) = [t + (g \circ s)]'(x) = t\,'(x) + (g \circ s)'(x) \stackrel{t\,'(x)=1 \ e \ (6.54)}{=} 1 + g'[s(x)]\, s\,'(x) \stackrel{g\,'(y)=\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1} \ e \ s\,'(x)=1}{=}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,1 = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}, \quad \text{para cada} \quad x \in [0, \infty). \tag{6.67}$$

Como as funções funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são diferenciáveis em seus respectivos domínios, pela Regra da Cadeia, segue que a função $(g \circ f)$ será diferenciável em $[0, \infty)$.

Mas

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x + \sqrt{x+1}}, \quad \text{para cada} \quad x \in [0, \infty),$$

ou seja, a função $\underline{h}$ será diderenciável em $[0, \infty)$.

Além disso:

$$\begin{aligned} h'(x) = (g \circ f)'(x) &\overset{(6.54)}{=} g'[f(x)]\, f'(x) \overset{g'(y)=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \text{ e } (6.67)}{=} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right], \end{aligned}$$

ou seja, a função derivada da função $\underline{h}$, $h' : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, será dada por

$$h'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right], \quad \text{para cada} \quad x \in [0, \infty).$$

6.11 Funções hiperbólicas

Nesta seção estudaremos a diferenciabilidade das funções hiperbólicas.

Antes temos a seguinte observação que será útil no estudo das mesmas.

Observação 6.11.1 *Lembremos que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada por*

$$f(x) \doteq -x, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

então a função $\underline{f}$ será diferenciável em $\mathbb{R}$ e além disso a função derivada da função $\underline{f}$, isto é, $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, será dada por:

$$f'(x) = -1, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

6.11.1 Função seno-hiperbólico

Proposição 6.11.1 *A função* $\text{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em $\mathbb{R}$ e além disso a sua função derivada da função,* $\text{senh}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *será dada por:*

$$\text{senh}'(x) = \cosh(x), \quad \textit{para cada}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.68}$$

Demonstração:

De fato, da Observação (6.11.1) segue que

$$\text{senh}(x) = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{f(x)}\right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo, da Observação (6.11.1) e da Regra da Cadeia, segue que a função senh é diferenciável em $\mathbb{R}$ e além disso

$$\begin{aligned} \text{senh}'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]\right\} \overset{f(x)=-x}{=} \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2}\left[e^x - e^{f(x)}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dx}[e^x] - \frac{d}{dx}\left[e^{f(x)}\right]\right\} \overset{\frac{d}{dx}e^x = e^x \text{ e a Regra da Cadeia}}{=} \frac{1}{2}\left[e^x - e^{f(x)}\frac{df}{dx}(x)\right] \\ &\overset{\text{Obs. } (6.11.1)}{=} \frac{1}{2}\left[e^x - e^{f(x)}.(-1)\right] \overset{f(x)=-x}{=} \frac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\right] = \cosh(x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

6.11.2 Função cosseno-hiperbólico

Proposição 6.11.2 *A função* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e além disso a sua função derivada da função,* $\cosh' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *será dada por:*

$$\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.69}$$

Demonstração:

De fato, da Observação (6.11.1) segue que

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left[e^x + e^{f(x)}\right]\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo, da Observação (6.11.1) e da Regra da Cadeia, segue que a função cosh é diferenciável em $\mathbb{R}$ e além disso

$$\begin{aligned}
\cosh'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\right]\right\} \overset{f(x)=-x}{=} \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2}\left[e^x + e^{f(x)}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dx}\left[e^x\right] + \frac{d}{dx}\left[e^{f(x)}\right]\right\} \overset{\frac{d}{dx}e^x = e^x \text{ e a Regra da Cadeia}}{=} \frac{1}{2}\left[e^x + e^{f(x)}\frac{df}{dx}(x)\right] \\
&\overset{\text{Obs. (6.11.1)}}{=} \frac{1}{2}\left[e^x + e^{f(x)}.(-1)\right] \overset{f(x)=-x}{=} \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right] = \operatorname{senh}(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

6.11.3 Função tangente-hiperbólica

Proposição 6.11.3 *A função* $\operatorname{tgh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e além disso a sua função derivada da função,* $\operatorname{tgh}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *será dada por:*

$$\operatorname{tgh}'(x) = \operatorname{sech}^2(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.70}$$

Demonstração:

Das Proposições (6.11.1), (6.11.2), segue que a função tgh será diferenciável em $\mathbb{R}$ (pois é quociente de duas funções diferenciáveis e $\cosh(x) \neq 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$) e além disso

$$\begin{aligned}
\operatorname{tgh}'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}\right] = \frac{\operatorname{senh}'(x).\cosh(x) - \operatorname{senh}(x).\cosh'(x).}{\cosh^2(x)} \\
&\overset{\text{Prop. (6.11.1) e (6.11.2)}}{=} \frac{\cosh(x).\cosh(x) - \operatorname{senh}(x).\operatorname{senh}(x)}{\cosh^2(x)} \\
&\overset{\text{Prop. (3.3.26) item (a)}}{=} \frac{1}{\cosh^2(x)} = \operatorname{sech}^2(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

6.11.4 Função cotangente-hiperbólica

Proposição 6.11.4 *A função* $\operatorname{cotgh} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e além disso a sua função derivada da função,* $\operatorname{cotgh}' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *será dada por:*

$$\operatorname{cotgh}'(x) = -\operatorname{cossech}^2(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{6.71}$$

Demonstração:

Das Proposições (6.11.1), (6.11.2), segue que a função cotgh será diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (pois é quociente de duas funções diferenciáveis e $\operatorname{senh}(x)\neq 0$, para cada $x\neq 0$) e além disso

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotgh}'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)}\right] = \frac{\cosh'(x).\operatorname{senh}(x).-\cosh(x).\operatorname{senh}'(x)}{\operatorname{senh}^2(x)} \\
&\overset{\text{Prop. (6.11.1) e (6.11.2)}}{=} \frac{\operatorname{senh}(x).\operatorname{senh}(x).-\cosh(x).\cosh(x)}{\operatorname{senh}^2(x)} \\
&\overset{\text{Prop. (3.3.26) item (a)}}{=} \frac{-1}{\operatorname{senh}^2(x)} = -\operatorname{cossech}^2(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

6.11.5 Função secante-hiperbólica

Proposição 6.11.5 *A função* sech $:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e além disso a sua função derivada da função,* $\operatorname{sech}':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *será dada por:*

$$\operatorname{sech}'(x) = -\operatorname{sech}(x).\operatorname{tgh}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x\in\mathbb{R}. \tag{6.72}$$

Demonstração:

Das Proposições (6.11.1),(6.11.2), segue que a função sech será diferenciável em $\mathbb{R}$ (pois é quociente de duas funções diferenciáveis e $\cosh(x)\neq 0$, para cada $x\in\mathbb{R}$) e além disso

$$\begin{aligned}
\operatorname{sech}'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\cosh(x)}\right] = \frac{1'.\cosh(x) - 1.\cosh'(x).}{\cosh^2(x)} \\
&\overset{\text{Prop. (6.11.1) e (6.11.2)}}{=} \frac{-\operatorname{senh}(x)}{\cosh^2(x)} \\
&= -\frac{1}{\cosh(x)}.\frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = -\operatorname{sech}(x).\operatorname{tgh}(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x\in\mathbb{R},
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

6.11.6 Função cossecante-hiperbólica

Proposição 6.11.6 *A função* cossech $:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *e além disso a sua função derivada da função,* $\operatorname{cossech}':\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ *será dada por:*

$$\operatorname{cossech}'(x) = -\operatorname{cossech}(x).\operatorname{cotgh}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{6.73}$$

Demonstração:

Das Proposições (6.11.1), (6.11.2), segue que a função cossech será diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (pois é quociente de duas funções diferenciáveis e $\operatorname{senh}(x)\neq 0$, para cada $x\neq 0$) e além disso

$$\begin{aligned}
\operatorname{cossech}'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\operatorname{senh}(x)}\right] = \frac{1'.\operatorname{senh}(x).-1.\operatorname{senh}'(x)}{\operatorname{senh}^2(x)} \\
&\overset{\text{Prop. (6.11.1) e (6.11.2)}}{=} \frac{-\cosh(x)}{\operatorname{senh}^2(x)} \\
&= -\frac{1}{\operatorname{senh}(x)}.\frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} = -\operatorname{cossech}(x).\operatorname{cotgh}(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

6.12 Funções hiperbólicas inversas

Para estudar a diferenciabilidade das funções hiperbólicas inversas utilizaremos o Teorema da Derivada Função Inversa (isto é, o Teorema (6.5.1)).

6.13 Função arco-cosseno-hiperbólico

Proposição 6.13.1 *A função* $\operatorname{arccosh} : (0, \infty) \to (1, \infty)$ *é diferenciável em* $(0, \infty)$ *e além disso a sua função derivada da função,* $\operatorname{arccosh}' : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ *será dada por:*

$$\operatorname{arccosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}, \quad \textit{para cada} \quad y \in (1, \infty). \tag{6.74}$$

Demonstração:

Como vimos anteriormente (veja seção 23-1 do Capítulo 4, página 116) a função cosseno-hiperbólico

$$\cosh : (0, \infty) \to (1, \infty)$$

é bijetora.

Além disso, da Proposição (6.11.2), segue que ela é diferenciável em $(0, \infty)$ e

$$\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x) \neq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty).$$

Assim segue, do Teorema da Derivada da Função Inversa (isto é, do Teorema (6.5.1)), que a função inversa associada a função cosh, isto é, a função $\operatorname{arccosh} : (1, \infty) \to (0, \infty)$, será diferenciável em $(1, \infty)$.

Além disso, para cada $y \in (1, \infty)$, sabemos que existe um único $x \in (0, \infty)$ tal que $y = \cosh(x)$, e assim teremos:

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arccosh}(y) \overset{y=\cosh(x)}{=} \frac{1}{\frac{d}{dx}[\cosh(x)]} = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} \overset{\operatorname{senh}(x)>0 \text{ se } x>0, \text{ logo } \operatorname{senh}(x)=\sqrt{\cosh^2(x)-1}}{=} \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}}$$
$$\overset{\cosh(x)=y}{=} \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}},$$

como queríamos demonstrar.

□

6.14 Função arco-seno-hiperbólico

Proposição 6.14.1 *A função* $\operatorname{arcsenh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e além disso a sua função derivada da função,* $\operatorname{arcsenh}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *será dada por:*

$$\operatorname{arcsenh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R}. \tag{6.75}$$

Demonstração:

Como vimos anteriormente (veja a seção 23-2 do Capítulo 4 - pág. 117) a função seno-hiperbólico

$$\mathrm{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

é bijetora.

Além disso, da Proposição (6.11.1), segue que ela é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$\mathrm{senh}'(x) = \cosh(x) \neq 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Assim segue, do Teorema da Derivada da Função Inversa (isto é, o Teorema (6.5.1)), que a função inversa associada a função senh, isto é, a função $\mathrm{arcsenh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, será diferenciável em $\mathbb{R}$.

Além disso, se $y \in \mathbb{R}$, sabemos que existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = \mathrm{senh}(x)$ e assim teremos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}[\mathrm{arcsenh}(y)] &\overset{y=\mathrm{senh}(x)}{=} \frac{1}{\frac{d}{dx}[\mathrm{senh}(x)]} = \frac{1}{\cosh(x)} \overset{\cosh(x)\geq 1>0,\ \text{logo}\ \cosh(x)=\sqrt{1+\mathrm{senh}^2(x)}}{=} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{senh}^2(x)}}\\ &\overset{\mathrm{senh}(x)=y}{=} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

6.15 Função arco-tangente-hiperbólico

Proposição 6.15.1 *A função* $\mathrm{arctgh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $(-1, 1)$ *e além disso a sua função derivada da função,* $\mathrm{arctgh}' : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ *será dada por:*

$$\mathrm{arctgh}'(y) = \frac{1}{1-y^2}\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in (-1, 1). \tag{6.76}$$

Demonstração:

Como vimos anteriormente (veja a seção 23-3 do Capítulo 4, página 118) a função tangente-hiperbólico

$$\mathrm{tgh} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

é bijetora.

Além disso, da Proposição (6.11.1), segue que ela é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$\mathrm{tgh}'(x) = \mathrm{sech}^2(x) \neq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Assim segue, do Teorema da Derivada da Função Inversa (isto é, o Teorema (6.5.1)), que a função inversa associada a função tgh, isto é, a função $\mathrm{arctgh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, será diferenciável em $(-1, 1)$.

Além disso, se $y \in (-1, 1)$, sabemos que existe um único $x \in \mathbb{R}$ de modo que $y = \mathrm{tgh}(x)$, e assim teremos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}[\mathrm{arctgh}(y)] &\overset{y=\mathrm{tgh}(x)}{=} \frac{1}{\frac{d}{dx}[\mathrm{tgh}(x)]} = \frac{1}{\mathrm{sech}^2(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2(x)}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2(x) - \mathrm{senh}^2(x)}{\cosh^2(x)}}\\ &= \frac{1}{1 - \mathrm{tgh}^2(x)} \overset{\mathrm{tgh}(x)=y}{=} \frac{1}{1-y^2}\,,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

6.16 Função arco-cotangente-hiperbólico

Proposição 6.16.1 *A função* $\operatorname{arccotgh} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ *e além disso a sua função derivada da função,* $\operatorname{arccotgh}' : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *será dada por:*

$$\operatorname{arccotgh}'(y) = \frac{1}{1 - y^2}, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

Demonstração:

Como vimos anteriormente (veja a Seção 23-4 do Capítulo 4, página 120) a função cotangente-hiperbólico

$$\operatorname{cotgh} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$

é bijetora.

Além disso, da Proposição (6.11.1), segue que ela é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$\operatorname{cotgh}'(x) = -\operatorname{cossec}^2 h(x) \neq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Assim segue, do Teorema da Derivada da Função Inversa (isto é, o Teorema (6.5.1)), que a função inversa associada a função cotgh, isto é, a função $\operatorname{arccotgh} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, será diferenciável em $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

Além disso, se $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sabemos que existe um único $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, de modo que $y = \operatorname{cotgh}(x)$, e assim teremos:

$$\frac{d}{dy}[\operatorname{arccotgh}(y)] \overset{y=\operatorname{cotgh}(x)}{=} \frac{1}{\dfrac{d}{dx}[\operatorname{cotgh}(x)]} = \frac{1}{-\operatorname{cossech}^2(x)} = -\frac{1}{\dfrac{1}{\operatorname{senh}^2(x)}} = -\frac{1}{\dfrac{\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x)}{\operatorname{senh}^2(x)}}$$
$$= -\frac{1}{\operatorname{cotgh}^2(x) - 1} \overset{\operatorname{cotgh}(x)=y}{=} -\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{1 - y^2},$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Observação 6.16.1 *Observemos que a derivada das funções* arctgh *e* arccotgh *teêm a mesma expressão, a saber:*

$$\frac{1}{1 - y^2}.$$

O que as diferenciam são seus domínios, a saber, $(-1, 1)$ *e* $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$*, respectivamente.*

6.17 Função arco-secante-hiperbólico

Proposição 6.17.1 *A função* $\operatorname{arcsech} : (0, 1) \to (0, \infty)$ *é diferenciável em* $(0, 1)$ *e além disso a sua função derivada da função,* $\operatorname{arcsech}' : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *será dada por:*

$$\operatorname{arcsech}'(y) = \frac{-1}{y\sqrt{1 - y^2}}, \quad \textit{para cada} \quad y \in (0, 1).$$

Demonstração:

Como vimos anteriormente (veja seção 23-5 do Capítulo 4, na pág. 121) a função secante-hiperbólico

$$\operatorname{sech} : (0, \infty) \to (0, 1)$$

é bijetora.

Além disso, da Proposição (6.11.1), segue que ela é diferenciável em $(0, \infty)$ e

$$\operatorname{sech}'(x) = -\operatorname{sech}(x).\operatorname{tgh}(x) \neq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty).$$

Assim segue, do Teorema da Derivada da Função Inversa (isto é, o Teorema (6.5.1)), que a função inversa associada a função sech, isto é, a função $\operatorname{arcsech} : (0, 1) \to (0, \infty)$, será diferenciável em $(0, 1)$.

Além disso, se $y \in (0, 1)$, sabemos que existe um único $x \in (0, \infty)$, de modo que $y = \operatorname{sech}(x)$, e assim teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy}[\operatorname{arcsech}(y)] &\overset{y=\operatorname{sech}(x)}{=} \frac{-1}{\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sech}(x)]} = \frac{-1}{-\operatorname{sech}(x).\operatorname{tgh}(x)} = \frac{1}{\dfrac{-1}{\cosh(x)}\dfrac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}} \\
&\overset{x>0 \text{ então } \operatorname{senh}(x)>0}{=} \frac{-1}{\dfrac{1}{\cosh(x)}\dfrac{\sqrt{\cosh^2(x)-1}}{\cosh(x)}} \\
&\overset{\cosh(x)\geq 1>0}{=} \frac{-1}{\dfrac{1}{\cosh(x)}\dfrac{\sqrt{\cosh^2(x)-1}}{\sqrt{\cosh^2(x)}}} = \frac{-1}{\dfrac{1}{\cosh(x)}\sqrt{1-\dfrac{1}{\cosh^2(x)}}} \\
&= \frac{-1}{\operatorname{sech}(x)\sqrt{1-\operatorname{sech}^2(x)}} \overset{\operatorname{sech}(x)=y}{=} \frac{-1}{y\sqrt{1-y^2}},
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

6.18 Função arco-cossecante-hiperbólico

Proposição 6.18.1 *A função* $\operatorname{arccossech} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *e além disso a sua função derivada da função,* $\operatorname{arccossech}' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ *será dada por:*

$$\operatorname{arccossech}'(y) = \frac{-1}{|y|\sqrt{y^2+1}}, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Demonstração:

Como vimos anteriormente (ver a seção 23-6 do Capítulo na página 123) a função cossecante-hiperbólico

$$\operatorname{cossech} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

é bijetora.

Além disso, da Proposição (6.11.1), temos que ela é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e

$$\operatorname{cossech}'(x) = -\operatorname{cossech}(x).\operatorname{cotgh}(x) \neq 0, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Assim segue, do Teorema da Derivada da Função Inversa (isto é, o Teorema (6.5.1)), que a função inversa associada a função cossech, isto é, a função $\operatorname{arccossech} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$, será diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Além disso, se $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sabemos que existe um único $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, de modo que $y = \text{cossech}(x)$, e assim teremos:

$$\frac{d}{dy}[\text{arccossech}(y)] \overset{y=\text{cossech}(x)}{=} \frac{1}{\frac{d}{dx}[\text{cossech}(x)]} = \frac{1}{-\text{cossech}(x).\text{cotgh}(x)} = \frac{-1}{\frac{1}{\text{senh}(x)}\frac{\cosh(x)}{\text{senh}(x)}}$$

$$\overset{\cosh(x)\geq 1>0}{=} \frac{-1}{\frac{1}{\text{senh}(x)}\frac{\sqrt{1+\text{senh}^2(x)}}{\text{senh}(x)}}$$

$$\overset{\text{senh}^2(x)=|\text{senh}(x)|\sqrt{\text{senh}^2(x)}}{=} \frac{-1}{\frac{1}{|\text{senh}(x)|}\frac{\sqrt{1+\text{senh}^2(x)}}{\sqrt{\text{senh}^2(x)}}} = \frac{-1}{\frac{1}{|\text{senh}(x)|}\sqrt{\frac{1}{\text{senh}^2(x)}+1}}$$

$$= \frac{-1}{|\text{cossech}(x)|\sqrt{\text{cossech}^2(x)+1}} \overset{\text{cossech}(x)=y}{=} \frac{-1}{|y|\sqrt{y^2+1}},$$

como queríamos demonstrar.

□

6.19 Derivação implícita

Observação 6.19.1

1. *As funções consideradas até agora foram dadas* *<u>explicitamente</u>*, *ou seja, conhecemos a lei que nos fornece o valor da função em cada ponto do seu domínio, explicitamente.*

2. *Entretando em muitas situações poderemos ter funções para as quais* **<u>não</u>** *conhecemos o seu valor* *<u>explicitamente</u>* *por meio de uma lei simples, que associa a cada valor da variável independente um (único) valor da variável dependente (ou seja, da função).*

   Por exemplo, suponhamos que uma função $f : A \to \mathbb{R}$ *é dada pela seguinte relação:*

   Para cada $x \in A$ *temos que o valor* $f(x)$ *deve satisfazer a seguite equação:*

   $$[f(x)]^2 - 4[f(x)] = x^3 - x. \tag{6.77}$$

   Neste caso podemos **<u>não</u>** *ter, de modo explícito,* $y = f(x)$, *para* $x \in A$, *onde* A *é um subconjunto de* $\mathbb{R}$.

3. *Como será visto no curso de Cálculo II, podemos impor condições sobre a equação dada de modo que possamos garantir que a equação defina uma função* $y = f(x)$, *para* $x \in A$.

   Além disso, como será visto no curso de Cálculo II, poderemos, sob certas condições, garantir que a função $\underline{f}$ *seja diferenciável em* A *sem que,* *<u>necessariamente</u>*, *conheçamos sua lei de associação, explicitamente.*

4. *Nosso problema aqui será, supondo que uma equação envolvendo duas váriáveis (por exemplo,* $\underline{x}$ *e* $\underline{y}$*), defina uma função de uma variável em relação a outra, por exemplo,* $y = f(x)$, *para cada* $x \in A$, *que seja diferenciável em algum subconjunto de* $A \subseteq \mathbb{R}$, *como encontrar a sua derivada em um ponto de* A, *isto é,* $f'(x)$, *para* $x \in A$*?*

Para ilustrar utilizaremos o Exemplo (6.77) acima.

Suponhamos que a equação (6.77) defina uma função $f : A \to \mathbb{R}$ que seja diferenciável no conjunto A, para algum $A \subseteq \mathbb{R}$.

Utilizaremos a Regra da Cadeia para encontrar $f'(x_o)$, onde $x_o \in A$.

Para isto, derivando-se a equação (6.77) em relação a $\underline{x}$ obteremos:

$$\frac{d}{dx}\left\{[f(x)]^2 - 4[f(x)]\right\} = \underbrace{\frac{d}{dx}\left\{x^3 - x\right\}}_{=3x^2-x}. \tag{6.78}$$

Utilizando a Regra da Cadeia no lado esquerdo da identidade acima, obteremos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left\{[f(x)]^2 - 4[f(x)]\right\} &= \frac{d}{dx}\left\{[f(x)]^2\right\} - 4\frac{d}{dx}[f(x)]\\ &\overset{\textit{Regra da Cadeia}}{=} 2f(x)\,f'(x) - 4f'(x)\\ &= [2f(x) - 4]f'(x)\,.\end{aligned}$$

Substituindo em (6.78), obteremos

$$[2f(x) - 4]f'(x) = 3x^2 - x,$$

ou seja, se $f(x) \neq 2$, teremos

$$f'(x) = \frac{3x^2 - x}{2f(x) - 4},$$

ou ainda, se $y_o = f(x_o)$, segue que

$$f'(x_o) = \frac{3x_o^2 - x_o}{2y_o - 4}.$$

5. *Notemos que $y_o = f(x_o)$ deverá ser diferente de 2 para que a expressão acima faça sentido.*

6. *Vale observar que estamos supondo que a equação acima define $\underline{y}$ como função de $\underline{x}$, ou seja, $y = f(x)$, para $x \in A$, para algum $A \subseteq \mathbb{R}$.*

   *Nem sempre isso é verdade, ou seja, existem equações nas variáveis $\underline{x}$, $\underline{y}$ que **não** definem $\underline{y}$ como função de $\underline{x}$, nem $\underline{x}$ como função de $\underline{y}$.*

   Como por exemplo a equação:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

   *Na equação **não** existem $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo a equação !*

A seguir aplicaremos as idéias acima ao seguinte exemplo:

Exemplo 6.19.1 *Supondo que a equação*

$$x^4 y + y^2 = 0 \tag{6.79}$$

define $\underline{y}$ como função de $\underline{x}$ (ou seja, $y = y(x)$) para $x \in A \subseteq \mathbb{R}$, de modo diferenciável em A, encontrar $\dfrac{dy}{dx}(x)$ e $\dfrac{dy}{dx}(1)$, sabendo que $y(1) = -1$.

Resolução:

Notemos que, de fato,

$$y(1) = -1,$$

ou seja, $(x, y) = (1, -1)$ satisfaz a equação (6.79), pois

$$1^4.(-1) + (-1)^2 = 0\,.$$

Como estamos supondo que a função $y = y(x)$ é diferenciável em A, derivando-se a equação (6.79) em relação a $\underline{x}$, obteremos:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{d}{dx}0}_{=0} = \frac{d}{dx}\left[x^4\,y(x) + y^2(x)\right] &= \frac{d}{dx}\left[x^4 y(x)\right] + \frac{d}{dx}\left[y^2(x)\right] \\
&= \left\{\frac{d}{dx}\left[x^4\right].y(x) + x^4.\frac{d}{dx}[y(x)]\right\} + \frac{d}{dx}\left[y^2(x)\right] \\
&\overset{\text{Regra da Cadeia}}{=} \left\{4x^3.y(x) + x^4.\frac{dy}{dx}(x)\right\} + 2y(x).\frac{dy}{dx}(x) \\
&= 4x^3 y(x) + \left[x^4 + 2y(x)\right]\frac{dy}{dx}(x)\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{-4x^3\,y(x)}{x^4 + 2y(x)}.$$

Portanto

$$\frac{dy}{dx}(1) = \frac{-4.1^3.y(1)}{1^4 + 2.y(1)} \overset{y(1)=-1}{=} \frac{-4.(-1)}{1 + 2.(-1)} = -4.$$

Temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 6.19.1 *Encontre a equação da reta tangente à representação geométrica do gráfico da equação*

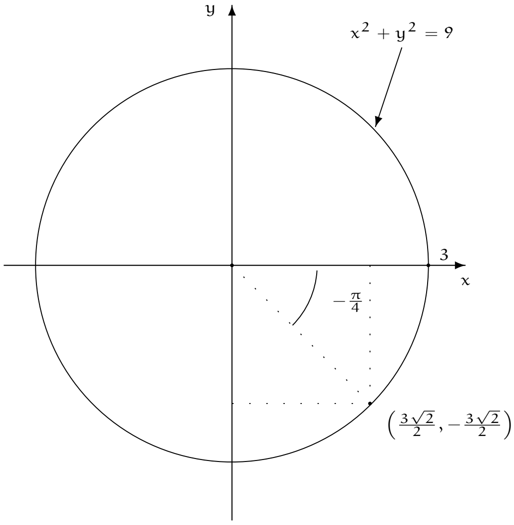
$$x^2 + y^2 = 9 \tag{6.80}$$

no ponto $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

Resolução:

Observemos que à representação geométrica do gráfico da equação acima é uma circunferência de centro na origem e raio 3 e que o ponto $P = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ é um ponto do gráfico da equação (veja figura abaixo) pois,

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9.$$



Observemos que a equação acima define $\underline{y}$ como função de $\underline{x}$, ou seja, podemos obter $y = y(x)$ para $x \in A \doteq (-3, 3)$, e esta será uma função diferenciável em $x_o = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Para mostrar isto, basta definir a função $y : (-3, 3) \to \mathbb{R}$ dada por

$$y(x) \doteq -\sqrt{9 - x^2}, \quad \text{para cada} \quad x \in (-3, 3)$$

e estudar a diferencibilidade da mesma no intervalo $(-3, 3)$.

Deixaremos esta verificação como exercício para o leitor.

Logo a equação da reta tangente à representação geométrica do gráfico da equação (6.80) no ponto $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ será dada por

$$y - y_o = y'(x_o)(x - x_o),$$

onde

$$y_o = y(x_o) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad x_o = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Para calcular $y'(x_o)$ derivaremos, implicitamente, a equação (6.80) em relação a $\underline{x}$, isto é,

$$\underbrace{\frac{d}{dx}9}_{=0} = \frac{d}{dx}\left[x^2 + y^2\right] = \frac{d}{dx}\left[x^2\right] + \frac{d}{dx}\left[y^2(x)\right] \overset{\text{Regra da Cadeia}}{=} 2x + 2\,y(x).\frac{dy}{dx}(x),$$

assim

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{-2x}{2y(x)} = -\frac{x}{y(x)}, \quad \text{para cada} \quad x \in (-3, 3).$$

Portanto

$$\frac{dy}{dx}(x_o) = \frac{dy}{dx}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{y\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)} \overset{y\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}}{=} -\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{-\frac{3\sqrt{2}}{2}} = 1,$$

ou seja, geometricamente, temos que a reta tangente forma ângulo de $\frac{\pi}{4}$ com o eixo Ox.

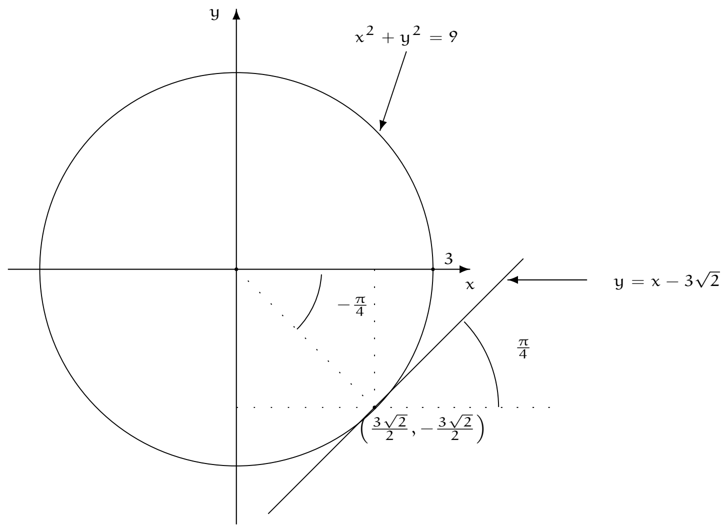
Assim a equação da reta tangente à representação geométrica do gráfico da equação (6.80) no ponto $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ será dada por:

$$y - \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 1.\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right),$$

ou seja,

$$y = x + 3\sqrt{2}.$$

Geometricamente temos



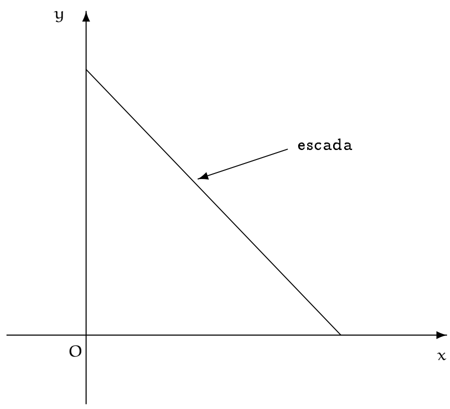
A seguir temos o seguinte exemplo aplicado:

Exemplo 6.19.2 *Uma escada de* $5m$ *de altura está apoiada em uma parede vertical.*

Se a base da escada é deslocada da parede, na direção horizontal, a velocidade de $4m/s$ *pergunta-se, a que velocidade deslizará a parte superior da escada ao longo da parede vertical quando a base da escada se encontra a* $3m$ *da parede?*

Resolução:

Consideremos o sistema de coordenadas xOy de tal modo que o eixo Ox será a reta horizontal, que contém a base escada, o eixo Oy a reta vertical, que descreve a parede, onde a escada está apoiada (veja a figura abaixo).



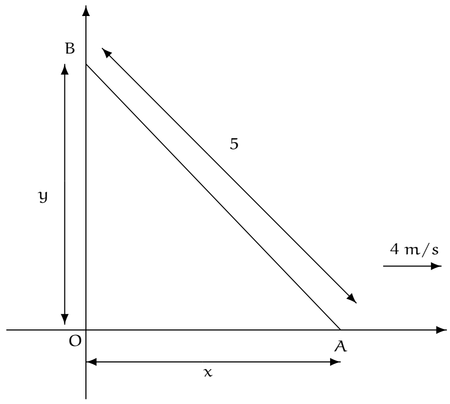
Consideremos ainda:

t: o n.o de segundos transcorridos após a escada ter começado a mover-se;

x: o n.o de metros da base da escada até a parede, no instante $t\,seg$;

y: o n.o de metros do topo da escada até o chão, no instante $t\,seg$.

Geometricamente teremos:



Denotemos por A, o ponto da base da escada que está apoiado no chão no instante $t\,seg$ e por B, o ponto do topo da escada que está apoiado na parede no instante $t\,seg$ (veja a figura acima).

Temos que a distância da base da escada à parede é uma função de $\underline{t}$, isto é, $x = x(t)$, assim como a distância do topo da escada ao chão também é uma função de $\underline{t}$, ou seja, $y = y(t)$.

Aplicando o Teorema da Pitágoras ao triângulo retângulo ΔOAB obtemos

$$x^2 + y^2 = 5^2 = 25, \tag{6.81}$$

ou seja, as funções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são dadas, implicitamente, pela equação (6.81), ou seja,

$$x^2(t) + y^2(t) = 25\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, \infty)\,. \tag{6.82}$$

Suponhamos que a equação (6.81) nos forneça, implicitamente, $x = x(t)$ e $y = y(t)$, como funções diferenciáveis em relação a $\underline{t}$, para $t \in (0, \infty)$.

Derivando a equação (6.82) em relação a $\underline{t}$, para $t \in (0, \infty)$, obteremos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{d}{dt}[25]}_{=0} = \frac{d}{dt}\left[x^2(t) + y^2(t)\right] &\overset{\text{Regra da Cadeia}}{=} 2.x(t).\frac{dx}{dt}(t) + 2.y(t).\frac{dy}{dt}(t) \\ &= 2\,x(t)\,x'(t) + 2\,y(t)\,y'(t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$y'(t) = \frac{-x(t)\,x'(t)}{y(t)}\,, \quad \text{para cada} \quad t \in (0, \infty)\,. \tag{6.83}$$

Sabemos que a escada é arrastada da parede a uma velocidade de $4\,m/s$, ou seja,

$$x'(t) = 4\,m/s\,, \quad \text{para cada} \quad t \in (0, \infty).$$

Além disso, para algum $t_o \in (0, \infty)$, temos que

$$x(t_o) = 3,$$

e de (6.81) (isto é, $x^2(t_o) + y^2(t_o) = 25$), segue que

$$y(t_o) = 4\,.$$

Assim, de (6.83), obteremos:

$$y\,'(t_o) = \frac{-3.4}{4} = -3\,m/s,$$

isto é, o topo da escada desliza a velocidade de $-3\,m/s$ (o sinal negativo indicada que a o topo da escada desliza no sentido do chão).

Para finalizar este capítulo deixaremos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 6.19.2 *Um tanque em forma de um cone circular reta invertido com altura* $5m$ *e raio da base* $1m$ *é enchido de água a uma velocidade de* $2\,m^3/mim$.

Pergunta-se: com que velocidade sobe o nível da água quando temos uma camada de água de $3m$ *de profundidade?*

Resolução:

Consideremos:

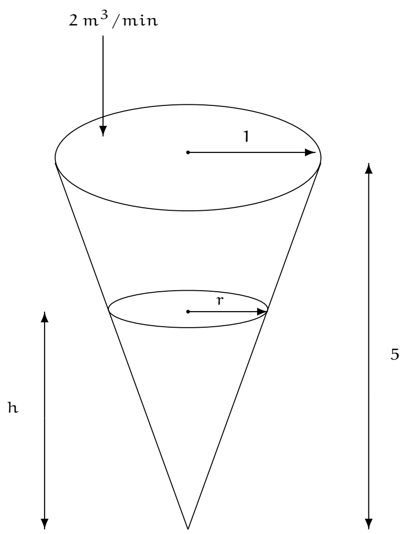
t: o n.o de segundos transcorridos após o tanque começar a encher;

h: o n.o de metros da camada de água transcorrido $t\,min$;

r: o n.o de metros do raio da circunferência da superfície da camada de água transcorrido $t\,min$;

V: o n.o de metros cúbicos de água no tanque no instante $t\,min$.

Geometricamente temos:



Observemos que a altura da camada de água será uma função do tempo $\underline{t}$, isto é, $h = h(t)$, para $t \in [0, \infty)$ e, de modo semelhante, o raio da superfície da camada de água também será uma função do tempo $\underline{t}$, isto é, $r = r(t)$, para $t \in [0, \infty)$, e assim o volume da camada de água no tanque também será uma função do tempo $\underline{t}$, a saber, $V = V(t)$, para $t \in [0, \infty)$.

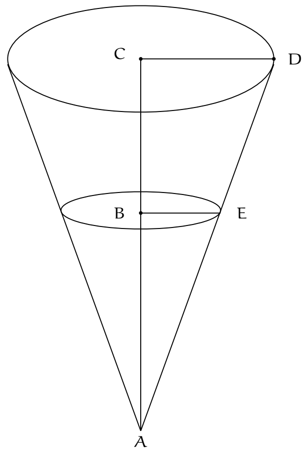
Sabemos que o volume de um cilindro circular reto cujo raio da base é $\underline{r}$ e altura é $\underline{h}$ é um terço da área da base pela sua altura, isto é,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h\,,$$

ou seja,

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi r^2(t)\, h(t)\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, \infty)\,. \tag{6.84}$$

Na figura abaixo temos que os triângulos ΔABE e ΔACD são semelhantes (caso AAA).



Logo segue que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}\,. \tag{6.85}$$

Mas

$$\overline{AB} = h, \quad \overline{BE} = r, \quad \overline{AC} = 5 \quad \text{e} \quad \overline{CD} = 1\,.$$

Assim, a relação (6.85), tornar-se-á:

$$\frac{h}{r} = \frac{5}{1}, \quad \text{ou seja,} \quad r = \frac{1}{5}h\,.$$

Substituindo-se a expressão acima em (6.84) obteremos:

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi \left[\frac{1}{5}h(t)\right]^2 h(t) = \frac{1}{75}\pi h^3(t)\,. \tag{6.86}$$

Supondo que a equação (6.86) nos fornece o volume e a altura da camada de água em função do tempo $\underline{t}$ como funções diferenciáveis em relação a $\underline{t}$, para $t \in (0, \infty)$, derivando a equação (6.85) em relação a $\underline{t}$, obteremos:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{75}\pi h^3(t)\right] \overset{\text{Regra da Cadeia}}{=} \frac{1}{75}\pi \left[3h^2(t)\,\frac{dh}{dt}(t)\right] \\ &= \frac{1}{25}\pi h^2(t)\, h'(t)\,.\end{aligned} \tag{6.87}$$

Vale observar que queremos encontrar $h'(t)$, quando $h = 3\,m$ (não sabemos que instante t corresponde essa altura $h(t)$!).

Sabemos que

$$V'(t) = 2\,m^3/min, \,.$$

Logo, segue de (6.87), que

$$h'(t) = \frac{25}{\pi h^2(t)} V'(t) \overset{V'(t)=2}{=} \frac{50}{\pi h^2}\,.$$

Fazendo $h = 3$ obteremos

$$h'(t)_{|_{h=3}} = \frac{50}{9\pi},$$

ou seja, a velocidade com que a superfície da camada de água sobe quando a altura da camada de água é $3m$ será de $\frac{50}{9\pi}m/s$.

Capítulo 7

Máximos ou Mínimos de Funções Reais de Uma Variável Real

7.1 Motivação

Dada uma função $f : A \to \mathbb{R}$, onde A é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, de tal modo que a função $\underline{f}$ seja diferenciável em A, então a interpretação geométrica da função derivada pode ser vista como a inclinação da reta tangente (mais especificamente, o coeficiente angular da reta tangente) à representação geométrica do gráfico de $\underline{f}$ em um ponto da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.

Este fato nos ajudará a encontrar uma representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$; na verdade a função derivada $\underline{f'}$ é a "função delatora" (que, de certo modo, conta o comportamento da função $\underline{f}$), como veremos neste capítulo.

7.2 Máximos ou mínimos locais (ou relativos) de uma função real de uma variável real

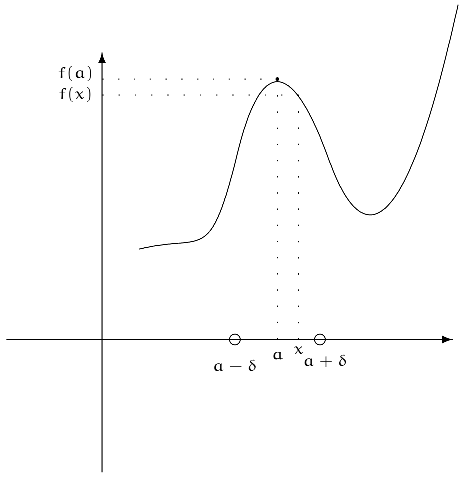
Começaremos pela:

Definição 7.2.1 *Sejam A é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $a \in A$.*

Diremos qua a função $\underline{f}$ tem um **ponto de máximo local (ou relativo) em $x = a$** *se podemos encontrar $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) \leq f(a), \quad \textit{para cada} \quad x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A.$$

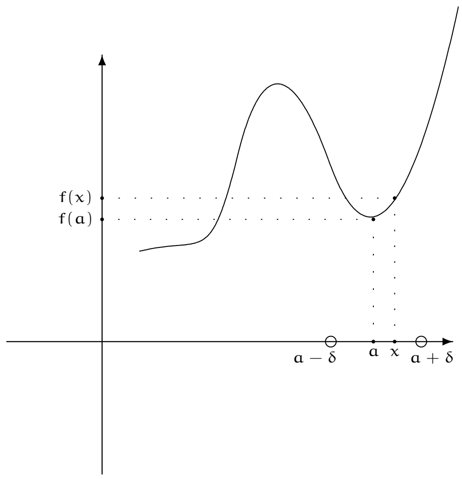
Neste caso $f(a)$ será dito **valor do máximo local da função $\underline{f}$** *em $x = a$.*



Diremos qua a função f *tem um* **ponto de mínimo local (ou relativo) em $x = a$** *se podemos encontrar* $\delta > 0$ *tal que*

$$f(a) \leq f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in (b - \delta, a + \delta) \cap A.$$

Neste caso $f(a)$ *será dito* **valor do mínimo local (ou relativo) da função f** *em* $x = a$



Se a função f *tem um ponto de máximo ou mínimo local (ou relativo) em* $x = a$ *diremos que a função* f *tem um* **ponto de extremo local (ou relativo) em $x = a$** *e* $f(a)$ *será dito* **valor do extremo local (ou relativo) da função f** *em* $x = a$.

Observação 7.2.1 *Se a função* f *tem um ponto de máximo local (mínimo local, respectivamente) em* $x = a$, *significa, empiricamente, que "perto" do ponto* $x = a$, *a função* f **não** *assume valores maiores (menores, respectivamente) que o valor* $f(a)$.

Consideremos o:

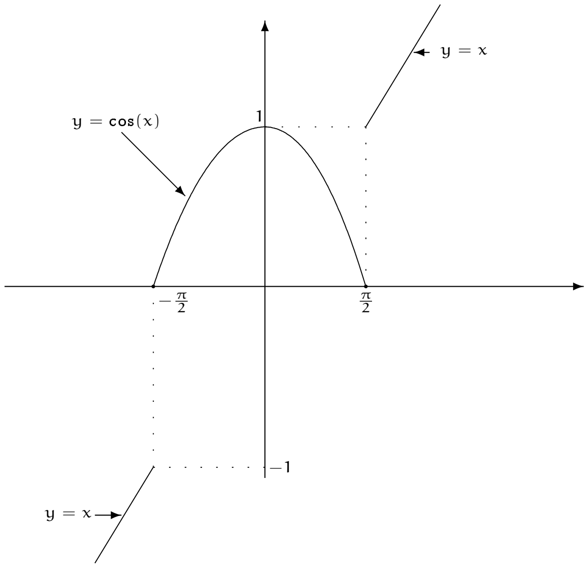
Exemplo 7.2.1 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} \cos(x), & \textit{se} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \\ x, & \textit{se} \quad x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right) \quad \textit{ou} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases},$$

tem um ponto de máximo local em $x = 0$ e um ponto de mínimo local em $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



Observemos que se tomarmos, por exemplo,

$$\delta \doteq \frac{\pi}{2} > 0,$$

temos que, se

$$x \in (0 - \delta, 0 + \delta) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

segue que

$$f(x) = \cos(x) \leq 1 = \cos(0) = f(0)\,,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ tem um ponto de máximo local em $x = 0$, cujo valor de máximo local em $x = 0$ será

$$f(0) = \cos(0) = 1\,.$$

Por outro lado, se tomarmos, por exemplo,

$$\delta \doteq \frac{\pi}{2} > 0,$$

temos que, se

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta\right) = (0, \pi),$$

segue que

$$f(x) \geq 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\,,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ tem um ponto de mínimo localem $x = \dfrac{\pi}{2}$, , cujo valor de míimo local em $x = \dfrac{\pi}{2}$ será

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,.$$

Temos também o seguinte exercício, cuja resolução será deixada a cargo do leitor.

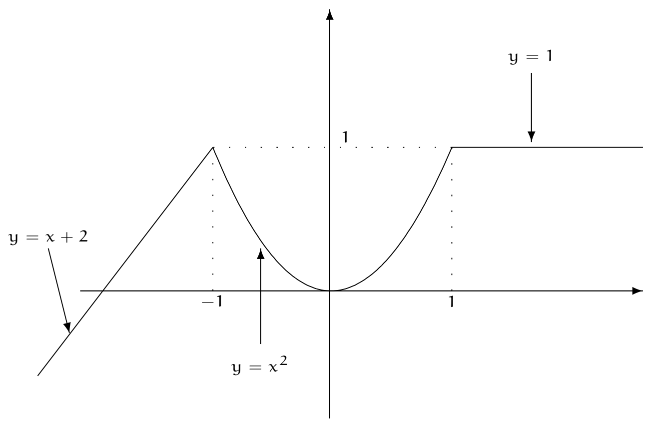
Exercício 7.2.1 *Consideremos* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} x+2, & para \quad x \in (-\infty, -1] \\ x^2, & para \quad x \in (-1, 1) \\ 1, & para \quad x \in [1, \infty) \end{cases} .$$

Afirmamos que a função $\underline{f}$ *tem um ponto de mínimo local em* $x = 0$*, um ponto de máximo local em* $x = -1$ *e em todo ponto de* $x \in [1, \infty)$*.*

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo.



Observação 7.2.2 *Observemos que no Exercício acima a função* $\underline{f}$ *tem um ponto de mínimo relativo em* $x = 0$ *e é diferenciável em* $x = 0$*.*

Além disso temos que

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} \overset{x \neq 0}{=} \lim_{x \to 0} x = 0,$$

ou seja,

$$f'(0) = 0$$

ou ainda, a reta tangente à representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *no ponto* $(0, f(0))$ *é da forma*

$$y - f(0) = 0.(x - 0),$$

isto é,

$$y = 0$$

logo uma reta horizontal !

Isto ocorre em geral, como garante o seguinte resultado.

Teorema 7.2.1 *Sejam* A *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$*,* $a \in A$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função que tem um ponto de extremo local em* $x = a$*.*

Se a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $x = a$ *então deveremos ter*

$$f'(a) = 0.$$

Demonstração:

Suponhamos que a função $\underline{f}$ tenha um ponto de máximo local em $x = a$.

A demonstração do caso em a função $\underline{f}$ tem um ponto de mínimo local em $x = a$ é semelhante a que apresentaremos e será deixada como exercício para o leitor.

Sabemos que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $x = a$, logo existe

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Como a função $\underline{f}$ tem um ponto de máximo local em $x = a$ deverá existir $\delta > 0$, que podemos supor ser suficientemente pequeno para que $(a - \delta, a + \delta) \subseteq A$, tal que

$$f(x) \leq f(a), \quad \text{para caca} \quad x \in (a - \delta, a + \delta),$$

que é equivalente a escrever

$$f(x) - f(a) \leq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in (a - \delta, a + \delta).$$

Assim, se $x \in (a - \delta, a)$, segue que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{f(x)-f(a) \leq 0 \text{ e } x-a \leq 0}{\geq} 0.$$

Logo, do Corolário (4.4.6), segue que

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0. \tag{7.1}$$

Por outro lado, se $x \in (a, a + \delta)$ segue que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{f(x)-f(a) \leq 0 \text{ e } x-a \geq 0}{\leq} 0.$$

Logo, do Corolário (4.4.6), segue que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0. \tag{7.2}$$

Como a função $\underline{f}$ é diferenciável em $x = a$ temos que

$$0 \overset{(7.1)}{\leq} \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{(7.2)}{\leq} 0,$$

ou seja,

$$f'(a) = 0$$

como queríamos mostrar.

□

Observação 7.2.3

1. *__Não__ vale a recíproca do resultado acima, isto é, existem funções diferenciáveis em $x = a$ que satisfazem $f'(a) = 0$, mas que __não__ tem nem ponto de máximo, nem ponto de mínimo local em $x = a$.*

Por exemplo, se considerarmos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

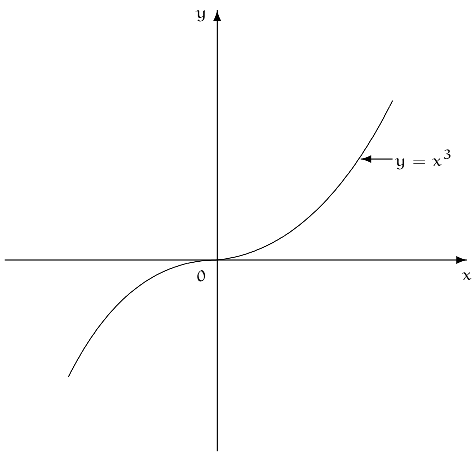
$$f(x) \doteq x^3\,, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

teremos que a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $x = 0$ *(na verdade é diferenciável em* $\mathbb{R}$*) e* $f'(0) = 0$ *(pois* $f'(x) = 3x^2$, *para cada* $x \in \mathbb{R}$*).*

Mas a função $\underline{f}$ **<u>não</u>** *tem ponto de máximo, ou ponto de mínimo local em* $x = 0$, *pois*

$$0 \le f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, \infty) \quad \textit{e} \quad f(x) \le 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-\infty, 0].$$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *é dada pela figura abaixo:*



<u>Conclusão:</u> *se a função* $\underline{f}$ *é diferenciável em* x_o, *uma condição* **<u>necessária</u>** *para que ela tenha um extremo local no ponto* x_o *é que*

$$f'(x_o) = 0\,.$$

2. *Pode ocorrer da função* $\underline{f}$ *ter um ponto de extremo local em* $x = a$ *mas a função* **<u>não</u>** *ser diferenciável em* $x = a$, *ou seja, não existir* $f'(a)$, *como mostra o seguinte exemplo:*

   Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

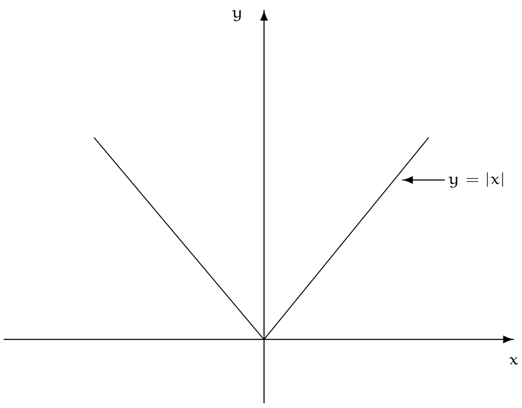
$$f(x) \doteq |x|\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

   Temos que a função $\underline{f}$ *tem um ponto de mínimo local em* $x = 0$, *pois para qualqer* $\delta > 0$, *temos que*

$$f(x) \ge 0 \quad \textit{para cada} \quad x \in (-\delta, \delta)\,.$$

   Porém, como vimos anteriormente, a função $\underline{f}$ **<u>não</u>** *é diferenciável em* $x = 0$.

   A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *é dada pela figura abaixo:*



3. **Conclusão:** *se uma função f tem um ponto de extremo local em um ponto* $x = a$ *então ou a função f não é diferenciável em* $x = a$ *ou a função f é diferenciável em* $x = a$ *e neste caso devermos ter* $f'(a) = 0$.

4. *Deste modo, as* **condições necessárias** *para que uma função f tenha um ponto de extremo local em um ponto* $x = a$ *são:*

$$f \text{ não é diferenciável em } x = a\,, \text{ ou, } f \text{ é diferenciável em } x = a \text{ e } f'(a) = 0.$$

Devido a esta última observação, vamos introduzir a:

Definição 7.2.2 *Sejam* A *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, $a \in A$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Diremos que a função f tem um **ponto crítico em** $x = a$ *se uma das situações ocorrer:*

(i) a função f não é diferenciável em $x = a$ *(ou seja, não existe* $f'(a)$*);*

(ii) a função f é diferenciável em $x = a$ *e* $f'(a) = 0$.

Observação 7.2.4

1. *Se a função f tem um ponto de extremo local em* $x = a$ *e for diferenciável em* $x = a$ *então, segue do Teorema (7.2.1), que* $f'(a) = 0$, *ou seja, a função f terá um ponto crítico em* $x = a$.

2. *Os pontos críticos de uma função são os* **candidatos** *a pontos extremos locais da função.*

   Pode ocorrer de uma função **não** *ter um extremo local em um ponto do seu domínio, mesmo este ponto sendo um ponto crítico da função (como por exemplo a função* $f(x) = x^3$, *para* $x \in \mathbb{R}$ *no ponto* $a = 0$*).*

Apliquemos isto ao:

Exemplo 7.2.2 *Encontre todos os pontos críticos da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Resolução:

Os pontos críticos da função ocorrerão onde a função derivada se anula e onde a função f não é diferenciável no seu domínio, que no caso é o $\mathbb{R}$.

Como

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{d}{dx}\left[x^{\frac{4}{3}}\right] + 4.\frac{d}{dx}\left[x^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} + 4.\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+1) = \frac{4(x+1)}{3x^{\frac{2}{3}}}, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

teremos que os pontos críticos da função $\underline{f}$ ocorrerão quando:

(i) não existe $f'(x)$, ou seja, o ponto $x = 0$ é um ponto crítico da função $\underline{f}$;

(ii) $0 = f'(x) = \dfrac{4(x+1)}{3x^{\frac{2}{3}}}$, ou seja, o ponto $x = -1$.

Portanto os únicos pontos críticos da função $\underline{f}$ são os pontos:

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = -1.$$

<u>**Conclusão:**</u> caso a função $\underline{f}$ tenha pontos extremos locais eles só poderão ocorrer em $x = 0$ ou em $x = -1$.

7.3 Máximos ou mínimos globais (ou absolutos) de funções reais de uma variável real

Observação 7.3.1 *Em vários problemas que trataremos a seguir* <u>**não**</u> *estaremos interessados, inicialmente, em encontrar os extremos locais (ou relativos) de uma função mas sim o maior (ou menor) valor da função em todo o seu domínio (caso existam).*

Para isto introduziremos a:

Definição 7.3.1 *Seja* $f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Diremos que a função $\underline{f}$ *tem um* <u>**ponto de máximo global (ou absoluto)**</u> *em* $x = a \in \mathrm{Dom}(f)$ *se*

$$f(x) \leq f(a), \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathrm{Dom}(f).$$

Neste caso, $f(a)$ *será dito* <u>**valor máximo global (ou absoluto) da função $\underline{f}$ em** $\mathrm{Dom}(f)$</u>.

De modo semelhante, diremos que a função $\underline{f}$ *tem um* <u>**ponto de mínimo global (ou absoluto)**</u> *em* $x = a \in \mathrm{Dom}(f)$, *se*

$$f(a) \leq f(x), \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathrm{Dom}(f).$$

Neste caso, $f(a)$ *será dito* <u>**valor mínimo global (ou absoluto) da função $\underline{f}$ em** $\mathrm{Dom}(f)$</u>.

Se a função $\underline{f}$ *tem um ponto de máximo global ou mínimo global em* $x = a \in \mathrm{Dom}(f)$ *diremos que função* $\underline{f}$ *tem um* <u>**ponto de extremo global (ou absoluto)**</u> *em* $x = a$.

Temos o seguinte exemplo:

Exemplo 7.3.1 *Consideremos a função* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq 4x - 1, \quad \textit{para cada} \quad x \in [-1, 1].$$

Então a função $\underline{f}$ *tem ponto de máximo global em* $[-1, 1]$ *no ponto* $x = 1$, *cujo valor do máximo global em* $[-1, 1]$ *é* 3 *e tem ponto de mínimo global em* $[-1, 1]$ *no ponto* $x = -1$, *cujo valor do mínimo global em* $[-1, 1]$ *será* -5.

Resolução:

De fato, para cada $x \in [-1, 1]$, teremos

$$f(x) = 4x - 1 \overset{-1 \leq x \leq 1}{\leq} 4.1 - 1 = 3 = f(1),$$

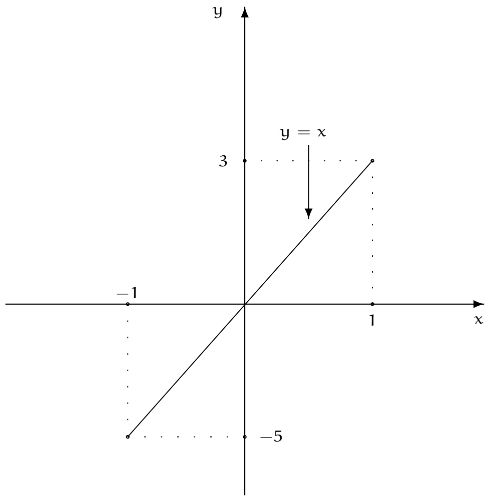
ou seja, a função f tem um ponto de máximo global em $[-1, 1]$ no ponto $x = 1$, cujo valor do máximo global em $[-1, 1]$ é 3.

De modo semelhante, ara cada $x \in [-1, 1]$, teremos

$$f(x) = 4x - 1 \overset{-1 \leq x \leq 1}{\geq} 4.(-1) - 1 = -5 = f(-1),$$

ou seja, a função f tem um ponto de mínimo global em $[-1, 1]$ no ponto $x = -1$, cujo valor do mínimo global em $[-1, 1]$ é -5.

A representação geométrica do gráfico da função f é dada pela figura abaixo:



Temos também o seguinte exercício resolvido:

Exercício 7.3.1 *Consideremos* $f : (-4, 1) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^2, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-4, 1).$$

Então a função f ***não*** *tem ponto de máximo global em* $(-4, 1)$ *mas tem ponto mínimo global em* $(-4, 1)$*, cujo valor do mínimo global em* $(-4, 1)$ *ocorrerá no ponto* $x = 0$*, ou seja, será* $f(0) = 0$.

Resolução:

De fato, ara cada $x \in (-4, 1)$, temos que

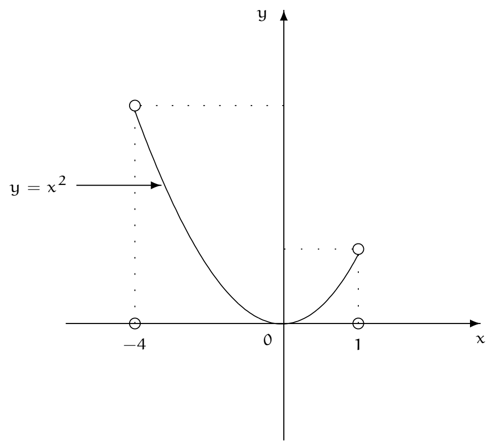
$$f(x) = x^2 \overset{-4 < x < 1}{\geq} 0 = f(0),$$

ou seja, a função f tem um ponto mínimo global em $(-4, 1)$ no ponto $x = 0$, cujo valor do mínimo global em $(-4, 1)$ será $f(0) = 0$.

A função f **não** tem ponto máximo global em $(-4, 1)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

A representação geométrica do gráfico da função f é dada pela figura abaixo:



O exemplo a seguir nos motivará para encontrar uma resultado importante para encontrarmos os pontos de máximo e mínimos globais de uma função "bem comportada", a saber:

Exemplo 7.3.2 *Consideremos* $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq 2x^2 , \quad \textit{para cada} \quad x \in [-1, 2].$$

Então a função $\underline{f}$ *tem pontos de máximo e mínimo globais em* $[-1, 2]$.

Resolução:

A função $\underline{f}$ tem ponto de mínimo global em $[-1, 2]$ que ocorre no ponto $x = 0$.

De fato, pois, para cada $x \in [-1, 2]$, teremos

$$f(x) = 2x^2 \overset{-1 \leq x \leq 2}{\geq} 0 = f(0),$$

mostrando que a função $\underline{f}$ tem um ponto de mínimo global em $[-1, 2]$ no ponto $x = 0$, cujo valor do mínimo global em $[-1, 2]$ será

$$f(0) = 0.$$

A função $\underline{f}$ tem ponto de máximo global em $[-1, 2]$ que ocorre no ponto $x = 2$.

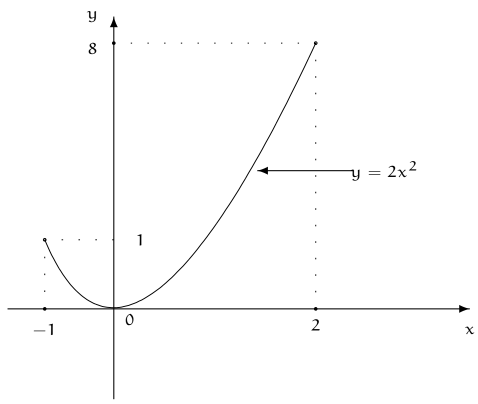
De fato, pois, para cada $x \in [-1, 2]$, teremos

$$f(x) = 2x^2 \overset{-1 \leq x \leq 2}{\leq} 2.2^2 = 8 = f(2),$$

mostrando que a função $\underline{f}$ tem um ponto máximo global em $[-1, 2]$ no ponto $x = 2$, cujo valor do mínimo global em $[-1, 2]$ será

$$f(2) = 8.$$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



Observação 7.3.2 *Observemos que no Exemplo acima a função $\underline{f}$ tem máximo e mínimo globais no seu domínio.*

Observemos também que, neste Exemplo, a função $\underline{f}$ é contínua no seu domínio e que seu domínio é um intervalo fechado e limitado da reta.

Isto é consequência do Teorema de Weierstrass (isto é, Teorema (5.5.3)), mais precisamente:

Teorema 7.3.1 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$.*

Então a função $\underline{f}$ tem pontos de máximo e mínimo globais em $[a, b]$, isto é, existem $s_o, t_o \in [a, b]$ tais que

$$f(s_o) \leq f(x) \leq f(t_o), \quad \textit{para todo} \quad x \in [a, b].$$

Observação 7.3.3 *Sabemos que uma* **<u>condição necessária</u>** *para que uma função $\underline{f}$ tenha um valor extremo local em $x = a$ é que este ponto seja um ponto crítico da função $\underline{f}$.*

Com isto podemos determinar os pontos de extremos globais de uma função contínua $\underline{f}$ definida em um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, determinando os pontos críticos da função $\underline{f}$ que pertencem ao intervalo aberto (a, b) e assim, comparando-se com os valores da função nesses pontos críticos da função $\underline{f}$ em (a, b), com os valores da função nos extremos do intervalo $[a, b]$ (isto é, em $x = a$ e $x = b$).

O maior desses valores será o valor máximo global da função $\underline{f}$ no intervalo $[a, b]$ e menor desses valores será o valor mínimo global da função $\underline{f}$ no intervalo $[a, b]$.

Isto é verdade pois, ou o máximo global (respectivamente, mínimo global) da função $\underline{f}$ em $[a, b]$ ocorrerá nos extremos do intervalo $[a, b]$ (isto é, $x = a$ ou $x = b$) ou ocorrerá em um ponto de (a, b).

Neste último caso, estes pontos deverão ser pontos extremos locais da função $\underline{f}$ e portanto um ponto crítico da função $\underline{f}$ em (a, b).

<u>Conclusão:</u> *para encontrar os pontos de extremos globais de uma função contínua $\underline{f}$ definida no intervalo fechado e limitado $[a, b]$ agimos da seguinte forma:*

(i) *encontremos todos os pontos críticos da função $\underline{f}$ em (a, b); que denotaremos por $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a, b)$;*

(ii) *encontremos os valores $f(a)$ e $f(b)$;*

(iii) *o valor máximo global da função $\underline{f}$ em $[a, b]$ será:*

$$\max\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), f(a), f(b)\}$$

e o valor mínimo global da função $\underline{f}$ em $[a, b]$ será:

$$\min\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

Apliquemos as idéias acima ao seguinte exemplo:

Exemplo 7.3.3 *Seja $f : \left[-2, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq x^3 + x^2 - x + 1, \quad \textit{para cada} \quad x \in \left[-2, \frac{1}{2}\right].$$

Encontrar, se existirem, os pontos de extremos globais da função $\underline{f}$ no intervalo $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$.

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$ (pois é a restrição de uma função polinomial ao intervalo $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$).

Em particular, ela será uma função contínua em $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$.

Log,o pelo Teorema (7.3.1), segue que a função $\underline{f}$ tem ponto de máximo e mínimo globais em $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$.

Para encontrá-los agiremos como na Observação acima.

Observemos que os pontos críticos da $\underline{f}$ em $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$, ocorrerão onde a função derivada se anula, pois a função é diferenciável em $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$, isto é:

$$0 = f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 + x^2 - x + 1\right) = 3x^2 + 2x - 1 \overset{\text{Exercício}}{=} (3x-1)(x+1),$$

ou seja, os únicos pontos críticos da função $\underline{f}$ em $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ são:

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad x_2 = -1.$$

Com isto temos que

$$f(x_1) \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{22}{27} \qquad \text{e} \qquad f(-1) \overset{\text{Exercício}}{=} 2.$$

Por outro lado temos que

$$f(a) = f(-2) \overset{\text{Exercício}}{=} -1 \quad \text{e} \quad f(b) = f\left(\frac{1}{2}\right) \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{7}{8}.$$

Logo o valor de máximo global da função $\underline{f}$ em $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$ será:

$$\begin{aligned} \max\{f(x_1), f(x_2), f(a), f(b)\} &= \max\left\{f\left(\frac{1}{3}\right), f(-1), f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \overset{\text{Exercício}}{=} \max\left\{\frac{22}{27}, 2, -1, \frac{7}{8}\right\} \\ &= 2 = f(-1) \end{aligned}$$

e o valor de mínimo global da função $\underline{f}$ em $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$ será:

$$\begin{aligned} \min\{f(x_1), f(x_2), f(a), f(b)\} &= \max\left\{f\left(\frac{1}{3}\right), f(-1), f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \overset{\text{Exercício}}{=} \min\left\{\frac{22}{27}, 2, -1, \frac{7}{8}\right\} \\ &= -1 = f(-2). \end{aligned}$$

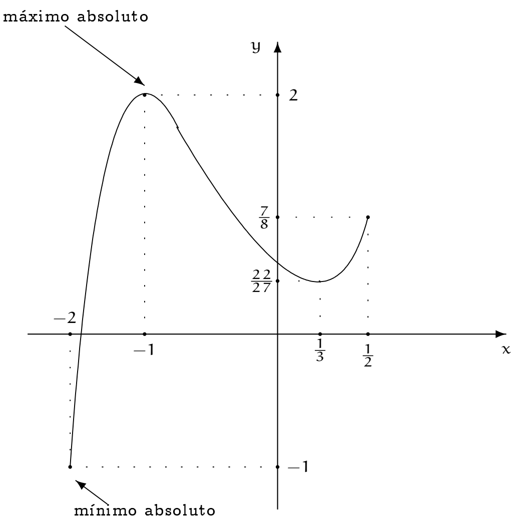
Logo a função $\underline{f}$ tem um ponto de máximo global em $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$ no ponto $x = -1$, cujo valor é

$$f(-1) = 2$$

e um ponto de mínimo global em $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$ no ponto $x = -2$, cujo valor é

$$f(-2) = -1\,.$$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



A seguir aplicaremos a técnica acima para resolver o seguinte problema:

Exemplo 7.3.4 *Um fabricante de caixas de papelão deseja construir caixas, sem tampa, com uma folha quadrada de papelão de* $12\,\mathrm{cm}$ *de lado, cortando quadrados iguais dos quatro cantos da folha e dobrandos-os para formar um paralelepípedo reto, com base retangular.*

Pede-se encontrar o comprimento do lado dos quadrados que deve-se cortar para que o volume da caixa obtida seja o maior possível.

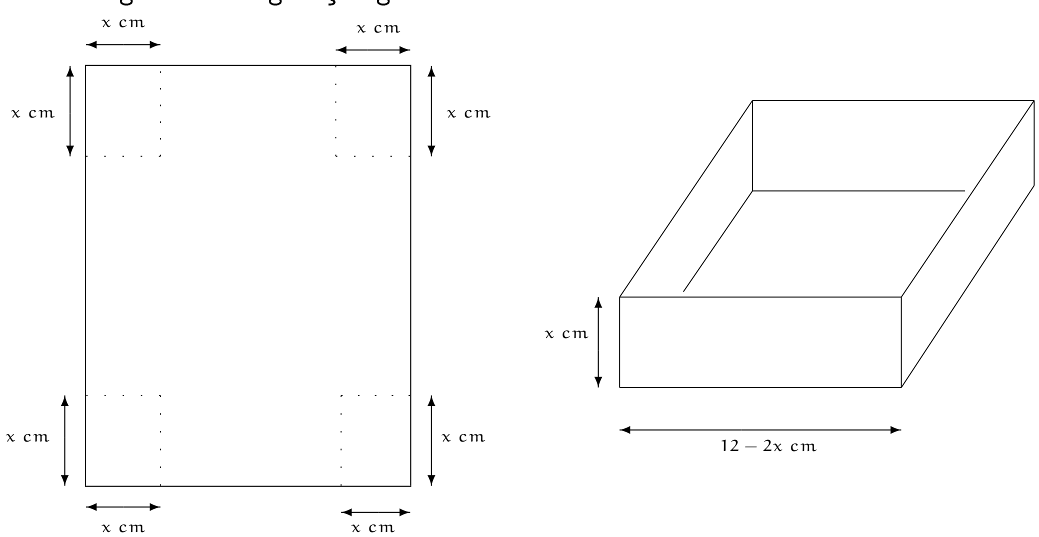
Resolução:

Sejam:

x : o n.o de centímetros no comprimento do lado do quadrado a ser cortado de cada um dos quatro "cantos" da folha de papelão;

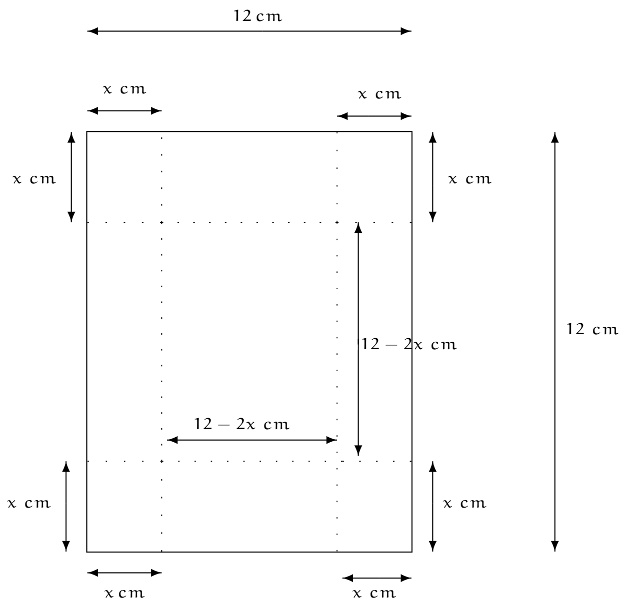
V : o volume, em centímetros cúbicos, da caixa obtida quando cortamos os quatro quadrados de lado $x\,\mathrm{cm}$ dos "cantos" da folha de papelão.

Temos a seguinte configuração geométrica:



As dimensões da caixa construída quando cortamos um quadrados de cada um dos "cantos" (com lado de comprimento $x\,\mathrm{cm}$) da caixa serão (ver figura abaixo):

$$(12 - 2x) \times (12 - 2x) \times x \quad (L \times C \times A).$$



Com isto temos que a função que descreverá o volume da caixa obtida quando cortamos quadrados dos cantos da folha de papelão, com comprimento dos lados igual a $x\,cm$, será dada por

$$V = V(x) = (12 - 2x)^2.x \overset{\text{Exercício}}{=} 4x^3 - 48x^2 + 144x\,,$$

além disso, para o problema, deveremos ter $x \in [0, 6]$.

Logo nosso problema é encontrar o valor máximo global da função $V : [0, 6] \to \mathbb{R}$ dada por

$$V(x) \doteq 4x^3 - 48x^2 + 144x\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0, 6].$$

Como a função V é contínua em $[0, 6]$ (pois é a restrição de uma função polonomial ao intervalo $[0, 6]$) segue, pelo Teorema (7.3.1), que a função V tem ponto de máximo global em $[0, 6]$ (também terá ponto de mínimo global em $[0, 6]$, mas este não interessa para o problema).

Para encontrar o valor máximo global da função V em $[0, 6]$ agiremos como sugerido na Observação (7.3.3):

(i) Encontremos os pontos críticos de V em $(0, 6)$.

Para isto observemos que a função $\underline{V}$ é diferenciável em $(0, 6)$ (pois é a restrição de uma função polonomial ao intervalo $(0, 6)$) logo seus pontos críticos ocorrerão onde a função derivada anular-se, isto é,

$$0 = V'(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 - 48x^2 + 144x\right) = 12x^2 - 96x + 144 = 12\left(x^2 - 8x + 12\right)$$
$$\overset{\text{Exercício}}{=} 12(x - 6)(x - 2)\,, \quad \text{ou seja,} \quad x_1 = 2 \;\text{ e }\; x_2 = 6.$$

Logo o único ponto crítico da função V em $(0, 6)$ será

$$x_1 = 2.$$

Além disso temos

$$V(x_1) = V(2) \overset{\text{Exercício}}{=} 128.$$

(ii) Temos também que

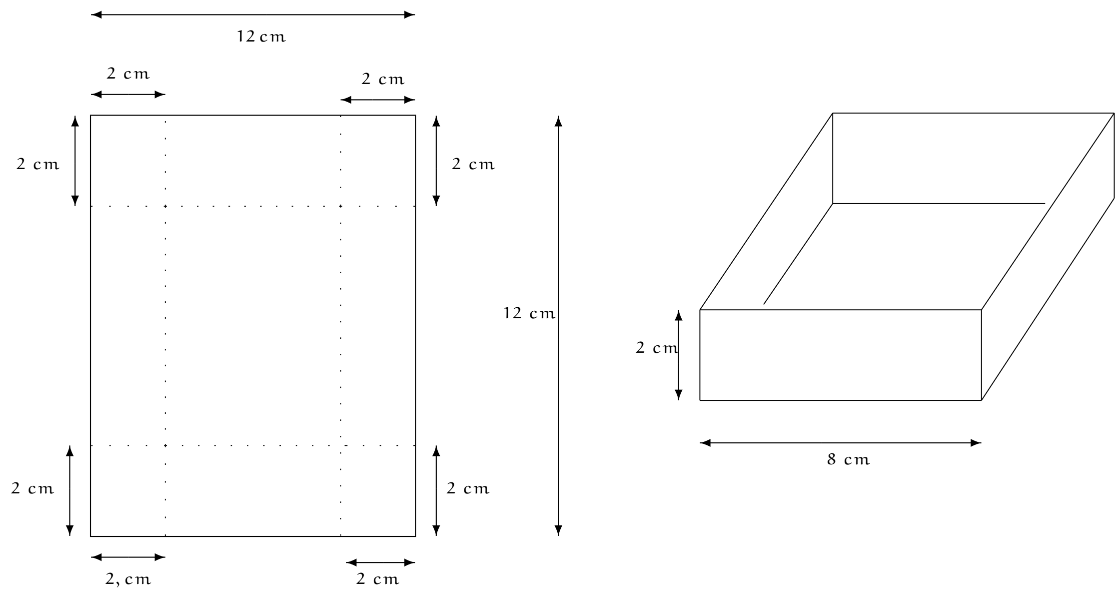
$$V(a) = V(0) = 0 \quad \text{e} \quad V(b) = V(6) = 0.$$

(iii) Logo o valor máximo global da função V em $[0,6]$ será dada por:

$$\max\{V(x_1), V(a), V(b)\} = \max\{V(2), V(0), V(6)\} = \max\{128, 2, 0\} = 128,$$

ou seja, a função V em $[0,6]$ tem um ponto de máximo global em $[0,6]$ que ocorrerá em $x = 2$ e cujo valor será $V(2) = 128$.

Conclusão: a caixa de volume máximo será obtida cortando-se um quadrado de lado $2\,\text{cm}$ de cada "canto" da folha de papelão e com isto obteremos uma caixa de volume $128\,\text{cm}^3$.



As dimensões da caixa de volume máximo serão: $8 \times 8 \times 2$.

Uma outra aplicação é dada pelo seguinte exercício resolvido:

Exercício 7.3.2 *Encontrar as dimensões de um cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito em um cone circular reto que tem como raio da base $5\,\text{cm}$ e altura de $12\,\text{cm}$.*

Resolução:

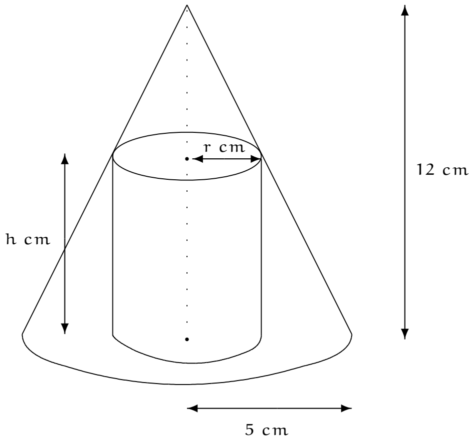
Sejam

r : o n.o de centímetros do raio do cilindro inscrito;

h : o n.o de centímetros da altura do cilindro inscrito;

V : o n.o de centímetros cúbicos do volume do cilindro inscrito.

Geometricamente temos:



As dimensões do cilindro inscrito no cone circular reto são:

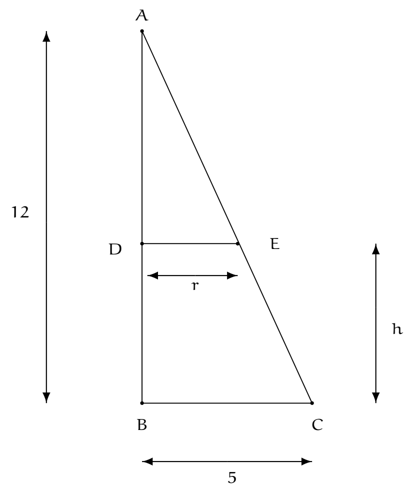
$$r \times h \quad \text{(raio do círculo base} \times \text{altura)},$$

e assim seu volume será dado por:

$$V = V(r, h) = \pi r^2\, h,$$

o que nos dá o volume do cilindro inscrito em termos do raio do cilindro da sua base e da altura do mesmo.

Mas observemos que os triângulo ΔABC e ΔADE são semelhantes (caso AAA) (veja figura abaixo).



Logo segue que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}.$$

Mas

$$\overline{AD} = 12 - h, \quad \overline{AB} = 12, \quad \overline{DE} = r \quad \text{e} \quad \overline{BC} = 5,$$

assim teremos

$$\frac{12 - h}{12} = \frac{r}{5}, \quad \text{ouseja}, \quad h = \frac{60 - 12r}{5}. \tag{7.3}$$

Assim

$$V = V(r) = \pi r^2.h = \pi r^2.\left(\frac{60 - 12r}{5}\right) \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{12}{15}\pi(5 - r)r^2. \tag{7.4}$$

Vale observar que, para o problema, devemos ter $r \in [0,5]$.

Logo nosso problema será encontrar o máximo global (ou absoluto) da função $V : [0,5] \to \mathbb{R}$ dada por (7.4) no intervalo fechado e limitado $[0,5]$.

Como a função V é contínua em $[0,5]$ (pois é a restrição de uma função polinomial ao intervalo $[0,5]$) segue, pelo Teorema (7.3.1), que ela tem ponto de máximo (e mínimo) global em $[0,5]$.

Para encontrá-lo agiremos como anteriormente.

(i) Encontremos os pontos críticos da função V em $(0,5)$.

Como a função V é diferenciável em $(0,5)$ (pois é a restrição de uma função polinomial ao intervalo $(0,5)$), segue que os seus pontos críticos ocorrerão onde a sua função derivada for zero, isto é,

$$0 = V'(r) = \frac{d}{dr}\left[\frac{12}{15}\pi\left(5r^2 - r^3\right)\right] = \frac{12}{15}\pi\left(10r - 3r^2\right) = \frac{12}{15}\pi r(10 - 3r)\,,$$

ou seja,

$$r = 0 \quad \text{ou} \quad r = \frac{10}{3}\,.$$

Assim o único ponto crítico da função V em $(0,5)$ será:

$$r_1 = \frac{10}{3}.$$

Observemos que

$$V\left(\frac{10}{3}\right) \stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{400}{9}\pi.$$

(ii) Temos que

$$V(a) = V(0) = 0 \quad \text{e} \quad V(5) = 0.$$

(iii) Logo o valor máximo global da função V em $[0,5]$ será:

$$\max\{V(r_1), V(a), V(b)\} = \max\left\{\frac{400}{9}\pi, 0, 0\right\} = \frac{400}{9}\pi.$$

Portanto o cilindro circular reto inscrito no cone circular reto dado que terá maior volume será o que tem $\frac{400}{9}\pi\,\text{cm}^3$ de volume e suas dimensões serão

$$r_1 \times h_1,$$

onde

$$r_1 = \frac{10}{3} \quad \text{e, por (7.3), teremos} \quad h_1 = \frac{60 - 12r}{5} \stackrel{\text{Exercício}}{=} 4.$$

Portanto, o cilindro circular reto inscrito no cone circular reto dado que terá maior volume, terá como base um círculo de raio $\frac{10}{3}\,\text{cm}$ e altura $4\,\text{cm}$ e seu volume será de $\frac{400}{9}\pi\,\text{cm}^3$.

7.4 Os Teoremas de Rolle e do Valor Médio

A seguir exibiremos alguns resultados que serão importantes em várias situações que serão estudadas mais adiante.

Começaremos pelo:

Teorema 7.4.1 *(de Rolle) Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* (a, b) *tal que*

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Então existe, pelo menos, um $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = 0.$$

Demonstração:

Observemos que se

$$f(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a, b]$$

então sabemos que

$$f'(x) = 0 \quad \text{para cada} \quad x \in [a, b]$$

e assim tomamos $\underline{c}$ qualquer ponto do intervalo $[a, b]$ e teremos

$$f'(c) = 0\,.$$

Logo podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$f(x_o) \neq 0\,, \quad \text{para algum} \quad x_o \in (a, b).$$

Segue, do Teorema (7.3.1), que a função $\underline{f}$ tem pontos de máximo e mínimo globais em $[a, b]$.

Como

$$f(x_o) \neq 0 = f(a) = f(b)$$

segue que o valor máximo global da função $\underline{f}$ ou o valor mínimo global da função $\underline{f}$ é diferente de zero, ou seja, um desse valores é diferente do valor da função nos extremos do intervalo $[a, b]$ (isto é, isto é diferente de zero).

Suponhamos que a função $\underline{f}$ tenha um valor de máximo global, maior que zero, em $c \in (a, b)$.

O caso em que a função $\underline{f}$ tenha um valor de mínimo global, menor que zero, em $c \in (a, b)$) será deixado como exercício para o leitor.

Logo $\underline{f}$ terá um ponto de máximo global em $c \in (a, b)$, logo este ponto deverá ser um máximo local da função e assim, pelo Teorema (7.2.1), segue que $f'(c) = 0$, como queríamos mostrar.

□

Como conseqüência do Teorema acima temos o:

Teorema 7.4.2 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* (a, b) *tal que*

$$f(a) = f(b). \tag{7.5}$$

Então existe $c \in (a, b)$ *de modo que* $f'(c) = 0$*.*

Demonstração:

Se definirmos a função $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) \doteq f(x) - f(a), \quad \text{para cada} \quad x \in [a, b]$$

segue que a função $\underline{h}$ será contínua em $[a, b]$ (pois a função $\underline{f}$ tem essa propriedade), será diferenciável em (a, b) (pois a função $\underline{f}$ tem essa propriedade).

Além disso teremos:

$$h(a) = f(a) - f(a) = 0 \quad \text{e} \quad h(b) = f(b) - f(a) \overset{(7.5)}{=} 0.$$

Logo aplicando-se o Teorema de Rolle à função $\underline{h}$ podemos garantir que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$h'(c) = 0.$$

Mas

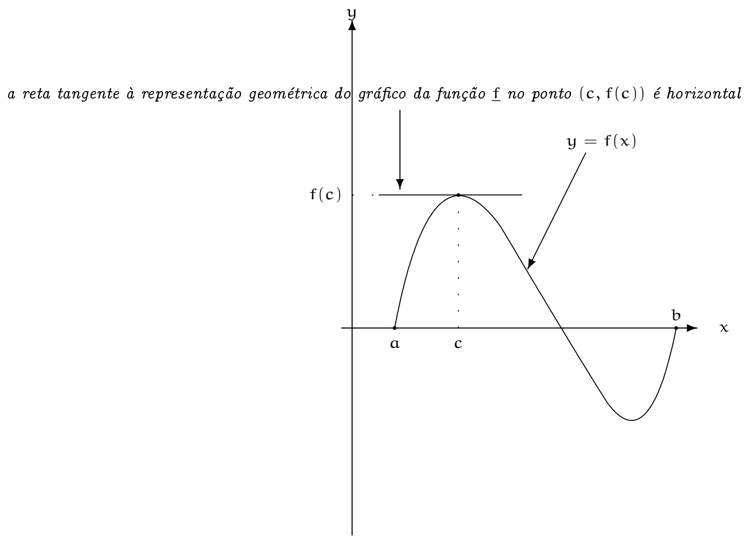
$$h'(x) = f'(x), \quad \text{para cada} \quad x \in (a, b).$$

Logo existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0,$$

como queríamos mostrar.

Observação 7.4.1 *O Teorema de Rolle (ou seu Corolário), geometricamente, nos dá condições, suficientes, para que a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ tenha, pelo menos, uma reta tangente à representação geométrica do seu gráfico que seja uma reta horizontal, a saber, a reta tangente à representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ que passa pelo ponto $(c, f(c))$ (veja figura abaixo).*



Aplicaremos o resultado acima ao seguinte exercício resolvido:

Exercício 7.4.1 *Seja $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq 3x^3 - 9x, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, 3].$$

Verifique se a função $\underline{f}$ satisfaz as condições do Teorema de Rolle e, se possível, encontre uma reta tangente à representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ que seja uma reta horizontal.

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é contínua em $[0,3]$ (pois ela é a restrição de uma função polinomial ao intervalo $[0,3]$), diferenciável em $(0,3)$ (pois ela é a restrição de uma função polinomial ao intervalo $[0,3]$) e além disso

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(3) = 0.$$

Logo, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (0,3)$ tal que

$$f'(c) = 0,$$

ou seja, a reta tangente à representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ no ponto $(c, f(c))$ será uma reta horizontal (a saber, $y = f(c)$), como afirmamos.

Observação 7.4.2 *No Exemplo acima podemos encontrar, explicitamente, o ponto* $c \in (0,3)$ *tal que*

$$f'(c) = 0\,.$$

Para isto basta, para cada $x \in (0,3)$, *calcular a função derivada:*

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^3 - 9x\right) = 9x^2 - 9 = 9(x-1)(x+1)\,,$$

e assim

$$0 = f'(c) = 9(c-1)(c+1)\,, \quad \textit{para algum} \quad c \in (0,3)\,,$$

o que nos fornecerá $c = 1$ *(observemos que* $c = -1 \notin (0,3)$*), ou seja, o ponto dado pelo Teorema de Rolle será o ponto* $c = 1$.

Um outro resultado importante é dado pelo:

Teorema 7.4.3 *(Teorema do Valor Médio) Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a,b]$ *e diferenciável em* (a,b).

Então existe $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração:

Consideremos a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) \doteq f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a,b].$$

Observemos que a função $\underline{f}$ é contínua em $[a,b]$, é diferenciável em (a,b).

De fato, pois a função $\underline{f}$ e a função $h : (a,b) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (a,b)$$

têm essas propriedades.

Além disso temos que

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = 0$$
$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = 0.$$

Logo podemos aplicar o Teorema de Rolle à função $\underline{F}$ e concluir que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$F'(c) = 0.$$

Mas

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)\right] = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

assim

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

ou seja,

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

como queríamos mostrar.

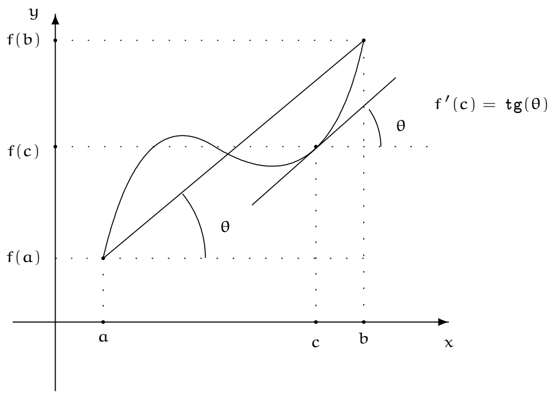
□

Observação 7.4.3 *Observemos que o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos* $(a, f(a))$ *e* $(b, f(b))$ *é dado por*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Logo, geometricamente, o Teorema da Valor Médio, nos dá **condições suficientes**, *para que exista uma reta tangente à representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *em um ponto* $(c, f(c))$, *que tenha o mesmo coeficiente angular da reta que passa pelos pontos* $(a, f(a))$ *e* $(b, f(b))$ *(veja figura abaixo), isto é,*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Aplicaremos este resultado ao seguinte exercício resolvido:

Exercício 7.4.2 *Consideremos* $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^3 - 5x^2 - 3x, \quad \textit{para cada} \quad x \in [1, 3].$$

Verifique que podemos aplicar o Teorema do Valor Médio e assim garantir a existência de $c \in (1, 3)$ *tal que a reta tangente à representação geométrica do gráfico de* $\underline{f}$ *no ponto* $(c, f(c))$ *tenha coeficiente angular dado por* $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}$.

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é uma função contínua em $[1,3]$ e diferenciável em $(1,3)$ (pois é a restrição de uma função polinomial ao intervalo $[1,3]$).

Logo pelo Teorema do Valor Médio segue que existe $c \in (1,3)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1},$$

ou seja, a reta tangente à representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ pelo ponto $(c, f(c))$ tem como coeficiente angular $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$, como foi pedido.

Observação 7.4.4 *No Exercício acima podemos encontrar, explicitamente, o valor $c \in (1,3)$.*

Para isto basta observar que, para cada $x \in (1,3)$, a função derivada é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 5x^2 - 3x\right) = 3x^2 - 10x - 3\,.$$

Como

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \overset{\text{Exercício}}{=} -10$$

segue que

$$-10 = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c) = 3c^2 - 10c - 3\,, \quad \textit{para algum} \quad c \in (1,3)\,,$$

o que nos fornece $c = \frac{7}{3}$ (há uma outra raiz do polinômio acima, a saber, $c = 1$, mas esta não pertence ao intervalo $(1,3)$), como afirmamos.

Uma conseqüência importante do Teorema do Valor Médio é dado pelo:

Corolário 7.4.1 *Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em (a,b) tal que*

$$f'(x) = 0 \quad \textit{para cada} \quad x \in (a,b).$$

Então podemos encontrar $d \in \mathbb{R}$, de modo que

$$f(x) = d\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a,b)$$

ou seja, a função deverá ser constante no intervalo (a,b).

Demonstração:

Sejam $x_1, x_2 \in (a,b)$ tais que $x_1 < x_2$.

Mostraremos que

$$f(x_1) = f(x_2),$$

o que implicará que a função $\underline{f}$ será constante em (a,b) (e com isto tomamos $d \doteq f(x_o)$, para algum $x_o \in (a,b)$).

Como a função $\underline{f}$ é diferenciável em (a,b) e $[x_1, x_2] \subseteq (a,b)$, segue que ela será contínua em $[x_1, x_2]$ e diferenciável em (x_1, x_2).

Logo do Teorema do Valor Médio segue que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{7.6}$$

Mas, por hipótese, temos que $f'(c) = 0$.
Logo, de (7.6), e do fato que $x_2 - x_1 \neq 0$, segue que

$$f(x_2) - f(x_1) = 0,$$

ou seja,

$$f(x_1) = f(x_2),$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 7.4.5

1. *O resultado acima nos diz que se uma função diferenciável em um intervalo e tem derivada igual a zero nesse intervalo então ela deverá ser constante nesse intevalo.*

2. *A hipótese do domínio da função* f *ser um intervalo é crucial, ou seja, se o domínio* **não** *for um intervalo o resultado pode ser falso, como mostra o seguinte exemplo:*

   Consideremos a função $f : (-1, 0) \cup (0, 1) \to \mathbb{R}$ *dada por*

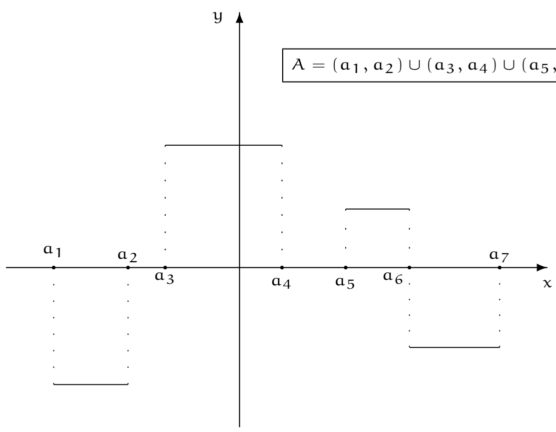
$$f(x) \doteq \begin{cases} -1\,, & para \quad x \in (-1, 0) \\ 1\,, & para \quad x \in (0, 1) \end{cases} .$$

   Então temos que a função f *é diferenciável em* $(-1, 0) \cup (0, 1)$, *além disso* $f'(x) = 0$, *para cada* $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, *e a função* f **não** *é uma função constante em* $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

3. *Podemos estender o resultado acima da seguinte forma:*

   Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio e* $f : A \to \mathbb{R}$ *diferenciável em* A *tal que* $f'(x) = 0$ *para cada* $x \in A$.

   Então a função f *será constante em cada um dos subintervalos disjuntos contidos em* A *(veja figura abaixo).*



Tais funções serão denominadas **constante por partes (ou simples)**.

7.5 Funções crescentes, estritamente crescentes, decrescentes ou estritamente decrescentes

No Capítulo 4 (veja as seções 13 e 14, nas páginas 73 e 74) introduzimos os conceitos de funções crescentes, estritamente crescentes, decrescentes ou estritamente decrescentes ou, em geral, funções monótonas.

Vejamos o que acontece no seguinte exemplo:

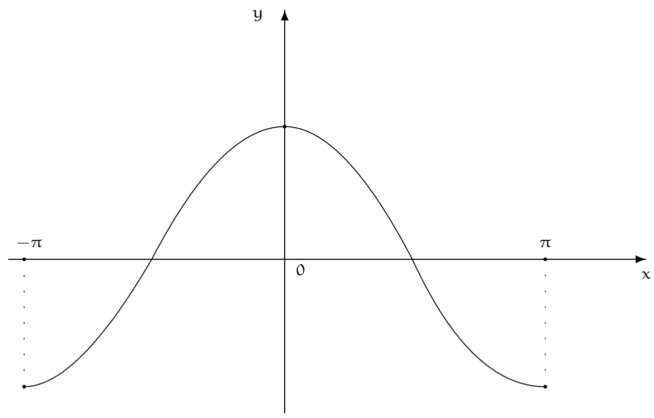
Exemplo 7.5.1 *Seja* $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Estude a monotonicidade da função $\underline{f}$*.*

Resolução:

A representação geométrica do seu gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



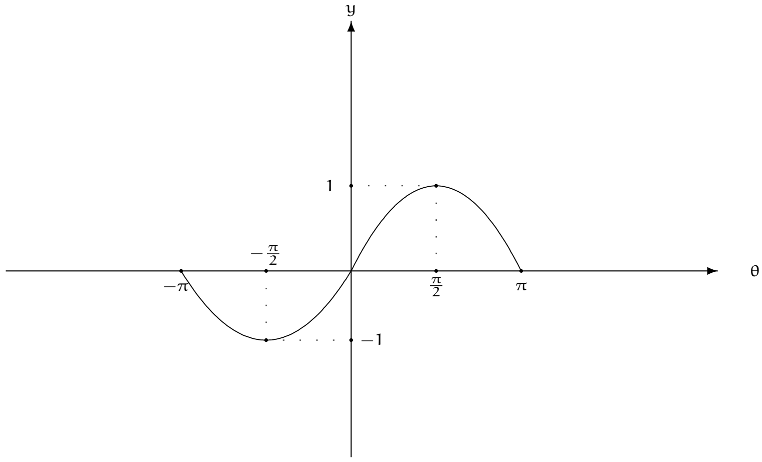
Observemos que a função $\underline{f}$ é estritamente crescente em $(-\pi, 0)$ e estritamente decrescente em $(0, \pi)$ (verifique !).

Além disso temos que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $(-\pi, \pi)$ e

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Com isto temos que (a figura abaixo nos fornece a representação geométrica do gráfico da função seno no intervalo $(-\pi, \pi)$):

$$\text{se} \quad x \in (-\pi, 0)\,, \quad \text{segue que} \quad f'(x) = -\operatorname{sen}(x) > 0;$$
$$\text{se} \quad x \in (0, \pi)\,, \quad \text{segue que} \quad f'(x) = -\operatorname{sen}(x) < 0.$$



Ou seja,

$$f'(x) > 0\,, \quad \text{para} \quad x \in (-\pi, 0)\,, \quad \text{e} \quad \text{a função } \underline{f} \text{ é estritamente crescente em } (-\pi, 0)\ ;$$
$$f'(x) < 0\,, \quad \text{para} \quad x \in (0, \pi)\,, \quad \text{e} \quad \text{a função } \underline{f} \text{ é estritamente decrescente em } (0, \pi)\ .$$

Logo neste Exemplo temos uma relação entre o sinal da função derivada em um intervalo e o comportamente monótono da função nesse intervalo.

Como veremos a seguir isto ocorre em geral.

Teorema 7.5.1 *Seja* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* (a, b).
Se

(i) Se $f'(x) \geq 0$*, para cada* $x \in (a, b)$*, então a função* $\underline{f}$ *será crescente em* (a, b).

(ii) Se $f'(x) > 0$*, para cada* $x \in (a, b)$*, então a função* $\underline{f}$ *será estritamente crescente em* (a, b).

(iii) Se $f'(x) \leq 0$*, para cada* $x \in (a, b)$*, então a função* $\underline{f}$ *será decrescente em* (a, b).

(iv) Se $f'(x) < 0$*, para cada* $x \in (a, b)$*, então a função* $\underline{f}$ *será estritamente decrescente em* (a, b).

Demonstração:

Faremos a demonstração para o item (i).

As demonstrações das outras situações são semelhantes e serão deixadas como exercício para o leitor.

Sejam $x_1, x_2 \in (a, b)$ tais que $x_1 < x_2$.

Como a função $\underline{f}$ é diferenciável em (a, b) segue que ela será contínua em (a, b).

Logo teremos que a função $\underline{f}$ será contínua em $[x_1, x_2]$ e diferenciável em (x_1, x_2).

Logo, do Teorema do Valor Médio, segue que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como, por hipótese, temos que $f'(c) \geq 0$, segue que

$$0 \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

que, juntamente com $x_2 > x_1$, implicarão que

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0,$$

mostrando que

$$f(x_2) \geq f(x_1),$$

ou seja, a função $\underline{f}$ é crescente em (a, b), como havíamos afirmado.

□

7.6 Teste da 1.a derivada para classificar extremos locais

Com resultado acima podemos obter um primeiro resultado importante para encontrar os pontos de extremos locais de uma função dada, a saber:

Teorema 7.6.1 *(Teste da 1.a derivada para extemos locais) Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função contínua em (a, b) e diferenciável em (a, b) exceto, eventualmente, no ponto $c \in (a, b)$.*

Se existir $\delta > 0$ tal que

(i) $f'(x) \geq 0$, para $x \in (c - \delta, c)$ e $f'(x) \leq 0$, para $x \in (c, c + \delta)$ então a função $\underline{f}$ tem um máximo local em $x = c$;

(ii) $f'(x) \leq 0$, para $x \in (c-\delta, c)$ e $f'(x) \geq 0$, para $x \in (c, c+\delta)$ então a função $\underline{f}$ tem um mínimo local em $x = c$.

Demonstração:

Faremos a demonstração do item (i).

A demonstração do item (ii) é semelhante a do item (i) e será deixada como exercício para o leitor.

Como

$$f'(x) \geq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in (c - \delta, c),$$

segue do Teorema anterior, item (i), que a função $\underline{f}$ será crescente em $(c - \delta, c)$, ou seja,

$$f(x) \leq f(c), \quad \text{para cada} \quad x \in (c - \delta, c). \tag{7.7}$$

De modo análogo, como

$$f'(x) \leq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in (c, c + \delta)$$

segue do Teorema anterior, item (iii), que a função $\underline{f}$ é decrescente em $(c, c + \delta)$, ou seja,

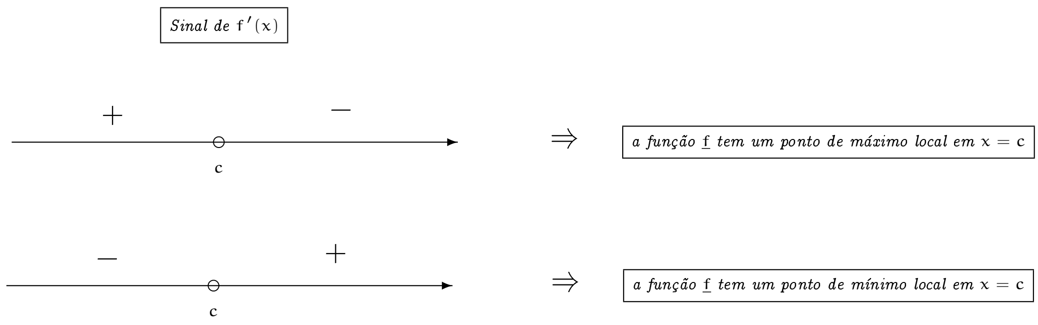
$$f(x) \leq f(c), \quad \text{para cada} \quad x \in (c, c + \delta). \tag{7.8}$$

Logo de (7.7) e (7.8) segue que a função $\underline{f}$ terá um máximo local em $x = c$, como queríamos demonstrar.

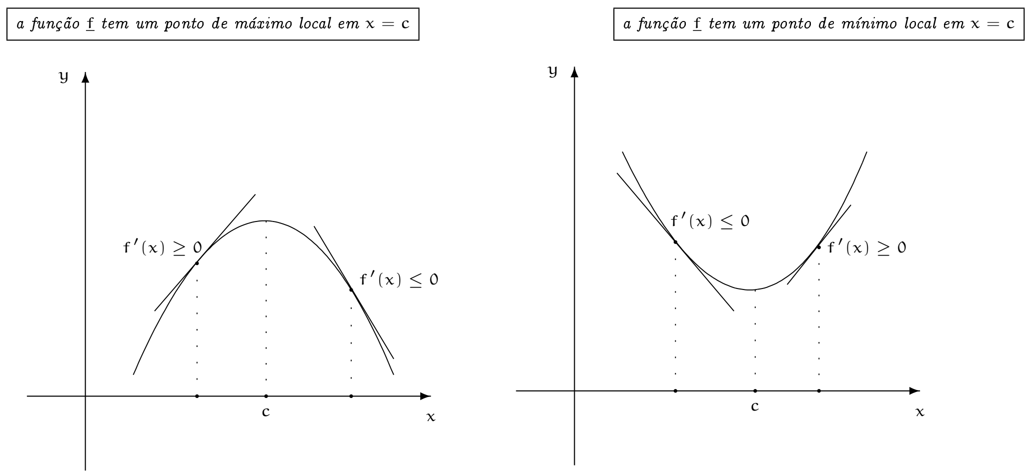
□

Observação 7.6.1

1. *Resumindo o resultado acima nos diz que:*



Geometricamente teremos:



2. *A seguir, utilizando os resultados desenvolvidos acima, daremos um método para determinarmos os pontos de extremos locais de uma função dada.*

   Agiremos da seguinte forma:

   (1) encontrar todos os pontos críticos da função $\underline{f}$ *do seu domínio, isto é, os pontos do domínio da função onde ela não é diferenciável e pontos onde a derivada é zero;*

   (2) aplicar o Teste da 1.a Derivada em cada um dos pontos críticos da função $\underline{f}$ *para classificá-los do ponto de vista de pontos de extremos locais.*

Faremos uso deste método no exemplo a seguir:

Exemplo 7.6.1 *Encontrar todos os pontos de extremos locais da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^3 - 6x^2 + 9x + 1\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Baseado nisto, obter uma representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *.*

<u>**Resolução:**</u>

Observemos que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ (pois é uma função polinomial) e além disso temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right] = 3x^2 - 12x + 9\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Logo os pontos críticos da função $\underline{f}$, se existirem, ocorrerão onde

$$f'(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja,

$$0 = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\left(x^2 - 4x + 3\right) \overset{\text{Exercício}}{=} 3(x-1)(x-3).$$

Assim os únicos pontos críticos da função $\underline{f}$ são:

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = 3.$$

Apliquemos o Teste da 1.a Derivada para classificar cada um desses pontos críticos do ponto de vista de extremos locais.

$\underline{\text{Para } x_1 = 1:}$

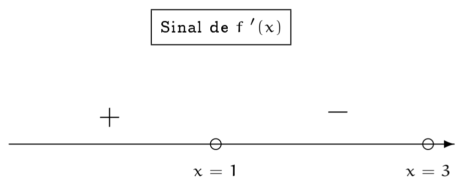
Observemos que, para $x < 1$, teremos:

$$f'(x) = 3\underbrace{(x-1)}_{<0}\underbrace{(x-3)}_{<0} \overset{x<1<3 \text{ logo } x-1,\, x-3<0}{>} 0.$$

Por outro lado, para $1 < x < 3$, teremos:

$$f'(x) = 3\underbrace{(x-1)}_{>0}\underbrace{(x-3)}_{<0} \overset{1<x<3 \text{ logo } x-1>0 \text{ e } x-3<0}{<} 0.$$

A figura abaixo caracteriza o sinal da função $\underline{f'}$ perto do ponto $x = 1$.



Assim, do Teste da 1.a Derivada, segue que a função $\underline{f}$ tem um ponto de máximo local em $x = 1$.

$\underline{\text{Para } x_2 = 3:}$

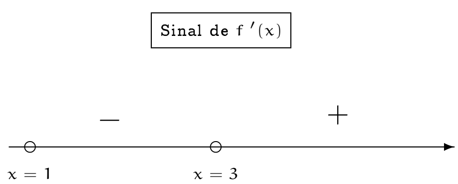
Observemos que, para $1 < x < 3$, teremos:

$$f'(x) = 3\underbrace{(x-1)}_{>0}\underbrace{(x-3)}_{<0} \overset{1<x<3 \text{ logo } x-1>0 \text{ e } x-3<0}{<} 0.$$

Por outro lado, para $3 < x$, teremos:

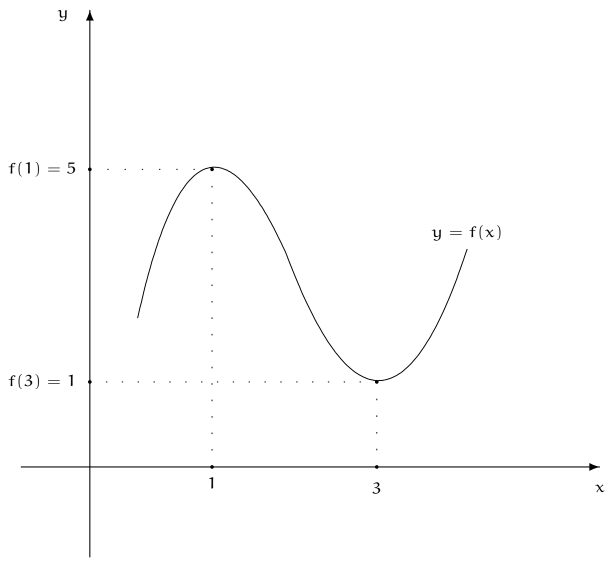
$$f'(x) = 3\underbrace{(x-1)}_{>0}\underbrace{(x-3)}_{>0} \overset{1<3<x \text{ logo } x-1,\, x-3>0}{>} 0.$$

A figura abaixo caracteriza o sinal da função $\underline{f'}$ perto do ponto $x = 3$.



Assim, do Teste da 1.a Derivada, segue que a função $\underline{f}$ tem um ponto de mínimo local em $x = 3$.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



7.7 Derivadas de ordem superior para funções reais de uma variável real

Observação 7.7.1 *Consideremos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x)\,, \quad para\ cada \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Sabemos que a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e além disso a função derivada* $f\,' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f\,'(x) = \frac{d}{dx}\cos(x) = -\operatorname{sen}(x)\,, \quad para\ cada \quad \in \mathbb{R}\,.$$

Observemos que a função $\underline{f\,'}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e sua função derivada,* $(f\,')' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, será dada por*

$$\left(f\,'\right)'(x) = \frac{d}{dx}[-\operatorname{sen}(x)] = -\cos(x)\,, \quad para\ cada \quad \in \mathbb{R}\,.$$

Neste caso diremos que a função $\underline{f}$ *é duas-vezes diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e a função derivada da função* $\underline{f\,'}$ *será dita derivada segunda da função* $\underline{f}$ *e indicada por* $f\,''$*, isto é,* $f\,'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *será dada por*

$$f\,''(x) \doteq -\cos(x)\,, \quad para\ cada \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Podemos também estudar a diferenciabilidade da função $\underline{f\,''}$ *e assim obter a derivada de terceira ordem da função* $\underline{f}$ *(indicada por* $\underline{f\,'''}$*) e assim por diante.*

Em geral temos a:

Definição 7.7.1 *Sejam* A *um intervalo de* $\mathbb{R}$*,* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* A *e* $a \in A$*.*

Se a função $f\,' : A \to \mathbb{R}$ *for diferenciável em* $x = a$ *diremos que a função* $\underline{f}$ *é* **duas-vezes diferenciável em $x = a$**.

Neste caso a derivada da função $\underline{f\,'}$ *em* $x = a$ *será denominada* **derivada segunda da função f em $x = a$** *e indicada por:*

$$f\,''(a), \quad ou \quad f^{(2)}(a), \quad ou \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(a), \quad ou \quad D_x^2 f(a), \quad ou \quad \frac{d^2 y}{dx^2}(a), \quad ou \quad D_x^2 y(a),$$

onde, nas duas últimas notações, estamos supondo que $y = f(x)$.

Se a função $f' : A \to \mathbb{R}$ *for diferenciável em* A*, diremos que a função* $\underline{f}$ *é* **duas vezes diferenciável em** $\underline{A}$ *e com isto teremos definida a função* **derivada segunda da função** $\underline{f}$ *, indicada por* $f'' : A \to \mathbb{R}$*, que associa a cada* $x \in A$ *a derivada segunda da função* $\underline{f}$ *em* $\underline{x}$*, isto é,* $x \mapsto f''(x)$.

Temos o seguinte exemplo:

Exemplo 7.7.1 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^2 + \operatorname{sen}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

é duas-vezes diferenciável em $\mathbb{R}$.

Além disso, a função derivada segunda, $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, será dada por:*

$$f''(x) = 2 - \operatorname{sen}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução:

De fato, a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ (pois é soma de funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$) e além disso $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será dada por

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^2 + \operatorname{sen}(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[x^2\right] + \frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}(x)\right] = 2x + \cos(x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

que também é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ (pois é soma de funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$).

Logo a função $\underline{f}$ é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e além disso a função derivada segunda da função $\underline{f}$, isto é, $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, será dada por:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{df}{dx}\right](x) = \frac{d}{dx}[2x + \cos(x)] = \frac{d}{dx}[2x] + \frac{d}{dx}[\cos(x)] = 2 - \operatorname{sen}(x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

completando a verificação da afirmação.

A seguir temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 7.7.1 *Mostre que a função* $f : (0, \sqrt{2}) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{arcsen}\left(x^2 - 1\right), \quad x \in (0, \sqrt{2})$$

é duas-vezes diferenciável em $(0, \sqrt{2})$.

Além disso, a função derivada segunda, $f'' : (0, \sqrt{2}) \to \mathbb{R}$*, será dada por:*

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{1 - \left(x^2 - 1\right)^2} - 4x^2 \dfrac{\left(x^2 - 1\right)}{\sqrt{\left[1 - \left(x^2 - 1\right)^2\right]^3}}}{1 - \left(x^2 - 1\right)^2}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0, \sqrt{2}).$$

Resolução:

A função $\underline{f}$ é diferenciável em $(0, \sqrt{2})$, pois é composta de funções diferenciáveis nos seus correspondentes domínios (verifique!).

Além disso $f': (0, \sqrt{2}) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\operatorname{arcsen}\left(x^2-1\right)\right] \overset{\text{Regra da Cadeia e (6.21)}}{=} \frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2-1\right)^2}}, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \sqrt{2}).$$

Observemos que a função $\underline{f'}$ também é uma função diferenciável em $(0, \sqrt{2})$, pois é composta de funções diferenciáveis nos seus correspondentes domínios (verifique!).

Logo a função $\underline{f}$ é duas vezes diferenciácel em $(0, \sqrt{2})$.

Além disso a função derivada segunda da função $\underline{f}$, $f'': (0, \sqrt{2}) \to \mathbb{R}$, será dada por:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{df}{dx}\right](x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2-1\right)^2}}\right] \\
&= \frac{\frac{d}{dx}[2x]\sqrt{1-\left(x^2-1\right)^2} - 2x\,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-\left(x^2-1\right)^2}\right]}{\left[\sqrt{1-\left(x^2-1\right)^2}\right]^2} \\
&= \frac{2\sqrt{1-[x^2-1]^2} - 2x\,\dfrac{\frac{1}{2}\,2\left(x^2-1\right)2x}{\sqrt{\left[1-\left(x^2-1\right)^2\right]^3}}}{1-\left(x^2-1\right)^2}, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \sqrt{2}),
\end{aligned}$$

como afirmamos.

Podemos estender a definição acima, a saber:

Definição 7.7.2 *Sejam $n \in \mathbb{N}$, A um intervalo de $\mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in A$.*

Se a função $f^{(n-1)}: A \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $x = a$ então diremos que a função $\underline{f}$ é **n-vezes diferenciável em $x = a$** *e a sua derivada em $x = a$ (isto é, $\left(f^{(n-1)}\right)'(a)$) será denominada* **derivada de ordem $\underline{n}$ (ou derivada n-ésima) da função $\underline{f}$ em $x = a$** *e indicada por*

$$f^{(n)}(a), \quad ou, \quad \frac{d^n f}{dx^n}(a), \quad ou, \quad D_x^n f(a), \quad ou, \quad \frac{d^n y}{dx^n}(a), \quad ou, \quad D_x^n y(a),$$

onde nas duas últimas estamos supondo que $y = f(x)$.

Observação 7.7.2

1. *Se a função $\underline{f}$ for n-vezes diferenciável em cada ponto de A diremos que a função $\underline{f}$ é* **n-vezes diferenciável em A** *e neste caso podemos definir a* **função derivada n-ésima da função $\underline{f}$**, *que será $f^{(n)}: A \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in A$ a derivada n-ésima da função $\underline{f}$ no ponto x, isto é, $x \mapsto f^{(n)}(x)$.*

2. *Podemos encontrar na literatura outras notações para a derivada de ordem $\underline{n}$ de uma função $\underline{f}$ em $x = a$, como por exemlo:*

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{|x=a}, \quad ou, \quad D_x^n y_{|x=a},$$

onde $y = f(x)$.

3. *Denotaremos por* $f^{(0)} : A \to \mathbb{R}$ *a própria função, isto é:*

$$f^{(0)}(x) \doteq f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,.$$

4. *Denotaremos por* $f^{(1)} : A \to \mathbb{R}$ *a função derivada da função* $\underline{f}$ *, isto é:*

$$f^{(1)}(x) \doteq f\,'(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,,$$

se a função $\underline{f}$ *for diferenciável em* A.

5. *Se* $x = x(t)$ *decreve a posição de uma partícula que move-se ao longo de uma reta no instante* $\underline{t}$ *e esta função* $x = x(t)$ *for diferenciável em* $t = t_o$*, a sua velocidade instantânea no instante* $t = t_o$ *será, como vimos anteriomente, a taxa de variação instantânea do espaço em relação ao tempo no instante* $t = t_o$*, ou seja,*

$$v(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{x(t) - x(t_o)}{t - t_o} = x\,'(t_o)$$

isto é, será dada pela derivada da função $x = x(t)$ *em* $t = t_o$*, isto é:*

$$v(t_o) = x\,'(t_o).$$

Como a aceleração instantânea no instante $t = t_o$ *é a taxa de variação instantânea da velocidade em relação ao tempo no instante* $t = t_o$*, ou seja,*

$$a(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{v(t) - v(t_o)}{t - t_o} = v\,'(t_o),$$

segue que, se a função velocidade, $v = v(t)$ *é uma função diferenciável em* $t = t_o$*, então a aceleração instantânea da partícular no instante* $t = t_o$ *será dada pela pela derivada da função* $v = v(t)$ *em* $t = t_o$*, isto é,*

$$a(t_o) = v\,'(t_o) = x\,''(t_o),$$

assim, a aceleração instantânea da partícula em $t = t_o$ *é dada pela segunda derivada da função* $x = x(t)$ *no instante* $t = t_o$*, se a função* $x = x(t)$ *for duas vezes diferenciável em* $t = t_o$.

Com as definições acima podemos introduzir a:

Definição 7.7.3 *Sejam* $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$*,* A *é um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Diremos que a função $\underline{f}$ **é de classe** C^k **em** A*, se as funções* $f, f\,', \cdots, f^{(k)} : A \to \mathbb{R}$ *são contínuas em* A.

Neste caso escrevermos

$$f \in C^k(A\,;\mathbb{R}).$$

Diremos que a função $\underline{f}$ **é de classe** C^∞ **em** A*, se para cada* $k \in \{0, 1, , \cdots\}$ *temos que a função* $f^{(k)} : A \to \mathbb{R}$ *é contínua em* A.

Neste caso escrevermos

$$f \in C^\infty(A\,;\mathbb{R}).$$

Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 7.7.2 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 5\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$*, a função* $\underline{f}$ *é* n*-vezes diferenciável em* $\mathbb{R}$ *(isto é,* $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$*).*

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$*, encontre a expressão da função derivada de ordem* $\underline{n}$ *da função* $\underline{f}$ *em um ponto qualquer de* $\mathbb{R}$*.*

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ (pois é uma função polinomial).

Além disso a função $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 5\right) = 4x^3 - 9x^2 + 10x - 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Observemos que a função $\underline{f'}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ (pois é uma função polinomial).

Logo a função $\underline{f}$ é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$.

Além disso, temos que a função $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será dada por:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{df}{dx}\right](x) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 - 9x^2 + 10x - 1\right) = 12x^2 - 18x + 10\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Observemos que a função $\underline{f''}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ (pois é uma função polinomial).

Logo a função $\underline{f}$ é três vezes diferenciável em $\mathbb{R}$.

Além disso, a função $f^{(3)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será dada por:

$$f^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right](x) = \frac{d}{dx}\left(12x^2 - 18x + 10\right) = 24x - 18\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

De modo semelhante, a função $\underline{f^{(3)}}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ (pois é uma função polinomial).

Logo a função $\underline{f}$ é quatro vezes diferenciável em $\mathbb{R}$.

Além disso, segue que a função $f^{(4)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será dada por:

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^3 f}{dx^3}\right](x) = \frac{d}{dx}(24x - 18) = 24, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo, a função $\underline{f^{(4)}}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ (pois é uma função polinomial).

Logo a função $\underline{f}$ é cinco vezes diferenciável em $\mathbb{R}$.

Além disso, segue que a função $f^{(5)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será dada por:

$$f^{(5)}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^4 f}{dx^4}\right](x) = \frac{d}{dx}[24] = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, se $n \geq 5$ temos que a função $\underline{f^{(n)}}$ será diferenciável em $\mathbb{R}$ (pois é a função identicamente nula).

Logo a função $\underline{f}$ é n-vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, para todo $n \in \{0, 1, \cdots\}$ (em particular, as derivadas de qualquer ordem serão funções contínuas em $\mathbb{R}$).

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo $n \geq 5$, teremos que a função $f^{(n+1)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será dada por:

$$f^{(n+1)}(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Observação 7.7.3

1. *Como vimos anteriormente, se* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função polinomial então ela será diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e além disso a função sua função derivada,* $p' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, também será uma função polinomial, cujo polinômio que a define terá grau um a menos que o grau do polinômio que define a função* $\underline{p}$*, ou seja, se o grau do polinômio que define a função* $\underline{p}$ *é* $\underline{n}$ *(isto é,* $\text{grau}(p) = n$*) então*
$$\text{grau}(p') = n - 1,$$
ou ainda,
$$\text{grau}\left(p'\right) = \text{grau}(p) - 1.$$

2. *Com o item acima, temos que o Exemplo acima pode ser generalizado, a saber, se* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função polinomial então a função* $\underline{p}$ *terá derivada de qualquer ordem em* $\mathbb{R}$ *(ou seja,* $p \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$*).*

   Além disso, se o grau do polinômio que define a função polinomial $\underline{p}$ *for* $\underline{n}$ *segue que*
$$p^{(m)}(x) = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$
para $m \geq n + 1$.

A seguir temos um exercício resolvido relacionado com uma aplicação de derivadas de ordem superior ao movimento de uma partícula.

Exercício 7.7.2 *Suponhamos que uma partícula move-se ao longo de uma reta segundo a seguinte lei,* $x = x(t)$*, dada em metros e* $\underline{t}$ *dado em segundos por:*
$$x(t) \doteq 4 - 3t + \frac{1}{2}t^2\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in [0, \infty). \tag{7.9}$$

Encontrar a velocidade e a aceleração (instantâneas) da partícula no instante $t = 2\,s$*.*

Resolução:

Fisicamente:

A equação acima descreve um movimento retílineo uniformemente acelerado, cuja equação geral é da forma
$$x(t) = x_o + v_o t + \frac{1}{2}t^2\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, \infty) \tag{7.10}$$
e cuja velocidade no instante $\underline{t}$ é dada pela equação:
$$v = v_o + a t\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, \infty)\,. \tag{7.11}$$

Comparando (7.9) com (7.10) obteremos
$$x_o = 4\,m, \quad v_o = -3\,m/s \quad \text{e} \quad a = 1\,m/s^2.$$

Substituindo em (7.11) obtemos que
$$v(t) = -3 + t\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, \infty)\,.$$

Assim
$$v(2) = -3 + 2 = 1\,m/s,$$
e
$$a(t) = 1\,m/s^2\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, \infty)\,,$$

em particular $a(2) = 1\,m/s^2$.

Matematicamente:

A função $x = x(t)$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$ (pois é uma função polinomial), assim temos que a velocidade (instantânea) da partícula no instante $\underline{t}$ será dada por:

$$v(t) = x'(t) = \frac{d}{dt}\left[4 - 3t + \frac{1}{2}t^2\right] = -3 + t\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, \infty).$$

Em particular, teremos

$$v(2) = -3 + 2 = 1\,m/s.$$

A aceleração (instantânea) da partícula no instante $\underline{t}$ será dada por:

$$a(t) = v'(t) = x''(t) = \frac{d}{dt}[-3 + t] = 1\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, \infty),$$

assim

$$a(t) = 1\,m/s^2\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, \infty),$$

em particular $a(2) = 1\,m/s^2$.

Observação 7.7.4 *O Exemplo acima nos mostra que para um Movimento Retilíneo Uniformemente Acelerado tanto faz utilizar as equações da Física ou utilizar a diferenciabilidade de ordem superior da função $x = x(t)$ (mais precisamente, a derivada de segunda ordem de $x = x(t)$).*

Porém existem problemas Físicos cuja a aceleração **não** *é constante.*

Nestes casos o único processo pelo qual podemos encontrar a velocidade ou a acelação instantâneas da partícula em um certo instante será utilizando a diferenciabilidade de ordem superior da função $x = x(t)$.

O próximo exemplo nos mostrará como encontrar derivadas de ordem superior de uma função dada implicitamente por uma equação.

Exemplo 7.7.3 *Suponhamos que a equação*

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \tag{7.12}$$

nos forneça $y = f(x)$, onde a função $\underline{f}$ seja duas-vezes diferenciável em um intervalo aberto A de $\mathbb{R}$.

Encontre $\dfrac{d^2y}{dx^2}(x)$ para $x \in A$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2}(0)$, supondo que $y(x) > 0$, para cada $x \in A$.

Resolução:

Para obter $\dfrac{dy}{dx}(x)$, para cada $x \in A$, basta derivarmos, implicitamente, a equação (7.12) em relação a $\underline{x}$, isto é:

$$\underbrace{\frac{d}{dx}[36]}_{=0} = \frac{d}{dx}\left[4x^2 + 9\,y^2\right] = \frac{d}{dx}\left[4x^2\right] + \frac{d}{dx}\left[9\,y^2(x)\right]$$

$$\overset{\text{Regra da Cadeia}}{=} 8x + 9.2.y(x).y'(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in A\,,$$

ou seja, como $y(x) > 0$ para cada $x \in A$, segue que:

$$y'(x) = -\frac{8x}{18y} = -\frac{4x}{9\,y(x)}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in A\,.$$

Para obter $\dfrac{d^2 y}{dx^2}(x)$ para $x \in A$, basta derivarmos, implicitamente, a equação acima em relação a $\underline{x}$, a saber:

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left[-\frac{4x}{9.y(x)}\right] = -\frac{\frac{d}{dx}[4x].[9y(x)] - [4x].\frac{d}{dx}[9\,y(x)]}{[9\,y(x)]^2} = -\frac{4.9\,y(x) - 4x.9\,y\,'(x)}{81\,y^2(x)}$$
$$= -\frac{4}{9}\frac{y(x) - x\,y\,'(x)}{y^2(x)}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in A.$$

Em particular, teremos

$$y\,''(0) = -\frac{4}{9}\frac{y(0) - 0.y\,'(0)}{y^2(0)} = -\frac{4}{9}\frac{1}{y(0)}. \tag{7.13}$$

Fazendo $x = 0$ em (7.12), obteremos:

$$4.0^2 + 9.y^2(0) = 36\,, \quad \text{ou seja,} \quad 9\,y^2(0) = 36\,, \quad \text{isto é,} \quad y^2(0) = 4\,, \quad \overset{y(0)>0}{\text{ou ainda,}} \quad y(0) = 2,$$

Substituindo este valor em (7.12) obteremos:

$$y''(0) = -\frac{2}{9}.$$

Observação 7.7.5 *No Exemplo acima poderíamos obter, explicitamente,* $y = y(x)$*.*

Para isto basta observar que se $y(x) > 0$ *então, de (7.12), teremos* $y : A \doteq (-3, 3) \to \mathbb{R}$ *será dada por:*

$$y(x) \doteq \sqrt{\frac{36 - 4x^2}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A.$$

Com isto podemos verificar que a função $y = y(x)$ *é duas-vezes diferenciável em* A *(na verdade,* $y \in C^\infty(A\,;\mathbb{R})$*).*

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação destes fatos.

7.8 Teste da segunda derivada para funções reais de uma variável real

Como motivação para o próximo resultado consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 7.8.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq x^3 - 12x + 6\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Encontrar todos os extremos locais da função $\underline{f}$ *.*

<u>**Resolução:**</u>

Aplicaremos o Teste da 1.a Derivada à função $\underline{f}$.

Para isto precisamos, inicialmente, encontrar todos os pontos críticos da função $\underline{f}$.

Observemos que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, logo os seus pontos críticos ocorrerão onde sua função derivada for nula, isto é:

$$f\,'(x) = 0\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$0 = f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 12x + 6\right) = 3x^2 - 12 = 3\left(x^2 - 4\right) = 3(x-2)(x+2).$$

Logo os únicos pontos críticos da função $\underline{f}$ são:

$$x_1 = -2 \quad \text{e} \quad x_2 = 2.$$

Apliquemos o Teste da 1.a Derivada a cada um dos pontos críticos obtidos:
<u>Para $x_1 = -2$:</u>
Observemos que

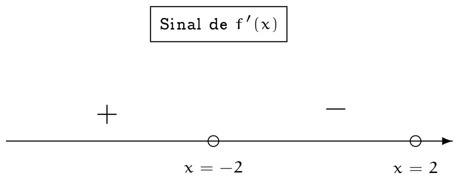
1. para $x < -2$, teremos:

$$f'(x) = 3\underbrace{(x-2)}_{<0}\underbrace{(x+2)}_{<0} \overset{x<-2<2 \text{ então } x+2,\, x-2<0}{>} 0\,;$$

2. para $-2 < x < 2$, teremos:

$$f'(x) = 3\underbrace{(x-2)}_{>0}\underbrace{(x+2)}_{<0} \overset{-2<x<2 \text{ então } x+2>0 \text{ e } x-2<0}{<} 0\,.$$

Na figura abaixo temos o sinal da função $\underline{f'}$ perto do ponto $x = -2$:



Logo, pelo Teste da 1. Derivada, segue que a função $\underline{f}$ tem um ponto de máximo local em $x = -2$.
<u>Para $x_1 = 2$:</u>
Observemos que

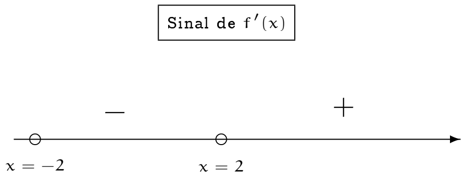
1. para $-2 < x < 2$, teremos:

$$f'(x) = 3\underbrace{(x-2)}_{>0}\underbrace{(x+2)}_{<0} \overset{-2<x<2 \text{ então } x+2>0 \text{ e } x-2<0}{<} 0;$$

2. para $2 < x$, teremos:

$$f'(x) = 3\underbrace{(x-2)}_{>0}\underbrace{(x+2)}_{>0} \overset{-2<2<x \text{ então } x+2, x-2>0}{>} 0.$$

Na figura abaixo temos o sinal da função $\underline{f'}$ perto do ponto $x = 2$:



Logo, pelo Teste da 1. Derivada, segue que a função $\underline{f}$ tem um ponto mínimo local em $x = 2$.

Resumindo, podemos construir s seguinte tabela:

	sinal de $f'(x)$	propriedade da função $\underline{f}$
$x < -2$	$+$	crescente
$x = -2$	0	máximo local
$-2 < x < 2$	$-$	decrescente
$x = 2$	0	mínimo local
$2 < x$	$+$	crecente

Observemos que a função $\underline{f}$ é duas-vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ (na verdade tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$).

Além disso

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{df}{dx}(x)\right] = \frac{d}{dx}\left(3x^2 - 12\right) = 6x\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Em particular temos que:

$$f''(-2) = 6.(-2) = -12 < 0 \qquad \text{e} \qquad f''(2) = 6.2 = 12 > 0\,.$$

Conclusão:

(1) no ponto crítico $x = -2$, a função $\underline{f}$ tem derivada segunda menor que zero (isto é, $f''(-2) < 0$) e a função tem um ponto de máximo local em $x = -2$;

(2) no ponto crítico $x = 2$, a função $\underline{f}$ tem derivada segunda maior que zero (isto é, $f''(2) > 0$) e a função tem um ponto de mínimo local em $x = 2$.

Veremos, a seguir, que isto ocorre em geral, mais precisamente, temos o:

Teorema 7.8.1 *(Teste da segunda derivada para extremos locais) Sejam A um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em A, $a \in A$ um ponto crítico da função $\underline{f}$ (ou seja, $f'(a) = 0$) tal que existe $f''(a)$ (ou seja, a função $\underline{f}$ é duas-vezes diferenciável em $x = a$).*

Então

(i) se $f''(a) < 0$, então a função $\underline{f}$ tem um ponto de máximo local em $x = a$;

(ii) se $f''(a) > 0$, então a função $\underline{f}$ tem um ponto de mínimo local em $x = a$.

Demonstração:

Faremos a demonstração de (i).

A demonstração do item (ii) é semelhante a do item (i) e será deixada como exercício para o leitor.

Por hipótese temos que
$$f''(a) < 0.$$

Logo, segue da definição da segunda derivada, que
$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = f''(a) < 0.$$

Mas $f'(a) = 0$ (pois $x = a$ é ponto crítico da função diferenciável $\underline{f}$), assim
$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{x - a} < 0.$$

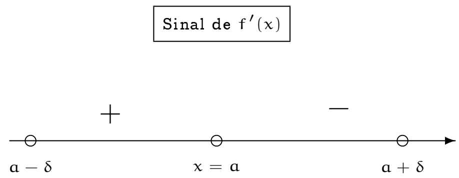
Do Teorema da Conservação do Sinal para limites (isto é, Teorema (4.4.1)) segue que podemos encontrar $\delta > 0$, tal que
$$\frac{f'(x)}{x - a} < 0, \quad \text{para} \quad x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}.$$

Logo se:

(a) $a - \delta < x < a$, segue que
$$\frac{f'(x)}{x - a} < 0 \quad \overset{x<a \Rightarrow x-a<0}{\text{que implicará em}} \quad f'(x) > 0;$$

(b) $a < x < a + \delta$, segue que
$$\frac{f'(x)}{x - a} < 0 \quad \overset{x>a \Rightarrow x-a>0}{\text{que implicará em}} \quad f'(x) < 0.$$

Na figura abaixo temos o sinal da função $\underline{f'}$ perto do ponto $x = a$:



Logo, do Teste da 1.a Derivada, segue que a função $\underline{f}$ tem um ponto de máximo local em $x = a$, como queríamos demonstrar.

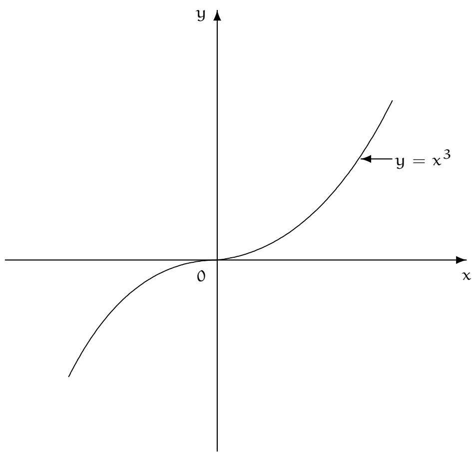
□

Observação 7.8.1 *Com as hipóteses do Teorema acima satisfeitas, se*
$$f''(a) = 0$$
__não__ *podemos concluir nada a respeito do ponto crítico $x = a$ da função $\underline{f}$, do ponto de vista de extremos locais, como mostram os seguites exemplos:*

1. *Se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por*
$$f(x) \doteq x^3, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Então $x = 0$ é o único ponto crítico da função $\underline{f}$ (pois a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$) e o ponto $x = 0$ __não__ *é ponto de máximo ou de mínimo locais da função $\underline{f}$ (veja figura abaixo).*

   Observemos que neste caso temos
$$f''(0) = 0.$$



Conclusão: $f''(0) = 0$ *mas a função* $\underline{f}$ **não** *tem ponto de máximo ou mínimo locais em* $x = 0$.

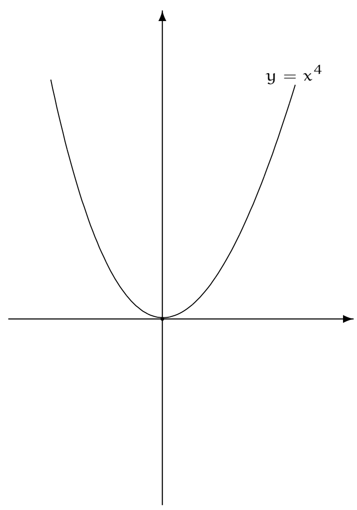
2. *Por outro lado, se a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq x^4, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então $x = 0$ *é o único ponto crítico da função* $\underline{f}$ *(pois a função* $\underline{f}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e* $f'(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$*) e o ponto* $x = 0$ *é ponto de mínimo local da função* $\underline{f}$ *(veja a figura abaixo).*

Observemos que neste caso também temos

$$f''(0) = 0.$$



Conclusão: $f''(0) = 0$ *e a função* $\underline{f}$ *tem ponto de mínimo local em* $x = 0$.

Apliquemos o Teorema acima ao seguinte exemplo:

Exemplo 7.8.2 *Seja* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Encontre todos os extremos locais da função $\underline{f}$ *e obtenha uma representação geométrica do gráfico da mesma.*

<u>**Resolução:**</u>

Observemos que a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$ (pois é uma função polinomial) e assim podemos aplicar o Teste da 2.a Derivada a cada uma dos seus pontos críticos para tentar classificá-los, do ponto de vista de extremos locais.

Com a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$ seus pontos críticos só ocorrerão onde a função derivada for nula, isto é,

$$0 = f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2\right) = 4x^3 + \frac{4}{3}.3x^2 - 4.2.x = 4x^3 + 4x^2 - 8x = 4x\left(x^2 + x - 2\right)$$
$$\overset{\text{Exercício}}{=} 4x(x-1)(x+2)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja, os únicos pontos críticos da função $\underline{f}$ são:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 0 \quad \text{e} \quad x_3 = 1.$$

Apliquemos o Teste da 2.a Derivada em cada um dos pontos críticos da função $\underline{f}$.

Para isto, vale observar que, para cada $x \in \mathbb{R}$, teremos

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{df}{dx}\right](x) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 + 4x^2 - 8x\right) = 4.3x^2 + 4.2x - 8 = 12x^2 + 8x - 8\,.$$

<u>Para $x_1 = -2$:</u>

Como

$$f''(-2) = 12.(-2)^2 + 8.(-2) - 8 = 24 > 0,$$

segue, do Teste da 2.a Derivada, que a função $\underline{f}$ tem um ponto de mínimo local em $x = -2$, cujo valor será

$$f(-2) = -\frac{32}{3}\,.$$

<u>Para $x_2 = 0$:</u>

Como

$$f''(0) = 12.0^2 + 8.0 - 8 = -8 < 0,$$

segue, do Teste da 2.a Derivada, que a função $\underline{f}$ terá um ponto de máximo local em $x = 0$, cujo valor será

$$f(0) = 0\,.$$

<u>Para $x_3 = 1$:</u>

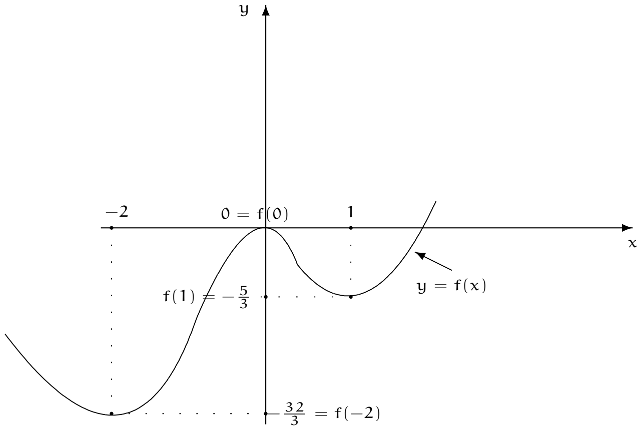
Como

$$f''(1) = 12.(1)^2 + 8.(1) - 8 = 12 > 0,$$

segue, do Teste da 2.a Derivada, que a função $\underline{f}$ tem ponto de um mínimo local em $x = 1$, cujo valor será

$$f(1) = -\frac{5}{3}\,.$$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ será dada pela figura abaixo:



Temos também o seguinte exercício resolvido:

Exercício 7.8.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Encontre todos os extremos locais da função $\underline{f}$ *e obtenha uma representação geométrica do gráfico da mesma.*

<u>**Resolução:**</u>

Observemos que a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer oredm em $\mathbb{R}$ e assim podemos aplicar o Teste da 2.a Derivada a cada uma dos seus pontos críticos para tentar classificá-los do ponto de vista de extremos locais.

Com a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$ seus pontos críticos só ocorrerão onde a função derivada for nula, isto é,

$$0 = f'(x) = \frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x)] = \cos(x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja, os únicos pontos críticos da função $\underline{f}$ são:

$$x_k \doteq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Apliquemos o Teste da 2.a Derivada em cada um dos pontos críticos da função $\underline{f}$.

Para isto vale observar que

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{df}{dx}\right](x) = \frac{d}{dx}[\cos(x)] = -\operatorname{sen}(x), \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Como

$$f''(x_k) = f''\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad k \text{ é par ou zero,} \\ 1, & \text{se} \quad k \text{ é ímpar} \end{cases},$$

segue, do Teste da 2.a Derivada que a função $\underline{f}$ tem um ponto de máximo local em

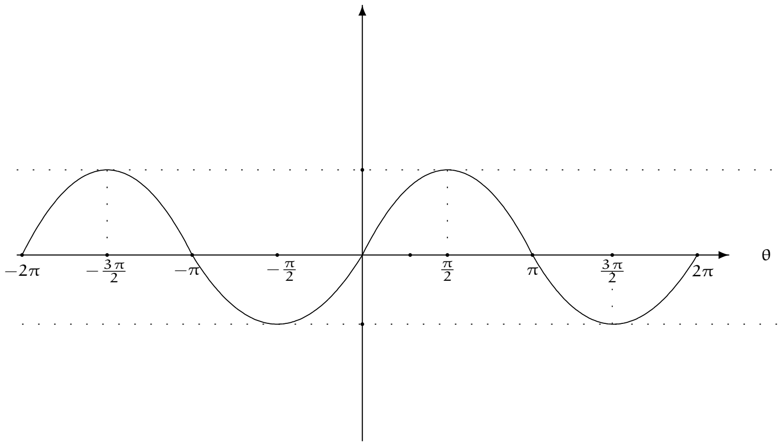
$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

e a função $\underline{f}$ tem um ponto de mínimo local em

$$x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi,$$

para $k \in \mathbb{Z}$.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ será dada pela figura abaixo:



Observação 7.8.2 *Como a função* $\underline{f}$ *é* 2π*-periódica bastaria ter aplicado o Teste da 2.a Derivada nos pontos críticos que pertencem ao intervalo* $[-\pi, \pi]$ *e utilizar a periodicidade da mesma.*

De modo semelhante temos o seguinte exercício, cuja resolução será deixada para o leitor.

Exercício 7.8.2 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x) , \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R} .$$

Mostre os pontos de máximo locais da função $\underline{f}$ *ocorrerão nos pontos* $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ *e os pontos de mínimo locais da função* $\underline{f}$ *ocorrerão nos pontos* $x = (2k\pi + 1)\pi$, *para cada* $k \in \mathbb{Z}$.

A seguir consideraremos o seguinte problema aplicado:

Exemplo 7.8.3 *Um tanque em forma de um paralelepípedo reto com base quadrada, sem tampa, deve conter um volume de* $125\,\mathrm{m}^3$.

O custo, por m^2, *para construir a base do tanque é de* R\$ 80,00 *e para construir as laterais do tanque será de* R\$ 40,00.

Encontre as dimensões do tanque para que o custo da construção do mesmo seja o menor possível.

<u>**Resolução:**</u>

Indiquemos por

x: o comprimento, em metros, do lado da base do tanque (que é um quadrado);

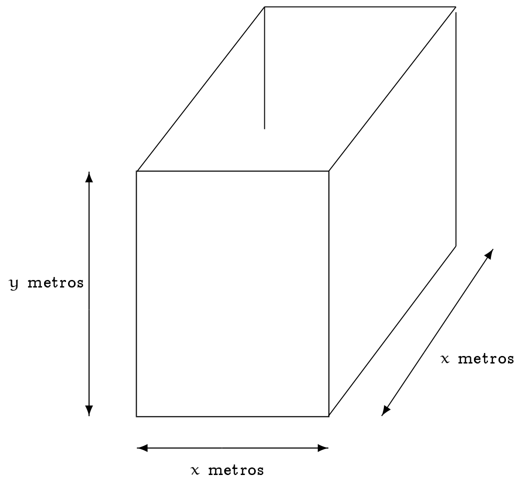
y: a medida, em metros, da altura do tanque;

C_b: o custo para construir a base do tanque;

C_l: o custo para construir as laterias do tanque;

C_T: o custo total para construir o tanque.

V: o volume, em metros cúbicos, do tanque.



O volume do tanque, isto é, do paralelepípedo com base quadrada de lado $\underline{x}$ e altura $\underline{y}$ será dado por:

$$V = x^2 y$$

Sabemos que

$$V = 125, \quad \text{isto é,} \quad x^2 y = 125, \quad \text{ou seja,} \quad y = \frac{125}{x^2}. \tag{7.14}$$

Como a área da base é dada por x^2 m^2 segue que

$$C_b = C_b(x) \doteq 80\,x^2, \quad \text{par cada} \quad x \in (0, \infty).$$

Além disso, a área lateral do tanque será $4x.y$ m^2, assim

$$C_l = C_l(x) \doteq 40.4xy = 160\,xy, \quad \text{para cada} \quad x, y \in\in (0, \infty).$$

Portanto

$$C_T = C_b + C_l = 80x^2 + 160xy, \quad \text{para cada} \quad x, y \in (0, \infty).$$

Assim, (7.14), implicará

$$C_T = 80\,x^2 + 160\,x\,\frac{125}{x^2} = 80x^2 + \frac{20000}{x}, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty).$$

Precisamos encontrar o mínimo global da função $C_T = C_T(x)$, para $x \in (0, \infty)$.

Para isto encontremos, primeiramente, os pontos críticos da função $C_T = C_T(x)$ no intervalo $x \in (0, \infty)$.

Como a função C_T tem derivada de qualquer ordem em $(0, \infty)$ (pois é soma de uma função polinomial com uma função racional que só se anula em $x = 0$) temos que os pontos críticos da função C_T só ocorrerão onde a sua derivada for zero, isto é,

$$0 = {C_T}'(x) = \frac{d}{dx}\left(80x^2 + \frac{20000}{x}\right) = 160x - \frac{20000}{x^2} = \frac{160}{x^2}\left(x^3 - 125\right).$$

Como $x \in (0, \infty)$, a equação acima será equivalente a,

$$\underbrace{\frac{160}{x^2}}_{>0}\left(x^3 - 125\right) = 0 \quad \text{isto é,} \quad x^3 - 125 = 0, \quad \text{ou seja,} \quad x^3 = 125, \quad \text{logo} \quad x = 5.$$

Apliquemos o Teste da 2.a Derivada para classificar o ponto crítico $x = 5$ da função C_T.

Notemos que, para cada $x \in (0, \infty)$, teremos:

$$C_T''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{dC_T}{dx}\right](x) = \frac{d}{dx}\left(160x - \frac{20000}{x^2}\right) = 160 - \frac{(-40000)}{x^3} = 160 + \frac{40000}{x^3},$$

ou seja,

$$C_T''(5) = 160 + \frac{40000}{5^3} = 480 > 0.$$

Logo, do Teste da 2.a Derivada, segue que a função C_T tem um **ponto de mínimo LOCAL** em $x = 5$.

Para completar precisamos mostra que o ponto $x = 5$ é o ponto de mínimo global da função C_T em $(0, \infty)$.

Para isto vejamos que

$$C_T'(x) = 160x - \frac{20000}{x^2} \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{160}{x^2}\left(x^3 - 125\right).$$

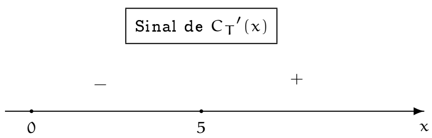
Logo para:

$$0 < x < 5, \quad \text{teremos} \quad C_T'(x) = \underbrace{\frac{160}{x^2}}_{>0}\underbrace{\left(x^3 - 125\right)}_{<0} < 0,$$

ou

$$5 < x, \quad \text{teremos} \quad C_T'(x) = \underbrace{\frac{160}{x^2}}_{>0}\underbrace{\left(x^3 - 125\right)}_{>0} > 0,$$

A figura abaixo nos diz como se comporta o sinal da função derivada C_T' em $(0, \infty)$:



Portanto podemos concluir que a função C_T é estritamente decrescente em $(0, 5)$ e estritamente crescente em $(5, \infty)$, ou seja, a função C_T tem um, único, mínimo global em $x = 5$.

Logo, fazendo $x = 5$ em (7.14), segue que:

$$y = \frac{125}{5^2} = 5.$$

Conclusão: as dimensões do tanque para o custo de sua construção seja o menor possível serão:

$$5 \times 5 \times 5,$$

ou seja, um cubo de aresta $5\,m$.

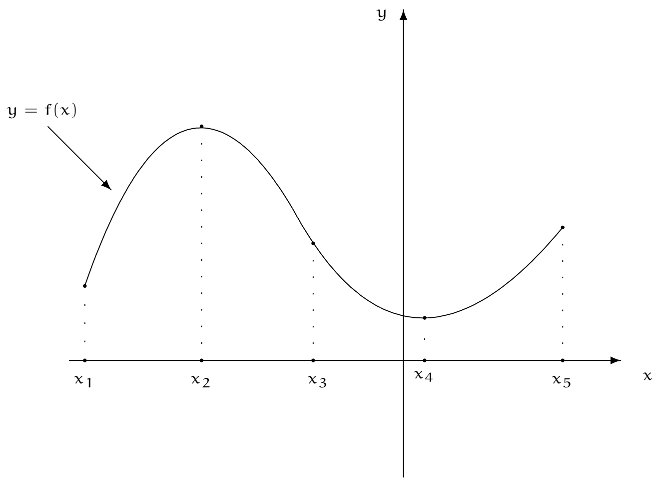
Neste caso, o custo para a construção do mesmo será:

$$C_T(5) = 80.5^2 + \frac{20000}{5} = 6000,$$

ou seja, serão gastos R\$ 6000, 00 para a construção do mesmo.

7.9 Concavidade do gráfico de funções reais de uma variável real

Observação 7.9.1 *Para ilustrar a definição a seguir consideremos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cuja representação geométrica do gráfico é dada pela figura abaixo:*



Suponhamos que:

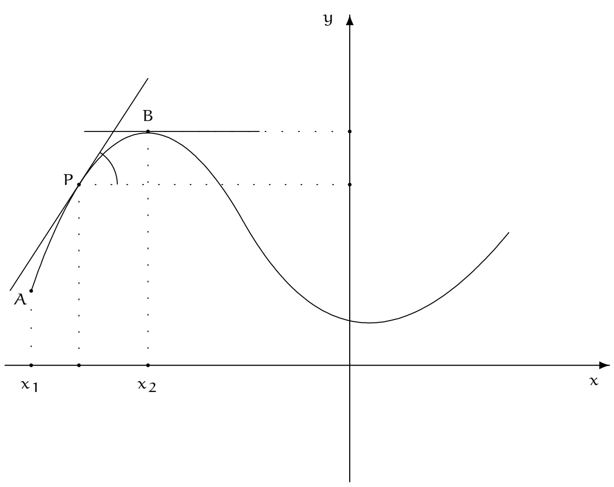
(i) a função $\underline{f}$ *seja contínua em* $[x_1, x_5]$*;*

(ii) a função $\underline{f}$ *seja diferenciável em* (x_1, x_5)*;*

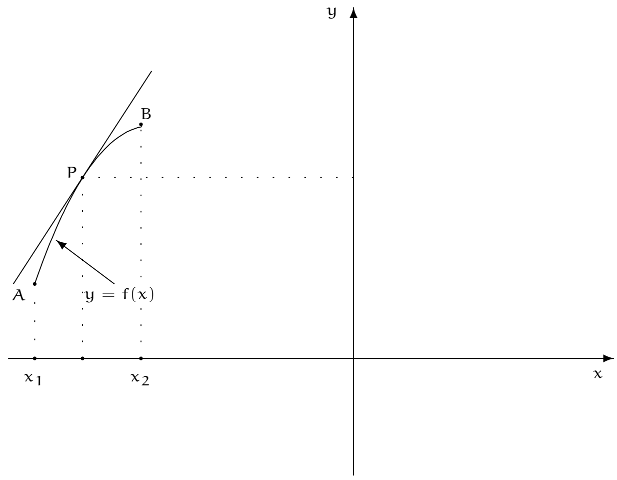
(iii) existe a 2.a derivada da função $\underline{f}$ *(isto é,* f''*) em* (x_1, x_5).

Observemos que na situação acima:

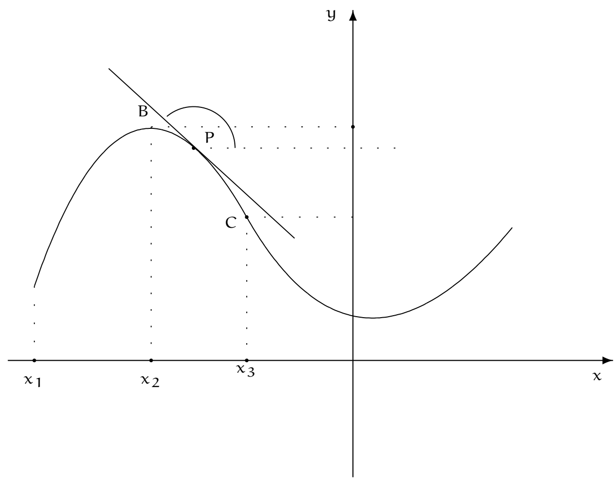
1. *se um ponto* $P = (x, f(x))$ *move-se, sobre a representação geométrica do gráfico de* $\underline{f}$ *, do ponto* $A = (x_1, f(x_1))$ *até o ponto* $B = (x_2, f(x_2))$ *(ou seja, quando* $\underline{x}$ *varia de* $x = x_1$ *até* $x = x_2$*), a declividade da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função no ponto* P*, varia de maior que zero para zero, ou seja, a função derivada* $\underline{f'}$ *será decrescente no intervalo* (x_1, x_2) *(veja figura abaixo).*



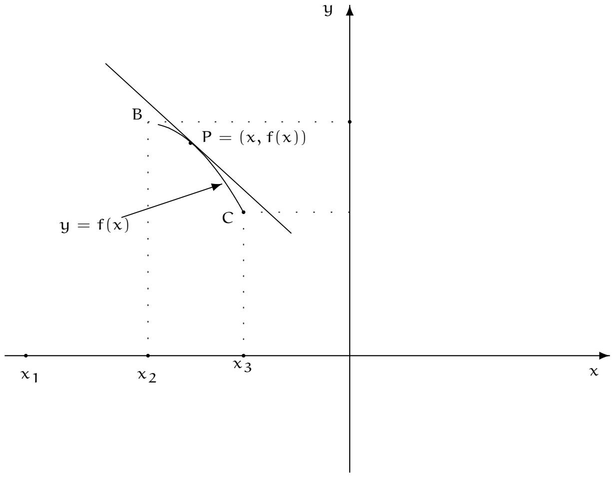
Observemos que em cada ponto $P = (x, f(x))$ *do trecho* $\overset{\frown}{AB}$ *da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *a reta tangente à representação geométrica do gráfico da função fica acima da representação geométrica do gráfico da própria função, para pontos próximos do ponto* P, *que pertencem a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *(veja figura abaixo).*



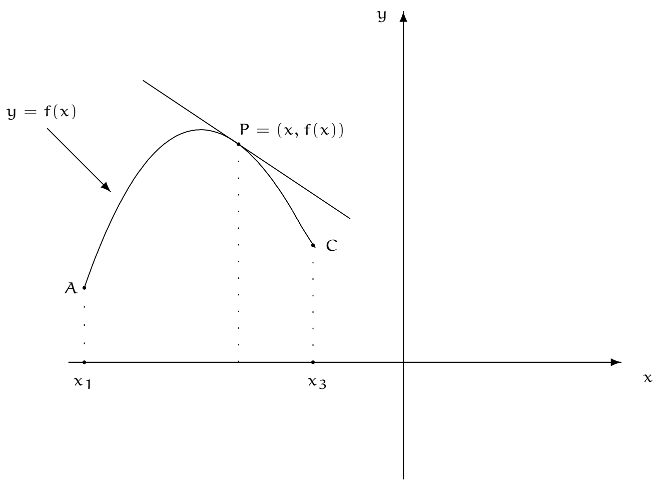
2. *De modo semelhante, se um ponto* $P = (x, f(x))$ *move-se, sobre da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *do ponto* $B = (x_2, f(x_2))$ *até o ponto* $C = (x_3, f(x_3))$ *(ou seja, quando* $\underline{x}$ *varia de* $x = x_2$ *até* $x = x_3$*), a declividade da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função no ponto* P, *varia de zero para um número menor que zero, ou seja, a função derivada* $\underline{f'}$ *será decrescente no intervalo* (x_2, x_3) *(veja figura abaixo).*



Observemos que em cada ponto $P = (x, f(x))$ *do trecho* $\overset{\frown}{BC}$, *a reta tangente à representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *fica acima da representação geométrica do gráfico da própria função, para pontos próximos do ponto* P, *que pertencem a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *(veja figura abaixo).*

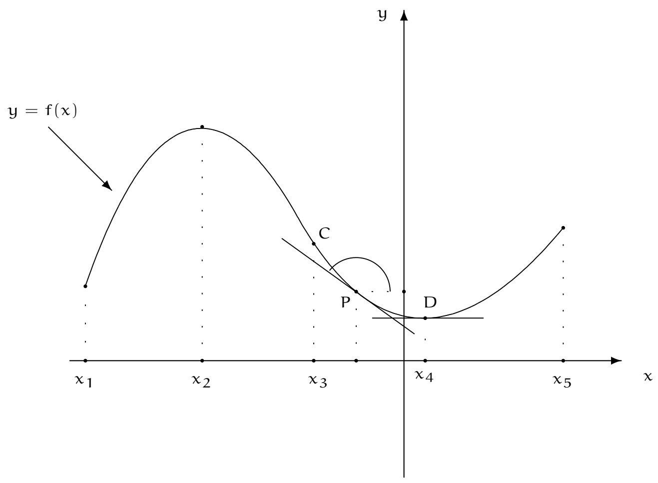


3. *Dos itens 1. e 2. acima, podemos conluir que em cada ponto* $P = (x, f(x))$ *do trecho* $\overset{\frown}{AC}$ *da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$*, a reta tangente à representação geométrica do gráfico da função, fica acima da representação geométrica do gráfico da própria, para pontos próximos do ponto* P*, que pertencem a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *(veja figura abaixo).*

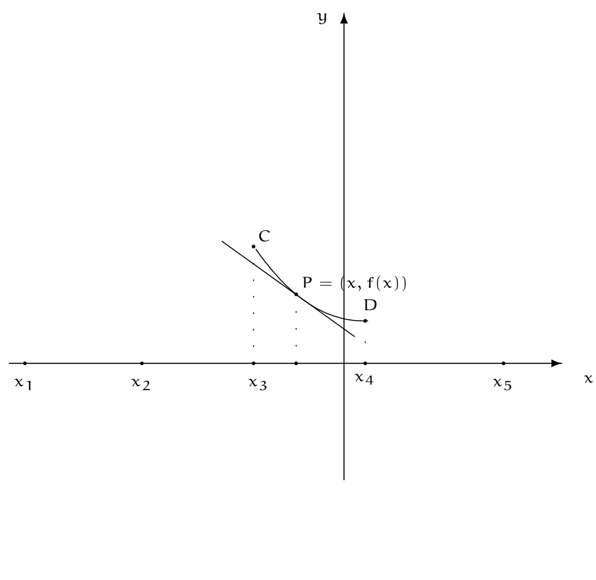


Neste caso diremos que o gráfico da função $\underline{f}$ *é côncavo para baixo nos pontos do trecho* $\overset{\frown}{AC}$ *da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *.*

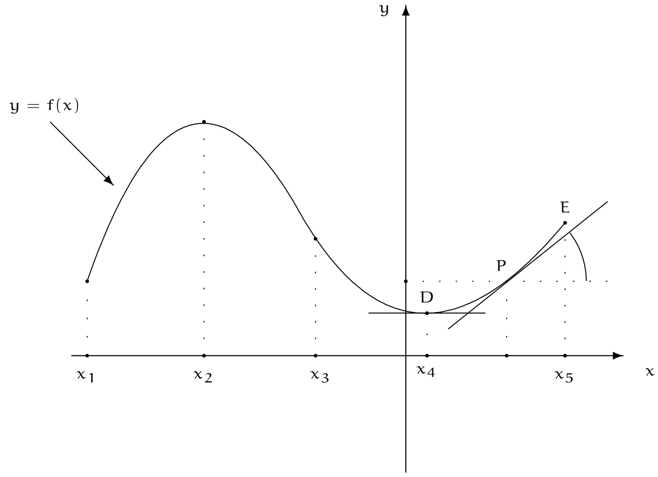
4. *Por outro lado, se um ponto* $P = (x, f(x))$ *move-se sobre à representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *do ponto* $C = (x_3, f(x_3))$ *até o ponto* $D = (x_4, f(x_4))$ *(ou seja, quando* $\underline{x}$ *varia de* $x = x_3$ *até* $x = x_4$*), a declividade da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função no ponto* P*, varia de um número menor que zero para zero, ou seja, a função derivada* $\underline{f'}$ *será crescente no intervalo* (x_3, x_4) *(veja figura abaixo).*



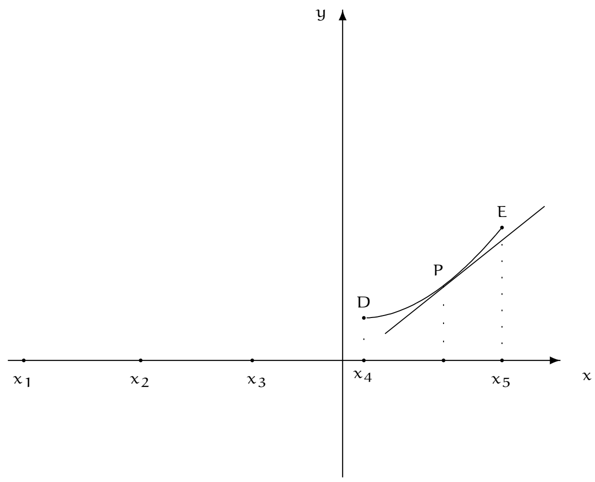
Observemos que em cada ponto $P = (x, f(x))$ *do trecho* $\overset{\frown}{CD}$ *a reta tangente à representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *fica abaixo da representação geométrica do gráfico da própria função, para pontos próximos do ponto* P*, que pertencem a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *(veja figura abaixo).*



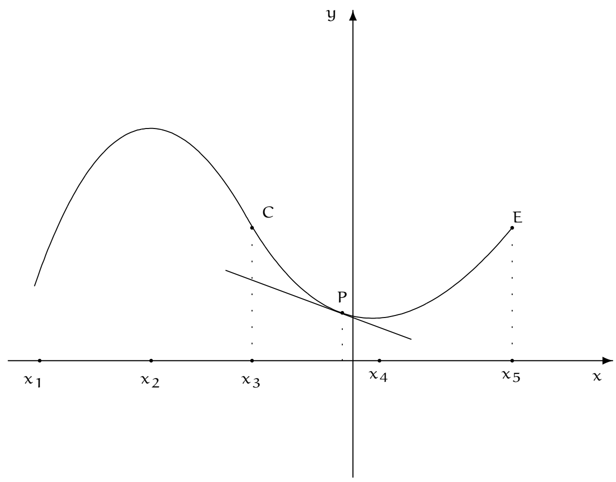
5. *De modo semelhante, se um ponto* $P = (x, f(x))$ *move-se sobre a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *do ponto* $D = (x_4, f(x_4))$ *até o ponto* $E = (x_5, f(x_5))$ *(ou seja, quando* $\underline{x}$ *varia de* $x = x_4$ *até* $x = x_5$*) a declividade da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função no ponto* P *varia de zero para um número maior que zero, ou seja, a função derivada* $\underline{f'}$ *será crescente no intervalo* (x_4, x_5) *(veja figura abaixo).*



Observemos que em cada ponto $P = (x, f(x))$ *do trecho* $\overset{\frown}{DE}$ *da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$*, a reta tangente da representação geométrica do gráfico da função, fica abaixo à representação geométrica do gráfico da própria função, para pontos próximos do ponto* P*, pertecentes à representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *(veja figura abaixo).*



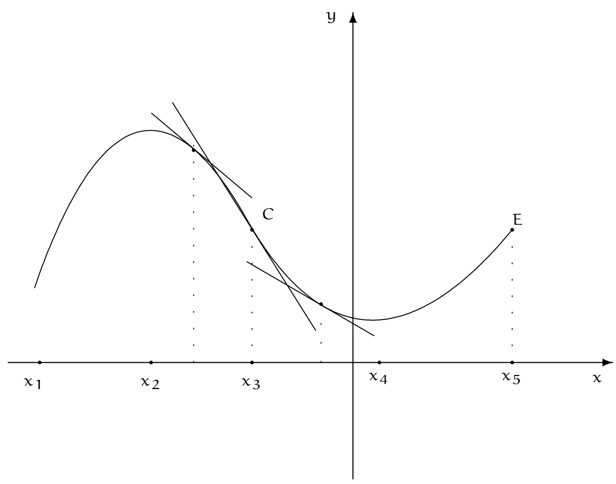
6. *Dos itens 4. e 5. acima, podemos conluir que em cada ponto* $P = (x, f(x))$ *do trecho* $\overset{\frown}{CE}$ *da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, a reta tangente à representação geométrica do gráfico da função, fica abaixo da representação geométrica do gráfico da própria função, para pontos próximos do ponto* P*, que pertencem a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *(veja figura abaixo).*



Neste caso diremos que o gráfico da função $\underline{f}$ *é côncavo para cima nos pontos do trecho* $\overset{\frown}{CE}$ *da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$.

7. *No ponto* C *o gráfico da função* $\underline{f}$ *passa de côncavo para baixo para côncavo para cima.*

   Neste caso diremos que o gráfico da função $\underline{f}$ *tem um ponto de inflexão no ponto* $C = (x_3, f(x_3))$ *(veja figura abaixo).*



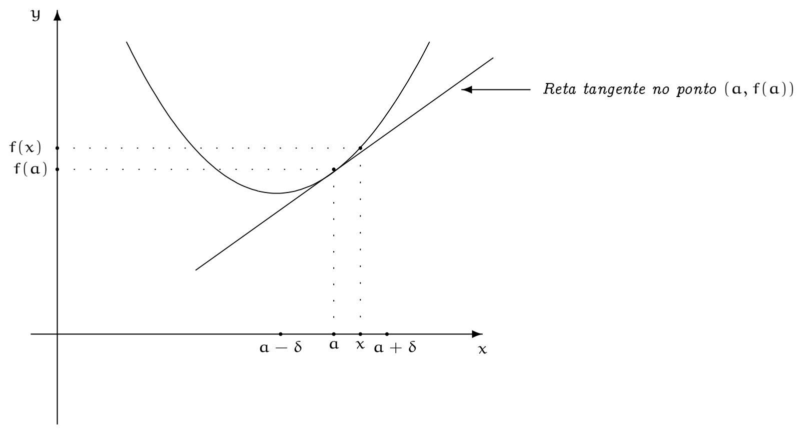
Basedado na Observação acima podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 7.9.1 *Sejam* A *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, $a \in A$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* $x = a$.

Diremos que o gráfico da função $\underline{f}$ *é* **côncavo para cima no ponto** $(a, f(a))$ *se podemos encontrar* $\delta > 0$, *tal que os pontos da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *isto é,* $(x, f(x))$, *para*

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\},$$

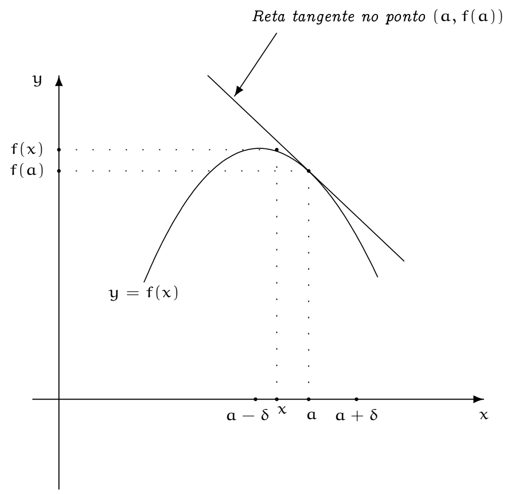
ficam acima dos correspondentes pontos da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função no ponto $(a, f(a))$ *(veja a figura abaixo).*



De modo semelhante, diremos que o gráfico da função $\underline{f}$ *é* **<u>côncavo para baixo no ponto</u>** $(a, f(a))$ *se podemos encontrar* $\delta > 0$*, tal que os pontos da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$*, isto é,* $(x, f(x))$*, para*

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\},$$

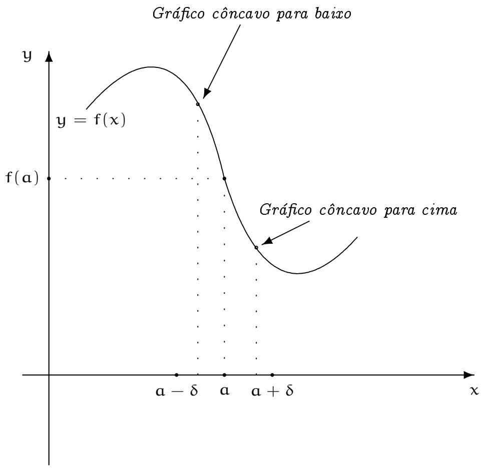
ficam abaixo dos correspondentes pontos reta tangente à representação geométrica do gráfico da função no ponto $(a, f(a))$ *(veja a figura abaixo).*

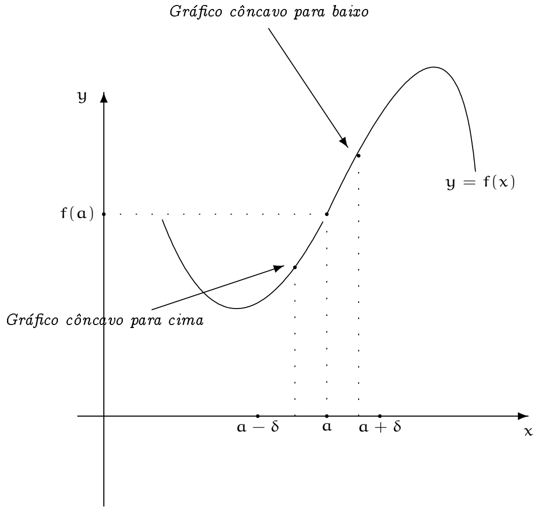


Diremos que o gráfico da função $\underline{f}$ *tem um* **<u>ponto de inflexão em</u>** $\underline{(a, f(a))}$ *se a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *tiver uma reta tangente no ponto* $(a, f(a))$ *e se podemos encontrar* $\delta > 0$*, tal que:*

(i) *para cada* $x \in (a-\delta, a)$*, a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *é côncavo para baixo nos pontos* $(x, f(x))$ *e para cada* $x \in (a, a+\delta)$*, a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *é côncavo para cima nos pontos* $(x, f(x))$*,*

(ii) *ou, para cada* $x \in (a-\delta, a)$*, a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *é côncavo para cima nos pontos* $(x, f(x))$ *e para cada* $x \in (a, a+\delta)$*, a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *é côncavo para baixo nos pontos* $(x, f(x))$





Observação 7.9.2 *A grosso modo, um ponto* $(a, f(a))$ *do gráfico da função* $\underline{f}$*, será um ponto de inflexão da representação geométrica do gráfico da mesma se a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *muda de concavidade quando "passa" pelo ponto* $(a, f(a))$ *(as figuras acima ilustram estas situações).*

Com isto temos o:

Exemplo 7.9.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq x^3, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Estudar a concavidade do gráfico da função $\underline{f}$ *.*

Resolução:

A função $\underline{f}$ tem derivadas de todas as ordens em $\mathbb{R}$ (pois é uma função polinomial).

Notemos que

$$f'(x) = 3x^2, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

segue que a função derivada $\underline{f'}$ será decrescente para zero, no intervalo $(-\infty, 0)$, o que implicará que a representação geométrica do gráfico é côncavo para baixo nos pontos $(x, f(x))$ para $x \in (-\infty, 0)$.

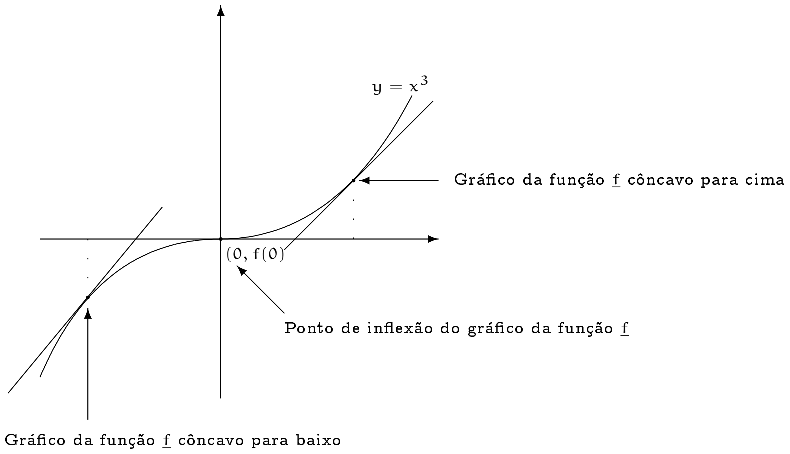
Deixaremos com o exercício para o leitor a verificação deste fato.

De modo semelhante, a função derivada $\underline{f'}$ será crescente, à partir do valor zero, no intervalo $(0, \infty)$, o que implicará que a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é côncavo para cima nos pontos $(x, f(x))$, para cada $x \in (0, \infty)$.

Deixaremos com o exercício para o leitor a verificação deste fato.

Assim podemos concluir que o gráfico da função $\underline{f}$ terá um ponto de inflexão no ponto $(0, f(0)) = (0, 0)$ (pois o gráfico da função $\underline{f}$ tem uma mudança de concavidade quando "passa" pelo ponto $(0, f(0)) = (0, 0)$).

A figura abaixo nos dá a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.



Observação 7.9.3

1. *Da Definição de ponto de inflexão temos que o gráfico da função* $\underline{f}$ *tem um ponto de inflexão em* $(a, f(a))$ *se, e somente se, a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *tiver uma mudança de concavidade quando "passa" pelo ponto* $(a, f(a))$ *(ver figura acima).*

2. *Observemos que se a função* $\underline{f}$ *é duas-vezes diferenciável em um intervalo contendo o ponto* $x = a$.

   Então:

   (a) *a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *é côncavo para baixo no ponto* $(a, f(a))$ *se, e somente se, podemos encontrar* $\delta > 0$ *tal que a função derivada,* f'*, for estritamente decrescente em* $(a - \delta, a + \delta)$.

   Mas isto, pelo Teorema (7.5.1) item (d), é equivalente a dizer que a função 2.a derivada f''*, é menor que zero no intervalo* $(a - \delta, a + \delta)$*, ou seja,*

   $$f''(x) < 0, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a - \delta, a + \delta).$$

   (b) *de modo semelhante, a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *é côncavo para cima no ponto* $(a, f(a))$ *se, e somente se, podemos encontrar* $\delta > 0$ *tal que a função derivada,* f'*, for estritamente crescente em* $(a - \delta, a + \delta)$.

   Mas isto, pelo Teorema (7.5.1) item (b), é equivalente a dizer que a função 2.a derivada, f''*, é maior que zero no intervalo* $(a - \delta, a + \delta)$*, ou seja,*

   $$f''(x) > 0, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a - \delta, a + \delta).$$

3. *Como conseqüência dos itens acima temos que se a função* $\underline{f}$ *é duas vezes diferenciável em* $x = a$ *e a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *tem um ponto de inflexão em* $(a, f(a))$ *e então deveremos ter*

   $$f''(a) = 0,$$

   ou seja, o ponto $x = a$ *deverá ser um ponto crítico da função derivada* $\underline{f'}$.

4. *Pode ocorrer da representação geométrica do gráfico de uma função* $\underline{f}$ *ter um ponto de inflexão em* $(a, f(a))$ *e a função* $\underline{f}$ ***não*** *ser duas vezes diferenciável no ponto* $x = a$*, como mostra o seguinte exemplo:*

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \sqrt[3]{x}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que a função $\underline{f}$ ***não*** *é diferenciável em* $x = 0$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Portanto a função $\underline{f}$ *não será duas vezes diferenciável em* $x = 0$.

Porém o ponto $(0, f(0))$ *é um ponto de inflexão do gráfico da função* $\underline{f}$.

De fato, observemos que a função $\underline{f}$ *é duas vezes diferenciável em* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Além disso temos que:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

e com isto teremos que

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Portanto:

(i) se

$$x < 0, \quad \textit{segue que} \quad f''(x) > 0,$$

implicando que o gráfico da função $\underline{f}$ *será côncavo para cima nos pontos* $(x, f(x))$, *para cada* $x \in (-\infty, 0)$.

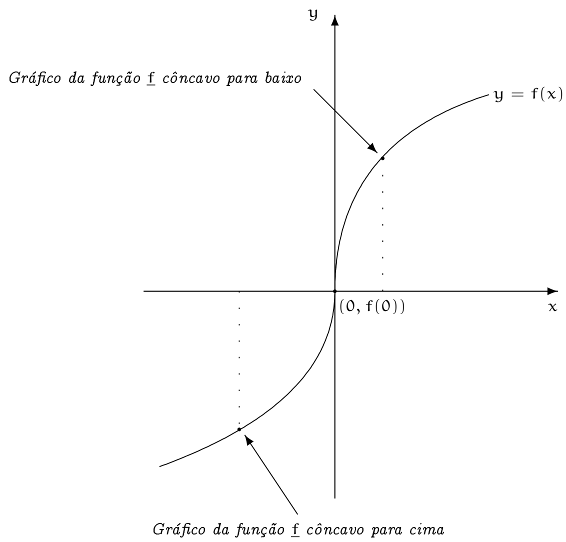
(ii) por outro lado, se

$$x > 0, \quad \textit{segue que} \quad f''(x) < 0,$$

implicando que o gráfico da função $\underline{f}$ *será côncavo para baixo nos pontos* $(x, f(x))$, *para cada* $x \in (0, \infty)$.

Logo dos itens (i) e (ii) podemos concluir que a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *tem um ponto de inflexão no ponto* $(0, f(0))$.

A figura abaixo nos dá a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.



Podemos resumir as observações acima nos seguintes resultados cujas demonstrações seguem dos correspondentes itens da Observação acima, isto é, para o estudo da concavidade do gráfico de uma função temos o:

Teorema 7.9.1 *Sejam A um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em A e $a \in A$.*

Se podemos encontrar $\delta > 0$, tal que

(i) para

$$x \in (a - \delta, a + \delta), \quad \textit{temos} \quad f''(x) < 0,$$

então a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ será côncavo para baixo nos pontos $(x, f(x))$ para $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

(ii) para

$$x \in (a - \delta, a + \delta), \quad \textit{temos} \quad f''(x) > 0,$$

então a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ será côncavo para cima nos pontos $(x, f(x))$ para $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Demonstração:

Ver o item 2. da Observação acima.

□

Para o estudo dos pontos de inflexão do gráfico de uma função temos o:

Teorema 7.9.2 *Sejam A um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $a \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em A, exceto, eventualmente, em $x = a$.*

Se podemos encontrar $\delta > 0$, tal que

(i) $f''(x) < 0$, *para cada* $x \in (a - \delta, a)$ *e* $f''(x) > 0$, *para* $x \in (a, a + \delta)$,

ou

(ii) $f''(x) > 0$, *para cada* $x \in (a - \delta, a)$ *e* $f''(x) < 0$, *para cada* $x \in (a, a + \delta)$,

então a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ tem um ponto de inflexão no ponto $(a, f(a))$.

Demonstração:

Ver o item 2. da Observação acima.

□

Como conseqüência das observações acima temos o seguinte resultado importante para o estudo da concavidade do gráfico de uma função:

Teorema 7.9.3 *Sejam A um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $a \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em A.*

Se o gráfico da função $\underline{f}$ tem um ponto de inflexão no ponto $(a, f(a))$ então deveremos ter

$$f''(a) = 0.$$

Observação 7.9.4

1. *Segue, da Observação acima itens 3 e 4., que um ponto de inflexão da representação geométrica do gráfico de uma função* $\underline{f}$ *somente poderá ocorrer nos pontos críticos da função 1.a derivada, isto é, onde a função 2.a derivada* $\underline{f''}$ *é zero ou onde a função 1.a derivada não for diferenciável no domínio da mesma (isto é, onde a função* $\underline{f''}$ *não existe).*

2. *Baseado no item acima, para encontrarmos os pontos de inflexão da representação geométrica do gráfico de uma função dada, procuraremos os pontos onde a 2.a derivada é zero e onde a 2.a derivada não existe, ou seja, os pontos críticos da função derivada* f'.

   A seguir aplicaremos, em cada desses pontos, os Teoremas (7.9.1) e (7.9.2) para tentar classificar os mesmos do ponto de vista do estudo da concavidade e de ponto de inflexão.

□

Aplicaremos essas técnicas ao seguinte exemplo:

Exemplo 7.9.2 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq x^3 - x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{7.15}$$

Encontre os extremos locais, os pontos da representação geométrica do gráfico onde a concavidade é voltada para cima, para baixo e os pontos de inflexão do gráfico da função $\underline{f}$ *.*

Baseado nas informações acima obtidas, faça um esboço da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *.*

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem (pois é uma função polinomial).

Notemos também que

$$f'(x) \doteq 3x^2 - 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{7.16}$$

Começaremos encontrando os extremos locais da função $\underline{f}$.

Para isto encontremos os pontos críticos da função $\underline{f}$.

Como a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ segue que seus pontos críticos ocorrerão onde a função derivada for zero, ou seja,

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{tais que} \quad f'(x) = 0.$$

Mas

$$0 = f'(x) \overset{(7.16)}{=} 3x^2 - 1\,, \quad \text{o que implicará em} \quad x^2 = \frac{1}{3} \quad \text{ou seja,} \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

isto é, os únicos pontos críticos da função $\underline{f}$ serão

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Como a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$ (em particular, é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$), podemos tentar aplicar o Teste da 2.a Derivada para classificar os pontos críticos acima, do ponto de vista de extremos locais.

Temos que:

$$f''(x) = 6x\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{7.17}$$

(i) Como

$$f''(x_1) = f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \overset{(7.17)}{=} 6\frac{\sqrt{3}}{3} > 0\,,$$

pelo Teste da 2.a Derivada (isto é, Teorema (7.8.1) item (ii)) segue que a função $\underline{f}$ tem um ponto de mínimo local em $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(ii) Como

$$f''(x_2) = f''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \overset{(7.17)}{=} -6\frac{\sqrt{3}}{3} < 0,$$

pelo Teste da 2.a Derivada (isto é, Teorema (7.8.1) item (i)) segue que a função $\underline{f}$ tem um ponto de máximo local em $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

e com isto encontramos todos os pontos de extremos locais da função $\underline{f}$.

Encontremos os pontos de inflexão do gráfico da função $\underline{f}$.

Para isto, encontremos os pontos críticos da função 1.a derivada, isto é, da função $\underline{f'}$.

Como a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$ (em particular, é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$) segue que os pontos críticos da função 1.a derivada (isto é, da função $\underline{f'}$) só ocorrerão onde a função 2.a derivada (isto é, a função $\underline{f''}$) for zero, ou seja,

$$0 = f''(x) \overset{(7.17)}{=} 6x\,, \quad \text{ou seja,} \quad x = 0\,.$$

Logo só existe um candidato a ponto de inflexão a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, a saber, o ponto:

$$(0, f(0)) = (0, 0).$$

Observemos que:

(i) para

$$x < 0\,, \quad \text{teremos} \quad f''(x) = 6x < 0\,.$$

Logo, pelo Teorema (7.9.1) item (i), segue que a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ tem concavidade voltada para baixo nos pontos $(x, f(x))$, para $x < 0$;

(ii) para

$$x > 0\,, \quad \text{teremos} \quad f''(x) = 6x > 0\,.$$

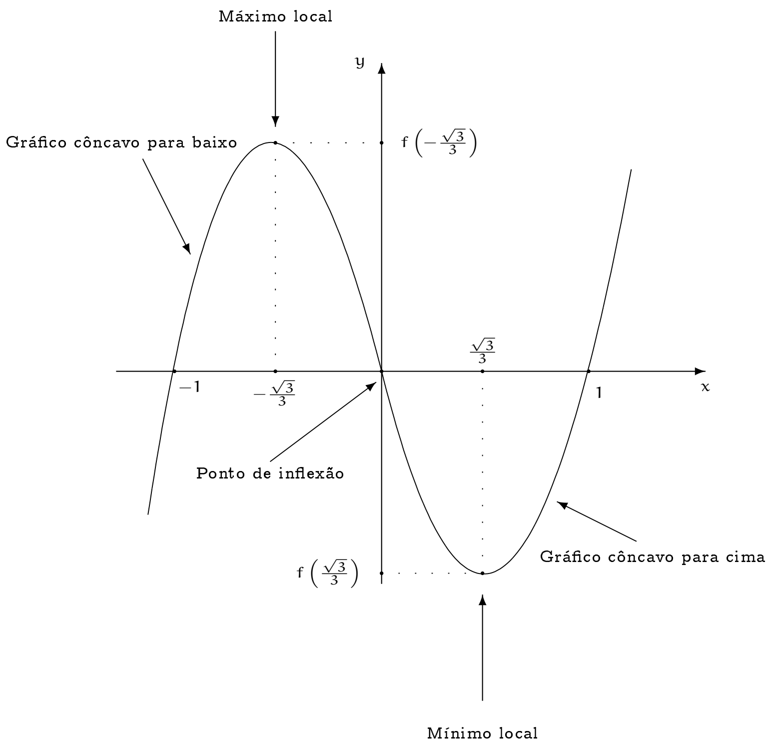
Logo, pelo Teorema (7.9.1) item (ii), segue que a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ tem concavidade voltada para cima nos pontos $(x, f(x))$, se $x > 0$.

Portanto, pelo Teorema (7.9.2), segue que a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ tem um ponto de inflexão no ponto $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Com estas informações podemos construir a seguinte tabela:

	sinal de f'	sinal de f''	$f(x)$
$x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+$	$-$	crescente e gráfico côncavo para baixo
$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-$	máximo local e gráfico côncavo para baixo
$-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < 0$	$-$	$+$	decrescente e gráfico côncavo para abaixo
$x = 0$	$-$	0	decrescente e ponto de inflexão
$0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$	$-$	$+$	decrescente e gráfico côncavo para cima
$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$+$	mínimo local e gráfico côncavo para cima
$\frac{\sqrt{3}}{3} < x$	$+$	$+$	crescente e gráfico côncavo para cima

Baseado na tabela acima podemos fazer um esboço da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, que é dado pela figura abaixo:



A seguir temos os seguintes exercícios resolvidos:

Exercício 7.9.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x) , \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} .$$

Encontre os pontos onde o gráfico da função $\underline{f}$ *é côncavo para baixo, côncavo para cima e os pontos de inflexão do mesmo.*

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$.

Logo os pontos de inflexão do gráfico da função $\underline{f}$ só poderão ocorrer onde a função 2.a derivada é zero, isto é,

$$f''(x) = 0 , \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} .$$

Notemos que

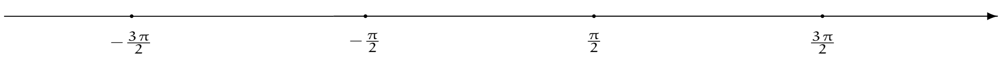
$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x) , \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} ,$$

assim, segue que,

$$f''(x) = -\cos(x) , \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} .$$

Logo

$$0 = f''(x) = -\cos(x) \quad \text{se, e somente se,} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi , \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{Z} .$$



Assim os pontos críticos da função $\underline{f}'$ serão:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Estudemos o sinal da função 2.a derivada $\underline{f}''$ ao passar por cada um dos pontos críticos da função 1.a derivada $\underline{f}'$.

Observemos que:

(i) para $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, teremos:

$$f''(x) = -\cos(x) \overset{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(x)>0}{<} 0.$$

Logo, do Teorema (7.9.1) segue que a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ será côncavo para baixo nos pontos $(x, f(x))$, para cada $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

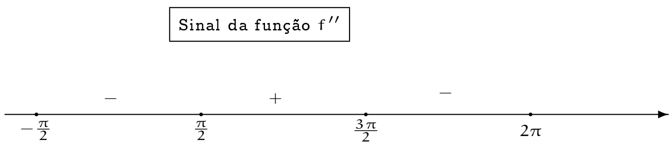
(ii) para $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, teremos:

$$f''(x) = -\cos(x) \overset{\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos(x)<0}{>} 0.$$

Logo, do Teorema (7.9.1) segue que a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é côncavo para cima nos pontos $(x, f(x))$, para cada $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

(iii) para $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, teremos:

$$f''(x) = -\cos(x) \overset{\frac{3\pi}{2}<x<2\pi \Rightarrow \cos(x)>0}{<} 0.$$



Logo, do Teorema (7.9.1) segue que a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é côncavo para baixo nos pontos $(x, f(x))$, para $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Portanto, do Teorema (7.9.2) e dos itens acima, podemos concluir que a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ tem pontos de inflexão nos pontos

$$\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right).$$

Utilizando o fato que a função $\underline{f}$ é 2π-periódica podemos concluir que o gráfico da função $\underline{f}$ é côncavo para baixo nos pontos $(x, f(x))$, para

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{Z},$$

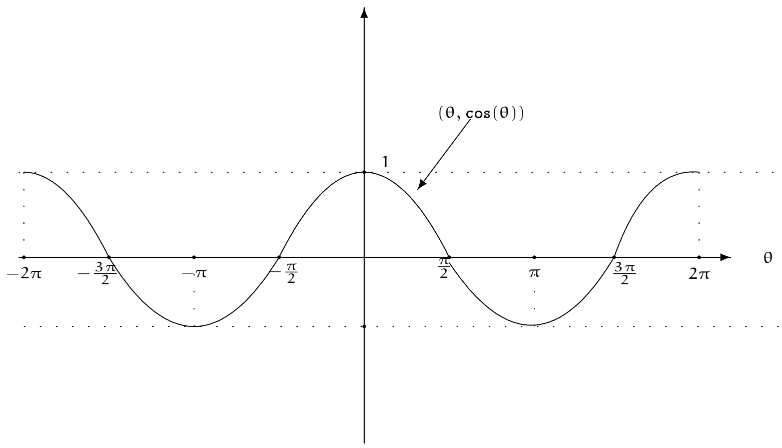
e o gráfico da função $\underline{f}$ é côncavo para cima nos pontos $(x, f(x))$, para

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Assim o gráfico da função $\underline{f}$ tem pontos de inflexão nos pontos

$$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\,, f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right), \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Assim, com as informações acima e utilizando o Exercício (7.8.2) (que nos fornece os pontos de máximo e mínimo locais da função $\underline{f}$), podemos obter a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, que será dada pela figura abaixo:



De modo análogo podemos aplicar as técnicas desenvolvidas neste Capítulo para o tratar o:

Exercício 7.9.2 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq (1 - 2x)^3\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Determinar os pontos da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *que teêm concavidade para cima, para baixo e os pontos de inflexão do mesmo.*

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem (pois ela é composta de funções que têm essa propriedade, verifique!).

Logo os pontos de inflexão do gráfico da função $\underline{f}$ deverão ocorrer onde a função 2.a derivada (isto é, da função f'') for zero, ou seja,

$$x \in \mathbb{R}\,, \quad \text{tal que} \quad f''(x) = 0\,.$$

Mas

$$f'(x) \overset{\text{Regra da Cadeia}}{=} 3(1 - 2x)^2.(-2) = -6(1 - 2x)^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

assim segue que

$$f''(x) \overset{\text{Regra da Cadeia}}{=} -6.2.(1 - 2x).(-2) = 24(1 - 2x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Logo

$$0 = f''(x) = 24(1 - 2x) = 12\left(\frac{1}{2} - x\right), \quad \text{ou seja,} \quad x = \frac{1}{2},$$

ou seja, o único ponto crítico da função 1.a derivada (isto é, da função f') é o ponto $x_1 = \frac{1}{2}$.

Observemos que

(i) para $x < \frac{1}{2}$, então

$$f''(x) = 12 \underbrace{\left(\frac{1}{2} - x\right)}_{\overset{x<\frac{1}{2}}{>0}} > 0\,.$$

Logo, do Teorema (7.9.1), segue que a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é côncavo para cima nos pontos $(x, f(x))$, para $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

(ii) por outro lado, para $x > \frac{1}{2}$, teremos

$$f''(x) = 12 \underbrace{\left(\frac{1}{2} - x\right)}_{\overset{x>\frac{1}{2}}{<0}} < 0\,.$$

Logo, do Teorema (7.9.1), segue que a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é côncavo para baixo nos pontos $(x, f(x))$, para $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Portanto, pelo Teorema (7.9.2) e dos itens (i) e (ii) acima, podemos concluir que o gráfico da função $\underline{f}$ tem um ponto de inflexão no ponto

$$\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

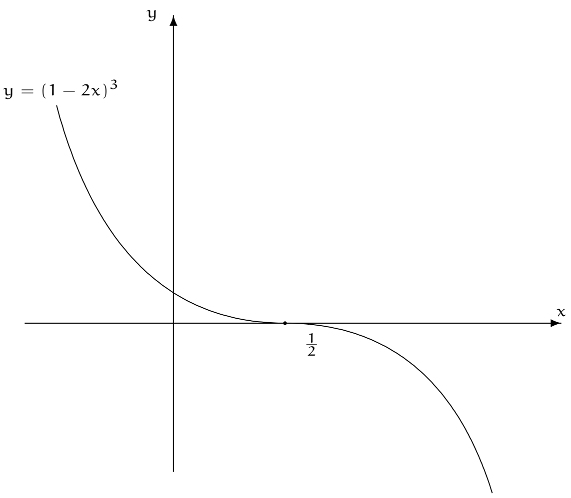
Como

$$f'(x) = \underbrace{-6}_{<0} \underbrace{(1-2x)^2}_{>0} < 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\},$$

segue, pelo Teorema (7.5.1), que a função $\underline{f}$ é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$ assim podemos montar a seguinte tabela:

	sinal de $f'(x)$	sinal de f''	$f(x)$
$x < \frac{1}{2}$	$-$	$+$	estritamente decrescente e gráfico côncavo para cima
$x = \frac{1}{2}$	0	0	gráfico tem um ponto de inflexão
$\frac{1}{2} < x$	$-$	$-$	estritamente decrescente e gráfico côncavo para abaixo

Baseado nestes dados podemos fazer um esboço da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ dada pela figura abaixo:



Observação 7.9.5

1. *Com as técnicas desenvolvidas na teoria de extremos locais (isto é, Testes da 1.a e da 2.a Derivada) e do estudo da concavidade do gráfico de funções podemos obter a representação geométrica do gráfico de funções polinomais e, mais geralmente, da função seno, cosseno, arco-seno, arco-cosseno, cosseno-hiperbólico, seno-hiperbólico, arco-cosseno-hiperbólico, arco-seno-hiperbólico e funções compostas envolvendo as mesmas.*

   Deixaremos como exercício para o leitor o estudo e a obtenção das representações geométricas dos gráficos das funções acima utilizando as ferramentas desenvolvidas neste capítulo.

2. *Para obtermos as representações geométricas dos gráficos das outras funções básicas que apareceram no Capítulo 3 precisaremos das técnicas que serão desenvolvidas no próximo capítulo, a saber, a introdução das retas assíntotas horizontais e verticiais à representação geométrica do gráfico de uma função.*

Capítulo 8

Limites no Infinito ou Infinito de funções reais de uma varável real

Começaremos trantando os denominados <u>**limites no infinito**</u>.

8.1 Motivação e definições de limites no infinito

Observação 8.1.1 *Consideremos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{1+x^2}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que fazendo a variável $\underline{x}$ *assumir valores, positivos, "cada vez maiores", temos que os respectivos valores da função nestes pontos (isto é,* $f(x)$*) irão "aproximar-se" de zero.*

Para ilustrar isto, vejamos a seguinte tabela abaixo:

x	$f(x)$
0	$\dfrac{1}{1+0^2} = 1$
-1	$\dfrac{1}{1+1^2} = \dfrac{1}{2}$
2	$\dfrac{1}{1+2^2} = \dfrac{1}{5}$
10	$\dfrac{1}{1+10^2} = \dfrac{1}{101}$
100	$\dfrac{1}{1+100^2} = \dfrac{1}{100001}$
$\downarrow$	$\downarrow$
∞	0

Neste caso, diremos que $f(x)$ *tende a zero, quando* $\underline{x}$ *tende a* ∞.

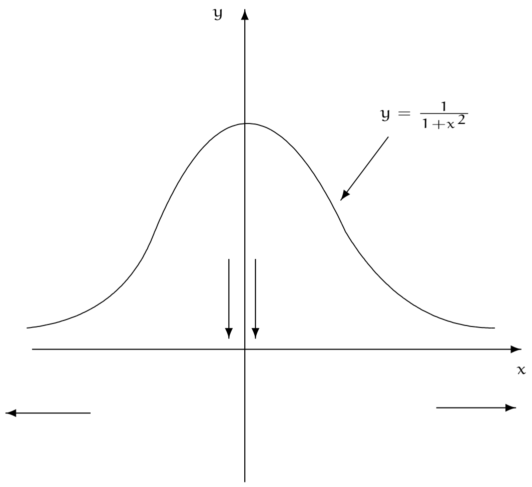
De modo semelhante, fazendo a variável $\underline{x}$ *assumir valores, negativos, "cada vez menores", temos que os respectivos valores da função nestes pontos, isto é,* $f(x)$, *irão "aproximar-se" de zero.*

Para ilustrar isto, vejamos a seguinte tabela abaixo:

x	$f(x)$
0	$\frac{1}{1+0^2} = 1$
-1	$\frac{1}{1+(-1)^2} = \frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{1+(-2)^2} = \frac{1}{5}$
-10	$\frac{1}{1+(-10)^2} = \frac{1}{101}$
-100	$\frac{1}{1+(-100)^2} = \frac{1}{100001}$
$\downarrow$	$\downarrow$
$-\infty$	0

Neste caso, diremos que $f(x)$ *tende a zero, quando* $\underline{x}$ *tende a* $-\infty$.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *é dada pela figura abaixo.*



Deixaremos como exercício para o leitor classicar os pontos críticos e estudar a concavidade do gráfico da função $\underline{f}$ *acima.*

De modo mais preciso temos a:

Definição 8.1.1 *Sejam* $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ *e* $L \in \mathbb{R}$.

Diremos que o **limite de** $f(x)$ **quando** $\underline{x}$ **tende a** ∞ **é** L, *denotando por*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

se dado $\varepsilon > 0$, *podermos encontrar* $K > 0$, *com* $K > a$, *de modo que*

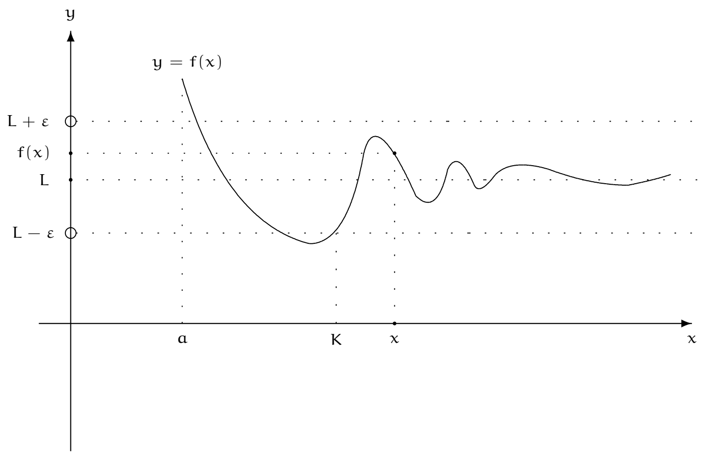
$$se \quad x > K, \quad teremos \quad |f(x) - L| < \varepsilon .$$

Observação 8.1.2

1. *A Definição acima nos diz que*
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$
se, e somente se, $f(x)$ *fica tão perto de* L *quanto se queira, desde que* $\underline{x}$ *seja, suficientemente, grande.*

2. *Na situação da Definição acima diremos que* $f(x)$ **tende a** L**, quando** $\underline{x}$ **tende a** ∞.

3. *Do ponto de vista da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *temos a seguinte figura:*



De modo semelhante temos a:

Definição 8.1.2 *Sejam* $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ *e* $M \in \mathbb{R}$.

Diremos que o **limite de** $f(x)$ **quando** $\underline{x}$ **tende a** $-\infty$ **é** M, *denotando por*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M,$$

se dado $\varepsilon > 0$, *podermos encontrar* $K > 0$, *com* $-K < b$, *de modo*

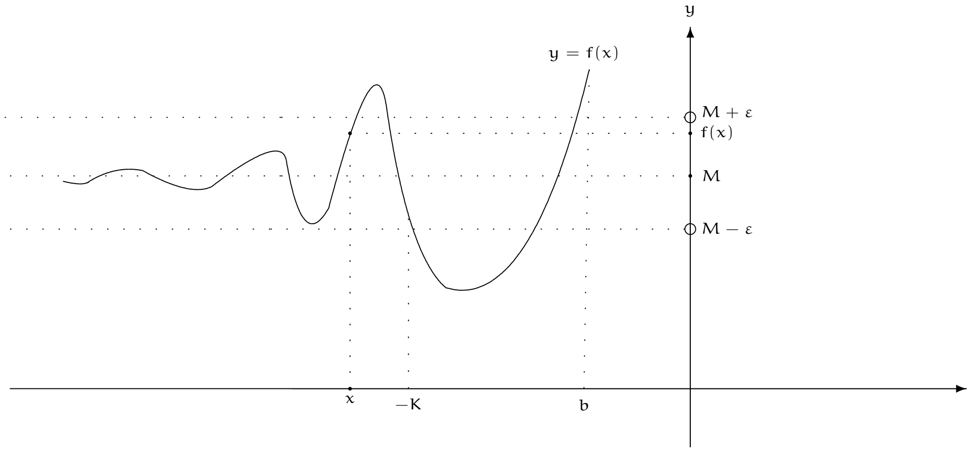
$$se \quad x < -K, \quad teremos \quad |f(x) - M| < \varepsilon .$$

Observação 8.1.3

1. *A Definição acima nos diz que*
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M,$$
se, e somente se, $f(x)$ *fica tão perto de* M *quanto se queira, desde que* $\underline{x}$ *seja negativo e, em módulo, suficientemente grande.*

2. *Na situação da Definição acima diremos que* $f(x)$ **tende a** M**, quando** $\underline{x}$ **tende a** $-\infty$.

3. *Do ponto de vista da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *temos a seguinte figura:*



4. *Os limites acima serão denominados* **limites no infinito** *da função* $\underline{f}$ *dada.*

Consideraremos a seguir o seguinte exemplo:

Exemplo 8.1.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{x}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Mostre que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0\,,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

Resolução:

Mostremos que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

Para isto, dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $K \in \mathbb{R}$ de modo que

$$K > \frac{1}{\varepsilon} > 0\,. \tag{8.1}$$

Logo,

$$\text{se} \quad x > K\,, \quad \text{segue que} \quad |f(x) - L| \overset{f(x)=\frac{1}{x},\, L\doteq 0}{=} \left|\frac{1}{x} - 0\right| \overset{x>0}{=} \frac{1}{x} \overset{x>K>0}{<} \frac{1}{K} \overset{(8.1)}{<} \varepsilon\,,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Mostremos

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

Para isto, dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $K \in \mathbb{R}$ de modo que

$$K > \frac{1}{\varepsilon} > 0. \tag{8.2}$$

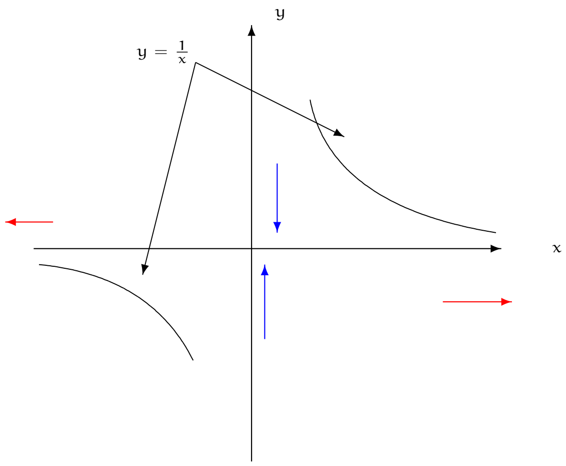
Logo

$$\text{se} \quad x < -K, \quad \text{segue que} \quad |f(x) - L| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| \overset{x<0}{=} \frac{1}{-x} \overset{-x>K>0}{<} \frac{1}{K} \overset{(8.2)}{<} \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Do ponto de vista da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ temos a seguinte figura:



8.2 Propriedades de limites no infinito

Valem as propriedades usuais de limites para limites em ∞ ou $-\infty$, mais precisamte temos a:

Proposição 8.2.1 *(Unicidade do limite em ∞ ou em $-\infty$)*

(i) *Seja* $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Se existir o limite $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ *e*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

então $L \in \mathbb{R}$ *será o único número real com essa propriedade.*

(ii) *Seja* $g : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Se existir o limite $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ *e*

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = M,$$

então $M \in \mathbb{R}$ *será o único número real com essa propriedade.*

Demonstração:

Faremos a demonstração do item (i).

A demonstração do item (ii) será deixada como exercício para o leitor.

Suponhamos que

$$L' = \lim_{x \to \infty} f(x).$$

Mostremos que

$$L' = L\,.$$

Para isto, dado $\varepsilon > 0$, como

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

deverá existir $K_1 > 0$, com $K_1 > a$, tal que

$$\text{se} \quad x > K_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.3}$$

De modo semelhante, como

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L',$$

deverá existir $K_2 > 0$, com $K_2 > a$, tal que

$$\text{se} \quad x > K_2 \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L'| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.4}$$

Logo

$$|L - L'| = |L + [-f(x) + f(x)] - L'| = |[L - f(x)] + [f(x) - L']| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'|\,,$$

para cada $x \in (a, \infty)$.

Em particular, se

$$x > K \doteq \max\{K_1, K_2\} \tag{8.5}$$

teremos que

$$|L - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| \overset{(8.5),(8.3),(8.4)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$, o que implicará em $L' = L$, como queríamos demonstrar.

□

Outro resultado importante é dado pela:

Proposição 8.2.2

(i) *Seja* $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Se existe o limite $\lim_{x \to \infty} f(x)$*, então podemos encontrar* $K > 0$*, com* $K > a$*, tal que a restrição da função* $\underline{f}$ *ao intervalo* (K, ∞) *será uma função é limitada em* (K, ∞)*, isto é, podemos encontrar* $M > 0$*, tal que*

$$|f(x)| \leq M\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (K, \infty)\,.$$

(ii) *Seja* $g : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Se existe o limite $\lim_{x \to -\infty} g(x)$*, então podemos encontrar* $K > 0$*, com* $-K < b$*, tal que a restrição da função* $\underline{g}$ *ao intervalo* $(-\infty, -K)$ *será uma função é limitada em* $(-\infty, -K)$*, isto é, existe* $M > 0$ *tal que*

$$|g(x)| \leq M\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-\infty, -K)\,.$$

Demonstração:

Faremos a demonstração do item (i).

A demonstração do item (ii) será deixada como exercício para o leitor.

Como existe o limite $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ e

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L\,,$$

dado $\varepsilon = 1$, podemos encontrar $K > 0$, com $K > a$, tal que

$$\text{se} \quad x > K\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \varepsilon = 1\,. \tag{8.6}$$

Logo se $x > K$ teremos:

$$|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L| \overset{(8.6)}{<} 1, \quad \text{implicando em} \quad |f(x)| < |L| + 1\,,$$

ou seja, a restrição da função $\underline{f}$ ao intervalo (K, ∞) será uma função é limitada (basta definir $M \doteq |L| + 1$), como queríamos demonstrar.

□

Temos também a:

Proposição 8.2.3

(i) Seja $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Existe o limite $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ *e*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

se, e somente se, existe o $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - L]$ *e*

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - L] = 0.$$

(ii) Seja $g : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Existe o limite $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ *e*

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = M$$

se, e somente se, existe o limite $\lim\limits_{x \to -\infty} [g(x) - M]$ *e*

$$\lim_{x \to -\infty} [g(x) - M] = 0.$$

Demonstração:

Faremos a demonstração do item (i).

A demonstração do item (ii) será deixada como exercício para o leitor.

Temos que existe o limite $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ e

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, podemoe encontrar $K > 0$, com $K > a$, tal que

$$\text{se} \quad x > K\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

ou, equivalentemente,

$$|[f(x) - L] - 0| < \varepsilon\,,$$

ou ainda, existe o $\lim_{x\to\infty}[f(x)-L]$ e

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-L]=0\,,$$

mostrando equivalência.

□

Temos o seguinte exemplo:

Exemplo 8.2.1 *Sejam* $C\in\mathbb{R}$ *e* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *função dada por*

$$f(x)\doteq C\,,\quad \textit{para cada}\quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Então, existem os limite $\lim_{x\to\infty}f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=C\,.$$

Resolução:

Faremos a demonstração do caso $x\to\infty$.

A demonstração do caso $x\to-\infty$ será deixada como exercício para o leitor.

Observemos que, dado $\varepsilon>0$, consideremos

$$K\doteq 1\,.$$

Com isto,

$$\text{se}\quad x>K=1\quad\text{segue que}\quad |f(x)-C|=|C-C|=0<\varepsilon\,,$$

mostrando que

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=C\,,$$

como afirmamos.

□

O resultado a seguir será de muita utilidade no cálculo de limites no infinito.

Proposição 8.2.4 *Sejam* $f,g:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ *duas funções.*

Suponhamos que existam os limites $\lim_{x\to\infty}f(x)$, $\lim_{x\to\infty}g(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L\quad e\quad \lim_{x\to\infty}g(x)=M\,.$$

Então:

(a) existirá o limite $\lim_{x\to\infty}[f+g](x)$ *e além disso*

$$\lim_{x\to\infty}[f+g](x)=L+M\,,$$

isto é,

$$\lim_{x\to\infty}[f+g](x)=\lim_{x\to\infty}f(x)+\lim_{x\to\infty}g(x)\,.$$

(b) existirá o limite $\lim_{x\to\infty}[f.g](x)$ *e além disso*

$$\lim_{x\to\infty}[f.g](x)=L.M\,,$$

isto é,

$$\lim_{x\to\infty}[f.g](x)=\lim_{x\to\infty}f(x).\lim_{x\to\infty}g(x)\,.$$

(c) se $M \neq 0$, *existirá o limite* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x\to\infty}[\frac{f}{g}](x) = \frac{L}{M},$$

isto é,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}.$$

Demonstração:

Do item (a):

Dado $\varepsilon > 0$, como existem os limites $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, e além disso

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = M,$$

podemos encontrar $K_1, K_2 > 0$, com $K_1, K_2 > a$, tais que

$$\text{se} \quad x > K_1, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{8.7}$$

e

$$\text{se} \quad x > K_2, \quad \text{teremos} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.8}$$

Logo se considerarmos

$$K \doteq \max\{K_1, K_2\} > 0$$

teremos que, para $x > K$, então

$$x > K \geq K_1, \quad \text{de (8.7), segue que} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{8.9}$$

$$x > K \geq K_2, \quad \text{de (8.8), segue que} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{8.10}$$

assim, se $x > K$, segue que

$$\begin{aligned} |[f+g](x) - (L+M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \overset{(8.9),(8.10)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é, existe o limite $\lim\limits_{x\to\infty}[f+g](x)$ e além disso

$$\lim_{x\to\infty}[f+g](x) = L + M,$$

completando a demonstração do item (a).

Do item (b):

Dado $\varepsilon > 0$, como existe o limite $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, pela Proposição (8.2.2) item (i), podemos encontrar $K_1 > 0$, com $K_1 > a$, e $C > 0$ tal que

$$\text{se} \quad x > K_1, \quad \text{teremos} \quad |g(x)| \leq C. \tag{8.11}$$

Além disso, como existem os limites $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = M$, podemos encontrar $K_2, K_3 > 0$ (e $K_1, K_2 > a$) tais que

$$\text{se} \quad x > K_2 \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2C}, \tag{8.12}$$

e

$$\text{se} \quad x > K_3\,, \quad \text{teremos} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2[|L| + 1]}\,. \tag{8.13}$$

Seja

$$K \doteq \max\{K_1, K_2, K_3, a\} > 0\,.$$

Se $x > K$ teremos:

$$x > K \geq K_1, \quad \text{de (8.11), teremos} \quad |g(x)| \leq C\,; \tag{8.14}$$

$$x > K \geq K_2, \quad \text{de (8.12), teremos} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2C}\,; \tag{8.15}$$

$$x > K \geq K_3, \quad \text{de (8.13), teremos} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2[|L| + 1}\,. \tag{8.16}$$

Logo se $x > K$ então $x > K_1$, $x > K_2$ e $x > K_3$, assim teremos:

$$\begin{aligned}
|[f.g](x) - L.M| &= |f(x).g(x) - L.g(x) + L.g(x) - LM| \leq |f(x).g(x) - L.g(x)| + |L.g(x) - LM| \\
&= |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M| \overset{(8.14),(8.15),(8.16)}{<} \frac{\varepsilon}{2C}.C + |L|\frac{\varepsilon}{2[|L| + 1]} \\
&\overset{\frac{|L|}{|L|+1}<1}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

mostrando que

$$\lim_{x\to\infty} [f.g](x) = L.M\,,$$

completando a demonstração do item (b).

<u>Do item (c):</u>

Se mostrarmos que existe o limite $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{g}\right)(x)$ e além disso

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{M}\,,$$

utilizando-se o item (b), teremos que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to\infty} \left(f.\frac{1}{g}\right)(x) \overset{[\text{item (b)}]}{=} L.\frac{1}{M} = \frac{L}{M},$$

completando a demonstração do item (c).

Mostremos que existe o limite $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{g}\right)(x)$ e além disso

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{M}\,,$$

Para isto, dado $\varepsilon > 0$, como existe o limite $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ e

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = M\,,$$

segue que podemos encontrar $K_1, K_2 > 0$, com $K_1, K_2 > a$, tais que

$$\text{se} \quad x > K_1\,, \quad \text{teremos} \quad |g(x) - M| \leq \frac{|M|}{2}\,, \tag{8.17}$$

$$\text{se} \quad x > K_2\,, \quad \text{teremos} \quad |g(x) - M| \leq \frac{\varepsilon|M|^2}{2} \tag{8.18}$$

(para obter (8.17) tomamos, na Definição de limite em ∞, $\varepsilon \doteq \dfrac{|M|}{2}$).

Logo, se $x > K_1$ teremos:

$$|M| - |g(x)| \overset{|a|-|b|\leq|a-b|}{\leq} |M - g(x)| = |g(x) - M| \overset{(8.17)}{<} \frac{|M|}{2}, \quad \text{ou seja,} \quad |M| - |g(x)| < \frac{|M|}{2}.$$

Logo, como $M \neq 0$, teremos que

$$|g(x)| > \frac{2}{|M|}, \quad \text{para} \quad x > K_1,$$

ou seja,

$$\text{se} \quad x > K_1 \quad \text{teremos} \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}, \tag{8.19}$$

Vale observar que será mostrado mais adiante (veja Teorema (8.2.1)) que se $M \neq 0$, então teremos $g(x) \neq 0$, para $\underline{x}$ suficientemente grande.

Consideremos

$$K \doteq \max\{K_1, K_2, a\} > 0.$$

Logo se $x > K$ teremos $x > K_1$ e $x > K_2$, assim:

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - g(x)}{g(x).M}\right| = \underbrace{\frac{1}{|g(x)|}}_{\overset{(8.19)}{<}\frac{2}{M}} \frac{|g(x) - M|}{|M|} < \frac{2}{|M|} \frac{\overbrace{|g(x) - M|}^{\overset{(8.18)}{<}\frac{\varepsilon|M|^2}{2}}}{|M|}$$

$$< \frac{2}{|M|^2}\frac{\varepsilon|M|^2}{2} = \varepsilon,$$

mostrando que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{M}$$

e completando a demonstração da Proposição.

□

Como consequência do resultado acima temos o:

Corolário 8.2.1 *Com as hipótese da Proposição acima temos que existe o limite* $\lim\limits_{x\to\infty}[f - g](x)$ *e além disso*

$$\lim_{x\to\infty}[f - g](x) = L - M,$$

ou seja,

$$\lim_{x\to\infty}[f - g](x) = \lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to\infty} g(x).$$

Demonstração:

Observemos que

$$[f - g](x) = \{f + [(-1).g]\}(x), \quad \text{para cada} \quad x \in (a, \infty).$$

Logo dos itens (a), (b) da Proposição acima e do Exemplo (8.2.1) acima segue que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}[f-g](x) = \lim_{x\to\infty}\{f+[(-1).g]\}(x) &\overset{\text{Prop. acima item (a)}}{=} \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty}[(-1).g](x)\\ &\overset{\text{Prop. acima item (b)}}{=} \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty}(-1).\lim_{x\to\infty} g(x)\\ &\overset{\text{Exemplo (8.2.1)}}{=} \lim_{x\to\infty} f(x) + (-1).\lim_{x\to\infty} g(x)\\ &= \lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to\infty} g(x)\,,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 8.2.1

1. *Valem os resultados análogos à Proposição (8.2.4) e ao Corolário (8.2.1) para o limite em $-\infty$ (isto é, para o caso $x \to -\infty$).*

   Deixaremos como exercício para o leitor os respectivos enuciados e as demonstrações.

2. *Podemos estender os resultados acima para um número finito de funções que tenham limite em ∞ (ou em $-\infty$).*

   Deixaremos como exercício para o leitor os respectivos enuciados e as demonstrações.

3. *Como consequência do item acima, temos que se, $n \in \mathbb{N}$, $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função tal que existe o limite $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e*

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

   então existirá o limite $\lim_{x\to\infty}[f(x)]^n$ e além disso

   $$\lim_{x\to\infty}[f(x)]^n = L^n\,,$$

   isto é,

   $$\lim_{x\to\infty}[f^n(x)] = \left[\lim_{x\to\infty} f(x)\right]^n.$$

4. *Vale um resultado análogo ao citado no item acima para limites em $-\infty$ (isto é, para o caso $x \to -\infty$).*

   Deixaremos como exercício para o leitor os respectivos enuciados e as demonstrações.

A seguir exibiremos alguns resultados gerais relacionados com limites no infinito que serão importantes.

Teorema 8.2.1 *(Teorema da conservação do sinal para limites no infinito) Seja $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ função.*

Suponhamos que exista o limite $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \neq 0.$$

Então, podemos encontrar $K > 0$, de modo que para todo $x > K$, teremos que $f(x)$ terá o mesmo sinal de L (mais precisamente, se $L > 0$, teremos $f(x) > 0$, para $x > K$ e se $L < 0$, teremos $f(x) < 0$, para $x > K$).

Demonstração:

De fato, como existe o limite $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ e

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \neq 0,$$

dado $\varepsilon \doteq \frac{|L|}{2} > 0$ (pois $L \neq 0$), poderemos encontrar $K > 0$, com $K > a$, tal que

$$\text{se} \quad x > K\,, \quad \text{segue que} \quad |f(x) - L| \leq \varepsilon = \frac{|L|}{2},$$

ou, equivalentemente,

$$-\frac{|L|}{2} < f(x) - L < \frac{|L|}{2},$$

ou ainda,

$$L - \frac{|L|}{2} \overset{(1)}{<} f(x) \overset{(2)}{<} L + \frac{|L|}{2}.$$

Notemos que se $L > 0$ então $|L| = L$.

Neste caso, para $x > K$ teremos, da desigualdade (1), que

$$f(x) > L - \frac{|L|}{2} = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} > 0.$$

Por outro lado, se $L < 0$, então $|L| = -L$.

Neste caso, para $x > K$ teremos, dad esigualdade (2), que

$$f(x) < L + \frac{|L|}{2} = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} < 0,$$

mostrando, em ambos os casos, que para $x > K$ temos que $f(x)$ tem o mesmo sinal de L, como queríamos demonstrar.

□

Observação 8.2.2 *Vale um resultado análogo do citado no item acima para limites em* $-\infty$ *(isto é, para o caso* $x \to -\infty$*).*

Deixaremos como exercício para o leitor o respectivo enuciado e demonstração.

Como consequência temos o:

Corolário 8.2.2 *Seja* $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ *função.*

1. *Suponhamos que*

$$f(x) \geq 0\,, \quad \textit{para} \quad x \in (a, \infty),$$

e que existe o limite $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *e*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L\,.$$

Então

$$L \geq 0\,.$$

2. *Suponhamos que*
$$f(x) \leq 0\,, \quad para \quad x \in (a, \infty),$$
e que existe o limite $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ *e*
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L\,.$$
Então
$$L \leq 0\,.$$

Demonstração:

Faremos a demonstração do item 1..

A demonstração do item 2. é semelhante e será deixada como exercício para o leitor.

Suponhamos que
$$f(x) \geq 0\,, \quad \text{para} \quad x \in (a, \infty). \tag{8.20}$$
Mostremos que
$$L \geq 0\,.$$
Vamor supor, por absurdo, que $L < 0$.

Logo, do Teorema acima, podemos encontrar $K > 0$, com $K > a$, de modo que
$$f(x) < 0\,, \quad \text{para} \quad x > K.$$
o que contraria a hipótese (8.20), completando a demonstração.

□

Observação 8.2.3 *Vale um resultado análogo do citado no item acima para limites em* $-\infty$ *(isto é, para o caso* $x \to -\infty$*).*

Deixaremos como exercício para o leitor o respectivo enuciado e demonstração.

Temos também a

Teorema 8.2.2 *(Teorema da comparação para limites no infinito) Sejam* $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ *funções que satisfazem*
$$f(x) \leq g(x)\,, \quad para\ cada \quad x \in (a, \infty). \tag{8.21}$$
Suponhamos que existem os limites $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ *e além disso*
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad e \qquad \lim_{x \to \infty} g(x) = M\,.$$
Então
$$L \leq M,$$
isto é,
$$\lim_{x \to \infty} f(x) \leq \lim_{x \to \infty} g(x).$$

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que $L > M$, isto é,
$$\lim_{x \to \infty} f(x) > \lim_{x \to \infty} g(x),$$

ou seja,

$$0 < \lim_{x \to \infty} f(x) - \lim_{x \to \infty} g(x) \overset{\text{Corolário } (8.2.1)}{=} \lim_{x \to \infty} [f(x) - g(x)].$$

Logo, do Teorema da Convervação do Sinal para Limites no Infinito (isto é, Teorema (8.2.1)), podemos encontrar $K > 0$, com $K > a$, de modo que

$$\text{se} \quad x > K, \quad \text{teremos} \quad 0 < f(x) - g(x),$$

o que contraria (8.21).

Portanto $L \leq M$, ou ainda,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \leq \lim_{x \to \infty} g(x),$$

completando a demonstração.

□

Observação 8.2.4 *Vale um resultado análogo ao Teorema acima para limites em $-\infty$ (isto é, para o caso $x \to -\infty$).*

Deixaremos como exercício para o leitor o respectivo enuciado e a demonstração.

Outro resultado importante é o

Teorema 8.2.3 *(Teorema do confronto ou sanduiche para limites no infinito) Sejam $f, g, h : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ funções que satisfazem*

$$f(x) \overset{(1)}{\leq} g(x) \overset{(2)}{\leq} h(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in (a, \infty).$$

Suponhamos que existem os limtes $\lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to \infty} h(x)$ e que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} h(x) = L.$$

Então existe o limite $\lim_{x \to \infty} g(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = L.$$

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como existem os limites $\lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to \infty} h(x)$ e

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} h(x) = L,$$

podemos encontrar $K_1, K_2 > 0$, com $K_1, K_2 > a$, tais que

$$\text{se} \quad x > K_1, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - L| < \varepsilon, \quad \text{ou seja,} \quad -\varepsilon \overset{(3)}{<} f(x) - L < \varepsilon,$$

$$\text{se} \quad x > K_2, \quad \text{teremos} \quad |h(x) - L| < \varepsilon, \quad \text{ou seja,} \quad -\varepsilon < h(x) - L \overset{(4)}{<} \varepsilon.$$

Seja

$$K \doteq \max\{K_1, K_2\} > 0.$$

Logo

se $\quad x > K \quad$ teremos:

$$x > K \geq K_1, \quad \text{logo (3) e (1) implicarão} \quad -\varepsilon \overset{\text{de (3)}}{<} f(x) - L \overset{\text{de (1)}}{\leq} g(x) - L, \tag{8.22}$$

$$x > K \geq K_2, \quad \text{logo (2) e (4) implicarão} \quad g(x) - L \overset{\text{de (2)}}{\leq} h(x) - L \overset{\text{de (4)}}{<} \varepsilon. \tag{8.23}$$

Logo (8.22) e (8.23) implicarão que

$$\text{para} \quad x > K, \quad \text{teremos} \quad -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon, \quad \text{ou seja,} \quad |g(x) - L| < \varepsilon,$$

mostrando que existe o limite $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ e além disso

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = L,$$

como queríamos mostrar.

$\square$

Observação 8.2.5 *Vale um resultado análogo do citado no item acima para limites em $-\infty$ (isto é, para o caso $x \to -\infty$).*

Deixaremos como exercício para o leitor o respectivo enuciado e a demonstração.

Para o próximo resultado será conveniente introduzirmos a seguinte definição:

Definição 8.2.1 *Seja $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ função.*

Diremos que a função $\underline{f}$ é um **<u>infinitésimo em ∞</u>** *se*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

De modo semelhante, se $g : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ é uma função, diremos que a função $\underline{g}$ é um **<u>infinitésimo em $-\infty$</u>** *se*

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0.$$

Um exemplo de uma função com as propriedades acima é dado pelo:

Exemplo 8.2.2 *Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{x}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Então a função $\underline{f}$ é um infinitésimo em ∞ e também é um infinitésimo em $-\infty$.

<u>Resolução:</u>

De fato, pois

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \overset{\text{Exemplo (8.1.1)}}{=} 0$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \overset{\text{Exemplo (8.1.1)}}{=} 0.$$

Com a definição acima temos o seguinte resultado:

Proposição 8.2.5 *Sejam* $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ *funções.*

Suponhamos que a função $\underline{f}$ *é um infinitésimo no ponto* ∞ *e a função* $\underline{g}$ *é limitada em* (a, ∞).

Então a função $f.g$ *é um infinitésimo em* ∞, *ou seja,*

$$\lim_{x \to \infty} (f.g)(x) = 0.$$

Demonstração:

Como a função $\underline{g}$ é limitada em (a, ∞), podemos encontrar $C > 0$, tal que

$$\text{se} \quad x \in (a, \infty), \quad \text{teremos} \quad |g(x)| \leq C. \tag{8.24}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como a função $\underline{f}$ é um infinitésimo em ∞, podemos encontrar $K > 0$, com $K > a$, tal que

$$\text{se} \quad x > K, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{C}. \tag{8.25}$$

Logo, para $x > K$, teremos:

$$|(f\,g)(x) - 0| = |f(x)\,g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \overset{(8.24)}{\leq} |f(x)|\,C \overset{(8.25)}{<} \frac{\varepsilon}{C}\,C = \varepsilon,$$

mostrando que

$$\lim_{x \to \infty} (f\,g)(x) = 0\,,$$

ou seja, a função $f.g$ é um inifinitésimo em ∞, como queríamos mostrar.

□

Observação 8.2.6

1. *Poderíamos ter utilizado o Teorema do Sanduiche para limites no infinito para obter o resultado acima.*

   De fato, como a função $\underline{g}$ *é limitada em* (a, ∞), *podemos encontrar* $C > 0$, *tal que*

   $$|g(x)| \leq C\,, \quad \textit{para} \quad x \in (a, \infty)\,.$$

   Logo

   $$|(f.g)(x)| \leq C|f(x)|\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a, \infty)\,,$$

   ou seja, para cada $x \in (a, \infty)$, *teremos:*

   $$-\,C\,|f(x)| \leq (f.g)(x) \leq C\,|f(x)|\,. \tag{8.26}$$

   Como $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, *teremos:*

   $$\lim_{x \to \infty} [-C\,|f(x)|] = \lim_{x \to \infty} [C\,|f(x)|] = 0\,. \tag{8.27}$$

   Logo, de (8.26), (8.27) e do Teorema do Sanduiche para limites no infinito, segue que

   $$\lim_{x \to \infty} (f.g)(x)] = 0,$$

   como queríamos demonstrar.

2. *Vale um resultado análogo do citado no item acima para limites em $-\infty$ (isto é, para o caso $x \to -\infty$).*

Deixaremos como exercício para o leitor o respectivo enuciado e demonstração.

Exemplo 8.2.3 *Em cada um dos itens abaixo, calcular os limites no infinito, se existirem, justificando a resposta:*

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-3}{2x-5}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$

Resolução:

Do item 1.:

Observemos que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x-3}{2x-5} \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x-3}{x}}{\frac{2x-5}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{x} - \frac{3}{x}}{\frac{2x}{x} - \frac{5}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 - \frac{5}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \left[4 - 3\,\frac{1}{x}\right]}{\lim\limits_{x\to\infty} \left[2 - 5\,\frac{1}{x}\right]} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} [4] - \lim\limits_{x\to\infty} [3] \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{1}{x}\right]}{\lim\limits_{x\to\infty} [2] - \lim\limits_{x\to\infty} [5] \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{1}{x}\right]}$$

$$\overset{\text{Exemplo } (8.1.1)}{=} \frac{4 - 3.0}{2 - 5.0} = 2.$$

Do item 2. e 3.:

Como a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \text{sen}(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

é limitada em $\mathbb{R}$, pois

$$|f(x)| = |\,\text{sen}(x)| \leq 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

e a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) \doteq \frac{1}{x}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

é um infinitésimo em ∞ e também é um infinitésimo em $-\infty$, pois (veja o Exemplo (8.1.1))

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

Logo, da Proposição acima, segue que a função $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ será um infinitésimo em ∞ e em $-\infty$, isto é,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 0.$$

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição 8.2.6 *(Mudança de variáveis em limites no infinito) Sejam* B *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, $b \in B$, $f : B \setminus \{b\} \to \mathbb{R}$ *e* $g : (a, \infty) \to B$ *funções tais que:*

(i) existe o limite $\lim\limits_{y \to b} f(y)$ *e*

$$\lim_{y \to b} f(y) = L\,;$$

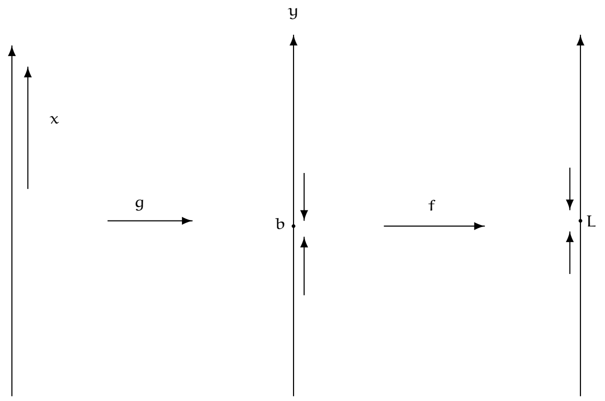
(ii) existe o limite $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ *e*

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = b.$$

Então existe o limite $\lim\limits_{x \to \infty} (f \circ g)(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to \infty} (f \circ g)(x) = \lim_{y \to b} f(y) = L.$$

Geometricamente temos:



Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como existe o limite $\lim\limits_{y \to b} f(y)$ e

$$\lim_{y \to b} f(y) = L\,,$$

podemos encontrar $\lambda > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |y - b| < \lambda, \quad y \in B \setminus \{b\}, \quad \text{teremos} \quad |f(y) - L| < \varepsilon. \tag{8.28}$$

Por outro lado, como existe o limite $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ e

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = b,$$

podemos encontrar $K > 0$, com $K > a$, de modo que

$$\text{se} \quad x > K\,, \quad \text{teremos} \quad |g(x) - b| < \lambda. \tag{8.29}$$

Logo

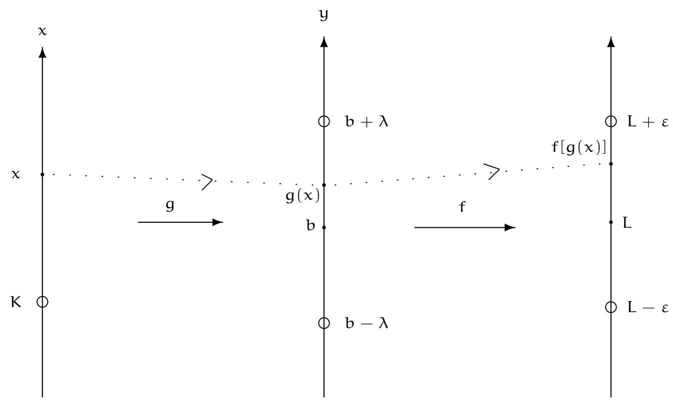
$$\text{se} \quad x > K\,, \quad \text{por (8.29), temos} \quad |\underbrace{g(x)}_{=y} - b| < \lambda, \quad \text{por (8.28), temos} \quad |f[\underbrace{g(x)}_{=y}] - L| < \varepsilon,$$

mostrando que

$$\lim_{x \to \infty} f[g(x)] = L,$$

completando a demonstração.

O diagrama abaixo ilustra a situação:



□

Observação 8.2.7 *1. O resultado acima nos diz como fazer uma mudança de variáveis em limites no infinito como mostra a situação a seguir:*

$$\lim_{x\to\infty} f[g(x)] \left\langle \begin{array}{l} y \doteq g(x) \\ x \to \infty \;\Rightarrow\; y = g(x) \to b \end{array} \right\rangle \lim_{y\to b} f(y) = L.$$

2. Vale um resultado análogo do citado no item acima para limites em $-\infty$ (isto é, para o caso $x \to -\infty$).

Deixaremos a cargo do leitor o enuciado e a demonstração do mesmo.

Como conseqüência temos o

Corolário 8.2.3 *Sejam $b \in A$, A um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\underline{b}$ e $g : (a, \infty) \to B$ uma função tal que existe o limite $\lim_{x\to\infty} g(x)$ e*

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = b.$$

Então existe o limite $\lim_{x\to\infty} (f \circ g)(x)$ e

$$\lim_{x\to\infty} (f \circ g)(x) = f(b).$$

Demonstração:

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $x = b$ segue que

$$\lim_{y\to b} f(y) = f(b).$$

Logo, da Proposição acima, segue que existe o limite $\lim_{x\to\infty} (f \circ g)(x)$ e além disso

$$\lim_{x\to\infty} (f \circ g)(x) = \lim_{y\to b} f(y) = f(b),$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 8.2.8

1. *O resultado acima nos diz que se a função* $\underline{f}$ *for contínua em* $b = \lim_{x\to\infty} g(x)$ *então*

$$\lim_{x\to\infty} f\,[g(x)] = f\left[\lim_{x\to\infty} g(x)\right].$$

2. *Vale um resultado análogo do citado no item acima para limites em* $-\infty$ *(isto é, para o caso* $x \to -\infty$*).*

   Deixaremos a cargo do leitor o enuciado e a demonstração do mesmo.

Como conseqüência do resultado acima temos o:

Corolário 8.2.4 *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $g : (a, \infty) \to [0, \infty)$ *função.*
Suponhamos que exista o limite $\lim_{x\to\infty} g(x)$ *e*

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = L \quad \textit{(que, pelo Corolário (8.2.2), segue que } L \geq 0\textit{).}$$

Então existe o limite $\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{g(x)}$ *e além disso*

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{L},$$

isto é,

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to\infty} g(x)}.$$

Demonstração:

Sabemos que a função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \sqrt[n]{x}, \quad \text{para cada} \quad x \geq 0,$$

é contínua em $[0, \infty)$.

Logo, do Corolário acima, segue

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{g(x)} = \lim_{x\to\infty} (f \circ g)(x) = \lim_{x\to\infty} f[g(x)] \overset{\text{Corolário (8.2.3)}}{=} f\left[\lim_{x\to\infty} g(x)\right] = \sqrt[n]{L},$$

ou ainda,

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to\infty} g(x)},$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 8.2.9 *Vale um resultado análogo do citado no item acima para limites em* $-\infty$ *(isto é, para o caso* $x \to -\infty$*).*

Deixaremos a cargo do leitor o enuciado e a demonstração do mesmo.

A seguir consideraremos alguns exemplos:

Exemplo 8.2.4 *Em cada um dos itens abaixo, calcular os limites no infinito, se existirem, justificando a resposta:*

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \cos\left(\dfrac{x+5}{x^2+2x-5}\right)$.

Resolução:

Do item 1.:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{4x^2+1}} \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{3x-2}{x}}{\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x}} \overset{x<0 \Rightarrow \sqrt{x^2}=|x|=-x}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{3x-2}{x}}{\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-2.\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{\dfrac{4x^2+1}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left[3-2\,\dfrac{1}{x}\right]}{-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}[3] - \lim\limits_{x\to-\infty}[2]\,\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right]}{-\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}[4] + \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x^2}\right]}}$$

$$\overset{\text{Exemplo }(8.1.1)}{=} \frac{3-2.0}{-\sqrt{4+0^2}} = \frac{3}{-\sqrt{4}} = -\frac{3}{2}.$$

Do item 2.:

Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\setminus\left\{\underbrace{\dfrac{2-\sqrt{24}}{2}}_{=1-\sqrt{6}}, \underbrace{\dfrac{2+\sqrt{24}}{2}}_{=1+\sqrt{6}}\right\}\to\mathbb{R}$ funções dadas por:

$$f(y) \doteq \cos(y)\,, \quad \text{para } \ y\in\mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad g(x) \doteq \frac{x+5}{x^2+2x-5}\,, \quad \text{para } \ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}\right\}.$$

Observemos que:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^2+2x-5} \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x+5}{x^2}}{\dfrac{x^2+2x-5}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right]}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right]} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right] + \lim\limits_{x\to\infty}[5]\,\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{x^2}\right]}{\lim\limits_{x\to\infty}[1] + \lim\limits_{x\to\infty}[2]\,\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right] - \lim\limits_{x\to\infty}[5]\,\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{x^2}\right]}$$

$$\overset{\text{Exemplo }(8.1.1)}{=} \frac{0+5.0}{1+2.0-5.0} = 0 \ (\doteq b)$$

e

$$\lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0}\cos(y) = 1 \ (\doteq L).$$

Logo, do Corolário (8.2.3), segue que

$$\lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{x+5}{x^2+2x-5}\right) = \lim_{x\to\infty}(f\circ g)(x) \overset{\text{Corolário }(8.2.3)}{=} \lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0}\cos(y) = 1\,.$$

Observação 8.2.10

1. *Podemos fazer o Exemplo acima item 2. mais diretamente utilizando a Observação (8.2.7) item 1. (mudança de variáveis em limites no infinito):*

Como vimos acima

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^2+2x-5} = 0$$

assim

$$\lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{x+5}{x^2+2x-5}\right) \overset{\left\langle \begin{array}{l} y \doteq \frac{x+5}{x^2+2x-5} \\ x \to \infty \Rightarrow y = \frac{x+5}{x^2+2x-5} \to 0 \end{array} \right\rangle}{=} \lim_{y\to 0} \cos(y) = \cos(0) = 1.$$

2. *Suponhamos que* $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções polinomiais tais que*

$$\text{grau}(p) \leq \text{grau}(q).$$

Para calcularmos o limite no infinito da função racional $f \doteq \dfrac{p}{q}$ *(o numerador tem grau menor ou igual ao grau do denominador), basta dividirmos o numerador e o denominador por* $x^{\text{grau}(q)}$, *isto é,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{p(x)}{x^{\text{grau}(q)}}}{\dfrac{q(x)}{x^{\text{grau}(q)}}}$$

e utilizarmos as propriedades básicas de limites no infinito e o fato que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Apliquemos a Observação acima item 2. ao seguinte exercício resolvido:

Exemplo 8.2.5 *Calcular o limite no infinito, s existir, justificando a resposta:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+5}{5x^4+3x^3+x}.$$

Resolução:

Observemos que o grau do polinômio do denominador da função racional definida pelo limite acima é 4 e este é maior que o grau do polinômio do numerador (que é 2).

Logo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+5}{5x^4+3x^3+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2-2x+5}{x^4}}{\dfrac{5x^4+3x^3+x}{x^4}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3\,\dfrac{1}{x^2} - 2\,\dfrac{1}{x^3} + 5\,\dfrac{1}{x^4}}{5 + 3\,\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}} \overset{\text{Exercício}}{=} 0.$$

8.3 Assíntota horizontal da representação geométrica do gráfico de uma função real de uma variável real

Sabendo estudar limites no infinito podemos introduzir a seguinte noção:

Definição 8.3.1 *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $L \in \mathbb{R}$.

Diremos que a reta $y = L$ *é uma* **reta assíntota horizontal à representação geométrica do gráfico da função** $\underline{f}$ *se uma das situações ocorrer:*

(i)

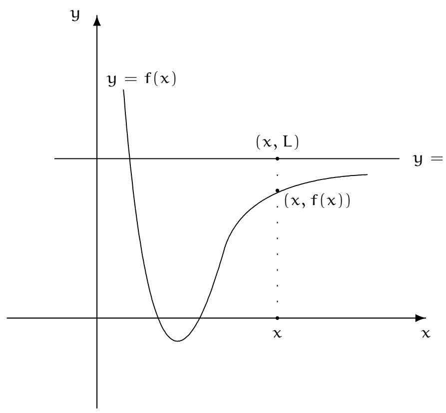
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L,$$

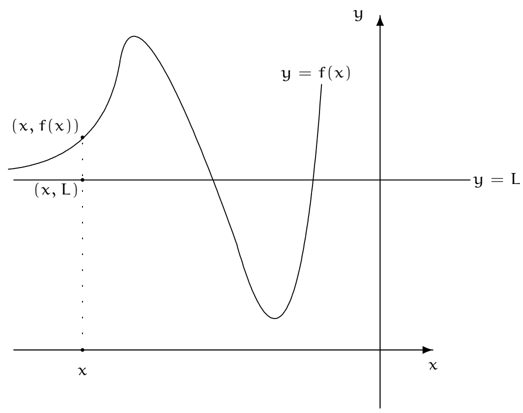
ou

(ii)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Observação 8.3.1 *Empiricamente, se* $y = L$ *é uma assíntota horizontal da representação geométrica do gráfico de uma função* $\underline{f}$ *então, geometricamente, significa que os pontos do gráfico da função, isto é* $(x, f(x))$*, aproximam-se dos pontos* (x, L) *(uma reta horizontal) quando* $\underline{x}$ *tende a* ∞*, ou quando* $\underline{x}$ *tende a* $-\infty$*, dependendo se ocorrer o item (i), ou o item (ii), respectivamente (as figuras abaixo ilustram as situações acima).*





Com isto podemos resolver o:

Exemplo 8.3.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{1+x^2}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Encontre, se existirem, as retas assíntotas horizontais da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.

Resolução:

Para isto basta calcularmos, se existirem, os limites

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Observemos que, se $x \geq 0$, segue que

$$h(x) \doteq 0 \leq f(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2} \doteq g(x).$$

Como

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} 0 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right)\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right) = 0.0 = 0$$

segue, do Teorema do Confronto para Limites no Infinito, que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Logo a reta

$$y = 0$$

será uma reta assíntota horizontal do gráfico da função $\underline{f}$ (quando $x \to \infty$).

De modo semelhante mostra-se que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

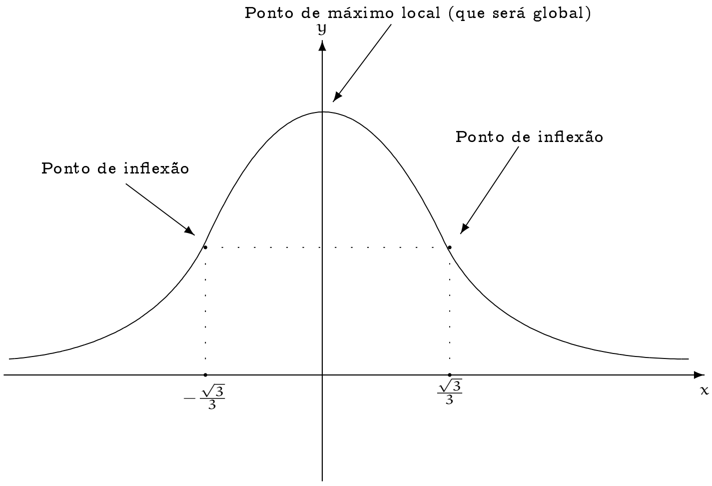
Logo a reta

$$y = 0$$

será uma reta assíntota horizontal do gráfico da função $\underline{f}$ (quando $x \to -\infty$).

Com isto, e com as técnicas desenvolvidas no capítulo anterior, podemos traçar o gráfico da função $\underline{f}$, que é ilustrado na figura abaixo.

Será deixado como exercício para o leitor aplicar as técnicas desenvolvidas anteriormente para obter os pontos extremos locais e o estudo da concavidade da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$)



8.4 Motivação e definições de limites infinitos

Nesta seção trataremos dos denominados **limites infinitos**.

Para motivar, consideremos $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{x^2}, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

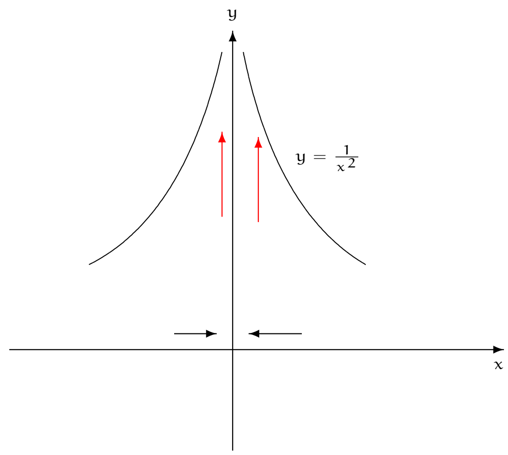
Observemos que quando a variável $\underline{x}$ aproxima-se de $x = 0$ os valores da função $\underline{f}$ (isto é, $f(x)$) crescem, ilimitamente.

A tabela abaixo exemplifica essa situação:

x	$f(x)$
1	$\frac{1}{1^2} = 1$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 9$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = 100$
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{\left(\frac{1}{100}\right)^2} = 10000$
$\downarrow$	$\downarrow$
0^+	∞

x	$f(x)$
-1	$\frac{1}{(-1)^2} = 1$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 4$
$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = 9$
$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{\left(-\frac{1}{10}\right)^2} = 100$
$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{\left(-\frac{1}{100}\right)^2} = 10000$
$\downarrow$	$\downarrow$
0^-	∞

Neste caso diremos que $f(x)$ tende a ∞ quando $\underline{x}$ tende a zero.
Do ponto de vista da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ temos a seguinte situação:



Mais especificamente temos a:

Definição 8.4.1 *Sejam* A *é um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, $a \in A$ *e* $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *uma função. Diremos que o* **limite de** $f(x)$**, quando** $\underline{x}$ **tende a** $\underline{a}$**, é** ∞, *denotando por*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

se dado $C > 0$, *podemos encontrar* $\delta > 0$ *tal que*

$$\textit{se} \quad 0 < |x - a| < \delta\,,\ x \in A\,, \quad \textit{teremos} \quad f(x) > C.$$

De modo semelhante, diremos que o **limite de $f(x)$, quando $\underline{x}$ tende a $\underline{a}$, é $-\infty$**, *denotando por*

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$

se dado $C > 0$, *podemos encontrar* $\delta > 0$ *tal que*

$$\textit{se} \quad 0 < |x - a| < \delta\,, x \in A\,, \quad \textit{teremos} \quad f(x) < -C.$$

Observação 8.4.1

1. *A definição acima nos diz que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

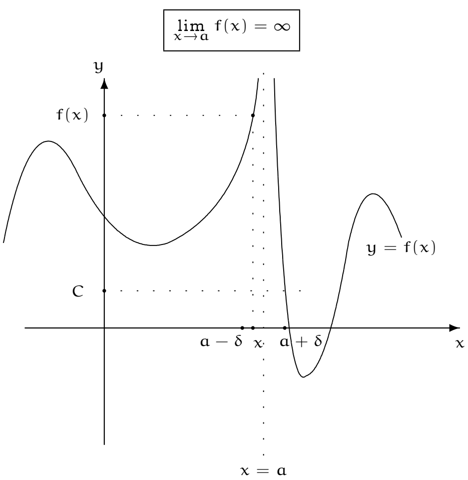
   se, e somente se, $f(x)$ *fica tão grande quanto se queira, desde que* $\underline{x}$ *esteja suficientemente próximo de* $\underline{a}$.

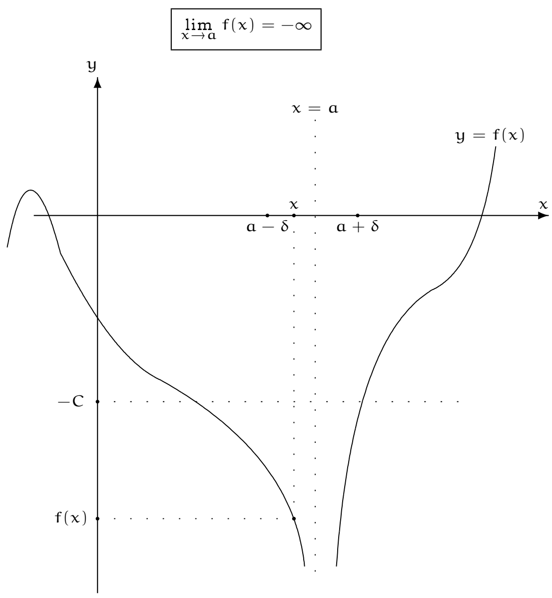
   De modo análogo temos uma caracterização para

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

2. *Na definição acima, diremos que* **$f(x)$ tende a ∞ (respectivamente, $-\infty$), quando $\underline{x}$ tende a $\underline{a}$**.

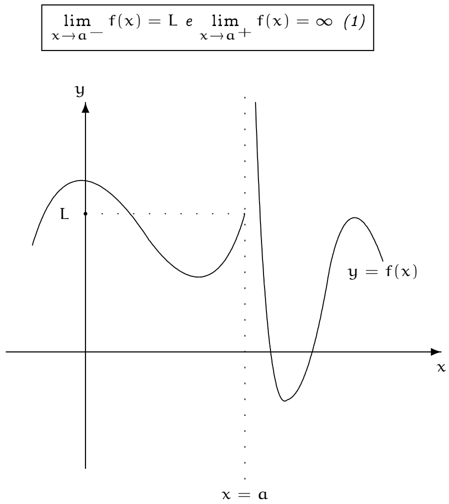
3. *Nas situações acima as representações dos gráficos das funções envolvidas, perto do ponto* $x = a$ *poderá nos fornecer as seguites figuras:*

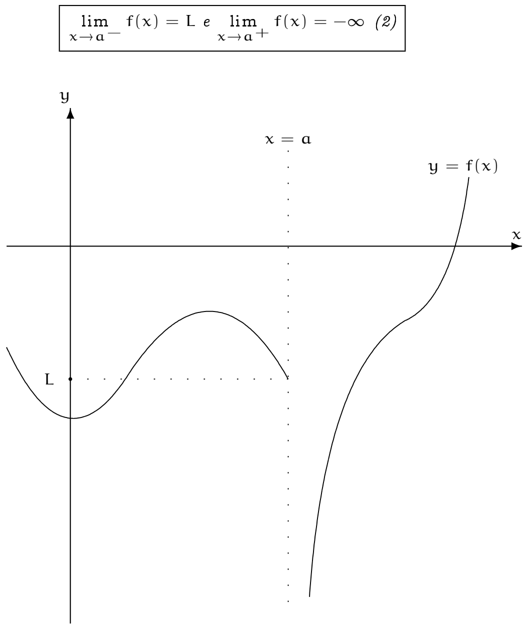




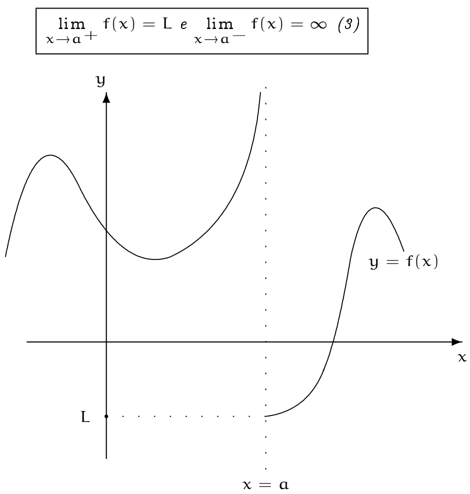
4. Podemos ter outros casos de limites infinitos, como ilustram as figuras abaixo:

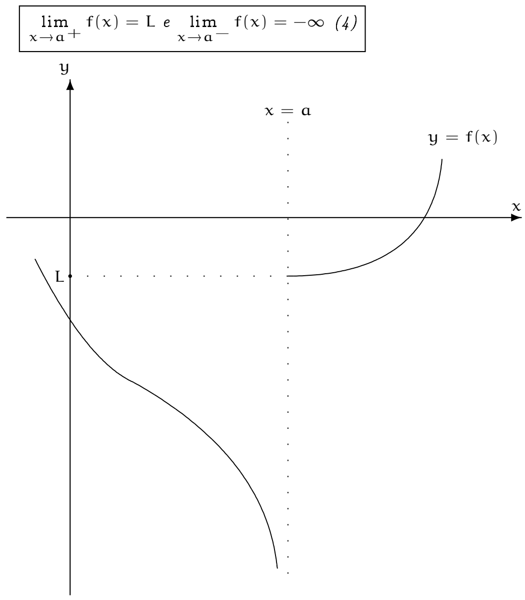
(a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ *(1)* *ou* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ *(2):*



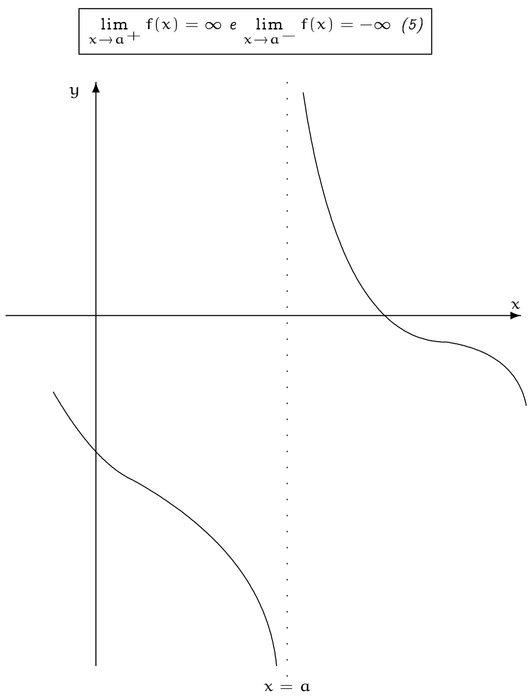


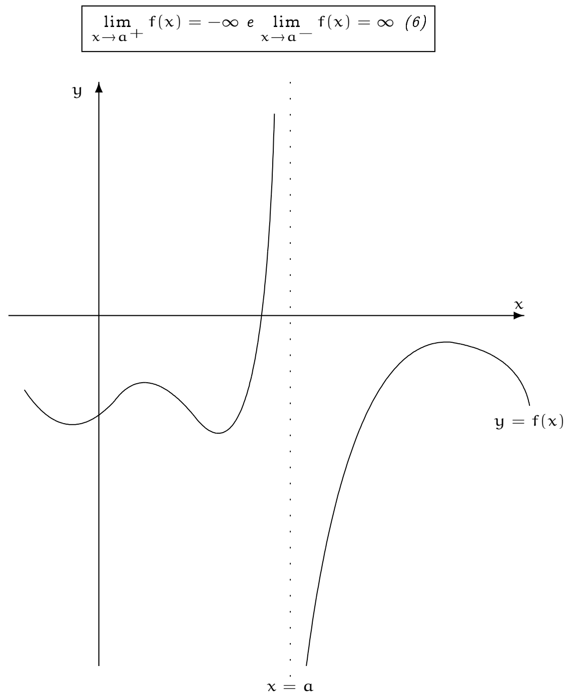
(b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ *(3)* *ou* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ *(4):*





(c) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ *(5)* *ou* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ *(6):*





5. *Além destes temos os casos*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

A seguir introduziremos as definições para cada uma das situações acima descritas pelas correspondentes figuras acima.

Começaremos pelos limites laterais infinitos, a saber:

Definição 8.4.2 *Sejam* A *é um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, $a \in A$ *e* $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Diremos que o **limite de $f(x)$ quando $\underline{x}$ tende a $\underline{a}$, pela direita de $\underline{a}$, é ∞**, *denotando por*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty\,,$$

se dado $C > 0$, *podemos encontrar* $\delta > 0$ *tal que*

$$\textit{se} \quad 0 < x - a < \delta\,,\, x \in A\,, \quad \textit{teremos} \quad f(x) > C.$$

De modo semelhante, diremos que o **limite de $f(x)$ quando $\underline{x}$ tende a $\underline{a}$, pela direita $\underline{a}$, é $-\infty$**, *denotando por*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty\,,$$

se dado $C > 0$, *podemos encontrar* $\delta > 0$ *tal que*

$$\textit{se} \quad 0 < x - a < \delta\,,\, x \in A\,, \quad \textit{teremos} \quad f(x) < -C.$$

Diremos que o **limite de $f(x)$ quando $\underline{x}$ tende a $\underline{a}$, pela esquerda de $\underline{a}$, é ∞**, *denotando por*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty\,,$$

se dado $C > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$se \quad -\delta < x - a < 0\,, x \in A\,, \quad termos \quad f(x) > C.$$

De modo semelhante, diremos que o **limite de $f(x)$ quando $\underline{x}$ tende a $\underline{a}$, pela esquerda de $\underline{a}$, é $-\infty$**, *denotando por*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty\,,$$

se dado $C > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$se \quad -\delta < x - a < 0\,, x \in A\,, \quad teremos \quad f(x) < -C.$$

Observação 8.4.2

1. *Observemos que na definição de limite infinito pela direita (respectivamente, pela esquerda) a função pode estar definida somente para valores maiores (respectivamente, menores) que $\underline{a}$, isto é, consideraremos somente $x > a$ (respectivamente, $x < a$).*

2. *As definições acima caracterizam os comportamentos das funções (1), (2), (3), (4), (5) e (6), das figuras acima.*

E finalmente para limites infinitos no infinito temos a:

Definição 8.4.3 *Seja $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função.*
Diremos que o **limite de $f(x)$ quando $\underline{x}$ tende a ∞ é ∞**, *denotando por*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty\,,$$

se dado $C > 0$, podemos encontrar $K > 0$, com $K > a$, tal que

$$se \quad x > K\,, \quad teremos \quad f(x) > C.$$

De modo semelhante, diremos que o **limite de $f(x)$ quando $\underline{x}$ tende a ∞ é $-\infty$**, *denotando por*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty\,,$$

se dado $C > 0$, podemos encontrar $K > 0$, como $K > a$, tal que

$$se \quad x > K\,, \quad teremos \quad f(x) < -C.$$

Temos também a:

Definição 8.4.4 *Seja $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ uma função.*
Diremos que o **limite de $f(x)$ quando $\underline{x}$ tende a $-\infty$ é ∞**, *denotando por*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty\,,$$

se dado $C > 0$, podemos encontrar $K > 0$, com $-K < b$, tal que

$$se \quad x < -K\,, \quad teremos \quad f(x) > C.$$

De modo semelhante, diremos que o **limite de $f(x)$ quando $\underline{x}$ tende a $-\infty$ é $-\infty$**, *denotando por*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\,,$$

se dado $C > 0$, podemos encontrar $K > 0$, com $-K < b$, tal que

$$\textit{se} \quad x < -K\,, \quad \textit{teremos} \quad f(x) < -C.$$

A seguir consideraremos alguns exemplos:

Exemplo 8.4.1 *Consideremos $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{x}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Mostre que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty \quad e \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty.$$

Resolução:

Mostraremos, primeiramente, que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty\,.$$

De fato, dado $C > 0$, consideremos $\delta \in \mathbb{R}$ como sendo

$$\delta \doteq \frac{1}{C}.$$

Assim teremos que

$$\frac{1}{\delta} = C. \tag{8.30}$$

Logo,

$$\text{se} \quad 0 < x - 0 < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad f(x) = \frac{1}{x} \overset{0<x<\delta}{>} \frac{1}{\delta} \overset{(8.30)}{=} C,$$

mostrando, pela definição, que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty.$$

De modo semelhante temos que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty\,.$$

De fato, dado $C > 0$, consideremos $\delta \in \mathbb{R}$ como sendo

$$\delta \doteq \frac{1}{C}.$$

Assim teremos que

$$\frac{1}{\delta} = C. \tag{8.31}$$

Logo,

$$\text{se} \quad -\delta < x - 0 < 0\,, \quad \text{teremos} \quad f(x) = \frac{1}{x} \overset{-\delta<x<0}{<} \frac{1}{-\delta} \overset{(8.31)}{=} -C,$$

mostrando, pela definição, que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty.$$

O resultado a seguir pode ser muito útil no estudo de limites infinitos.

Proposição 8.4.1 *Sejam* $b \in \mathbb{R}$, A *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, $a \in A$ *e* $f, g : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *funções.*

1. *Se existe o limite* $\lim_{x \to a} f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \quad f(x) \neq 0\,, \text{ para } x \neq A \setminus \{a\}, \quad \text{então} \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{|f(x)|} = \infty.$$

2. *Se existem os limites* $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} g(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \neq 0 \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0, \quad g(x) \neq 0\,, \text{ para } x \neq A \setminus \{a\}, \quad \text{então} \quad \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \infty.$$

3. *Se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

então existe o limite $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)}$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0\,.$$

4. *Se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty\,, \quad \text{então} \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

5. *Se existe o limite* $\lim_{x \to a} f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

então existe o limite $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

6. *Se existe o limite*$\lim_{x \to a} f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty$$

então existe o limite $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Demonstração:

De 1.:

Dado $C > 0$, se tomarmos

$$\varepsilon \doteq \frac{1}{C} > 0\,,$$

como existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0,$$

segue que podemos encontrar $\delta > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad 0 < |f(x)| < \frac{1}{C}, \tag{8.32}$$

ou seja, se

$$0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad \frac{1}{|f(x)|} \overset{(8.32)}{>} C,$$

mostrando que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{|f(x)|} = \infty$.

<u>De 2.:</u>

Dado $\varepsilon \doteq \dfrac{|b|}{2} > 0$ (pois $b \neq 0$), como existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

segue que podemos encontrar $\delta_1 > 0$ tal que, se

$$0 < |x - a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - b| < \varepsilon = \frac{b}{2},$$

implicando que

$$|b| - |f(x)| \leq |f(x) - b| < \frac{|b|}{2},$$

e com isto obteremos, para

$$0 < |x - a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad \frac{|b|}{2} < |f(x)|. \tag{8.33}$$

Dado $C > 0$, se tomarmos

$$\varepsilon' \doteq \frac{|b|}{2C} > 0\,,$$

como existe o limite $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ e

$$\lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

segue que podemos encontrar $\delta_2 > 0$ tal que, se

$$0 < |x - a| < \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad |g(x)| < \varepsilon' = \frac{2}{C.|b|}. \tag{8.34}$$

Portanto, se tomarmos

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0\,,$$

segue que se

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{segue que} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \;\; \text{e} \;\; 0 < |x - a| < \delta_2$$

o que implicará que

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \overset{(8.33),(8.34)}{>} \frac{|b|}{2} . \frac{1}{\frac{|b|}{2C}} = C,$$

mostrando que, $\lim\limits_{x \to a} \left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| = \infty$.

<u>De 3.:</u>

Dado $\varepsilon > 0$, se tomarmos

$$C \doteq \frac{1}{\varepsilon} > 0\,,$$

como $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, segue que podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, se

$$0 < |x-a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad f(x) > C = \frac{1}{\varepsilon}, \tag{8.35}$$

ou seja, se

$$0 < |x-a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| = \left|\frac{1}{f(x)}\right| \overset{f(x)>0}{=} \frac{1}{f(x)} \overset{(8.35)}{<} \frac{1}{C} = \varepsilon,$$

mostrando que $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

De 4.:

Dado $\varepsilon > 0$, se tomarmos

$$C \doteq \frac{1}{\varepsilon} > 0\,,$$

como $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, segue que podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, se

$$0 < |x-a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad f(x) < -C = -\frac{1}{\varepsilon}, \tag{8.36}$$

ou seja, se

$$0 < |x-a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| = \left|\frac{1}{f(x)}\right| \overset{f(x)<0}{=} \frac{1}{-f(x)} \overset{(8.36)}{<} \frac{1}{C} = \varepsilon,$$

mostrando que $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

De 5.:

Se $b = 0$ teremos

$$\lim_{x\to a} f(x) = b = 0\,.$$

Como

$$\lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

segue, do item 3. acima, que

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0\,.$$

Logo, das propriedades básicas de limite temos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\left[f(x).\frac{1}{g(x)}\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right].\left[\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}\right] = 0.0 = 0.$$

Se $b \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$, se tomarmos

$$\varepsilon' \doteq \frac{|b|}{2} > 0$$

(pois $b \neq 0$), como existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ e

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

segue que podemos encontrar $\delta_1 > 0$ tal que se

$$0 < |x-a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - b| < \varepsilon' = \frac{b}{2},$$

implicando que

$$|f(x)| - |b| \leq |f(x) - b| < \frac{|b|}{2},$$

e com isto obteremos, se

$$0 < |x - a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x)| < \frac{|b|}{2}. \tag{8.37}$$

Se tomarmos

$$C \doteq \frac{|b|}{2\varepsilon} > 0\,,$$

como

$$\lim_{x \to a} g(x) = \infty\,,$$

segue que podemos qencontrar $\delta_2 > 0$ tal que, se

$$0 < |x - a| < \delta_2\,, \quad \text{terermos} \quad g(x) > C = \frac{|b|}{2\varepsilon}. \tag{8.38}$$

Portanto, se tomarmos

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$$

segue que, se

$$0 < |x - a| < \delta \leq \delta_1, \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \overset{g(x)>0}{=} \frac{|f(x)|}{g(x)} \overset{(8.37),(8.38)}{<} \frac{|b|}{2} \cdot \frac{1}{\frac{|b|}{2\varepsilon}} = \varepsilon,$$

mostrando que $\lim\limits_{x \to a} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = 0.$

De 6.:

A demonstração do caso $b = 0$ é semelhante a correspondente do item 5. acima e a sua redação será deixada como exercício para o leitor.

Se $b \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$, se tomarmos

$$\varepsilon' \doteq \frac{|b|}{2} > 0\,,$$

(pois $b \neq 0$), como existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

segue que podemos encontrar $\delta_1 > 0$ tal que, se

$$0 < |x - a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - b| < \varepsilon' = \frac{b}{2},$$

implicando que

$$|f(x)| - |b| \leq |f(x) - b| < \frac{|b|}{2},$$

e com isto obteremos, se

$$0 < |x - a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x)| < \frac{|b|}{2}. \tag{8.39}$$

Se tomarmos

$$C \doteq \frac{|b|}{2\varepsilon} > 0\,,$$

como

$$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty\,,$$

segue que podemos encontrar $\delta_2 > 0$ tal que, se

$$0 < |x - a| < \delta_2\,, \quad \text{então} \quad g(x) < -C = -\frac{|b|}{2\varepsilon}.$$

Observemos que se

$$0 < |x - a| < \delta_2,\,,$$

teremos

$$g(x) < -C = -\frac{|b|}{2\varepsilon} < 0 \quad \text{isto é,} \quad -g(x) > \frac{|b|}{2\varepsilon} > 0 \quad \text{ou ainda,} \quad \frac{1}{-g(x)} < \frac{1}{\frac{|b|}{2\varepsilon}} = \frac{2\varepsilon}{|b|}. \tag{8.40}$$

Portanto, se tomarmos

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0\,,$$

segue que, se

$$0 < |x - a| < \delta \le \delta_1, \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \overset{g(x)<0}{=} \frac{|f(x)|}{-g(x)} \overset{[(8.39),(8.40)]}{<} \frac{|b|}{2}.\frac{2\varepsilon}{|b|} = \varepsilon,$$

mostrando que $\lim\limits_{x \to a} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = 0.$

□

Observação 8.4.3

1. *Vale a Proposição acima substituindo-se $x \to a$ pelos limites laterais (isto é, $x \to a^+$ ou $x \to a^-$) ou ainda pelos limites no infinito (isto é, $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$).*

   Os enunciados e as demonstrações destes resultado serão deixadas como exercício para o leitor.

2. *Em geral,* **não** *podemos retirar os módulos nos itens 1. e 2. da Proposição acima, sem que estudemos,* **cuidadosamente***, o sinal da função dentro do módulo, como mostra o seguinte exemplo:*

   Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

   $$f(x) \doteq x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

   Sabemos que

   $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0$$

   mas **não** *existe o limite*

   $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\,,$$

   pois (ver Exemplo (8.4.1)):

   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \textit{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

3. *Observemos que, da Proposição acima item 1., segue que:*

   $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|f(x)|} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty\,.$$

4. *A Proposição acima nos diz,* **empricamente**, *que se* $a \neq 0$ *e* $b \in \mathbb{R}$ *então*

$$\left|\frac{a}{0}\right| = \infty, \quad \frac{b}{\infty} = 0 \quad e \quad \frac{b}{-\infty} = 0.$$

Apliquemos o resultado acima para o

Exemplo 8.4.2 *Mostre que*

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

Resolução:

Consideremos a função $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq x - 1, \quad \text{para cada} \quad x \in (1, \infty).$$

Temos que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x-1) = 0.$$

Logo da Proposição acima item 1. (na verdade da versão para limites laterais dado pela Observação (8.4.3) item 1.) segue que

$$\infty = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{|f(x)|} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{|x-1|} \overset{x>1 \Rightarrow x-1>0}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1},$$

como queríamos mostrar.

A seguir daremos mais algumas propriedades de limites infinitos, a saber:

Proposição 8.4.2 *Sejam* $b \in \mathbb{R}$, A *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, $a \in A$ *e* $f, g : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *funções.*

1. *Se existe o limite* $\lim_{x \to a} f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty, \quad então \quad \lim_{x \to a} (f+g)(x) = \infty.$$

2. *Se existe o limite* $\lim_{x \to a} f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty, \quad então \quad \lim_{x \to a} (f+g)(x) = -\infty.$$

3. *Se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty, \quad então \quad \lim_{x \to a} (f+g)(x) = \infty.$$

4. *Se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty, \quad então \quad \lim_{x \to a} (f+g)(x) = -\infty.$$

5. *Se existe o limite* $\lim_{x \to a} f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b > 0 \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty \quad então \quad \lim_{x \to a} (f.g)(x) = \infty.$$

6. *Se existe o limite* $\lim_{x \to a} f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b < 0 \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty, \quad então \quad \lim_{x \to a} (f.g)(x) = -\infty.$$

7. *Se existe o limite* $\lim_{x \to a} f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b > 0 \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty\,, \quad \textit{então} \quad \lim_{x \to a} (f.g)(x) = -\infty\,.$$

8. *Se existe o limite* $\lim_{x \to a} f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b < 0 \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty\,, \quad \textit{então} \quad \lim_{x \to a} (f.g)(x) = \infty\,.$$

9. *Se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty\,, \quad \textit{então} \quad \lim_{x \to a} (f.g)(x) = \infty\,.$$

10. *Se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty \quad \textit{então} \quad \lim_{x \to a} (f.g)(x) = -\infty\,.$$

11. *Se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty \quad \textit{então} \quad \lim_{x \to a} (f.g)(x) = \infty\,.$$

Demonstração:

De 1.:

Dado $C > 0$, como existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R},$$

tomando-se

$$\varepsilon \doteq \frac{|b|}{2} > 0$$

existirá $\delta_1 > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}.$$

Mas

$$|b| - |f(x)| \overset{\text{Des. triangular}}{\leq} |f(x) - b| < \frac{|b|}{2}$$

então, se

$$0 < |x - a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x)| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}. \tag{8.41}$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, existirá $\delta_2 > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad g(x) > C. \tag{8.42}$$

Logo tomando-se

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0\,,$$

temos que, se

$$0 < |x - a| < \delta \leq \delta_1, \delta_2\,, \quad \text{segue que} \quad f(x) + g(x) \overset{(8.41),\,(8.42)}{>} \frac{|b|}{2} + C \geq C,$$

mostrando que $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \infty$.

De 2.:

Dado $C > 0$, como existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R},$$

tomando-se

$$\varepsilon \doteq 1,$$

existirá $\delta_1 > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta_1, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - b| < \varepsilon = 1.$$

Mas

$$|f(x)| - |b| \leq |f(x) - b| < 1, \quad \text{então, se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1, \quad \text{teremos} \quad |f(x)| < |b| + 1. \tag{8.43}$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, dado

$$C' \doteq C + |b| + 1 > 0,$$

existirá $\delta_2 > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta_2, \quad \text{teremos} \quad g(x) < C' = -(C + |b| + 1). \tag{8.44}$$

Logo, tomando-se

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0,$$

temos que se

$$0 < |x - a| < \delta \leq \delta_1, \delta_2, \quad \text{teremos} \quad f(x) + g(x) \overset{(8.43),(8.44)}{<} (|b| + 1) - (C + |b| + 1) = -C,$$

mostrando que $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = -\infty$.

<u>De 3.:</u>

Dado $C > 0$, como $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, tomando-se

$$C' = \frac{C}{2} > 0,$$

existirá $\delta_1 > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta_1, \quad \text{teremos} \quad f(x) > C' = \frac{C}{2}. \tag{8.45}$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, dado $C'' \doteq \frac{C}{2} > 0$, existirá $\delta_2 > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta_2, \quad \text{teremos} \quad g(x) > C'' = \frac{C}{2}. \tag{8.46}$$

Logo, tomando-se

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0,$$

temos que se

$$0 < |x - a| < \delta \leq \delta_1, \delta_2, \quad \text{teremos} \quad f(x) + g(x) \overset{(8.45),(8.46)}{>} \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = C,$$

mostrando que $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \infty$.

De 4.:
Dado $C > 0$, como $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, tomando-se

$$C' = \frac{C}{2} > 0\,,$$

existirá $\delta_1 > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad f(x) < -C' = -\frac{C}{2}. \tag{8.47}$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, dado

$$C'' \doteq \frac{C}{2} > 0\,,$$

existirá $\delta_2 > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad g(x) < -C'' = -\frac{C}{2}. \tag{8.48}$$

Logo, tomando-se

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0\,,$$

temos que se

$$0 < |x - a| < \delta \le \delta_1, \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad f(x) + g(x) \overset{(8.47),\,(8.48)}{<} -\frac{C}{2} - \frac{C}{2} = -C,$$

mostrando que $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = -\infty$.

De 5.:
Dado $C > 0$, como existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = b > 0$$

e $b > 0$, tomando-se

$$\varepsilon \doteq \frac{b}{2} > 0\,,$$

existirá $\delta_1 > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - b| < \varepsilon = \frac{b}{2}.$$

Mas

$$\underbrace{|b|}_{=b} - |f(x)| \le |f(x) - b| < \frac{b}{2}\,.$$

Logo, se

$$0 < |x - a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x)| > b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}. \tag{8.49}$$

Como $b > 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ existirá $\delta_2 > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad g(x) > \frac{2C}{b}. \tag{8.50}$$

Logo, tomando-se

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$$

temos que se

$$0 < |x - a| < \delta \leq \delta_1, \delta_2\,, \quad \text{segue que} \quad f(x).g(x) \overset{(8.4),(8.50)}{>} \frac{|b|}{2}.\frac{2C}{b} = C,$$

mostrando que $\lim\limits_{x \to a}(f.g)(x) = \infty$.

De 6.:

Dado $C > 0$, como existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = b < 0,$$

tomando-se

$$\varepsilon \doteq \frac{|b|}{2} > 0\,,$$

existirá $\delta_1 > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta_1\,, \quad \text{segue que} \quad |f(x) - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}.$$

Mas

$$|b| - |f(x)| \leq |b - f(x)| = |f(x) - b| < \frac{|b|}{2}\,.$$

Logo, se

$$0 < |x - a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x)| > \frac{|b|}{2}.$$

Como $b < 0$, do Teorema da Conservação do Sinal para Limites, podemos supor que $f(x) < 0$, para $0 < |x - a| < \delta_1$, assim, se

$$0 < |x - a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad f(x) < -\frac{|b|}{2}\,, \quad \text{ou seja,} \quad -f(x) > \frac{|b|}{2} > 0 \tag{8.51}$$

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ existirá $\delta_2 > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{segue que} \quad g(x) < -\frac{2K}{|b|} < 0, \quad \text{ou seja,} \quad -g(x) > \frac{2C}{|b|} > 0. \tag{8.52}$$

Logo tomando-se

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0\,,$$

temos que se

$$0 < |x - a| < \delta \leq \delta_1, \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad f(x).g(x) \overset{(8.51),(8.52)}{>} \frac{|b|}{2}.\frac{2C}{|b|} = C,$$

mostrando que $\lim\limits_{x \to a}(f.g)(x) = \infty$.

De 7.:

Dado $C > 0$, como existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = b > 0,$$

tomando-se

$$\varepsilon \doteq \frac{b}{2} > 0\,,$$

existirá $\delta_1 > 0$ tal que se

$$0 < |x-a| < \delta_1\,, \quad \text{segue que} \quad |f(x) - b| < \varepsilon = \frac{b}{2}.$$

Mas

$$|f(x)| - |b| \leq |f(x) - b| < \frac{b}{2}\,.$$

Logo para

$$0 < |x-a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x)| < |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} \overset{[b>0]}{=} \frac{b}{2}.$$

Como $b > 0$ segue, do Teorema da Conservação do Sinal para Limites, que podemos supor $f(x) > 0$, para $0 < |x-a| < \delta_1$, assim se

$$0 < |x-a| < \delta_1\,, \quad \text{segue que} \quad 0 < f(x) < \frac{b}{2}. \tag{8.53}$$

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ existirá $\delta_2 > 0$ tal que se

$$0 < |x-a| < \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad g(x) < -\frac{2C}{b}. \tag{8.54}$$

Logo tomando-se

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0\,,$$

temos que se

$$0 < |x-a| < \delta \leq \delta_1, \delta_2\,, \quad \text{segue que} \quad f(x).g(x) \overset{(8.53),(8.54)}{<} \frac{b}{2}.\left(-\frac{2C}{b}\right) = -C,$$

mostrando que $\lim\limits_{x \to a}(f.g)(x) = -\infty$.

De 8.:

Dado $C > 0$, como existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = b < 0,$$

tomando-se

$$\varepsilon \doteq \frac{|b|}{2} > 0\,,$$

existirá $\delta_1 > 0$ tal que se

$$0 < |x-a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x) - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}.$$

Mas

$$|b| - |f(x)| \leq |f(x) - b| < \frac{|b|}{2}\,.$$

Logo, para

$$0 < |x-a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad |f(x)| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

Como $b < 0$ segue, do Teorema da Conservação do Sinal para Limites, que podemos supor $f(x) < 0$, para $0 < |x-a| < \delta_1$, assim se

$$0 < |x-a| < \delta_1\,, \quad \text{segue que} \quad f(x) < -\frac{|b|}{2}, \quad \text{ou seja,} \quad -f(x) > \frac{|b|}{2} > 0. \tag{8.55}$$

Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ existirá $\delta_2 > 0$ tal que se

$$0 < |x-a| < \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad g(x) < -\frac{2C}{|b|} \quad \text{ou seja,} \quad -g(x) > \frac{2C}{|b|} > 0. \tag{8.56}$$

Logo tomando-se

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0\,,$$

temos que se

$$0 < |x-a| < \delta \le \delta_1, \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad f(x).g(x) \overset{(8.55),(8.56)}{>} \frac{|b|}{2}.\frac{2C}{|b|} = C,$$

mostrando que $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x) = \infty$.

De 9.:

Dado $C > 0$, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, tomando-se

$$C' = \sqrt{C} > 0\,,$$

existirá $\delta_1 > 0$ tal que se

$$0 < |x-a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad f(x) > C' = \sqrt{C}. \tag{8.57}$$

Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, dado

$$C'' \doteq \sqrt{C} > 0\,,$$

existirá $\delta_2 > 0$ tal que se

$$0 < |x-a| < \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad g(x) > C'' = \sqrt{C}. \tag{8.58}$$

Logo tomando-se

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$$

temos que se

$$0 < |x-a| < \delta \le \delta_1, \delta_2\,, \quad \text{segue que} \quad f(x).g(x) \overset{(8.57),(8.58)}{>} \sqrt{C}.\sqrt{C} = C,$$

mostrando que $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x) = \infty$.

De 10.:

Dado $C > 0$, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, tomando-se

$$C' = \sqrt{C} > 0\,,$$

existirá $\delta_1 > 0$ tal que se

$$0 < |x-a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad f(x) > C' = \sqrt{C} > 0\,. \tag{8.59}$$

Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, dado

$$C'' \doteq \sqrt{C} > 0\,,$$

existirá $\delta_2 > 0$ tal que se

$$0 < |x-a| < \delta_2\,, \quad \text{segue que} \quad g(x) < -C'' = -\sqrt{C} < 0 \tag{8.60}$$

Logo, tomando-se

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0\,,$$

temos que se

$$0 < |x-a| < \delta \leq \delta_1, \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad f(x).g(x) \overset{(8.59),(8.60)}{<} \sqrt{C}.\left(-\sqrt{C}\right) = -C,$$

mostrando que $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x) = -\infty$.

De 11.:

Dado $C > 0$, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, tomando-se

$$C' = \sqrt{C} > 0$$

existirá $\delta_1 > 0$ tal que se

$$0 < |x-a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad f(x) < -C' = -\sqrt{C} \quad \text{ou seja,} \quad -f(x) > C' = \sqrt{C}\,. \tag{8.61}$$

Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, dado

$$C'' \doteq \sqrt{C} > 0\,,$$

existirá $\delta_2 > 0$ tal que se

$$0 < |x-a| < \delta_2\,, \quad \text{segue que} \quad g(x) < -C'' = -\sqrt{C} \quad \text{ou seja,} \quad -g(x) > -C'' = -\sqrt{C}\,. \tag{8.62}$$

Logo, tomando-se

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$$

temos que se

$$0 < |x-a| < \delta \leq \delta_1, \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad f(x).g(x) = [-f(x)].[-g(x)] \overset{(8.61),(8.62)}{>} \left(-\sqrt{C}\right).\left(-\sqrt{C}\right) = C,$$

mostrando que $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x) = \infty$.

□

Observação 8.4.4

1. *Valem as versões análogas da Proposição acima para limites laterais (isto é, $x \to a^+$ ou $x \to a^-$) e para limites no infinito (isto é, $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$).*

   Deixaremos como exercício para o leitor os enunciados e as correspondentes demonstrações destes resultados.

2. *A Proposição acima nos diz,* **empiricamente**, *que se*

$$b \in \mathbb{R}, \quad a \in (0, \infty), \quad e \quad c \in (-\infty, 0)$$

   então

$$\begin{array}{rrrr} b + \infty = \infty, & b - \infty = -\infty, & \infty + \infty = \infty, & -\infty - \infty = -\infty, \\ a.\infty = \infty, & a.(-\infty) = -\infty, & c.\infty = -\infty, & c.(-\infty) = \infty, \\ \infty.\infty = \infty, & \infty.(-\infty) = -\infty & (-\infty).(-\infty) = \infty. & \end{array}$$

3. *Vale observar que, nas situações acima,* **não** *aparecem as expressões do tipo:*

$$\frac{0}{0}\,,\quad \frac{\infty}{\infty}\,,\quad \frac{\infty}{-\infty}\,,\quad \infty-\infty\,,\quad 0.\infty\,,\quad 0.(-\infty)\ . \tag{8.63}$$

Em princípio, esperaríamos que o resultado destas expressões fossem bem determinados, mas isto pode **não** *ocorrer, como mostram os exemplos a seguir:*

(a) *Suponhamos que* $f, g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ *as funções dadas por:*

$$f(x) \doteq \frac{1}{x^2}\,,\quad g(x) \doteq -\frac{2}{x^2}\,,\quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

Pode-se mostrar que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty \quad e \quad \lim_{x\to 0} g(x) = -\infty.$$

A verificação destes fatos serão deixadas como exercíco para o leitor.
Observemos que

$$\lim_{x\to 0}(f+g)(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \overset{\textit{Exercício}}{=} -\infty.$$

Neste caso teríamos uma expressão do tipo:

$$\infty - \infty = -\infty.$$

(b) *Um outro exemplo seria, sejam* $f, g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *as funções dadas por:*

$$f(x) \doteq x\,,\quad g(x) \doteq \frac{1}{x^3}\,,\quad \textit{para cada} \quad x \in (0,\infty)\,.$$

Pode-se mostrar que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty.$$

A verificação destes fatos serão deixadas como exercíco para o leitor.
Observemos que

$$\lim_{x\to 0^+}(f.g)(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x\,\frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} \overset{\textit{Exercício}}{=} \infty.$$

Neste caso teríamos uma expressão do tipo:

$$0.\infty = \infty.$$

4. *Podemos obter outros exemplos para os quais os limites em questão podem nos levar a expressões do tipo:*

$$\infty - \infty = \infty\ ,\quad \infty - \infty = 0\ ,\quad 0.\infty = -\infty\,,$$

ou ainda, podemo ocorrer outros valores nas expressões acima

Deixaremos como exercício para o leitor a obtenção de tais exemplos.

5. *Limites que nos levam a expressões do tipo:*

$$\frac{0}{0}\,,\quad \frac{\infty}{\infty}\,,\quad \frac{\infty}{-\infty}\,,\quad \infty-\infty\,,\quad 0.\infty\,,\quad 0.(-\infty),$$

entre outros, serão denominados **formas indeterminadas** *e serão tratados na próxima seção.*

Como aplicação da Proposição acima temos o:

Exemplo 8.4.3 *Mostre que*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \infty.$$

Resolução:

Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ as funções dadas por:

$$f(x) \doteq x + 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g(x) \doteq \frac{1}{(x-1)^2}\,, \text{ para cada } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Deste modo temos que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2 > 0.$$

Como

$$\lim_{x \to 1}(x-1)^2 = 0$$

segue, da Proposição (8.4.1) item 1. que

$$\infty = \lim_{x \to 1} \frac{1}{|(x-1)^2|} \overset{(x-1)^2 > 0 \Rightarrow |(x-1)^2| = (x-1)^2}{=} \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} g(x).$$

Logo, da Proposição (8.4.2) item 5., segue que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1}(f.g)(x) = \infty,$$

como queríamos mostrar.

Para finalizar temos a:

Proposição 8.4.3 *(Mudança de variáveis para limites infinitos) Sejam A um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $a \in A$, $f : (b, \infty) \to \mathbb{R}$ e $g : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ funções e $L \in \mathbb{R}$.*

Suponhamos que $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ e existe o limite $\lim_{y \to \infty} f(y)$ e

$$\lim_{y \to \infty} f(y) = L\,.$$

Então o limite $\lim_{x \to a}(f \circ g)(x)$ existirá e além disso $\lim_{x \to a}(f \circ g)(x) = L$, ou seja,

$$\lim_{x \to a} f[g(x)] = \lim_{y \to \infty} f(y).$$

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como existe o limite $\lim_{y \to \infty} f(y)$ e além disso

$$\lim_{y \to \infty} f(y) = L,$$

existirá $K > 0$ tal que se

$$y > K\,, \quad \text{teremos} \quad |f(y) - L| < \varepsilon. \tag{8.64}$$

Mas

$$\lim_{x \to a} g(x) = \infty\,,$$

logo existe $\delta > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad g(x) > K. \tag{8.65}$$

Logo, se

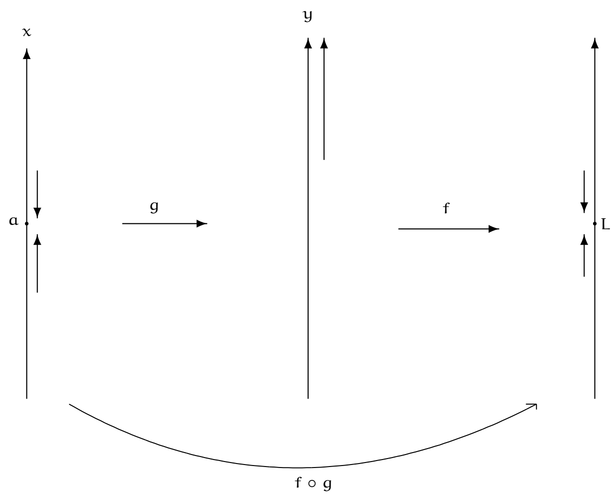
$$0 < |x - a| < \delta, \quad \text{de (8.65), segue que} \quad g(x) > K, \quad \text{e de (8.4) teremos} \quad |f[g(x)] - L| < \varepsilon,$$

completando a demonstração.

□

Observação 8.4.5

1. *Geometricamente temos:*



2. *O resultado acima nos diz como fazer uma mudança de variáveis em limites no infinito, a saber:*

$$\lim_{x \to a} f[g(x)] \left\langle \begin{array}{l} y = g(x) \\ x \to a \;\Rightarrow\; y = g(x) \to \infty \end{array} \right\rangle \underset{=}{} \lim_{y \to \infty} f(y) = L.$$

3. *O resultado acima é válido substituindo-se o limite quando $x \to a$ pelos limites laterias (isto é, para $x \to a^+$ ou para $x \to a^-$) e para limites no infinito (isto é, para $x \to \infty$ ou para $x \to -\infty$).*

   Os enunciados e as demonstrações dos mesmos serão deixados como exercício para o leitor.

Exemplo 8.4.4 *Encontre, se existir, o valor do seguinte limite:*

$$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Resolução:

Consideremos as funções $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) \doteq \frac{1}{x^2}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq e^{-y}, \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Observemos que

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} f[g(x)].$$

Mas

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \overset{\text{Exercício}}{=} \infty \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to\infty} e^{-y} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{e^y} \overset{\text{Exercício}}{=} 0.$$

Então, da Proposição acima, segue que

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} f[g(x)] \overset{\text{Proposição (8.4.3)}}{=} \lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to\infty} e^{-y} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Observação 8.4.6 *Poderíamos ter aplicado mais diretamente, a Proposição acima, a saber:*

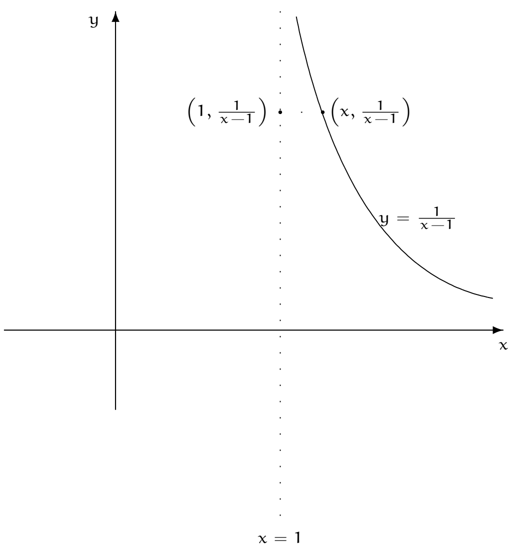
$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} \overset{\left\langle \begin{array}{l} y = -\frac{1}{x^2} \\ x \to 0 \Rightarrow \underline{y} = \frac{1}{x^2} \to \infty \end{array} \right\rangle}{=} \lim_{y\to\infty} e^{-y} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{e^y} \overset{\textit{Exercício}}{=} 0.$$

8.5 Assíntotas verticais da representação geométrica do gráfico de uma função real de uma variável real

Observação 8.5.1 *Consideremos a função* $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{x-1}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (1, \infty).$$

Neste caso observamos que quando $\underline{x}$ *tende a* 1*, pela direita de* 1 *(isto é,* $x \to 1^+$*) os pontos do gráfico da função, isto é* $(x, f(x))$*, aproximar-se-ão dos pontos da forma* $(1, f(x))$ *(ou seja, da reta vertical* $x = 1$*; veja a figura abaixo).*



Neste caso diremos que a reta $x = 1$ *é uma reta assíntota vertical da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$.

Em geral temos a:

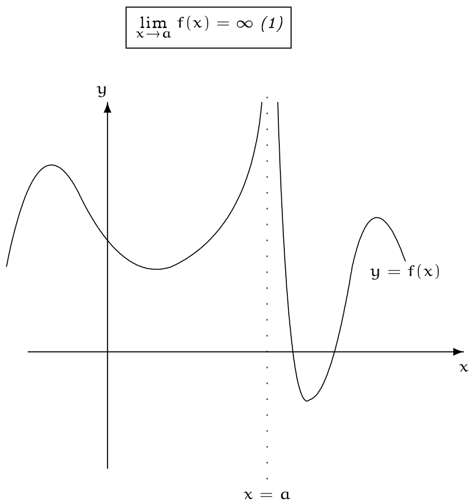
Definição 8.5.1 *Sejam* A *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, $a \in A$ *e* $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *uma função.*

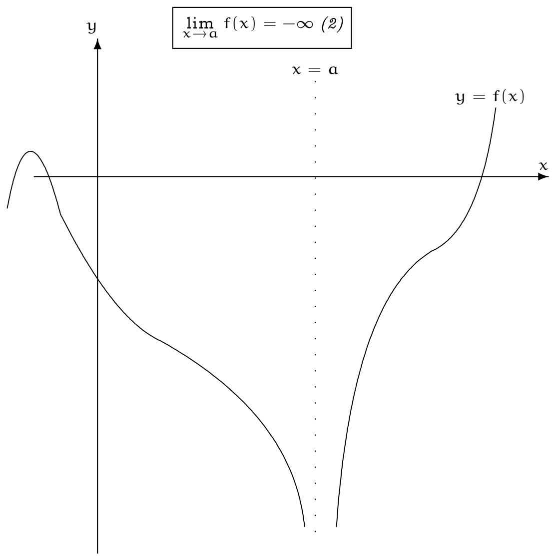
Diremos que a reta $x = a$ *é uma* **reta assíntota vertical da representação geométrica da representação geométrica do gráfico da função** $\underline{f}$ *se uma das situações abaixo ocorrer:*

1. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$;
2. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$;
3. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$;
4. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Observação 8.5.2 *Geometricamente temos as seguinte situações:*

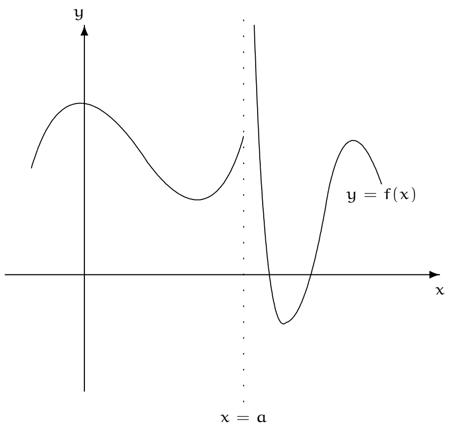
1. *Caso que:* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ *(1)* *ou* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ *(2):*



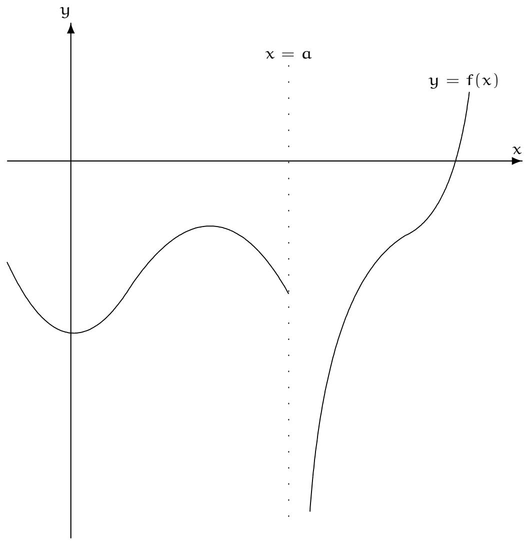


2. *Caso que:* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ *(3)* *ou* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ *(4):*

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ *(3)*

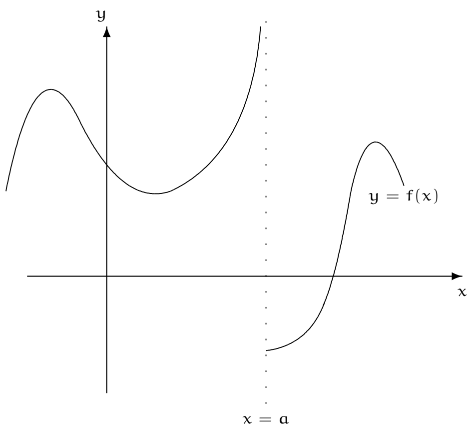


$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ *(4)*

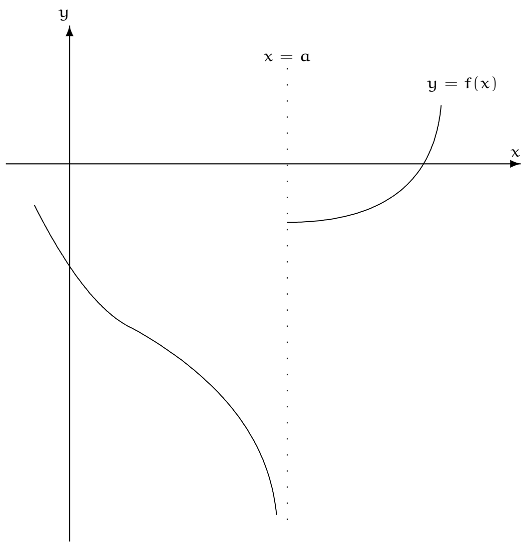


3. *Caso que:* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ *(5)* *ou* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ *(6):*

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ *(5)*

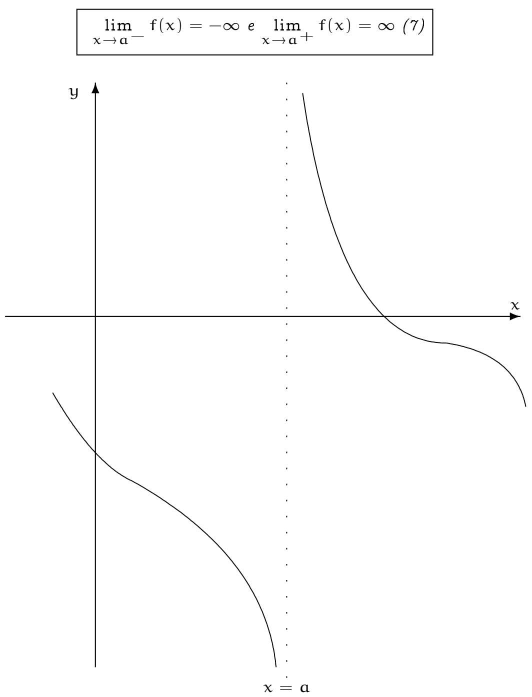


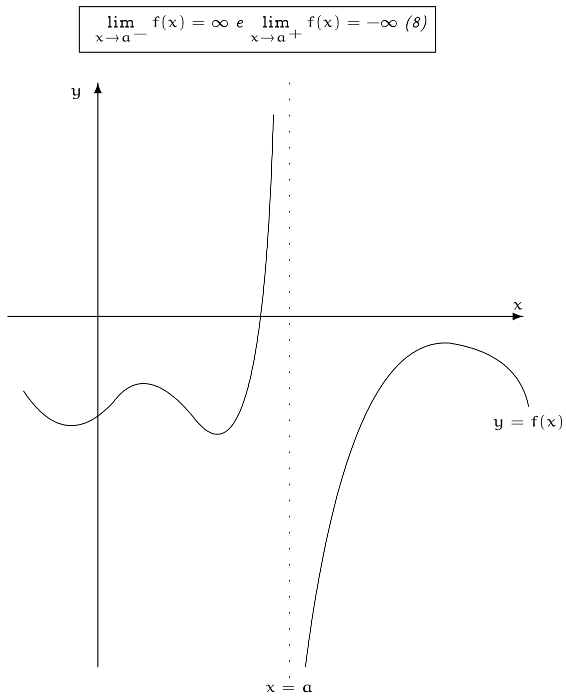
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ *(6)*



4. *Caso que:* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ *(7)* *ou* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

(8):





Com isto podemos resolver o:

Exemplo 8.5.1 *Consideremos a função* $f : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

Encontre as retas assíntotas horizontais e verticais (se existirem) à representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *.*

<u>**Resolução:**</u>

<u>Retas assíntotas horizontais:</u>

Para isto basta calcularmos os limites no infinito da função $\underline{f}$, isto é,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}} \\
&\overset{x>0 \Rightarrow x=\sqrt{x^2}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}[1]}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}[1] - \underbrace{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x^2}\right]}_{=0}}} = 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}} \\
&\overset{x<0 \Rightarrow x=-\sqrt{x^2}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}[-1]}{\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}[1] - \underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x^2}\right]}_{=0}}} = -1.
\end{aligned}
$$

Logo as retas assíntotas horizontais à representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ serão:

$$y = 1 \quad \text{e} \quad y = -1.$$

<u>Assíntotas verticais:</u>
Para isto basta encontrarmos (se possível) pontos onde o limite da função $\underline{f}$ dá ∞ ou $-\infty$.
Afirmamos que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty \tag{8.66}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty. \tag{8.67}$$

De fato, como

$$\lim_{x\to 1^+} x = 1 \neq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x^2-1} \overset{\text{Exercício}}{=} 0,$$

segue, da Proposição (8.4.1) item 2. que

$$\infty = \lim_{x\to 1^+} \left| \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right| \overset{x>1 \Rightarrow x>0,\, \sqrt{x^2-1}>0}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

mostrando (8.66).

Por outro lado, como

$$\lim_{x\to -1^-} x = -1 \neq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -1^-} \sqrt{x^2-1} \overset{\text{Exercício}}{=} 0,$$

segue, da Proposição (8.4.1) item 2. que

$$\infty = \lim_{x \to -1^-} \left| \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right| \overset{x<-1 \Rightarrow x<0,\ \sqrt{x^2-1}>0}{=} \lim_{x \to -1^-} \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}} = -\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

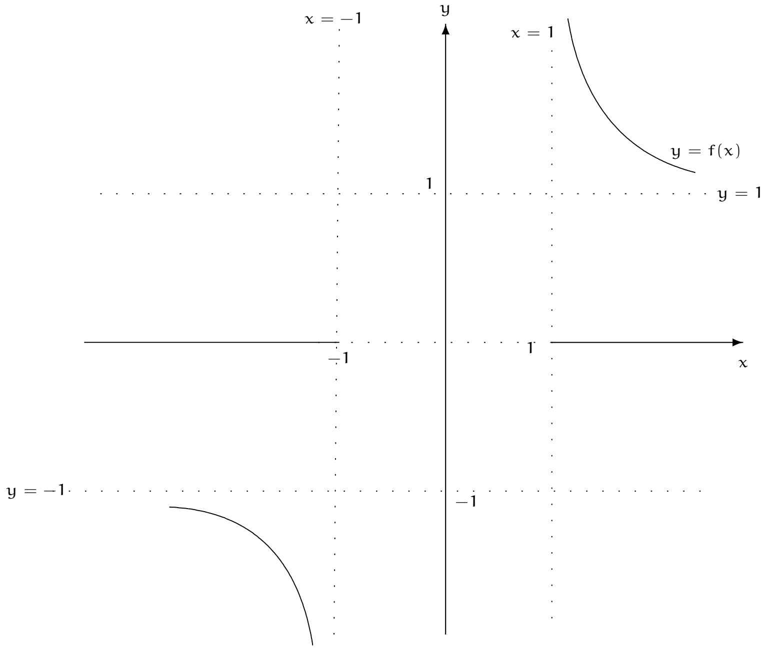
mostrando (8.67).

Logo as assíntotas verticais à representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ serão:

$$x = 1 \quad \text{e} \quad x = -1.$$

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que a função não tem máximo, nem mínimo locais, sua concavidade é voltada para cima nos pontos $(x, f(x))$ para $x \in (1, \infty)$ e voltada para baixo nos pontos $(x, f(x))$ para $x \in (-\infty, -1)$.

Com isto temos o seguinte esboço da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$:



A seguir temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 8.5.1 *Seja* $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \text{cossec}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Encontre as retas assíntotas verticais à representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *.*

Resolução:

Consideremos $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) \doteq \text{sen}(x), \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Observemos que

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \text{sen}(x) = 0.$$

Logo, da Proposição (8.4.1) item 1., segue que

$$\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{|g(x)|} \overset{0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow g(x)=\text{sen}(x)>0}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\text{sen}(x)} = \lim_{x\to 0+} \text{cossec}(x). \tag{8.68}$$

Logo podemos concluir que a reta $x = 0$ será uma assíntota vertical da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ (no caso, quando $x \to 0^+$).

De modo semelhante temos:

$$\infty = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{|g(x)|} \overset{-\frac{\pi}{2}<x<0 \Rightarrow g(x)=\text{sen}(x)<0}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{-\text{sen}(x)} = -\lim_{x\to 0^-} \text{cossec}(x). \tag{8.69}$$

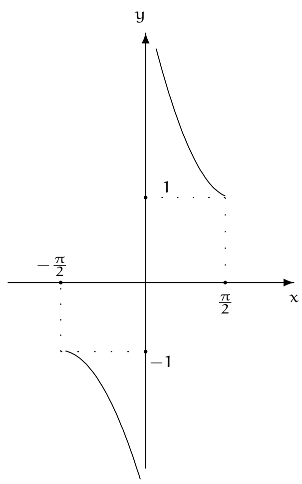
Logo podemos concluir que, novamente, a reta $x = 0$ será uma assíntota vertical da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ (no caso, quando $x \to 0^-$).

De (8.68) e (8.69) teremos que

$$\lim_{x\to 0+} \text{cossec}(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \text{cossec}(x) = -\infty.$$

Deixaremos como exercício para o leitor o estudo dos extremos locais e da concavidade da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



Observação 8.5.3 *Se considerarmos a função* $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \text{cossec}(x)\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$$

podemos mostrar que as retas assíntotas verticais da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *serão as retas verticais:*

$$x = k\pi\,, \quad \textit{para cada} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Na verdade, pode-se mostrar que para $k \in \mathbb{Z}$ *temos:*

$$\lim_{x\to 2k\pi^+} \text{cossec}(x) = \infty \quad e \quad \lim_{x\to 2k\pi^-} \text{cossec}(x) = -\infty$$

e

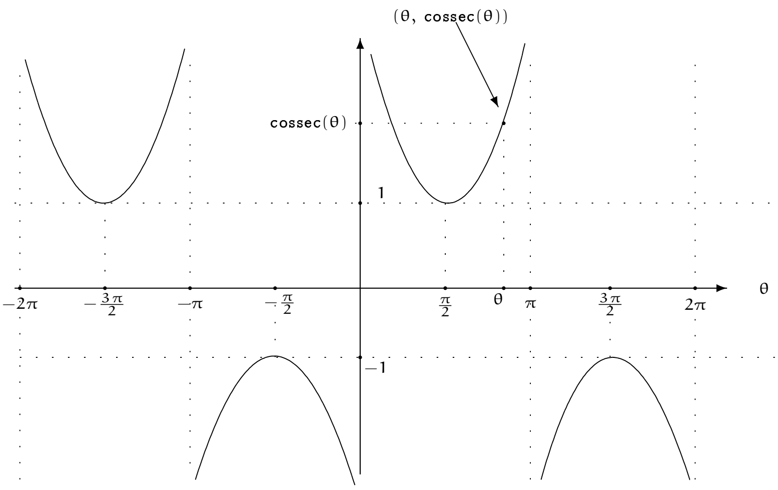
$$\lim_{x\to (2k+1)\pi^+} \text{cossec}(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x\to (2k+1)\pi^-} \text{cossec}(x) = \infty.$$

A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Como a função f é 2π-periódica segue que a representação geométrica do gráfico não possuirá retas assíntotas horizontais.

Deixaremos como exercício para o leitor o estudo dos extremos locais e da concavidade da representação geométrica do gráfico do função f.

A representação geométrica do gráfico da função f é dada pela figura abaixo:



8.6 Traçado da representação geométrica dos gráficos de funções reais de uma variável real

A seguir daremos um processo para traçarmos o gráfico de uma função real de uma variável real:

Dada uma função $f : A \to \mathbb{R}$ agiremos da seguinte forma:

1.º Pontos críticos da função f (candidatos a extremos locais):

Encontremos todos os pontos críticos das funções f, isto é, os pontos de A onde f não é diferenciável e onde a função derivada f' se anula.

Entre eles estarão todos os valores de máximo e/ou mínimo locais da função f.

Para classificá-los utilizaremos o Teste da 1.a derivada ou o Tese da 2.a derivada.

2.º Máximos e/ou mínimos locais da função f (classificação dos pontos críticos da função):

Aplicar o Teste da 1.a Derivada, ou o Teste da 2.a Derivada se a função for duas-vezes diferenciável nos pontos críticos obtidos acima, para classificar cada um dos pontos críticos obtidos no 1.º item, do ponto de vista de serem máximos ou mínimo locais da função f ;

Com isto determinamos os conjuntos onde a função f é (estritamente) crescente ou (estritamente) decrescente.

3.º Pontos críticos da função f' (candidatos a pontos de inflexão):

Encontremos todos os pontos críticos das funções f', isto é, os pontos de A onde f' não é diferenciável ou onde a função derivada segunda f'' se anula.

Entre eles estarão os pontos onde a representação geométrica do gráfico da função f poderá ter pontos de inflexão.

4.º Sinal de f'' (estudo da concavidade):

Estudando o sinal da função $\underline{f''}$ ao "passar" pelos pontos críticos da função $\underline{f'}$ obtidos no item 3.º (quando houver mudança de sinal na função $\underline{f''}$), encontraremos os pontos de inflexão da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ e os conjuntos formado pelos pontos da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ onde o gráfico é côncavo para baixo ou côncavo para cima;

5.º Assíntotas horizontais:

Se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = M \in \mathbb{R},$$

então as retas

$$y = L \quad \text{e} \quad y = M$$

serão retas assíntotas horizontais da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$;

6.º Assíntotas verticais:

Nos valores $a \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty,$$

teremos que a reta

$$x = a$$

será uma reta assíntota vertical da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$;

Com os dados acima poderemos construir um esboço da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.

Para ilustrar consideremos o:

Exemplo 8.6.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^3 - 3x^2 + 3, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Baseado no método acima obter um esboço da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *.*

Resolução:

Pontos críticos da função $\underline{f}$ (candidatos a extremos locais):

Observemos que a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$ (pois é uma função polinomial), em particular, é diferenciável em $\mathbb{R}$, assim os pontos críticos da mesma só ocorrerão nos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$f'(x) = 0.$$

Mas

$$0 = f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

logo os únicos pontos críticos da função $\underline{f}$ são:

$$x_1 \doteq 0 \quad \text{e} \quad x_2 \doteq 2.$$

Máximos ou mínimos locais da função $\underline{f}$ (classificação dos pontos críticos da função):

Como a função $\underline{f}$ é duas-vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ podemos aplicar o Teste da 2.a Derivada a cada um dos pontos críticos acima, para classificá-los do ponto de vista de serem máximo ou mínimo locais.

Mas

$$f''(x) = 6x - 6, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{para cada}$$

assim

$$f''(x_1) = f''(0) = -6 < 0 \quad \text{e} \quad f''(x_2) = f''(2) = 6.2 - 6 = 6 > 0.$$

Logo, do Teste da 2.a Derivada, segue que a função $\underline{f}$ tem um ponto máximo local em

$$x = 0, \quad \text{cujo valor é} \quad f(0) = 3,$$

e um ponto mínimo local em

$$x = 2 \quad \text{cujo valor é} \quad f(2) = -1.$$

Em particular, sabemos que o gráfico da função $\underline{f}$ será estritamente crescente em

$$(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$$

e estritamente decrescente em

$$[0, 2].$$

Para isto basta estudar o sinal da função derivada $\underline{f'}$ em cada um desses intervalos, que será deixado como exercício para o leitor.

<u>Pontos críticos da função f' (candidatos a pontos de inflexão):</u>

Como observado acima, a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$, assim os pontos críticos da função $\underline{f'}$ ocorrerão nos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$f''(x) = 0,$$

a saber:

$$0 = f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1),$$

ou seja,

$$x_3 = 1$$

é o único ponto crítico da função $\underline{f'}$.

<u>Sinal da função f'' (estudo da concacidade):</u>

Observemos que se

$$x < 1, \quad \text{temos que} \quad f''(x) = 6(x - 1) < 0,$$

ou seja, a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é côncavo para baixo nos pontos

$$(x, f(x)) \quad \text{para cada} \quad x \in (-\infty, 1).$$

Por outro lado, se

$$x > 1, \quad \text{temos que} \quad f''(x) = 6(x - 1) > 0,$$

ou seja, a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é côncavo para cima nos pontos

$$(x, f(x)), \quad \text{para cada} \quad x \in (1, \infty).$$

Portanto a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ tem um ponto de inflexão no ponto

$$(1, f(1)) = (1, 1).$$

Assíntotas horizontais da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$:

Temos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x^3-3x^2+3\right) \overset{\infty-\infty!}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+3}{x^3}\,x^3\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}\right)x^3\right] \overset{\text{Exercício}}{=} \infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2+3\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+3}{x^3}x^3\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}\right)x^3\right] \overset{\text{Exercício}}{=} -\infty,$$

mostrando que a representaçao geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ não possui retas assíntotas horizontais.

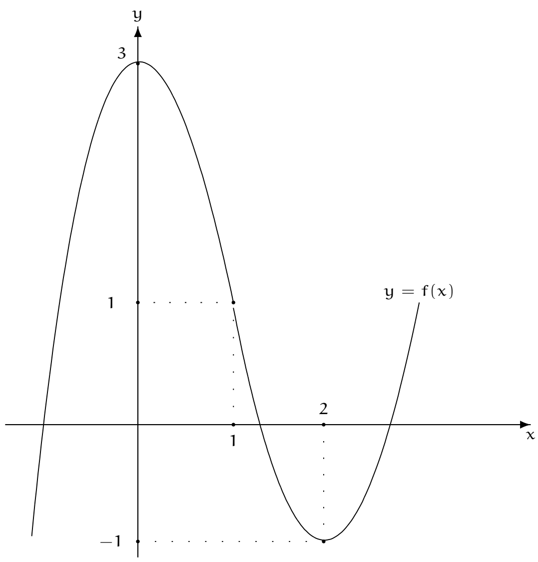
Assíntotas verticais da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$:

Como a função é contínua em $\mathbb{R}$ segue que para todo $a \in \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R},$$

mostrando que a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ não possui retas assíntotas verticais.

Com isto podemos obter um esboço da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ que é dada pela figura abaixo:



Temos também os seguintes exercícios resolvidos::

Exercício 8.6.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq e^{-x^2}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Baseado no método acima obter um esboço da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.

Resolução:

Pontos críticos da função $\underline{f}$:

Observemos que a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$ (pois é composta das funções $x \mapsto -x^2$ e $y \mapsto e^y$ que são diferenciáveis em $\mathbb{R}$), em particular é diferenciável em $\mathbb{R}$, assim os pontos críticos da mesma só ocorrerão nos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$f'(x) = 0.$$

Mas

$$0 = f'(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\right] \overset{\text{Regra da Cadeia}}{=} e^{-x^2}(-2x),$$

logo o único ponto crítico da função $\underline{f}$ é:

$$x_1 \doteq 0.$$

<u>Máximos ou mínimos locais da função f:</u>

Como a função $\underline{f}$ é duas-vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ podemos aplicar o Teste da 2.a Derivada no ponto crítico acima para classificá-lo do ponto de vista de ser máximo ou mínimo local.

Mas

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[-2xe^{-x^2}\right] = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}.(-2x) = 4e^{-x^2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

assim

$$f''(x_1) = f''(0) = -2 < 0.$$

Logo, do Teste da 2.a Derivada, segue que a função $\underline{f}$ tem um ponto de máximo local em

$$x_1 = 0, \quad \text{cujo valor é} \quad f(0) = 1.$$

Em particular, sabemos que o gráfico da função $\underline{f}$ será estritamente crescente em $(-\infty, 0]$ e estritamente decrescente em $[0, \infty)$ (para isto basta estudar o sinal da função derivada $\underline{f'}$ em cada um desses intervalos).

<u>Pontos críticos da função f':</u>

Como observado acima, a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$, assim os pontos críticos da função $\underline{f'}$ ocorrerão nos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$f''(x) = 0,$$

a saber:

$$0 = f''(x) = 4e^{-x^2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 4e^{-x^2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

ou seja,

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

são os únicos pontos críticos da função $\underline{f'}$.

<u>Sinal da função f'' - estudo da concacidade da representação geométrica do gráfico da função f:</u>

Observemos que se

$$x < -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{temos que} \quad f''(x) = 4e^{-x^2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \overset{x < -\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}}{>} 0,$$

ou seja, a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é côncavo para cima nos pontos

$$(x, f(x)), \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Por outro lado, se

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{temos que} \quad f''(x) = 4e^{-x^2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \overset{-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}}{<} 0,$$

ou seja, a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é côncavo para baixo nos pontos

$$(x, f(x)), \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Portanto a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ tem um ponto de inflexão no ponto

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Se

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < x, \quad \text{temos que} \quad f''(x) = 4e^{-x^2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \overset{-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}<x}{>} 0,$$

ou seja, a representação geométrica do gráfico é côncavo para cima para

$$x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$$

.

Portanto a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ tem um ponto de inflexão em

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right).$$

<u>Assíntotas horizontais da representação geométrica do gráfico da função f:</u>
Temos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} \overset{\text{Prop. (8.4.1) item 3.}}{=} 0$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x^2}} \overset{\text{Prop. (8.4.1) item 3.}}{=} 0$$

mostrando que a reta

$$y = 0$$

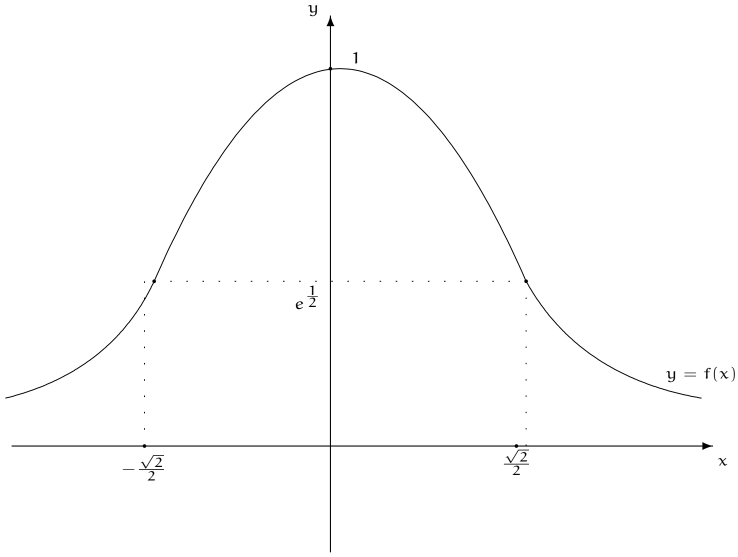
é uma reta assíntota horizontal da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.

<u>Assíntotas verticais da representação geométrica do gráfico da função f:</u>
Como a função é contínua em $\mathbb{R}$ segue que para todo $a \in \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R},$$

mostrando que da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ não possui retas assíntotas verticais.

Com isto podemos obter a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, dada pela figura abaixo:



Para finalizar temos o:

Exercício 8.6.2 *Considere* $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{tg}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + K\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Baseado no método acima obter um esboço da representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.

Resolução:

Como a função $\underline{f}$ é π-periódica basta sabermos traçar a representação geométrico dao gráfico da mesma no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Pontos críticos de f:

Observemos que a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, em particular, é diferenciável em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, assim os pontos críticos da mesma só ocorrerão nos pontos $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tais que

$$f'(x) = 0.$$

Mas

$$f'(x) = \operatorname{tg}'(x) = \sec^2(x) > 0, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

logo a função $\underline{f}$ não tem ponto crítico em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e além disso será estritamente crescente em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Máximos ou mínimos locais:

Como a função $\underline{f}$ não tem pontos críticos segue que não terá pontos de máximo ou mínimo locais em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Pontos críticos da função $\underline{f'}$:

Como observado acima, a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, assim os pontos críticos da função $\underline{f'}$ ocorrerão nos pontso $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tais que

$$f''(x) = 0,$$

a saber:

$$0 = f''(x) = \frac{d}{dx}\left[\sec^2(x)\right] \overset{\text{Regra da Cadeia}}{=} 2\sec(x)\,[\sec(x)\ \mathrm{tg}(x)] = 2\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos^3(x)},$$

ou seja,

$$x_1 = 0$$

é o único ponto crítico da função f'.

Sinal da função f'' - estudo da concacidade do gráfico da função f:

Observemos que se

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0\,, \quad \text{temos que} \quad f''(x) = 2\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos^3(x)} \overset{\mathrm{sen}(x)<0,\,\cos(x)>0}{<} 0\,,$$

ou seja, a representação geométrica do gráfico da função f é côncavo para baixo nos pontos

$$(x, f(x)) \qquad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Por outro lado, se

$$0 < x < \frac{\pi}{2}\,, \quad \text{temos que} \quad f''(x) = 2\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos^3(x)} \overset{\mathrm{sen}(x)>0,\,\cos(x)>0}{>} 0\,,$$

ou seja, a representação geométrica do gráfico da função f é côncavo para cima nos pontos

$$(x, f(x))\, quad \text{ para cada} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Portanto a representação geométrica do gráfico da função f tem um ponto de inflexão no ponto

$$(0, f(0) = (0, 0)\,.$$

Assíntotas horizontais da representação geométrica do gráfico da função f:

Como a função f é periódica segue que não existem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,,$$

ou seja, a representação geométrica do gráfico da função f não tem retas assíntotas horizontais.

Assíntotas verticais da representação geométrica do gráfico da função f:

Observemos que

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} \overset{(8.70)\ \text{abaixo}}{=} -\infty$$

e

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} \overset{(8.71)\ \text{abaixo}}{=} \infty\,.$$

De fato, como

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \mathrm{sen}(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \cos(x) = 0$$

segue, pela Proposição (8.4.1) item 2., que

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \left|\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\right| = \infty.$$

Mas se

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0\,,$$

temos que $\operatorname{sen}(x) < 0$ e $\cos(x) > 0$, assim

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right| = -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)},$$

logo:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right| = -\infty. \tag{8.70}$$

De modo semelhante, como

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{sen}(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0$$

segue, pela Proposição (8.4.1) item 2., que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right| = \infty.$$

Mas se

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

temos que $\operatorname{sen}(x) > 0$ e $\cos(x) > 0$, assim

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right| = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)},$$

logo:

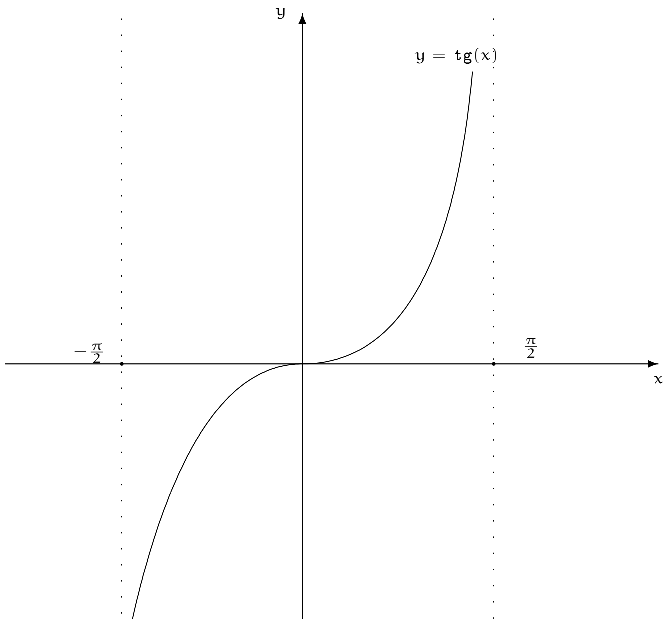
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right| = \infty. \tag{8.71}$$

Logo, podemos concluir que as retas

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

são retas assíntotas verticais da representação geométrica do gráfico da função f.

Com isto podemos obter a representação geométrica do gráfico da função f dada pela figura abaixo:



Observação 8.6.1 *Deixaremos como exercício para o leitor a obtenção dos esboços das representações geométricas dos gráficos das funções definidas no Capítulo 3 por meio do método apresentado acima.*

8.7 Formas indeterminadas associadas a funções reais de uma variável real - Regra de L'Hospital

O objetivo central desta seção é encontrar, quando possível, uma forma mais simples de estudarmos limites que nos fornecem expressões formais do tipo:

$$\frac{0}{0}\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad \frac{\infty}{-\infty}\,, \quad \frac{-\infty}{\infty}\,.$$

entre outros, que serão denominados de formas indeterminadas (veja a definição a seguir).

Para tanto precisaremos do seguinte resultado:

Teorema 8.7.1 *(Teorema do valor médio generalizado ou dos acréscimos finitos de Cauchy) Sejam* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas em* $[a, b]$ *e diferenciáveis em* (a, b).

Então existe $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f\,'(c)[g(b) - g(a)] = g\,'(c)[f(b) - f(a)]\,. \tag{8.72}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Consideremos a função $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} h(x) &\doteq \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} \\ &= f(x)[g(a) - g(b)] - g(x)[f(a) - f(b)] + [f(a)g(b) - f(b)g(a)]\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a, b]\,. \end{aligned}$$

Com isto temos que a função h é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) (pois as funções $\underline{f}$ e g têm essas propriedades).

Além disso temos:

$$\begin{aligned} h(a) &= \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} \\ &= f(a)[g(a) - g(b)] - g(a)[f(a) - f(b)] + [f(a)g(b) - f(b)g(a)] = 0\,, \\ h(b) &= \begin{vmatrix} f(b) & g(b) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} \\ &= f(b)[g(a) - g(b)] - g(b)[f(a) - f(b)] + [f(a)g(b) - f(b)g(a)] = 0\,. \end{aligned}$$

Logo, do Teorema de Rolle (Teorema (7.4.1)), segue que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$h'(c) = 0\,.$$

Mas

$$h'(x) = f\,'(x)[g(a) - g(b)] - g\,'(x)[f(a) - f(b)]\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (a, b)\,,$$

logo

$$0 = h'(c) = f'(c)[g(a) - g(b)] - g'(c)[f(a) - f(b)],$$

ou seja,

$$f'(c)[g(a) - g(b)] = g'(c)[f(a) - f(b)],$$

completando a demonstração.

$\square$

Observação 8.7.1

1. *Observemos que, nas condições do Teorema acima, se*

$$g'(c) \neq 0 \quad e \quad g(a) \neq g(b),$$

então a identidade (8.72) é, equivalente, a

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}.$$

2. *Nas condições do Teorema acima, se considerarmos* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(x) \doteq x, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b],$$

então teremos

$$f'(c)[b - a] \overset{g(x)=x}{=} f'(c)[g(b) - g(a)] \overset{\textit{Teorema } (8.7.1)}{=} g'(c)[f(b) - f(a)] \overset{g'(c)=1}{=} f(b) - f(a),$$

ou seja,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

que é a conclusão do Teorema do Valor Médio (ver o Teorema (7.4.3)).

3. *Nosso objetivo a seguir é, supondo que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a} f(x) = M,$$

onde

$$a \in \mathbb{R}, \quad ou \quad a = -\infty, \quad ou \quad a = \infty$$

e

$$L, M \in \{0, -\infty, \infty\}$$

gostaríamos de calcular, se existirem, os seguintes limites:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)], \quad \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)], \quad \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)},$$

que dão origem as seguintes expressões formais:

$$\frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ \frac{-\infty}{\infty}, \ \frac{\infty}{-\infty}, \ \frac{-\infty}{-\infty}, \ 0\,\infty, \ 0.(-\infty), \ \infty - \infty, \ 0^0, \ 0^\infty, \ 1^\infty, \ \infty^0. \tag{8.73}$$

Tais limites, poderão existir ou não, dependendo das funções envolvidas.

4. *Também poderemos ter expressões formais para os limites acima, quando estamos calculando limites laterais (isto é, quando $x \to a^+$ ou quando $x \to a^-$) ou para limites no infinito (isto é, quando $x \to \infty$ ou quando $x \to -\infty$).*

Definição 8.7.1 *As expressões que aparecem em (8.73) serão denominadas* **formas indeterminadas**.

O valor do limite de uma forma indeterminada, se existire, será denominado **valor da forma indeterminada**.

Com isto temos o:

Exercício 8.7.1 *Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ a função é dada por*

$$f(x) \doteq \frac{x^2 - 9}{x - 3}, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Encontre, se existir, o seguinte limite $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

Demonstração:

Notemos que $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$, pois

$$\lim_{x \to 3} \left(x^2 - 9\right) = 0 = \lim_{x \to 3} (x - 3).$$

Para calcular seu valor, observamos que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} \overset{x \neq 3}{=} \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6,$$

ou seja, o valor da forma indeterminada $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ é 6.

A seguir exibiremos vários resultados relacionados com as formas indeterminadas de (8.73).

Todos estes resultados serão denominados de **Regras de L'Hospital**.

Começaremos pela:

8.7.1 Forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$.

Teorema 8.7.2 (Caso $\frac{0}{0}$ com a variável tendendo a um número real $\underline{a}$) *Sejam A um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $a \in A$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções contínuas em A e diferenciáveis em $A \setminus \{a\}$ e satisfazendo:*

(i) $f(a) = g(a) = 0$,

(ii) $g(x) \neq 0$, *para cada* $x \in A \setminus \{a\}$,

(iii) $g'(x) \neq 0$, *para cada* $x \in A \setminus \{a\}$,

(iii) existe o limite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *e*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}.$$

Então existirá o limite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e além disso* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, *isto é,*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f\,'(x)}{g\,'(x)}\,.$$

Demonstração:

Mostraremos que o limite pela direita, $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe e que

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

O caso

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

é análogo e sua demonstração será deixada como exercício para o leitor.

Se $x \in A$ e $x > a$, como

$$f(a) = g(a) = 0 \quad \text{e} \quad g(x) \neq 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in A \setminus \{a\}\,,$$

temos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}\,.$$

Do Teorema (8.7.1) (na verdade da Observação (8.7.1) item 1.) segue que existe

$$c = c(x) \in (a, x) \tag{8.74}$$

tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \overset{\text{Teor. (8.7.1)}}{=} \frac{f\,'(c)}{g\,'(c)}. \tag{8.75}$$

Como $c \in (a, x)$,temos que se

$$x \to a^+\,, \quad \text{segue de (8.74), que} \quad c \to a^+\,. \tag{8.76}$$

Assim passando o limite, quando $\underline{x}$ tende a $\underline{a}$, na expressão (8.75) obteremos:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \overset{(8.75),(8.76)}{=} \lim_{c\to a^+}\frac{f\,'(c)}{g\,'(c)} = L\,,$$

ou seja, o limite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe e além disso

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L\,,$$

completando a demonstração do Teorema.

□

Observação 8.7.2 *Poderíamos enunciar e provar um resultado análogo ao Teorema acima para limites laterais (isto é, para* $x \to a^+$ *ou para* $x \to a^-$*).*

Deixaremos como exercício para o leitor a elaboração e demonstração dos mesmos.

Observemos que a demonstração que exibimos acima trata do limite lateral pela direita de $x = a$ *e foi deixado como exercício para o leitor, o limite lateral pela esquerda de* $x = a$.

Apliquemos o resultado acima ao:

Exemplo 8.7.1 *Calcular, se existir, o limite*

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

.

Resolução:

Como vimos anteriomente (Exemplo (8.7.1)), o limite acima é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$.

Neste caso as funções envolvidas são $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) \doteq x^2 - 9 \quad \text{e} \quad g(x) \doteq x - 3\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

que satisfazem as condições do Teorema acima, pois são funções diferenciáveis,

$$f(3) = g(3) = 0\,, \quad g(x) \neq 0\,, \quad \text{para} \quad x \neq 3\,, \quad g'(x) = 1 \neq 0\,, \text{ para cada } \quad x \in \mathbb{R}$$

e existe o limite

$$\lim_{x\to 3}\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{f'(x)=2x,\, g'(x)=1,\, x\in\mathbb{R}}{=} \lim_{x\to 3}\frac{2x}{1} = 6\,. \tag{8.77}$$

Logo podemos concluir que existirá o limite $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e além disso

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3}\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{(8.77)}{=} 6\,,$$

ou seja, o limite $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ existe e além disso

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6,$$

ou seja, o valor da forma indeterminada $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ é 6.

Eventualmente teremos que aplicar o Teorema acima um número finito de vezes para podermos concluir algo sobre a existência e o valor do limite estudado, como mostra o seguinte exercício resolvido:

Exercício 8.7.2 *Calcular, se existir, o limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^3}{x^2}\,.$$

Resolução:

Observemos que o limite acima é uma forma indeterminada do tipo $\dfrac{0}{0}$ (verifique!).

Neste caso as funções envolvidas são $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) \doteq (e^x - 1)^3 \quad \text{e} \quad g(x) \doteq x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

que satisfazem as condições do Teorema acima (verifique!).

Logo podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{f'(x)=3(e^x-1)^2e^x,\, g'(x)=2x}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3(e^x-1)^2e^x}{2x}. \tag{8.78}$$

Observemos que este último limite também é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ (verifique!). Para tentar calculá-lo, consideraremos as funções $f_1, g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_1(x) \doteq 3(e^x-1)^2e^x \quad \text{e} \quad g_1(x) \doteq 2x, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

que satisfazem as condições do Teorema acima (verifique!).

Logo podemos concluir que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} \\ &\overset{f_1'(x)=[6(e^x-1)^2e^x]e^x+3(e^x-1)^2e^x,\, g_1'(x)=2,x\in\mathbb{R}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left[6\,(e^x-1)^2\,e^x\right]e^x+3\,(e^x-1)^2\,e^x}{2} \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{0}{2}=0. \end{aligned} \tag{8.79}$$

Assim, de (8.78) e (8.79), segue que o limite $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^3}{x^2}$ existe e além disso

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^3}{x^2}=0.$$

Temos também o:

Teorema 8.7.3 (Caso $\frac{0}{0}$ com a variável tendendo a ∞) *Sejam $f, g : (b,\infty) \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em (b,∞) satisfazendo:*

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$,

(ii) $g(x) \neq 0$, *para cada* $x \in (b,\infty)$,

(iii) $g'(x) \neq 0$, *para cada* $x \in (b,\infty)$,

(iii) existe o limite $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *e*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Então existirá o limite $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ *e além disso* $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$, *isto é,*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração:

Observemos que se $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ é a função dada por

$$h(t) \doteq \frac{1}{t}, \quad \text{para cada} \quad t \in (0,\infty).$$

Então, da Proposição (8.4.3) (Mudança de Variáveis para Limites no Infinito, com a função $\underline{h}$ no lugar da função $\underline{g}$), segue que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{t \doteq \frac{1}{x},\, x\to\infty \text{ então } t\to 0^+}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \overset{\text{Teor. (8.7.2), verifique as hipóteses!}}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{d}{dt}\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\right]}{\frac{d}{dt}\left[g\left(\frac{1}{t}\right)\right]}$$

$$\overset{\text{Regra da Cadeia}}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{-1}{t^2}}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{-1}{t^2}} \overset{t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$\overset{x \doteq \frac{1}{t},\, t\to 0^+ \text{ então } x\to\infty}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,.$$

Portanto o limite $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe e

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L\,,$$

completando a demonstração do Teorema.

□

Observação 8.7.3

1. *Vale um resultado análogo ao Teorema acima para o limite em $-\infty$ (isto é, quando $x \to -\infty$).*

   Deixaremos como exercício para o leitor o enunciado e a demonstração do mesmo.

2. *Os resultados acima podem ser úteis para calcular limites que deêm origem a formas indeterminadas do tipo $\dfrac{0}{0}$.*

8.7.2 Forma indeterminada do tipo $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Teorema 8.7.4 (Caso $\dfrac{\infty}{\infty}$ com a variável tendendo a um número real $\underline{a}$) *Sejam A um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $a \in A$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções contínuas em A e diferenciáveis em $A \setminus \{a\}$ tais que:*

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,

(ii) $g(x) \neq 0$, *para cada* $x \in A$,

(iii) $g'(x) \neq 0$, *para cada* $x \in A$,

(iii) existe o limite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *e*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}\,.$$

Então existirá o limite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e além disso* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = L$*, isto é,*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como existe o limite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ e

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,,$$

podemos encontrar $\delta_1 > 0$, tal que se

$$0 < |x-a| < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{4}\,. \tag{8.80}$$

Mostraremos que existe o limite pela direita de $x = a$, isto é, existe o limite $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, e que

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

O caso da existência do limite pela esquerda de $x = a$, isto é, do limite $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, e que

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)} = L\,,$$

é análogo e sua demostração será deixada como exercício para o leitor.

Do Teorema (8.7.1) (na verdade da Observação (8.7.1) item 1.) segue que existe $c = c(x) \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(a)}{g(x)}}\,. \tag{8.81}$$

Consideremos $h : (a, a+\delta_1) \to \mathbb{R}$ a função dada por:

$$h(x) \doteq \frac{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(a)}{g(x)}}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (a, a+\delta_1)\,.$$

Assim, se

$$0 < x-a < \delta_1\,, \quad \text{teremos} \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}h(x) - L\right| \overset{(8.81)}{=} \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| \overset{a<c<x<a+\delta_1 \Rightarrow (8.80)}{<} \frac{\varepsilon}{4}\,. \tag{8.82}$$

Como

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty\,,$$

segue que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty\,,$$

e assim

$$\lim_{x\to a^+} h(x) = \lim_{x\to a^+} \frac{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(a)}{g(x)}} = \frac{1-\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(a)}{f(x)}}{1-\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{g(a)}{g(x)}} \overset{\text{Prop. (8.4.1) item 5.}}{=} \frac{1-0}{1-0} = 1,$$

logo, podemos encontrar $\delta_2 > 0$, tal que se

$$0 < x - a < \delta_2\,, \quad \text{teremos} \quad |h(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{4(1+|L|)} \tag{8.83}$$

$$\text{e} \quad \frac{1}{2} < h(x)\,. \tag{8.84}$$

Seja

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0\,.$$

Logo se

$$0 < x - a < \delta \leq \delta_1\,, \delta_2\,,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| &\overset{h(x)>\frac{1}{2}>0}{=} \left|\left[\frac{f(x)}{g(x)} - L\right]\frac{h(x)}{h(x)}\right| \overset{|h(x)|=h(x)}{=} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\,h(x) - L\,h(x)\right| \frac{1}{h(x)} \\
&\overset{(8.84)}{<} \left|\frac{f(x)}{g(x)}.h(x) - L\,h(x)\right| 2 = 2\left|[\frac{f(x)}{g(x)}\,h(x) - L] + [L - L\,h(x)]\right| \\
&\leq 2.\left[\left|\frac{f(x)}{g(x)}.h(x) - L\right| + |L(1-h(x))|\right] \overset{(8.82)}{=} 2\frac{\varepsilon}{4} + 2|L|\,|1-h(x)| \overset{(8.83)}{=} \frac{\varepsilon}{2} + 2|L|\frac{\varepsilon}{4(1+|L|)} \\
&\overset{\frac{|L|}{1+|L|}<1}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

mostrando que o limite $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe e que

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L\,,$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 8.7.4

1. *O Teorema acima também é válido para limites laterais (isto é, para $x \to a^+$ ou para $x \to a^-$).*

   Os enunciados e as demonstrações dos mesmos serão deixados como exercício para o leitor.

   Na verdade a demonstração acima trata do caso do limite lateral pela direita de $\underline{a}$.

2. *O Teorema acima (mesmo no caso de limites laterais) é válido quando um dos, ou os dois, limites das funções envolvidas é $-\infty$, ou seja, podemos obter resultados semelhantes ao tratado no Teorema acima para formas indeterminadas dos tipos:*

$$\frac{-\infty}{\infty}\,, \quad \frac{\infty}{-\infty} \quad \text{ou} \quad \frac{-\infty}{-\infty}.$$

   Os enunciados e as respectivas demonstrações serão deixados como exercício para o leitor.

Apliquemos os resultados acima ao:

Exemplo 8.7.2 *Calcular, se existir, o limite*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} .$$

Resolução:

Observemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} ,$$

ou seja, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, pois

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \overset{\text{Exercício}}{=} \infty . \tag{8.85}$$

Considerando-se $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ as funções dadas por

$$f(x) \doteq \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad g(x) \doteq e^{\frac{1}{x}} , \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty) ,$$

temos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ satisfazem as condições do Teorema (8.7.4) (verifique!).

Logo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{Teor. (8.7.4}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{f'(x)=\frac{-1}{x^2},\, g'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}} \frac{-1}{x^2}}$$

$$\overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \overset{(8.85) \text{ e a Prop. } (8.4.1) \text{ item 3.}}{=} 0 ,$$

mostrando que existe o limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}}$ e além disso

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} = 0 .$$

Conseqüência do Teorema acima temos o:

Teorema 8.7.5 (Caso $\frac{\infty}{\infty}$ para a variável tendendo a ∞) *Sejam $f, g : (b, \infty) \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em (b, ∞) tais que*

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$,

(ii) $g(x) \neq 0$, *para cada* $x \in (b, \infty)$,

(iii) $g'(x) \neq 0$, *para cada* $x \in (b, \infty)$,

(iii) existe o limite $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *e*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L .$$

Então existirá o limite $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e além disso* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$*, isto é,*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Demonstração:

Observemos que se $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ é uma função dada por

$$h(t)\doteq\frac{1}{t}\,,\quad\text{para cada}\quad t\in(0,\infty)\,,$$

então, da Proposição (8.4.3) (Mudança de Variáveis para Limite no Infinito, com a função $\underline{h}$ no lugar de $\underline{g}$), segue que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{t\doteq\frac{1}{x},\,x\to\infty\text{ então }t\to0^+}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}\overset{\text{Teor. }(8.7.4)}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{d}{dt}\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\right]}{\frac{d}{dt}\left[g\left(\frac{1}{t}\right)\right]}$$

$$\overset{\text{Regra da cadeia}}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{-1}{t^2}}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{-1}{t^2}}\overset{t\neq0}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$\overset{x\doteq\frac{1}{t},\,t\to0^+\text{ então }x\to\infty}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

mostrando que existe o limite $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L\,,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 8.7.5

1. *O Teorema acima é válido quando os limites envolvidos forem para* $-\infty$ *(isto é, quando* $x\to-\infty$*).*

   O enunciado e a demonstração do mesmo serão deixados como exercício para o leitor.

2. *O Teorema acima é válido quando um dos, ou os dois, limites das funções envolvidas é* $-\infty$*, ou seja, podemos obter um resultado semelhante ao Teorema acima para as formas indeterminadas do tipo:*

$$\frac{-\infty}{\infty}\,,\quad\frac{\infty}{-\infty}\quad\text{ou}\quad\frac{-\infty}{-\infty}.$$

   Os enunciados e a demonstrações dos mesmos serão deixados como exercício para o leitor.

Com isto podemos aplicar estas idéias ao:

Exercício 8.7.3 *Calcular, se existir, o limite*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}\,.$$

Resolução:

Observemos que o limite acima é uma forma indeterminada do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ pois

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} \overset{\text{Exercício}}{=} \infty\,. \tag{8.86}$$

Considerando-se as funções $f, g : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) \doteq x^2, \quad \text{e} \quad g(x) \doteq e^{-x}, \quad \text{para cada} \quad x \in (-\infty, 0)\,,$$

temos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ satisfazem as condições do Teorema (8.7.5) (verifique!) e assim

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{Teor. (8.7.5}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{f\,'(x)}{g\,'(x)} \overset{f'(x)=2x,\, g\,'(x)=e^{-x}.(-1)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}\,. \tag{8.87}$$

Observemos que o limite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}$ também é uma forma indeterminada e do tipo $\dfrac{-\infty}{-\infty}$, pois

$$\lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \left[-e^{-x}\right] \overset{(8.86)}{=} -\infty\,.$$

Considerando-se as funções $f_1, g_1 : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_1(x) \doteq 2x \quad \text{e} \quad g_1(x) \doteq -e^{-x}, \quad \text{para cada} \quad x \in (-\infty, 0)\,,$$

temos que as funções f_1 e g_1 satisfazem as condições do Teorema (8.7.5) (verifique!) e assim

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \overset{\text{Teor. (8.7.5}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{f_1{}'(x)}{g_1{}'(x)} \overset{f_1{}'(x)=2,\, g_1{}'(x)=-e^{-x}.(-1)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}}$$
$$\overset{(8.86)\text{ e Prop. (8.4.1) item 3.}}{=} 0\,. \tag{8.88}$$

Portanto (8.87) e (8.88) mostram que existe o limite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$ e além disso

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = 0\,.$$

Com os resultados acima podemos tentar encontrar o valor de outros tipos de formas indeterminadas, como ilustra o exemplo a seguir:

Exemplo 8.7.3 *Calcular, se existir, o limite*

$$\lim_{x\to\infty} \left[x\, e^{-x}\right]\,.$$

Resolução:

Observemos que este limite é uma forma indeterminada do tipo $\infty.0$, pois

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x} \overset{\text{Exercício}}{=} 0\,. \tag{8.89}$$

Podemos rescrevê-la do seguinte modo:

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}\,,$$

ou seja, ela tornar-se-á uma forma indeterminada do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ (verifique!).

Considerando-se as funções $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) \doteq x \quad \text{e} \quad g(x) \doteq e^x, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty),$$

temos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ satisfazem as condições do Teorema (8.7.5) (verifique!) e assim

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{Teor. (8.7.5}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{f'(x)=1,\, g'(x)=e^x}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x}$$
$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \overset{(8.89)}{=} 0\,,$$

ou seja, existe o limite $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x e^{-x}\right]$ e

$$\lim_{x\to\infty} \left[x e^{-x}\right] = 0\,.$$

Podemos aplicar uma idéia semelhante ao seguinte exercício resolvido:

Exercício 8.7.4 *Calcular, se existir,*

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln(x)\,.$$

Resolução:

Observemos que este limite é uma forma indeterminada do tipo $0.(-\infty)$, pois

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) \overset{\text{Exercício}}{=} -\infty.$$

Podemos rescrevê-la do seguinte modo:

$$\lim_{x\to 0^+} \left[x^2 \ln(x)\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\dfrac{1}{x^2}},$$

ou seja, ela tornar-se-á uma forma indeterminada do tipo $\dfrac{-\infty}{\infty}$ (verifique!) .

Considerando-se as funções $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) \doteq \ln(x) \quad \text{e} \quad g(x) \doteq \frac{1}{x^2}, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty),$$

temos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ satisfazem as condições do Teorema (8.7.5) (verifique!) e assim

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{Teor. (8.7.4}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{f'(x)=\frac{1}{x},\, g'(x)=\frac{-2}{x^3}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-2}{x^3}}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{-2x} \overset{x\neq 0}{=} -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0,$$

ou seja, existe o limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[x^2 \ln(x)\right]$ e além disso

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln(x) = 0\,.$$

8.8 2.o Limite Fundamental

Observação 8.8.1 *Podemos aplicar, quando possível, as técnicas desenvolvidas na Seção acima, para encontrarmos o valor (se existirem) de formas indeterminadas do tipo:*

$$0^0, \quad 1^\infty, \quad ou \quad \infty^0.$$

Na verdade, as formas indeterminadas acima aparecem do cálculo (se existirem) de limites do seguinte tipo:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\{g(x)\ln[f(x)]\}} \tag{8.90}$$

onde estamos supondo que A *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, $a \in A$, $g : A\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ *e* $f : A\backslash\{a\} \to (0,\infty)$.

Suponhamos que

$$L \doteq \lim_{x\to a}\{g(x)\ln[f(x)]\} \in \mathbb{R}.$$

Como a função exponecial é contínua em L *(pois é contínua em* $\mathbb{R}$*) segue, da Proposição (5.3.4), que*

$$\lim_{x\to a} e^{g(x)\ln(f(x))} = e^{\left\{\lim\limits_{x\to a}\{g(x)\ln[f(x)]\}\right\}} = e^L,$$

deste modo conseguiríamos obter o valor do limite, a saber,

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\{g(x)\ln[f(x)]\}} = e^L.$$

Apliquemos esta técnica ao:

Exemplo 8.8.1 *Calcule, se existir, o limite*

$$\lim_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}.$$

<u>**Resolução:**</u>

Observemos que este limite é uma forma indeterminada do tipo 1^∞, pois

$$\lim_{x\to 0^+}(1+3x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2x} \overset{\text{Exercício}}{=} \infty.$$

Para tentar encontrar o valor da forma indeterminada observemos que

$$(1+3x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\left[\frac{1}{2x}\ln(1+3x)\right]} = e^{\left[\frac{\ln(1+3x)}{2x}\right]}.$$

Calculemos, se existir, o limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+3x)}{2x}.$$

Observermos que este limite é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$, pois

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(1+3x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+}2x = 0.$$

Consideremos as funções $f, g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) \doteq \ln(1+3x) \quad \text{e} \quad g(x) \doteq 2x, \quad \text{para cada} \quad x \in (0,\infty).$$

Com isto temos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ satisfazem as condições do Teorema (8.7.2) (verifique!) e assim

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+3x)}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\text{Teor. (8.7.2)}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\overset{f'(x)=\frac{1}{1+3x}.3,\,g'(x)=2}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{3}{1+3x}}{2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3}{2+6x}=\frac{3}{2}.$$

Logo, segue da Observação acima, que

$$\lim_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\left[\frac{\ln(1+3x)}{2x}\right]}=e^{\left\{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln(1+3x)}{2x}\right]\right\}}=e^{\frac{3}{2}},$$

ou seja, existe o limite $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$ e além disso

$$\lim_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

Uma outra aplicação da técnica acima é para obter o:

Proposição 8.8.1 (2.º Limite Fundamental) *A forma indeterminada* $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ *tem valor* $\underline{e}$, *isto é,*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Demonstração:

Observemos que os limites laterais associados ao limite acima são uma formas indeterminadas dos tipos 1^{∞} e $1^{-\infty}$, repectivamete, pois

$$\lim_{x\to 0}(1+x)=1,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty\quad\text{e}\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty.$$

Para tentar encontrar o valor da forma indeterminada observemos que se $x\neq 0$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]}=e^{\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}.$$

Tentaremos calcular, se existir, o limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ e utilizar a continuidade da função exponencial.

Observermos que este limite é uma forma indeterminada do tipo $\dfrac{0}{0}$, pois

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)=\ln(1)=0\quad\text{e}\quad\lim_{x\to 0}x=0.$$

Consideremos as funções $f,g:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ dadas por

$$f(x)\doteq\ln(1+x)\quad\text{e}\quad g(x)\doteq x,\quad\text{para cada}\quad x\in(-1,\infty).$$

Com isto temos que as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ satisfazem as condições do Teorema (8.7.2) (verifique!) e assim

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\text{Teor. (8.7.2)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\overset{f'(x)=\frac{1}{1+x},\,g'(x)=1}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1.$$

Como a função exponencial é contínua em $L = 1$ segue que

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]} \overset{\text{[Prop. (5.3.4)]}}{=} e^{\left\{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]\right\}} = e^1 = e\,,$$

ou seja, existe o limite $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ e além disso

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\,.$$

□

Capítulo 9

Diferenciais de funções reais de uma variável real

Observação 9.0.2 *Sejam* A *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, $a \in A$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* $x = a$.

Logo existe o limite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *e além disso*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Portanto, para $\delta > 0$, *suficientemente pequeno, temos que a função* $\varphi : (a - \delta, a + \delta) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(h) \doteq \begin{cases} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a), & h \neq 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases},$$

está bem definida e além disso é um infinitésimo em $h = 0$, *pois*

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \varphi(h) &\overset{h \neq 0}{=} \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right] \\ &= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{=f'(a)} - f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0. \end{aligned}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, *poderemos encontrar* $\delta > 0$, *tal que se*

$$|h| < \delta, \quad \textit{teremos} \quad \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| = |\varphi(h)| < \varepsilon, \tag{9.1}$$

ou ainda, se diminurmos $\delta > 0$ *acima obtido, para que* $0 < \delta < 1$, *teremos que, para*

$$|h| < \delta \tag{9.2}$$

segue que

$$\left| f(a+h) - f(a) - f'(a)h \right| = |\varphi(h)\, h| \overset{(9.1)}{<} \varepsilon |h| \overset{(9.2)}{<} \varepsilon . \delta \overset{\delta \leq 1}{<} \varepsilon. \tag{9.3}$$

Se definirmos, para $h \neq 0$ *suficientemente pequeno (de modo que* $a + h \in A$*),*

$$\Delta f(a) \doteq f(a+h) - f(a)$$

então, de (9.3), segue que

$$\Delta f(a) - f'(a)h \sim 0, \quad \textit{se} \quad h \sim 0,$$

que é equivalente a

$$\Delta f(a) \sim f'(a)h, \quad \textit{se} \quad h \sim 0,$$

ou ainda,

$$f(a+h) \sim f(a) + f'(a)h, \quad \textit{se} \quad h \sim 0. \tag{9.4}$$

Com isto, para $\underline{h}$ *suficientemente pequeno, podemos utilizar a expressão*

$$f(a) + f'(a)h,$$

para aproximar o valor $f(a+h)$ *(isto é, o valor da função* $\underline{f}$ *em* $a+h$*).*

Com isto temos a:

Definição 9.0.1 *Na situação acima diremos que a expressão* $f'(a)h$ *é a* **diferencial da função $\underline{f}$ no ponto $\underline{a}$, calculada para o acréscimo $\underline{h}$** *e será denotada por* $df(a)$*, ou seja,*

$$df(a) \doteq f'(a)h. \tag{9.5}$$

Observação 9.0.3

1. *Logo, da definição acima, (9.4) pode ser reescrita da seguinte forma:*

$$f(a+h) \sim f(a) + df(a), \quad \textit{se} \quad h \sim 0. \tag{9.6}$$

2. *Observemos que se a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) = x, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

então temos que a função $\underline{f}$ *será diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e além disso*

$$df(x) = f'(x)\,h \overset{f'(x)=1}{=} 1.h = h.$$

Como

$$f(x) = x, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

segue que

$$dx = df(x) = h,$$

ou seja, acréscimo $\underline{h}$ *pode ser substituído por* $\underline{dx}$*.*

Assim (9.5) poderá ser reescrita da seguinte forma:

$$df(a) \doteq f'(a)\,dx, \tag{9.7}$$

e portanto teremos a seguinte equivalência:

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a), \quad \textit{é equivalente a} \quad df(a) = f'(a)\,dx.$$

3. *Se* $y = f(x)$ *é diferenciável em* $x \in A$ *então poderemos denotar a diferencial da função* $\underline{f}$ *no ponto* $\underline{x}$ *(calculada para o acréscimo* $\underline{dx}$*) como*

$$dy = f'(x)\,dx\,. \tag{9.8}$$

Lembremos que uma outra notação para $f'(x)$ *é* $\dfrac{dy}{dx}$*, assim teremos*

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx\,.$$

Temos as seguintes propriedades básicas para a diferencial de funções diferenciáveis:

Proposição 9.0.2 *Sejam* A *um intervalo aberto,* $a \in A$ *e* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *funções diferenciáveis em* $x = a$.

Então

1. *se*
$$f(x) = c \qquad \textit{para cada} \quad x \in A\,,$$
então
$$df(a) = 0\,;$$

2. *a diferencial da soma será a soma das diferenciais, isto é,*
$$d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)\,.$$

3. *a diferencial da diferença de duas funções será a diferença das diferenciais das respectivas funções, isto é,*
$$d(f-g)(a) = df(a) - dg(a)\,.$$

4. *temos que a diferencial do produto de duas funções será dada pela seguinte expressão:*
$$d(f\,g)(a) = df(a)\,g(a) + f(a)\,dg(a)\,.$$
Em particular, segue da identidade acima e de 1. que
$$d(c\,f)(a) = c\,df(a)\,.$$

5. *se* $g(a) \neq 0$ *então a diferencial do quociente da função* $\underline{f}$ *pela função* $\underline{g}$ *será dada pela seguinte expressão:*
$$d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{df(a)\,g(a) - f(a)\,dg(a)}{g^2(a)}\,.$$

6. *se* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 2$ *temos que*
$$dx^n = n x^{n-1}\,dx\,.$$

Demonstração:

De 1.:

Como

$$f'(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in A\,,$$

segue que

$$df(a) = f'(a)\,dx = 0\,dx = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in A\,,$$

como afirmamos.

De 2.:

Como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são diferenciáveis em $a \in A$ segue que a função $f + g$ será diferenciável em $x = a$.

Além disso temos:

$$\begin{aligned} d(f+g)(a) &= (f+g)'(a)\,dx \overset{(f+g)'(a)=f\,'(a)+g\,'(a)}{=} \left[f\,'(a) + g\,'(a)\right]\,dx \\ &= f\,'(a)\,dx + g\,'(a)\,dx = df(a) + dg(a)\,, \end{aligned}$$

como afirmamos.

De 3.:

Como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são diferenciáveis em $a \in A$ segue que a função $f - g$ será diferenciável em $x = a$.

Além disso temos:

$$\begin{aligned} d(f-g)(a) &= (f-g)'(a)\,dx \overset{(f-g)'(a)=f\,'(a)-g\,'(a)}{=} [f\,'(a) - g\,'(a)]\,dx \\ &= f\,'(a)\,dx - g\,'(a)\,dx = df(a) - dg(a)\,, \end{aligned}$$

como afirmamos.

De 4.:

Como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são diferenciáveis em $a \in A$ segue que a função $f.g$ será diferenciável em $x = a$.

Além disso temos:

$$\begin{aligned} d(f.g)(a) &= (f.g)'(a)\,dx \overset{(f\,g)'(a)=f\,'(a)\,g(a)-f(a)\,g\,'(a)]}{=} \left[f\,'(a)\,g(a) - f(a)\,g\,'(a)\right]\,dx \\ &= g(a)\,f\,'(a)\,dx - f(a)\,g\,'(a)\,dx = g(a)\,df(a) - f(a)\,dg(a)\,, \end{aligned}$$

como afirmamos.

De 5.:

Como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são diferenciáveis em $a \in A$ e $g(a) \neq 0$ segue que a função $\dfrac{f}{g}$ será diferenciável em $x = a$.

Além disso temos:

$$\begin{aligned} d\left(f\frac{f}{g}\right)(a) &= \left(\frac{f}{g}\right)'(a)\,dx \overset{\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f\,'(a)\,g(a)-f(a)\,g\,'(a)}{g^2(a)}}{=} \left[\frac{f\,'(a)\,g(a) - f(a)\,g\,'(a)}{g^2(a)}\right]\,dx \\ &= \frac{g(a)\,f\,'(a)\,dx - f(a)\,g\,'(a)\,dx}{g^2(a)} = \frac{g(a)\,df(a) - f(a)\,dg(a)}{g^2(a)}\,, \end{aligned}$$

como afirmamos.

De 6.:

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada por

$$f(x) = x^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

então ela será diferenciável em $x \in \mathbb{R}$ (pois é uma função polinomial) e temos:

$$dx^n = df(x) = f\,'(x)\,dx = \left[\frac{d}{dx}x^n\right]\,dx = nx^{n-1}\,dx\,,$$

como afirmamos.

□

Temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 9.0.1 *Se a função* $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{3x - 2}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (1, \infty),$$

encontre a diferencial da função $\underline{f}$*, para* $x \in (1, \infty)$*.*

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $(1, \infty)$ (a verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor) e além disso temos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^3-1}\right][3x-2] - \left[\sqrt{x^3-1}\right]\frac{d}{dx}[3x-2]}{(3x-2)^2} \\
&= \frac{\left[\frac{1}{2}\left(x^3-1\right)^{-\frac{1}{2}} 3x^2\right][3x-2] - \left[\sqrt{x^3-1}\right][3]}{(3x-2)^2} \\
&= \frac{\frac{3}{2}x^2(3x-2) - 3\left(x^3-1\right)}{\sqrt{x^3-1}\,(3x-2)^2}.
\end{aligned}$$

Logo, para $x \in (1, \infty)$ teremos:

$$df(x) = f'(x)\,dx = \frac{\frac{3}{2}x^2(3x-2) - 3\left(x^3-1\right)}{\sqrt{x^3-1}\,(3x-2)^2}\,dx.$$

O próximo exercício nos dá uma aplicação interessante de diferenciais de uma função:

Exercício 9.0.2 *Encontre um valor aproximado de* $\sqrt[3]{28}$ *utilizando a diferenciais de uma função.*

Resolução:

Consideremos $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ a função dada por:

$$f(x) \doteq \sqrt[3]{x}, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty).$$

Observemos que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $(0, \infty)$ assim sua diferencial, para $x \in (0, \infty)$, será dada por:

$$df(x) = f'(x)\,dx \overset{f(x)=x^{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{=} \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$$

Da Observação (9.0.3) item 1. segue que, para cada $a > 0$, teremos:

$$f(a+h) \sim f(a) + df(a) = f(a) + f'(a)\,dx, \quad \text{para cada} \quad dx \sim 0. \tag{9.9}$$

Consideremos

$$a \doteq 27 \quad \text{e} \quad dx \doteq 1.$$

Da expressão acima, com $a = 27$ e $dx = 1$, teremos:

$$f(28) = f(27+1) \overset{(9.9)}{\sim} f(27) + f\,'(27).1 = \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = 3 + \frac{1}{3}\frac{1}{\left[\sqrt[3]{27}\right]^2} = 3 + \frac{1}{27}\,.$$

Logo

$$\sqrt[3]{28} \sim 3 + \frac{1}{27}\,.$$

Capítulo 10

Fórmula de Taylor para funções reais de uma variável real

Observação 10.0.4 *O Teorema do Valor Médio (Teorema (7.4.3)) nos diz que se uma função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *for contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* (a, b) *então existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

A seguir estabeleceremos algumas generalizações desse resultado.

Começaremos pelo:

Teorema 10.0.1 *(**1.a generalização:**) Seja função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *for continuamente diferenciável em* $[a, b]$ *(isto é, a função* $\underline{f'}$ *é contínua em* $[a, b]$*) e duas-vezes diferenciável em* (a, b).

Então existe $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(a)(b - a) + \frac{f''(c)}{2}(b - a)^2. \tag{10.1}$$

Demonstração:

Seja

$$K \doteq \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b - a)}{\dfrac{(b - a)^2}{2}}.$$

Logo, para completar a demonstração, basta mostrarmos que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f''(c) = K.$$

Para isto consideremos $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função dada por:

$$g(x) \doteq f(b) - f(x) - f'(x)(b - x) - \frac{K}{2}(b - x)^2, \quad \text{para cada} \quad x \in [a, b].$$

Logo, a função g será contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e se $x \in (a, b)$ teremos

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(x) - \left[f''(x)(b - x) + f'(x)(-1)\right] - 2\frac{K}{2}(b - x).(-1) \\ &= -f''(x)(b - x) + K(b - x). \end{aligned} \tag{10.2}$$

e além disso

$$\begin{aligned}
g(a) &= f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{K}{2}(b-a)^2 \\
&= f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{\frac{(b-a)^2}{2}} \frac{(b-a)^2}{2} \\
&= 0\,, \\
g(b) &= f(b) - f(b) - f'(b)(b-b) - \frac{K}{2}(b-b)^2 \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Logo, do Teorema de Rolle, segue que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$0 = g'(c) \overset{(10.2)}{=} -f''(c)(b-c) + K(b-c)\,, \quad \text{ou seja,} \quad f''(c)(b-c) = K(b-c)\,.$$

Como $c \neq b$ segue que

$$f''(c) = K,$$

ou seja,

$$f(b) - f(a) = f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2\,,$$

como queríamos mostrar.

□

De modo semelhante temos o:

Teorema 10.0.2 *(***2.a generalização:***) Seja função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *tal que a função* $\underline{f''}$ *é contínua em* $[a, b]$ *e a função* $\underline{f}$ *é três-vezes diferenciável em* (a, b)*.*

Então existe $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(b-a)^3.$$

Demonstração:

Seja

$$K \doteq \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2}{\frac{(b-a)^3}{3!}}\,.$$

Logo, basta mostrarmos que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'''(c) = K\,.$$

Para isto consideremos $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função dada por:

$$g(x) \doteq f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2}(b-x)^2 - \frac{K}{3!}(b-x)^3\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a, b]\,.$$

Logo, a função g será contínua em $[a, b]$, será diferenciável em (a, b).

Além disso, se $x \in (a, b)$ teremos:

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= -f'(x) - \left[f''(x)(b-x) + f'(x)(-1)\right] - \left[\frac{f'''(x)}{2}(b-x)^2 + \frac{f''(x)}{2}\,2\,(b-x)\,(-1)\right] \\
&\quad - \frac{K}{3!}\,3\,(b-x)^2(-1) \\
&= -\frac{f'''(x)}{2}(b-x)^2 + \frac{K}{2!}(b-x)^2
\end{aligned} \tag{10.3}
$$

e

$$
\begin{aligned}
g(a) &= f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - f''(a)\frac{(b-a)^2}{2} - K\frac{(b-a)^3}{3!} \\
&= f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - f''(a)\frac{(b-a)^2}{2} \\
&\quad - \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \dfrac{f''(a)}{2!}(b-a)^2}{\dfrac{(b-a)^3}{3!}} \cdot \frac{(b-a)^3}{3!} = 0\,, \\
g(b) &= f(b) - f(b) - f'(b)(b-b) - f''(b)\frac{(b-b)^2}{2} - K\frac{(b-b)^3}{3!} \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

Logo, do Teorema de Rolle, segue que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$
0 = g'(c) \overset{(10.3)}{=} -\frac{f'''(c)}{2}(b-c)^2 + \frac{K}{2}(b-c)^2\,, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{f'''(c)}{2}(b-c)^2 = \frac{K}{2}(b-c)^2\,.
$$

Como $c \neq b$ segue que

$$
f'''(c) = K\,,
$$

ou seja,

$$
f(b) - f(a) = f'(a)(b-a) + \frac{f''(b)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(b-a)^3\,,
$$

como queríamos mostrar.

$\square$

Em geral, temos a seguinte generalização, do Teorema do Valor Médio:

Teorema 10.0.3 *(***Teorema de Taylor***) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que a função $f^{(n)}$ é contínua em $[a, b]$ e a função $\underline{f^{(n)}}$ é diferenciável em (a, b) (isto é, existe $\underline{f^{(n+1)}}$ em (a, b)).*

Então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$
f(b) - f(a) = f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\,.
$$

<u>**Demonstração:**</u>

Consideremos $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função dada por:

$$
\begin{aligned}
F(x) \doteq\ & f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \frac{f'''(x)}{3!}(b-x)^3 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n \\
& - \frac{k}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}\,,
\end{aligned}
$$

para cada $x \in [a, b]$, onde $k \in \mathbb{R}$ é tal que

$$F(a) = 0\,,$$

isto é,

$$k \doteq \left[f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right] \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\,.$$

Observemos que a função $\underline{F}$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e além disso teremos:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 0 - f'(x) - \left[\frac{f''(x)}{1!}(b-x) + \frac{f'(x)}{1!}(-1)\right] - \left[\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 + \frac{f''(x)}{2!}2(b-x)(-1)\right] \\
&\quad - \left[\frac{f'''(x)}{3!}(b-x)^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{3!}(b-x)^3 + \frac{f'''(x)}{3!}3(b-x)^2(-1)\right] - \cdots \\
&\quad - \left[\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}n(b-x)^{n-1}(-1)\right] - \frac{k}{(n+1)!}n(b-x)^n(-1) \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{k - f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (a, b)\,. \qquad (10.4)
\end{aligned}$$

Como

$$F(b) \overset{\text{Exercício}}{=} F(a) \overset{\text{Exercício}}{=} 0\,,$$

segue do Teorema de Rolle, que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$0 = F'(c) \overset{(10.4)}{=} \frac{k - f^{(n+1)}(c)}{n!}(\underbrace{b-c}_{\neq 0})^n$$

que implicará em

$$f^{(n+1)}(c) = k\,.$$

Logo

$$\begin{aligned}
0 = F(a) &= f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \\
&\quad - \frac{k}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\
&= f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \\
&\quad - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},
\end{aligned}$$

isto é,

$$f(b) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\,,$$

completando a demonstração do Teorema.

□

Observação 10.0.5

1. *Nas condições do Teorema de Taylor, se* $x \in (a, b)$, *podemos aplicar o Teorema de Taylor ao intervalo* $[a, x]$ *e encontrar* $c \doteq c_x \in (a, x)$ *tal que*

$$f(x) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\doteq P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\doteq R_n(x)} \\ &= P_n(x) + R_n(x)\,, \end{aligned} \tag{10.5}$$

onde

$$P_n(x) \doteq f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

será denominado **polinômio de Taylor, de ordem n, associado a função f no ponto $x = a$** *e*

$$R_n(x) \doteq \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

será denominado **resto de Taylor, de ordem n, associado a função f no ponto $x = a$**.

2. *Observemos que se a função* f *é* $(n+1)$*-vezes diferenciável em* $I \doteq (a-\delta, a+\delta)$ *e conhecemos a função* f, *e suas derivadas até a ordem* n *no ponto* a, *então conheceremos o polinômio de Taylor de ordem* n *associado a função* f .

   Mas, em geral, **não** *conhecemos, explicitamente, o resto de Taylor, de ordem* n, *associado a função* f *(pois não sabemos quem é, explicitamente, o ponto* $c = c_x \in (a, x)$ *cuja existência é garantida pelo Teorema de Taylor).*

3. *A expressão (10.5) é conhecida como* **Fórmula de Taylor**, *de ordem* n, *associado a função* f *no ponto* $x = a$.

4. *Se* $a = 0$ *então a expressão* (10.5) *tornar-se-á:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{\doteq P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\doteq R_n(x)} \\ &\doteq P_n(x) + R_n(x)\,, \end{aligned} \tag{10.6}$$

   onde $c \in [0, x]$, *se* $x > 0$, *ou* $c \in [x, 0]$, *se* $x < 0$.

   O polinômio

$$P_n(x) \doteq f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

   será denominado **polinômio de Maclaurin de ordem n associado a função f** *e*

$$R_n(x) \doteq \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

   será denominado **resto de Maclaurin, de ordem n, associado a função f** .

5. *A expressão (10.6) é conhecida como* **Fórmula de Maclaurin***, de ordem* $\underline{n}$*, associado a função* $\underline{f}$ *.*

6. *Se conseguirmos deixar o resto de Taylor, em módulo, tão pequeno quanto se queira, isto é, dado* $\varepsilon > 0$*, tenhamos*
$$|R_n(x)| < \varepsilon\,,$$
para $n \in \mathbb{N}$ *suficientemente grande, teremos*
$$|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon\,, \quad \textit{para cada} \quad n \geq N_o\,,$$
para algum $N_o \in \mathbb{N}$*, ou seja, poderíamos aproximar o valor da função* $\underline{f}$ *no ponto* $\underline{x}$*, pelo valor do polinômio de Taylor, de ordem* $\underline{n}$*, associado a função* $\underline{f}$ *no ponto* $x = a$*, a grosso modo, teríamos*
$$P_n(x) \sim f(x).$$
Portanto, nessa situação, encontraríamos uma aproximação do valor da função $\underline{f}$ *no ponto* $\underline{x}$*, pelo valor de um polinômio (no caso o polinômio de Taylor, de ordem* $\underline{n}$*, associado a função* $\underline{f}$ *no ponto* $x = a$*) no ponto* $\underline{x}$*.*

Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 10.0.2 *Aplicar a fórmula de Maclaurin, de ordem* $\underline{n}$*, para função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*
$$f(x) \doteq x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x - 1\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$
para cada $n \in \mathbb{N}$.

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$ (pois é uma função polinomial), logo podemos obter a fórmula de Maclaurin, de ordem $\underline{n}$, para a função $\underline{f}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para escrever a fórmula de Maclaurin precisamos calcular as derivadas
$$f^{(n)}(0)\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\,.$$
Mas, para cada $x \in \mathbb{R}$, teremos:
$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x - 1\,, &&\text{assim} \quad f^{(0)}(0) = f(0) = -1\,,\\
f'(x) &= 4x^3 + 6x^2 + 6x + 1\,, &&\text{assim} \quad f'(0) = 1\,,\\
f''(x) &= 12x^2 + 12x + 6\,, &&\text{assim} \quad f''(0) = 6\,,\\
f^{(3)}(x) &= 24x + 12\,, &&\text{assim} \quad f^{(3)}(0) = 12\,,\\
f^{(4)}(x) &= 24\,, &&\text{assim} \quad f^{(4)}(0) = 24\,,\\
f^{(m)}(x) &= 0\,, &&\text{assim} \quad f^{(m)}(0) = 0\,, \quad \text{para} \quad m \geq 5\,.
\end{aligned}$$
Logo a fórmula de Maclaurin associada a função $\underline{f}$, para $n \in \{5, 6, 7, \cdots\}$, será:
$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}}{4!}(0)x^4 + \frac{\overbrace{f^{(5)}}^{=0}(0)}{5!}x^5 + \cdots + \frac{\overbrace{f^{(n)}}^{=0}(0)}{n!}x^n + \frac{\overbrace{f^{(n+1)}}^{=0}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\\
&= -1 + \frac{1}{1}x + \frac{6}{2!}x^2 + \frac{12}{3!}x^3 + \frac{24}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \cdots + \frac{0}{(n+1)!}x^{n+1}\\
&= -1 + x + 3x^2 + 2x^3 + x^4\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

ou seja, o polinômio de Maclaurin, de ordem $\underline{n}$, associado a função $\underline{f}$ (que é uma função polinomial), para $n \in \{5, 6, 7, \cdots\}$, será a própria função polinômial $\underline{f}$.

Temos também o:

Exemplo 10.0.3 *Aplicar a fórmula de Maclaurin, de ordem $\underline{n}$, para função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$, logo podemos obter a fórmula de MacLaurin, de ordem $\underline{n}$, para a função $\underline{f}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Para escrever a fórmula de Maclaurin precisamos calcular as derivadas

$$f^{(n)}(0)\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\,.$$

Mas

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(x)\,, \quad \text{assim} \quad f^{(0)}(0) = f(0) = 1\,,\\
f'(x) &= -\operatorname{sen}(x)\,, \quad \text{assim} \quad f'(0) = 0\,,\\
f''(x) &= -\cos(x)\,, \quad \text{assim} \quad f''(0) = -1\,,\\
f^{(3)}(x) &= \operatorname{sen}(x)\,, \quad \text{assim} \quad f^{(3)}(0) = 0\,,\\
f^{(4)}(x) = \cos(x) &= f(x)\,, \quad \text{assim} \quad f^{(4)}(0) = 1\,,\\
f^{(5)}(x) = f'(x) &= -\operatorname{sen}(x)\,, \quad \text{assim} \quad f^{(5)}(0) = 0\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0\,, & \text{para } n \text{ é ímpar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\,, & \text{para } n \text{ é par} \end{cases}\,.$$

Logo a fórmula de Maclaurin, de ordem $\underline{n}$, para $n \in \{5, 6, 7, \cdots\}$, será dada por:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^3 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\\
&= 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\\
&= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,
\end{aligned}$$

onde $\underline{c}$ é um ponto entre $\underline{0}$ e $\underline{x}$.

Observação 10.0.6

1. *Observemos que no Exemplo acima, o polinômio de Maclaurin será um polinômio que só envolverá potências pares de $\underline{x}$ e a função $\underline{f}$ é uma função par.*

   Isto ocorre em geral, pois se uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar então deveremos ter:

   $$g(-x) = -g(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Em particular,

$$\underbrace{g(-0)}_{=g(0)} = -g(0)\,, \quad \textit{ou seja,} \quad 2g(0) = 0\,, \quad \textit{ou ainda,} \quad g(0) = 0.$$

<u>**Conclusão:**</u> *toda função ímpar definida em* $\mathbb{R}$*, tem seu valor em* $x = 0$ *igual a zero, isto é, deveremos ter:*

$$g(0) = 0\,.$$

2. *Lembremos também que se uma função é ímpar e diferenciável em* $\mathbb{R}$*, então sua derivada será uma função par e se uma função é par e diferenciável em* $\mathbb{R}$*, então sua derivada será uma função ímpar.*

   Logo se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função ímpar e tem derivada de qualquer ordem, então para cada* $m \in \mathbb{N}$*, segue que a função* $f^{(2m+1)}$ *será uma função par e a função* $f^{(2m)}$ *será uma função ímpar.*

   Em particular,

$$f^{(2m)}(0) = 0\,,$$

   mostrando que na Fórmula de Maclaurin, de ordem $\underline{n}$*, associado a função* $\underline{f}$ *, os coeficientes das pontências pares (que são dados por* $\dfrac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!}$*) serão iguais a zero, ou seja, o polinômio de Maclaurin será um polinômio que só possui potências ímpares de* $\underline{x}$*.*

3. *Por outro lado, se a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função par e tem derivada de qualquer ordem, então para todo* $m \in \mathbb{N}$*, segue que a função* $f^{(2m+1)}$ *será uma função ímpar e a função* $f^{(2m)}$ *será uma função par.*

   Em particular,

$$f^{(2m+1)}(0) = 0\,,$$

   mostrando que na Fórmula de Maclaurin, de ordem $\underline{n}$*, associado a função* $\underline{f}$ *, os coeficientes das pontências ímpares (que são dados por* $\dfrac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!}$*) serão iguais a zero, ou seja, o polinômio de Maclaurin será um polinômio que só possui potências pares de* $\underline{x}$*.*

4. *Deixaremos como exercício para o leitor a obtenção fórmula de Maclaurin de cada uma das funções definidas no Capítulo 4.*

5. *Utilizando-se a fórmula de Taylor podemos obter uma demonstração alternativa para o Teste da 2.a Derivada para classificação dos pontos críticos de uma função* $\underline{f}$ *que é duas-vezes diferenciável.*

   Para isto suponhamos que a função $f : [b, d] \to \mathbb{R}$ *é tal que a função* $\underline{f''}$ *é contínua em* $[b, d]$ *e* $a \in (b, d)$ *fixado.*

   Então aplicando-se a fórmula de Taylor de ordem $n = 1$ *associado a função* $\underline{f}$ *em* $x = a$*, podemos encontrar* $c \in (a, x)$*, se* $x > a$*, ou* $c \in (x, a)$ *se* $x < a$*, tal que*

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \frac{f''(c)}{2!}(x - a)^2\,. \tag{10.7}$$

   Suponhamos que $x = a$ *seja um ponto crítico da função* $\underline{f}$ *, ou seja*

$$f'(a) = 0\,.$$

Então, substituindo em (10.7), teremos:

$$f(x) - f(a) = \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2 . \tag{10.8}$$

Suponhamos que

$$f''(a) > 0 .$$

Como a função $\underline{f''}$ *é contínua em* $[b, d]$ *e* $f''(a) > 0$, *segue que existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$f''(x) > 0 , \quad \textit{para cada} \quad x \in (a-\delta, a+\delta) .$$

Estamos supondo que $0 < \delta$ *é bem pequeno, de modo que*

$$b \leq a - \delta < a + \delta \leq d .$$

Em particular, se aplicarmos a fórmula de Taylor acima no intervalo $[a, a+\delta]$ *ou no intervalo* $[a-\delta, a]$, *obteremos que*

$$f''(c) > 0 , \quad \textit{onde} \quad c \in (a, a+\delta) \quad \textit{ou} \quad c \in (a-\delta, a) ,$$

respectivamente.

Logo, se $x \in [a, a+\delta]$ *teremos, por (10.8), que*

$$f(x) - f(a) = \underbrace{f''(c)}_{>0} \underbrace{\frac{(x-a)^2}{2}}_{>0} > 0 ,$$

ou seja,

$$f(x) > f(a) , \quad \textit{para cada} \quad x \in (a, a+\delta) \tag{10.9}$$

e se $x \in [a-\delta, a]$ *teremos, por (10.8), que*

$$f(x) - f(a) = \underbrace{f''(c)}_{>0} \underbrace{\frac{(x-a)^2}{2}}_{>0} > 0$$

ou seja,

$$f(x) > f(a) , \quad \textit{para cada} \quad x \in (a-\delta, a) , \tag{10.10}$$

ou seja, (10.9) e (10.10) implicarão que a função $\underline{f}$ *terá um mínimo local em* $x = a$.

De modo semelhante, mostra-se que se

$$f''(a) < 0 ,$$

então podemos encontrar $\delta > 0$, *tal que*

$$f(x) \leq f(a) , \quad \textit{para cada} \quad x \in (a-\delta, a+\delta) ,$$

ou seja, a função $\underline{f}$ *terá um máximo local em* $x = a$.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Capítulo 11

Integrais indefinidas de funções reais de uma variável real

11.1 Primitiva de uma função real de uma variável real

Observação 11.1.1 *Sejam* $A \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio e* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Nosso objetivo neste capítulo será encontrar, se existir, uma função $F : A \to \mathbb{R}$ *que seja diferenciável em* A *tal que*

$$F'(x) = f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,.$$

Começaremos introduzindo a:

Definição 11.1.1 *Seja* $f : A \to \mathbb{R}$ *e suponhamos que exista uma função* $F : A \to \mathbb{R}$ *diferenciável em* A *tal que*

$$F'(x) = f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,.$$

Neste caso a função $\underline{F}$ *será denominada* **primitiva (ou anti-derivada) da função $\underline{f}$ em A.**

Consideremos alguns exemplos:

Exemplo 11.1.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq 3x^2 - 4x + 1\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Mostre que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$F(x) \doteq x^3 - 2x^2 + x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

é uma primitiva da função $\underline{f}$ *em* $\mathbb{R}$.

Resolução:

De fato, a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$F'(x) \doteq \frac{d}{dx}\left[x^3 - 2x^2 + x\right] = 3x^2 - 4x + 1 = f(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

mostrando que a função $\underline{F}$ é uma primitiva da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}$.

Exemplo 11.1.2 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Mostre que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$F(x) \doteq \operatorname{sen}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

é uma primitiva da função $\underline{f}$ *em* $\mathbb{R}$.

Resolução:

De fato, a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$F'(x) \doteq \frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x)] = \cos(x) = f(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

mostrando que a função $\underline{F}$ é uma primitiva da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}$.

De modo semelhante, temos o exercício resolvido:

Exercício 11.1.1 *Seja* $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1, 1)\,.$$

Mostre que a função $F : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$F(x) \doteq \arccos(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1, 1)$$

é uma primitiva da função $\underline{f}$ *em* $(-1, 1)$.

Resolução:

De fato, a função $F : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $(-1, 1)$ e

$$F'(x) \doteq \frac{d}{dx}[\arccos(x)] = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} = f(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-1, 1)\,,$$

mostrando que a função $\underline{F}$ é uma primitiva da função $\underline{f}$ em $(-1, 1)$.

11.2 Propriedades da primitiva

Temos as seguintes propriedades gerais para as primitivas de funções:

Proposição 11.2.1 *Sejam* $A \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio e* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função.*

(i) Se a função $F : A \to \mathbb{R}$ *é uma primitiva da função* $\underline{f}$ *em* A *e* $C \in \mathbb{R}$ *então a função* $G : A \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$G(x) \doteq F(x) + C\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,,$$

será um primitiva da função $\underline{f}$ *em* A.

(ii) Se A *é um* <u>*intervalo de* $\mathbb{R}$</u> *e as funções* $F, G : A \to \mathbb{R}$ *são primitivas da função* $\underline{f}$ *em* A *então podemos encontrar* $C \in \mathbb{R}$, *de modo que*

$$G(x) = F(x) + C\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,.$$

Demonstração:

De (i):

Como a função F é uma primitiva da função f em A então a função $F : A \to \mathbb{R}$ é diferenciável em A e

$$F'(x) = f(x), \quad x \in A.$$

Logo a função $G : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(x) \doteq F(x) + C, \quad \text{para cada} \quad x \in A,$$

será diferenciável em A e além disso

$$G'(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C] = F'(x) + \frac{d}{dx}C = f(x), \quad \text{para cada} \quad x \in A,$$

mostrando que a função G é uma primitiva da função f em A.

De (ii):

Como as funções F, G são primitivas da função f em A então as funções $F, G : A \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis em A e

$$F'(x) = f(x) = G'(x), \quad \text{para cada} \quad x \in A.$$

Assim a função $h : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq G(x) - F(x), \quad \text{para cada} \quad x \in A,$$

será diferenciável em A e além disso

$$h'(x) = \frac{d}{dx}[G(x) - F(x)] = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{para cada} \quad x \in A.$$

Como A é um intervalo de $\mathbb{R}$ segue, do Corolário (7.4.1), que podemos encontrar $C \in \mathbb{R}$, de modo que

$$h(x) = C, \quad \text{para cada} \quad x \in A,$$

ou seja,

$$G(x) = F(x) + C, \quad \text{para cada} \quad x \in A,$$

como queríamos mostrar.

□

Observação 11.2.1

1. *No item (ii), se A **não** for um intervalo, a conclusão poderá ser falsa, como mostra o seguinte exemplo: Sejam $f, F, G : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dadas por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} 1\,, & x \in (0,\infty) \\ -1, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}, \quad F(x) \doteq \begin{cases} x+2\,, & x \in (0,\infty) \\ -x\,, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad e \quad G(x) \doteq \begin{cases} x\,, & x \in (0,\infty) \\ -x+3\,, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}.$$

   Com isto, para $x \neq 0$, temos que (verifique!):

$$F'(x) = G'(x) = f(x)$$

   *mas **não** existe $C \in \mathbb{R}$ tal que (verifique!)*

$$F(x) = G(x) + C, \quad \textit{para cada} \quad x \neq 0.$$

2. *Se $F : A \to \mathbb{R}$ é uma primitiva da função f em A então temos que*

$$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx, \quad \textit{para cada} \quad x \in A,$$

   ou seja, a diferencial da função F será dada por:

$$dF(x) = f(x)\,dx, \quad \textit{para cada} \quad x \in A.$$

11.3 Integrais indefinidas

Observação 11.3.1 *Como conclusão da Proposição acima temos que, se* A *é um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e a função* $F : A \to \mathbb{R}$ *é uma primitiva da função* $\underline{f}$ *então qualquer outra primitiva, que indicaremos por* $G : A \to \mathbb{R}$, *da função* $\underline{f}$ *deverá ser da forma*

$$G(x) = F(x) + C, \quad \textit{para cada} \quad x \in A,$$

para algum $C \in \mathbb{R}$.

Com isto temos a:

Definição 11.3.1 *Dada uma função* $f : A \to \mathbb{R}$ *a coleção formada por todas as funções primitivas da função* $\underline{f}$ *em* A *será denominada* **integral indefinida da função $\underline{f}$ em A** *e indicada por*

$$\int f(x)\, dx\,.$$

Observação 11.3.2 *Se* A *é um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e a função* $F : A \to \mathbb{R}$ *é uma primitiva da função* $\underline{f}$ *em* A *então, da Observação (11.2.1) item 2., segue que*

$$\int f(x)\, dx = \{\, F(x) + C\,; \ \ x \in A \quad \textit{e} \quad C \in \mathbb{R}\,\}.$$

Por abuso de notação, escreveremos:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ *é arbitrária.*

Com isto temos o:

Exemplo 11.3.1 *Calcule a integral indefinida* $\displaystyle\int f(x)\, dx$, *onde a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq 3x^2 - 4x + 1\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Resolução:

Do Exemplo (11.1.1) sabemos que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + x\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

é uma primitiva da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ (ou seja, é um intervalo), temos que

$$\int f(x)\, dx = \{F(x) + C\,; \ \ x \in \mathbb{R} \text{ e } C \in \mathbb{R}\}\,,$$

ou, de modo simplificado:

$$\int 3x^2 - 4x + 1\, dx = F(x) + C = x^3 - 2x^2 + x + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

Exemplo 11.3.2 *Calcule a integral indefinida* $\int f(x)\,dx$, *onde a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

<u>**Resolução:**</u>

Do Exemplo (11.1.2) sabemos que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \operatorname{sen}(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

é uma primitiva da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ (ou seja, é um intervalo), temos que

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\,;\, x \in \mathbb{R} \text{ e } C \in \mathbb{R}\}\,,$$

ou, de modo simplificado:

$$\int \cos(x)\,dx = F(x) + C = \operatorname{sen}(x) + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

11.4 Propriedades da integral indefinida

Temos o seguinte resultado básico para integrais indefinidas:

Proposição 11.4.1 *Sejam* A *um intervalo de* $\mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ *funções dadas,* $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

Então:

1. $\int (af)(x)\,dx = a \int f(x)\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,.$

2. $\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,.$

3. $\int (f-g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,.$

4. $\int 1\,dx = x + C\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$, *onde* $C \in \mathbb{R}$ *é arbitrária.*

5. $\int x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$, *onde* $C \in \mathbb{R}$ *é arbitrária.*

6. *Se* $x \in (0, \infty)$, *temos que*

$$\int x^r\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{r+1}\,x^{r+1} + C\,, & \textit{para} \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln(x)\,, & \textit{para} \quad r = -1, \end{cases}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ *é arbitrária.*

Demonstração:

De 1.:

Se a função $F : A \to \mathbb{R}$ é uma primitiva da função $f : A \to \mathbb{R}$ então a função $a.F : A \to \mathbb{R}$ será diferenciável em A e além disso temos que

$$[aF]'(x) = aF'(x) = af(x), \quad \text{para cada} \quad x \in A, \tag{11.1}$$

ou seja, a função (aF) será uma primitiva da função (af) em A.

Além disso, temos

$$a\int f(x)\ dx = a[F(x) + C] = aF(x) + aC \overset{D \doteq aC}{=} (aF)(x) + D \overset{(11.1)}{=} \int (af)(x)\ dx, \quad \text{para cada} \quad x \in A.$$

De 2.:

Se as funções $F, G : A \to \mathbb{R}$ são primitivas das funções $f, g : A \to \mathbb{R}$, respectivamente, então as funções $F, G : A \to \mathbb{R}$ serão diferenciável em A e além disso temos que

$$F'(x) = f(x), \quad \text{e} \quad G'(x) = g(x), \quad \text{para cada} \quad x \in A.$$

Logo a função $F + G$ será uma primitiva da função $f + g$ em A pois, a função $F + G : A \to \mathbb{R}$ será diferenciável em A e como

$$[F + G]'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x), \quad \text{para cada} \quad x \in A, \tag{11.2}$$

segue que

$$\begin{aligned}\int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx &= [F(x) + C] + [G(x) + D] \overset{E \doteq C + D}{=} [F(x) + G(x)] + E \\ &= (F + G)(x) + E \overset{(11.2)}{=} \int (f + g)(x)\ dx, \quad \text{para cada} \quad x \in A.\end{aligned}$$

De 3.:

Se as funções $F, G : A \to \mathbb{R}$ são primitivas das funções $f, g : A \to \mathbb{R}$, respectivamente, então as funções $F, G : A \to \mathbb{R}$ serão diferenciável em A e além disso temos que

$$F'(x) = f(x), \quad \text{e} \quad G'(x) = g(x), \quad \text{para cada} \quad x \in A.$$

Logo a função $F - G$ será uma primitiva da função $f - g$ em A pois, a função $F - G : A \to \mathbb{R}$ será diferenciável em A e como

$$[F - G]'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x) = (f - g)(x), \quad \text{para cada} \quad x \in A, \tag{11.3}$$

segue que

$$\begin{aligned}\int f(x)\ dx - \int g(x)\ dx &= [F(x) + C] - [G(x) + D] \overset{E \doteq C - D}{=} [F(x) - G(x)] + E \\ &= (F - G)(x) + E \overset{(11.3)}{=} \int (f - g)(x)\ dx, \quad \text{para cada} \quad x \in A.\end{aligned}$$

De 4.:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = 1, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = x\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

é uma primitiva da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}$, pois a função $\underline{F}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e além disso temos que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Assim

$$\int 1 \; dx = F(x) + C = x + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

De 5.:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = x^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Então a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) \doteq \frac{1}{n+1}\, x^{n+1}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

será uma primitiva da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}$, pois a função $\underline{F}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e além disso temos que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right] = x^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Logo

$$\int x^n \; dx = F(x) + C = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

De 6.:

Para $r = -1$ consideremos a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty)\,,$$

então a função $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) \doteq \ln(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty)\,,$$

será uma primitiva de da função $\underline{f}$ em $(0, \infty)$, pois a função $\underline{F}$ é diferenciável em $(0, \infty)$ e além disso temos que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x} = f(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty)\,.$$

Logo

$$\int \frac{1}{x} \; dx = F(x) + C = \ln(x) + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty)\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

Por outro lado, pra $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = x^r = e^{r \ln(x)}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty)\,.$$

Então a função $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) \doteq \frac{1}{r+1}\, x^{r+1}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty)\,,$$

é uma primitiva de da função $\underline{f}$ em $(0, \infty)$, pois a função $\underline{F}$ é diferenciável em $(0, \infty)$ e além disso temos que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{r+1} x^{r+1}\right] = x^r\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty)\,.$$

Logo

$$\int x^r\, dx = F(x) + C = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty)\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária, como queríamos demonstrar.

□

Observação 11.4.1

1. *Com as propriedades 1. até 5. podemos obter a integral indefinida de qualquer função polinomial.*

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. *Para o caso $r = -1$, a propriedade 6. pode ser estendida a seguinte situação:*

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

   onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Como exercício resolvido temos:

Exercício 11.4.1 *Calcular as integrais indefinidas*

(i) $\displaystyle\int \left(4x^2 - 3x + 2\right)\, dx\,,$ *para* $x \in \mathbb{R}$ (ii) $\displaystyle\int \left[\sec^2(x) + \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{1+x^2}\right]\, dx\,,$ *para* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Resolução:

De (i):

Da Proposição acima segue que:

$$\begin{aligned}\int \left(4x^2 - 3x + 2\right)\, dx, &= \int 4x^2\, dx + \int (-3x)\, dx + \int 2\, dx = 4\int x^2\, dx - 3\int x\, dx + 2\int 1\, dx \\ &= 4\frac{1}{3}x^3 - 3\frac{1}{2}x^2 + 2x + C = \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,\end{aligned}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

De (ii):

Da Proposição acima segue que:

$$\int \left[\sec^2(x) + \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{1+x^2}\right] dx = \int \sec^2(x)\, dx + \int \operatorname{sen}(x)\, dx + \int \frac{1}{1+x^2}\, dx$$
$$\overset{\operatorname{tg}'(x)=\sec^2(x);\, -\cos'(x)=\operatorname{sen}(x);\ \operatorname{arctg}'(x)=\frac{1}{1+x^2}}{=} \operatorname{tg}(x) - \cos(x) + \operatorname{arctg}(x) + C,$$
$$\text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária e estamos considerando $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Temos também o seguinte exercício resolvido:

Exercício 11.4.2 *Consideremos uma partícula movendo-se sobre uma reta onde sua aceleração em cada instante é dada por*

$$a(t) = (2t-1)\, m/s^2, \quad \textit{para cada} \quad t \in [0,\infty),$$

no instante $t = 1\, s$, *sua velocidade é* $v_o = 3\, m/s$ *e sua posição é* $x_o = 4\, m$.

Encontrar a expressão da velocidade e a posição da partícula em cada instante $\underline{t}$.

Resolução:

Sabemos que se $x = x(t)$, para cada $t \in [0,\infty)$, nos dá o espaço em função do tempo (como uma função diferenciável em $\underline{t}$).

Então teremos

$$v(t) = x'(t), \quad \text{para cada} \quad t \in (0,\infty)$$

e

$$a(t) = v'(t), \quad \text{para cada} \quad t \in (0,\infty).$$

Assim, segue que

$$v'(t) = a(t) = 2t - 1$$

que implicará e,

$$v(t) = \int a(t)\, dt = \int (2t-1)\, dt \overset{\text{Exercício}}{=} t^2 - t + C, \text{ para cada } t \in [0,\infty),$$

ou seja,

$$v(t) = t^2 - t + C, \quad \text{para cada} \quad t \in [0,\infty).$$

Mas

$$3 = v(1) = 1 - 1 + C, \quad \text{ou seja,} \quad C = 3,$$

logo

$$v(t) = t^2 - t + 3, \quad \text{para cada} \quad t \in [0,\infty).$$

Como

$$x'(t) = v(t) = t^2 - t + 3, \quad \text{para cada} \quad t \in [0,\infty)$$

segue que

$$x(t) = \int v(t)\, dt = \int \left(t^2 - t + 3\right) dt \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 3t + C, \text{ para cada } t \in [0,\infty),$$

ou seja,

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 3t + C, \quad \text{para cada} \quad t \in [0,\infty).$$

Mas
$$4 = x(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 3 + C, \quad \text{isto é,} \quad C \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{7}{6}.$$
Portanto
$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{6}, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, \infty).$$

11.5 Algumas técnicas para calcular algumas integrais indefinidas

Começaremos pelo

Teorema 11.5.1 *(Substituição Direta para a Integral Indefinida) Sejam* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *intervalos de* $\mathbb{R}$ *e suponhamos que a função* $g : A \to B$ *é diferenciável em* A *e a função* $f : B \to \mathbb{R}$ *admite a função* $F : B \to \mathbb{R}$ *como uma primitiva definida em* B.

Então a função $H : A \to \mathbb{R}$ *dada por*
$$H(x) \doteq F[g(x)], \quad \textit{para cada} \quad x \in A,$$
é uma primitiva da função $h : A \to \mathbb{R}$ *dada por*
$$h(x) \doteq f[g(x)]\, g'(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in A.$$

Em particular,
$$\int f[g(x)]\, g'(x)\, dx = F[g(x)] + C, \quad \textit{para cada} \quad x \in A, \tag{11.4}$$
onde $C \in \mathbb{R}$ *é arbitrária.*

Demonstração:

Como a função $F : B \to \mathbb{R}$ é primitiva da função $\underline{f}$ em B segue que a função $\underline{f}$ será diferenciável em B e além disso
$$F'(y) = f(y), \quad \text{para cada} \quad y \in B. \tag{11.5}$$

Mas, a função $\underline{g}$ é diferenciável em A, logo a função $H \doteq F \circ g$ será diferenciável em A e além disso, da Regra da Cadeia, teremos:
$$H'(x) = \frac{d}{dx}[F \circ g](x) = F'[g(x)]\, g'(x) \overset{(11.5)}{=} f[g(x)]\, g'(x), \quad \text{para cada} \quad x \in A,$$
ou seja, a função $H = F \circ g$ será uma primitiva da função $h \doteq (f \circ g)\, g'$, isto é,
$$\int f[g(x)]\, g'(x)\, dx = F[g(x)] + C, \quad \text{para cada} \quad x \in A,$$
onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária, completando a demonstração.

□

Observação 11.5.1

1. *Em um certo sentido o resultado acima nos diz como fazer uma mudanças de variáveis na integral indefinida, a saber:*
$$\int f(u)\, du \overset{u \doteq g(x) \Rightarrow du = g'(x)\, dx}{=} \int f[g(x)]\, g'(x)\, dx$$

e ao final do cáculo da integral indefinida, do lado direito, voltamos a variável original $\underline{u}$, *ou seja, fazemos*

$$x = g^{-1}(u)\,.$$

Neste caso, a substituição

$$u = g(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,,$$

deverá ser uma mudança de variáveis, isto é, deverá ser **bijetora !**

Isto será de grande importância na próxima seção.

2. *O resultado acima pode ser reescrito da seguinte forma:*

$$\int f[g(x)])\, g'(x)\, dx \stackrel{u \doteq g(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx}{=} \int f(u)\, du \stackrel{F'(u)=f(u)}{=} F(u) + C$$
$$\stackrel{u=g(x)}{=} F[g(x)] + C\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ *é arbitrária.*

Apliquemos isto ao:

Exemplo 11.5.1 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{1}{(ax+b)^2}\, dx\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}\,,$$

onde $a \neq 0$ *e* $b \in \mathbb{R}$ *estão fixos.*

Resolução:

Se considerarmos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) \doteq ax + b\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

e a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(y) \doteq \frac{1}{y^2}\,, \quad \text{para cada} \quad y \in (0, \infty)\,,$$

então temos que a função $\underline{g}$ será diferenciável em $\mathbb{R}$,

$$g'(x) = a\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

e a função $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(y) \doteq \frac{-1}{y}\,, \quad \text{para cada} \quad y \in (0, \infty)\,,$$

será um primitiva da função $\underline{f}$.

Aa verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Além disso temos:

$$\int \frac{1}{(ax+b)^2}\, dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(ax+b)^2}\, a\, dx \stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{a} \int f[g(x)]\, g'(x)\, dx$$
$$\stackrel{\text{Teor. (11.5.1)}}{=} \frac{1}{a}\{F[g(x)] + D\} = \frac{1}{a}\left[\frac{-1}{ax+b} + D\right] \stackrel{C \doteq \frac{D}{a}}{=} \frac{1}{a}\,\frac{-1}{ax+b} + C\,, \ \text{para } x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)\,,$$

ou seja,

$$\int \frac{1}{(ax+b)^2}\, dx = \frac{-1}{a(ax+b)} + C\,, \quad \text{para} \quad x \in \left(-\frac{b}{a}\right)\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

De modo semelhante, podemos considerar a função $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(y) \doteq \frac{1}{y^2}\,, \quad \text{para cada} \quad y \in (-\infty, 0)$$

e a função $F : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(y) \doteq \frac{-1}{y}\,, \quad \text{para cada} \quad y \in (-\infty, 0)\,,$$

que será um primitiva da função $\underline{f}$ e aplicar o mesmo raciocínio acima para obter

$$\int \frac{1}{(ax+b)^2}\, dx = \frac{-1}{a(ax+b)} + D\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\infty, \frac{-b}{a}\right)\,,$$

onde $D \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

No exemplo a seguir agiremos mais diretamente:

Exemplo 11.5.2 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\, dx\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Resolução:

Neste caso, pelo Teorema (11.5.1), temos, para cada $x \in [-\pi, \pi]$ segue que:

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\, dx = \int [\underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{=u}]^2 \underbrace{\cos(x)\, dx}_{=du} \overset{u \doteq \operatorname{sen}(x) \;\Rightarrow du = \frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x)]\, dx = \cos(x)\, dx}{=} \int u^2\, du = \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$\overset{u=\operatorname{sen}(x)}{=} \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x) + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [-\pi, \pi]\,,$$

ou seja,

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\, dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x) + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

O próximo exemplo é um pouco mais delicado:

Exemplo 11.5.3 *Calcular a integral indefinida*

$$\int x^2\sqrt{1+x}\, dx\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (-1, \infty)\,.$$

Resolução:

Neste caso, pelo Teorema (11.5.1), para cada $x \in (-1, \infty)$, temos:

$$\int x^2\sqrt{1+x}\, dx \overset{u \doteq \sqrt{x+1} \;\Rightarrow u^2 = x+1 \;\Rightarrow\; \frac{d}{du}[u^2]\, du = \frac{d}{dx}[x+1]\, dx \;\Rightarrow\; 2u\, du = dx}{=} \int \left(u^2 - 1\right)^2 u\, 2u\, du$$

$$\overset{\text{Exercício}}{=} \int \left(2u^6 - 4u^4 + 2u^2\right)\, du \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{2}{7}u^7 - \frac{4}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 + C$$

$$\overset{u=\sqrt{x+1}}{=} \frac{2}{7}\left(\sqrt{x+1}\right)^7 - \frac{4}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-1, \infty)\,,$$

ou seja,

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-1,\infty)\,.$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

Como exercício resolvido temos o:

Exercício 11.5.1 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Resolução:

Lembremos que

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Logo, pelo Teorema (11.5.1), temos:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx &= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{1}{2}\cos(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx \\
&\overset{u \doteq 2x \Rightarrow \frac{d}{du}[u]du = \frac{d}{dx}[2x]\,dx \Rightarrow 1\,du = 2\,dx\,,\ \text{ou}\ \frac{1}{2}du = dx}{=} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos(u)\frac{1}{2}\,du \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(u) + C \overset{u=2x}{=} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C\,, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

O próximo resultado será de muita utilidade no cálculo de muitas integrais indefinidas.

Teorema 11.5.2 *(Integração por Partes para Integral Indefinida) Sejam* A *um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *funções diferenciáveis em* A*.*

Então

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,. \tag{11.6}$$

Demonstração:

Como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são diferenciáveis em A, segue que a função $f.g$ será diferenciável em A.

Além disso

$$(f.g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x), \quad \text{para cada} \quad x \in A\,,$$

ou ainda,

$$f(x)\,g'(x) = (f\,g)'(x) - f'(x)\,g(x), \quad \text{para cada} \quad x \in A,$$

assim

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,g'(x)\,dx &= \int \left[(f\,g)'(x) - f'(x)\,g(x)\right]\,dx \overset{\text{Prop. (11.4.1) item 2.}}{=} \int (f.g)'(x)\,dx - \int f'(x)\,g(x)\,dx \\
&\overset{\text{Def. (11.3.1)}}{=} (f\,g)(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx, \quad \text{para cada} \quad x \in A\,,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

$\square$

Observação 11.5.2 *Aplicando o Teorema da Substituição para Integrais Indefinidas, a ambos os lados das integrais indefinidas acima, obteremos:*

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx \overset{u \doteq f(x),\, v \doteq g(x) \Rightarrow dv = g'(x)\, dx}{=} \int u\, dv\,,$$
$$\int g(x)\, f'(x)\, dx \overset{u \doteq f(x),\, v \doteq g(x) \Rightarrow du = f'(x)\, dx}{=} \int v\, du\,.$$

Podemos escrever, de modo abreviado, a expressão (11.6) como:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du\,.$$

Apliquemos esse resultado a alguns exemplos.

Exemplo 11.5.4 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\, dx\,,$$

em $\mathbb{R}$.

<u>**Resolução:**</u>

No Exercício (11.5.1) calculamos esta integral indefinida utilizando o Teorema da Substituição para Integrais Indefinidas.

A seguir calcularemos esta mesma integral indefinida utilizando o Teorema da Integração por Partes para Integrais Indefinidas.

Para isto observemos que:

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\, dx = \int \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{=u}\, \underbrace{\operatorname{sen}(x)\, dx}_{=dv} \overset{\text{Teor. (11.5.2)}}{=} \int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \doteq \operatorname{sen}(x) \Rightarrow du = \dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x)]\, dx = \cos(x)\, dx \\[2ex] dv \doteq \operatorname{sen}(x)\, dx \Rightarrow v = \displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\, dx = -\cos(x) + C \Rightarrow v \overset{C=0}{=} -\cos(x) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{sen}(x)\,[-\cos(x)] - \int [-\cos(x)]\, \cos(x)\, dx = -\operatorname{sen}(x)\, \cos(x) + \int \cos^2(x)\, dx \\
&= -\operatorname{sen}(x)\, \cos(x) + \int \left[1 - \operatorname{sen}^2(x)\right] dx = -\operatorname{sen}(x)\, \cos(x) + \int 1\, dx - \int \operatorname{sen}^2(x)\, dx \\
&= -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + x - \int \operatorname{sen}^2(x)\, dx\,,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + x - \int \operatorname{sen}^2(x)\, dx\,,$$

ou seja,

$$2 \int \operatorname{sen}^2(x)\, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + x + D\,,$$

onde $D \in \mathbb{R}$ é arbitrário, ou ainda ($C \doteq \dfrac{D}{2}$),

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

Um outro exemplo em que podemos aplicar o Teorema da Substituição e da Integração por Partes para Integrais Indefinidas é:

Exemplo 11.5.5 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \operatorname{arcsen}(x)\, dx\,,$$

em $(-1, 1)$.

Resolução:

Neste exemplo aplicaremos Integração por Partes e Substituição para Integrais Indefinidas.

Observemos que

$$\int \operatorname{arcsen}(x)\, dx = \int \underbrace{\operatorname{arcsen}(x)}_{=u} \underbrace{dx}_{=dv} = \int u\, dv \overset{\text{Teor. (11.5.2)}}{=} uv - \int v\, du$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \doteq \operatorname{arcsen}(x) \Rightarrow du = \dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsen}(x)]\, dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ \\ dv \doteq dx \Rightarrow v = \displaystyle\int 1\, dx = x + C \Rightarrow v \overset{C=0}{=} x \end{array} \right\}$$

$$= \operatorname{arcsen}(x)\, x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, x\, dx$$

$$\overset{u \doteq 1-x^2 \Rightarrow du = -2x\, dx \Rightarrow -\frac{1}{2} du = x\, dx}{=} x \operatorname{arcsen}(x) - \int \frac{1}{\sqrt{u}} \left(-\frac{1}{2}\right) du$$

$$= x \operatorname{arcsen}(x) + \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}}\, du = x \operatorname{arcsen}(x) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}\right] + C$$

$$\overset{u = 1-x^2}{=} x \operatorname{arcsen}(x) + \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} + C\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário, isto é,

$$\int \operatorname{arcsen}(x)\, dx = x \operatorname{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2} + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-1, 1)\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

No próximo exemplo aplicaremos Integração por Partes para Integrais Indefinidas.

Exemplo 11.5.6 *Calcular a integral indefinida*

$$\int x \operatorname{sen}(x)\, dx\,.$$

em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Observemos que

$$\int x\,\mathrm{sen}(x)\,dx = \int \underbrace{x}_{=u} \cdot \underbrace{\mathrm{sen}(x)\,dx}_{=dv} = \int u\,dv \overset{\text{Teor. (11.5.2)}}{=} uv - \int v\,du$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \doteq x \Rightarrow du = \dfrac{d}{dx}[x]\,dx = 1\,dx \\ \\ dv \doteq \mathrm{sen}(x)\,dx \Rightarrow v = \displaystyle\int \mathrm{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C \Rightarrow v \overset{C=0}{=} -\cos(x) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= x\,[-\cos(x)] - \int [-\cos(x)]\,dx \\ &= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx \\ &= -x\cos(x) + \mathrm{sen}(x) + C, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário, isto é,

$$\int x\,\mathrm{sen}(x)\,dx = -x\cos(x) + \mathrm{sen}(x) + C, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

Utilizando Integração por partes duas vezes, podemos resolver o:

Exemplo 11.5.7 *Calcular a integral indefinida*

$$\int x^2 \cos(x)\,dx,$$

em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Observemos que

$$\int x^2\cos(x)\,dx = \int \underbrace{x^2}_{=u} \underbrace{\cos(x)\,dx}_{=dv} = \int u\,dv \overset{\text{Teor. (11.5.2)}}{=} uv - \int v\,du$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \doteq x^2 \Rightarrow du = \dfrac{d}{dx}[x^2]\,dx = 2x\,dx \\ \\ dv \doteq \cos(x)\,dx \Rightarrow v = \displaystyle\int \cos(x)\,dx = \mathrm{sen}(x) + C \Rightarrow v \overset{C=0}{=} \mathrm{sen}(x) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= x^2\,\mathrm{sen}(x) - \int \mathrm{sen}(x)\,2x\,dx = x^2\,\mathrm{sen}(x) - 2\int x\,\mathrm{sen}(x)\,dx \\ &\overset{\text{Exemplo (11.5.6)}}{=} x^2\,\mathrm{sen}(x) - 2[-x\cos(x) + \mathrm{sen}(x)] + C, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{11.7}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário, isto é,

$$\int x^2\cos(x)\,dx = x^2\,\mathrm{sen}(x) + 2x\cos(x) - 2\,\mathrm{sen}(x) + C, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

Neste próximo exercício aplicaremos duas vezes Integração por Partes para calcularmos a Integral Indefinida em questão.

Exercício 11.5.2 *Calcular a integral indefinida*

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x)\, dx\,,$$

em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Observemos que

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x)\, dx = \int \underbrace{x^2}_{=u}\, \underbrace{\operatorname{sen}(x)\, dx}_{=dv} = \int u\, dv \overset{\text{Teor. (11.5.2)}}{=} uv - \int v\, du$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \doteq x^2 \Rightarrow du = \dfrac{d}{dx}\left[x^2\right] dx = 2x\, dx \\[2ex] dv \doteq \operatorname{sen}(x)\, dx \Rightarrow v = \int \operatorname{sen}(x)\, dx \underset{=}{=} -\cos(x) + C \Rightarrow v \overset{C=0}{=} -\cos(x) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2\,(-\cos(x)) - \int [-\cos(x)]\, 2x\, dx \\
&= -x^2 \cos(x) + 2 \int \underbrace{x}_{=u}\, \underbrace{\cos(x)\, dx}_{=dv} \overset{\text{Teor. (11.5.2)}}{=} -x^2 \cos(x) + 2\left[uv - \int v\, du\right]
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \doteq x \Rightarrow du = \dfrac{d}{dx}[x]\, dx = 1\, dx \\[2ex] dv \doteq \cos(x)\, dx \Rightarrow v \underset{=}{=} \int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x) + C \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= -x^2 \cos(x) + 2\left[x \operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)\, 1\, dx\right] \\
&= -x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) - 2[-\cos(x)] + C \\
&= -x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2\cos(x) + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário, isto é,

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x)\, dx = \left(2 - x^2\right) \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

Observação 11.5.3 *Os três Exemplos acima podem ser estendidos a situações mais gerais, como por exemplo para calcular as integrais indefinidas*

$$\int x^n \operatorname{sen}(x)\, dx \quad \textit{ou} \quad \int x^n \cos(x)\, dx$$

em $\mathbb{R}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Basta aplicarmos n*-vezes Integração por Partes para Integrais Indefinidas para encontrarmos as integrais indefinidas envolvidas.*

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Outra situação em que Integração por Partes para Integrais Indefinidas é útil é dado pelo:

Exemplo 11.5.8 *Calcule a integral indefinida*

$$\int e^x \cos(x)\, dx$$

em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Observemos que

$$\underbrace{\int \underbrace{e^x}_{=u} \underbrace{\cos(x)\, dx}_{=dv}}_{I} \underset{=}{\left\{ \begin{array}{l} u \doteq e^x \Rightarrow du = \dfrac{d}{dx}[e^x]\, dx = e^x\, dx \\[2ex] dv \doteq \cos(x)\, dx \Rightarrow v = \displaystyle\int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x) + C \Rightarrow v \overset{C=0}{=} \operatorname{sen}(x) \end{array} \right\}}$$

$$\overset{\text{Teor. (11.5.2)}}{=} u\,v - \int v\, du = e^x \operatorname{sen}(x) - \int \underbrace{e^x}_{=u} \underbrace{\operatorname{sen}(x)\, dx}_{=dv}$$

$$\overset{\text{Teor. (11.5.2)}}{=} e^x \operatorname{sen}(x) - \left[u\,v - \int v\, du\right]$$

$$\underset{=}{\left\{ \begin{array}{l} u \doteq e^x \Rightarrow du = \dfrac{d}{dx}[e^x]\, dx = e^x\, dx \\[2ex] dv \doteq \operatorname{sen}(x)\, dx \Rightarrow v = \displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\, dx = -\cos(x) + C \Rightarrow v \overset{C=0}{=} -\cos(x) \end{array} \right\}}$$

$$= e^x \operatorname{sen}(x) - \left[e^x[-\cos(x)] - \int e^x(-\cos(x))\, dx\right]$$

$$= e^x[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)] - \underbrace{\int e^x \cos(x)\, dx}_{I}.$$

Logo

$$2\int e^x \cos(x)\, dx = e^x[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)] + C, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \frac{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{2} + C, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observação 11.5.4 *De modo semelhante podemos calcular*

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)\, dx$$

em $\mathbb{R}$.

A obtenção desta integral indefinida será deixada como exercício para o leitor.

Para finalizar temos os seguintes exercícios resolvidos:

Exercício 11.5.3 *Calcular a integral indefinida*

$$\int x \operatorname{arctg}(x)\,dx$$

em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Resolução:

Aplicaremos Integração por Partes para Integrais Indefinidas.

Para isto observemos que:

$$\int x \operatorname{arctg}(x)\,dx = \int \underbrace{\operatorname{arctg}(x)}_{=u}\, \underbrace{x\,dx}_{=dv} = \int u\,dv \overset{\text{Teor. (11.5.2)}}{=} u\,v - \int v\,du$$

$$\left\{\begin{array}{l} u \doteq \operatorname{arctg}(x) \Rightarrow du = \frac{d}{dx}[\operatorname{arctg}(x)]\,dx = \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ \\ dv \doteq x\,dx \Rightarrow v = \int x\,dx \underset{=}{=} \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow v \overset{C=0}{=} \frac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{arctg}(x)\,\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\left[\int 1\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}x + \operatorname{arctg}(x) + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário, isto é,

$$\int x \operatorname{arctg}(x)\,dx = -\frac{1}{2}x + \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg}(x) + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

Exercício 11.5.4 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \ln(x)\,dx$$

em $(0, \infty)$.

Resolução:

Aplicaremos Integração por Partes para Integrais Indefinidas.

Para isto observemos que:

$$\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{=u} . \underbrace{dx}_{=dv} = \int u\,dv \overset{\text{Teor. (11.5.2)}}{=} uv - \int v\,du$$

$$\left\{\begin{array}{l} u \doteq \ln(x) \Rightarrow du = \frac{d}{dx}[\ln(x)]\,dx = \frac{1}{x}\,dx \\ \\ dv \doteq 1\,dx \Rightarrow v = \int 1\,dx \underset{=}{=} x + C \Rightarrow v \overset{C=0}{=} x \end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned} &= x \ln(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx = x \ln(x) - \int 1\,dx \\ &= x \ln(x) - x + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty)\,, \end{aligned}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário, isto é,

$$\int \ln(x)\, dx = x \ln(x) - x + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty)\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

11.6 Outra técnicas para o cálculo de integrais indefinidas

A seguir exibiremos outras técnicas para encontrar integrais indefinidas.

11.6.1 Integrais indefinidas envolvendo expressões dos tipos: $a^2 - x^2$, $a^2 + x^2$ ou $x^2 - a^2$, para $a \neq 0$ fixado.

Começaremos pela substituições trigonométricas ou hiperbólicas.

Observação 11.6.1 *Seja* $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *fixado.*

Para tentarmos encontrar uma integral indefinida que envolvem expressões do tipo:

(i) $a^2 - x^2$ *;*

(ii) $a^2 + x^2$ *;*

(iii) $x^2 - a^2$

tentaremos uma mudança de variáveis do tipo:

(i') Para o caso (i), tentaremos:

$$x \doteq a \,\mathrm{sen}(\theta) \tag{11.8}$$

ou

$$x \doteq a \,\mathrm{tgh}(u)\,, \tag{11.9}$$

para $\theta \in I$ *ou* $u \in J$.

(ii') Para o caso (ii), tentaremos:

$$x \doteq a \,\mathrm{tg}(\theta) \tag{11.10}$$

ou

$$x \doteq a \,\mathrm{senh}(u)\,, \tag{11.11}$$

para $\theta \in I$ *ou* $u \in J$.

(iii') Para o caso (iii), tentaremos:

$$x \doteq a \sec(\theta) \tag{11.12}$$

ou

$$x \doteq a \cosh(u)\,, \tag{11.13}$$

para $\theta \in I$ *ou* $u \in J$.

Observação 11.6.2 *Observemos que os* I, J *são subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *de modo que as função envolvida seja bijetora sobre a sua imagem, diferenciáveis e suas funções inversas também deverão ser diferenciáveis nos seus respectivos domínios.*

Utilizamos, em geral, as seguintes identidades trigométricas ou hiperbólicas:

(i") Para o caso (i'), se utilizarmos a mudança de variáveis (11.8)*, poderemos precisar das seguintes relações:*

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \qquad e \qquad \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}(\theta) = \cos(\theta)\,, \tag{11.14}$$

para $\theta \in I$.

Se utilizarmos a mudança de variáveis (11.9)*, precisaremos das relações:*

$$\operatorname{tgh}^2(u) + \operatorname{sech}^2(u) = 1 \qquad e \qquad \frac{d}{du}\operatorname{tgh}(u) = \operatorname{sech}^2(u)\,, \tag{11.15}$$

para $u \in J$.

(ii") Para o caso (ii'), se utilizarmos a mudança de variáveis (11.10)*, poderemos precisar das relações:*

$$1 + \operatorname{tg}^2(\theta) = \sec^2(\theta) \qquad e \qquad \frac{d}{d\theta}\operatorname{tg}(\theta) = \sec^2(\theta)\,, \tag{11.16}$$

para $\theta \in I$.

Se utilizarmos a mudança de variáveis (11.11)*, precisaremos das relações:*

$$\cosh^2(u) - \operatorname{senh}^2(u) = 1 \qquad e \qquad \frac{d}{du}\operatorname{senh}(u) = \cosh(u)\,, \tag{11.17}$$

para $u \in J$.

(iii"') Para o caso (iii'), se utilizarmos a mudança de variáveis (11.12)*, poderemos precisar das relações:*

$$1 + \operatorname{tg}^2(\theta) = \sec^2(\theta) \qquad e \qquad \frac{d}{d\theta}\sec(\theta) = \sec(\theta)\operatorname{tg}(\theta)\,, \tag{11.18}$$

para $\theta \in I$.

Se utilizarmos a mudança de variáveis (11.13) *poderemos precisar das relações:*

$$\cosh^2(u) - \operatorname{senh}^2(u) = 1 \qquad e \qquad \frac{d}{du}\cosh(u) = \operatorname{senh}(u)\,, \tag{11.19}$$

para $u \in J$.

Vale observar que as substituições acima deverão, na verdade, ser mudanças de variáveis, ou seja, funções bijetoras.

Para isto teremos, em geral, que restrigir os domínios das funções envolvidas, convenientemente, para este fim.

Apliquemos isto ao seguinte exemplo:

Exemplo 11.6.1 *Para* $a > 0$ *fixado, calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx$$

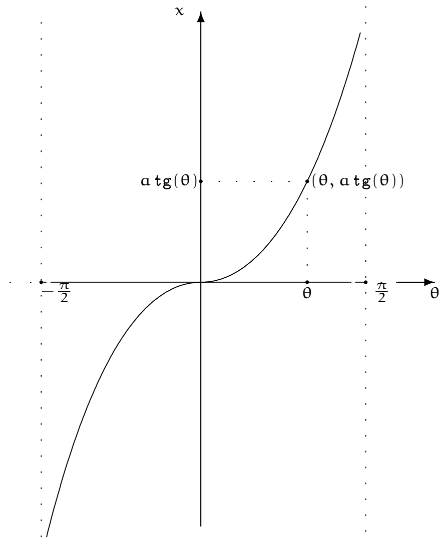
em $\mathbb{R}$.

Resolução:

A integral indefinida acima envolve uma expressão do tipo (ii).

Neste caso tentaremos a mudança do tipo (11.10), isto é, consideraremos a mudança de variáveis (ou seja, uma função bijetora, ver figura abaixo):

$$\begin{array}{ccc} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & x \doteq a\,\mathrm{tg}(\theta) \end{array}.$$



Com isto, pelo Teorema da Substituição para Integrais Indefinidas, teremos:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx &\overset{x \doteq a\,\mathrm{tg}(\theta),\, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = a \frac{d}{d\theta}[\mathrm{tg}(\theta)]d\theta = a\sec^2(\theta)\, d\theta}{=} \int \frac{1}{[a\,\mathrm{tg}(\theta)]^2 + a^2}\, a\sec^2(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\underbrace{\mathrm{tg}^2(\theta) + 1}_{\overset{(11.16)}{=} \sec^2(\theta)}} \sec^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{a} \int 1\, d\theta \\ &= \frac{1}{a}\theta + C \overset{\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)}{=} \frac{1}{a} \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a} \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Podemos aplicar a mesma técnica para o:

Exemplo 11.6.2 *Para* $a > 0$ *fixado, calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx,$$

para $x \in (-a, a)$.

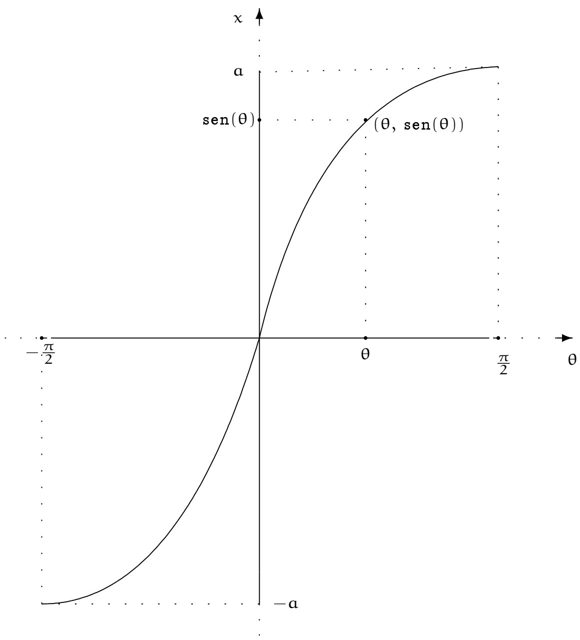
Resolução:

Esta integral é do tipo (i) e tentaremos uma mudança de variáveis do tipo (11.8), isto é:

$$x = a\,\mathrm{sen}(\theta)\,, \quad \text{assim teremos} \quad dx = a\frac{d}{d\theta}[\,\mathrm{sen}(\theta)]\,d\theta = a\cos(\theta)\,d\theta\,. \tag{11.20}$$

Observemos que na verdade a mudança de variáveis deverá ser da forma (uma função bijetora, ver figura abaixo):

$$\begin{array}{ccc} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \to & (-a, a) \\ \theta & \mapsto & x \doteq a\,\mathrm{sen}(\theta) \end{array}.$$



Com isto, pelo Teorema da Substituição para Integrais Indefinidas, teremos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx &\overset{(11.20)}{=} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - [a\,\mathrm{sen}(\theta)]^2}}\,a\cos(\theta)\,d\theta = a\int \frac{1}{\sqrt{a^2\,[1 - \mathrm{sen}^2(\theta)]}}\cos(\theta)\,d\theta \\
&= a\int \frac{1}{\underbrace{\sqrt{a^2}}_{|a|}\sqrt{\cos^2(\theta)}}\cos(\theta)\,d\theta \overset{a>0}{=} \frac{a}{a}\int \frac{1}{|\cos(\theta)|}\cos(\theta)\,d\theta \\
&\overset{\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos(t)>0}{=} \int 1\,d\theta = \theta + C \overset{\theta\overset{(11.20))}{=}\mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)}{=} \mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C\,,
\end{aligned}$$

para cada $x \in (-a, a)$, onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

Portanto,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in (-a, a)\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

Temos mais um exemplo interessante,

Exemplo 11.6.3 *Para $a > 0$ fixado, calcular a integral indefinida*

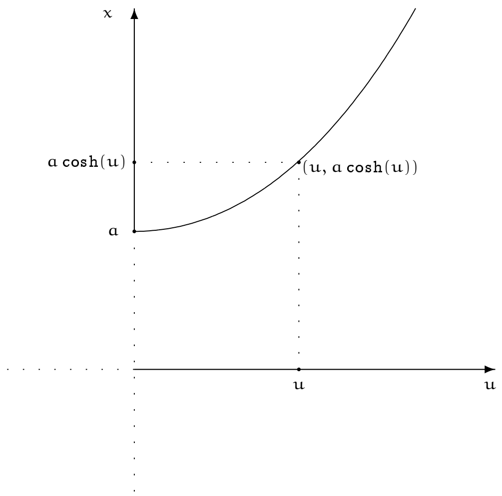
$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx\,,$$

para $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.

Resolução:

Neste caso temos que a integral indefinida acima é do tipo (iii) e assim poderíamos fazer a mudança de variáveis da forma (11.13), isto é, (será uma função bijetora, ver figura abaixo):

$$\begin{array}{ccc} (0,\infty) & \to & (a,\infty) \\ u & \mapsto & x \doteq a\cosh(u) \end{array} .$$



Deixaremos como exercício para o leitor a aplicação desta mudança de variáveis a integral definida acima e os cálculos para encontrá-la.

Um outro modo de encontrar a integral indefinida acima seria:

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\left\{\int\frac{1}{x-a}\,dx - \int\frac{1}{x+a}\,dx\right\}$$

$$\overset{\left\{\begin{array}{l} u \doteq x-a \Rightarrow du = dx \\ v \doteq x+a \Rightarrow dv = dx\end{array}\right\}}{=} \frac{1}{2a}\left(\int\frac{1}{u}\,du - \int\frac{1}{v}\,dv\right) = \frac{1}{2a}\left[\ln(|u|)-\ln(|v|)\right]+C$$

$$\overset{u=x-a,\,v=x+a}{=} \frac{1}{2a}\left[\ln(|x-a|)-\ln(|x+a|)\right]+C\,, \quad \text{para cada} \quad x\in(-\infty,-a)\cup(a,\infty)\,,$$

ou seja,

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\left[\ln(|x-a|)-\ln(|x+a|)\right]+C\,, \quad \text{para cada} \quad x\in(-\infty,-a)\cup(a,\infty)\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

Observação 11.6.3 *A idéia de como resolver a integral indefinida acima estará, como veremos, diretamente relacionada com o modo como resolveremos integrais indefinidas envolvendo funções racionais.*

O método para encontrar a integral indefinida de funções racionais, será desenvolvido em uma seção mais adiante.

A seguir exibiremos vários exercícios resolvidos.

Exercício 11.6.1 *Para $a > 0$ fixado, calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\, dx\,,$$

para $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.

Resolução:

Observemos que deveremos ter $x^2 - a^2 \geq 0$ e $x \neq 0$ ou, equivalentemente, $|x| \geq a$ e $x \neq 0$, ou ainda, $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ (como $a > 0$ teremos, necessariamente, que $x \neq 0$).

Neste caso estamos no caso (iii) acima e tentaremos uma mudança de variáveis do tipo (11.12), isto é:

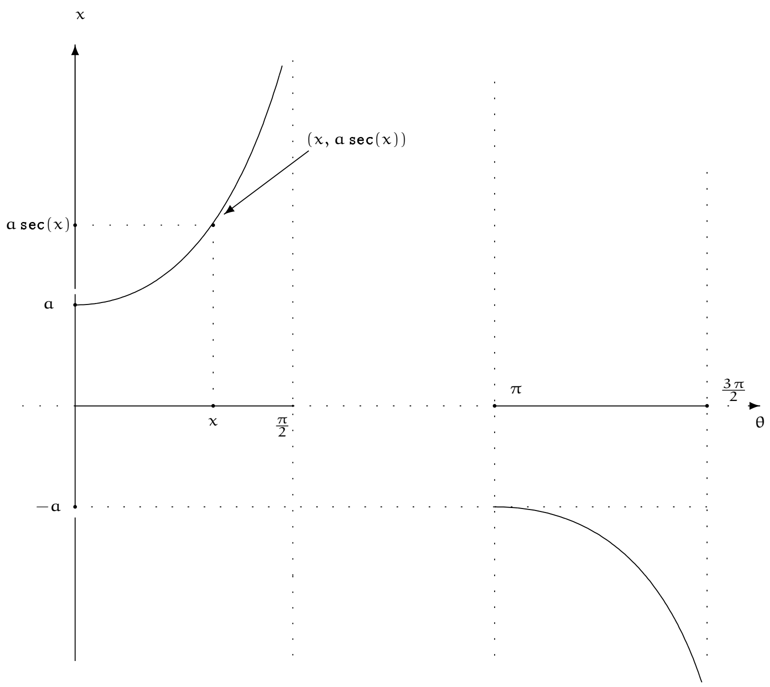
$$x = a\sec(\theta)\,, \quad \text{assim teremos} \quad dx = a\frac{d}{d\theta}[\sec(\theta)]d\theta = a\sec(\theta)\ \mathrm{tg}(\theta)\ d\theta, \tag{11.21}$$

onde

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)\,, \quad \text{se} \quad x \in [a, \infty) \quad \text{e} \quad \theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)\,, \quad \text{se} \quad x \in (-\infty, -a]\,.$$

Assim a mudança de variáveis será da forma (uma função bijetora, veja figura abaixo):

$$\begin{array}{ccc} \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) & \to & (-\infty, -a) \cup (a, \infty) \\ \theta & \mapsto & x \doteq a\sec(\theta) \end{array}.$$



Com isto, pelo Teorema da Substituição para Integrais Indefinidas, teremos:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx \overset{(11.21)}{=} \int \frac{\sqrt{[a\sec(\theta)]^2-a^2}}{a\sec(\theta)}\,a\sec(\theta)\,\operatorname{tg}(\theta)\,d\theta = \int \sqrt{a^2\left[\sec(\theta)]^2-1\right]}\,\operatorname{tg}(\theta)\,d\theta$$

$$\overset{[\sec(\theta)]^2-1=\operatorname{tg}^2(\theta)}{=} \int \sqrt{a^2\operatorname{tg}^2(\theta)}\,\operatorname{tg}(\theta)\,d\theta = \int \underbrace{|a|}_{\overset{a\geq 0}{=}a}\,|\operatorname{tg}(\theta)|\operatorname{tg}(\theta)\,d\theta$$

$$\overset{\theta\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{3\pi}{2})\Rightarrow\operatorname{tg}(\theta)>0}{=} a\int \operatorname{tg}^2(\theta)\,d\theta$$

$$\overset{[\sec(\theta)]^2-1=\operatorname{tg}^2(\theta)}{=} a\int\left[\sec^2(\theta)-1\right]\,d\theta = a\left[\int \sec^2(\theta)\,d\theta - \int 1\,d\theta\right] = a[\operatorname{tg}(\theta)-\theta]+C$$

$$\overset{\theta\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{3\pi}{2})\Rightarrow\operatorname{tg}(\theta)>0}{=} a\left[|\operatorname{tg}(\theta)|-\theta\right]+C = a\left[\sqrt{\operatorname{tg}^2(\theta)}-\theta\right]+C$$

$$\overset{\operatorname{tg}^2(\theta)=[\sec(\theta)]^2-1}{=} a\left[\sqrt{\sec^2(\theta)-1}+\theta\right]+C$$

$$\overset{\frac{x}{a}=\sec(\theta)}{=} a\left[\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}+\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)\right]+C = a\left[\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}+\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)\right]+C$$

$$= a\left[\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\underbrace{\sqrt{a^2}}_{=|a|}}+\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)\right]+C \overset{a>0}{=} a\left[\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)\right]+C$$

$$= \sqrt{x^2-a^2}+a\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)+C\,, \quad \text{para cada} \quad |x|>a\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2}+a\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)+C\,, \quad \text{para cada} \quad |x|\geq a\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

Outro exemplo é dado pelo:

Exercício 11.6.2 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}\,dx\,,$$

para $|x|<2$.

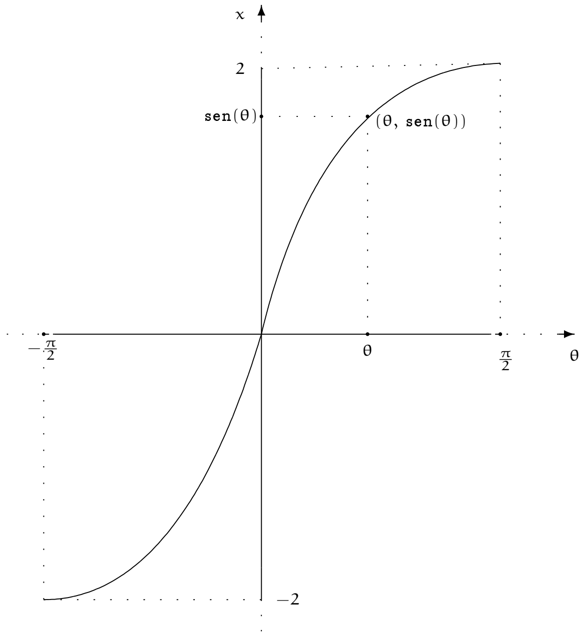
Resolução:

Esta integral é do tipo (i) ($a=2$) e tentaremos uma mudança de variáveis do tipo (11.8), isto é:

$$x = 2\operatorname{sen}(\theta)\,, \quad \text{assim teremos} \quad dx = 2\frac{d}{d\theta}[\operatorname{sen}(\theta)]\,d\theta = 2\cos(\theta)\,d\theta\,. \tag{11.22}$$

Observemos que na verdade a mudança de variáveis deverá ser da forma (uma função bijetora, ver figura abaixo) :

$$\begin{array}{ccc} \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) & \to & (-2,2) \\ \theta & \mapsto & x \doteq 2\operatorname{sen}(\theta) \end{array}.$$



Com isto, pelo Teorema da Substituição para Integrais Indefinidas, teremos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}\,dx \overset{(11.22)}{=} \int \frac{1}{\sqrt{\left\{4-[2\operatorname{sen}(\theta)]^2\right\}^3}}\,2\cos(\theta)\,d\theta = 2\int \frac{1}{\sqrt{\left\{4\left[1-\operatorname{sen}^2(\theta)\right]\right\}^3}}\cos(\theta)\,d\theta$$

$$= 2\int \frac{1}{\sqrt{64}\sqrt{\left[\cos^2(\theta)\right]^3}}\cos(\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{\cos^6(\theta)}}\cos(\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{|\cos(\theta)|^3}\cos(\theta)\,d\theta \overset{\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\Rightarrow\cos(\theta)>0}{=} \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^3(\theta)}\cos(\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2(\theta)}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \sec^2(\theta)\,d\theta \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{4}\operatorname{tg}(\theta) + C$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} + C \overset{\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\Rightarrow\cos(\theta)>0}{=} \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{\cos^2(\theta)}} + C = \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}} + C$$

$$\overset{\operatorname{sen}(\theta)\overset{(11.22)}{=}\frac{x}{2}}{=} \frac{1}{4}\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\left[\frac{x}{2}\right]^2}} + C = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C\,, \quad \text{para cada} \quad |x| < 2\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

Portanto,

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}\,dx = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C\,, \quad \text{para cada} \quad |x| < 2\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

Temos também o:

Exercício 11.6.3 *Para $a > 0$ fixado, calcular a integral indefinida*

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx\,,$$

para $|x| > a$.

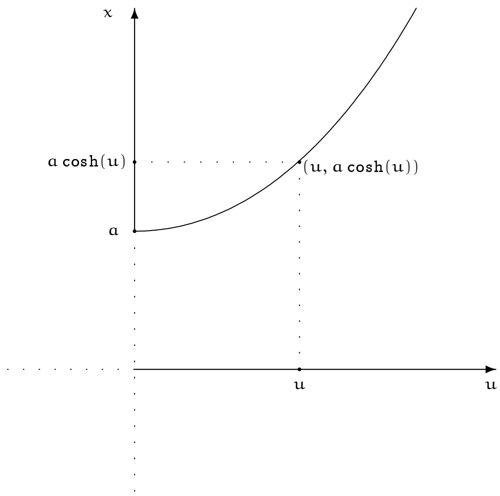
Resolução:

Esta integral indefinida é do tipo (iii) e assim tentaremos uma mudança de variáveis do tipo (11.13), isto é:

$$x = a\cosh(u)\,, \quad \text{imlicando que} \quad dx = a\frac{d}{du}[\cosh(u)] = a\,\mathrm{senh}(u)\,du\,, \tag{11.23}$$

mais especificamente, consideraremos a seguinte mudança de variáveis (uma função bijetora, ver figura abaixo):

$$\begin{array}{ccc} (0,\infty) & \to & (a,\infty) \\ u & \mapsto & x \doteq a\cosh(u) \end{array}.$$



Logo, pelo Teorema da Substituição para Integrais Indefinidas, teremos:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx &\overset{(11.23)}{=} \int \sqrt{[a\cosh(u)]^2 - a^2}\, a\,\mathrm{senh}(u)\,du = \int \underbrace{\sqrt{a^2}}_{=|a|} \sqrt{\left[\cosh^2(u)\right]^2 - 1}\, a\,\mathrm{senh}(u)\,du \\
&\overset{a>0 \Rightarrow |a|=a}{=} a^2 \int \sqrt{\mathrm{senh}^2(u)}\,\mathrm{senh}(u)\,du = a^2 \int |\mathrm{senh}(u)|\,\mathrm{senh}(u)\,du \\
&\overset{u>0 \Rightarrow \mathrm{senh}(u)>0 \Rightarrow |\mathrm{senh}(u)|=\mathrm{senh}(u)}{=} a^2 \int \mathrm{senh}^2(u)\,du \\
&\overset{\mathrm{senh}^2(u) \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{\cosh(2u)-1}{2}}{=} a^2 \int \frac{\cosh(2u)-1}{2}\,du \\
&= a^2 \left[\frac{1}{2}\int \cosh(2u)\,du - \frac{1}{2}\int du\right] \overset{v \doteq 2u \Rightarrow dv = 2\,du}{=} \frac{a^2}{2}\left[\int \cosh(v)\,\frac{1}{2}\,dv - \int du\right] \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{senh}(v) - u\right] + C \overset{v=2u}{=} \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{senh}(2u) - u\right] + C \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2} 2\,\mathrm{senh}(u)\cosh(u) - u\right] + C \\
&\overset{u>0 \Rightarrow \mathrm{senh}(u)>0 \Rightarrow \mathrm{senh}(u)=\sqrt{\cosh^2(u)-1}}{=} \frac{a^2}{2}\left[\sqrt{\left(\cosh^2(u) - 1\right)}\,\cosh(u) - u\right] + C \\
&\overset{\cosh(u) \overset{(11.23)}{=} \frac{x}{a}}{=} \frac{a^2}{2}\left\{\sqrt{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right]}\,\frac{x}{a} - \mathrm{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right)\right\} + C \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2}\mathrm{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right) + C\,, \quad \text{para cada} \quad |x| > a\,.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right) + C\,, \quad \text{para cada} \quad |x| > a\,.$$

Outro exercício resolvido é dado pelo:

Exercício 11.6.4 *Para* $a > 0$ *fixado, calcular a integral indefinida*

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\,,$$

para $|x| < a$.

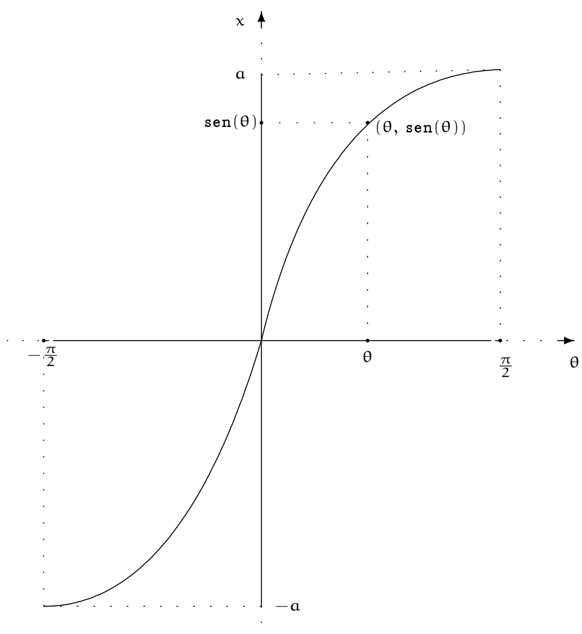
Resolução:

Esta integral é do tipo (i) e tentaremos uma mudança de variáveis do tipo (11.8), isto é:

$$x = a\,\mathrm{sen}(\theta)\,, \quad \text{implicando que} \quad dx = a\frac{d}{d\theta}[\mathrm{sen}(\theta)] = a\cos(\theta)\, d\theta\,. \tag{11.24}$$

Observemos que na verdade a mudança de variáveis deverá ser da forma (uma função bijetora, ver figura abaixo):

$$\begin{array}{ccc} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \to & (-a, a) \\ \theta & \mapsto & x \doteq a\,\mathrm{sen}(\theta) \end{array}\,.$$



Com isto, pelo Teorema da Substituição para Integrais Indefinidas, teremos:

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &\overset{(11.24)}{=} \int \sqrt{\left\{a^2 - [a\,\mathrm{sen}(\theta)]\right\}^2}\, a\cos(\theta)\, d\theta = a \int \sqrt{a^2\left[1 - \mathrm{sen}^2(\theta)\right]}\, \cos(\theta)\, d\theta \\
&= a \int \underbrace{\sqrt{a^2}}_{=|a|} \sqrt{\cos^2(\theta)}\, \cos(\theta)\, d\theta \overset{a \geq 0}{=} a^2 \int |\cos(\theta)|\, \cos(\theta)\, d\theta \\
&\overset{\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos(\theta) > 0 \Rightarrow |\cos(\theta)| = \cos(\theta)}{=} a^2 \int \cos^2(\theta)\, d\theta = a^2 \int \left[1 - \mathrm{sen}^2(\theta)\right]\, d\theta \\
&= a^2 \left[\int 1\, d\theta - \underbrace{\int \mathrm{sen}^2(\theta)\, d\theta}_{\text{Exemplo } (11.5.4)}\right] = a^2 \left\{\theta - \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\right]\right\} + C \\
&\overset{\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos(\theta) > 0 \Rightarrow \cos(\theta) = \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2(\theta)}}{=} a^2 \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\theta)\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2(\theta)}\right] + C \\
&\overset{\mathrm{sen}(\theta) \overset{(11.24)}{=} \frac{x}{a}}{=} a^2 \left[\frac{1}{2}\mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right] + C \\
&= \frac{a^2}{2}\mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2}} + C \\
&\overset{a \geq 0}{=} \frac{a^2}{2}\mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C\,, \quad \text{para cada} \quad |x| < a\,.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}\mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C\,, \quad \text{para cada} \quad |x| < a\,.
$$

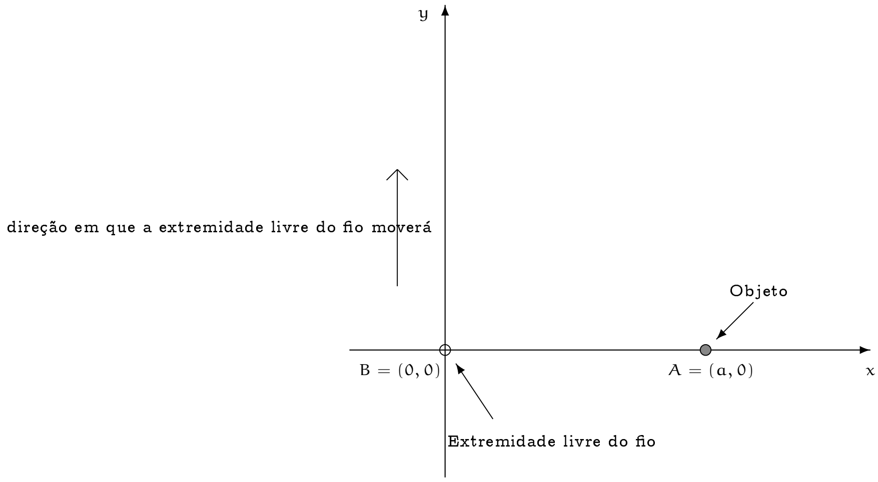
Para finalizar temos uam aplicação interessante do método de integração desenvolvido acima:

Exercício 11.6.5 *Determinar a equação da* **tractriz**, *isto é, a equação da curva descrita pela trajetória de um objeto que está num plano horizontal e está preso a um fio, de comprimento constante, quando a extremidade do fio, que não está presa ao objeto, move-se ao longo de uma reta que está contido no plano horizontal.*

Resolução:

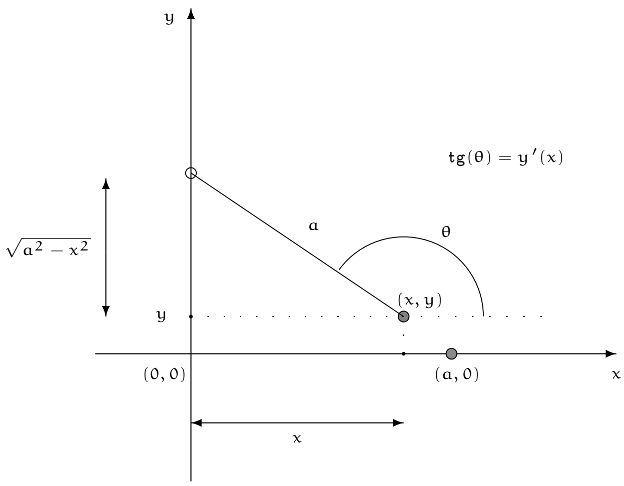
Suponhamos que fio tenha comprimento $\underline{a}$ centímetros.

Fixemos um sistema de coordenadas, xOy, no plano horiozontal de tal modo que o objeto, na posição inical, esteja no ponto $A = (a, 0)$, em particular, a outra extremidade do fio estará no ponto $B = (0, 0)$) e a reta, ao longo das quais a extremidade livre do fio movimentará, será o eixo Oy (veja figura abaixo).



Seja $y : I \to \mathbb{R}$ uma função (que será diferenciável em I um intervalo de $\mathbb{R}$) cuja representação geométrica do seu gráfico é a curva procurada.

Observemos que como a extremidade livre do fio, isto é, o ponto B, move-se ao longo do eixo Oy teremos que a reta tangente à curva descrita pelo movimento do ponto A no plano xOy será a reta que contém os pontos A e B (veja figura abaixo).



Com isto temos que

$$y'(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, a),$$

ou seja, $y : [0, a] \to \mathbb{R}$ será dada por

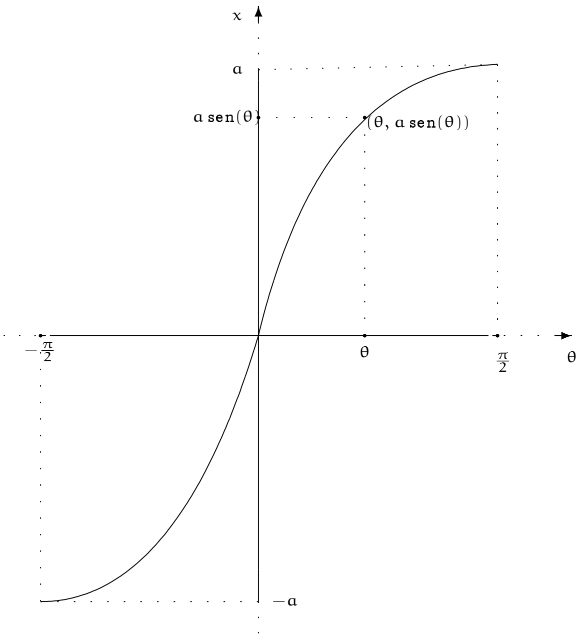
$$y(x) = -\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\, dx, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, a).$$

A integral indefinida acima é do tipo (i) e tentaremos uma mudança de variáveis do tipo (11.8), isto é:

$$x = a\,\mathrm{sen}(\theta), \quad \text{implicando que} \quad dx = a\frac{d}{d\theta}[\mathrm{sen}(\theta)] = a\cos(\theta)\, d\theta. \tag{11.25}$$

Observemos que na verdade a mudança de variáveis deverá ser da forma (uma função bijetora, ver figura abaixo):

$$\begin{array}{ccc} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\} & \to & (-a, a) \setminus \{0\} \\ \theta & \mapsto & x \doteq a\,\mathrm{sen}(\theta) \end{array}.$$



Será visto mais adiante que

$$\int \frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)}\, d\theta = \int \mathrm{cossec}(\theta)\, d\theta = -\ln\left[\mathrm{cossec}(\theta) + \mathrm{cotg}(\theta)\right] + C\,, \tag{11.26}$$

para $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$, além disso

$$\mathrm{sen}(\theta) \stackrel{(11.25)}{=} \frac{x}{a}\,, \quad \text{implicará que} \quad \mathrm{cossec}(\theta) = \frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)} = \frac{1}{\frac{x}{a}} = \frac{a}{x}\,. \tag{11.27}$$

Com isto, pelo Teorema da Substituição para Integrais Indefinidas, teremos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\, dx &\stackrel{(11.25)}{=} \int \frac{\sqrt{a^2 - [a\,\mathrm{sen}(\theta)]^2}}{a\,\mathrm{sen}(\theta)}\, a\cos(\theta)\, d\theta = \int \frac{\sqrt{a^2\left[1 - \mathrm{sen}^2(\theta)\right]}}{\mathrm{sen}(\theta)} \cos(\theta)\, d\theta \\
&= \int \frac{\sqrt{a^2}\sqrt{\cos^2(\theta)}}{\mathrm{sen}(\theta)} \cos(\theta)\, d\theta = \int \frac{|a|\,|\cos(\theta)|}{\mathrm{sen}(\theta)} \cos(\theta)\, d\theta \\
&\stackrel{a>0,\ \theta\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos(\theta)>0}{=} a\int \frac{\cos^2(\theta)}{\mathrm{sen}(\theta)}\, d\theta = a\int \frac{1 - \mathrm{sen}^2(\theta)}{\mathrm{sen}(\theta)}\, d\theta \\
&= a\int \left[\frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)} - \mathrm{sen}(\theta)\right] d\theta = a\left[\int \frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)}\, d\theta - \int \mathrm{sen}(\theta)\, d\theta\right] \\
&\stackrel{(11.26)}{=} a\{-\ln\left[\mathrm{cossec}(\theta) + \mathrm{cotg}(\theta)\right] + \cos(\theta)\} + C \\
&= a\left\{-\ln\left[\mathrm{cossec}(\theta) + \frac{\cos(\theta)}{\mathrm{sen}(\theta)}\right] + \cos(\theta)\right\} + C
\end{aligned}$$

$$\overset{\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\setminus\{0\}\Rightarrow\cos(\theta)>0}{=} a\left\{-\ln\left[\operatorname{cossec}(\theta)+\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}}{\operatorname{sen}(\theta)}\right]+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}\right\}+C$$

$$\overset{(11.27)}{=} a\left\{-\ln\left[\frac{a}{x}+\frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}{\frac{x}{a}}\right]+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right\}+C$$

$$\overset{\text{Exercício}}{=} \sqrt{a^2-x^2}-a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)+C\,,\quad \text{para cada}\quad x\in(0,a)\,.$$

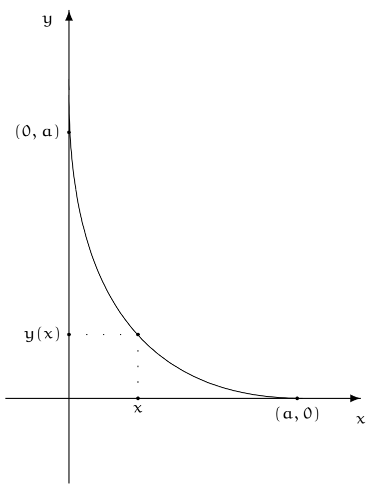
Como

$$0=y(a)=\sqrt{a^2-a^2}-a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-a^2}}{a}\right)+C=0-a\ln(1)+C\,,\quad\text{ou seja,}\quad C=0,$$

segue que

$$y(x)=-\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx=a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)-\sqrt{a^2-x^2}\,,\quad\text{para cada}\quad x\in(0,a)\,.$$

Assim a trajetória do objeto no plano horizontal será dada pela figura abaixo:



Daqui em diante, nosso objetivo principal será encontrar integrais indefinidas envolvendo funções racionais, ou seja, encontrar integrais indefinidas do tipo:

$$\int\frac{p(x)}{q(x)}\,dx\,,$$

onde $\underline{p}$ e $\underline{q}$ são funções polinomiais.

Começaremos por alguns casos particulares antes de tratar da situação geral acima.

11.6.2 Integrais indefinidas do tipo: $\int\frac{1}{x^2+p\,x+q}\,dx$ ou $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+p\,x+q}}\,dx$.

Se $p,q\in\mathbb{R}$ são fixados, para os tipos de integrais indefinidas acima, completaremos o quadrado na função polinomial do 2.a grau que está no denominador, isto é, agiremos da seguinte forma:

Temos que

$$x^2+px+q\overset{\text{Exercício}}{=}\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}\,.$$

Se considerarmos a mudança de variáveis (uma função bijetora!)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u \doteq x + \dfrac{p}{2} \end{array},$$

então temos as seguites possibilidades:

(i) Se

$$\frac{4q - p^2}{4} = 0\,,$$

teremos

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = u^2\,,$$

ou seja, a expressão incial é um quadrado perfeito e assim podemos calcular a integral indefinida obtida.

Como veremos, neste caso, será fácil encontrar a integral indefinida.

(ii) Se

$$\frac{4q - p^2}{4} > 0\,,$$

tomando-se

$$a \doteq \sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}\,,$$

teremos

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}\right)^2 = u^2 + a^2\,,$$

e assim, podemos aplicar as técnicas da seção anterior para calcular a integral indefinida obtida.

Na verdade estaremos no caso (ii) da Observação (11.6.1).

(iii) Se

$$\frac{4q - p^2}{4} < 0\,,$$

tomando-se

$$a \doteq \sqrt{-\frac{4q - p^2}{4}}\,,$$

teremos

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{-\frac{4q - p^2}{4}}\right)^2 = u^2 - a^2$$

e assim, podemos aplicar as técnicas da seção anterior para calcular a integral indefinida obtida.

Na verdade estaremos no caso (iii) da Observação (11.6.1).

Resumindo teremos:

$$\int \frac{1}{x^2 + p\,x + q}\,dx = \begin{cases} \overset{\text{como } \frac{4q-p^2}{4}=0}{=} \displaystyle\int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}\,dx \overset{u=x+\frac{p}{2} \Rightarrow du=dx}{=} \int \frac{1}{u^2}\,du \\ \overset{\text{como } \frac{4q-p^2}{4}>0,\ a\doteq\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}}{=} \displaystyle\int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2}\,dx \overset{u=x+\frac{p}{2} \Rightarrow du=dx}{=} \int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du \\ \overset{\text{como } \frac{4q-p^2}{4}<0,\ a\doteq\sqrt{-\frac{4q-p^2}{4}}}{=} \displaystyle\int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - a^2}\,dx \overset{u=x+\frac{p}{2} \Rightarrow du=dx}{=} \int \frac{1}{u^2 - a^2}\,du \end{cases}$$

e cada uma das integrais indefinidas do lado direito das igualdades acima, podem ser encontradas utilizando as técnicas desenvolvidas em seções anteriores.

De modo semelhante teremos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+p\,x+q}}\,dx = \begin{cases} \text{como } \overset{\frac{4q-p^2}{4}=0}{=} \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}}\,dx \overset{u=x+\frac{p}{2} \Rightarrow du=dx}{=} \int \frac{1}{|u|}\,du \\ \text{como } \overset{\frac{4q-p^2}{4}>0,\ a\doteq\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}}{=} \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}}\,dx \overset{u=x+\frac{p}{2} \Rightarrow du=dx}{=} \int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du \\ \text{como } \overset{\frac{4q-p^2}{4}<0,\ a\doteq\sqrt{-\frac{4q-p^2}{4}}}{=} \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-a^2}}\,dx \overset{u=x+\frac{p}{2} \Rightarrow du=dx}{=} \int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du \end{cases}$$

e cada uma das integrais indefinidas do lado direito das igualdades acima, podem ser encontradas aplicando-se as técnicas desenvolvidas em seções anteriores.

Como aplicação temos o:

Exemplo 11.6.4 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx\,.$$

Resolução:

Neste caso temos que o denominador da função racional em questão pode ser escrito na seguinte forma (completando quadrados):

$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4\,,$$

que corresponde ao caso (ii) acima.

Logo

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2^2} \overset{u\doteq x+1,\ a=2 \Rightarrow du=dx}{=} \int \frac{1}{u^2+a^2}\,du$$
$$\overset{\text{Exemplo (11.6.1)}}{=} \frac{1}{a}\,\text{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)+C \overset{u=x+1,\ a=2}{=} \frac{1}{2}\,\text{arctg}\left[\frac{x+1}{2}\right]+C\,,$$

assim

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{arctg}\left[\frac{x+1}{2}\right]+C\,.$$

Podemos ter situações em que teremos que aplicar várias técnicas para obter a integral indefinida, como no exemplo:

Exemplo 11.6.5 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)+2\cos(x)+5}\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)+2\cos(x)+5}\,dx &\overset{y\doteq\cos(x)\Rightarrow dy=-\operatorname{sen}(x)\,dx}{=} \int \frac{1}{y^2+2y+5}(-dy) \\
&= -\int \frac{1}{y^2+2y+5}\,dy \overset{\text{Exemplo (11.6.4)}}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y+1}{2}\right)+C \\
&\overset{y=\cos(x)}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\frac{\cos(x)+1}{2}\right]+C\,.
\end{aligned}$$

Temos os seguinte exercícios resolvidos:

Exercício 11.6.6 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-6e^x+13}\,dx\,.$$

<u>**Resolução:**</u>

Consideremos as seguinte mudanças de variáveis (são bijetoras!):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & (0,\infty) \\ x & \mapsto & u \doteq e^x \end{array}$$

que é diferenciável em $\mathbb{R}$, além disso

$$du = \frac{d}{dx}[e^x]\,dx = e^x\,dx$$

e

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & v \doteq u-3 \end{array}$$

que também é diferenciável em $\mathbb{R}$, além disso

$$dv = \frac{d}{du}[u-3]\,du = du\,.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{e^{2x}-6e^x+13}\,dx &\overset{u\doteq e^x\Rightarrow du=e^x\,dx}{=} \int \frac{1}{u^2-6u+13}\,du \\
&= \int \frac{1}{(u-3)^2+4}\,du \overset{v\doteq u-3\Rightarrow dv=du}{=} \int \frac{1}{v^2+2^2}\,du \\
&\overset{\text{Exemplo (11.6.1) com } a=2}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{v}{2}\right)+C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{u-3}{2}\right)+C \\
&\overset{u=e^x}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^x-3}{2}\right)+C\,.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-6e^x+13}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^x-3}{2}\right)+C\,.$$

Temos também o:

Exercício 11.6.7 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que

$$\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\left(-x^2+\frac{3}{2}x+1\right)}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}}\,dx.$$

Consideremos a seguinte mudança de variáveis (é bijetora!):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & (0,\infty) \\ x & \mapsto & u \doteq x-\frac{3}{4} \end{array}$$

que é diferenciável e

$$du = \frac{d}{dx}\left(x-\frac{3}{4}\right)\,dx = dx\,.$$

Logo

$$\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-u^2}}\,du$$

$$\overset{\text{Exemplo (11.6.2), com } a=\frac{5}{4}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{\frac{5}{4}}\right)+C$$

$$\overset{u\doteq x-\frac{3}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arcsen}\left[\frac{4\left(x-\frac{3}{4}\right)}{5}\right]+C\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{4x-3}{5}\right)+C\,.$$

11.6.3 Integrais indefinidas do tipo: $\displaystyle\int \frac{mx+n}{ax^2+b\,x+c}\,dx$ ou $\displaystyle\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+b\,x+c}}\,dx$.

Sejam $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq 0$ e $m^2+n^2 \neq 0$ (ou seja, $m \neq 0$ ou $n \neq 0$).

Para estas integrais indefinidas escreveremos o numerador em termos da derivada do polinômio do 2.a grau que aparece no denominador, isto é, agiremos da seguinte forma:

(i) Suponhamos que

$$\begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & u \doteq ax^2+bx+c \end{array}$$

seja um mudança de variáveis (isto é, bijetora).

Logo

$$du = \frac{d}{dx}\left(ax^2+bx+c\right)\,dx = (2ax+b)\,dx\,.$$

Deste modo podemos escrever o polinômio do 1.a grau do numerador, das integrais acima, na seguinte forma:

$$mx + n = \frac{m}{2a}(2ax + b) + n - \frac{bm}{2a}.$$

Assim, utilizando o Teorema da Substituição (isto é, o Teorema (11.5.1) ou a Observação (11.5.2)) teremos que:

$$\begin{aligned}
\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx &= \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \left(n - \frac{bm}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx \\
&\overset{u \doteq ax^2+bx+c \Rightarrow du = \frac{d}{dx}\left(ax^2+ax+b\right)dx = (2ax+b)\,dx}{=} \frac{m}{2a}\int \frac{1}{u}\,du + \left(n - \frac{bm}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx \\
&= \frac{m}{2a}\ln(|u|) + \left(n - \frac{bm}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx \\
&\overset{u = ax^2+bx+c}{=} \frac{m}{2a}\ln\left(\left|ax^2+bx+c\right|\right) + \left(n - \frac{bm}{2a}\right)\underbrace{\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx}_{(I)},
\end{aligned}$$

e a integral indefinida (I), poderá ser calculada utilizando-se as técnicas da seção (11.6.2) (isto é, da seção anterior).

(ii) De modo semelhante temos que:

$$\begin{aligned}
\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx &= \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \left(n - \frac{bm}{2a}\right)\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \\
&\overset{u \doteq ax^2+bx+c \Rightarrow du = \frac{d}{dx}\left(ax^2+ax+b\right)dx = (2ax+b)\,dx}{=} \frac{m}{2a}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du + \left(n - \frac{bm}{2a}\right)\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \\
&= \frac{m}{2a}\frac{1}{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}} + \left(n - \frac{bm}{2a}\right)\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \\
&\overset{u = ax^2+bx+c}{=} \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(n - \frac{bm}{2a}\right)\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx}_{(II)},
\end{aligned}$$

e integral indefinida (II) poderá ser calculada utilizando-se as técnicas da seção (11.6.2) (isto é, da seção anterior).

Apliquemos esta técnica ao:

Exemplo 11.6.6 *Calcular integral indefinida*

$$\int \frac{3x-2}{x^2+2x+5}\,dx\,.$$

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor encontrar intervalos I e J tais que

$$\begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & u \doteq x^2+2x+5 \end{array},$$

seja um mudança de variáveis (isto é, bijetora).

Logo

$$du = \frac{d}{dx}\left(x^2 + 2x + 5\right)\, dx = (2x+2)\, dx\,,$$

e assim temos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x-2}{x^2+2x+5}\, dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2) - 5}{x^2+2x+5}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\, dx - 5\int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx \\
&\overset{u \doteq x^2+2x+5 \Rightarrow du = \frac{d}{dx}\left(x^2+2x+5\right) dx = (2x+2)\, dx}{=} \frac{3}{2}\int \frac{1}{u}\, du - 5\int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx \\
&= \frac{3}{2}\ln\left(|u|\right) - 5\int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx \\
&\overset{u = x^2+2x+5}{=} \frac{3}{2}\ln\left(\left|x^2+2x+5\right|\right) - 5\underbrace{\int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx}_{\text{Exemplo } (11.6.4)} \\
&= \frac{3}{2}\ln\left(\left|x^2+2x+5\right|\right) - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C\,,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int \frac{3x-2}{x^2+2x+5}\, dx = \frac{3}{2}\ln\left(|x^2+2x+5|\right) - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C\,.$$

A seguir temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 11.6.8 *Calcular integral indefinida*

$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}\, dx\,.$$

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor encontrar intervalos I e J tais que

$$\begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & u \doteq -2x^2+3x+2 \end{array}$$

seja um mudança de variáveis (isto é, bijetora).

Logo

$$du = \frac{d}{du}\left(-2x^2+3x+2\right)\, dx = (-4x+3)\, dx\,,$$

e assim temos que

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x-8}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}\,dx &= \int \frac{\frac{-1}{2}(-4x+3)-\frac{13}{2}}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}\,dx \\
&= \frac{-1}{2}\int \frac{-4x+3}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}\,dx - \frac{13}{2}\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}\,dx \\
&\overset{u \doteq -2x^2+3x+2 \Rightarrow du=(-4x+3)\,dx}{=} \frac{-1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,dx - \frac{13}{2}\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}\,dx \\
&= \frac{-1}{2}.\frac{1}{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}} - \frac{13}{2}\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}\,dx \\
&\overset{u \doteq -2x^2+3x+2}{=} -\sqrt{-2x^2+3x+2} - \frac{13}{2}\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}\,dx \\
&\overset{\text{Exemplo (11.6.7)}}{=} -\sqrt{-2x^2+3x+2} - \frac{13}{2}\left[\frac{25\sqrt{2}}{32}\,\text{arcsen}\left(\frac{4x-3}{5}\right)\right] + C\,,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\int \frac{2x-8}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}\,dx = -\sqrt{-2x^2+3x+2} - \frac{325\sqrt{2}}{64}\,\text{arcsen}\left(\frac{4x-3}{5}\right) + C\,.
$$

11.6.4 Integrais indefinidas envolvendo potências de funções trigonométricas

11.6.4.1 Integrais indefinidas envolvendo potências da função seno e cosseno

Começaremos tratando de integrais indefinidas envolvendo potências ímpares das funções cosseno e seno:

Proposição 11.6.1 *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *Então*

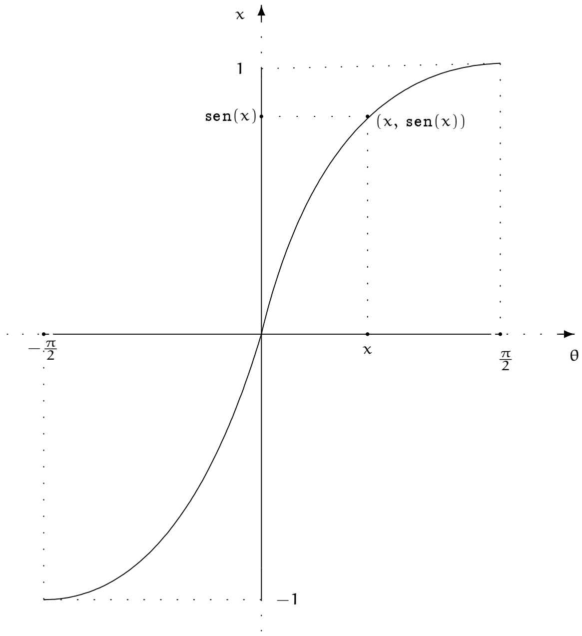
$$
\int \cos^{2n+1}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,\text{sen}^{2k+1}(x) + C\,,
$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Consideremos a seguinte mudança de variáveis (é bijetora, ver figura abaixo):

$$
\begin{array}{ccc}
\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \to & (-1,1) \\
x & \mapsto & x \doteq \text{sen}(x)
\end{array}\,. \tag{11.28}
$$



Com isto teremos:

$$
\begin{aligned}
\int \cos^{2n+1}(x)\,dx &= \int \cos^{2n}(x)\,\cos(x)\,dx = \int \left[\cos^2(x)\right]^n . \cos(x)\,dx \\
&\overset{\cos^2(x)=1-\operatorname{sen}^2(x)}{=} \int \left[1-\operatorname{sen}^2(x)\right]^n \cos(x)\,dx \\
&\overset{\text{Binômio de Newton - Prop. (6.3.2)}}{=} \int \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[-\operatorname{sen}^2(x)\right]^k 1^{n-k} \right\} \cos(x)\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int \operatorname{sen}^{2k}(x)\,\cos(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int \Big[\underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{\doteq u}\Big]^{2k} \underbrace{\cos(x)\,dx}_{=du} \\
&\overset{u \doteq \operatorname{sen}(x) \Rightarrow du = \frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x)]\,dx = \cos(x)\,dx}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int u^{2k}\,du \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+1} u^{2k+1} + C \\
&\overset{u=\operatorname{sen}(x)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{1}{2k+1} \operatorname{sen}^{2k+1}(x) + C\,,
\end{aligned}
$$

completando a demonstração.

□

De modo semelhante temos a:

Proposição 11.6.2 *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *Então*

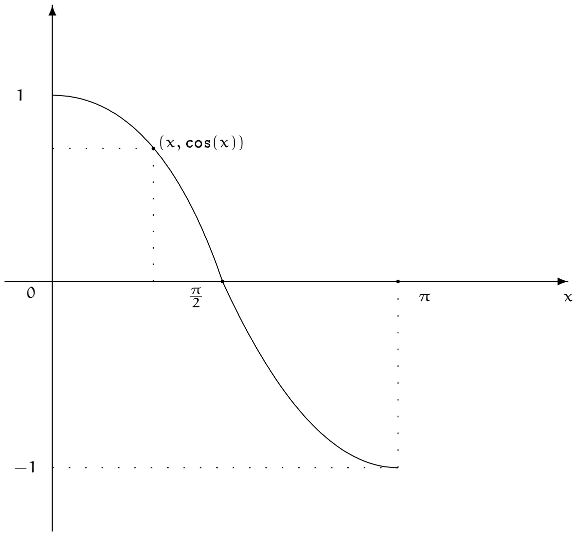
$$
\int \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos^{2k+1}(x) + C\,,
$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Consideremos a seguinte da mudança de variáveis (é bijetora, ver figura abaixo):

$$\begin{array}{ccc} (0,\pi) & \to & (-1,1) \\ x & \mapsto & x \doteq \cos(x) \end{array} . \tag{11.29}$$



Com isto teremos:

$$\int \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx = \int \operatorname{sen}^{2n}(x)\,\operatorname{sen}(x)\,dx = \int \left[\operatorname{sen}^2(x)\right]^n \operatorname{sen}(x)\,dx \overset{\operatorname{sen}^2(x)=1-\cos^2(x)}{=} \int \left[1-\cos^2(x)\right]^n \operatorname{sen}(x)\,dx$$

$$\overset{\text{Binômio de Newton - Prop. (6.3.2)}}{=} \int \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[-\cos^2(x)\right]^k 1^{n-k} \right\} \operatorname{sen}(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int \cos^{2k}(x)\,\operatorname{sen}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int \left[\underbrace{\cos(x)}_{\doteq u}\right]^{2k} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(x)\,dx}_{=-du}$$

$$\overset{u \doteq \cos(x) \Rightarrow du = \frac{d}{dx}[\cos(x)]\,dx = -\operatorname{sen}(x)\,dx}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int u^{2k}\,(-du)$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+1} u^{2k+1} + C$$

$$\overset{u=\cos(x)}{=} -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \cos^{2k+1}(x) + C\,,$$

completando a demonstração.

□

Para as potências pares das funções cosseno e seno temos a seguinte observação.

Observação 11.6.4

1. *No Exemplo (11.5.1) mostramos que:*

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C\,, \tag{11.30}$$

par $x \in \mathbb{R}$.

Com isto podemos encontrar a integral indefinida:

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \left[1 - \operatorname{sen}^2(x)\right]\,dx = \int 1\,dx - \int \operatorname{sen}^2(x)\,dx$$
$$\overset{(11.30)}{=} x - \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\right] + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C\,,$$

isto é,

$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C\,, \tag{11.31}$$

para $x \in \mathbb{R}$.

2. *Seja* $n \in \mathbb{N}$.

Para calcularmos a integral indefinida

$$\int \cos^{2n}(x)\,dx\,,$$

agiremos da seguinte forma:

2.1 *Observemos que:*

$$\int \cos^{2n}(x)\,dx = \int \left[\cos^2(x)\right]^n\,dx \overset{\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}}{=} \int \left[\frac{1+\cos(2x)}{2}\right]^n\,dx$$
$$= \frac{1}{2^n}\int [1+\cos(2x)]^n\,dx$$
$$\overset{\text{Binômio de Newton - Prop. (6.3.2)}}{=} \frac{1}{2^n}\int\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[\cos(2x)]^k\,1^{n-k}\right\}dx$$
$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int[\cos(2x)]^k\,dx$$
$$\overset{u\doteq 2x\Rightarrow du=\frac{d}{dx}[2x]\,dx=2\,dx}{=} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int\cos^k(u)\frac{1}{2}\,du$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int\cos^k(u)\,du\,,$$

ou seja,

$$\int \cos^{2n}(x)\,dx = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int\cos^k(u)\,du\,, \tag{11.32}$$

onde, na penúltima integral indefinida, fizemos a mundança de variáveis (é bijetora!):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u \doteq 2x \end{array}.$$

2.2 *Observemos que a expressão (11.32) nos diz que para calcularmos a integral indefinida da potência par* $2n$ *da função cosseno precisamos calcular* $\underline{n+1}$ *integrais indefinidas de potências da função cosseno, desde a ordem* $\underline{0}$ *até a ordem* $\underline{n}$ *(no máximo metade da potência inicial, que era* $2n$*).*

Deste modo reduzimos o problema a calcular $\underline{n+1}$ *integrais indefinidas de potências da função cosseno de ordem* $\underline{0}$ *até a ordem* $\underline{n}$.

2.3 As parcelas que têm potência ímpar podem ser calculadas pela Proposição (11.6.1) e para as parcelas que têm potências pares podemos reaplicar, se necessário, o raciocínio acima.

2.4 No final, aplicando um número finito de vezes o procedimento acima, recairemos na integral indefinida da função cosseno ao quadrado que foi calculada em (11.31).

3. *Seja* $n \in \mathbb{N}$.

Para calcularmos

$$\int \operatorname{sen}^{2n}(x)\, dx\,,$$

agiremos da seguinte forma:

Notemos que

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^{2n}(x)\, dx &= \int \left[\operatorname{sen}^2(x)\right]^n dx = \int \left[1-\cos^2(x)\right]^n dx \\ &\overset{\text{Binômio de Newton - Prop. (6.3.2)}}{=} \int \left\{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[-\cos^2(x)\right]^k 1^{n-k}\right\} dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int \cos^{2k}(x)\, dx\,,\end{aligned}$$

ou seja, reduzimos o problema a calcular $n+1$ *integrais indefinidas de potências pares da função cosseno.*

Logo, aplicando os itens 1. e 2. desta Observação, podemos encontrar a integral indefinida de potências pares da função seno.

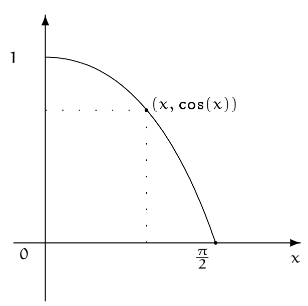
11.6.4.2 Integrais indefinidas envolvendo potências da função tangente e cotangente

Começaremos tratando das integrais indefinidas envolvendo <u>potências da função tangente</u>.

Observação 11.6.5 *T*

1. *Consideremos a mudança de variáveis (é bijetora, ver figura abaixo):*

$$\begin{array}{ccc} \left(0, \frac{\pi}{2}\right) & \to & (0,1) \\ x & \mapsto & u \doteq \cos(x) \end{array}.$$



Com isto teremos:

$$\int \mathrm{tg}(x)\,dx = \int \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx \overset{x\in(0,\frac{\pi}{2})\Rightarrow u\doteq\cos(x)>0\Rightarrow du=\frac{d}{dx}[\cos(x)]\,dx=-\mathrm{sen}(x)\,dx}{=} \int \frac{1}{u}\,(-du)$$
$$= -\ln(|u|) + C \overset{u=\cos(x)}{=} -\ln(|\cos(x)|) + C\,,$$

isto é,

$$\int \mathrm{tg}(x)\,dx = -\ln(|\cos(x)|) + C\,. \tag{11.33}$$

2. *Temos também*

$$\int \mathrm{tg}^2(x)\,dx \overset{\mathrm{tg}^2(x)=\sec^2(x)-1}{=} \int \left[\sec^2(x) - 1\right]\,dx = \int \sec^2(x)\,dx - \int 1\,dx$$
$$\overset{\frac{d}{dx}[\mathrm{tg}(x)]=\sec^2(x)}{=} \mathrm{tg}(x) - x + C\,,$$

isto é,

$$\int \mathrm{tg}^2(x)\,dx = \mathrm{tg}(x) - x + C\,. \tag{11.34}$$

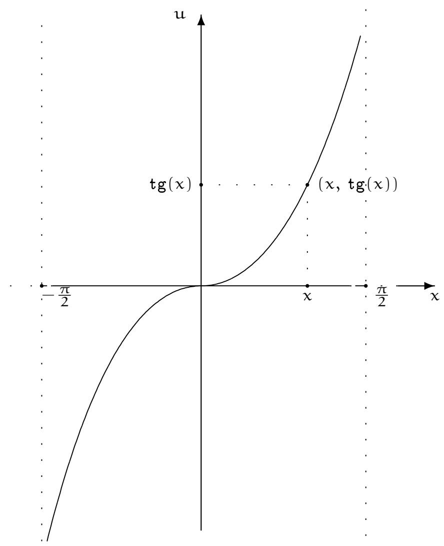
3. *Se* $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ *então*

$$n = k + 2\,,$$

para algum $k \in \mathbb{N}$.

Consideremos a seguinte mudança de variáveis (é bijetora, ver figura abaixo):

$$\begin{array}{ccc} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u \doteq \mathrm{tg}(x) \end{array}\,. \tag{11.35}$$



Com isto teremos:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{tg}^n(x)\,dx &= \int \mathrm{tg}^{k+2}(x)\,dx = \int \mathrm{tg}^k(x)\,\mathrm{tg}^2(x)\,dx = \int \mathrm{tg}^k(x)\left[\sec^2(x)-1\right]\,dx \\
&= \int \mathrm{tg}^k(x)\,\sec^2(x)\,dx - \int \mathrm{tg}^k(x)\,dx \\
&\overset{u \doteq \mathrm{tg}(x) \Rightarrow du = \frac{d}{dx}[\mathrm{tg}(x)] = \sec^2(x)\,dx}{=} \int u^k\,du - \int \mathrm{tg}^k(x)\,dx \\
&= \frac{1}{k+1}u^{k+1} - \int \mathrm{tg}^k(x)\,dx \overset{u \doteq \mathrm{tg}(x)}{=}, \\
&= \frac{1}{k+1}\,\mathrm{tg}^{k+1}(x) - \int \mathrm{tg}^k(x)\,dx\,,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int \mathrm{tg}^{k+2}(x)\,dx = \frac{1}{k+1}\,\mathrm{tg}^{k+1}(x) - \int \mathrm{tg}^k(x)\,dx\,. \tag{11.36}$$

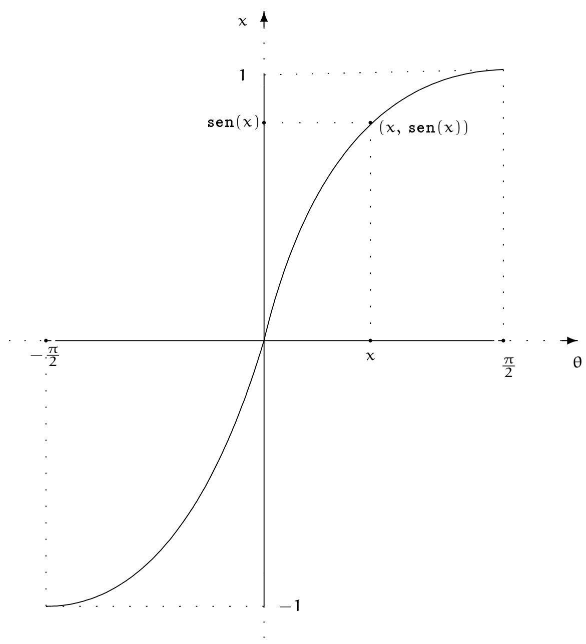
Portanto, cada vez que aplicamos a identidade acima reduzimos em 2 o expoente da potência da função tangente na integral indefinida a ser calculada, ou seja, aplicando-se um número finito de vezes reduziremos o problema a calcular a integral indefinida da função tangente, ou da função tangente elevada ao quadrado, que foram obtidas nos itens 1. e 2. desta Observação.

Para as potências da função cotangente agimos de modo semelhante, como mostra a:

Observação 11.6.6

1. *Consideremos a mudança de variáveis (é bijetora, ver figura abaixo):*

$$\begin{array}{ccc} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \to & (-1, 1) \\ x & \mapsto & u \doteq \mathrm{sen}(x) \end{array}. \tag{11.37}$$



Com isto teremos:

$$\int \operatorname{cotg}(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,dx \overset{x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\Rightarrow u \doteq \operatorname{sen}(x) \Rightarrow du=\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x)]\,dx=\cos(x)\,dx}{=} \int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \ln(|u|) + C \overset{u=\operatorname{sen}(x)}{=} \ln(|\operatorname{sen}(x)|) + C\,,$$

isto é,

$$\int \operatorname{cotg}(x)\,dx = \ln(|\operatorname{sen}(x)|) + C\,. \tag{11.38}$$

2. *Temos também*

$$\int \operatorname{cotg}^2(x)\,dx = \int \left[\operatorname{cossec}^2(x) - 1\right]\,dx = \int \operatorname{cossec}^2(x)\,dx - \int 1\,dx$$
$$\overset{\frac{d}{dx}[\operatorname{cotg}(x)]=-\operatorname{cossec}^2(x)}{=} -\operatorname{cotg}(x) - x + C\,,$$

isto é,

$$\int \operatorname{cotg}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotg}(x) - x + C\,. \tag{11.39}$$

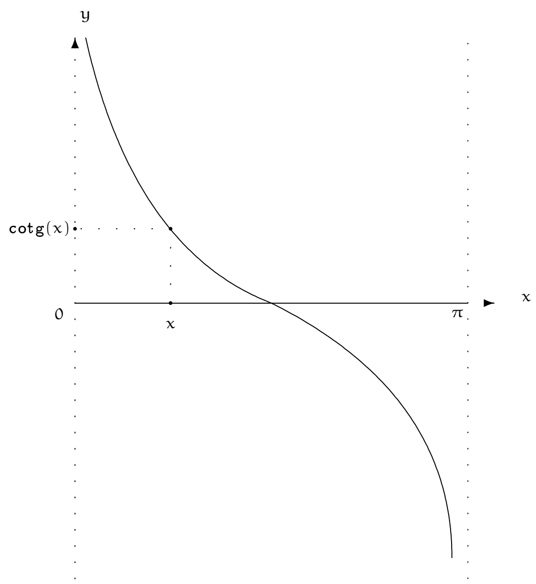
3. *Se* $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ *então*

$$n = k + 2$$

onde $k \in \mathbb{N}$.

Consideremos a seguinte mudança de variáveis (é bijetora, ver figura abaixo):

$$\begin{array}{ccc} (0,\pi) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u \doteq \operatorname{cotg}(x) \end{array}. \tag{11.40}$$



Com isto teremos:

$$\int \operatorname{cotg}^n(x)\,dx = \int \operatorname{cotg}^{k+2}(x)\,dx = \int \operatorname{cotg}^k(x)\operatorname{cotg}^2(x)\,dx = \int \operatorname{cotg}^k(x)\left[\operatorname{cossec}^2(x) - 1\right]\,dx$$
$$= \int \operatorname{cotg}^k(x)\,\operatorname{cossec}^2(x)\,dx - \int \operatorname{cotg}^k(x)\,dx$$
$$\overset{u \doteq \operatorname{cotg}(x) \Rightarrow du = \frac{d}{dx}[\operatorname{cotg}(x)]\,dx \Rightarrow du = -\operatorname{cossec}^2(x)\,dx}{=} \int u^k\,(-du) - \int \operatorname{cotg}^k(x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{k+1}u^{k+1} - \int \operatorname{cotg}^k(x)\,dx \overset{u \doteq \operatorname{cotg}(x)}{=},$$
$$= -\frac{1}{k+1}\operatorname{cotg}^{k+1}(x) - \int \operatorname{cotg}^k(x)\,dx\,,$$

isto é,

$$\int \operatorname{cotg}^{k+2}(x)\,dx = -\frac{1}{k+1}\operatorname{cotg}^{k+1}(x) - \int \operatorname{cotg}^k(x)\,dx\,. \tag{11.41}$$

Portanto, de modo semelhante com o que o ocorreu no caso da integral indefinida de potências da função tangente, cada vez que aplicamos a identidade acima reduzimos em 2 o expoente da potência da função cotangente na integral indefinida a ser calculada, ou seja, aplicando-se um número finito de vezes reduziremos o problema a calcular a integral indefinida da função cotangente, ou da função cotangente ao quadrado, que foram obtidas nos itens 1. e 2. desta Observação.

11.6.4.3 Integrais indefinidas envolvendo potências da função secante e cossecante

Para as potências pares da função secante temos:

Observação 11.6.7 *Observemos que:*

$$\int \sec^{2n}(x)\,dx = \int \left[\sec^2(x)\right]^n\,dx = \int \left[1 + \operatorname{tg}^2(x)\right]^n\,dx,$$
$$\overset{\textit{Binômio de Newton - Prop. (6.3.2)}}{=} \int \left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\operatorname{tg}^2(x)\right]^k 1^{n-k}\right\}\,dx$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int \operatorname{tg}^{2k}(x)\,dx\,,$$

e cada uma das parcelas na soma acima (cada uma delas envolve uma potência para da função tangente) foram tratadas como na Observação (11.6.5).

As potências pares da função cossecante são tratadas de modo semelhante, como mostra a:

Observação 11.6.8 *Observemos que que:*

$$\int \operatorname{cossec}^{2n}(x)\,dx = \int \left[\operatorname{cossec}^2(x)\right]^n\,dx = \int \left[1 + \operatorname{cotg}^2(x)\right]^n\,dx,$$
$$\overset{\textit{Binômio de Newton - Prop. (6.3.2)}}{=} \int \left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\operatorname{cotg}^2(x)\right]^k 1^{n-k}\right\}\,dx$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int \operatorname{cotg}^{2k}(x)\,dx\,,$$

e cada uma das parcelas na soma acima (cada uma delas envolve uma potência parda função cotangente) foram tratadas como na Observação (11.6.6).

Para as potências ímpares da função secante temos a:

Observação 11.6.9

1. *Consideremos a mudança de variáveis (é bijetora, verifique!):*

$$\begin{array}{ccc} \left(0, \frac{\pi}{2}\right) & \to & (1, \infty) \\ x & \mapsto & u \doteq \sec(x) + \operatorname{tg}(x) \end{array}.$$

Com isto teremos:

$$\begin{aligned} \int \sec(x)\,dx &= \int \sec(x)\frac{\sec(x)+\operatorname{tg}(x)}{\sec(x)+\operatorname{tg}(x)}\,dx = \int \frac{\sec^2(x)+\sec(x)\,\operatorname{tg}(x)}{\sec(x)+\operatorname{tg}(x)}\,dx \\ &\overset{u \doteq \sec(x)+\operatorname{tg}(x) \Rightarrow du = \frac{d}{dx}[\sec(x)+\operatorname{tg}(x)]\,dx = [\sec(x)\,\operatorname{tg}(x)+\sec^2(x)]\,dx}{=} \int \frac{1}{u}\,du \\ &= \ln(|u|) + C \overset{u=\sec(x)+\operatorname{tg}(x)}{=} \ln(|\sec(x)+\operatorname{tg}(x)|) + C, \end{aligned}$$

isto é

$$\int \sec(x)\,dx = \ln(|\sec(x)+\operatorname{tg}(x)|) + C. \tag{11.42}$$

2. *Para $n \in \mathbb{N}$, utilizando Integração por Partes para Integral Indefinida, teremos:*

$$\underbrace{\int \sec^{2n+1}(x)\,dx}_{(I)} = \int \underbrace{\sec^{2n-1}(x)}_{u}\,\underbrace{\sec^2(x)\,dx}_{dv} = uv - \int v\,du$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \sec^{2n-1}(x) \Rightarrow du = \frac{d}{dx}\left[\sec^{2n-1}(x)\right]dx = (2n-1)\sec^{2n-2}(x)\,\sec(x)\,\operatorname{tg}(x)\,dx \\ dv = \sec^2(x)\,dx \Rightarrow v = \int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C \overset{C=0}{\Rightarrow} v = \operatorname{tg}(x) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \sec^{2n-1}(x)\,\operatorname{tg}(x) - \int \operatorname{tg}(x)\left[(2n-1)\sec^{2n-1}(x)\,\operatorname{tg}(x)\right]dx \\ &= \sec^{2n-1}(x)\,\operatorname{tg}(x) - (2n-1)\int \sec^{2n-1}(x)\,\operatorname{tg}^2(x)\,dx \\ &\overset{\operatorname{tg}^2(x)=\sec^2(x)-1}{=} \sec^{2n-1}(x)\,\operatorname{tg}(x) - (2n-1)\int \sec^{2n-1}(x)\left[\sec^2(x)-1\right]dx \\ &= \sec^{2n-1}(x)\,\operatorname{tg}(x) - (2n-1)\underbrace{\int \sec^{2n+1}(x)\,dx}_{(I)} + (2n-1)\int \sec^{2n-1}(x)\,dx, \end{aligned}$$

logo

$$[(2n-1)+1]\int \sec^{2n+1}(x)\,dx = \sec^{2n-1}(x)\,\operatorname{tg}(x) - (2n-1)\int \sec^{2n-1}(x)\,dx,$$

ou seja,

$$\int \sec^{2n+1}(x)\,dx = \frac{1}{2n}\sec^{2n-1}(x)\,\operatorname{tg}(x) + \frac{2n-1}{2n}\int \sec^{2n-1}(x)\,dx. \tag{11.43}$$

Portanto, cada vez que aplicamos a identidade acima reduzimos em 2 o expoente da potência da secante as quais teremos que calcular a integral indefinida.

Logo, aplicando a identidade acima um número finito de vezes restará calcular a integral da secante que foi obtida no item 1. desta Observação.

De modo semelhante temos as potências ímpares da função cossecante, como mostra a:

Observação 11.6.10

1. *Consideremos mudança de variáveis (é bijetora, verifique!):*

$$\begin{array}{ccc} \left(0, \frac{\pi}{2}\right) & \to & (1, \infty) \\ x & \mapsto & u \doteq \operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x) \end{array}.$$

Com isto temos que

$$\int \operatorname{cossec}(x)\, dx = \int \operatorname{cossec}(x) \frac{\operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x)}{\operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x)}\, dx = \int \frac{\operatorname{cossec}^2(x) + \operatorname{cossec}(x).\operatorname{cotg}(x)}{\operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x)}\, dx$$

$$\overset{u \doteq \operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x) \Rightarrow du = \frac{d}{dx}[\operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x)]\, dx = [-\operatorname{cossec}(x)\ \operatorname{cotg}(x) - \operatorname{cossec}^2(x)]\, dx}{=} \int \frac{1}{u}\,(-du)$$

$$= -\ln(|u|) + C \overset{u = \operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x)}{=} -\ln(|\operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x)|) + C\,,$$

isto é

$$\int \operatorname{cossec}(x)\, dx = -\ln(|\operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x)|) + C\,. \tag{11.44}$$

2. *Para* $n \in \mathbb{N}$, *utilizando Integração por Partes para Integral Indefinida, teremos:*

$$\underbrace{\int \operatorname{cossec}^{2n+1}(x)\, dx}_{(I)} = \int \underbrace{\operatorname{cossec}^{2n-1}(x)}_{u}\,.\,\underbrace{\operatorname{cossec}^2(x)\, dx}_{dv} = uv - \int v\, du$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{cossec}^{2n-1}(x) \Rightarrow du = \frac{d}{dx}\left[\operatorname{cossec}^{2n-1}(x)\right]\, dx \\ \quad = -(2n-1)\operatorname{cossec}^{2n-2}(x)\ \operatorname{cossec}(x).\operatorname{cotg}(x)\, dx \\ \\ dv = \operatorname{cossec}^2(x)\, dx \Rightarrow v = \int \operatorname{cossec}^2(x)\, dx = -\operatorname{cotg}(x) + C \overset{C=0}{\Rightarrow} v = -\operatorname{cotg}(x) \end{array} \right\}$$

$$=$$

$$= -\operatorname{cossec}^{2n-1}(x)\ \operatorname{cotg}(x) - \int [-\operatorname{cotg}(x)] \left[-(2n-1)\ \operatorname{cossec}^{2n-1}(x)\ \operatorname{cotg}(x)\right]\, dx$$

$$= -\operatorname{cossec}^{2n-1}(x)\ \operatorname{cotg}(x) - (2n-1)\int \operatorname{cossec}^{2n-1}(x)\ \operatorname{cotg}^2(x)\, dx$$

$$\overset{\operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cossec}^2(x) - 1}{=} -\operatorname{cossec}^{2n-1}(x)\ \operatorname{cotg}(x) - (2n-1)\int \operatorname{cossec}^{2n-1}(x)\,[\operatorname{cossec}^2(x) - 1]\, dx$$

$$= -\operatorname{cossec}^{2n-1}(x)\ \operatorname{cotg}(x) - (2n-1)\underbrace{\int \operatorname{cossec}^{2n+1}(x)\, dx}_{(I)} + (2n-1)\int \operatorname{cossec}^{2n-1}(x)\, dx\,,$$

logo

$$[(2n-1)+1]\int \operatorname{cossec}^{2n+1}(x)\, dx = -\operatorname{cossec}^{2n-1}(x)\ \operatorname{cotg}(x) - (2n-1)\int \operatorname{cossec}^{2n-1}(x)\, dx\,,$$

ou seja,

$$\int \operatorname{cossec}^{2n+1}(x)\,dx = -\frac{1}{2n}\operatorname{cossec}^{2n-1}(x)\operatorname{cotg}(x) + \frac{2n-1}{2n}\int \operatorname{cossec}^{2n-1}(x)\,dx\,. \tag{11.45}$$

Com isto, cada vez que aplicamos a identidade acima reduzimos em 2 o expoente da potência da cossecante as quais teremos que calcular na integral indefinida.

Logo, aplicando a identidade acima um número finito de vezes restará calcular a integral da cossecante que foi dada no item 1. desta Observação.

11.6.5 Integrais indefinidas do tipo: $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\,dx$, com $p^2-4q<0$, $k \in \{2,3,\cdots\}$

Trataremos a seguir de integrais do tipo

$$\int \frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,dx\,, \quad \text{para cada} \quad k\in\{2,3,\cdots\},$$

onde o polinômio do 2.a grau

$$p(x) \doteq x^2+px+q\,, \quad \text{para cada} \quad x\in\mathbb{R}$$

é um polinômio irredutível em $\mathbb{R}$, ou seja, não tem raízes reais, ou equivalentemente,

$$\Delta \doteq p^2-4q<0\,. \tag{11.46}$$

Observemos que podemos escrever o polinômio do 2.o grau, que aparece no denominador da função racional do integrando, da seguinte maneira:

$$x^2+px+q \overset{\text{Exercício}}{=} \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}\,.$$

Assim, de (11.46), segue que

$$\frac{4q-p^2}{4} \overset{(11.46)}{>} 0.$$

Logo se

$$a \doteq \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}} \tag{11.47}$$

segue que

$$a^2 = \frac{4q-p^2}{4}$$

assim a identidade acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\,,$$

onde $\underline{a}$ é dado por (11.47).

Logo

$$\int \frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,dx = \int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\right]^k}\,dx \overset{u=x+\frac{p}{2} \Rightarrow du=1\,dx}{=} \int \frac{1}{\left(u^2+a^2\right)^k}\,du \tag{11.48}$$

e esta última pode ser encontrada utilizando-se as substituições dadas pela Observação (11.6.1).

Na verdade ela é do tipo (ii) e assim podemos tentar calculá-la utilizando a mudança de variáveis

$$u = a\ \mathrm{tg}(\theta) \quad \text{ou} \quad u = a\ \mathrm{senh}(v)\,.$$

Com isto obtemos a integral indefinida dada inicialmente.

Apliquemos a idéia acima ao seguinte exemplo:

Exemplo 11.6.7 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{1}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}\, dx\,.$$

Resolução:

Observemos que o polinômio do 2.a grau

$$p(x) \doteq x^2 + x + 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

é um polinômio irredutível em $\mathbb{R}$ (isto é, não possui raízes reais), pois

$$\Delta = 1^2 - 4.1.1 = -3 < 0\,.$$

Com isto podemos aplicar as idéias desenvolvidas acima e assim obter:

$$\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\, dx \overset{(11.48)}{=} \int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2} \overset{u \doteq x+\frac{1}{2} \Rightarrow du = dx}{=} \int \frac{1}{\left[u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2}\, du$$

$$\overset{u \doteq \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{tg}(\theta) \Rightarrow du = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2(\theta)\, d\theta}{=} \int \frac{1}{\left\{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{tg}(\theta)\right]^2 + \frac{3}{4}\right\}^2} \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2(\theta)\, d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\frac{9}{16}\left[\mathrm{tg}^2(\theta)+1\right]^2} \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2(\theta)\, d\theta = \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \frac{1}{\left[\sec^2(\theta)\right]^2}\sec^2(\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \frac{1}{\sec^2(\theta)}\, d\theta = \frac{8\sqrt{3}}{9} \underbrace{\int \cos^2(\theta)\, d\theta}_{\overset{(11.31)}{=} \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2\theta)} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2\theta)\right] + C$$

$$\overset{\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right)}{=} \frac{4\sqrt{3}}{9}\left\{\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}u\right)\right] + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\left[2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}u\right)\right]\right\} + C$$

$$\overset{u = \frac{2x+1}{2}}{=} \frac{4\sqrt{3}}{9}\left\{\mathrm{arctg}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2x+1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\left\{2\,\mathrm{arctg}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2x+1}{2}\right)\right]\right\}\right\} + C\,,$$

ou seja,

$$\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\, dx = \frac{4\sqrt{3}}{9}\left\{\mathrm{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}\,(2x+1)}{3}\right] + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\left\{2\,\mathrm{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}\,(2x+1)}{3}\right]\right\}\right\} + C\,.$$

A seguir temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 11.6.9 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^3}\, dx\,.$$

Resolução:

Observemos que o polinômio do 2.o grau

$$p(x) \doteq x^2+x+1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

é um polinômio irredutível em $\mathbb{R}$ (isto é, não possui raízes reais), pois

$$\Delta \doteq 1^2 - 4.1.1 = -3 < 0\,.$$

Com isto podemos aplicar a s idéias desenvolvidas acima e assim obter:

$$\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^3}\, dx = \int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^5+\frac{3}{4}\right]^3} \overset{u \doteq x+\frac{1}{2} \Rightarrow du=dx}{=} \int \frac{1}{\left\{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}^3}\, du$$

$$\overset{u \doteq \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}(\theta) \Rightarrow du = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2(\theta)\, d\theta}{=} \int \frac{1}{\left\{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}(\theta)\right]^5+\frac{3}{4}\right\}^3}\, \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2(\theta)\, d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\frac{9}{16}\left[\operatorname{tg}^2(\theta)+1\right]^3}\, \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2(\theta)\, d\theta = \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{\left[\sec^2(\theta)\right]^3}\sec^2(\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{\sec^3(\theta)}\, d\theta = \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \cos^3(\theta)\, d\theta. \tag{11.49}$$

Calculemos a integral indefinida da potência ímpar da função cosseno:

$$\int \cos^3(\theta)\, d\theta = \int \cos^2(\theta)\cos(\theta)\, d\theta = \int \left[1-\operatorname{sen}^2(\theta)\right]\cos(\theta)\, d\theta \overset{v \doteq \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow dv = \cos(\theta)\, dt}{=} \int \left(1-v^2\right)\, dv$$

$$= v - \frac{v^3}{3} + C \overset{v=\operatorname{sen}(\theta)}{=} \operatorname{sen}(\theta) - \frac{\operatorname{sen}^3(\theta)}{3} + C\,. \tag{11.50}$$

Logo substituindo (11.50) em (11.49) obteremos

$$\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^3}\, dx = \frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\operatorname{sen}(\theta) - \frac{\operatorname{sen}^3(\theta)}{3}\right] + C$$

$$\overset{\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}u\right)}{=} \frac{8\sqrt{3}}{9}\left\{\operatorname{sen}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}u\right)\right] - \frac{\operatorname{sen}^3\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}u\right)\right]}{3}\right\} + C$$

$$\overset{u=x+\frac{1}{2}}{=} \frac{8\sqrt{3}}{9}\left\{\operatorname{sen}\left\{\operatorname{arctg}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\right\} - \frac{\operatorname{sen}^3\left\{\operatorname{arctg}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{3}\right\} + C\,,$$

ou seja,

$$\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^3}\,dx = \frac{8\sqrt{3}}{9}\left\{ \operatorname{sen}\left\{\operatorname{arctg}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\right\} - \frac{\operatorname{sen}^3\left\{\operatorname{arctg}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{3}\right\} + C\,.$$

11.6.6 Integrais indefinidas do tipo: $\displaystyle\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}\,dx$, com $p^2-4q<0$, $k\in\{2,3,\cdots\}$

ePara $k\in\{2,3,\cdots\}$, trataremos a seguir de integrais do tipo:

$$\int \frac{ax+b}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,dx\,,$$

onde o polinômio do 2.o grau

$$p(x) \doteq x^2+px+q, \quad x\in\mathbb{R}$$

é um polinômio irredutível em $\mathbb{R}$, ou seja, não tem raízes reais ou, equivalentemente,

$$\Delta = p^2-4q<0\,.$$

O que faremos é escrever o numerador da função racional do integrando, em termos da derivada do denominador da mesma.

Observemos que

$$\frac{ax+b}{\left(x^2+px+q\right)^k} \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{\frac{a}{2}(2x+p)+b-\frac{ap}{2}}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,.$$

Com isto, agiremos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\int \frac{ax+b}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,dx &= \int \frac{\frac{a}{2}(2x+p)+b-\frac{ap}{2}}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,dx \\
&= \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,dx + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,dx \\
&\overset{u\doteq x^2+px+q \Rightarrow du=(2x+p)\,dx}{=} \frac{a}{2}\int \frac{1}{u^k}\,du + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,dx \\
&\overset{k\in\{2,3,\cdots\}}{=} \frac{a}{2(k+1)}u^{-k+1} + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,dx \\
&\overset{u=x^2+px+q}{=} \frac{a}{2(k+1)}\frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}} + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\underbrace{\int \frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,dx}_{(I)}\,,
\end{aligned}$$

e para calcularmos a integral indefinida (I) utilizamos as técnicas desenvolvidas na subseção anterior.

Apliquemos a técnica acima ao seguinte exercício resolvido:

Exercício 11.6.10 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{3x+3}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx\,.$$

<u>**Resolução:**</u>

Sabemos que o polinômio do 2.o grau

$$p(x) \doteq x^2+x+1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

é um polinômio irredutível em $\mathbb{R}$, pois

$$\Delta = 1^2 - 4.1.1 = -3 < 0\,.$$

Logo podemos aplicar a decomposição acima e obter:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+3}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+1)+\frac{3}{2}}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx \\
&\overset{u \doteq x^2+2x+1 \Rightarrow du=(2x+1)\,dx}{=} \frac{3}{2}\int \frac{1}{u^2}\,du + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx \\
&= \frac{3}{2}\frac{-1}{u} + + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx \\
&\overset{u=x^2+2x+1}{=} -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{3}{2}\underbrace{\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx}_{\text{Exemplo (11.6.7)}} \\
&= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{3}{2}\left\{\frac{4\sqrt{3}}{9}\left\{\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}\,(2x+1)}{3}\right]\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left\{2\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}\,(2x+1)}{3}\right]\right\}\right\}\right\} + C\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+3}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\left\{\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}\,(2x+1)}{3}\right]\right. \\
\left. + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left\{2\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}\,(2x+1)}{3}\right]\right\}\right\} + C\,.
\end{aligned}$$

11.7 Integrais de funções racionais

Nesta seção desenvolveremos técnicas para o cálculo de integrais indefinidas do tipo

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx\,, \tag{11.51}$$

onde p, q são funções polinomiais, ou seja, calcular integrais indefinidas de funções racionais.

Para isto utilizaremos, entre outras, as técnicas desenvolvidas nas seções anteriores.

Lembremos que uma função polinomial, $p = p(x)$, para $x \in \mathbb{R}$, definida por um polinômio de grau $\underline{n}$ pode ser colocada na seguinte forma:

$$p(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_n x_n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ e $a_n \neq 0$.

Começaremos pelo seguinte resultado, cuja demonstração será omitida:

Teorema 11.7.1 *(Teorema Fundamental da Álgebra) Um polinômio de grau $\underline{n}$ pode ser decomposto, como produto de um número finito de fatores, onde cada um desses fatores é um polinômio do 1. grau ou do 2.o grau, sendo este último, irredutível em $\mathbb{R}$ (isto é, não têm raízes reais).*

Observação 11.7.1

1. *Se $p = p(x)$, para $x \in \mathbb{R}$, é uma função polinomial cujo polinômio que a define tem grau $\underline{n}$ então, do Teorema Fundamental da Álgebra, segue que a função polinomial $\underline{p}$ pode ser colocada na seguinte forma:*

$$p(x) = a\,\underbrace{(x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_k)^{m_k}}_{\text{fatores do 1.o grau}}\,\underbrace{\left(x^2 + a_1 x + b_1\right)^{n_1} \cdots \left(x^2 + a_j x + b_j\right)^{n_j}}_{\text{fatores do 2. grau irredutíveis em } \mathbb{R}},$$

   onde cada um dos polinômios do 2.o grau na decomposição acima **não** *têm raízes reais, isto é,*

$$a_r^2 - 4b_r < 0\,, \quad \textit{para cada} \quad r \in \{1, 2, \cdots, j\}\,.$$

2. *Notemos que*

$$m_1 + \cdots + m_k + 2n_1 + \cdots + 2n_j = n\,.$$

3. *Na situação acima diremos que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, a raiz $x = x_i$ será uma* **raiz de multiplicidade** *m_i do monômio $(x - x_i)^{m_i}$.*

Consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 11.7.1 *Aplique o Teorema Fundamental da Álgebra a função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Resolução:

Observemos que

$$p(1) = 1^4 - 2.1^3 + 2.1^2 - 2.1 + 1 = 0\,,$$

ou seja,

$$x_1 = 1$$

é uma raiz real do polinômio

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1\,,$$

ou seja, a função polinomial

$$p(x) \doteq x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

será divisível pela função polinomial

$$r(x) \doteq x - 1 \,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R} \,,$$

isto é, existe uma função polinomial

$$q = q(x) \,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R} \,,$$

tal que

$$p(x) = q(x)(x-1) \,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \,.$$

Para encontrar a função polinomial $q = q(x)$, para $x \in \mathbb{R}$, aplicaremos o Algoritmo de Briot-Rufini:

$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$	$x - 1$
$-\left(x^4 - x^3\right)$ $= -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$	$x^3 - x^2 + x - 1$
$-\left(-x^3 + x^2\right)$ $= x^2 - 2x + 1$	
$-\left(x^2 - x\right)$ $= -x + 1$	
$-(-x + 1)$ $= 0$	

Logo se considerarmos a função polinomial $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$q(x) \doteq x^3 - x^2 + x - 1 \,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \,,$$

teremos que

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x-1)\, q(x) \,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \,. \tag{11.52}$$

Observemos que

$$q(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0 \,,$$

ou seja,

$$x_2 = 1$$

é um raiz real do polinômio

$$x^3 - x^2 + x - 1,$$

ou seja, a função polinomial

$$q(x) = x^3 - x^2 + x - 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

será divível pela função polinomial

$$r_1(x) \doteq x - 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

isto é, exite uma função polinomial $q_1 = q_1(x)$ tal que

$$q(x) = q_1(x)(x-1)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando-se, novamente, o Algoritmo de Briot-Rufini, obteremos:

$x^3 - x^2 + x - 1$	$x - 1$
$-\left(x^3 - x^2\right)$ $= x - 1$	$x^2 + 1$
$-(x-1)$ $= 0$	

Logo se considerarmos a função polinomial $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$q_1(x) \doteq x^2 + 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

teremos que

$$q(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)\,q_1(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{11.53}$$

Observemos que o polinômio

$$x^2 + 1$$

não possui raízes reais (isto é, é um polinômio irredutível do 2.o grau em $\mathbb{R}$).

Logo, de (11.52) e (11.53), segue que

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = \underbrace{(x-1)^2}_{\text{(fator do 1.o grau)}} \underbrace{\left(x^2 + 1\right)}_{\text{(fator do 2.o grau irredutível em } \mathbb{R})}$$

e assim temos a decomposição garantida pelo Teorema Fundamental da Álgebra.

No caso $x = 1$ é uma raíz de multiplicidade 2 do polinômio $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.

Passaremos agora a tratar do cálculo da integral indefinida de uma função racional, isto é, do cálculo da integral indefinida:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx,$$

onde p e q são funções polinomiais dadas.

Consideraremos, primeiramente, o seguinte caso:

11.7.1 Caso que $\text{grau}(p) < \text{grau}(q)$

Trataremos nesta subseção do caso em que o grau do polinômio do numerador da integral indefinida da função racional, é menor que o grau do polinômio do denominador, isto é,

$$\text{grau}(p) < \text{grau}(q).$$

Iniciaremos aplicando o Teorema Fundamental da Álgebra a função polinomial $q = q(x)$ (ou seja, ao polinômio do denominador) para obter uma decomposição do tipo:

$$q(x) = a\underbrace{(x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_k)^{m_k}}_{\text{fatores do 1.o grau}}\underbrace{\left(x^2+a_1x+b_1\right)^{n_1}\cdots\left(x^2+a_jx+b_j\right)^{n_j}}_{\text{fatores do 2. grau irredutíveis em } \mathbb{R}}. \tag{11.54}$$

Nosso objetivo é decompor a função racional

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{a(x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_k)^{m_k}\left(x^2+a_1x+b_1\right)^{n_1}\cdots\left(x^2+a_jx+b_j\right)^{n_j}},$$

em uma soma de funções racionais, onde cada umas das parcelas da decomposição terá **no denominador**, somente, uma expressão do tipo

$$(x-x_i)^{l_i}, \quad \text{para} \quad l_i \in \{1, 2, \cdots, m_i\} \tag{11.55}$$

para cada $i \in \{1, \cdots k\}$, ou do tipo

$$\left(x^2+a_rx+b_r\right)^{s_r}, \quad \text{para} \quad s_r \in \{1, 2, \cdots, n_r\} \tag{11.56}$$

para cada $r \in \{1, \cdots, j\}$, e no numerador aparecerá uma função polinomial cujo grau será zero ou grau igual a 1, que dependerá da parcela que estaremos considerando.

Tal decomposição será denominada decomposição da função racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ em **frações parciais**.

A seguir descreveremos, de modo mais explícito, como são as parcelas associadas ao fator do denominador (11.55) e ao fator (11.56).

1. Para cada $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ seja
$$(x-x_i)^{m_i}$$
um dos fatores (do 1.o grau) na decomposição do denominador da função racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, isto é, de (11.54) (ou seja, da função polinomial $q = q(x)$ dada pelo Teorema Fundamental da Álgebra).
Na decomposição da função racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ em frações parciais, associado ao termo do denominador $(x-x_i)^{m_i}$, teremos as seguintes parcelas:
$$\frac{A_{i,1}}{x-x_i} + \frac{A_{i,2}}{(x-x_i)^2} + \frac{A_{i,3}}{(x-x_i)^3} + \cdots + \frac{A_{i,m_i}}{(x-x_i)^{m_i}}. \tag{11.57}$$

2. Para cada, $r \in \{1, 2, \cdots, j\}$ seja
$$\left(x^2+a_rx+b_r\right)^{n_r}$$
um dos fatores (do 2.o grau irredutível) da decomposição (11.54) (ou seja, da função polinomial $q = q(x)$ dada pelo Teorema Fundamental da Álgebra).

Na decomposição da função racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ em frações parciais, associado ao termo do denominador $\left(x^2 + a_r x + b_r\right)^{n_r}$, teremos as seguintes parcelas:

$$\frac{B_{r,1}x + C_{r,1}}{x^2 + a_r x + b_r} + \frac{B_{r,2}x + C_{r,2}}{\left(x^2 + a_r x + b_r\right)^2} + \frac{B_{r,3}x + C_{r,3}}{\left(x^2 + a_r x + b_r\right)^3} + \cdots + \frac{B_{r,n_r}x + C_{r,n_r}}{\left(x^2 + a_r x + b_r\right)^{n_r}}. \tag{11.58}$$

Deste modo obtemos uma decomposição da função racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ em frações parciais, a saber:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{a}\left\{\left[\frac{A_{1,1}}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(x - x_1)^{m_1}}\right] + \cdots + \left[\frac{A_{k,1}}{x - x_k} + \cdots + \frac{A_{k,m_k}}{(x - x_k)^{m_k}}\right]\right.$$
$$\left. + \left[\frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2 + a_1 x + b_1} + \cdots + \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{\left(x^2 + a_1 x + b_1\right)^{n_1}}\right] + \cdots + \left[\frac{B_{j,1}x + C_{j,1}}{x^2 + a_j x + b_j} + \cdots + \frac{B_{j,n_j}x + C_{j,n_j}}{\left(x^2 + a_j x + b_j\right)^{n_j}}\right]\right\}.$$

Para finalizar observemos que sabemos encontrar as integrais indefinidas de cada uma das parcelas da decomposição da função racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ em frações parciais, ou seja, podemos encontrar a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$.

De modo mais preciso, transformamos o problema de encontrar a integral indefinida de uma função racional, isto é, $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, em calcular a soma de integrais indefinidas dos seguintes tipos:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x - a}\,dx$;

2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x - a)^k}\,dx$, para cada $k \in \{2, 3, \cdots\}$;

3. $\displaystyle\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q}\,dx$;

4. $\displaystyle\int \frac{ax + b}{\left(x^2 + px + q\right)^k}\,dx$, para cada $k \in \{2, 3, \cdots\}$,

que foram tratadas nas seções anteriores.

Observação 11.7.2 *Podemos mostrar que a decomposição da função racional* $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ *em frações parciais, obtida acima, é única.*

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Apliquemos o processo acima ao:

Exemplo 11.7.2 *Encontre a decomposição da função racional* $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ *em frações parciais, onde* $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são dadas por:*

$$p(x) \doteq 4 - 2x \quad e \quad q(x) \doteq x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Resolução:

Notemos que
$$\text{grau}(p) = 1 < 4 = \text{grau}(q).$$

Primeiramente devemos aplicar o Teorema Fundamental da Álgebra a função polinomial $q = q(x)$ (a função polinomial que aparece no denominador da função racional).

Isto foi feito no Exemplo (11.7.1) onde obtivemos
$$q(x) = (x-1)^2\left(x^2+1\right), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Portanto
$$\frac{4-2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \frac{4-2x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}.$$

Pelo item 1. do procedimento acima, associado ao fator $(x-1)^2$, do denominador da função racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, deveremos ter a seguinte soma:
$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}.$$

Por outro lado, associado ao fator irredutível x^2+1, do denominador da função racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, deveremos ter a seguinte expressão:
$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2+1}.$$

Com isto deveremos ter:
$$\frac{4-2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \frac{p(x)}{q(x)} \overset{a=1}{=} \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1}.$$

Assim, nosso problema passa a ser encontrar $A_1, A_2, B_1, C_1 \in \mathbb{R}$, de tal modo que
$$\begin{aligned}
\frac{4-2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} \\
&= \frac{A_1(x-1)(x^2+1) + A_2((x^2+1) + (B_1x+C_1)(x-1)^2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{(A_1+B_1)x^3 + (-A_1+A_2-2B_1+C_1)x^2 + (A_1+B_1-2C_1)x + (-A_1+A_2+C_1)}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}.,
\end{aligned}$$

Comparando o lado direito da identidade acima com o lado esquerdo, obteremos o seguinte sistema linear de equações do 1. grau, nas variáveis $A_1, A_2, B_1, C_1 \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ -A_1 + A_2 - 2B_1 + C_1 = 0 \\ A_1 + B_1 - 2C_1 = -2 \\ -A_1 + A_2 + C_1 = 4 \end{cases}, \quad \text{cuja solução será (Exercício):} \quad \begin{cases} A_1 - 2 \\ A_2 = 1 \\ B_1 = 2 \\ C_1 = 1 \end{cases}.$$

Portanto a decomposição da função racional será dada por:
$$\frac{4-2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1}.$$

Com isto podemos resolver o:

Exemplo 11.7.3 *Encontrar a integral indefinida*

$$\int \frac{4-2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx\,.$$

Resolução:

Do Exemplo acima temos que:

$$\int \frac{4-2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx \overset{\text{Exercício acima}}{=} \int \left[\frac{-2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+1}\right]dx$$
$$= -2\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} + \int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx. \tag{11.59}$$

Mas

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx \overset{u\doteq x-1 \Rightarrow du=dx}{=} \int \frac{1}{u}\,du = \ln(|u|)+C \overset{u\doteq x-1}{=} \ln(|x-1|)+C\,, \tag{11.60}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \overset{u\doteq x-1 \Rightarrow du=dx}{=} \int \frac{1}{u^2}\,du = \frac{-1}{u}+C \overset{u=x-1}{=} -\frac{1}{x-1}+C\,, \tag{11.61}$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \overset{u=x^2+1 \Rightarrow du=2x\,dx}{=} \int \frac{1}{u}\,dx + \operatorname{arctg}(x)$$
$$= \ln(|u|) + \operatorname{arctg}(x) + C \overset{u=x^2+1}{=} \ln\left(\underbrace{\left|x^2+1\right|}_{=x^2+1}\right) + \operatorname{arctg}(x) + C\,. \tag{11.62}$$

Logo substituindo (11.60),(11.61) e (11.62) em (11.59) obteremos:

$$\int \frac{4-2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx = -2\ln(|x-1|) - \frac{1}{x-1} + \ln\left(x^2+1\right) + \operatorname{arctg}(x) + C\,.$$

Observação 11.7.3

1. *Como ilustra o Exemplo acima, o método das frações parciais é uma ferramenta muito importante na obtenção de integrais indefinidas do tipo* $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, *onde* p, q *são funções polinomiais, sendo que o grau do polinômio* $\underline{p}$ *menor que grau do polinômio* $\underline{q}$, *isto é,*

$$\operatorname{grau}(p) < \operatorname{grau}(q).$$

2. *Quando o grau do polinômio de* $\underline{p}$ *(o polonômio do numerador) é maior ou igual ao grau do polinômio* $\underline{q}$ *(ou seja, do polinômio do denominador), ou seja,*

$$\operatorname{grau}(p) \geq \operatorname{grau}(q),$$

então, aplicando-se o Algoritmo de Briot-Rufini, podemos encontrar funções polinomiais

$$r = r(x) \quad e \quad s = s(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

(o polinômio $r = r(x)$ *será resto da divisão do polinômio* $p = p(x)$ *pelo polinômio* $q = q(x)$*) tais que*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}\,;\, q(x) = 0\},$$

onde o grau do polinômio de $\underline{r}$ *é menor que o grau do polinômio de* $\underline{q}$*, ou seja,*

$$\text{grau}(r) < \text{grau}(q).$$

Deste modo teremos:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \left[s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\right]\,dx = \int s(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx\,,$$

onde a primeira parcela é a integral indefinida de uma função polinomial (simples de calcular) e a segunda parcela é a integral de uma função racional, onde

$$\text{grau}(r) < \text{grau}(q)$$

e assim podemos aplicar o método das frações parciais para encontrar sua integral indefinida.

Apliquemos isto ao:

Exemplo 11.7.4 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x}\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que na função racional

$$\frac{p(x)}{q(x)} \doteq \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}\,,$$

o grau do polinômio do numerador (isto é, o polinômio $x^3 - 1$ tem grau é 3) é igual ao grau do polinômio do denominador (isto é, o polinômio $4x^3 - x$ tem grau é 3).

Logo precisamos realizar a divisão dos dois polinômios para podermos prosseguir.

Aplicando-se o Algoritmo de Briot-Rufini, obteremos:

$x^3 - 1$	$4x^3 - x$
$-\left(x^3 - \frac{1}{4}x\right)$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}x - 1$	

Assim teremos:

$$\frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}x - 1}{4x^3 - x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{x - 4}{4x^3 - x}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}\,.$$

Assim

$$\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx = \int \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{x-4}{4x^3-x}\right]\,dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \frac{x-4}{4x^3-x}\,dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\int \frac{x-4}{4x^3-x}\,dx\,. \qquad (11.63)$$

Logo, basta calcularmos a integral indefinida

$$\int \frac{x-4}{4x^3-x}\,dx\,.$$

Para isto aplicaremos o método das frações parciais.

Observemos que a decomposição em fatores do 1.o grau e fatores irredutíveis do 2.o grau em $\mathbb{R}$ da função polinomial do denominador será dada por:

$$4x^3 - x = 4x\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 4x\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Logo aplicando o método das frações parciais obteremos:

$$\frac{x-4}{4x^3-x} \overset{a=4}{=} \frac{1}{4}\left[\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+\frac{1}{2}} + \frac{A_3}{x-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{A_1\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) + A_2x\left(x-\frac{1}{2}\right) + A_3x\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{4}\left[\frac{(A_1+A_2+A_3)x^2 - \frac{1}{2}(A_2-A_3)x - \frac{1}{4}A_1}{x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}(A_2 - A_3) = 1 \\ -\frac{1}{4}A_1 = -4 \end{cases}, \quad \text{cuja solução será (Exercício):} \quad \begin{cases} A_1 = 16 \\ A_2 = -9 \\ A_3 = -7 \end{cases},$$

assim

$$\frac{x-4}{4x^3-x} = \frac{1}{4}\left[\frac{16}{x} + \frac{-9}{x+\frac{1}{2}} + \frac{-7}{x-\frac{1}{2}}\right].$$

Logo

$$\int \frac{x-4}{4x^3-x}\,dx = \int \frac{1}{4}\left[\frac{16}{x} - \frac{9}{x+\frac{1}{2}} - \frac{7}{x-\frac{1}{2}}\right]\,dx = 4\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{9}{4}\int \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\,dx - \frac{7}{4}\int \frac{1}{x-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\overset{u \doteq x+\frac{1}{2},\, v \doteq x-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; du=dx,\, dv=dx}{=} 4\ln(|x|) - \frac{9}{4}\int \frac{1}{u}\,du - \frac{7}{4}\int \frac{1}{v}\,dv$$

$$= 4\ln(|x|) - \frac{9}{4}\ln(|u|) - \frac{7}{4}\ln(|v|) + C$$

$$\overset{u \doteq x+\frac{1}{2},\, v \doteq x-\frac{1}{2}}{=} 4\ln(|x|) + \frac{9}{4}\ln\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|\right) - \frac{7}{4}\ln\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|\right) + C\,.$$

Substituindo esta integrais indefinidas calculdas em (11.63) obteremos

$$\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx = \frac{1}{4}x + \ln(|x|) - \frac{9}{4}\ln\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|\right) - \frac{7}{4}\ln\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|\right) + C\,.$$

Temos o exercício resolvido:

Exercício 11.7.1 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{x^3-x^2+3}{x^2-2x+2}\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que na função racional

$$\frac{p(x)}{q(x)} \doteq \frac{x^3-x^2+3}{x^2-2x+2}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

o grau do polinômio do numerador (isto é, o polinômio x^3-x^2+3 tem grau é 3) é maior que o grau do polinômio do denominador (isto é, o polinômio x^2-2x+2 tem grau é 2).

Logo precisamos realizar a divisão dos dois polinômios para podermos prosseguir.

Aplicando-se o Algoritmo de Briot-Rufini, obteremos:

x^3-x^2+3	x^2-2x+2
$-\left(x^3-2x^2+2x\right)$ x^2-2x+3	$x+1$
$-\left(-x^2-2x+2\right)$ 1	

Logo teremos:

$$\frac{x^3-x^2+3}{x^2-2x+2} = (x+1) + \frac{1}{x^2-2x+2}.$$

Assim:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-x^2+3}{x^2-2x+2}\,dx &= \int \left[(x+1) + \frac{1}{x^2-2x+2}\right]\,dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx\,. \end{aligned} \tag{11.64}$$

Logo basta encontrar a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$.

Observemos que o polinômio

$$x^2-2x+2$$

é um polinômio do 2.o grau irreditível sobre $\mathbb{R}$, pois

$$\Delta = (-2)^2 - 4.1.2 = -4 < 0\,.$$

Assim

$$\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx \overset{u \doteq x-1 \Rightarrow du=dx}{=} \int \frac{1}{u^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}(u) + C$$
$$\overset{u=x-1}{=} \operatorname{arctg}(x-1) + C\,.$$

Substituindo-se as integrais indefinidas calculadas acima em (11.64), obteremos

$$\int \frac{x^3-x^2+3}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \operatorname{arctg}(x-1) + C\,.$$

11.7.2 Integrais indefinidas de funções racionais envolvendo seno e cosseno

Definição 11.7.1 *Uma função racional envolvendo as funções seno e cosseno é uma função do tipo:*

$$\frac{p[\operatorname{sen}(\theta)]}{q[\cos(\theta)]} \quad ou \quad \frac{p[\cos(\theta)]}{q[\operatorname{sen}(\theta)]}\,,$$

onde $p = p(x)$ e $q = q(x)$, $x \in \mathbb{R}$ são funções polinomiais.

Observação 11.7.4 *Para o cálculo de integrais de funções racionais envolvendo as funções seno e cosseno agiremos como a seguir.*

Trataremos da integral indefinida

$$\int \frac{p[\operatorname{sen}(\theta)]}{q[\cos(\theta)]}\,d\theta \tag{11.65}$$

e deixaremos como exercício para o leitor, tratar da integral indefinida

$$\int \frac{p[\cos(\theta)]}{q[\operatorname{sen}(\theta)]}\,d\theta\,.$$

A idéia central é fazer uma mudança de variáveis (logo, bijetora!), do tipo:

$$x \doteq \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

para $\theta \in I$, onde I um intervalo apropriado de $\mathbb{R}$, por exemplo, $I \doteq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Observemos que se

$$x \doteq \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\,,\ \textit{ou seja, } \theta = 2\operatorname{arctg}(x)\,,\ \textit{implicando em } d\theta = 2\frac{d}{dx}[\operatorname{arctg}(x)] = \frac{2}{1+x^2}\,dx\,. \tag{11.66}$$

Além disso, temos as seguintes relações:

$$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \overset{\operatorname{sen}^2(\theta)=1-\cos^2(\theta)}{=} 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$$
$$\overset{\div\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{=} \frac{2}{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - 1 = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - 1 \overset{x=\operatorname{tg}(\theta)}{=} \frac{2}{1+x^2} - 1$$
$$= \frac{1-x^2}{1+x^2}\,. \tag{11.67}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\theta) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 2\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{1}{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&\overset{x=\operatorname{tg}(\theta)}{=} \frac{2x}{1+x^2}\,. \qquad (11.68)
\end{aligned}$$

Assim, de (11.66), (11.67) e (11.68), segue que

$$\int \frac{p[\operatorname{sen}(\theta)]}{q[\cos(\theta)]}\,d\theta \overset{x\doteq\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{=} \int \frac{p\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)}{q\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}\frac{2}{1+x^2}\,dx\,, \qquad (11.69)$$

e esta última é a integral indefinida de uma função racional (pois $\underline{p}$ *e* $\underline{q}$ *são funções polinomiais e* $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ *são funções racionais) e portanto podemos aplicar o método das frações parciais para encontrá-la e depois voltar na variável original, utilizando o fato que*

$$x = \operatorname{tg}(\theta)\,.$$

Apliquemos isto ao seguinte exercício:

Exercício 11.7.2 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}(\theta)}\,d\theta\,.$$

Resolução:

No caso temos que $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são dadas por

$$p(t) = 1 \quad \text{e} \quad q(t) = 1+t\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando o porcedimento acima obteremos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}(\theta)}\,d\theta
&\overset{\left\{\begin{array}{l} x \doteq \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow d\theta = \frac{2}{1+x^2}\,dx \\ \operatorname{sen}(\theta) = \frac{2x}{1+x^2} \\ \cos(\theta) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{array}\right\}}{=} \int \frac{1}{1+\frac{2x}{1+x^2}}\frac{2}{1+x^2}\,dx \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \overset{u\doteq x+1\cdots}{=} -\frac{1}{x+1} + C \\
&\overset{x=\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{=} -\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)+1} + C = -\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} + C\,, \qquad (11.70)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}(\theta)}\,d\theta = -\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} + C\,.$$

Observação 11.7.5 *Podemos aplicar a técnica acima para encontrar as integrais indefinidas*

$$\int \sec(\theta)\,d\theta = \int \frac{1}{\cos(\theta)}\,d\theta \quad e \quad \int \operatorname{cossec}(\theta)\,d\theta = \int \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}\,d\theta\,,$$

de um modo diferente ao que fizemos nas Observações (11.6.9) e (11.6.10), respectivamente.

Deixaremos como exercício para o leitor a aplicação deste processo a tais integrais indefinidas.

11.8 Outras técnicas

Deixaremos a cargo do leitor a leitura das técnicas desta seção para encontrar alguns outros tipos de integrais indefinidas que serãoapresentadas nas próximas três subseções que envolvem, após substituições apropriadas, integrais indefinidas de funções racionais.

11.8.1 Integrais indefinidas do tipo $\int \frac{P[\operatorname{sen}(\theta),\cos(\theta)]}{Q[\operatorname{sen}(\theta),\cos(\theta)]}\,d\theta$

Observação 11.8.1 *Uma função* $P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *será dita* **função polinomial de duas variáveis** *se ela puder ser colocada na seguinte forma:*

$$\begin{aligned} P(x,y) &= a_{oo} + [a_{1o}x + a_{o1}y] + [a_{2o}x^2 + a_{11}xy + a_{o2}y^2] \\ &\quad + \cdots + [a_{no}x^n + a_{(n-1)1}x^{n-1}y + \cdots + a_{1(n-1)}xy^{n-1} + a_{on}y^n]\,, \quad \textit{para cada} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\,, \end{aligned}$$

onde $a_{1o},\cdots,a_{on}\in\mathbb{R}$.

Para calcular integrais indefinidas do tipo

$$\int \frac{P[\operatorname{sen}(\theta),\cos(\theta)]}{Q[\operatorname{sen}(\theta),\cos(\theta)]}\,dx$$

onde $P = P(x,y)$ e $Q = Q(x,y)$ são funções polinomiais de duas variáveis, $x, y \in \mathbb{R}$, agiremos como na subseção anterior, isto é, consideraremos a mudança de variáveis (deverá ser bijetora!):

$$x \doteq \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\,,\ \text{ou seja, } \theta = 2\operatorname{arctg}(x)\,,\ \text{e com isto teremos } d\theta = 2\frac{d}{dx}[\operatorname{arctg}(x)] = \frac{2}{1+x^2}\,dx\,.$$

para $\theta\in I$, onde I é um intervalo apropriado de $\mathbb{R}$.

Além disso

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \overset{\operatorname{sen}^2(\theta)=1-\cos^2(\theta)}{=} 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \\ &= \frac{2}{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - 1 = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - 1 \overset{x=\operatorname{tg}(\theta)}{=} \frac{2}{1+x^2} - 1 \\ &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sen}(\theta) = \ &\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\ \frac{1}{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\ \frac{1}{1+\ \mathrm{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&\overset{x=\mathrm{tg}(\theta)}{=}\ \frac{2x}{1+x^2}\,.
\end{aligned}
$$

Assim teremos que

$$
\int \frac{P[\mathrm{sen}(\theta),\cos(\theta)]}{Q[\mathrm{sen}(\theta),\cos(\theta)]}\,d\theta \overset{x\doteq\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{=} \int \frac{P\left(\dfrac{2x}{1+x^2},\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{q\left(\dfrac{2x}{1+x^2},\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)}\frac{2}{1+x^2}\,dx \tag{11.71}
$$

que é uma integral indefinda de uma função racional e portanto podemos aplicar o método das frações parciais para calculá-la.

Aplicaremos isto ao seguinte exercício resolvido:

Exercício 11.8.1 *Calcular*

$$
\int \frac{\mathrm{sen}(\theta)}{1+\ \mathrm{sen}(\theta)-\cos(\theta)}\,d\theta\,.
$$

Resolução:

Notemos que

$$\int \frac{\text{sen}(\theta)}{1+\text{sen}(\theta)-\cos(\theta)}\,d\theta \overset{\left\{\begin{array}{l} x \doteq \text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow d\theta = \frac{2}{1+x^2}\,dx \\ \text{sen}(\theta) = \frac{2x}{1+x^2} \\ \cos(\theta) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\end{array}\right\}}{=} \int \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{1-x^2}{1+x^2}}\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{4}{(x+2)(x^2+1)}\,dx \overset{\text{Exercício}}{=} \int \frac{\frac{5}{4}}{x+2}+\frac{-\frac{5}{4}x+\frac{5}{2}}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{5}{4}\int\frac{1}{x+2}\,dx-\frac{5}{8}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx+\frac{5}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$\overset{u\doteq x+2,\,v\doteq x^2+1 \Rightarrow du=dx,\,dv=2x\,dx}{=} \frac{5}{4}\int\frac{1}{u}\,du-\frac{5}{8}\int\frac{1}{v}\,dv+\frac{5}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{5}{4}\ln(|u|)-\frac{5}{8}\ln(|v|)+\frac{5}{2}\text{arctg}(x)+C$$

$$\overset{u=x+2,\,v=x^2+1}{=} \frac{5}{4}\ln(|x+2|)-\frac{5}{8}\ln\left(|x^2+1|\right)+\frac{5}{2}\text{arctg}(x)+C$$

$$\overset{x=\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{=} \frac{5}{4}\ln\left[\left|\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)+2\right|\right]-\frac{5}{8}\ln\left\{\left|\left[\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2+1\right|\right\}+\frac{5}{2}\text{arctg}\left[\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]+C$$

$$= \frac{5}{4}\ln\left[\left|\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)+2\right|\right]-\frac{5}{8}\ln\left\{\left|\underbrace{\left[\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2+1}_{>0}\right|\right\}+\frac{5}{4}\theta+C\,,$$

ou seja,

$$\int \frac{\text{sen}(\theta)}{1+\text{sen}(\theta)-\cos(\theta)}\,d\theta = \frac{5}{4}\ln\left[\left|\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)+2\right|\right]-\frac{5}{8}\ln\left\{\left[\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2+1\right\}+\frac{5}{4}\theta+C\,.$$

11.8.2 Integrais indefinidas do tipo $\int \frac{P\left(x,\sqrt{x^2+px+q}\right)}{Q\left(x,\sqrt{x^2+px+q}\right)}\,dx$

Para calcular integrais do tipo

$$\int \frac{P\left(x,\sqrt{x^2+px+q}\right)}{Q\left(x,\sqrt{x^2+px+q}\right)}\,dx, \tag{11.72}$$

onde $P = P(x,y)$ e $Q = Q(x,y)$ são funções polinomiais de duas variáveis, agiremos da seguinte forma:.

Neste caso consideremos a mudanção de variáveis (deverá ser bijetora!):

$$t \doteq x+\sqrt{x^2+px+q}\,,$$

para $x \in I$, onde I é um intervalo apropriado de $\mathbb{R}$.

Com isto teremos:

$t \doteq x + \sqrt{x^2+px+q}$ se, e somente se, $\theta - x = \sqrt{x^2+px+q}$ se, e somente se, $(t-x)^2 = x^2+px+q$ se, e somente se, $\theta^2 - 2t + x^2 = x^2 + px + q$ se, e somente se, $t^2 - 2t = px + q$ se, e somente se,

$$(2t+p)x = t^2 - q \text{ se, e somente se, } x = \frac{t^2-q}{2t+p}\,. \tag{11.73}$$

Logo

$$dx = \frac{d}{dt}\left[\frac{t^2-q}{2t+p}\right] dt = \frac{2t(2t+p)-(t^2-q).2}{(2t+p)^2}\,dt = \frac{2t^2+2pt+2q}{(2t+p)^2}\,dt\,. \tag{11.74}$$

Além disso

$$\sqrt{x^2+px+q} = t - x \overset{(11.73)}{=} t - \frac{t^2-q}{2t+p} = \frac{t(2t+p)-(t^2-q)}{2t+p} = \frac{t^2+pt+q}{2t+p}\,. \tag{11.75}$$

Subsituindo-se (11.73), (11.74) e (11.75) em (11.72) (ou seja, fazendo a correspondente mudança de variáveis) obteremos

$$\int \frac{P\left(x, \sqrt{x^2+px+q}\right)}{Q\left(x, \sqrt{x^2+px+q}\right)}\,dx = \int \frac{P\left(\dfrac{t^2-q}{2t+p}, \dfrac{t^2+pt+q}{2t+p}\right)}{Q\left(\dfrac{t^2-q}{2t+p}, \dfrac{t^2+pt+q}{2t+p}\right)}\,\frac{2t^2+2pt+2q}{(2t+p)^2}\,dt\,,$$

e a integral indefinida à direita é a integral indefinida de uma função racional (na variável $\underline{t}$) que pode ser tratada pelas técnicas que desenvolvemos nas subseções anteriores (isto é, frações parciais).

Após encontrar a integral indefinida na variável $\underline{t}$, desfazemos a mudança de variáveis, isto é, fazemos

$$t = x + \sqrt{x^2+px+q}$$

e com isto terminamos de calcular a integral indefinida dada inicialmente.

Apliquemos esta técnica ao seguinte exercício resolvido:

Exercício 11.8.2 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx\,. \tag{11.76}$$

Resolução:

Fazendo a mudança de variáveis

$$t \doteq x + \sqrt{x^2+2}\,, \tag{11.77}$$

teremos que

$t \doteq x + \sqrt{x^2+2}$ se, e somente se, $t - x = \sqrt{x^2+2}$ se, e somente se, $(t-x)^2 = x^2+2$ se, e somente se, $t^2 - 2t + x^2 = x^2 + 2$ se, e somente se, $t^2 - 2t = 2$ se, e somente se, $2tx = t^2 - 2$

$$\text{se, e somente se, } x = \frac{t^2-2}{2t}\,. \tag{11.78}$$

Logo

$$dx = \frac{d}{dt}\left[\frac{t^2-2}{2t}\right] dt = \frac{2t\,2t - \left(t^2-2\right)\,2}{(2t)^2}\,dt = \frac{2t^2+4}{4t^2}\,dt = \frac{t^2+2}{2t^2}\,dt\,. \tag{11.79}$$

Além disso

$$\sqrt{x^2+2} = t - x \overset{(11.78)}{=} t - \frac{t^2-2}{2t} = \frac{t(2t+2)-(t^2)}{2t+2} = \frac{t^2+2}{2t}\,. \tag{11.80}$$

Substiuindo-se (11.78), (11.79) e (11.80) em (11.76) (ou seja, fazendo a correspondente mudança de variáveis) obteremos

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx \overset{(11.77)}{=} \int \frac{1}{\frac{t^2+2}{2t}} \frac{t^2+2}{2t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln(|t|) + C \overset{t=x+\sqrt{x^2+2}}{=} \ln\left(\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|\right) + C\,.$$

11.8.3 Integrais indefinidas do tipo $\displaystyle\int \frac{P\left(x, \sqrt{-x^2+px+q}\right)}{Q\left(x, \sqrt{-x^2+px+q}\right)}\,dx$, onde $p^2+4q>0$.

Observação 11.8.2

1. *Observemos que se o polinômio*

$$x^2 - px - q\,,$$

só tem raízes complexas (isto é, $p^2+4q<0$*) segue que*

$$x^2-px-q>0\,, \quad \textit{implicando que} \quad -x^2+px+q<0$$

e portanto

$$\sqrt{\underbrace{-x^2+px+q}_{<0}}$$

não será real, para cada $x \in \mathbb{R}$*.*

2. *Se* $p^2+4q=0$ *então o polinômio* x^2-px-q *tem duas raízes reais iguais, isto é,*

$$x^2-px-q=(x-a)^2\,, \quad \textit{implicando que} \quad -x^2+px+q=-(x-a)^2<0\,,$$

que também não nos interessa (pois neste caso teremos

$$\sqrt{-x^2+px+q} = \sqrt{\underbrace{-(x-a)^2}_{<0}}$$

não será real, para cada $x \in \mathbb{R}$*).*

3. *Logo só nos interessa o caso em que* $p^2+4q>0$*, ou seja, o polinômio* x^2-px-q *tem duas raízes reais distintas, que chamaremos de* x_o *e* x_1 *e vamos supor que* $x_o<x_1$*.*

   Neste caso, para encontrar a integral indefinida

$$\int \frac{P\left(x, \sqrt{-x^2+px+q}\right)}{Q\left(x, \sqrt{-x^2+px+q}\right)}\,dx\,, \tag{11.81}$$

   agiremos da seguinte forma:

Da item acima teremos que:

$$\sqrt{-x^2+px+q} = \sqrt{-(x-x_o)(x-x_1)}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (x_o, x_1).$$

Logo se considerarmos a mudança de variáveis (deverá ser bijetora!):

$$t \doteq \frac{\sqrt{-(x-x_o)(x-x_1)}}{x-x_o}, \quad \textit{isto é,} \quad (x-x_o)t = \sqrt{(x-x_o)(x_1-x)},$$
$$\textit{ou seja,} \quad (x-x_o)^2t^2 = (x-x_o)(x_1-x), \quad \textit{isto é,} \quad (x-x_o)t^2 = x_1 - x$$
$$\textit{ou seja,} \quad (1+t^2)x = x_o t^2 + x_1, \quad \textit{isto é,} \quad x = \frac{x_o t^2 + x_1}{1+t^2}, \tag{11.82}$$

para $t \in I$, *onde* I *é um intervalo apropriado de* $\mathbb{R}$.

Logo

$$dx = \frac{d}{dt}\left[\frac{x_o t^2 + x_1}{1+t^2}\right] dt = \frac{(2x_o t)\left(1+t^2\right) - \left(x_o t^2 + x_1\right)(2t)}{\left(1+t^2\right)^2} dt = \frac{2t(x_o - x_1)}{\left(1+t^2\right)^2} dt. \tag{11.83}$$

Além disso, segue de (11.82), que

$$\sqrt{-(x-x_o)(x-x_1)} = (x-x_o)t \overset{(11.82)}{=} \left(\frac{x_o t^2 + x_1}{1+t^2} - x_o\right) t = \frac{(x_1 - x_o)t}{1+t^2}. \tag{11.84}$$

Substituindo-se (11.82), (11.83) e (11.84) em (11.81) (ou seja, fazendo a correspondente mudança de variáveis) obteremos:

$$\int \frac{P\left(x, \sqrt{-x^2+px+q}\right)}{Q\left(x, \sqrt{-x^2+px+q}\right)} dx = \int \frac{P\left(\frac{x_o t^2 + x_1}{1+t^2}, \frac{(x_1 - x_o)t}{1+t^2}\right)}{Q\left(\frac{x_o t^2 + x_1}{1+t^2}, \frac{(x_1 - x_o)t}{1+t^2}\right)} \frac{2t(x_o - x_1)}{\left(1+t^2\right)^2} dt,$$

e a integral indefinida à direita é uma integral indefinida de uma função racional e portanto podemos aplicar as técnincas desenvolvidas nas seções anteriores (isto é, frações parciais) para calculá-la e depois desfazermos a mudança de variáveis, isto é, substituirmos

$$t = \frac{\sqrt{-(x-x_o)(x-x_1)}}{x-x_o},$$

para encontrarmos a integral indefinida da função dada inicialmente.

Como aplicação desta técnica temos o seguinte exercício resolvido

Exercício 11.8.3 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx. \tag{11.85}$$

Resolução:

Observemos que

$$\sqrt{-x^2+px+q} = \sqrt{-(x+2)(x-2)} = \sqrt{(x+2)(2-x)}, \quad \text{para cada} \quad x \in (-2, 2).$$

Consideremos a mudança de variáveis (deverá ser bijetora!):

$$t \doteq \frac{\sqrt{(x+2)(2-x)}}{x-(-2)}, \text{ ou seja,} \tag{11.86}$$

$$(x+2)t = \sqrt{(x+2)(2-x)}, \text{ isto é, } (x+2)^2t^2 = (x+2)(2-x),$$

$$\text{ou seja, } (x+2)t^2 = 2-x, \text{ ou ainda, } \left(1+t^2\right)x = -2t^2+2, \text{ ou seja, } x = \frac{-2t^2+2}{1+t^2}. \tag{11.87}$$

Logo

$$dx = \frac{d}{dt}\left[\frac{-2t^2+2}{1+t^2}1+t^2\right]dt = \frac{[-4t]\left(1+t^2\right)-\left(-2t^2+2\right)[2t]}{(1+t^2)^2}dt = \frac{-8t}{\left(1+t^2\right)^2}dt. \tag{11.88}$$

Além disso, segue de (11.87), que

$$\sqrt{4-x^2} = (x+2)t \overset{(11.87)}{=} \left[\frac{-2t^2+2}{1+t^2}-(-2)\right]t = \frac{4t}{1+t^2}. \tag{11.89}$$

Substituindo-se (11.87), (11.88) e (11.89) em (11.85) (ou seja, fazendo a correspondente mudança de variáveis) obteremos

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx \overset{(11.86)}{=} \int \frac{1}{\frac{4t}{1+t^2}}\left[\frac{-8t}{\left(1+t^2\right)^2}\right]dt = -2\int\frac{1}{1+t^2}dt = -2\operatorname{arctg}(t)+C$$

$$\overset{t=\frac{\sqrt{(x+2)(2-x)}}{x+2}}{=} -2\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{(x+2)(2-x)}}{x+2}\right]+C,$$

ou seja,

$$\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = -2\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}\right]+C.$$

11.8.4 Integrais indefinidas do tipo $\int \frac{P\left(x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},\cdots,(ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)}{Q\left(x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},\cdots,(ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)}dx$

Para calcular integrais indefinidas do tipo

$$\int \frac{P\left(x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},\cdots,(ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)}{Q\left(x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},\cdots,(ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)}dx, \tag{11.90}$$

onde $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, $m_i,n_i\in\mathbb{N}$ para $i\in\{1,2,\cdots,k\}$ e $P=P(x_1,\cdots,x_k)$ e $Q=Q(x_1,\cdots,x_k)$ são funções polinomiais nas $\underline{k}$ variáveis agiremos da seguinte forma:

Consideremos a mudança de variáveis (deverá ser bijetora!)

$$t \doteq \sqrt[r]{ax+b}, \tag{11.91}$$

onde

$$r \doteq mmc\{n_1,\cdots,n_k\}$$

(onde mmc = menor múltiplo comum), para $x \in I$, onde I um intervalo apropriado de $\mathbb{R}$.

Observemos que podemos supor $r > 1$.

Caso contrário, se $r = 1$, teremos que $n_1 = \cdots = n_k = 1$ e teríamos uma integral indefinida do tipo

$$\int \frac{P\left(x, (ax+b)^{m_1}, (ax+b)^{m_2}, \cdots, (ax+b)^{m_k}\right)}{Q\left(x, (ax+b)^{m_1}, (ax+b)^{m_2}, \cdots, (ax+b)^{m_k}\right)}\, dx\,,$$

que é uma integral indefinida de uma função racional que sabemos como calculá-la utlizando as técnicas desenvolvidas nas seções anteriores (isto é, frações parciais).

Logo podemos supor, sem perda de generalidade, que $r > 1$, assim se considerarmos a mudança de variáveis (deverá ser bijetora!)

$$ax + b = t^r \quad \text{se, e somente se,} \quad x = \frac{t^r - b}{a} \quad \text{se, e somente se,} \quad dx = \frac{r t^{r-1}}{a}\, dt\,. \tag{11.92}$$

Com isto temos que

$$(ax+b)^{\frac{n_i}{m_i}} = (ax+b)^{\frac{M_i}{r}} = t^{M_i}\,, \tag{11.93}$$

onde

$$M_i \doteq j_i\, m_i \quad \text{e} \quad l = j_i\, n_i\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, k\}\,.$$

Substituindo (11.91), (11.92) em (11.90) (ou seja, a mudança de variáveis correspondente) e utilizando (11.93) obteremos

$$\int \frac{P\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \cdots, (ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)}{Q\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \cdots, (ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)}\, dx \overset{(11.91)}{=} \int \frac{P\left(t^{M_1}, t^{M_2}, \cdots, t^{M_k}\right)}{Q\left(t^{M_1}, t^{M_2}, \cdots, t^{M_k}\right)} \frac{r t^{r-1}}{a}\, dt\,,$$

e observemos que a integral indefinida à direita é uma integral indefinida de uma função racional da variável $\underline{t}$ e pode ser calculada utilizando as técnicas desenvolvidas nas seções anteriores (isto é, frações parciais) e após isto podemos desfazer a mudanção de variáveies, isto é, substituir

$$t = \sqrt[r]{ax+b}$$

para encontrar a integral indefinida dada inicialmente.

Como aplicação desta técnica temos o seguinte exercício resolvido

Exercício 11.8.4 *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{1}{2x + 5 + \sqrt{2x+5}}\, dx\,.$$

Resolução:

Observemos que

$$\int \frac{1}{2x + 5 + \sqrt{2x+5}}\, dx = \int \frac{1}{(2x+5)^1 + (2x+5)^{\frac{1}{2}}}\, dx\,, \tag{11.94}$$

ou seja,

$$m_1 = 1, \quad n_1 = 1, m_2 = 1 \quad \text{e} \quad n_2 = 2\,.$$

Logo

$$r = mmc\{n_1, n_2\} = mmc\{1, 2\} = 2 > 1\,.$$

Assim se considerarmos a mudança de variáveis (deverá ser bijetora!):

$$2x + 5 = t^{l} = t^{2}\,, \tag{11.95}$$

teremos

$$dx = \frac{2t}{2}\,dt = t\,dt\,. \tag{11.96}$$

Subsitituindo (11.95) e (11.96) em (11.94) (ou seja, fazendo a mudança de variáveis correspondente) obteremos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2x+5+\sqrt{2x+5}}\,dx &\overset{(11.95)}{=} \int \frac{1}{t^2+t}\,t\,dt = \int \frac{1}{t+1}\,dt \overset{u\doteq t+1 \Rightarrow du=dt}{=} \int \frac{1}{u}\,du \\ &= \ln(u) + C \overset{u=t+1}{=} \ln(|t+1|) + C \overset{t=\sqrt{2x+5}}{=} \ln\left(\left|\underbrace{\sqrt{2x+5}+1}_{>0}\right|\right) + C\,,\end{aligned}$$

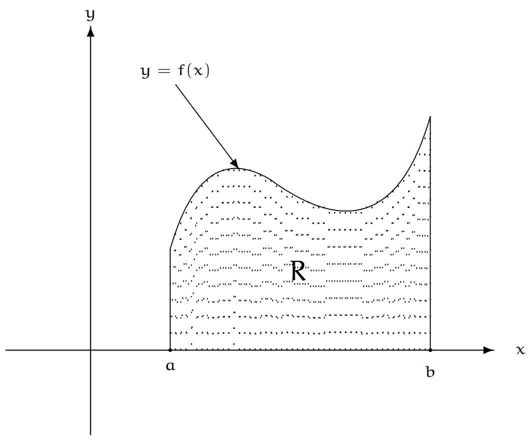
ou seja,

$$\int \frac{1}{2x+5+\sqrt{2x+5}}\,dx = \ln\left(\sqrt{2x+5}+1\right) + C\,.$$

Capítulo 12

Integrais definidas de funções reais de uma variável real

Neste capítulo começaremos a tratar do segundo problema que aparece no início destas notas, a saber, o problema de encontrar área, que indicaremos por $\mathcal{A}$, de uma região limitada R, contida no plano xOy, que é delimitada pela representação geométrica do gráfico de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelo eixo Ox (veja a figura abaixo).



12.1 Somatórios

Observação 12.1.1 *Quando precisarmos escrever uma soma de muitas parcelas de um modo condensado usaremos o símbolo* $\sum$.

Exemplo 12.1.1

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i = 1 + 2 + 3 + 4$.

2. *Dados* $n \in \mathbb{N}$ *e uma função* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *se* $m \in \{1, \cdots, n\}$, *teremos*

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = F(m) + F(m+1) + \cdots + F(n).$$

3. *Dados* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $x_1, x_2, \cdots, x_n, \Delta x \in \mathbb{R}$ *então*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x\,.$$

12.1.1 Propriedades do somatório

Temos as seguinte propriedades do somatório:

Proposição 12.1.1 *Seja* $n \in \mathbb{N}$ *fixado.*

1. *Se* $c \in \mathbb{R}$ *então*

$$\sum_{i=1}^{n} c = n\,c\,.$$

2. *Se* $c \in \mathbb{R}$ *e* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é uma função então*

$$\sum_{i=1}^{n} [c\,F(i)] = c\sum_{i=1}^{n} F(i)\,.$$

3. *Se* $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *são funções então*

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) + G(i)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i)\,.$$

4. *Se* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é uma função então*

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] = F(n) - F(0)\,.$$

Demonstração:

As demonstrações serão deixadas com o exercício para o leitor.

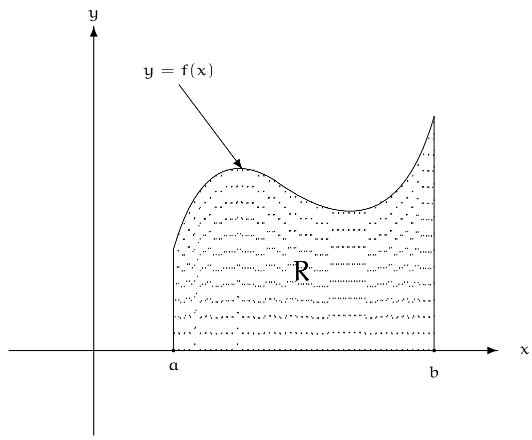
□

12.2 Área de uma região plana associada ao gráfico de uma função

Consideremos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não negativa definida em $[a, b]$, isto é,

$$f(x) \geq 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a, b]\,.$$

Nosso objetivo é encontrar (se existir) a área, que inicaremos por $\mathcal{A}$, da região limitada R, contida no plano xOy, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelo eixo dos Ox (veja a figura abaixo).

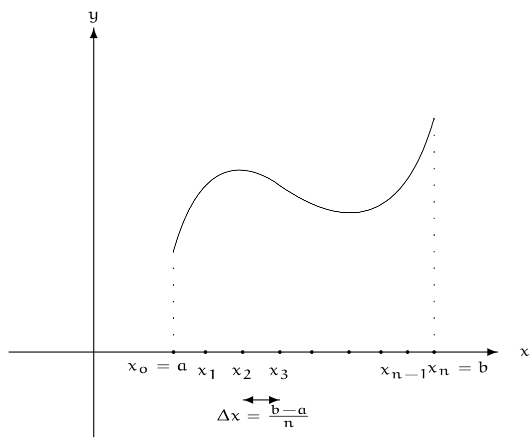


Para isto, dividiremos o intervalo $[a, b]$ em $\underline{n}$ partes iguais, obtendo desta forma os pontos x_i, para cada $i \in \{0, \cdots, n\}$, de tal modo que (veja a figura abaixo):

$$x_o \doteq a\,, \quad x_i \doteq x_o + i\,\Delta x \doteq a + i\,\Delta x\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots n\},$$

onde

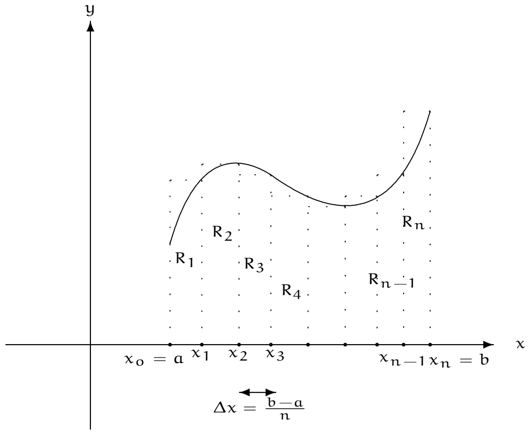
$$\Delta x \doteq \frac{b-a}{n}\,.$$



Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a soma:

$$S_n \doteq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_n,$$

onde, para cada $i \in \{1, \cdots n\}$, $\mathcal{A}_i$, denota a área do retângulo R_i, que tem o como base o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e altura dada por $f(x_i)$ (veja a figura abaixo).



Observemos que, em geral, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que S_n não será a área $\mathcal{A}$ da região R, mas aumentando-se o valor de $\underline{n}$, isto é, o número de divisões do intervalo $[a, b]$, teremos que o valor S_n ficará cada vez mais próximo do valor da área $\mathcal{A}$, isto é:

$$\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\,,$$

se o limite acima existir (isto é, for um número real).

Apliquemos este processo ao seguinte exercício resolvido:

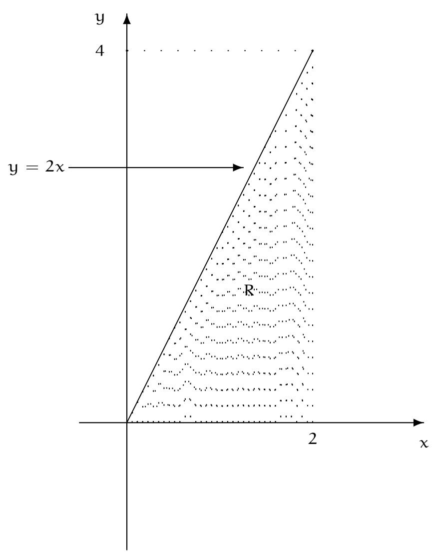
Exercício 12.2.1 *Seja* $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) \doteq 2x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, 2]\,.$$

Calcular a área, que indicaremos por $\mathcal{A}$*, da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = 0$*,* $x = 2$ *e pelo eixo* Ox*.*

Resolução:

A figura abaixo descreve a região R para os quais queremos encontrar a área.



Observemos que a região é um triângulo retângulo que tem como base o intervalo $[0,2]$ e altura $f(2)=4$ e assim sua área será dada por:

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{2.4}{2} = 4 \text{ u.a.}, \tag{12.1}$$

onde u.a. denota unidades de área.

Podemos reobter o resultado acima utilizando-se o processo desenvolvido anteriormente, ou seja, dividindo-se o intervalo $[0,2]$ ($a=0$ e $b=2$) em $\underline{n}$ intervalos iguais teremos, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, que:

$$\mathcal{A}_i \doteq f(x_i)\,\Delta x \overset{\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n},\, x_i = a + i\Delta x = i\frac{2}{n}}{=} \underbrace{f\left(i\frac{2}{n}\right)}_{=2\,i\frac{2}{n}} \frac{2}{n} = \left(2\,i\frac{2}{n}\right)\frac{2}{n} = \frac{8}{n^2} i\,.$$

Logo

$$\mathcal{S}_n \doteq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8}{n^2} i\right) = \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\,. \tag{12.2}$$

Sabemos que soma dos $\underline{n}$ primeiros termos de uma P.A, de razão 1, é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{12.3}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo

$$S_n \overset{(12.2) \text{ e } (12.3)}{=} \frac{8}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = 4 + \frac{4}{n}, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{12.4}$$

Substituindo-se (12.4) em (12.2), obteremos:

$$\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} S_n \overset{(12.4)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(4 + \frac{4}{n}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(4 + \frac{4}{x}\right) \overset{\text{Exercício}}{=} 4 \text{ u.a.},$$

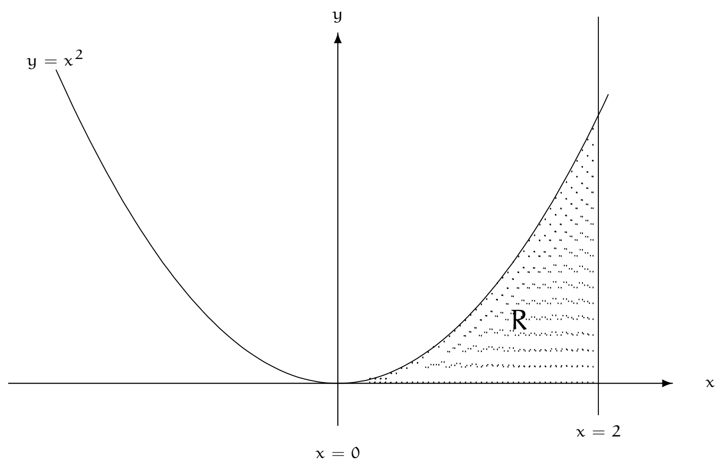
como obtido em (12.1).

No exemplo a seguir, não há como resolvê-lo se não for pelo processo desenvolvido anteriormente.

Exemplo 12.2.1 *Seja* $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = x^2, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Encontrar a área, que indicaremos por $\mathcal{A}$*, da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x=0$*,* $x=2$ *e pelo eixo* Ox *(veja a figura abaixo).*



Resolução:

Faremos o processo desenvolvido anteriormente passo a passo.

No 1.o passo, considerando o retângulo que tem como base o intervalo $[0,2]$ e altura o intervalo vertical

$$[0, f(2)] = [0,4]\,,$$

que será indicado por R_1 (veja a figura abaixo).

Então a área da região R_1, que indicaremos por $\mathcal{A}_1$, será dada por

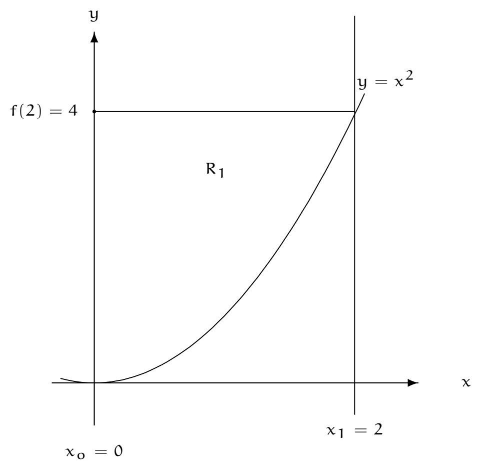
$$\text{base x altura} = 2.4 = 8\,,$$

isto é,

$$\mathcal{A}_1 = 8\,.$$

Neste caso não dividimos o intervalo $[0,2]$ (isto é, $x_o = 0$ e $x_1 = 2$).

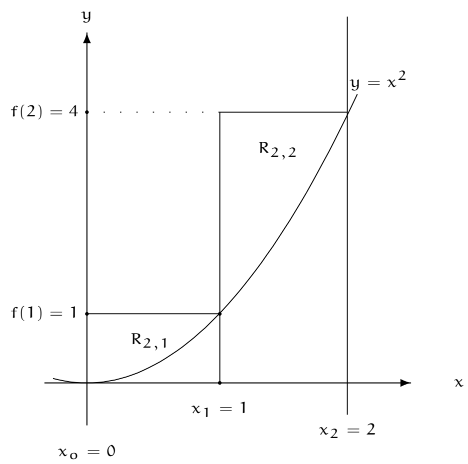
Logo o valor $\mathcal{A}_1 = 8$ seria uma primeira aproximação para o valor da área $\mathcal{A}$ da região R.



Para o 2.o passo, consideraremos os retângulos que têm como bases os intervalos $[0,1]$, $[1,2]$ e alturas os intervalos verticais

$$[0, f(1)] = [0,1] \quad \text{e} \quad [0, f(2)] = [0,4]\,,$$

respectivamente, que serão indicados por $R_{2,1}$ e $R_{2,2}$, respectivamente (veja a figura abaixo).



As áreas dos retângulos $R_{2,1}$ e $R_{2,2}$, que indicaremos por $\mathcal{A}_{2,1}$ e $\mathcal{A}_{2,2}$, respectivamente, serão dadas por:

$$\mathcal{A}_{2,1} = \text{base x altura de } R_{21} = 1.1 = 1$$

e

$$\mathcal{A}_{2,2} = \text{base x altura de } R_{22} = 1.4 = 4\,.$$

Logo a soma das áreas dos retângulos $R_{2,1}$ e $R_{2,2}$, que indicaremos por $\mathcal{A}_2$, será dada por:

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_{2,1} + \mathcal{A}_{2,2} = 1 + 4 = 5\,,$$

isto é,

$$\mathcal{A}_2 = 5\,.$$

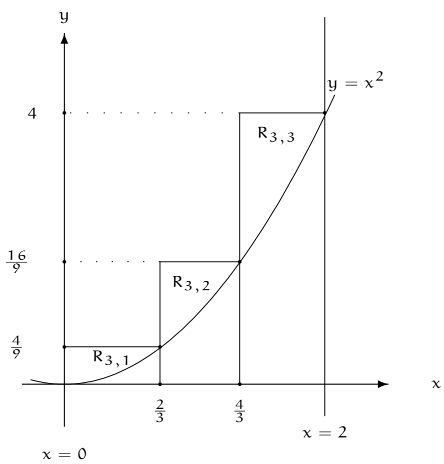
Neste caso dividimos o intervalo $[0, 2]$ em duas partes iguais (isto é, $x_o = 0$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$).

Logo o valor $\mathcal{A}_2 = 5$ seria uma segunda aproximação para o valor da área $\mathcal{A}$ da região R.

Para o 3.o passo, consideraremos os retângulos que têm como bases o intervalos $\left[0, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$, $\left[\frac{4}{3}, 2\right]$ e alturas os intervalos verticais

$$\left[0, f\left(\frac{2}{3}\right)\right] = \left[0, \frac{4}{9}\right], \quad \left[0, f\left(\frac{4}{3}\right)\right] = \left[0, \frac{16}{9}\right] \quad \text{e} \quad [0, f(2)] = [0, 4]\,,$$

respectivamente, que serão indicados por $R_{3,1}$, $R_{3,2}$ e $R_{3,3}$, respectivamente (veja a figura abaixo).



As áreas dos retângulos $R_{3,1}$, $R_{3,2}$ e $R_{3,3}$, que indicaremos por $\mathcal{A}_{2,1}$, $\mathcal{A}_{3,2}$ e $\mathcal{A}_{3,3}$, respectivamente, serão dadas por:

$$\mathcal{A}_{3,1} = \text{base x altura de } R_{31} = \frac{2}{3}\frac{4}{9} = \frac{8}{27}\,,$$

$$\mathcal{A}_{3,2} = \text{base x altura de } R_{32} = \frac{2}{3}\frac{16}{9} = \frac{32}{27}$$

e

$$\mathcal{A}_{3,3} = \text{base x altura de } R_{33} = \frac{2}{3}4 = \frac{8}{3}\,.$$

Logo a soma das áreas dos retângulos $R_{3,1}$, $R_{3,2}$ e $R_{3,3}$, que indicaremos por $\mathcal{A}_3$, será dada por:

$$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_{3,1} + \mathcal{A}_{3,2} + \mathcal{A}_{3,3} = \frac{8}{27} + \frac{32}{27} + \frac{8}{3},$$

isto é,

$$\mathcal{A}_3 = \frac{112}{27}.$$

Neste caso dividimos o intervalo $[0,2]$ em três partes iguais (isto é, $x_o = 0$, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$ e $x_3 = 4$).

Logo o valor $\mathcal{A}_3 = \frac{112}{27}$ seria uma terceira aproximação para o valor da área $\mathcal{A}$ da região R.

Podemos prosseguir dividindo o intervalo $[0,2]$ em 4, 5, etc. partes iguais ou, mais geralmente, dividindo-se o intervalo $[0,2]$ em $\underline{n}$ partes iguais , obtendo os pontos

$$x_o \doteq 0\,,\ x_1 \doteq \Delta x\,,\ \cdots\,,\ x_j \doteq j\,\Delta x\,,\ ,\cdots\,,\ x_n \doteq 2\,, \qquad \text{onde} \qquad \Delta x \doteq \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}\,,$$

e fazendo uma construção semelhante a que fizemos acima, por meio de retângulos, que indicaremos por $R_{n,j}$.

Observemos que, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, o retângulo $R_{n,j}$ terá como base o intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ e altura o intervalo vertical $[x_j, f(x_j)]$.

Com isto obteremos uma nova aproximação para a área $\mathcal{A}$, da região R, utilizando a soma das áreas dos retângulos $R_{n,j}$ obtidos a partir da divisão que consideramos acima.

Em geral, se dividirmos o intervalos $[0,2]$ em $\underline{n}$ partes iguais, todos os sub-intervalos obtidos dessa divisão (isto os, intervalos $[x_{j-1}, x_j]$, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$) terão mesmo comprimento, a saber,

$$\Delta x \doteq \frac{2}{n}$$

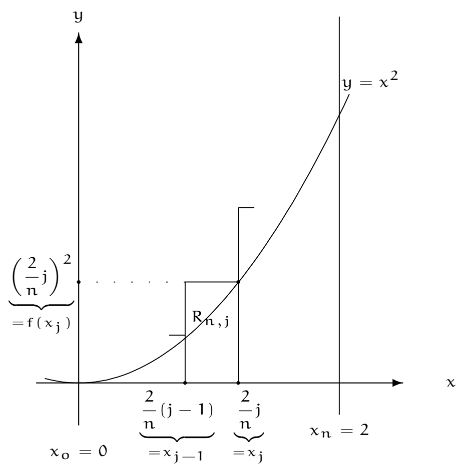
e estes sub-intervalos serão da seguinte forma:

$$[x_{j-1}, x_j] = \left[\frac{2}{n}(j-1)\,,\ \frac{2}{n}j\right]\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, \cdots, n\}.$$

Para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, as alturas dos retângulos $R_{n,j}$ serão o intervalos verticais da forma

$$[0, f(x_j)] = \left[0\,,\ \left(\frac{2}{n}j\right)^2\right] = \left[0\,,\ \frac{4}{n^2}j^2\right].$$

Geometricamente, para $j \in \{1, \cdots, n\}$, o retângulo $R_{n,j}$ será dado pela figura abaixo.



Assim, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, a área do retângulo $R_{n,j}$, que indicaremos por $\mathcal{A}_{n,j}$, será dada por:

$$\mathcal{A}_{n,j} = \text{base x altura de } R_{n,j} = \frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}j\right)^2 = \frac{8}{n^3}j^2 .$$

Logo a soma das áreas dos retângulos $R_{n,j}$, para $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, que indicaremos por $\mathcal{S}_n$, será dada por:

$$\mathcal{S}_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{8}{n^3}j^2 = \frac{8}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2 . \tag{12.5}$$

Utilizando-se indução finita, podemos mostrar, que

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} . \tag{12.6}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo

$$\mathcal{S}_n \overset{(12.5) \text{ e } (12.6)}{=} \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} , \tag{12.7}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Logo o valor

$$\mathcal{S}_n = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

seria a n-ésima aproximação para o valor da área $\mathcal{A}$ da região R.

Mas

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n \overset{(12.7)}{=} \lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{8}{3} + \frac{4}{x} + \frac{4}{3x^2}\right] \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{8}{3} ,$$

ou seja, a área da região R será $\mathcal{A} = \frac{8}{3}$ u.a. .

Observação 12.2.1 *O processo acima nos dá um modo de calcular a área de regiões do tipo descrito acima, porém o processo é complicado e trabalhoso.*

O que faremos a seguir é tentar colocá-lo de uma forma mais simples de obtê-la, que é o que faremos nas próximas seções.

12.3 Soma de Riemann

Começaremos pela:

Definição 12.3.1 *Uma coleção finita de pontos do intervalo* $[a, b]$ *da forma*

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o, x_1, \cdots, x_n\}$$

que satisfazem:

$$x_o \doteq a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \doteq b ,$$

será denominada **partição (ou divisão) do intervalo** $[a, b]$.

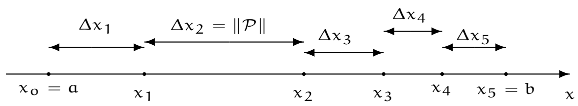
Neste caso, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, *definimos*

$$\Delta x_i \doteq x_i - x_{i-1}$$

e com isto diremos que **norma da partição** $\mathcal{P}$, *indicada por* $\|\mathcal{P}\|$, *será dada por:*

$$\|\mathcal{P}\| \doteq \max_{i\in\{1,\cdots n\}} \{\Delta x_i\} .$$

Observação 12.3.1 *Observemos que a norma da partição $\mathcal{P}$ é comprimento do maior subintervalo determinado pela partição $\mathcal{P}$ (veja a figura abaixo).*



Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a, b]$ e

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o, x_1, \cdots, x_n\}$$

uma partição do intervalo $[a, b]$.

Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, escolhamos no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, um ponto ξ_i, isto, é, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Com isto podemos fazer a seguinte soma (finita)

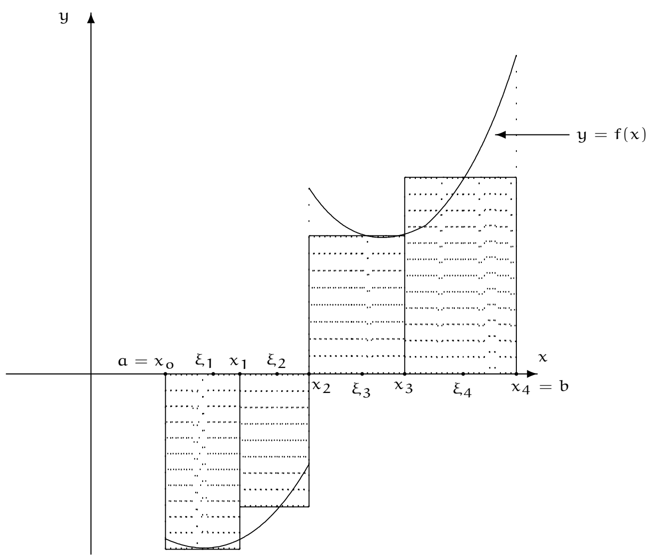
$$f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\,.$$

Com isto temos a:

Definição 12.3.2 *A soma acima será denominada* **<u>soma de Riemann da função $\underline{f}$, associada a partição $\mathcal{P}$ e aos pontos ξ_i, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$</u>.**

Observação 12.3.2

1. *Geometricamente poderemos ter a seguinte situação:*



2. *Vale observar que a função $\underline{f}$ pode ser negativa (como na figura acima).*

   Assim a soma de Riemann da função $\underline{f}$ associada partição $\mathcal{P}$ e aos pontos ξ_i, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ **<u>não</u>** *nos fornecerá, neste caso, uma aproximação da área da região plana limitada, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelo eixo Ox, pois a área dos retângulos poderão* **<u>não</u>** *ser, necessariamente, dados por $f(\xi_i)\,\Delta x_i$, já que $f(\xi_i)$ pode ser menor que zero.*

   Na situação da figura acima isto acontece quando $i = 1$ ou $i = 2$, pois $f(\xi_i) < 0$, para $i \in \{1, 2\}$.

3. *Se a função* $\underline{f}$ *é não negativa, a soma de Riemann acima, poderá ser uma aproximação para a área da região plana limitada, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = a$, $x = b$ *e pelo eixo* Ox, *se a função* $\underline{f}$ *for "bem comportada", como veremos mais adiante.*

Com isto podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 12.3.3 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada.*

Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **integrável em** $\underline{[a, b]}$ *se existir* $L \in \mathbb{R}$ *de modo que, dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $\delta > 0$, *de modo que, para toda partição*

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$$

do intervalo $[a, b]$ *satisfazendo*

$$\|\mathcal{P}\| < \delta \quad \text{e todo} \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\},$$

deveremos ter:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - L\right| < \varepsilon\,.$$

Neste caso diremos que o número real L *é a* **integral definida da função** $\underline{f}$ **no intervalo** $[a, b]$, *que será denotada por* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, *isto é,*

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq L\,.$$

Observação 12.3.3

1. *A Definição acima nos diz que a função* $\underline{f}$ *é integrável no intervalo* $[a, b]$ *se, e somente se, podemos deixar a soma de Riemman da função* $\underline{f}$ *a associada partição* $\mathcal{P}$ *e aos pontos* ξ_i, *para cada* $i \in \{1, \cdots, n\}$, *tão próxima do número real* L *quanto se queira, desde que, a norma da partição* $\mathcal{P}$ *seja suficientemente pequena.*

2. *Se* $\underline{f}$ *é integrável no intervalo* $[a, b]$ *então teremos:*

$$L = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\,,$$

ou ainda:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\,,$$

para qualquer escolha $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, *para cada* $i \in \{1, \cdots, n\}$, *onde*

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$$

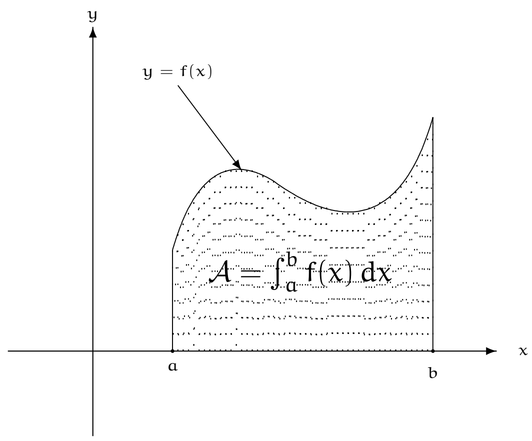
é uma particão do intervalo $[a, b]$.

3. *Na notação da integral definida introduzida na Definição acima, isto é,* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, *a função* $\underline{f}$ *será dita* **integrando**, *o ponto* $\underline{a}$ *será dito* **limite (ou extremo) inferior de integração**, *o ponto* $\underline{b}$ *será dito* **limite (ou extremo) superior de integração** *e o símbolo* $\displaystyle\int$ *será denominado* **sinal de integração**.

4. *Vale observar que usaremos o mesmo símbolo para a integral indefinida e para a integral definida, a saber,* $\int$.

   Será que existe alguma relação entre estes dois conceitos tão diferentes?

5. *Se a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é* **<u>não-negativa e integrável</u>** *em* $[a, b]$ *então a integral definida* $\int_a^b f(x)\,dx$*, nos fornecerá o valor da área, que indicaremos por* $\mathcal{A}$*, da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = a$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox *(veja a figura abaixo).*



Temos também a seguinte definição:

Definição 12.3.4 *Se a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é integrável em* $[a, b]$ *então*

$$\int_b^a f(x)\,dx \doteq -\int_a^b f(x)\,dx$$

e

$$\int_a^a f(x)\,dx \doteq 0\,.$$

Com isto temos o seguinte:

Exemplo 12.3.1 *Seja* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

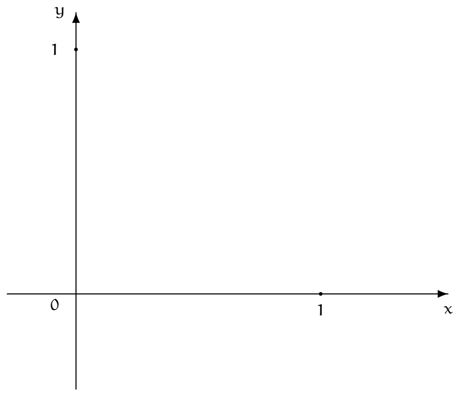
$$f(x) \doteq \begin{cases} 1\,, & \textit{para} \quad x = 0 \\ 0\,, & \textit{para cada} \quad x \in (0, 1] \end{cases}\,.$$

Mostremos que a função $\underline{f}$ *é integrável em* $[0, 1]$ *e que*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0\,.$$

<u>Resolução:</u>

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo:



Seja

$$L \doteq 0\,. \tag{12.8}$$

Observemos que se

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o, x_1, \cdots, x_n\}$$

é uma partição do intervalo $[a, b]$ e se $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, então deveremos ter

$$\xi_i \neq 0\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{2, \cdots n\}\,.$$

Assim a soma de Riemman da função $\underline{f}$ associada partição $\mathcal{P}$ e aos pontos ξ_i, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, será dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \overset{\xi\neq 0,\, i=2,\cdots,n \Rightarrow f(\xi_i)=0\,, i\in\{2,\cdots,n\}}{=} f(\xi_1)\,\Delta x_1\,. \tag{12.9}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, consideremos

$$\delta \doteq \varepsilon\,.$$

Se uma partição $\mathcal{P} \doteq \{x_o = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$ é tal que

$$\|\mathcal{P}\| < \delta \quad \text{e} \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\}\,,$$

teremos:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - L\right| \overset{(12.8)}{=} \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - 0\right| \overset{(12.9)}{=} |f(\xi_1)\,\Delta x_1| = |f(\xi_1)|\,\Delta x_1 \overset{|f(x)|\leq 1}{\leq} 1\,\Delta x_1$$
$$\leq \max_{i\in\{1,\cdots,n\}}\{\Delta x_i\} = \|\mathcal{P}\| < \delta = \varepsilon\,,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é integrável em $[0, 1]$ e além disso

$$\int_0^1 f(x)\,dx = L = 0\,.$$

A seguir daremos uma condição **suficiente** para que uma função seja integrável no intervalo $[a, b]$, a saber:

Teorema 12.3.1 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$.

Então a função $\underline{f}$ *será integrável no intervalo* $[a, b]$*, ou seja, existe a integral definida*

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Demonstração:

A demonstração deste resultado será omitida.

Os interessados em poderão encontrá-la em [?] pag. 125.

□

Observação 12.3.4 *O Teorema acima nos dá uma condição* **suficiente** *para que uma função seja integrável no intervalo* $[a,b]$ *mas que, pelo Exemplo acima, esta condição* **não é necessária** *já que a função do Exemplo acima não é contínua em* $[0,1]$ *mas é integrável em* $[0,1]$.

Podemos agora introduzir a:

Definição 12.3.5 *Uma partição*

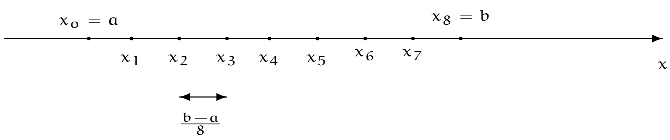
$$\mathcal{P} \doteq \{x_o, x_1, \cdots, x_n\}$$

do intervalo $[a,b]$ *será dita* **partição regular** *do intervalo* $[a,b]$ *se*

$$x_i \doteq a + i\frac{b-a}{n}, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{0, \cdots, n\}.$$

Observação 12.3.5

1. *Na figura abaixo a partição regular do intervalo* $[a,b]$ *possui 9 pontos* ($n = 8$).



2. *Em uma partição regular* $\mathcal{P} \doteq \{x_o, x_1, \cdots, x_n\}$ *do intervalo* $[a,b]$, *todos os subintervalos* $[x_{i-1}, x_i]$, *para* $i \in \{1, \cdots, n\}$, *teêm o mesmo comprimento.*

   De fato, pois

$$\Delta x_i = \Delta x \doteq \frac{b-a}{n}, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\}.$$

   Neste caso, a norma da partição será $\dfrac{b-a}{n}$, *ou seja,*

$$\|\mathcal{P}\| = \frac{b-a}{n}.$$

3. *Observemos que se a função* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é integrável em* $[a,b]$ *então podemos considerar uma partição*

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o, x_1, \cdots, x_n\}$$

   qualquer do intervalo $[a,b]$ *e pontos quaisquer* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, *para cada* $i \in \{1, \cdots, n\}$, *nos correspondentes subintervalos determinados pela partição* $\mathcal{P}$, *para calcularmos o limite da Observação (12.3.3) item 2., que nos fornecerá o valor da integral definida.*

   Em particular, podemos considerarmos uma partição regular, que indicaremos por $\mathcal{P} \doteq \{x_o, x_1, \cdots, x_n\}$, *do intervalo* $[a,b]$ *e*

$$\xi_i \doteq a + i\frac{b-a}{n}, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\},$$

   e com isto obteremos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}. \tag{12.10}$$

Apliquemos isto ao seguinte exercício:

Exercício 12.3.1 *Seja* $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq x^2, \quad \textit{para cada} \quad x \in [1,3].$$

Mostre que a função $\underline{f}$ *é integrável em* $[1,3]$ *e encontre o valor da integral definida* $\displaystyle\int_1^3 x^2\,dx$.

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é contínua em $[1,3]$, logo segue, do Teorema acima, que ela será uma função integrável em $[1,3]$.

Da Observação acima item 2. (podemos utilizar uma partição regular do intervalo $[1,3]$ e escolher em cada subintervalo determinado pelos pontos da partição onde calcularmos o valor da função $\underline{f}$) segue que:

$$\int_1^3 x^2\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \overset{(12.10)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f\left(\underbrace{a + i\frac{b-a}{n}}_{=\xi_i}\right) \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=\Delta x_i = \Delta x} \overset{a=1 \text{ e } b=3}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + i\frac{2}{n}\right)^2 \frac{2}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{n^2 + 4in + 4i^2}{n^2}\right]\right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{2}{n^3}\left[\sum_{i=1}^n n^2 + 4n\sum_{i=1}^n i + 4\sum_{i=1}^n i^2\right]\right\}.$$

Como vimos anteriormente (Exemplo (12.2.1))

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{12.11}$$

Logo

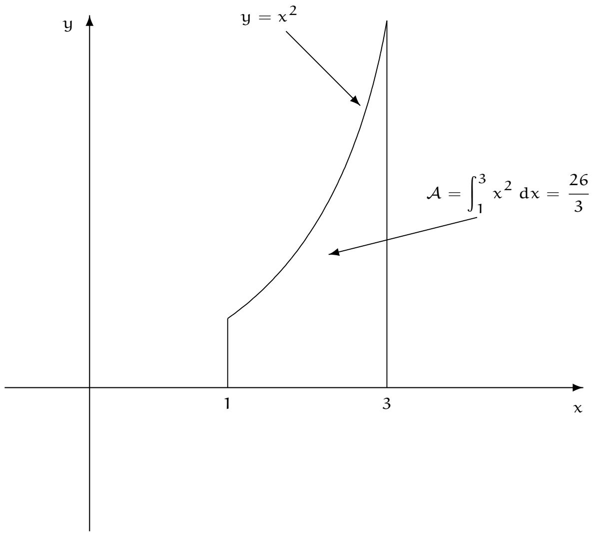
$$\int_a^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{2}{n^3}\left[n^2 \sum_{i=1}^n 1 + 4n\sum_{i=1}^n i + 4\sum_{i=1}^n i^2\right]\right\}$$
$$\overset{(12.11)}{=} \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{2}{n^3}\left[n^2\,n + 4n\frac{n(n+1)}{2} + 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right\}$$
$$\overset{\text{Exercício}}{=} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{26n^3 + 24n^2 + 4n}{3n^3}\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{26x^3 + 24x^2 + 4x}{3x^3}\right] \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{26}{3},$$

ou seja,

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3}.$$

Observação 12.3.6 *Como a função* $\underline{f}$ *do Exemplo acima é não negativa em* $[1,3]$ *e integrável em* $[1,3]$ *(pois é uma função contínua em* $[1,3]$*), segue que a área* $\mathcal{A}$ *da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = 1$*,* $x = 3$ *e pelo eixo* Ox *será dada por*

$$\mathcal{A} = \int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3} \text{ u.a.}.$$



12.4 Propriedades da integral definida

A seguir exibiremos algumas propriedades gerais da integral definida que serão úteis para o cálculo das mesmas, a saber:

Proposição 12.4.1 *Sejam* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções integráveis em* $[a, b]$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.
Então:

(i) A função $\alpha f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *será integrável em* $[a, b]$ *e além disso*

$$\int_a^b (\alpha\, f)(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

(ii) A função $f + g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *será integrável em* $[a, b]$ *e além disso*

$$\int_a^b (f + g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

Vale o análogo para a função $f - g$*, isto é, a função* $f - g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *será integrável em* $[a, b]$ *e além disso*

$$\int_a^b (f - g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

(iii) Se $c \in [a, b]$ *então as restrições da função* $\underline{f}$ *aos intervalos* $[a, c]$ *e* $[c, b]$ *serão funções integráveis em* $[a, c]$ *e* $[c, b]$*, respectivamente, e além disso*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,.$$

(iv) Se $c, d, e \in [a, b]$ *então as restrições da função* $\underline{f}$ *aos intervalos com extremos em* c, d *e* $\underline{e}$ *serão funções integráveis nos respetcivos intervalos e além disso*

$$\int_c^d f(x)\, dx = \int_c^e f(x)\, dx + \int_e^d f(x)\, dx\,.$$

(v) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função dada por:*

$$f(x) = C, \quad x \in [a, b]$$

então a função $\underline{f}$ *é integrável em* $[a, b]$ *e além disso*

$$\int_a^b f(x)\, dx = C(b - a)\,.$$

(vi) Suponhamos que

$$f(x) \leq g(x), \quad x \in [a, b]\,.$$

Então

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

(vii) Suponhamos que existem $m, M \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b]\,.$$

Então

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a)\,.$$

(viii) A função $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$|f|(x) \doteq |f(x)|\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b]\,,$$

será integrável em $[a, b]$ *e além disso*

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

Demonstração:

As demonstrações destas propriedades seguem da aplicação, de modo conveniente, da definição de função integrável em um intevalo fechado e limitado, e suas elaborações serão deixadas como exercício para o leitor.

□

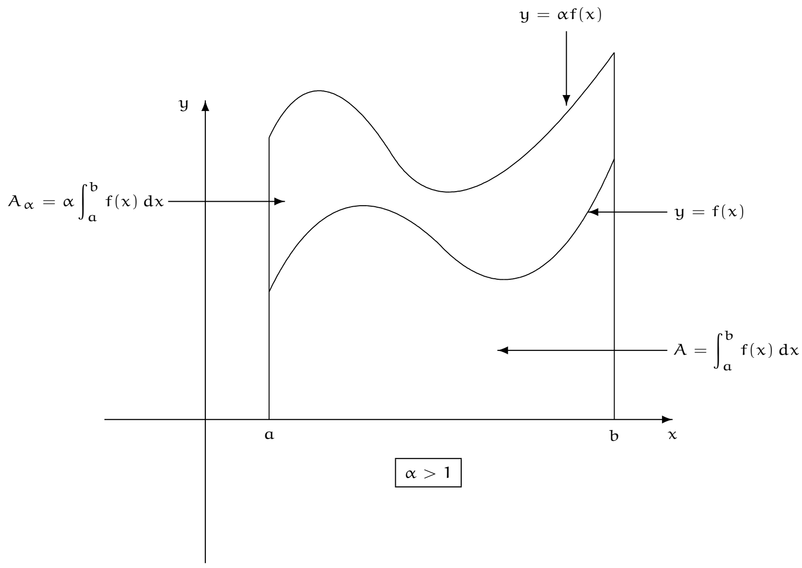
Observação 12.4.1 *Podemos dar interpretações geométricas para algumas das propriedades acima.*

Para isto, vamos supor que as funções envolvidas são não negativas em $[a, b]$, *isto é,*

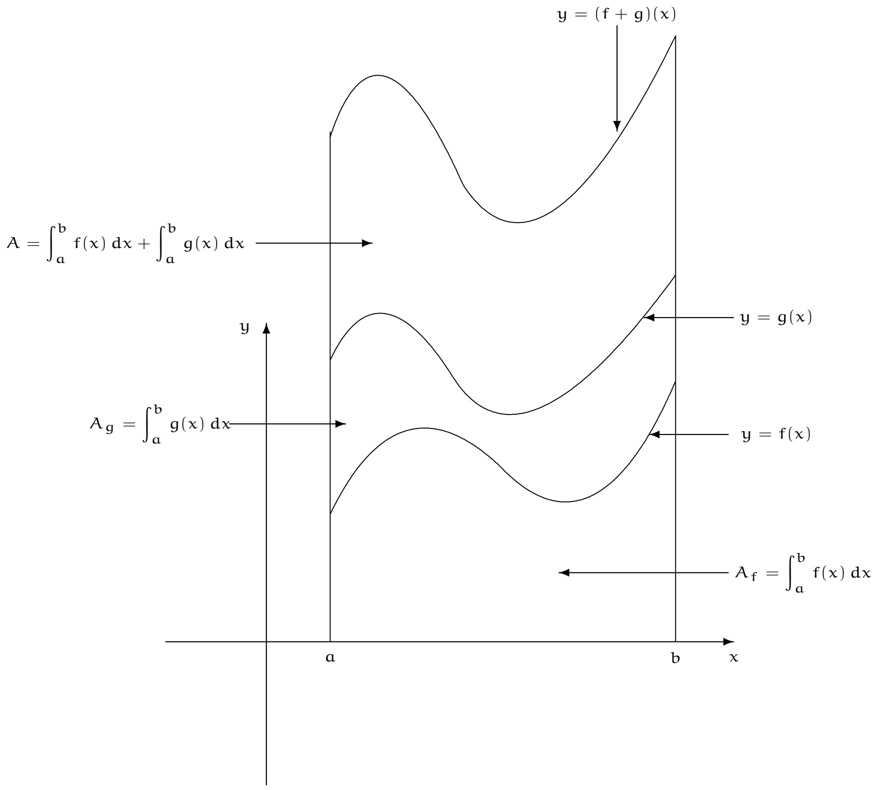
$$0 \leq f(x)\,, g(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b]$$

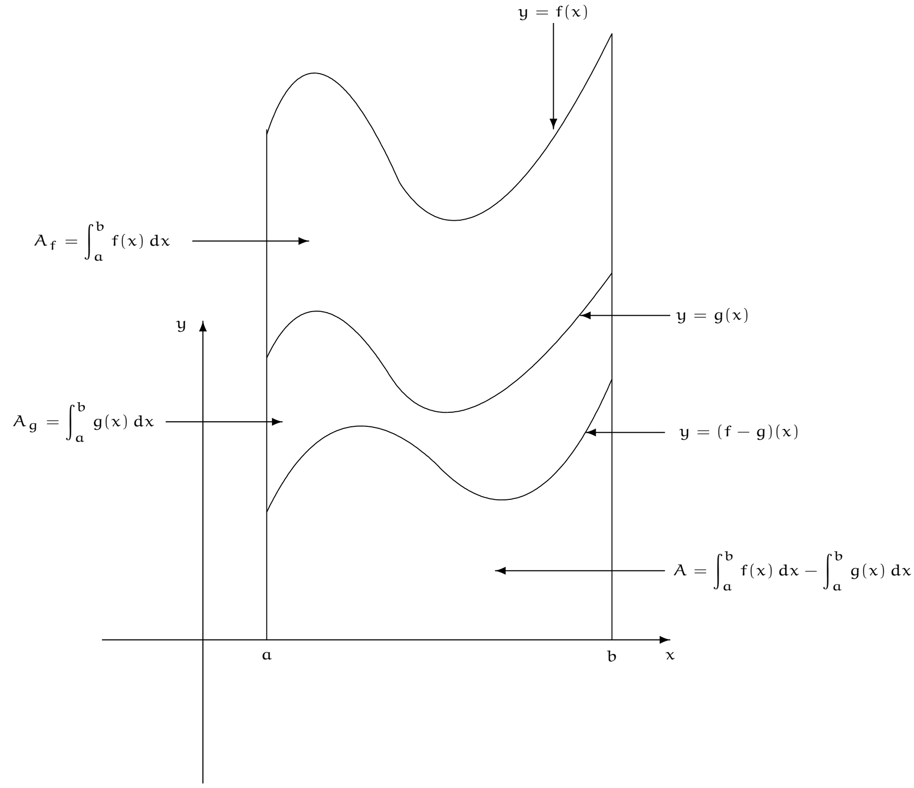
e $\alpha \geq 0$.

1. *A propriedade (i) nos diz, geometricamente, que área* $\mathcal{A}_\alpha$ *da região limitada* R_α, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{\alpha f}$, *pelas retas* $x = a$, $x = b$ *e pelo eixo* Ox *pode ser obtida multiplicando-se por* $\underline{\alpha}$ *a área* $\mathcal{A}$ *da região limitada* R, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *pelas retas* $x = a$, $x = b$ *e pelo eixo* Ox *(veja figura abaixo).*



2. *A propriedade (ii) nos diz, geometricamente, que área* $\mathcal{A}$ *da região limitada* R*, contida plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f+g}$*, pelas retas* $x = a$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox *pode ser obtida somando-se a área* $\mathcal{A}_f$ *da região limitada* R_f*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = a$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox *com a área* $\mathcal{A}_g$ *da região limitada* R_g*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{g}$*, pelas retas* $x = a$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox *(veja figura abaixo).*



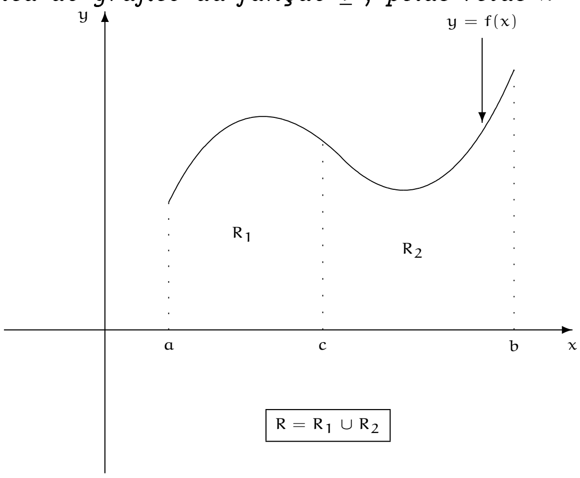


3. *Se*

$$g(x) \leq f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b]\,,$$

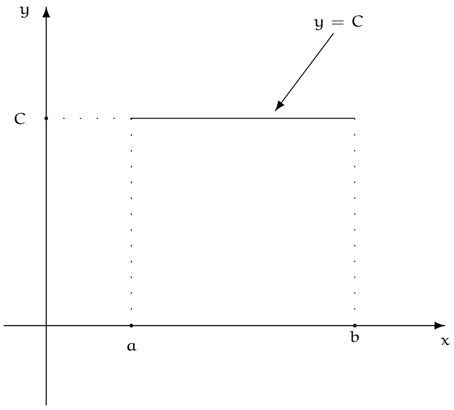
a segunda parte da propriedade (ii) nos diz, geometricamente, que área $\mathcal{A}$ *da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f - g}$*, pelas retas* $x = a$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox *pode ser obtida da diferença da área* $\mathcal{A}_f$ *da região limitada* R_f*, contida plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = a$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox *pela área* $\mathcal{A}_g$ *da região limitada* R_g*, contida plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{g}$*, pelas retas* $x = a$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox *(veja a figura acima).*

4. *A propriedade (iii) nos diz, geometricamente, que área* $\mathcal{A}$ *da região limitada* R*, contida plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = a$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox *é a soma da área* $\mathcal{A}_1$ *da região limitada* R_1*, contida plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = a$*,* $x = c$ *e pelo eixo* Ox *com a área* $\mathcal{A}_2$ *da região limitada* R_2*, contida plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = c$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox *(veja a figura abaixo).*



5. *A propriedade (iv), geometricamente, pode ser vista de modo semelhante a que fizemos no item acima para a propriedade (iii).*

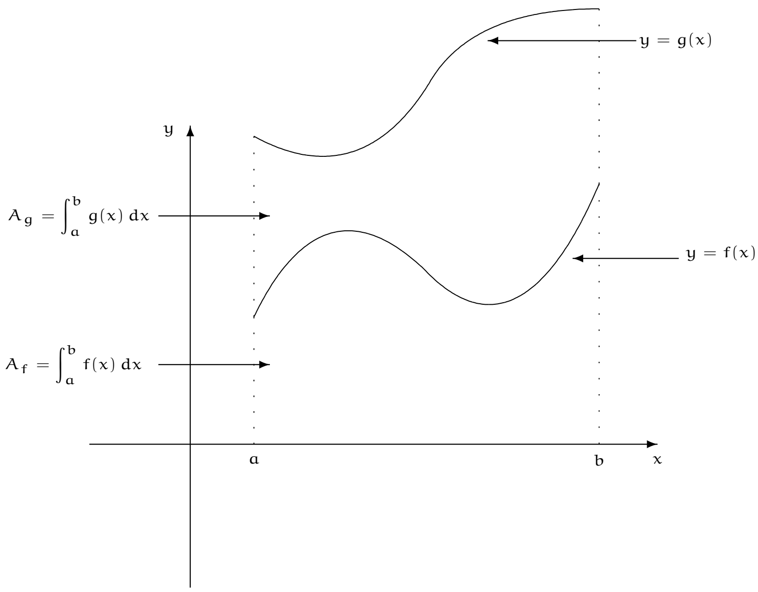
6. *A propriedade (v) nos diz, geometricamente, que área* $\mathcal{A}$ *da região limitada* R, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *pelas retas* $x = a$, $x = b$ *e pelo eixo* Ox *é a área de um retângulo com base de comprimento* $b - a$ *e altura com comprimento* $\underline{C}$ *(veja a figura abaixo).*



7. *A propriedade (vi) nos diz que se*

$$f(x) \leq g(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b],$$

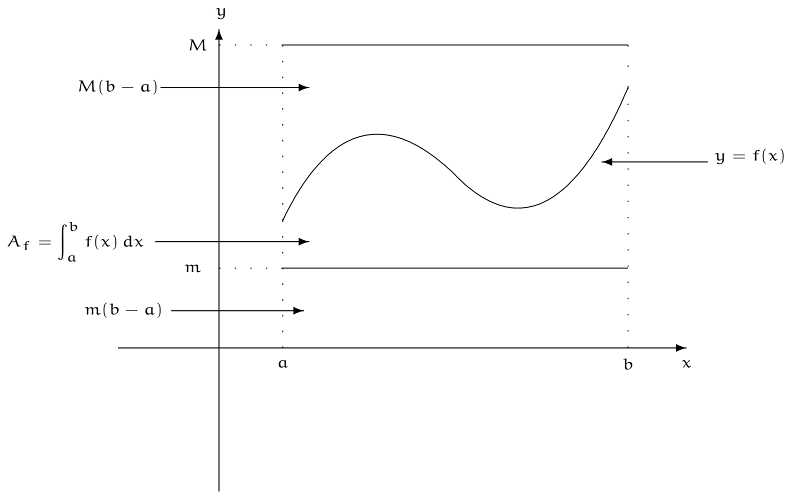
então a área $\mathcal{A}_f$ *da região limitada* R_f, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *pelas retas* $x = a$, $x = b$ *e pelo eixo* Ox *é menor ou igual área* $\mathcal{A}_g$ *da região limitada* R_g, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{g}$, *pelas retas* $x = a$, $x = b$ *e pelo eixo* Ox *(veja a figura abaixo).*



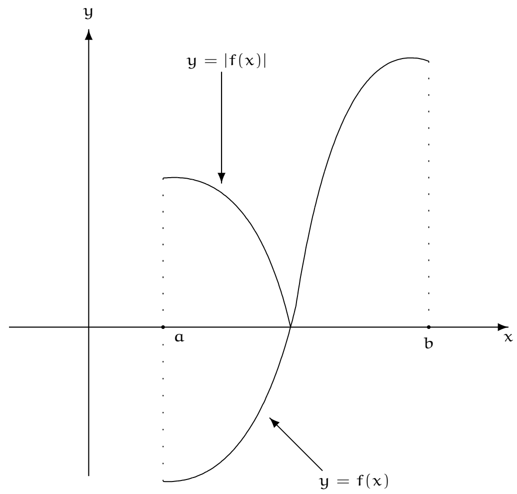
8. *Se* $m \geq 0$, *a propriedade (vii) nos diz que se*

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b],$$

então a área $\mathcal{A}_f$ *da região limitada* R_f*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = a$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox *é maior ou igual que a área do retângulo que tem como base o intervalo* $[a, b]$ *e altura com comprimento* $\underline{m}$ *e menor ou igual área do retângulo que tem como base o intervalo* $[a, b]$ *e altura com comprimento* $\underline{M}$ *(veja figura abaixo).*



9. *Se* $\underline{f}$ *pode assumir valores negativos, a propriedade (viii) nos diz que o módulo da integral definida da função* $\underline{f}$ *no intervalo* $[a, b]$ *é menor ou igual área da região limitada, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $|f|$*, pelas retas* $x = a$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox *(veja figura abaixo).*



Temos o seguinte resultado que será muito importante para conseguirmos calcular o valor de integrais definidas de funções integráveis em um intervalo fechado e limitado:

Teorema 12.4.1 *(do Valor Médio para Integrais Definidas) Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$*.*

Então existe $x_o \in [a, b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_o)(b - a)\,.$$

Demonstração:

Como $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, do Teorema (5.5.3), segue que existem $s_o, t_o \in [a, b]$ tal que

$$f(s_o) = m \doteq \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{e} \quad M \doteq \max_{x \in [a,b]} f(x) = f(t_o)\,, \tag{12.12}$$

ou seja,

$$m \leq f(x) \leq M\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a, b]\,.$$

Logo, da propriedade (vii) da Proposição acima, segue que

$$\underbrace{m}_{\overset{(12.12)}{=} f(s_o)} (b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \underbrace{M}_{\overset{(12.12)}{=} f(t_o)} (b - a)\,.$$

Dividindo-se as desigualdades acima por $(b - a) > 0$, obteremos

$$f(s_o) = m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} \leq M = f(t_o)\,.$$

Logo, do Teorema do Valor Intermediário (isto é, o Teorema (5.5.2)), segue que existe $x_o \in [s_o, t_o] \subseteq [a, b]$ tal que

$$f(x_o) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}\,,$$

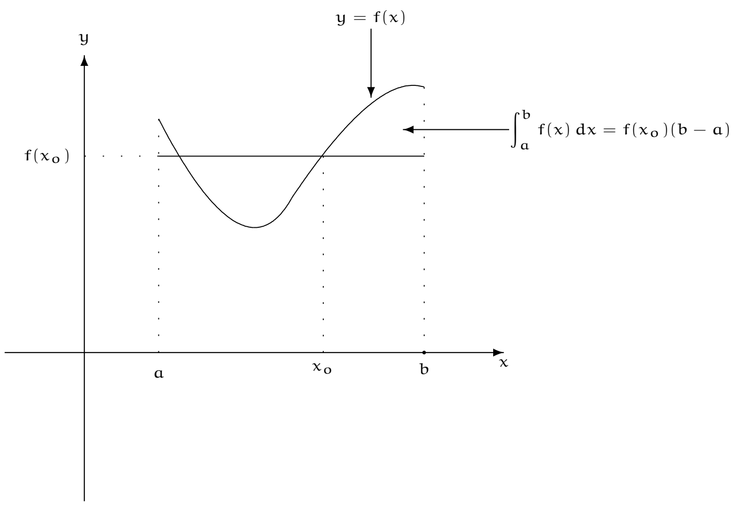
ou seja,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_o)(b - a)\,,$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Observação 12.4.2 *Se a função* $\underline{f}$ *for não negativa em* $[a, b]$, *o Teorema acima nos diz que existe um* $x_o \in [a, b]$ *de modo que, a área* $\mathcal{A}$ *da região limitada* R, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *pelas retas* $x = a$, $x = b$ *e pelo eixo* Ox *será igual a área do retângulo que tem como base o intervalo* $[a, b]$ *e altura de comprimento* $f(x_o)$ *(veja a figura abaixo).*



Definição 12.4.1 *O valor* $f(x_o)$ *dado pelo Teorema do Valor Médio para Integrais Definidas será denominado* **valor médio da função $\underline{f}$ no intervalo** $[a, b]$.

Observação 12.4.3

1. *Pela definição acima, o valor médio de uma função $\underline{f}$ integrável em $[a, b]$ é dado por*
$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\,.$$

2. *O valor médio de uma função $\underline{f}$ integrável em um intervalo $[a, b]$ estende o conceito de média aritmética de um conjunto finito de números reais.*

   Para ver isto observemos que se
$$\xi_1, \cdots, \xi_n \in [a, b]$$
   então a média aritmética dos números reais $f(\xi_1), \cdots, f(\xi_n)$ será dada por
$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)}{n}\,.$$
   Se
$$\mathcal{P} \doteq \{x_o, x_1, \cdots, x_n\}$$
   é uma partição regular do intervalo $[a, b]$ e $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, então
$$\Delta x \doteq \frac{b-a}{n}, \quad \textit{ou seja,} \quad n = \frac{b-a}{\Delta x}, \tag{12.13}$$
   logo
$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)}{n} \overset{(12.13)}{=} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x}{b-a}\,.$$
   Tomando-se o limite, quando $n \to \infty$ do lado direito da identidade acima obteremos:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x}{b-a} = \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x}{b-a} = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\,,$$
   que, pela Definição acima, é o valor médio da função $\underline{f}$ no intervalo $[a, b]$.

Com isto temos o:

Exercício 12.4.1 *Encontre o valor médio da função do Exemplo (12.3.1) no intervalo* $[1, 3]$.

Resolução:

Do Exemplo (12.3.1) temos que
$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3}\,.$$
Logo o valor médio da função $\underline{f}$ no intervalo $[1, 3]$ será:
$$\frac{\displaystyle\int_1^3 x^2\,dx}{3-1} \overset{\text{Exemplo (12.3.1)}}{=} \frac{26}{6} = \frac{13}{3}\,.$$

12.5 O Teorema Fundamental do Cálculo

Nosso obejtivo nesta seção é exibir um resultado que será de muita importância no cálculo de integrais definidas.

Tal resultado será conseqüência do seguinte resultado:

Teorema 12.5.1 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$.

Consideremos a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$F(x) \doteq \int_a^x f(t)\, dt\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b]\,. \tag{12.14}$$

Então a função $\underline{F}$ *será diferenciável em* $[a, b]$ *e além disso*

$$F'(x) = f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b],$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\, dt\right] = f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b]\,.$$

Demonstração:

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $[a, b]$, para cada $x \in [a, b]$, ela também será contínua em $[a, x]$, logo, pelo Teorema (12.3.1) será integrável em $[a, x]$.

Logo a função $\underline{f}$ está bem definida em $[a, b]$.

Mostraremos que $\underline{f}$ é diferenciável em $x_o \in (a, b)$ e que

$$F'(x_o) = f(x_o)\,.$$

Os casos em que

$$x_o = a \quad \text{ou} \quad x_o = b\,,$$

são análogos e serão deixados como exercíco para o leitor.

Mostraremos que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_o + h) - F(x_o)}{h}$$

existe e é igual a $f(x_o)$ e deixaremos, como exercício para o leitor, mostrar que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(x_o + h) - F(x_o)}{h}$$

existe e também é igual a $f(x_o)$.

Observemos que

$$\begin{aligned} F(x_o + h) - F(x_o) &\overset{(12.14)}{=} \int_a^{x_o + h} f(t)\, dt - \int_a^{x_o} f(t)\, dt \\ &\overset{\text{Def. (12.3.4)}}{=} \int_a^{x_o + h} f(t)\, dt + \int_{x_o}^{a} f(t)\, dt \\ &\overset{\text{Prop. (12.4.1) item (iv)}}{=} \int_{x_o}^{x_o + h} f(t)\, dt\,. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema do valor médio para integrais definidas (isto é, o Teorema (12.4.1)) aplicado à função $\underline{f}$, no intervalo $[x_o, x_o + h]$, segue que podemos encontrar $\bar{x} \in [x_o, x_o + h]$, de modo que

$$F(x_o + h) - F(x_o) = \int_{x_o}^{x_o + h} f(t)\, dt \overset{\text{Teor. Valor Médio}}{=} f(\bar{x})\,[(x_o + h) - x_o] = f(\bar{x})\; h\,,$$

ou seja,

$$\frac{F(x_o + h) - F(x_o)}{h} = f\,(\bar{x}) \; .$$

Como a função $\underline{f}$ é diferenciável em $x_o \in [a, b]$, segue que $\underline{f}$ será contínua em x_o.
Observemos que se

$$h \to 0 \,, \quad \overset{\bar{x} \in [x_o, x_o + h]}{\text{então}} \quad \bar{x} \to x_o \,,$$

logo

$$\lim_{h \to 0^+} f\,(\bar{x}) = f(x_o) \, .$$

Logo

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_o + h) - F(x_o)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f\,(\bar{x}) = f(x_o) \,,$$

mostrando que a função $\underline{F}$ é diferenciável à direita do ponto $x_o \in (a, b)$ e que

$$F_+{}'(x_o) = f(x_o) \, .$$

Portanto, a função $\underline{F}$ é diferenciável em $x_o \in (a, b)$ e $F\,'(x_o) = f(x_o)$, como queríamos demonstrar.

□

Observação 12.5.1 *O Teorema acima nos diz que a função* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b]$$

é uma primitiva da função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, ou seja,*

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x) \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b] \, .$$

Como conseqüência do resultado acima temos o:

Teorema 12.5.2 *(Teorema Fundamental do Cálculo) Sejam* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$ *e* $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma primitiva da função* $\underline{f}$ *em* $[a, b]$*.*
Então

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \, .$$

Demonstração:
Consideremos a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt \,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a, b] \, .$$

Do Teorema anterior, segue que a função $\underline{F}$ será uma primitiva da função $\underline{f}$ em $[a, b]$.
Mas, da Proposição (11.2.1), segue que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$G(x) = F(x) + C \,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a, b] \, .$$

Em particular, para cada $x \in [a, b]$, teremos

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C \, .$$

Logo

$$G(b) - G(a) = \left[\int_a^b f(t)\,dt + C\right] - \left[\underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} + C\right] = \int_a^b f(t)\,dt\,,$$

mostrando que

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)\,,$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 12.5.2

1. *Denotaremos a diferença*

$$G(b) - G(a)$$

por

$$G(x)\Big|_{x=a}^{x=b}, \quad \textit{ou ainda,} \quad G(x)\Big|_a^b,$$

isto é,

$$G(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \doteq G(b) - G(a)\,.$$

2. *O Teorema Fundamental do Cálculo coloca o problema de calcular uma integral definida de uma função contínua em intervalo* $[a, b]$*, essencialmente, em termos de encontrar uma primitiva (ou a integral indefinida) da função definida pelo integrando da integral definida.*

   Com isto podemos refazer algumas integrais definidas que calculamos pela definição de modo bem mais simples, como mostram os exemplos a seguir.

Exemplo 12.5.1 *Calcular a integral definida (caso exista)*

$$\int_1^3 x^2\,dx\,.$$

Resolução:

Seja $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) \doteq x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [1, 3]\,.$$

Observemos que a função $\underline{f}$ é contínua em $[1, 3]$ (pois é a restrição de uma função polinomial ao intervalo $[1, 3]$), logo a função $\underline{f}$ será integrável em $[1, 3]$.

Uma primitiva da função $\underline{f}$ será a função $F : [1, 3] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x) = \frac{x^3}{3}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [1, 3]\,.$$

Logo, do Teorema Fundamental do Cálculo, teremos:

$$\int_1^3 x^2\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx \overset{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}\,,$$

ou seja, temos um modo mais simples de calcular a integral definida acima do que a que utilizamos no Exemplo (12.3.1).

Observação 12.5.3 *Como a função* $\underline{f}$ *do Exemplo acima é não negativa em* $[1,3]$ *e integrável em* $[1,3]$*, segue que o valor da área, que denotaremos por* $\mathcal{A}$*, da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x=1$*,* $x=3$ *e pelo eixo* Ox *será*

$$\mathcal{A}=\frac{26}{3}\text{ u.a.},$$

isto é, será o valor da integral definida calculada acima.

Um outro exemplo:

Exemplo 12.5.2 *Mostre que a função* $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x)\doteq x^2\sqrt{x^3+1},\quad \textit{para cada}\quad x\in[1,2],$$

é integrável em $[1,2]$ *e encontre o valor da integral definida*

$$\int_1^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx\,.$$

<u>**Resolução:**</u>

Observemos que a função $\underline{f}$ é contínua em $[1,2]$ (será deixado como exercício para o leitor a verificação deste fato).

Do Teorema (12.3.1), segue que a função $\underline{f}$ será integrável em $[1,2]$.

Para calcularmos a integral definida acima precisamos encontrar uma primitiva da função $\underline{f}$, ou ainda, sua integral indefinida.

Para isto aplicaremos o Teorema da Substituição para Integrais Indefinidas, mais precisamente:

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}\int\sqrt{\underbrace{x^3+1}_{\doteq u}}\,\underbrace{3x^2\,dx}_{=du}\overset{u\doteq x^3+1\Rightarrow du=3x^2\,dx}{=}\frac{1}{3}\int\underbrace{\sqrt{u}}_{=u^{\frac{1}{2}}}\,du=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1}+C\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}}+C\right]\overset{u=x^3+1}{=}\underbrace{\frac{2}{9}\left[x^3+1\right]^{\frac{3}{2}}}_{\doteq F(x)}+C,$$

para $x\in[-1,\infty)$.

Logo, do Teorema Fundamental do Cálculo, teremos:

$$\int_1^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx\overset{\text{Teor. Fund. Cálc.}}{=}F(x)\Big|_{x=1}^{x=2}=\frac{2}{9}\left[x^3+1\right]^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=1}^{x=2}\overset{\text{Exercício}}{=}\frac{2}{9}\left[\sqrt{8}-1\right].$$

Observação 12.5.4 *Como a função* $\underline{f}$ *do Exemplo acima é não negativa em* $[1,2]$ *e integrável em* $[1,2]$*, segue que o valor da área, que denotaremos por* $\mathcal{A}$*, da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x=1$*,* $x=2$ *e pelo eixo* Ox *será*

$$\mathcal{A}=\frac{2}{9}\left[\sqrt{8}-1\right]\text{ u.a.},$$

isto é, será o valor da integral definida calculada acima.

Um outro exemplo interessante é:

Exemplo 12.5.3 *Mostre que a função* $f : [-4, 3] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq |x+2|\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [-4, 3]\,,$$

é integrável em $[-4, 3]$ *e encontre o valor da integral definida*

$$\int_{-4}^{3} |x+2|\, dx\,.$$

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é contínua em $[-4, 3]$ (será deixado como exercício para o leitor a verificação deste fato).

Logo, do Teorema (12.3.1), segue que a função $\underline{f}$ será integrável em $[-4, 3]$.

Observemos que será complicado encontrarmos uma primitiva da função $\underline{f}$ no intervalo $[-4, 3]$ (tente!).

Para facilitar o cálculo da integral definida acima observamos que

$$|x+2| = x+2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [-2, 3] \tag{12.15}$$

$$|x+2| = -(x+2)\,, \quad \text{para cada} \quad \in [-4, -2]\,. \tag{12.16}$$

Assim, da Proposição (12.4.1) item (iii), segue que:

$$\begin{aligned}
\int_{-4}^{3} |x+2|\, dx &= \int_{-4}^{-2} \underbrace{|x+2|}_{\overset{x\in[-4,-2]}{=} -(x+2)} dx + \int_{-2}^{3} \underbrace{|x+2|}_{\overset{x\in[-2,3]}{=} x+2} dx \overset{(12.15),(12.16)}{=} \int_{-4}^{-2} -(x+2)\, dx + \int_{-2}^{3} (x+2)\, dx \\
&= -\left[\int_{-4}^{-2} x\, dx + 2\int_{-4}^{-2} 1\, dx\right] + \int_{-2}^{3} x\, dx + 2\int_{-2}^{-3} 1\, dx \\
&\overset{\int x\, dx = \frac{x^2}{2}+C,\ \int 1\, dx = x+D \text{ e o Teor. Fund. Cálc.}}{=} -\left[\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=-4}^{x=-2} + 2x\Bigg|_{x=-4}^{x=-2}\right] + \frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=-2}^{x=3} + 2x\Bigg|_{x=-2}^{x=3} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{29}{2}\,.
\end{aligned}$$

Observação 12.5.5 *Como a função* $\underline{f}$ *do Exemplo acima é não negativa em* $[-4, 3]$ *e integrável em* $[-4, 3]$, *segue que o valor da área, que denotaremos por* $\mathcal{A}$, *da região limitada* R, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *pelas retas* $x = -4$, $x = 3$ *e pelo eixo* Ox *será de*

$$\mathcal{A} = \frac{29}{2} \text{ u.a.}\,,$$

isto é, o valor da integral definida calculada acima.

Podemos aplicar o Teorema (12.5.1) ao seguinte exemplo:

Exemplo 12.5.4 *Seja* $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$F(x) \doteq \int_{0}^{x} \frac{1}{1+t^2}\, dt\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, \infty)\,.$$

Mostre que a função $\underline{F}$ *é diferenciável em* $[0, \infty)$ *e calcule sua derivada* $F'(x)$, *para cada* $x \in [0, \infty)$.

Resolução:

Como a função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) \doteq \frac{1}{1+t^2}\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0, \infty)\,,$$

é contínua em $[0, \infty)$, para cada $x \in [0, \infty)$ fixado segue, do Teorema (12.5.1), que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $[0, x]$.

Logo a função $\underline{F}$ está bem definida.

Além disso, para cada $x \in [0, \infty)$, teremos:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt\right] \overset{(12.5.1)}{=} f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Um outro exemplo semelhante é dado pelo:

Exemplo 12.5.5 *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$F(x) \doteq \int_x^{x^3} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Mostre que a função $\underline{F}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e calcule sua derivada* $F'(x)$*, para cada* $x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) \doteq \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $\mathbb{R}$ segue, do Teorema (12.3.1) segue que a função $\underline{f}$ é integrável em qualquer intervalo fechado e limitado contido em $\mathbb{R}$, logo a função $\underline{F}$ está bem definida.

Além disso temos que:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{x^3} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt = \int_x^{0} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt + \int_0^{x^3} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt \\ &= -\int_0^{x} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt + \int_0^{x^3} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Observemos que, do Teorema (12.5.1), segue que

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt\right] = \operatorname{sen}\left(x^2\right)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{12.17}$$

Como a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) \doteq x^3\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$g'(x) = 3x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

e a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(y) \doteq \int_0^y \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt\,, \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}$$

também é diferenciável em $\mathbb{R}$ (pelo Teorema (12.5.1)), segue que a função $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F_1(x) \doteq \int_0^{x^3} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt = h(g(x))\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

também será diferenciável em $\mathbb{R}$.

Também do Teorema (12.5.1) segue que

$$h'(y) = \operatorname{sen}\left(y^2\right)\,, \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

Assim, da Regra da Cadeia, segue que:

$$F_1'(x) = h'[g(x)]\, g'(x) = \operatorname{sen}\left\{[g(x)]^2\right\} 3x^2 = \operatorname{sen}\left(x^6\right) 3x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{12.18}$$

Portanto, de (12.17) e (12.18), segue que a função $\underline{f}$ será diferenciável em $\mathbb{R}$ e, para cada $x \in \mathbb{R}$, teremos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}\left[-\int_0^x \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt\right] + \frac{d}{dx}\left[\int_0^{x^3} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt\right] \\ &= -\operatorname{sen}\left(x^2\right) + 3x^2 \operatorname{sen}\left(x^6\right)\,. \end{aligned}$$

Logo

$$F'(x) = -\operatorname{sen}\left(x^2\right) + 3x^2 \operatorname{sen}\left(x^6\right)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

A seguir exibiremos alguns exercícios resolvidos:

Exercício 12.5.1 *Mostre que a função* $f : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \cos(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

é integrável em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ *e encontre o valor da integral definida*

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)\, dx\,.$$

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Logo, do Teorema (12.3.1), segue que a função $\underline{f}$ é integrável em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Para calcularmos a integral definida acima precisamos encontrar uma primitiva da função $\underline{f}$ (ou a integral indefinida da função f) e depois aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)\, dx &\overset{\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)+C \text{ e o Teor. Fund. Cálc.}}{=} \operatorname{sen}(x)\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{3\pi}{2}} \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 1 = -2\,. \end{aligned}$$

Exercício 12.5.2 *Mostre que a função* $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(8x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

é integrável em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *e encontre*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(8x)\, dx\,.$$

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é continua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, logo será integrável em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Para calcularmos a integral definida acima precisamos encontrar uma primitiva da função $\underline{f}$ (ou a integral indefinida da função $\underline{f}$) e depois aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Observemos que

$$\begin{aligned} \int f(x)\, dx = \int \operatorname{sen}(8x)\, dx &\overset{u=8x \Rightarrow du=8\,dx}{=} \int \operatorname{sen}(u) \frac{1}{8}\, du = \frac{1}{8}[-\cos(u)] + C \\ &\overset{u=8x}{=} -\frac{1}{8}\cos(8x) + C\,, \end{aligned} \tag{12.19}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Logo

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(8x)\, dx &\overset{(12.19) \text{ e o Teor. Fund. Cálculo}}{=} \left[-\frac{1}{8}\cos(8x)\right]\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{8}\left[\underbrace{\cos(4\pi)}_{=1} - \underbrace{\cos(0)}_{=1}\right] = 0. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(8x)\, dx = 0\,.$$

Exercício 12.5.3 *Mostre que a função* $f : \left[0, \sqrt[6]{5}\right] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \frac{x^2}{5 + x^6}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \left[0, \sqrt[6]{5}\right]$$

é integrável em $[0, \sqrt[6]{5}]$ *e encontre*

$$\int_0^{\sqrt[6]{5}} \frac{x^2}{5 + x^6}\, dx\,.$$

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é continua em $\left[0, \sqrt[6]{5}\right]$ (verifique!), logo será integrável em $\left[0, \sqrt[6]{5}\right]$.

Para calcularmos a integral definida acima precisamos encontrar uma primitiva da função $\underline{f}$ (ou a integral indefinida da função $\underline{f}$) e depois aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Observemos que

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \frac{x^2}{5+x^6}\,dx = \int \frac{x^2}{5+\left(x^3\right)^2}\,dx \overset{u=x^3 \Rightarrow \underline{du}=3x^2\,dx}{=} \int \frac{\frac{1}{3}}{5+u^2}\,du \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{5\left\{1+\left[\frac{u}{\sqrt{5}}\right]^2\right\}}\,du \overset{v=\frac{u}{\sqrt{5}} \Rightarrow dv=\frac{1}{\sqrt{5}}\,du}{=} \frac{\sqrt{5}}{15}\int \frac{1}{1+v^2}\,dv \\
&= \frac{\sqrt{5}}{15}\,\mathrm{arctg}(v)+C \overset{v=\frac{u}{\sqrt{5}}}{=} \frac{\sqrt{5}}{15}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)+C \overset{u=x^3}{=} \frac{\sqrt{5}}{15}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x^3}{\sqrt{5}}\right)+C\,. \qquad (12.20)
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt[6]{5}} \frac{x^2}{5+x^6}\,dx &\overset{(12.20)\text{ e o Teor. Fund. Cálculo}}{=} \left[\frac{\sqrt{5}}{15}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x^3}{\sqrt{5}}\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=\sqrt[6]{5}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{15}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{\left[\sqrt[6]{5}\right]^3}{\sqrt{5}}\right)-\mathrm{arctg}\left(\frac{0^3}{\sqrt{5}}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{5}}{15}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)-0\right] = \frac{\sqrt{5}}{15}\,\mathrm{arctg}(1) = \frac{\sqrt{5}}{15}\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^{\sqrt[6]{5}} \frac{x^2}{5+x^6}\,dx = \frac{\sqrt{5}\pi}{60}\,.$$

Observação 12.5.6 *Como a função $\underline{f}$ do Exemplo acima é não negativa em $\left[0, \sqrt[6]{5}\right]$ e integrável em $[0, \sqrt[6]{5}]$, segue que o valor da área, que denotaremos por $\mathcal{A}$, da região limitada R, contida no plano xOy, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, pelas retas $x=0$, $x=\sqrt[6]{5}$ e pelo eixo Ox será de*

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{5}\pi}{60}\ \text{u.a.},$$

isto é, o valor da integral definida calculada acima.

Exercício 12.5.4 *Mostre que a função $f:\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq \frac{\mathrm{cossec}^2\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$$

é integrável em $\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$ e encontre

$$\int_{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \frac{\mathrm{cossec}^2\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

.

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é continua em $\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$ (verifique!), logo será integrável em $\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$.

Para calcularmos a integral definida acima precisamos encontrar uma primitiva da função $\underline{f}$ (ou a integral indefinida da função $\underline{f}$) e depois aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Observemos que

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{cossec}^2\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx \overset{u=\sqrt{x} \Rightarrow du=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx}{=} \int \operatorname{cossec}^2(u)\,2\,du = -2\operatorname{cotg}(u) + C$$
$$\overset{u=\sqrt{x}}{=} -2\operatorname{cotg}\left(\sqrt{x}\right) + C\,. \tag{12.21}$$

Logo

$$\int_{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \frac{\operatorname{cossec}^2\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx \overset{(12.21) \text{ e o Teor. Fund. Cálculo}}{=} \left[-2\operatorname{cotg}\left(\sqrt{x}\right)\right]\Big|_{x=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}^{x=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$
$$= -2\left[\operatorname{cotg}\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right) - \operatorname{cotg}\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}\right)\right]$$
$$= -2\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = -2[0-1] = 2.$$

ou seja,

$$\int_{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \frac{\operatorname{cossec}^2\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,.$$

Observação 12.5.7 *Como a função $\underline{f}$ do Exemplo acima é não negativa em $\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$ e integrável em $\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$, segue que o valor da área, que denotaremos por $\mathcal{A}$, da região limitada R, contida no plano xOy, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, pelas retas $x = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$, $x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ e pelo eixo Ox será de*

$$\mathcal{A} = 2 \text{ u.a.}\,,$$

isto é, o valor da integral definida calculada acima.

12.6 Integração por partes para integral definieda

Como conseqüência da integração por partes da integral indefinida (ver teorema (11.5.2)) temos que

Teorema 12.6.1 *Suponhamos que $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são continuamente diferenciáveis em $[a,b]$ (isto é, as funções f' e g' são funções contínuas em $[a,b]$).*

Então

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx\,.$$

Demonstração:

Do Teorema (11.5.2), temos que

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, dx$$

e assim do Teorema Fundamental do Cálculo segue o resultado.

□

Observação 12.6.1 *Se definirmos*

$$u = f(x), \quad v = g(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b]\,,$$

então

$$du = f'(x)\, dx, \quad dv = g'(x)\, dx$$

e a fórmula acima poderá ser escrita da seguinte forma abreviada:

$$\int_a^b u\, dv = u\, v\,\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v\, du\,.$$

Podemos aplicar isto ao

Exemplo 12.6.1 *Mostre que a função* $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x\, \text{sen}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, \pi]\,,$$

é integrável em $[0, \pi]$ *e encontre*

$$\int_0^\pi x\, \text{sen}(x)\, dx\,.$$

Resolução:

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $[0, \pi]$ segue, do Teorema (12.3.1) segue que a função $\underline{f}$ é integrável em $[0, \pi]$.

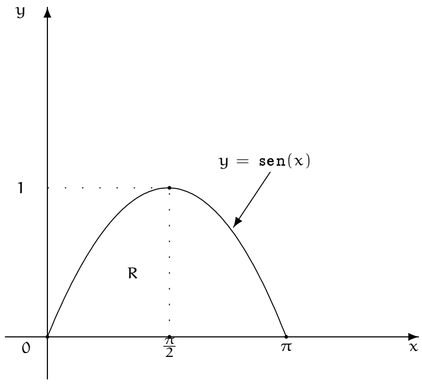
Para calcular a integral definida utilizaremos o Teorema acima, a saber:

$$\int_0^\pi x\, \text{sen}(x)\, dx \left\{ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \text{sen}(x)\, dx \Rightarrow v = \int \text{sen}(x)\, dx = -\cos(x) + C \overset{C=0}{\Rightarrow} v = -\cos(x) \end{array} \right\} =$$

$$= u\, v\,\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi v\, du = \{x\, [-\cos(x)]\}\big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi [-\cos(x)]\, dx$$

$$\overset{\int \cos(x)\, dx = \text{sen}(x) + C \text{ e o Teor. Fund. Cálc.}}{=} \left[-\pi\, \cos(\pi) + \underbrace{0\, \cos(0)}_{=0} \right] + \underbrace{\text{sen}(x)\,\Big|_{x=0}^{x=\pi}}_{=0} = \pi.$$

Observação 12.6.2 *Como a função* $\underline{f}$ *do Exemplo acima é não negativa em* $[0, \pi]$ *e integrável em* $[0, \pi]$*, segue que o valor da integral definida acima, isto é,* π*, será o valor da área da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = 0$*,* $x = \pi$ *e pelo eixo* Ox *, ou ainda, a área da região* R *será* π *u.a. (veja figura abaixo).*



12.7 Integração por substituição para integrais definidas

Temos também o

Teorema 12.7.1 *Sejam* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* $[a, b]$ *e* $f : g([a, b]) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $g([a, b])$ *e tal que* $F : g([a, b]) \to \mathbb{R}$ *é uma primitiva de* $\underline{f}$ *em* $g([a, b])$ *(isto é,* $F'(y) = f(y)$*, para cada* $y \in g([a, b])$*).*

Então

$$\int_a^b f[g(x)]\, g'(x)\, dx = F[g(b)] - F[g(a)] \qquad = F[g(x)]\Big|_{x=a}^{x=b}. \tag{12.22}$$

Demonstração:

Observemos que do Teorema (11.5.1) segue que

$$\int f[g(x)]\, g'(x)\, dx = F[g(x)] + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in g([a, b])\,.$$

Logo, do Teorema Fundamental do Cálculo, segue que

$$\int_a^b f[g(x)]\, g'(x)\, dx = F[g(b)] - F[g(a)] = F[g(x)]\Big|_{x=a}^{x=b},$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 12.7.1 *Do Teorema (12.5.1) segue que a função* $G : g([a, b]) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$G(x) \doteq \int_{g(a)}^{x} f(t)\, dt\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in g([a, b])\,,$$

é uma primitiva de $\underline{f}$ *em* $g([a, b])$*.*

Logo, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que (12.22) esta equivalente a

$$\int_a^b f[g(x)]\, g'(x)\, dx = G[g(b)] - \underbrace{G[g(a)]}_{=0} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy\,, \tag{12.23}$$

ou seja, o Teorema acima nos diz como mudar de variáveis na integral definida:

$$\int_a^b f[g(x)]\, g'(x)\, dx \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y = g(x) & \overset{\textit{(bijetora)}}{\Rightarrow} & dy = g'(x)\, dx \\ x = a & \Rightarrow & y = g(a) \\ x = b & \Rightarrow & y = g(b) \end{array} \right\} \underset{=}{\quad} \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy\,. \tag{12.24}$$

Apliquemos isso ao:

Exemplo 12.7.1 *Mostre que a função* $h : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$h(x) \doteq \text{sen}(x)\,\cos(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

é integrável em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *e encontre*

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x)\,\cos(x)\,dx\,.$$

<u>**Resolução:**</u>

Como a função $\underline{h}$ é contínua em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ segue, do Teorema (12.3.1) segue que a função $\underline{h}$ é integrável em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Para calcular a integral definida utilizaremos o Teorema acima, a saber:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x)\,\cos(x)\,dx &\overset{\left\{\begin{array}{l} f(y) \doteq y \\ g(x) \doteq \text{sen}(x),\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \overset{g \text{ é bij.}}{\Rightarrow} g'(x)\,dx = \cos(x)\,dx \end{array}\right\}}{=} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f[g(x)]\,g'(x)\,dx \\
&= \int_{g\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(y)\,dy = \int_{\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} y\,dy = \int_{-1}^{1} y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_{y=-1}^{y=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\,.
\end{aligned}$$

Observação 12.7.2 <u>**Todo cuidado é pouco!**</u>

Se estivermos calculando uma integral definida do tipo

$$\int_c^d f(u)\,du$$

e queremos aplicar o Teorema da Substituição para a Integral Definida, na verdade, precisaremos fazer uma <u>*mudança de variáveis*</u>*, isto é, a função*

$$u \doteq g(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b]$$

deverá ser uma função bijetora!

Caso não seja uma mudança de variáveis poderemos cometer erros grosseiros.

Para ilustrar consideremos o seguinte exemplo.

Se para calcular a integral definida $\int_{-1}^{1} x^2\,dx$*, utilizarmos a substituição (*<u>**não**</u> *é uma mudança de variáveis!)*

$$\begin{cases} u = x^2 \ \Rightarrow\ x = \sqrt{u} \ \Rightarrow\ dx = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\,du \\ x = 1 \ \Rightarrow\ u = 1 \\ x = -1 \ \Rightarrow\ u = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow x^2\,dx = u\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du$$

obteríamos

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \int_{1}^{1} \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du = 0\,.$$

Porém, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{3} - \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{2}{3} \neq 0\,!$$

Isto ocorreu pois a função

$$\begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

<u>não</u> *é uma mudança de variáveis (é diferenciável mas não é bijetora!).*

Para ilustrar isto consideremos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 12.7.1 *Mostre que a função* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^2\sqrt{1+x}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0,1]\,,$$

é integrável em $[0,1]$ *e encontre* $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+x}\,dx$.

<u>Resolução:</u>

Observemos que a função $\underline{f}$ é contínua em $[0,1]$ e portanto integrável em $[0,1]$.

Além disso, se $g : [0,1] \to [1,\sqrt{2}]$ é dada por

$$g(x) \doteq \sqrt{1+x}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0,1]\,,$$

segue que

$$u \doteq g(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0,1]\,,$$

será uma mudança de variáveis (isto é, bijetora) diferenciável em $[0,1]$.

Neste caso temos

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x}\,dx \underset{=}{\left\{\begin{array}{l} u \doteq g(x) = \sqrt{x+1},\ x \in [0,1] \\ u^2 = x+1 \quad \Rightarrow \quad 2u\,du = dx \\ \text{se } x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 1 \\ \text{se } x = 1 \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{2} \end{array}\right\}} \int_1^{\sqrt{2}} \left(u^2-1\right)^2 u\,2u\,du$$

$$\overset{\text{Exercício}}{=} \int_1^{\sqrt{2}} 2u^6 - 4u^4 + 2u^2\,du \overset{\text{Exercício}}{=} \left[\frac{2}{7}u^7 - \frac{4}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3\right]\Big|_{u=1}^{u=\sqrt{2}}$$

$$= \left\{\frac{2}{7}\left[\sqrt{2}\right]^7 - \frac{4}{5}\left[\sqrt{2}\right]^5 + \frac{2}{3}\left[\sqrt{2}\right]^3\right\} - \left\{\frac{2}{7} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right\}$$

$$= \frac{16}{7}\sqrt{2} - \frac{8}{5}\sqrt{2} + \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{56}{105} = \frac{72}{35}\sqrt{2} - \frac{56}{105}$$

ou seja,

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x}\,dx = \frac{72}{35}\sqrt{2} - \frac{56}{105}\,.$$

Observação 12.7.3 *Como a função $\underline{f}$ do Exemplo acima é não negativa em $[0,1]$ e integrável em $[0,1]$, segue que o valor da integral definida acima, isto é, $\frac{72}{35}\sqrt{2}-\frac{56}{105}$, será o valor da área da região limitada R, contida no plano xOy, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, pelas retas $x=0$, $x=1$ e pelo eixo Ox , ou ainda, a área da região R será* $\frac{72}{35}\sqrt{2}-\frac{56}{105}$ u.a..

Para finalizar este capítulo temos a seguinte observação:

Observação 12.7.4

1. *Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função $2L-$periódica e integrável em $[-L,L]$ então*

$$\int_0^{2L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{L} f(x)\,dx\,. \tag{12.25}$$

Em geral, temos que para cada $x_o\in\mathbb{R}$ segue que

$$\int_{x_o-L}^{x_o+L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{L} f(x)\,dx\,, \tag{12.26}$$

cuja demonstração é semelhante a da identidade (12.26) e será deixada como exercício para o leitor.

Notemos que

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2L} f(x)\,dx + \int_{2L}^{L} f(x)\,dx\,. \tag{12.27}$$

Mas

$$\int_{2L}^{L} f(x)\,dx \overset{\left\{\begin{array}{l} y \doteq x-2L \overset{\text{é bijetora!}}{\Rightarrow} dy=dx \\ x=2L \Rightarrow y=0 \\ x=L \Rightarrow y=-L \end{array}\right\}}{=} \int_0^{-L} f(y+2L)\,dy$$

$$\overset{f(y+2L)=f(y)\,,\,y\in\mathbb{R}}{=} \int_0^{-L} f(y)\,dy = -\int_{-L}^{0} f(y)\,dy\,. \tag{12.28}$$

Portanto, de (12.27) e (12.28), segue que

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_0^{2L} f(x)\,dx\,,$$

como queríamos mostrar.

2. *Se $f:[-L,L]\to\mathbb{R}$ é uma função par (isto é, $f(-x)=f(x)$, para cada $x\in\mathbb{R}$) e integrável em $[-L,L]$ então*

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_0^{L} f(x)\,dx\,.$$

De fato,

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{L} f(x)\,dx\,.$$

Mas

$$\int_{-L}^{0} f(x)\,dx \overset{\left\{\begin{array}{l} y \doteq -x \overset{\text{é bijetora!}}{\Rightarrow} dy = -dx \\ x = -L \Rightarrow y = L \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\}}{=} \int_{L}^{0} f(-y)\,(-dy)$$

$$\overset{f(-y)=f(y),\, y\in\mathbb{R}}{=} \int_{0}^{L} f(y)\,dy = -\int_{-L}^{0} f(y)\,dy\,.$$

Portanto

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx\,,$$

como queríamos mostrar.

3. *Se* $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ *é uma função ímpar (isto é,* $f(-x) = -f(x)$*, para cada* $x \in \mathbb{R}$*) e integrável em* $[-L, L]$ *então*

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0\,.$$

De fato,

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{L} f(x)\,dx\,.$$

Mas

$$\int_{-L}^{0} f(x)\,dx \overset{\left\{\begin{array}{l} y \doteq -x \overset{\text{é bijetora!}}{\Rightarrow} dy = -dx \\ x = -L \Rightarrow y = L \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\}}{=} \int_{L}^{0} f(-y)\,(-dy)$$

$$\overset{f(-y)=-f(y)\,,\, y\in\mathbb{R}}{=} -\int_{0}^{L} f(y)\,dy\,,$$

ou seja,

$$\int_{-L}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{L} f(y)\,dy\,.$$

Portanto

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0\,,$$

como queríamos mostrar.

4. *Lembremos que se as funções* $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$ *são funções pares então* $f\,g$, $f+g$, $f-g$ *e* f/g *(onde estiver definida) também serão funções pares.*

   Se as funções $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$ *forem ímpares então* $f\,g$, $\dfrac{f}{g}$ *(onde estiver definida) serão funções pares e* $f+g$, $f-g$ *serão funções ímpares.*

   Se a função $\underline{f}$ *for uma função par e a função* $\underline{g}$ *for uma função ímpar então* $f\,g$ *e* $\dfrac{f}{g}$ *(onde estiver definida) serão funções ímpares.*

   As demonstrações destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Capítulo 13

Aplicações de integrais definidas de funções reais de uma variável real

13.1 A função logarítmo natural

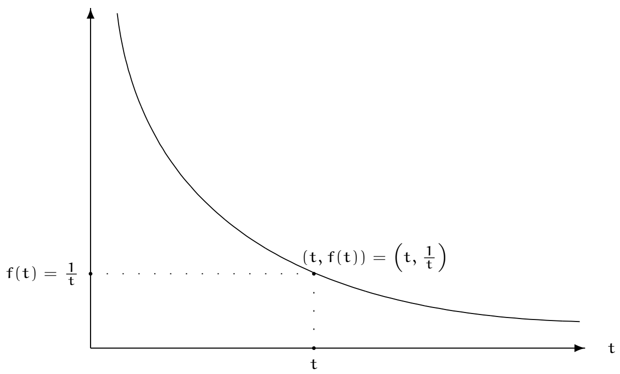
No Capítulo 4. (página 99) introduzimos a função logarítmo natural.

A seguir iremos relembrar como ela foi definida.

Consideremos o gráfico da função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) \doteq \frac{1}{t}, \quad \text{para cada} \quad t \in (0, \infty)$$

(veja a figura abaixo).



Como a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínua em $(0, \infty)$ podemos introduzir a:

Definição 13.1.1 *Para cada* $x \in (0, \infty)$, *definimos o* **logarítmo natural de $\underline{x}$**, *indicado por, como sendo*

$$\ln(x) \doteq \int_1^x \frac{1}{t}\, dt\,.$$

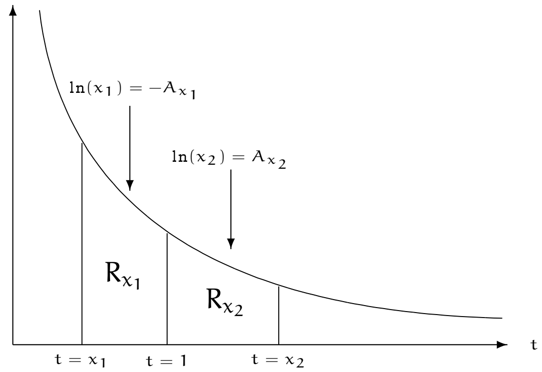
Assim temos definida a **função logarítmo (natural)** *indicada por* $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\ln(x) \doteq \int_1^x \frac{1}{t}\, dt\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0, \infty)\,.$$

Observação 13.1.1 *Observemos que, para* $x \in (1, \infty)$, *temos que* $\ln(x)$ *nos dá o valor da área da região limitada* R, *contida no plano* xOy , *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *pelas retas* $t = 1$ *e* $t = x$.

De fato, pois função $\underline{f}$ é não negativa em $(0, \infty)$ e contínua em qualquer intervalo fechado e limitado contido em $(0, \infty)$, logo integrável em cada um desses intervalos.

Por outro lado, para $x \in (0, 1)$, então $\ln(x)$ nos dá menos o valor da área da região limitada R, contida no plano xOy, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, pelas retas $t = 1$ e $t = x$, como definido no Capítulo 4. (veja figura abaixo)



A seguir exibiremos algumas propriedades da função logarítmo precisaremos do

Lema 13.1.1 *Sejam $a, b > 0$.*

Então

$$\int_a^{ab} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^b \frac{1}{t}\, dt\,.$$

<u>**Demonstração:**</u>

Utilizaremos o Teorema da Substituição na Integral Definida (Teorema (12.7.1)) para demonstrar a identidade acima.

Consideremos $g : [1, b] \to [a, ab]$ dada por

$$g(u) \doteq au\,, \quad \text{para cada} \quad u \in [1, b]\,,$$

que é bijetora e diferenciável em $[1, b]$, logo será uma mudança de variáveis.

Assim temos

$$\int_a^{ab} \frac{1}{t}\, dt \overset{\left\{\begin{array}{l} u \doteq \frac{t}{a} \overset{\text{bijetora!}}{\Rightarrow} dt = a\, du \\ t = a \Rightarrow u = 1 \\ t = ab \Rightarrow u = b \end{array}\right\}}{=} \int_1^b \frac{1}{au}\, a\, du = \int_1^b \frac{1}{u}\, du\,,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Com isto temos a

Proposição 13.1.1

1. $\ln(1) = 0$;
2. *para $x, y \in (0, \infty)$ temos que*

$$\ln(x\, y) = \ln(x) + \ln(y)\,;$$

3. *para* $n \in \mathbb{N}$ *e* $x \in (0, \infty)$, *temos que*

$$\ln(x^n) = n \ln(x);$$

4. *par* $x, y \in (0, \infty)$ *temos que*

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y);$$

5. *a função* $\ln$ *é diferenciável em* $(0, \infty)$ *e além disso,*

$$\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x}, \quad \textit{para cada} \quad x \in (0, \infty);$$

6. *a função* $y = \ln(x)$ *é estritamente crescente em* $(0, \infty)$ *;*

7. *a função* $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *é bijetora.*

Demonstração:

De 1.:

Temos que

$$\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0,$$

completando a demonstração do item 1. .

De 2.:

Para $x, y \in (0, \infty$, temos que

$$\ln(x\,y) = \int_1^{x\,y} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt + \int_x^{x.y} \frac{1}{t}\, dt \overset{\text{Lema (13.1.1)}}{=} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt + \int_1^y \frac{1}{t}\, dt$$
$$= \ln(x) + \ln(y),$$

completando a demonstração do item 2. .

De 3.:

Como

$$x^n = \underbrace{x \cdots x}_{n-\text{fatores}},$$

utilizando-se o item 2. obteremos o item 3. .

De 4.:

$$\ln(x) = \ln\left(\frac{x}{y}\,y\right) \overset{\text{item 2.}}{=} \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln(y),$$

ou seja,

$$\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right),$$

completando a demonstração do item 4. .

De 5.:

Do Teorema (12.5.1) segue que a função $\ln$ é diferenciável em $(0, \infty)$ (pois a função $t \mapsto \frac{1}{t}$ é contínua em $(0, \infty)$) e além disso

$$\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{d}{dx}\left[\int_1^x \frac{1}{t}\, dt\right] = \frac{1}{x}, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, \infty),$$

completando a demonstração do item 5. .

De 6.:

Como

$$\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x} > 0\,, \quad \text{para cada} \quad x > 0\,,$$

segue que a função é estritamente crescente em $(0, \infty)$, completando a demonstração do item 6. .

De 7.:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que conjunto imagem da função ln é $\mathbb{R}$.

Para mostrar isto precisaremos do estudo de integrais impróprias de 1.a e 2.a espécies, que serão tratadas no Capítulo 15.

Assim, do item 6., segue que a função $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ será biletora, completando a demonstração do item 7..

□

Com isto temos todas as outras funções, com suas respectivas propriedades, definidas no Capítulo 4 a partir da função logarítmo natural (a função exponencial, as funções potenciações, funções hiperbólicas e funções hiperbólicas inversas).

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das mesmas.

Com isto temos os seguinte exercícios resolvidos:

Exercício 13.1.1 *Mostre que a função* $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \mathrm{tg}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

é integrável em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ *e encontre*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}(x)\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é continua em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, logo será integrável em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Para calcularmos a integral definida acima precisamos encontrar uma primitiva da função $\underline{f}$ em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, ou a integral indefinida da função $\underline{f}$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, e depois aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Observemos que, para $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, temos:

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx = \int \mathrm{tg}(x)\,dx = \int \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx &\overset{u=\cos(x) \Rightarrow du = \mathrm{sen}(x)\,dx}{=} \int \frac{1}{u}\,du = \ln(u) + C \\ &\overset{u=\cos(x)}{=} \ln[\cos(x)] + C\,. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Logo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}(x)\,dx \overset{\text{de (13.1) e do Teor. Fund. Cálculo}}{=} \ln[\cos(x)]\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = \ln[\cos(0)] - \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,.$$

ou seja,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}(x)\,dx = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,.$$

Também temos o:

Exercício 13.1.2 *Mostre que a função* $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \ln^2(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [1, 2]\,,$$

é integrável em $[1, 2]$ *e encontre*

$$\int_1^2 \ln^2(x)\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é continua em $[1, 2]$, logo será integrável em $[1, 2]$.

Para calcularmos a integral definida acima precisamos encontrar uma primitiva da função $\underline{f}$ em $[1, 2]$, ou da integral indefinida da função $\underline{f}$ no intervalo $[1, 2]$, e depois aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Observemos que, para $x \in [1, 2]$, utilizando integração pro partes para a integral indefinida, obteremos:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \ln^2(x)\,dx = \int \ln(x)\,\ln(x)\,dx \\
&\overset{\left\{\begin{array}{l} u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = \ln(x)\,dx \Rightarrow v \overset{\text{Exercício (11.5.4)}}{=} x\ln(x) - x + C \end{array}\right\}}{=} uv - \int v du \\
&= \ln(x)\,[x\ln(x) - x] - \int [x\ln(x) - x]\,\frac{1}{x}\,dx = x\left[\ln^2(x) - \ln(x)\right] - \int \ln(x)\,dx + \int dx \\
&\overset{\text{Exercício (11.5.4)}}{=} x\ln^2(x) - x\ln(x) - [x\ln(x) - x] + x + C \\
&= x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + C\,, \quad \text{para cada} \quad x \in ((), \infty)\,.
\end{aligned} \tag{13.2}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \ln^2(x)\,dx &\overset{\text{de (13.2) e do Teor. Fund. Cálculo}}{=} \left[x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x\right]\Big|_{x=1}^{x=2} \\
&= \left[2\ln^2(2) - 2.2\ln(2) + 2.2\right] - \left[1\ln^2(1) - 2.1\ln(1) + 2.1\right] = 2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 2\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_1^2 \ln^2(x)\,dx = 2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 2\,.$$

Observação 13.1.2 *Como a função* $\underline{f}$ *do Exemplo acima é não negativa em* $[1, 2]$ *e integrável em* $[1, 2]$*, segue que o valor da integral definida acima, isto é,* $2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 2$*, será o valor da área da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = 1$*,* $x = 2$ *e pelo eixo* Ox *, ou ainda, a área da região* R *será* $2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 2$ u.a..

Temos também o:

Exercício 13.1.3 *Mostre que a função* $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq e^x \operatorname{sen}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\,,$$

é integrável em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *e encontre*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é continua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, logo será integrável em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Para calcularmos a integral definida acima precisamos encontrar uma primitiva da função $\underline{f}$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (ou a integral indefinida da função $\underline{f}$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) e depois aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Observemos que, para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, utilizando-se integração por partes para a integral indefinida, obteremos:

$$\underbrace{\int \underbrace{e^x}_{=u} \underbrace{\operatorname{sen}(x)\,dx}_{=dv}}_{I} \overset{\left\{\begin{array}{l} u \doteq e^x \Rightarrow du = e^x\,dx \\ dv \doteq \operatorname{sen}(x)\,dx \Rightarrow v = -\cos(x) + C \end{array}\right\}}{=} uv - \int v\,du$$

$$= e^x[-\cos(x)] - \int e^x[-\cos(x)]\,dx = e^x \cos(x) + \int \underbrace{e^x}_{=u} \underbrace{\cos(x)\,dx}_{=dv}$$

$$= -e^x \cos(x) + [uv - \int v\,du]$$

$$\overset{\left\{\begin{array}{l} u \doteq e^x \Rightarrow du = e^x\,dx \\ dv \doteq \cos(x)\,dx \Rightarrow v = \operatorname{sen}(x) + C \end{array}\right\}}{=} -e^x \cos(x) + \left[e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx\right]$$

$$= e^x[\operatorname{sen}(x) - \cos(x)] - \underbrace{\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx}_{I},$$

ou seja,

$$2\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = e^x[\operatorname{sen}(x) - \cos(x)] + C,$$

ou seja,

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = e^x \frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2} + C, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{13.3}$$

Logo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx \overset{\text{de (13.3) e do Teor. Fund. Cálculo}}{=} \left[e^x \frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - e^0 \frac{\operatorname{sen}(0) - \cos(0)}{2} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2},$$

ou seja,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}.$$

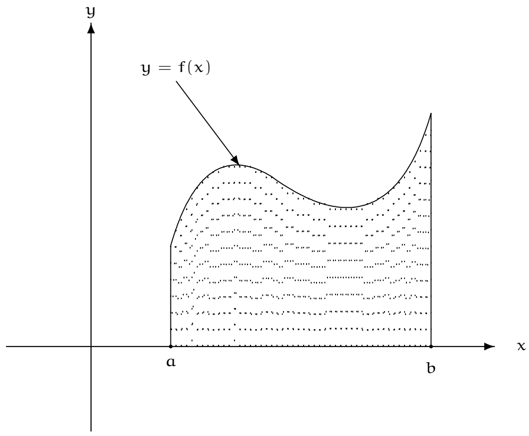
Observação 13.1.3 *Como a função $\underline{f}$ do Exemplo acima é não negativa em $[0, \frac{\pi}{2}]$ e integrável em $[0, \frac{\pi}{2}]$, segue que o valor da integral definida acima, isto é, $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$, será o valor da área da região limitada R, contida no plano xOy, delimitada pela representação geométrica do gráfico* *da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = 0$*,* $x = \dfrac{\pi}{2}$ *e pelo eixo* Ox *, ou ainda, a área da região* R *será* $\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$ u.a. .

13.2 Área de regiões delimitadas por gráficos de funções reais de uma variável real

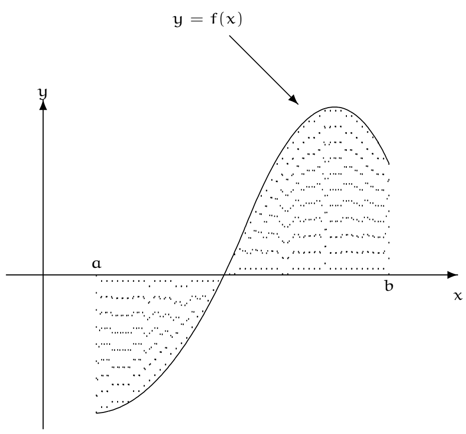
Observação 13.2.1

1. *Como vimos anteriormente se a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é integrável e* **não negativa** *em* $[a, b]$ *então o valor da área, que indicaremos por* $\mathcal{A}$*, da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = a$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox *(veja a figura abaixo) será dada por*

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$



2. *Se a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é integrável em* $[a, b]$ *(pode assumir valores negativos) então o valor da área, que indicaremos* $\mathcal{A}$*, da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = a$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox *(vide figura abaixo) pode ser obtida, geometricamente, refletindo-se a parte da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *que fica abaixo do eixo* Ox *(isto é, a parte da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *onde a função é negativa) em torno do eixo* Ox *(veja a figura abaixo).*

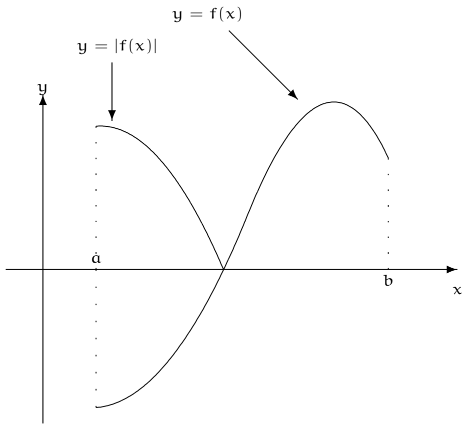


Observemos que se considerarmos o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A}'$, *da região limitada* R', *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $|f|$, *pelas retas* $x = a$, $x = b$ *e pelo eixo* Ox *(veja a figura abaixo) então teremos que*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}'$$

e assim

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

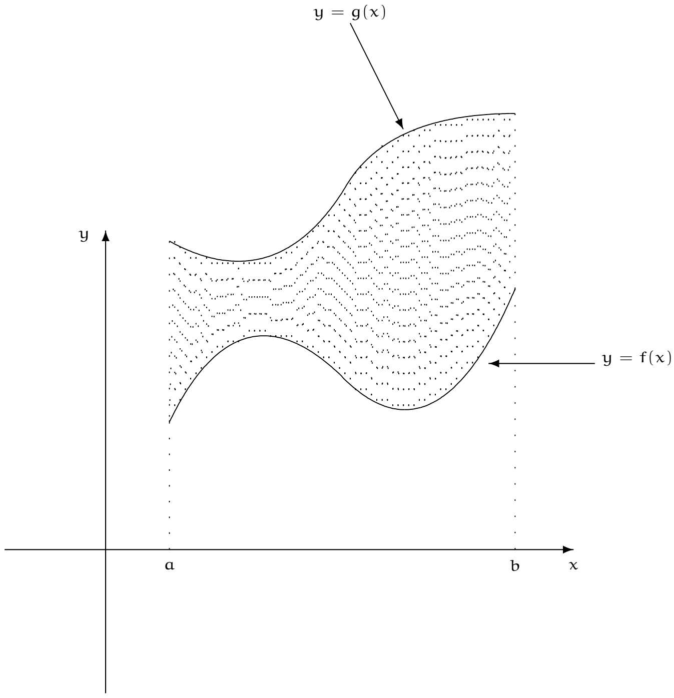


3. *Suponhamos que* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *são integráveis em* $[a, b]$ *e que*

$$0 \leq f(x) \leq g(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b]\,.$$

Então o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A}$, *da região limitada* R, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{g}$, *pelas retas* $x = a$, $x = b$ *e pelo eixo* Ox *(veja a figura abaixo) será dada por*

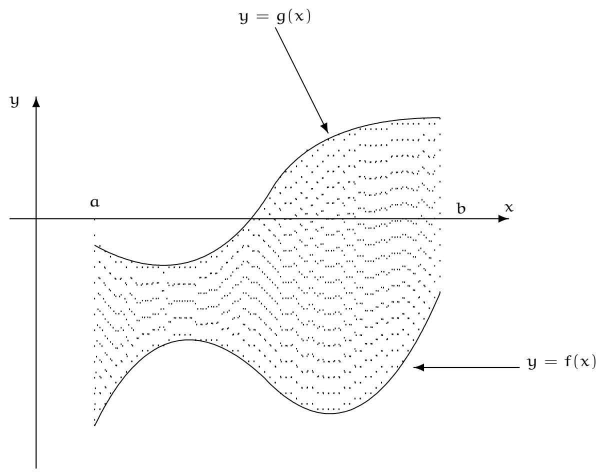
$$A = \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx.$$



4. *Na situação acima podemos considerar somente o caso em que*

$$f(x) \leq g(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b], \tag{13.4}$$

isto é, não importa se as funções assumem valores negativos (veja a figura abaixo).



Para mostrar isto, consideremos $K \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$K \leq f(x) \leq g(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b],$$

que existe pois a função $\underline{f}$ *é uma função limitada.*

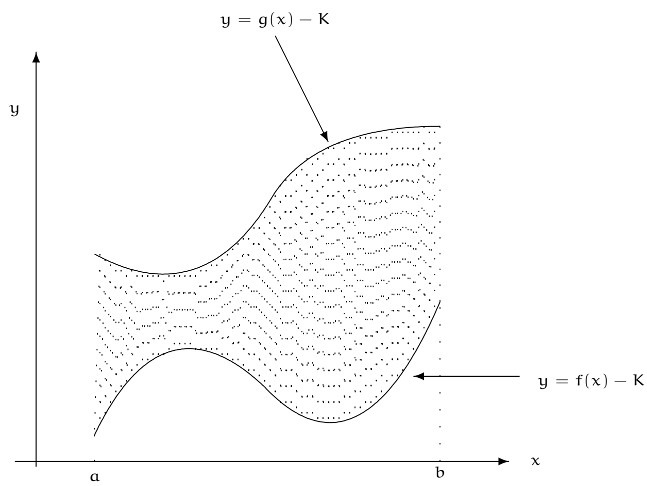
Com isto temos que

$$0 \leq f(x) - K \leq g(x) - K, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b],$$

e podemos aplicar o argumento do item 2. acima para as funções $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$F(x) \doteq f(x) - K, \quad G(x) \doteq g(x) - K, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b].$$

Observemos que o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A}$*, da região dada incialmente é igual a área região limitada* R'*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{G}$ *, pelas retas* $x = a$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox *(pois o que fizemos foi transladar a representação geométrica dos gráficos das funções* $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$ *de uma mesma constante* K *- a veja figura abaixo).*



Logo a área da região inicial será dada por

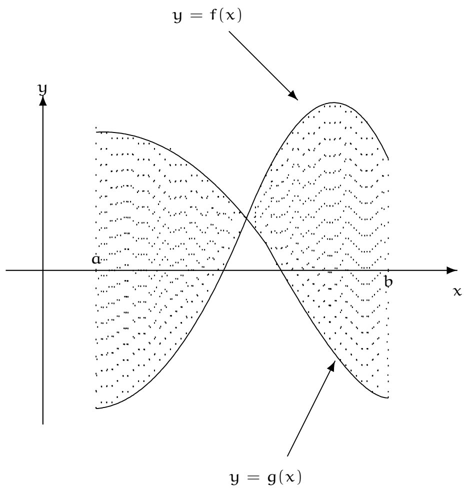
$$\mathcal{A}=\int_a^b [G(x)-F(x)]\ dx=\int_a^b [g(x)-K]-[f(x)-K]\,dx=\int_a^b [g(x)-f(x)]\ dx\,,$$

ou seja, independentemente das funções $\underline{f}$ *e* g *assumirem valores negativos, se* (13.4) *ocorrer, teremos que o valor da área, isto é,* $\mathcal{A}$*, da região* R *dada inicialmente será*

$$\mathcal{A}=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx\,.$$

5. *Em geral, se* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *são integráveis em* $[a,b]$ *então o valor da área, que indicaremos por* $\mathcal{A}$*, da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x=a$*,* $x=b$ *e pelo eixo* Ox *(veja a figura abaixo) será dada por*

$$\mathcal{A}=\int_a^b |g(x)-f(x)|\ dx\,.$$



A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Apliquemos isto ao

Exemplo 13.2.1 *Sejam* $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *funções dadas por*

$$f(x)\doteq x+6\,,\quad g(x)\doteq x^3\,,\quad h(x)\doteq-\frac{x}{2}\,,\quad \textit{para cada}\quad x\in\mathbb{R}\,.$$

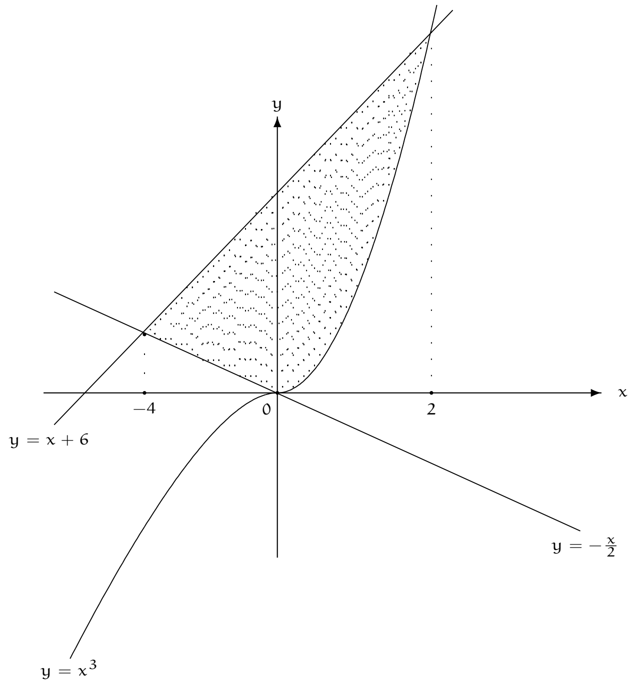
Encontrar o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A}$*, da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções* $\underline{f}$ *,* $\underline{g}$ *e* $\underline{h}$*.*

Resolução:

Observemos que

$$f(x)=h(x)\quad\text{se, e somente se}\quad x+6=-\frac{x}{2}\quad\text{ou seja,}\quad x=-4\,,$$
$$f(x)=g(x)\quad\text{se, e somente se}\quad x+6=x^3\quad\text{ou seja,}\quad x=2\,,$$
$$g(x)=h(x)\quad\text{se, e somente se}\quad -\frac{x}{2}=x^3\quad\text{ou seja,}\quad x=0\,.$$

Logo, geometricamente teremos a seguinte configuração:



Como as funções $\underline{f}$, $\underline{g}$ e $\underline{h}$ são contínuas nos respectivos intervalos, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-4}^{0} [f(x) - h(x)]\, dx + \int_{0}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx \\
&= \int_{-4}^{0} \left[x + 6 - \left(-\frac{x}{2}\right)\right]\, dx + \int_{0}^{2} \left[x + 6 - x^3\right]\, dx = \int_{-4}^{0} \frac{3}{2}x + 6\, dx + \int_{0}^{2} x + 6 - x^3\, dx \\
&= \left[\frac{3}{4}x^2 + 6x\right]\Bigg|_{x=-4}^{x=0} + \left[\frac{1}{2}x^2 + 6x - \frac{1}{4}x^4\right]\Bigg|_{x=0}^{x=2} \overset{\text{Exercício}}{=} 22 \text{ u.a.}.
\end{aligned}$$

Observação 13.2.2 *Em algumas situações podemos, se for conveniente, encontrar o valor da área de uma região limitada* R*, contida no plano* xOy*, como uma integral definida envolvendo funções que dependam da variável* $\underline{y}$*, como mostra o exemplo abaixo.*

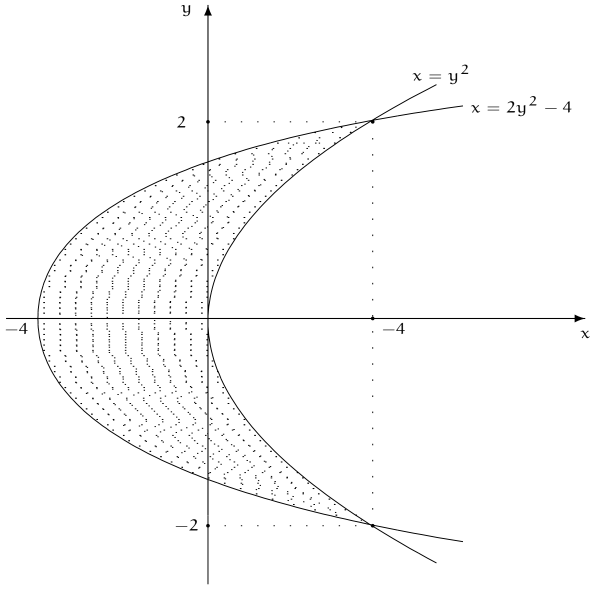
Para ilustrar isto temos o:

Exercício 13.2.1 *Encontre o valor da área, que indicaremos por* $\mathcal{A}$*, da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das equações*

$$2y^2 - x - 4 = 0 \quad e \quad x - y^2 = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

<u>**Resolução:**</u>

A representação geométrica da região R, cujo valor da área, isto é, $\mathcal{A}$, queremos encontrar, é dada pela figura abaixo.



Observemos que

$$2y^2 - 4 = x = y^2 \quad \text{se, e somente se} \quad y^2 = 4 \quad \text{ou seja,} \quad y = \pm 2.$$

Logo, se considerarmos as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(y) \doteq 2y^2 - 4 \quad \text{e} \quad g(y) \doteq y^2\,, \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}\,,$$

como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são contínuas em $\mathbb{R}$ teremos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-2}^{2} |f(y) - g(y)|\, dy = \int_{-2}^{2} \left|(2y^2 - 4) - y^2\right|\, dy = \int_{-2}^{2} \left|y^2 - 4\right|\, dy \\
&\overset{y^2-4\leq 0,\ \text{para}\ y\in[-2,2]}{=} \int_{-2}^{2} \left(-y^2 + 4\right)\, dy = \left[-\frac{y^3}{3} + 4y\right]_{y=-2}^{y=2} \\
&= \left[-\frac{2^3}{3} + 4.2\right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 4.(-2)\right] \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{32}{3}\ \text{u.a.}.
\end{aligned}$$

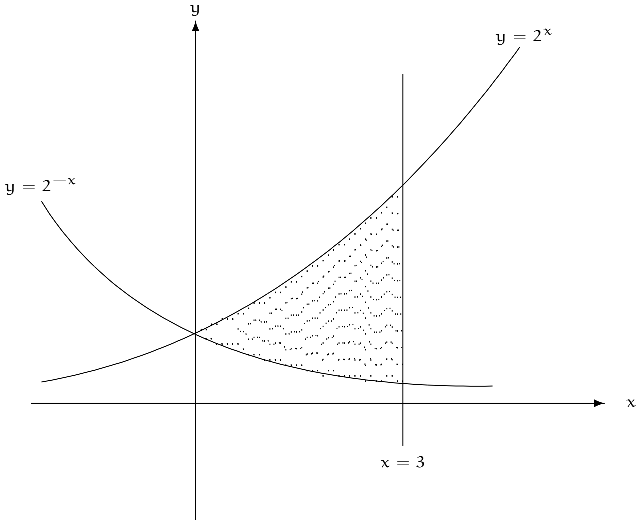
Para finalizar temos os seguintes exercícios resolvidos:

Exercício 13.2.2 *Encontre o valor da área, que indicaremos por* A*, da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas dos gráfico das funções* $\underline{f}$, $\underline{g}$ *e pela reta* $x = 3$*, onde as funções* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são dadas por*

$$f(x) \doteq 2^x \quad e \quad g(x) \doteq 2^{-x}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Resolução:

A representação geométrica região R, cujo valor de área, isto é, $\mathcal{A}$, queremos encontrar é dada pela figura abaixo.



A região que queremos encontrar o valor da área , isto é, $\mathcal{A}$, é da região limitada R, contida no plano xOy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ e $g : [0, 3] \to \mathbb{R}$ e pela reta $x = 3$.

As funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são contínuas e não negativas em $[0, 3]$ além disso o valor da área, isto é, $\mathcal{A}$, pode ser obtida como diferença entre os valores das áreas, que indicaremos por $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, onde $\mathcal{A}_1$ é o valor da área da região limitada R_1, contida no plano xOy, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, pela reta $x = 3$, pelo eixo Ox e $\mathcal{A}_2$ é o valor da área da região limitada R_2, contida no plano xOy, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função $\underline{g}$, pela reta $x = 3$, pelo eixo Ox, respectivamente, isto é,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 \,.$$

Mas

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^3 2^x \, dx \overset{\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln(2)} + C}{=} \left[\frac{2^x}{\ln(2)}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=3} = \frac{7}{\ln(2)}$$

$$\mathcal{A}_2 = \int_0^3 2^{-x} \, dx \overset{\int 2^{-x} \, dx = -\frac{2^{-x}}{\ln(2)} + C}{=} \left[-\frac{2^{-x}}{\ln(2)}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=3} = -\frac{7}{8\ln(2)} \,.$$

Portanto,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 = \frac{7}{\ln(2)} - \left[-\frac{7}{8\ln(2)}\right] = \frac{63}{8\ln(2)} \text{ u.a.}.$$

Observação 13.2.3 *Poderíamos calcular a área da região acima, diretamente, da seguinte forma:*

$$\mathcal{A} = \int_0^3 |f(x) - g(x)| \, dx \,,$$

onde as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são dadas por*

$$f(x) \doteq 2^x \quad e \quad g(x) \doteq 2^{-x} \,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \,.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

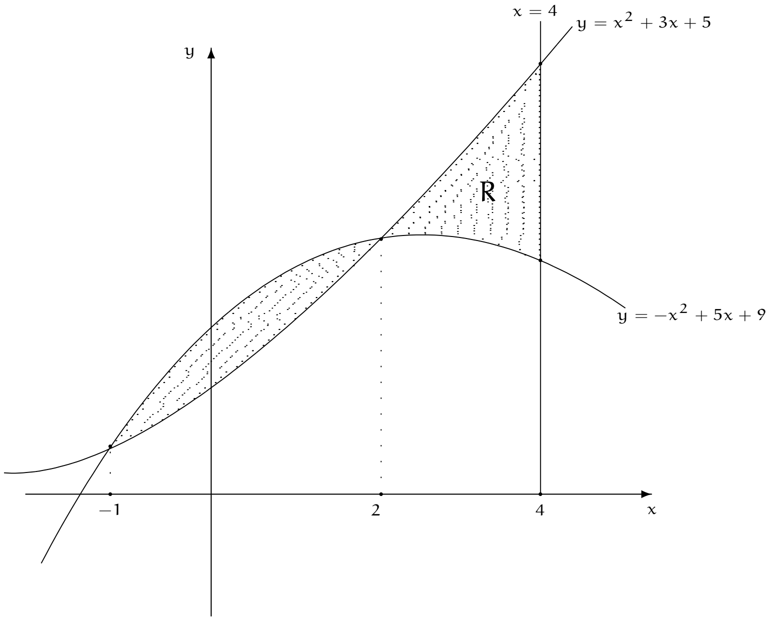
Temos também o:

Exercício 13.2.3 *Encontre o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A}$, da região limitada R, contida no plano xOy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$, pela reta $x = 4$, onde as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são dadas por*

$$f(x) \doteq x^2 + 3x + 5 \quad e \quad g(x) \doteq -x^2 + 5x + 9\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Resolução:

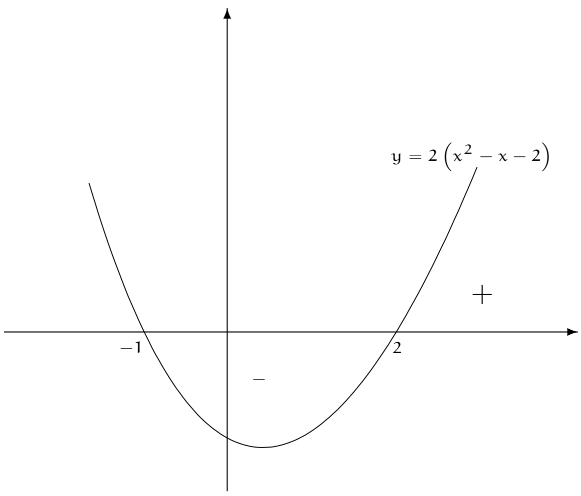
A representação geométrica região R, cujo valor da área, isto é, $\mathcal{A}$, queremos encontrar, é dada pela figura abaixo.



Observemos que

$$x^2 + 3x + 5 = y = -x^2 + 5x + 9 \quad \text{se, e somente se,} \quad 2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \text{ou seja,} \quad x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 2\,.$$

A figura abaixo ilustra a identidade acima.



Como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são contínuas em $\mathbb{R}$ teremos que

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{4} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-1}^{4} \left| \left(x^2 + 3x + 5\right) - \left(-x^2 + 5x + 9\right) \right|\, dx \\
&= \int_{-1}^{4} \left| 2x^2 - 2x - 4 \right|\, dx \\
&\overset{2x^2-2x-4 \geq 0,\ \text{para } x \in (2,\infty)\ \text{e}\ 2x^2-2x-4<0,\ \text{para } x\in(-1,2)}{=} \int_{-1}^{2} -\left(2x^2 - 2x - 4\right)\, dx + \int_{2}^{4} \left(2x^2 - 2x - 4\right)\, dx \\
&= -\left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x\right] \Big|_{x=-1}^{x=2} + \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x\right] \Big|_{x=2}^{x=4} \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{79}{3}\ \text{u.a.}.
\end{aligned}$$

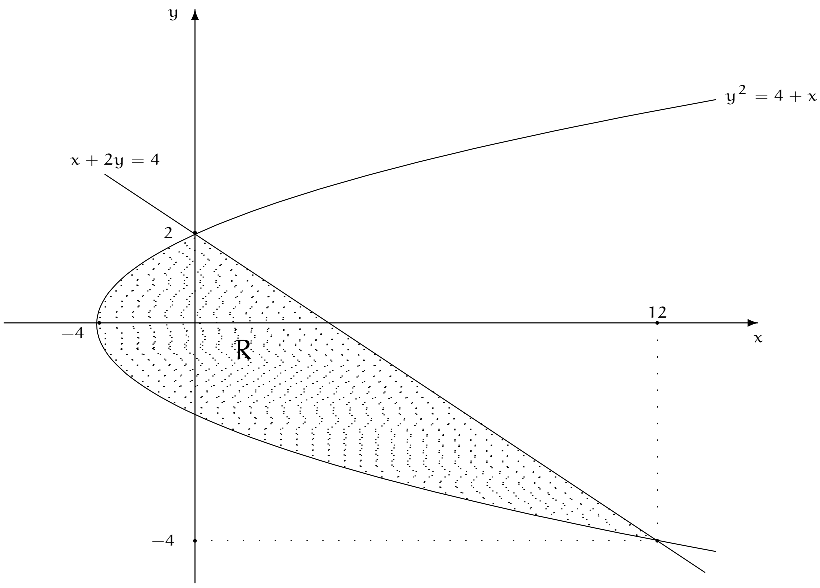
Para finalizar temos o:

Exercício 13.2.4 *Encontre o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A}$, da região limitada R, contida no plano xOy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos equações*

$$y^2 = x + 4 \quad e \quad x + 2y = 4\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Resolução:

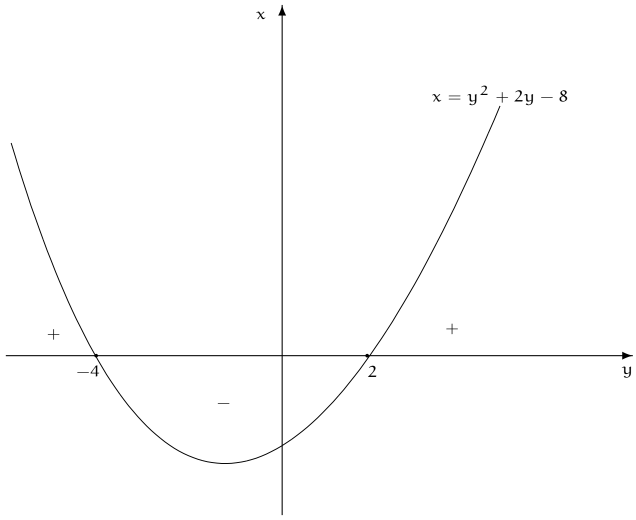
A representação geométrica região R, cujo valor da área, isto é, $\mathcal{A}$ queremos encontrar, é dada pela figura abaixo.



Observemos que

$$y^2 - 4 = x = 4 - 2y \quad \text{se, e somente se,} \quad y^2 + 2y - 8 = 0 \quad \text{ou seja,} \quad y = -4 \ \text{ ou } \ y = 2\,.$$

Geometricamente, teremos a seguinte configuração para a situação acima.



Logo, definindo-se as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por

$$f(y) \doteq y^2 - 4 \quad \text{e} \quad g(y) \doteq 4 - 2y\,, \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}\,,$$

como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são contínuas em $\mathbb{R}$, teremos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-4}^{2} |f(y) - g(y)|\, dx = \int_{-4}^{2} \left| \left(y^2 - 4\right) - (4 - 2y) \right| \, dx \\
&= \int_{-1}^{4} \left| y^2 + 2y - 8 \right| \, dx \\
&\overset{y^2+2y-8<0,\ \text{para}\ x\in(-4,2)}{=} \int_{-4}^{2} - \left(y^2 + 2y - 8\right) \, dy \\
&= - \left[\frac{1}{3} y^3 + y^2 - 8y \right] \Big|_{y=-4}^{y=2} \overset{\text{Exercício}}{=} 36\, u.a..
\end{aligned}$$

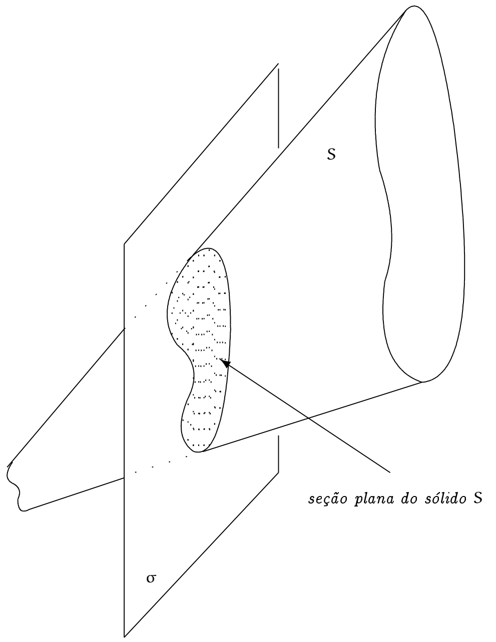
13.3 Volume de sólidos pelo método das fatias

Seja S um sólido limitada de $\mathbb{R}^3$.

Nosso objetivo é encontrar um modo de calcular o volume do sólido S.

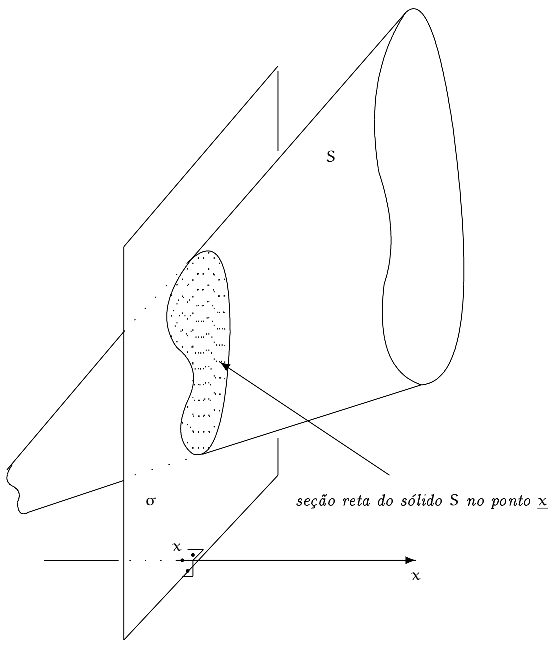
Para isto introduziremos a:

Definição 13.3.1 *Uma* <u>**seção plana**</u> *do sólido S é uma região plana obtida da intersecção do sólido S com um plano σ (veja a figura abaixo).*



Temos também a

Definição 13.3.2 *Dado um sólido* S *e uma reta* $\underline{r}$, *que identificaremos com eixo* Ox, *interceptando-se o sólido* S *com um plano perpendicular à reta* $\underline{r}$ *(ou seja, o eixo* Ox*) no ponto* $\underline{x}$, *obteremos uma seção plana do sólido* S *que chamaremos de* **seção reta do sólido** S **no ponto** $\underline{x}$ *(veja a figura abaixo).*



Com isto temos o:

Teorema 13.3.1 *(Volume de Sólidos pelo Método das Fatias) Suponhamos que o valor das áreas das seções retas do sólido* S *seja dada por uma função* $\mathcal{A} : [a, b] \to \mathbb{R}$ *que é contínua em* $[a, b]$.

Então valor do volume, que indicaremos por $\mathcal{V}$, do sólido S será dado por:

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\, dx \text{ u.v.},$$

onde u.v. *denota unidade de volume.*

Demonstração:

Consideremos

$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_o, \cdots, x_n = b\}$$

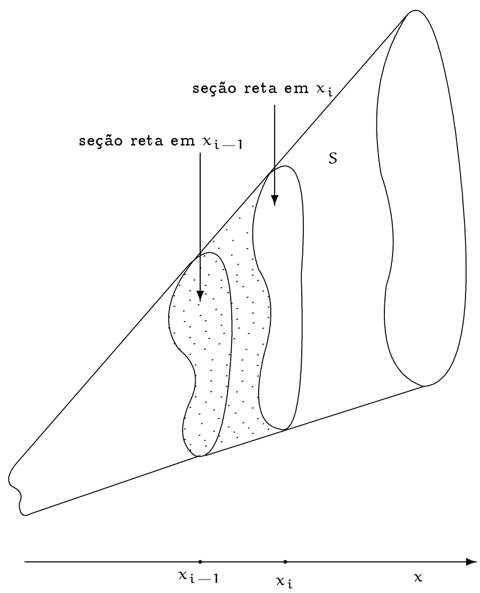
uma partição do intervalo $[a, b]$ e

$$\Delta x_i \doteq x_i - x_{i-1}, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Com isto podemos decompor o sólido S em n sólidos, que indicaremos por

$$S_i, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\},$$

onde, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, o sólido S_i denotará a porção do sólido S compreendida entre as seções retas do sólido S nos pontos x_{i-1} e x_i (veja a figura abaixo).



Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, denotemos por $\mathcal{V}_i$ o valor do volume da fatia S_i do sólido S.

Observemos que, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, se $\mathcal{A}_{i-1}$ e $\mathcal{A}_i$ denotarem, respectivamente, o menor e o maior valor das áreas das seções retas do sólido S entre os pontos x_{i-1} e x_i, então teremos

$$\mathcal{A}_{i-1}\ (x_i - x_{i-1}) \leq \mathcal{V}_i \leq A_i\ (x_i - x_{i-1}),$$

ou ainda,

$$\mathcal{A}_{i-1} \leq \frac{\mathcal{V}_i}{x_i - x_{i-1}} \leq \mathcal{A}_i\,.$$

Isto ocorre pois, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, o tronco de cilindro com base na seção reta correspondente ao valor da área $\mathcal{A}_{i-1}$ com altura $[x_{i-1}, x_i]$ estará contida no sólido S_i e o tronco de cilindro com base na seção reta correspondente de valor da área $\mathcal{A}_i$ com altura $[x_{i-1}, x_i]$ conterá o sólido S_i.

Mas

$$\mathcal{A}_{i-1} = \mathcal{A}(x_j) \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_i = \mathcal{A}(x_k)$$

para cada $j, k \in \{1, \cdots, n\}$.

Como a função $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$ segue, do Teorema do Valor Intermediário para funções contínuas, que existe $\xi_i \in [x_j, x_k]$ (ou $[x_k, x_j]$) de modo que

$$\mathcal{A}(\xi_i) = \frac{\mathcal{V}_i}{\Delta x_i} \quad \text{ou seja,} \quad \mathcal{V}_i = \mathcal{A}(\xi_i)\,\Delta x_i\,.$$

Mas

$$\mathcal{V} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}(\xi_i)\,\Delta x_i\,.$$

Logo, passando o limite, quando $\underline{n}$ tende a ∞, na identida acima e utilizando o fato que a função $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ é integrável em $[a, b]$ (pois ela é contínua em $[a, b]$) segue que

$$\mathcal{V} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}(\xi_i)\,\Delta x_i \overset{\text{Def. Integral de Riemann}}{=} \int_a^b \mathcal{A}(x)\,dx\,,$$

como queríamos mostrar.

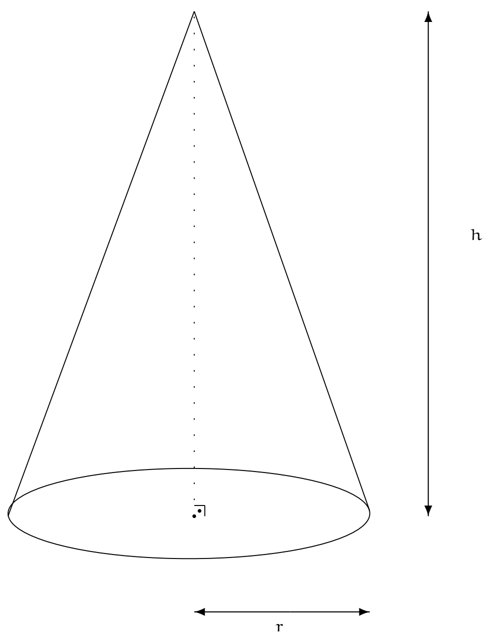
□

Com isto podemos resolver o:

Exemplo 13.3.1 *Encontre o valor do volume de um cone circular reto, cujo raio da base é* $r > 0$ *e cuja altura é* $h > 0$.

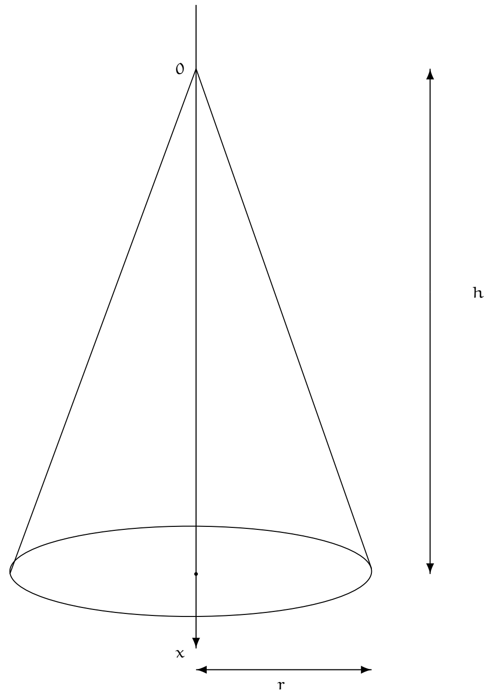
Resolução:

Geometricamente temos



Aplicaremos o Método das Fatias (isto é, o Teorema (13.3.1)) para encontrar o volume do cone circular reto acima.

Para isto consideremos a reta $\underline{r}$, isto é, o eixo Ox, como sendo o eixo do cilindro com origem no seu vértice e orientado para baixo (veja a figura abaixo).



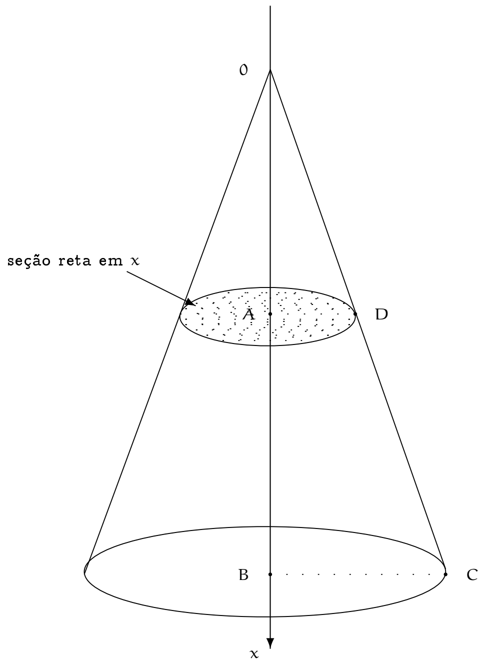
Observemos que para cada

$$x \in [0, h],$$

a seção reta do cilindro em $\underline{x}$ será um círculo, cujo centro está no eixo Ox, distando $\underline{x}$ unidades do vértice e cujo raio denotaremos por r' (veja a figura abaixo).

Logo, da figura abaixo, teremos que

$$\overline{OB} = h, \quad \overline{OA} = x, \quad \overline{BC} = r \quad \text{e} \quad \overline{AD} = r'. \tag{13.5}$$



Observemos que os triângulos ΔOBC e ΔOAD são semelhantes (caso AAA), assim

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \quad \overset{(13.5)}{\text{ou seja,}} \quad \frac{r'}{r} = \frac{x}{h}, \quad \text{ou ainda,} \quad r' = \frac{r}{h}x.$$

Logo, para cada $x \in [0, h]$, o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, da seção reta do cilindro em x será dada por

$$\mathcal{A}(x) = \pi\left(r'\right)^2 = \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 = \pi\frac{r^2}{h^2}x^2\,,$$

ou seja, o valor da área da seção reta do cone reto dado será uma função contínua de $\underline{x}$, para $x \in [0, h]$.

Logo, do Método das Fatias (isto é, o Teorema (13.3.1)), segue que:

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\,dx = \int_0^h \pi\frac{r^2}{h^2}x^2\,dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=h} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ u.v.}.$$

Observação 13.3.1 *A fórmula acima é conhecida dos cursos básicos de Geometria.*

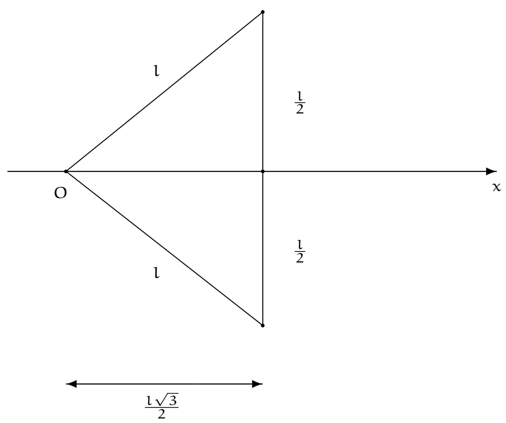
Podemos também aplicar o método das fatias para os seguintes exercícios resolvidos:

Exercício 13.3.1 *A partir de um triângulo equilátero de lados de comprimento $\underline{l}$, com um dos vértices na origem e sua altura sobre o eixo Ox, construa um sólido S, cuja seção reta de S em $\underline{x}$ é um quadrado.*

Calcule o valor do volume do sólido S.

Resolução:

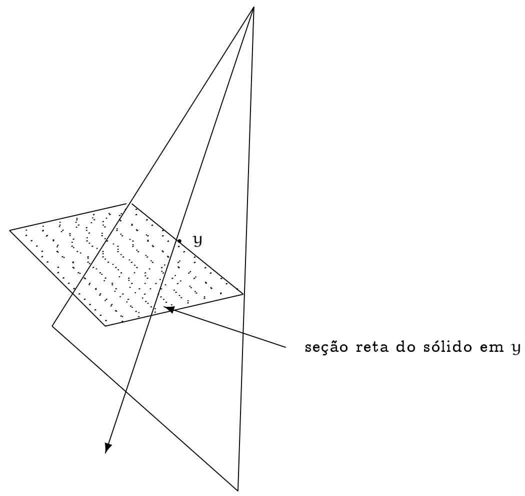
Geometricamente teremos a seguinte situação:

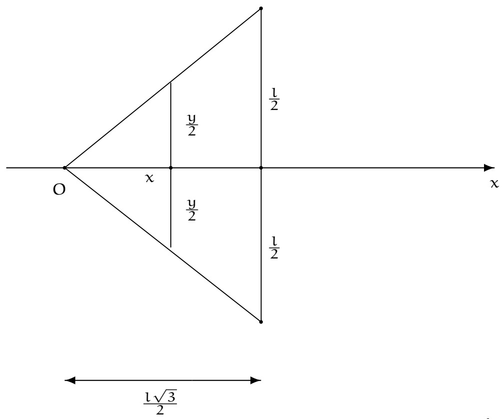


Observemos que, para cada $x \in \left[0, \frac{l\sqrt{3}}{2}\right]$, o valor da a área, que indicaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, da seção reta do sólido S em $\underline{x}$ será dada por:

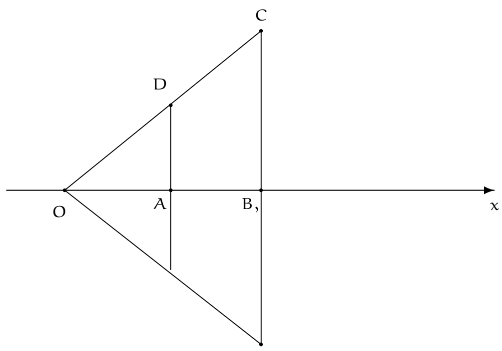
$$\mathcal{A}(x) = y^2,$$

onde $\underline{y}$ é o comprimento lado do quadrado da seção reta de S em $\underline{x}$ (vejam as figuras abaixo).





Observemos que os triângulos ΔOAD e ΔOBC são semelhantes (caso AAA- veja a figura abaixo), assim teremos



$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BC}}. \tag{13.6}$$

Mas

$$\overline{OB} = \frac{l\sqrt{3}}{2}, \quad \overline{OA} = x, \quad \overline{BC} = \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad \overline{AD} = \frac{y}{2}. \tag{13.7}$$

Logo, de (13.6) e (13.7), segue que

$$\frac{x}{\frac{y}{2}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} \quad \text{ou seja,} \quad y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x. \tag{13.8}$$

Logo, para cada $x \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\, l\right]$, o valor da área, isto é, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, da seção reta de S em $\underline{x}$, será dada por:

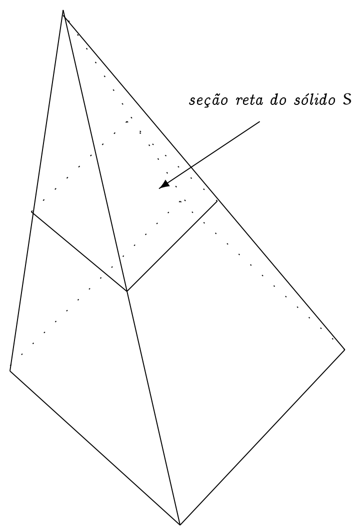
$$\mathcal{A}(x) = y^2 \overset{(13.7)}{=} \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} x\right]^2 = \frac{4}{3}\, x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\, l\right]\,,$$

ou seja, o valor da área da seção reta do sólido dado, será uma função contínua de $\underline{x}$, para $x \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\, l\right]$.

Logo, do Método das Fatias (isto é, o Teorema (13.3.1)), segue que:

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\, dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} l} \frac{4}{3} x^2\, dx = \frac{4}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\sqrt{3}}{2} l} \overset{\text{Exercíco}}{=} \frac{\sqrt{3}}{6}\, l^3 \text{ u.v.}.$$

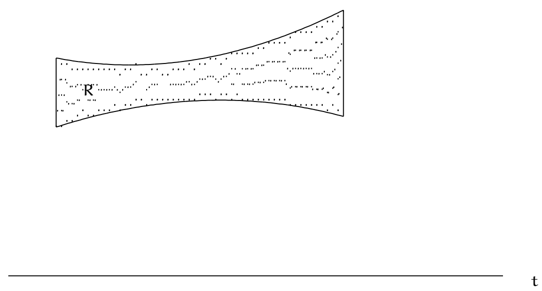
Observação 13.3.2 *O sólido em questão é uma pirâmide de base quadrada cja representação geométrica é dada pela figura abaixo.*



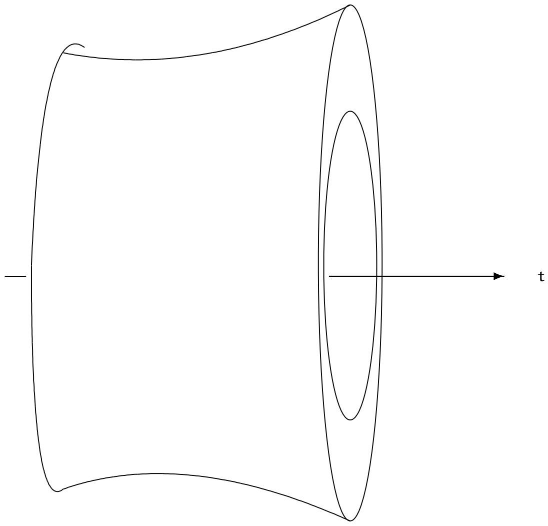
13.4 Volume de sólidos de revolução

Começaremos pela

Definição 13.4.1 *Seja σ um plano, $\underline{t}$ uma reta no plano σ e R uma região plana que está contida num dos semi-planos, do plano σ, determinados pela reta $\underline{t}$ (veja a figura abaixo).*



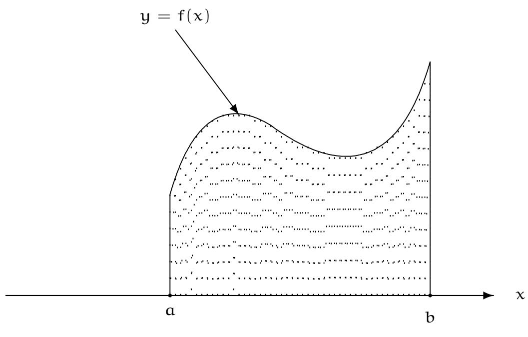
O sólido S obtido da rotação da região R, contida no plano σ, em torno da reta $\underline{t}$ será denominado <u>**sólido de revolução**</u> *e a reta $\underline{t}$ será dita* <u>**eixo de revolução**</u>.



Nosso objetivo é encontrar o volume de um sólido de revolução S como o definido acima.

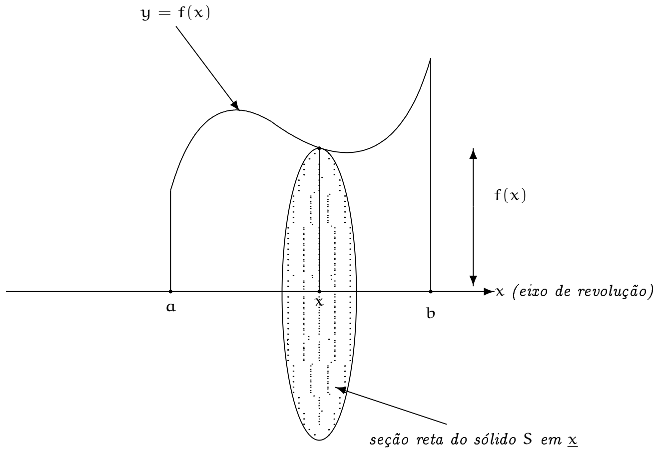
Observação 13.4.1 *Começaremos por uma situação mais simples, a saber:*

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e não negativa em* $[a, b]$ *e consideremos* R *a região limitada do plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = a$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox *(veja a figura abaixo).*



Denotemos por S *o sólido obtido da rotação da região* R *acima, em torno do eixo* Ox *(isto é, o eixo de revolução será o eixo* Ox*).*

Neste caso observamos que, para cada $x \in [a, b]$*, as seções retas do sólido* S *em* $\underline{x}$*, relativamente ao eixo de revolução* Ox*, será um círculo, cujo centro é o ponto* $(x, 0)$ *e o raio será* $f(x)$ *(veja a figura abaixo)*



Logo, para cada $x \in [a, b]$, *o valor da área, que indicaremos por* $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, *da mesma, será dada por*

$$\mathcal{A}(x) = \pi r^2 \stackrel{r=f(x)}{=} \pi[f(x)]^2 .$$

Como a função $\underline{f}$ *é contínua em* $[a, b]$, *segue que a função* $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ *também será contínua em* $[a, b]$.

Seja $\mathcal{V}$ *o valor do volume do sólido* S.

Logo, do Método das Fatias (isto é, do Teorema (13.3.1)), segue que

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx \text{ u.v.}.$$

Apliquemos isto ao seguinte exemplo:

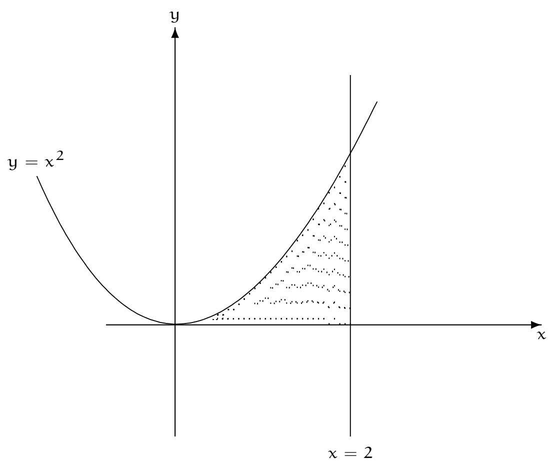
Exemplo 13.4.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq x^2, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcule valor do volume $\mathcal{V}$ *do sólido de revolução* S *obtido da rotação da região limitada* R, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *pela reta* $x = 2$ *e pelo eixo* Ox, *em torno do eixo* Ox.

Resolução:

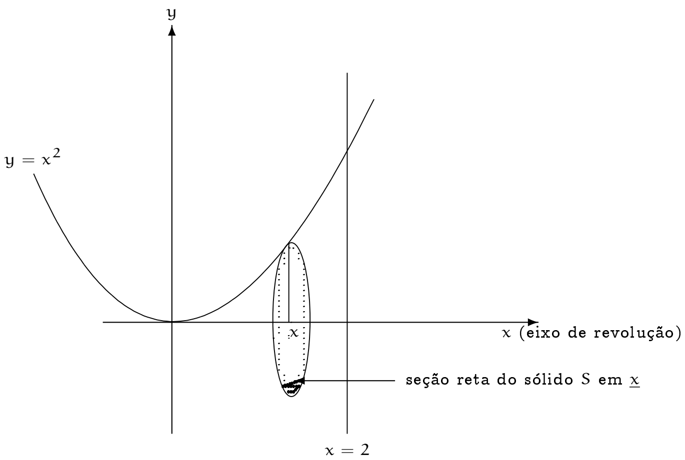
A representação geométrica da região R, que será rotacionada em torno do eixo Ox, é dada pela figura abaixo.



Observemos que, para cada $x \in [0, 2]$, o valor da área, isto é, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, da seção reta do sólido S em $\underline{x}$ será o valor da área de um círculo de raio $f(x) = x^2$ (a função é não negativa).

Assim, para cada $x \in [0, 2]$, teremos que

$$\mathcal{A}(x) = \pi\, r^2 \overset{r=f(x)}{=} \pi\, [f(x)]^2 = \pi \left[x^2\right]^2 = \pi\, x^4 \,.$$

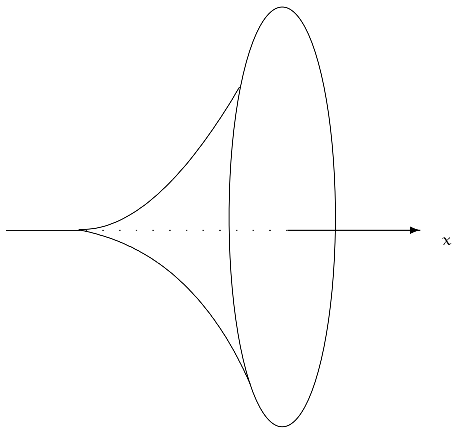


Observemos que a função $\mathcal{A} : [0, 2] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[0, 2]$.

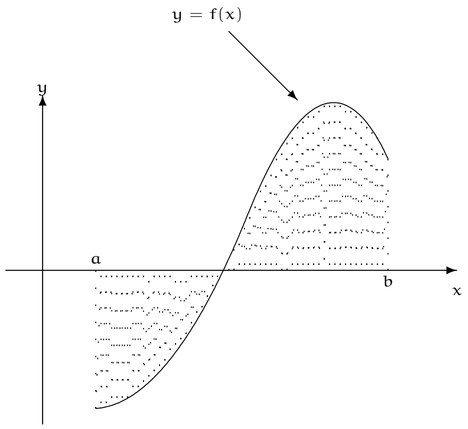
Logo, pelo Método da Fatias (isto é, Teorema (13.3.1)), segue que

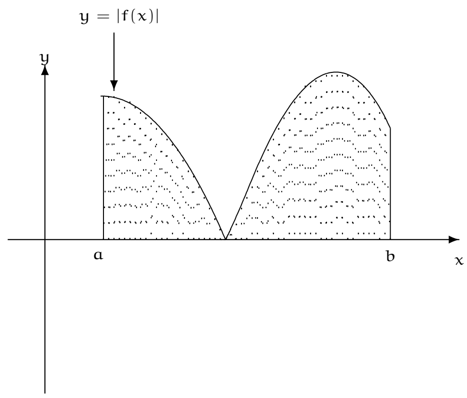
$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\, dx = \int_0^2 \pi x^4\, dx = \pi \left[\frac{1}{5} x^5\right] \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{32}{5} \pi \text{ u.v.}.$$

Um esboço da representação geométrica do sólido é dado pela figura abaixo.



Observação 13.4.2 *Se a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ podendo, eventulamente, assumir valores negativos, basta observar que o sólido de revolução obtido da rotação da região limitada R, contida no plano xOy, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelo eixo Ox, em torno do eixo Ox, é o mesmo que o sólido de revolução obtido da rotação da região limitada R', contida no plano xOy, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função $|f|$, pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelo eixo Ox, em torno do eixo Ox (veja a figura abaixo).*





Com isto, observamos que, para cada $x \in [a,b]$, *o valor da área, que indicaremos por* $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, *da seção reta do sólido* S *em* $\underline{x}$, *será a área de um círculo de centro sobre o eixo* Ox *e cujo raio é* $|f(x)|$.

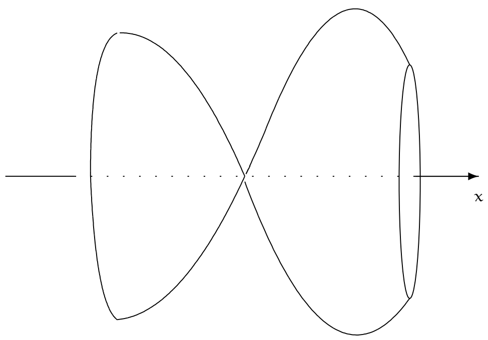
Assim, para cada $x \in [a,b]$, *teremos*

$$\mathcal{A}(x) = \pi r^2 \overset{r=|f(x)|}{=} \pi\,[|f(x)|]^2 \;,$$

que é uma função contínua em $[a,b]$.

Logo, o valor do volume, isto é, $\mathcal{V}$, *do sólido de revolução* S *obtido da rotação da região acima em torno do eixo* Ox *será dado, pelo Método das Fatias (isto é, Teorema (13.3.1)), por:*

$$\mathcal{V} = \int_a^b \pi\,[|f(x)|]^2\,dx = \int_a^b \pi\,[f(x)]^2\,dx \text{ u.v.}.$$



<u>**Conclusão:**</u> *podemos utilizar a mesma expressão para calcular o valor do volume de um sólido de revolução dos tipos que foram considerados acima, independente da função* $\underline{f}$ *assumir ou não valores negativos, ou seja, para um sólido de revolução obtido da rotação da região limitada* R, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *pelas retas* $x = a$, $x = b$ *e pelo eixo* Ox, *em torno do eixo* Ox.

Temos o seguinte exercício resolvido:

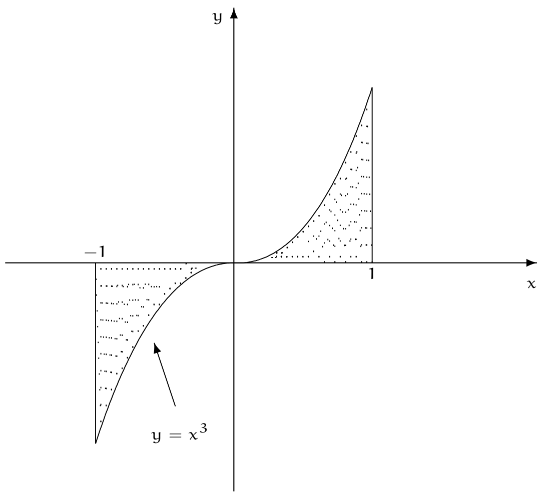
Exercício 13.4.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq x^3, , \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

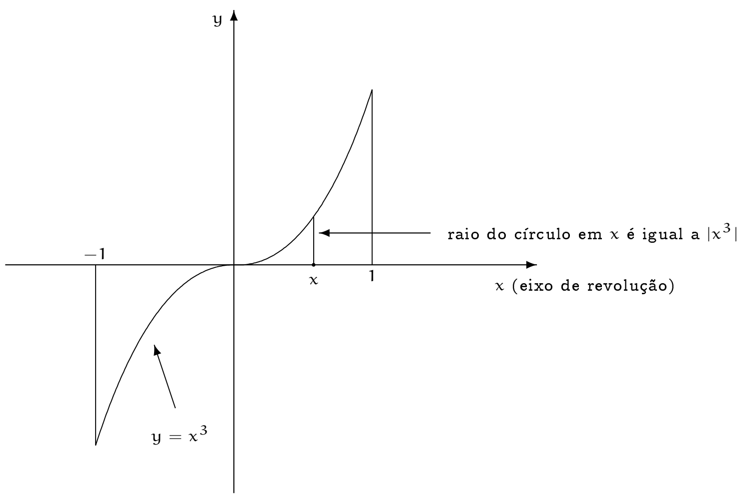
Encontre o valor do volume, que indicaremos por $\mathcal{V}$, *do sólido de revolução* S *obtido da rotação da região limitada* R, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *pelas retas* $x = 1$, $x = -1$, *em torno do eixo* Ox.

Resolução:

A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica da região R.

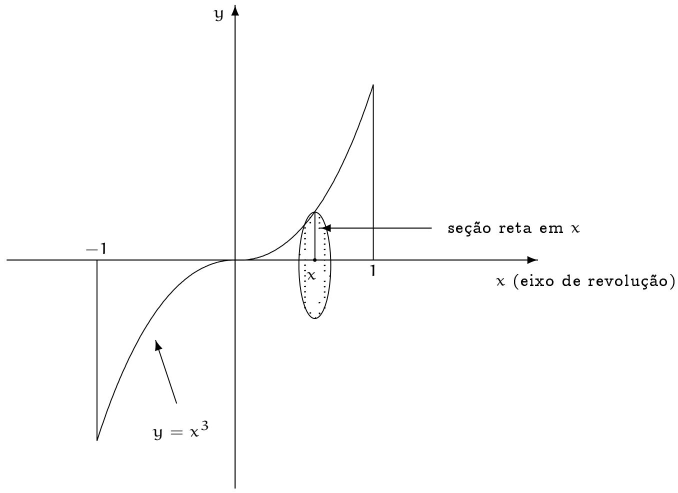


Observemos que, para cada $x \in [-1, 1]$, a seção reta do sólido S em $\underline{x}$ é um círculo de centro sobre o eixo Ox, cujo raio é $|x^3|$ (veja as figuras abaixo).



Logo, para cada $x \in [-1, 1]$, o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, da seção reta do sólido em $\underline{x}$ será dada por:

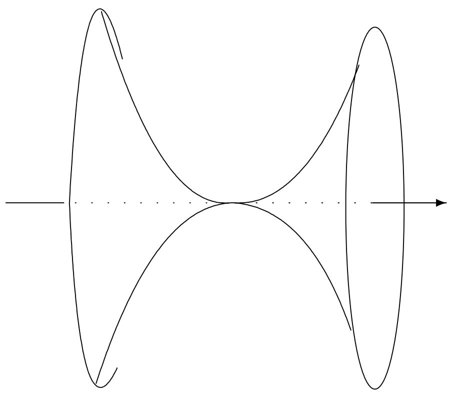
$$\mathcal{A}(x) = \pi r^2 \overset{r=|x^3|}{=} \pi \left(|x^3|\right)^2 .$$



Observemos que a função $\mathcal{A} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[-1, 1]$.
Logo, do Método das Fatias (isto é, Teorema (13.3.1)), segue que

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \pi \left(|x^3|\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} x^6\, dx = \pi \left[\frac{1}{7} x^7\right] \Big|_{x=-1}^{x=1} \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{2}{7}\pi \text{ u.v..}$$

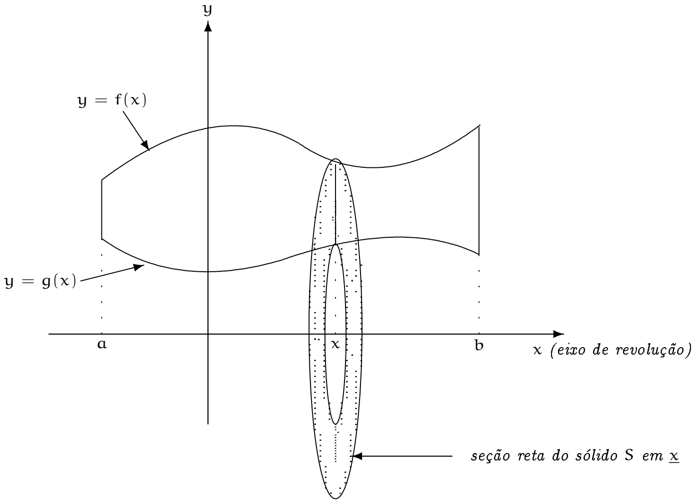
A representação geométrica do sólido S é dada pela figura abaixo.



Observação 13.4.3 *Sejam* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas em* $[a, b]$ *tais que*

$$0 \leq g(x) \leq f(x),, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b]\,.$$

Se considerarmos o sólido S *obtido da rotação da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções* $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$*, pelas retas* $x = a$*,* $x = b$ *e pelo eixo* Ox*, em torno do eixo* Ox*, temos que, para cada* $x \in [a, b]$*, a seção reta do sólido* S *em* $\underline{x}$*, será um anel circular, com centro sobre o eixo* Ox*, cujo raio maior é* $f(x)$ *e o raio menor é* $g(x)$ *(veja a figura abaixo).*



Assim, para cada $x \in [a, b]$, *o valor da área, que indicaremos por* $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, *da seção reta do sólido* S *em* $\underline{x}$ *será dada por:*

$$\mathcal{A}(x) = \pi \left\{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right\} ,$$

que é uma função contínua em $[a, b]$.

e Logo, do Método das Fatias (isto é, Teorema (13.3.1)), segue que o valor do volume, que indicaremos por $\mathcal{V}$, *do sólido* S *será dado por:*

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\, dx = \int_a^b \pi \left\{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right\} dx \text{ u.v.}.$$

Temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 13.4.2 *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *as funções dada por*

$$f(x) \doteq x^2 + 2, \quad g(x) \doteq x + 8, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

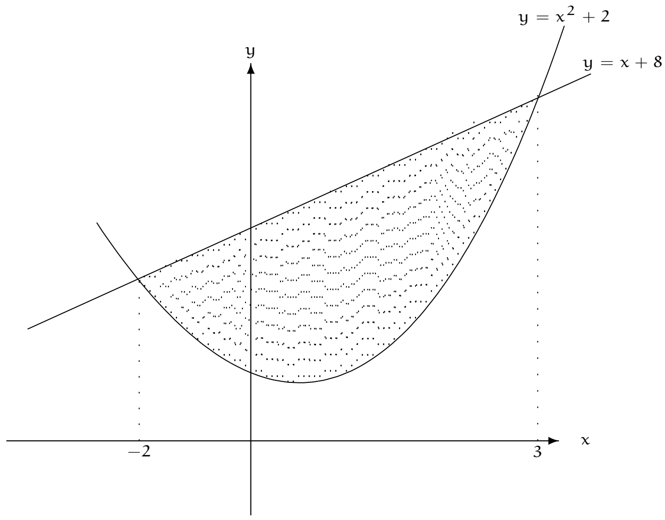
Encontre o valor do volume, que indicaremos por $\mathcal{V}$, *do sólido de revolução* S *obtido da rotação da região limitada* R, *contida no plano* xOy, *delimitada pelas representações geométricas gráficos das funções* $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$, *quando rotacionada em torno do eixo* Ox.

Resolução:

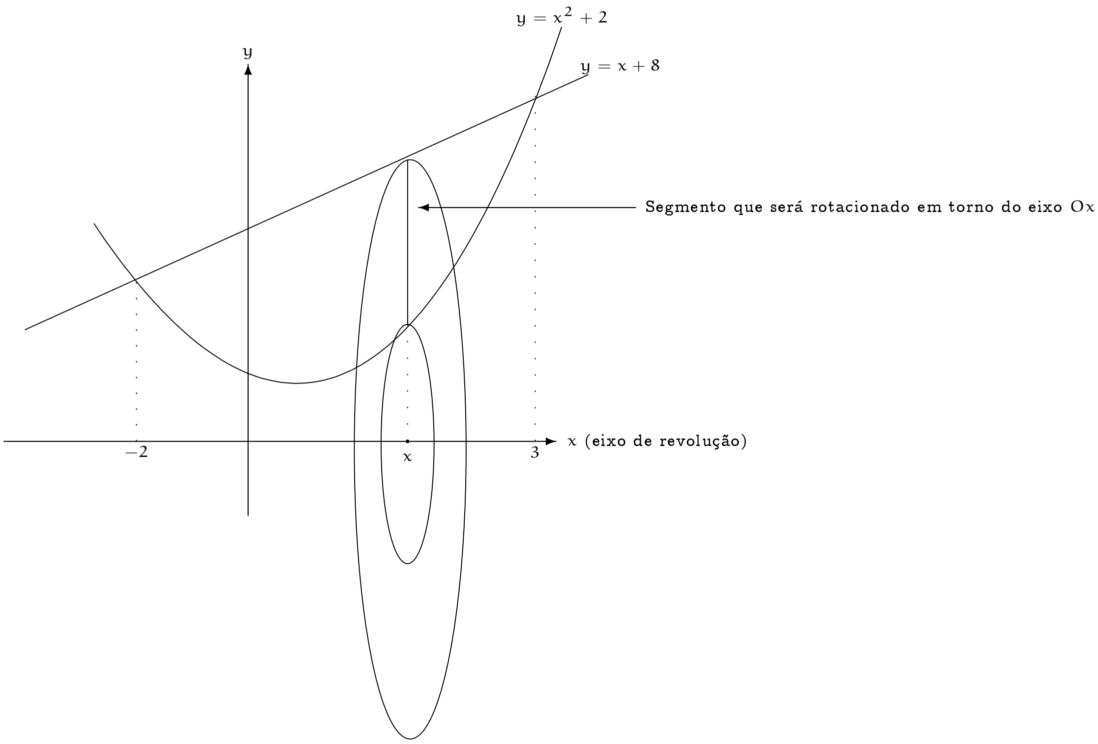
Observemos que

$$f(x) = g(x) \quad \text{se, e somente se,} \quad x^2 + 2 = x + 8 \quad \overset{\text{Exercício}}{\text{ou seja,}} \quad x = 3 \quad \text{e} \quad x = -2.$$

A representação geométrica da região R é dada pela figura abaixo.



Observemos que, para cada $x \in [-2, 3]$, a seção reta do sólido S em $\underline{x}$ será um anel circular, cujo centro está sobre o eixo)x, cujo raio do cículor maior é $f(x)$ e o raio do círculo menor será $g(x)$ (veja a figura abaixo).



Logo, para cada $x \in [-2, 3]$, o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, da seção reta do sólido S em $\underline{x}$, será dada por:

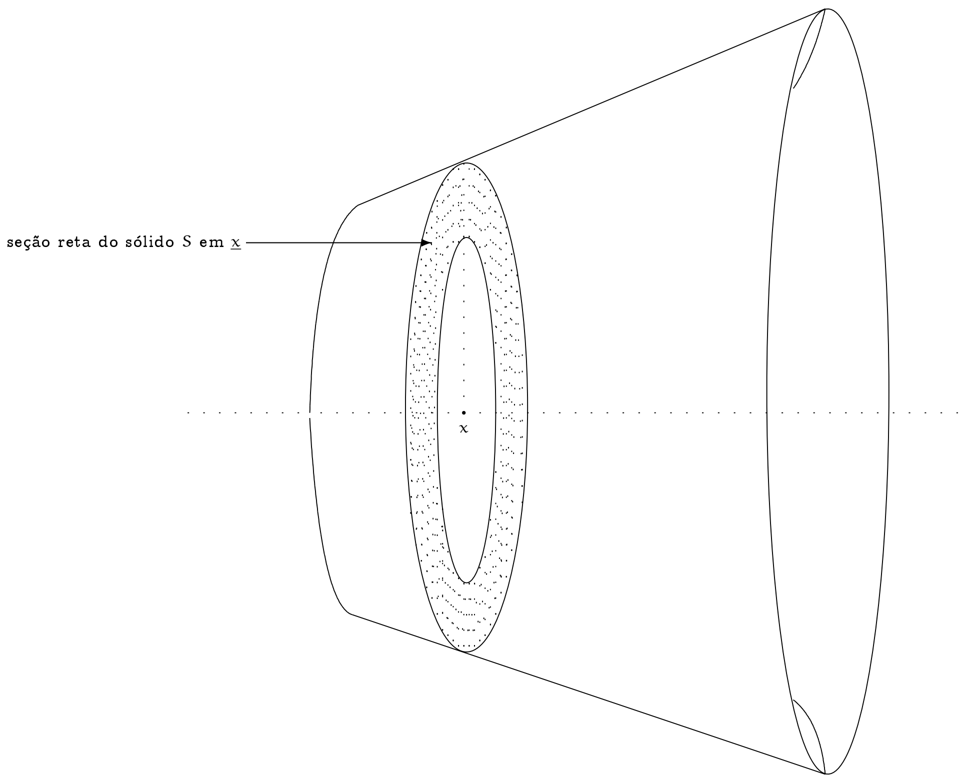
$$\mathcal{A}(x) = \pi\,[f(x)]^2 - \pi\,[g(x)]^2 = \pi\,(x+8)^2 - \pi\left(x^2+2\right)^2 ,$$

que é uma função contínua em $[-2, 3]$.

Logo, do Método das Fatias (isto é, Teorema (13.3.1)), segue que

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\,dx = \int_{-2}^{3}\left[\pi(x+8)^2 - \pi\left(x^2+2\right)^2\right]\,dx \overset{\text{Exercício}}{=} 250\pi\ u.v..$$

A representação geométrica do sólido S é dada pela figura abaixo.



Uma situação mais geral é dada pelo:

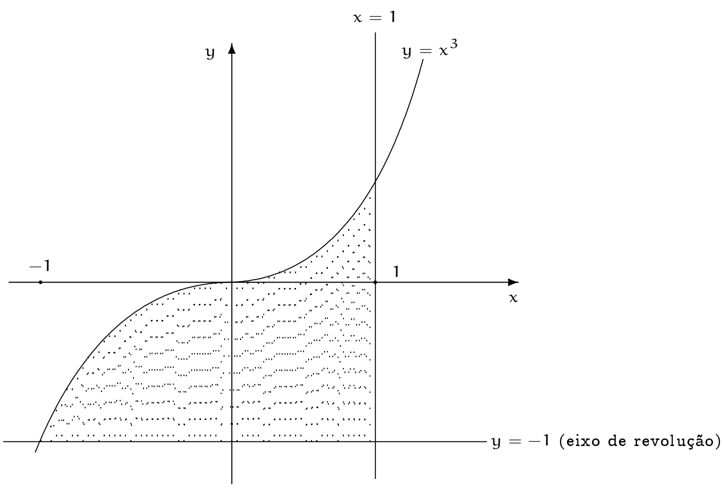
Exemplo 13.4.2 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq x^3, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

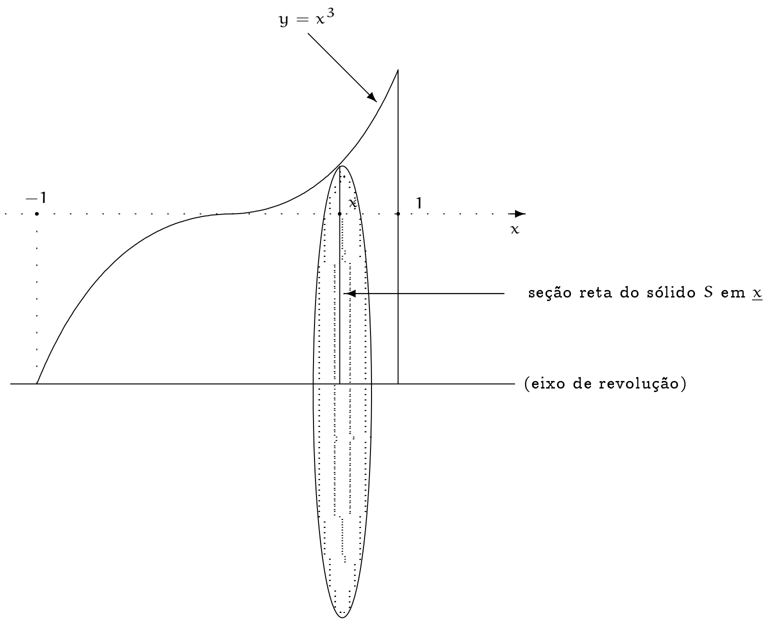
Encontre o valor do volume, que indicaremos por $\mathcal{V}$*, do sólido de revolução* S *obtido da rotação da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pelas retas* $x = 1$*,* $y = -1$*, em torno da reta* $y = -1$*.*

Resolução:

A representação geométrica da região R é dada pela figura abaixo.



Observemos que, para cada $x \in [-1, 1]$, a seção reta do sólido S em $\underline{x}$ será um círculo (cujo centro está sobre a reta $y = -1$), cujo raio será dado por $\left(1 + x^3\right)$ (veja a figura abaixo).



Logo, para cada $x \in [-1, 1]$, o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, da seção reta do sólido S em $\underline{x}$ será dada por:

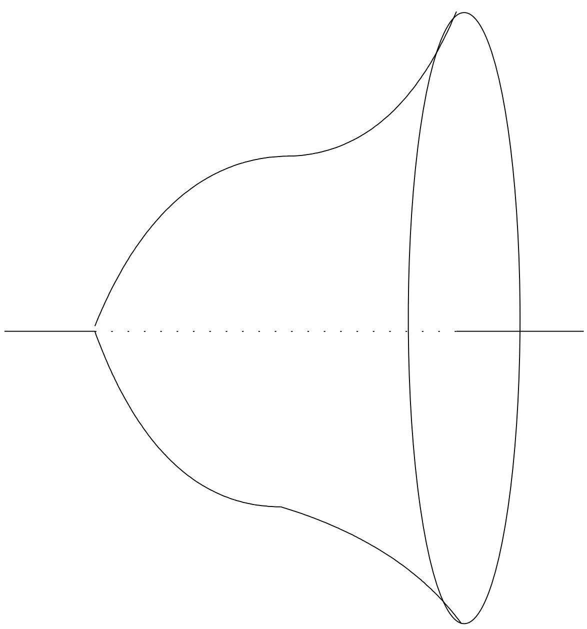
$$\mathcal{A}(x) = \pi\, r^2 \stackrel{r=1+x^3}{=} \pi \left[1 + x^3\right]^2 ,$$

que é uma função contínua em $[-1, 1]$.

Logo, do Método das Fatias (isto é, Teorema (13.3.1)), segue que

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \pi \left[1 + x^3\right]^2 dx \stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{16}{7}\pi \text{ u.v.}.$$

A representação geométrica do sólido S é dada pela figura abaixo.



A seguir temos os seguintes exercícios resolvidos:

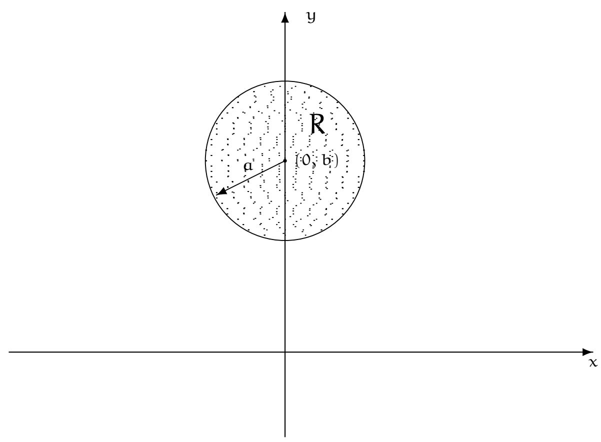
Exercício 13.4.3 *Sejam* $0 < a < b$ *fixados. Encontre o valor do volume, que indicaremos por* $\mathcal{V}$*, do sólido de revolução* S *obtido da rotação da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, em torno do eixo* Ox*, onde*

$$R \doteq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + (y - b)^2 \leq a^2\right\} .$$

A superfície deste sólido é denominada de ***toro****.*

Resolução:

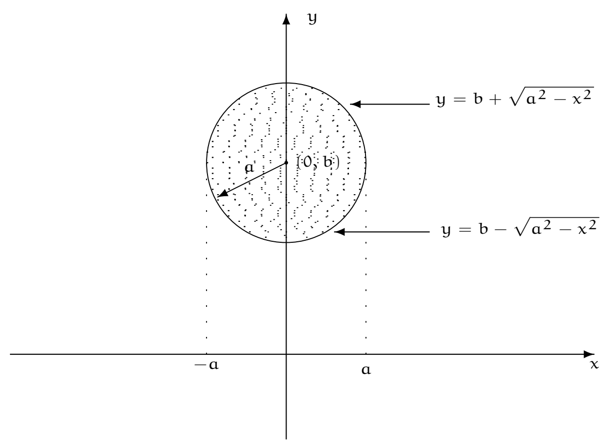
A região R do plano xOy é o círculo, de centro em $(0, b)$ e de raio $\underline{a}$, cuja representação geométrica é dada figura abaixo.



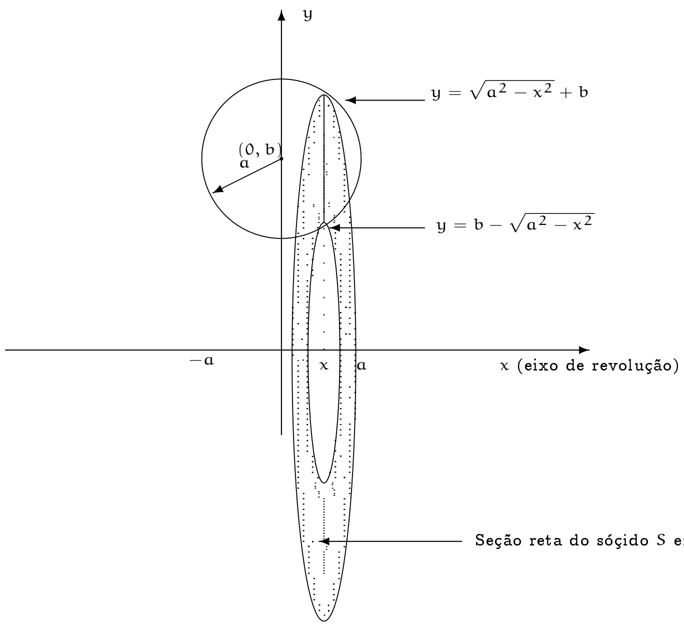
Observemos que a região R é a região limitada, contida no plano xOy, delimitada pelas representação geométricas dos gráficos das funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$, onde $f, g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ são as funções dadas por

$$f(x) \doteq b + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad g(x) \doteq b - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{para cada} \quad x \in [-a, a] ,$$

cujas representações geométricas são dadas pela figura abaixo.



Observemos que, para cada $x \in [-a, a]$, a seção reta do sólido S em $\underline{x}$ será um anel circular, cujo centro localiza-se no ponto $(x, 0)$, cujo raio maior será $f(x)$ e o raio menor será $g(x)$ (veja a figura abaixo).



Logo, para cada $x \in [-a, a]$, o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, da seção reta do sólido S em $\underline{x}$ será dada por

$$\mathcal{A}(x) = \pi\,[f(x)]^2 - \pi\,[g(x)]^2 = \pi\left[b + \sqrt{a^2 - x^2}\right]^2 - \pi\left[b - \sqrt{a^2 - x^2}\right]^2,$$

que é uma função contínua em $[-a, a]$.

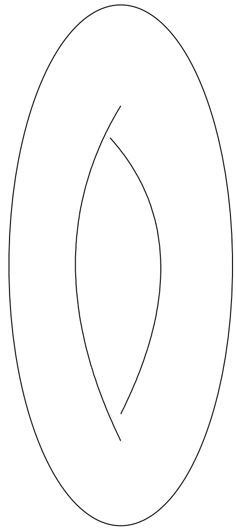
Logo, pelo Método das Fatias (isto é, Teorema (13.3.1)), temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \int_{-a}^{a} \mathcal{A}(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \left\{\pi\left[b + \sqrt{a^2 - x^2}\right]^2 - \pi\left[b - \sqrt{a^2 - x^2}\right]^2\right\} dx \\
&= \pi\int_{-a}^{a} \left\{\left[b^2 + 2\sqrt{a^2 - x^2}b + \left(a^2 - x^2\right)\right] - \left[b^2 - 2\sqrt{a^2 - x^2}b + \left(a^2 - x^2\right)\right]\right\} dx \\
&= \pi\int_{-a}^{a} \left\{a^2 - x^2 + 2\sqrt{a^2 - x^2}b + b^2 - b^2 + 2\sqrt{a^2 - x^2}b - a^2 + x^2\right\} dx = \pi\int_{-a}^{a} 4\sqrt{a^2 - x^2}b\,dx \\
&= 4\pi b\int_{-a}^{a} 4\sqrt{a^2 - x^2}\,dx \overset{\text{Exercício (11.6.4)}}{=} 4\pi b\left[\frac{a^2}{2}\,\text{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right]\Bigg|_{x=-a}^{x=a} \\
&= 4\pi b\left\{\left[\frac{a^2}{2}\,\text{arcsen}\left(\frac{a}{a}\right) + \frac{a}{2}\sqrt{a^2 - a^2}\right] - \left[\frac{a^2}{2}\,\text{arcsen}\left(\frac{(-a)}{a}\right) + \frac{(-a)}{2}\sqrt{a^2 - (-a)^2}\right]\right\} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} 4\pi b\frac{a^2}{2}\pi\,.
\end{aligned}$$

Logo o valor do volume do sólido S será

$$\mathcal{V} = 2\pi^2 a^2 b \text{ u.v.}.$$

A representação geométrica do sólido S é dada pela figura abaixo.



Um outro exercício resolvido é:

Exercício 13.4.4 *Sejam* $r, h > 0$ *fixados.*

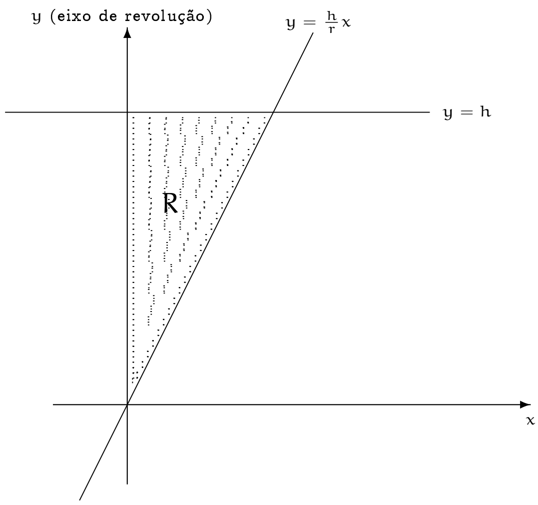
Calcular o valor volume, que indicaremos por V*, do sólido de revolução* S *obtido da rotação da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pelas retas*

$$y = \frac{h}{r}x\,, \quad y = h$$

e pelo eixo Oy*, em torno do eixo* Oy*.*

Resolução:

A representação geométrica da região R é dada pela figura abaixo.



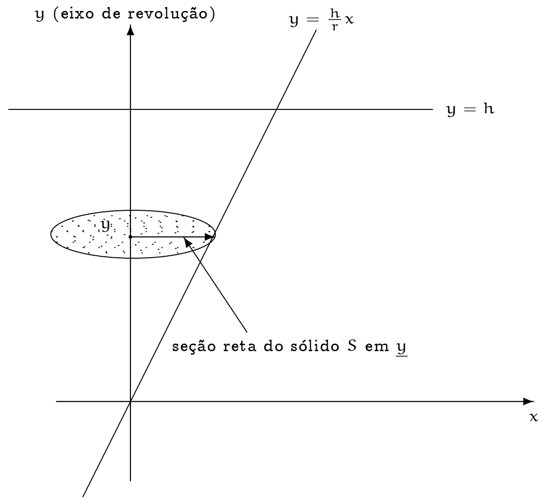
Consideremos $f : [0, y] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(y) \doteq \frac{r}{h}y\,, \quad \text{para cada} \quad h \in [0, h]\,.$$

Observemos que, para cada $y \in [0, h]$, a seção reta do sólido S em $\underline{y}$ será um círculo, de centro em $(0, y)$ e raio $f(y)$.

Assim, para cada $y \in [0, h]$, o valor da área, que indicaremos por $A = A(y)$, da seção reta do sólido S em $\underline{y}$ será dada por:

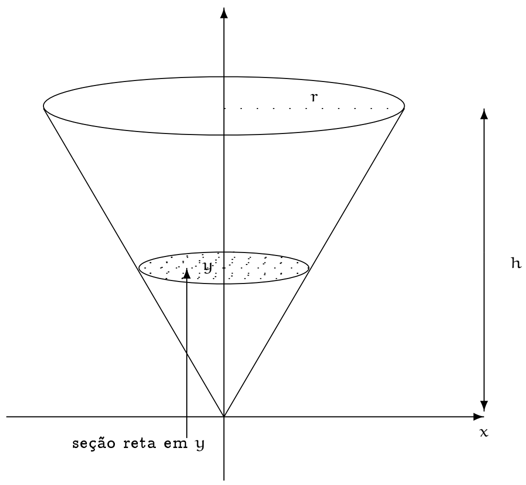
$$\mathcal{A}(y) = \pi r^2 \stackrel{r=f(y)}{=} \pi [f(y)]^2 = \pi \left(\frac{r}{h} y\right)^2 = \pi \frac{r^2}{h^2} y^2 ,$$



Observemos que a função $\mathcal{A} : [0, h] \to \mathbb{R}$ será uma função contínua em $[0, h]$.
Logo, pelo Método das Fatias (isto é, Teorema (13.3.1)), teremos

$$\mathcal{V} = \int_0^h \mathcal{A}(y)\, dy = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} y^2\, dy = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h y^2\, dy \stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ u.v.}.$$

A representação geométrica do sólido S é dada pela figura abaixo.



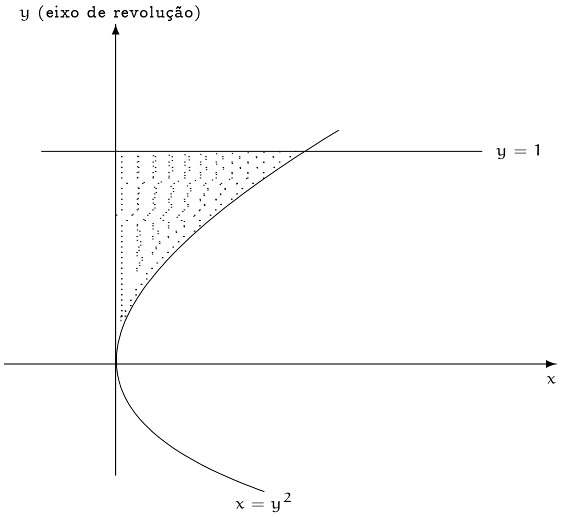
Observação 13.4.4 *O sólido acima é um cone circular reto, de altura $\underline{h}$ e cujo raio do círculo da base é $\underline{r}$ e seu volume é conhecido dos cursos básicos de Geometria.*

Temos também o:

Exercício 13.4.5 *Encontre o valor do volume, que indicaremos por $\mathcal{V}$, do sólido de revolução S obtido da rotação, em torno do eixo Oy, da região limitada R, contida no plano xOy, delimitada pelas representações geométricas da curva $y^2 = x$ e pela reta $y = 1$ e pelo eixo Oy.*

Resolução:

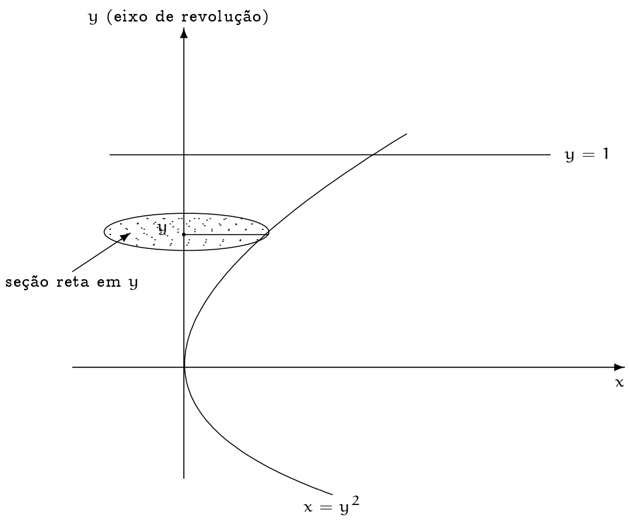
A região R que será rotacionada em torno do eixo Oy, tem representação geométrica dada pela figura abaixo.



Consideremos $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(y) \doteq y^2 , \quad \text{para cada} \quad y \in [0,1] .$$

Observemos que, para cada $y \in [0,1]$, a seção reta do sólido S em $\underline{y}$ será um círculo, de centro em $(0, y)$ e raio $f(y)$ (veja a figura abaixo).



Assim, para cada $y \in [0,1]$, o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(y)$, da seção reta do sólido S em $\underline{y}$ será um círculo que tem raio igual a $f(y)$, isto é, será dada por:

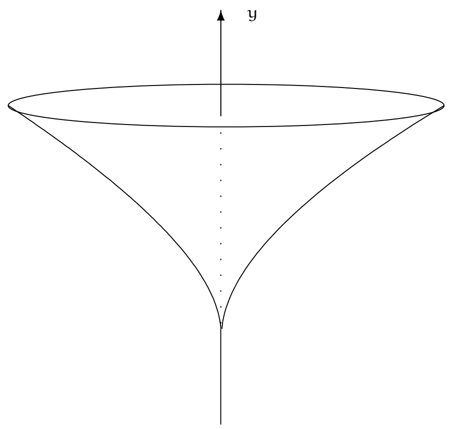
$$\mathcal{A}(y) = \pi r^2 \overset{r=f(y)}{=} \pi f^2(y) = y^4 .$$

Observemos que a função $\mathcal{A} : [0,1] \to \mathbb{R}$ será uma função contínua em $[0,1]$.

Logo, pelo Método das Fatias (isto é, Teorema (13.3.1)), teremos

$$\mathcal{V} = \int_0^1 \mathcal{A}(y)\, dy = \int_0^1 \pi y^4\, dy \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{5}\pi \ u.v.\, .$$

A representação geométrica do sólido S é dada pela figura abaixo.



Para finalizar temos o:

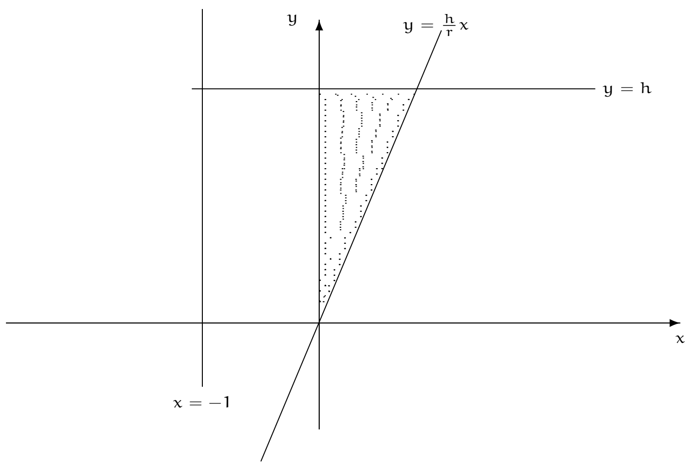
Exercício 13.4.6 *Encontre o valor do volume, que indicaremos por $\mathcal{V}$, do sólido de revolução obtido da rotação em torno da reta $x = -1$ da região limitada, contida no plano xOy, delimitada pelas retas*

$$y = \frac{h}{r}x\,, \quad y = h$$

e pelo eixo Oy.

Resolução:

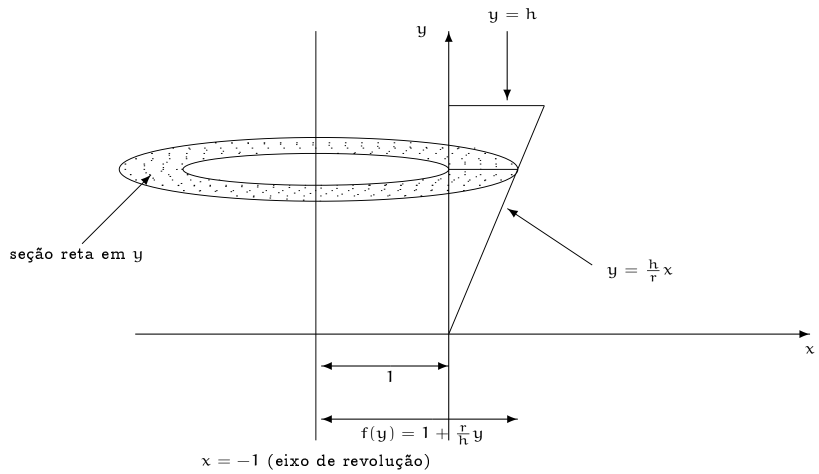
A representação geométrica da região R, que será rotacionada em torno da reta $x = -1$, é dada pela figura abaixo.



Consideremos $f : [0, h] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(y) \doteq 1 + \frac{r}{h}y\,, \quad \text{para cada} \quad y \in [0, h]\,.$$

Observemos que, para cada $y \in [0, h]$, a seção reta do sólido S em $\underline{y}$ será um anel circular, de centro em $(0, y)$ e raio maior $f(y)$ e raio menor igual a 1 (veja a figura abaixo).



Assim, para cada $y \in [0,h]$, o valor da área, que indicaremos $A = A(y)$, da seção reta do sólido S em $\underline{y}$ (é um anel circular) será dada por:

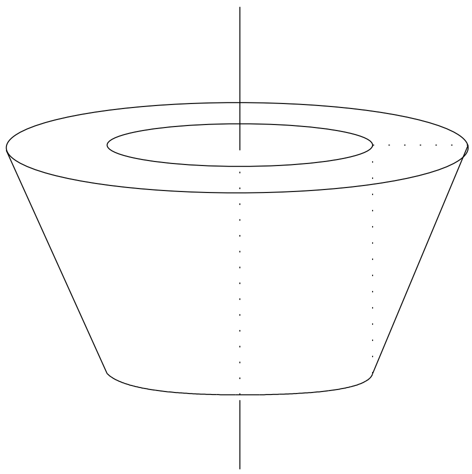
$$\mathcal{A}(y) \doteq \pi\, f^2(y) - \pi\, 1^2 = \pi\left[\left(1 + \frac{r}{h}y\right)^2 - 1\right].$$

Observemos que a função $\mathcal{A} : [0,h] \to \mathbb{R}$ será uma função contínua em $[0,h]$.

Logo, pelo Método das Fatias (isto é, Teorema (13.3.1)), teremos

$$\mathcal{V} = \int_0^h \mathcal{A}(y)\, dy = \int_0^1 \pi\left[\left(1 + \frac{r}{h}y\right)^2 - 1\right]\, dy \overset{\text{Exercício}}{=} \pi\left(rh + \frac{r^2 h}{3}\right) \text{ u.v.}.$$

A representação geométrica do sólido S é dada pela figura abaixo.



13.5 Método dos cilindros (ou cascas cilíndricas) para sólidos de revolução

Para sólidos de revolução podemos encontrar seu volume por meio de um outro processo, denominado método dos cilindros (ou casas cilíndricas).

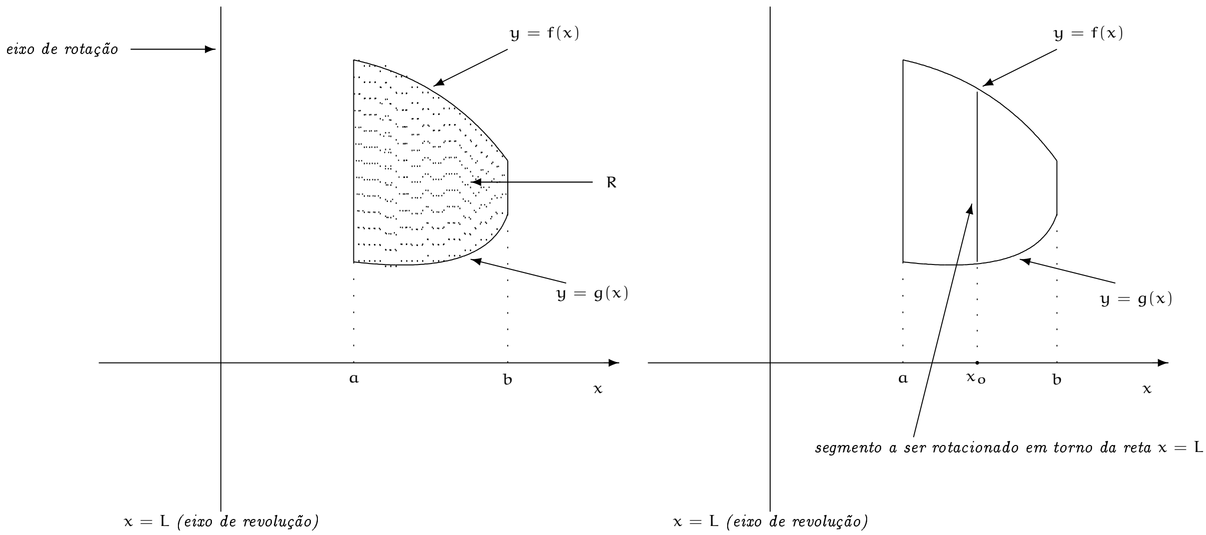
Para isto temos a:

Definição 13.5.1 *Sejam* $L \leq a$ *e* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções tais que*

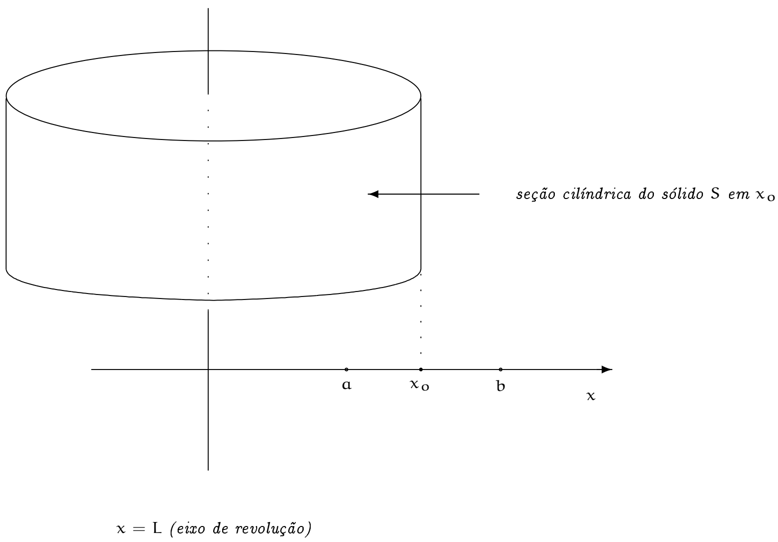
$$g(x) \leq f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b]\,.$$

Consideremos o sólido de revolução S *obtido da rotação da região limitada* R, *contida no plano* xOy, *delimitda pelas representações geométricas dos gráficos das funções* $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$, *pelas retas* $x = a$, $x = b$, *em torno da reta* $x = L$ *(isto é, a reta* $x = L$ *será o eixo de revolução).*

Para cada $x_o \in [a, b]$, $\mathcal{A}(x_o)$ *denotará o valor da área do cilindro obtido da rotação do segmento, que é a intersecção da reta* $x = x_o$ *com a região* R, *em torno da reta* $x = L$ *(veja a figura abaixo).*



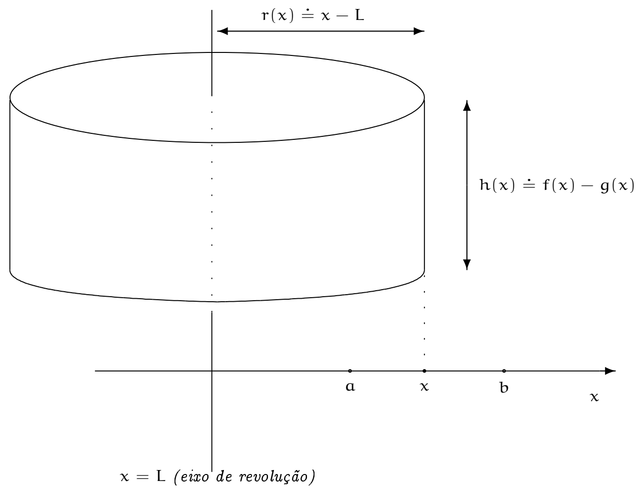
O cilindro acima obtido será denominado <u>**seção cilíndrica (ou cilindro) do sólido S em**</u> x_o *(veja a figura abaixo).*



Observação 13.5.1 *Observemos que na situação acima temos que, para cada* $x \in [a, b]$, *o valor da área, isto é,* $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, *da seção cilíndrica do sólido* S *em* $\underline{x}$ *será dada por:*

$$\mathcal{A}(x) = 2\pi\, r(x)\, h(x)\,,$$

onde $r(x)$ *e* $h(x)$ *são, respectivamente, os valors do raio e a altura da seção cilíndrica do sólido* S *em* $\underline{x}$ *(veja a figura abaixo).*



Com isto, para cada $x \in [a, b]$, *teremos que*

$$r(x) = x - L \quad e \quad h(x) = f(x) - g(x)\,,$$

e assim

$$\mathcal{A}(x) = 2\pi\,(x - L)\,[f(x) - g(x)]\,.$$

Na situação acima temos o:

Teorema 13.5.1 *Sejam* a, b, L *tais que* $L \leq a < b$. *Suponhamos que as funções* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *são contínuas em* $[a, b]$ *e*

$$g(x) \leq f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b]\,.$$

Então o valor do volume, que indicaremos por $\mathcal{V}$, *do sólido de revolução* S *obtido acima será dado por*

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\,dx\,,$$

ou seja,

$$\mathcal{V} = 2\pi \int_a^b (x - L)\,[f(x) - g(x)]\,dx \ u.v.\,,$$

onde u.v. *denotará a unidade de volume.*

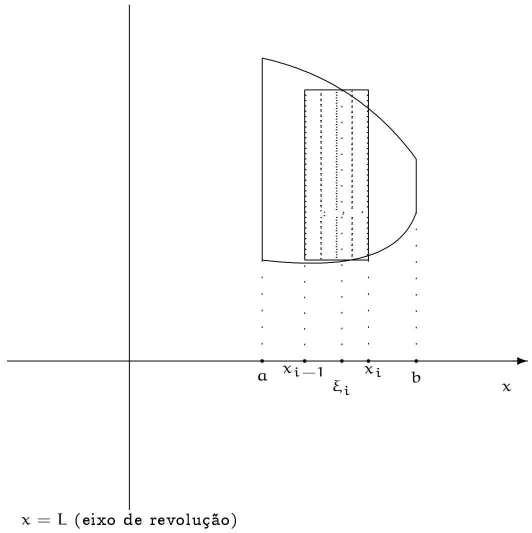
<u>**Demonstração:**</u>

Para mostrarmos a identidade acima consideremos

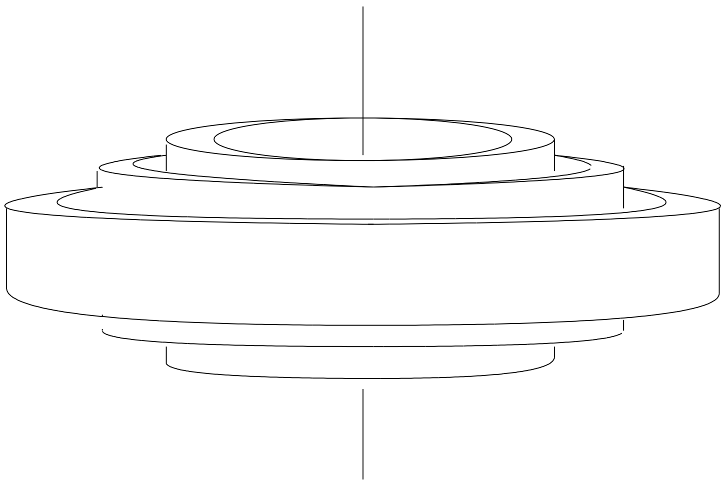
$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_o, \cdots, x_n = b\}$$

uma partição do intervalo $[a, b]$ e, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, consideremos um ponto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Consideremos a região plana formada pela reunião dos $\underline{n}$ retângulos, que denotaremos por $\mathcal{R}_i$, para cada $i \in \{1, \cdots n\}$, cujas bases são os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ e cuja alturas são os intervalos $[(\xi_i, g(\xi_i)), (\xi_i, f(\xi_i))]$, cujo valor do comprimento é $f(\xi_i) - g(\xi_i)$ (veja a figura abaixo).

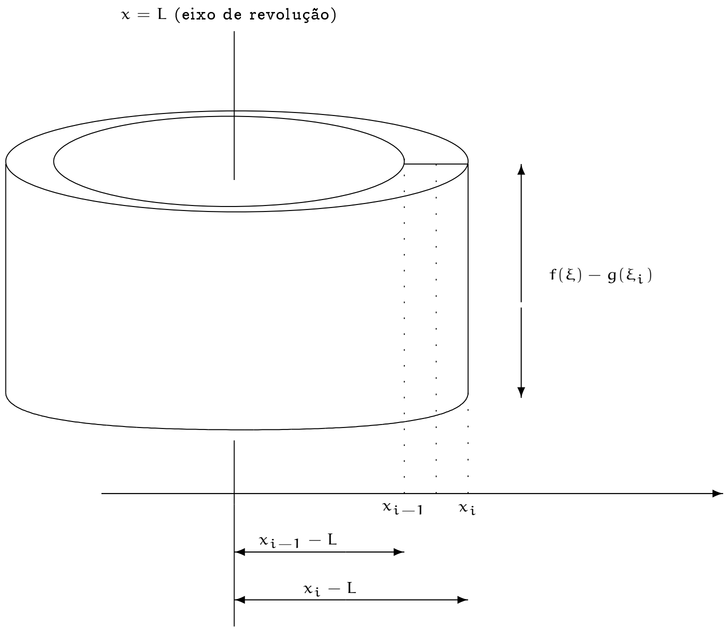


Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, rotacionando-se o retângulo $\mathcal{R}_i$, em torno da reta $x = L$, obtemos um sólido, cuja reunião, para $in \in \{1, \cdots, n\}$, será formada por <u>**cascas cilíndricas**</u>, que nos fornecerá uma aproximação para o valor do volume do sólido S (veja a figura abaixo).



Para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, o volume, que indicaremos por $\mathcal{V}_i$, de cada uma das cascas cilíndricas será dado por (veja a figura abaixo)

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_i &= \pi\,[\text{raio externo}]^2\,[\text{valor da altura}] - \pi\,[\text{raio interno}]^2\,[\text{valor da altura}] \\
&= \pi\,(x_i - L)^2\,[f(\xi_i) - g(\xi_i)] - \pi\,(x_{i-1} - L)^2\,[f(\xi_i) - g(\xi_i)] \\
&= \pi\left[\left(x_i^2 - 2x_i + L^2\right) - \left(x_{i-1}^2 - 2x_{i-1}L + L^2\right)\right]\,[f(\xi_i) - g(\xi_i)] \\
&= \pi\left[x_i^2 - 2x_i - x_{i-1}^2 + 2x_{i-1}L\right]\,[f(\xi_i) - g(\xi_i)] \\
&= \pi\,[x_i + x_{i+1} - 2L]\,[f(\xi_i) - g(\xi_i)]\,(x_i - x_{i-1})\,.
\end{aligned}$$



Logo,

$$\mathcal{V} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{V}_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\pi\,[x_i + x_{i+1} - 2L]\ [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\ (x_i - x_{i-1})$$

$$\overset{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\pi\,[x_i + x_{i+1} - 2L]\ [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\ \Delta x_i$$

$$\overset{\text{Def. Integral de Riemann}}{=} \pi\int_a^b (2x - 2L)[f(x) - g(x)]\,dx = 2\pi\int_a^b (x - L)[f(x) - g(x)]\,dx \text{ u.v.},$$

como queríamos mostrar.

□

Observação 13.5.2

1. *O Teorema acima é conhecido como* **Método das Cascas Cilíndricas**, *pode ser útil para o cálculo do valor do volume de um sólido de revolução.*

   Só se aplica para sólidos de revolução.

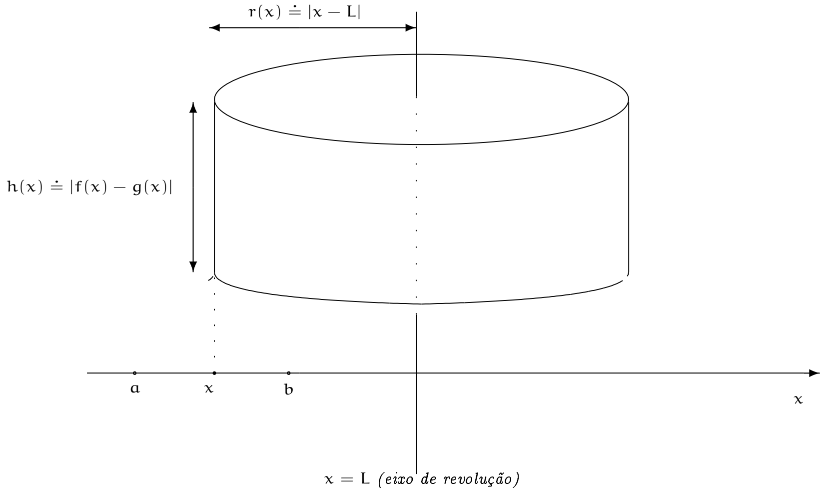
2. *Se o eixo de revolução é a reta*

$$x = L,$$

   onde $L \leq a$ *ou* $L \geq b$ *e a função* $f - g$ *muda de sinal em* $[a, b]$ *então o valor volume, que indicaremos por* $\mathcal{V}$*, do sólido de revolução* S *obtido da rotação da região limitada* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das função* $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$*, e pelas retas* $x = a$ *e* $x = b$ *em torno da reta* $x = L$*, será dado por*

$$\mathcal{V} = 2\pi\int_a^b |x - L|\,|f(x) - g(x)|\,dx \text{ u.v.}.$$

   Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato (veja a figura abaixo).



3. *Notemos que, no caso acima (veja a figura acima), para cada* $x \in [a, b]$*, o valores do raio e da altura da seção cilíndrica em* x *serão dados, respectivamente, por:*

$$r(x) = |x - L| \quad e \quad h(x) = |f(x) - g(x)|\,.$$

4. *Sejam* $a, b, L \in \mathbb{R}$ *tais que* $L \leq a$ *ou* $L \geq b$*.*

   Se a rotação da região R *for em torno de uma reta paralela ao eixo* Ox*, mais precisamente, a reta*

$$y = L$$

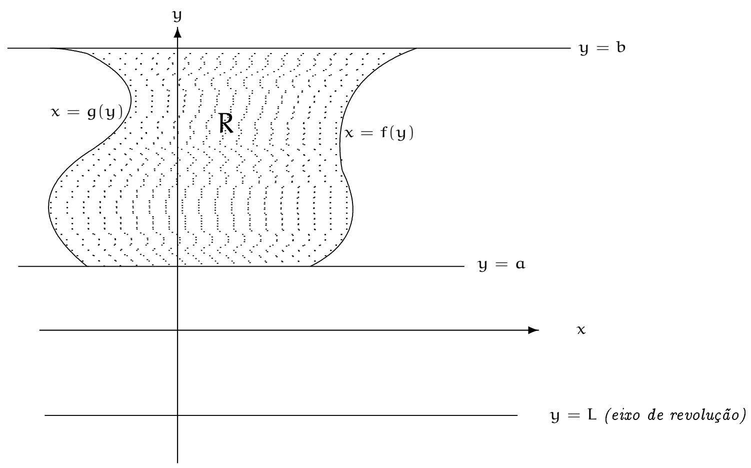
   (ou seja, o eixo de revolução for a reta $y = L$*), então podemos aplicar o Método das Cascas Cilíndricas para obter o volume do sólido de revolução* S *em questão, a saber,*

$$\mathcal{V} = 2\pi \int_a^b |y - L|\,|f(y) - g(y)|\,dy \text{ u.v.}, \tag{13.9}$$

   onde a região R *é a região limitada, contida no plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções*

$$x = f(y)\,, \quad x = g(y)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b]$$

   pelas retas $y = a$*,* $y = b$ *(veja a figura abaixo).*



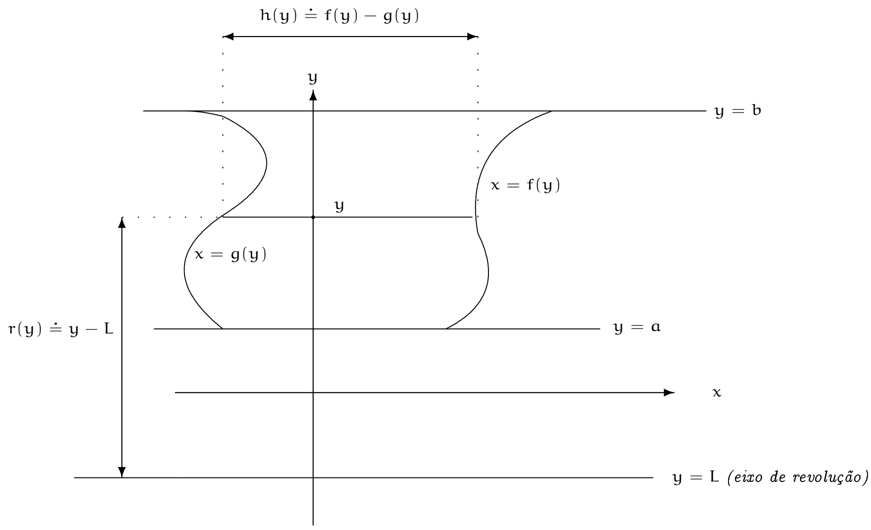
A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Observemos que, para cada $y \in [a,b]$, *a seção cilíndrica do sólido* S *em* $\underline{y}$, *pode ser otida rotacionando-se um segmento apropriado em torno da reta* $y = L$ *(veja figura abaixo).*

No caso em que $L \leq a$ *e*

$$g(y) \leq f(y)\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in [a,b]\,,$$

temos a seguinte situação geométrica:



Com isto temos que, para $y \in [a,b]$, *o valor da área, que indicaremos por* $\mathcal{A} = \mathcal{A}(y)$ *da seção cilíndrica do sólido* S *em* $\underline{y}$ *será dada por*

$$\mathcal{A}(y) = 2\pi(y - L)\,[f(y) - g(y)]\,,$$

que nos fornece o integrando da integral definida acima, para o caso considerado.

A verificação da validade da expressão (13.9) para valor do volume, isto é, $\mathcal{V}$, *do sólido de revolução* S, *no caso geral, será deixada como exercício para o leitor.*

5. *Notemos que, no caso acima, (veja a figura acima), para cada* $y \in [a,b]$, *os valores raio e da altura da seção cilíndrica em* y *serão dados, respectivamente, por:*

$$r(y) = |y - L| \quad e \quad h(y) = |f(y) - g(y)|\,.$$

Com isto podemos resolver o:

Exemplo 13.5.1 *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções dadas por*

$$f(x) \doteq 1 - x^2, \quad g(x) \doteq x^2 - 1\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Encontre o valor do volume, que indicaremos por V, *do sólido de revolução* S *obtido da rotação da região limitada* R, *contida no plano* xOy, *delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções* $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$, *em torno da reta* $x = 2$.

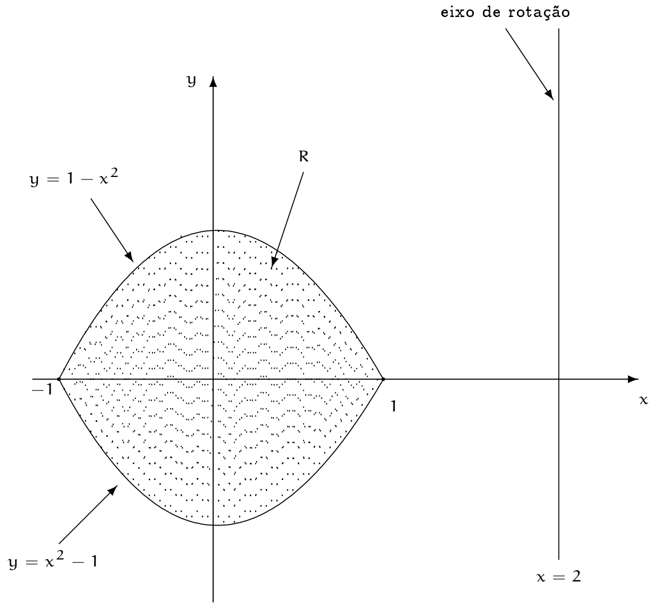
Resolução:

As funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são contínuas em $[a, b]$, logo podemos aplicar o Métodos das Cascas Cilíndricas para calcular o valor volume $\mathcal{V}$ do sólido S.

Observemos que

$$f(x) = g(x)\,, \quad \text{se, e somente se,} \quad 1 - x^2 = x^2 - 1\,, \quad \text{ou seja,} \quad x = 1 \quad \text{e} \quad x = -1\,.$$

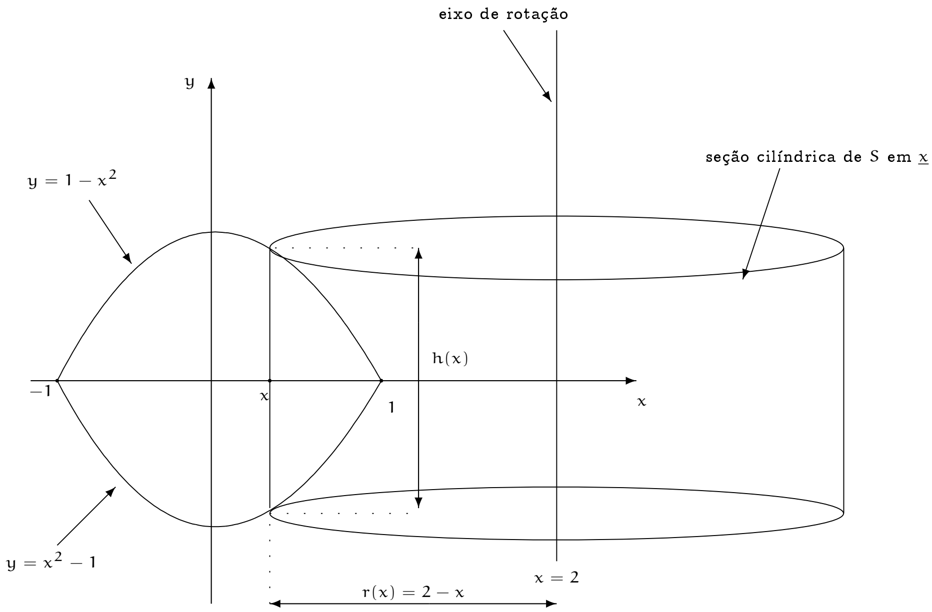
A representação geométrica da região R é dada pela figura abaixo:



ePara cada $x \in [-1, 1]$, temos que o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, da seção cilíndrica do sólido S em $\underline{x}$ (é a rotação de um segmento em torno da reta $x = 2$ - veja a figura abaixo) será dada por:

$$\mathcal{A}(x) = 2\pi\, r(x)\, h(x) = 2\pi(2 - x)\left[\left(1 - x^2\right) - \left(x^2 - 1\right)\right]\, dx\,,$$

que é uma função contínua em $[-1, 1]$.



Logo, pelo Método das Cascas Cilíndricas (isto é, Teorema (13.5.1)), segue que

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 2\pi\, r(x)\, h(x)\,dx = 2\pi \int_{-1}^{1} (2-x)\left[\left(1-x^2\right) - \left(x^2-1\right)\right]\,dx \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{32}{3}\pi \text{ u.v.}.$$

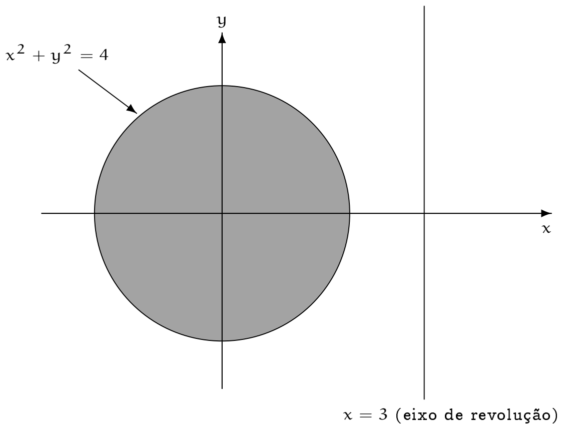
Temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 13.5.1 *Encontre o valor do volume, que indicaremos por $\mathcal{V}$, do sólido de revolução S obtido da rotação da região limitada R, contida no plano xOy, em torno da reta $x = 3$, onde R é o círculo de centro no ponto $(0,0)$ e cujoa raio tem valor 2, isto é,*

$$R \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ ,x^2+y^2 \le 4\right\}.$$

Resolução:

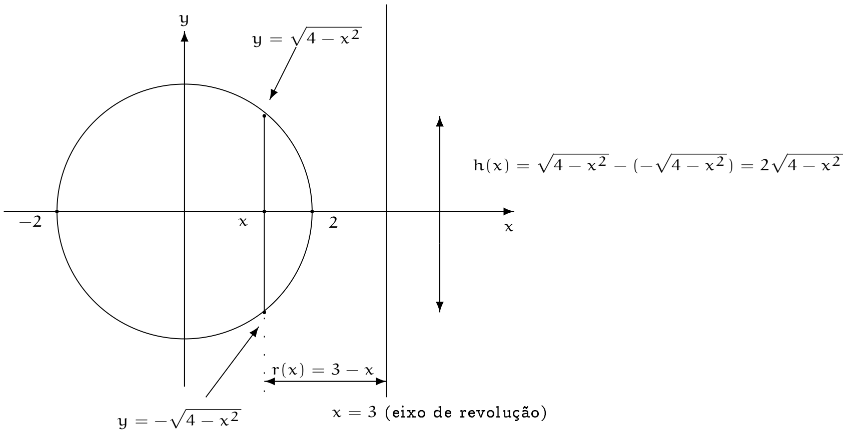
A representação geométrica da região R é dada pela figura abaixo:



O sólido S é um toro, cujo volume foi encontrado anteriormente utilizando-se o Método das Fatias (veja o Exercício (13.4.3)).

Aplicaremos o Método das Cascas Cilíndricas para encontrar o volume V do toro acima.

Para isto observemos a figura abaixo:



Observemos que, para cada $x \in [-2,2]$, o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$, da seção cilíndrica do sólido S em $\underline{x}$ será dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= 2\pi\,[\text{raio da seção cilíndrica do sólido } S \text{ em } \underline{x}]\,[\text{altura da seção cilíndrica do sólido } S \text{ em } \underline{x}]\\ &= (3-x)\left(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{4-x^2}\right) = 2(3-x)\sqrt{4-x^2},\end{aligned}$$

ou seja, uma função contínua em $[-2, 2]$.

Portanto, do Método das Cascas Cilíndricas (isto é, Teorema (13.5.1)), segue que

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\,dx = 2\pi \int_{-2}^{2} 2(3-x)\sqrt{4-x^2}\,dx = 4\pi \left[\int_{-2}^{2} 3\sqrt{4-x^2}\,dx - \int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx\right]$$

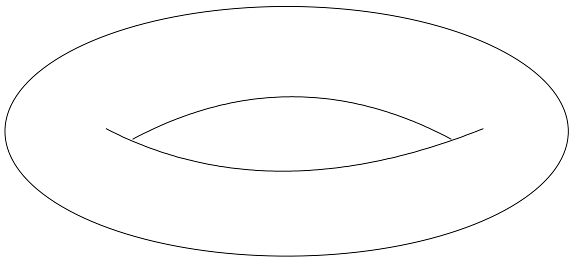
$$\overset{\text{Exercício (11.6.4)}}{=} 4\pi \left\{ 3\left[\frac{2^2}{2}\,\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{2^2-x^2}\right]\Bigg|_{x=-2}^{x=2} + \left[-\frac{1}{3}\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}\right]\Bigg|_{x=-2}^{x=2} \right\}$$

$$\overset{\text{Exercício}}{=} 24\pi^2 \text{ u.v.}. \tag{13.10}$$

Portanto

$$V = 24\pi^2 \text{ u.v.}.$$

Abaixo temos uma figura que nos fornece uma representação geométrica do sólido S em questão.

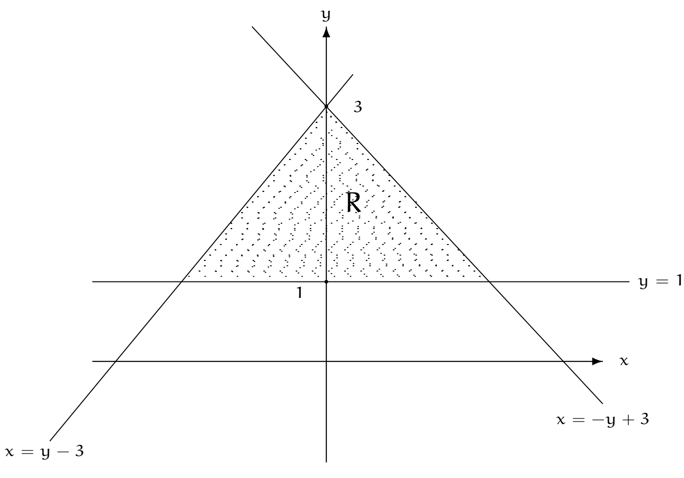


Para finalizar temos o:

Exercício 13.5.2 *Encontre o valor do volume, que indicaremos por $\mathcal{V}$, do sólido de revolução S obtido da rotação da região limitada R, contida no plano xOy, delimitada pelas representações geométricas das retas $x = y - 3$, $x = -y + 3$, $y = 1$, em torno da reta $y = 1$.*

Resolução:

A representação geométrica da região R é dada pela figura abaixo.



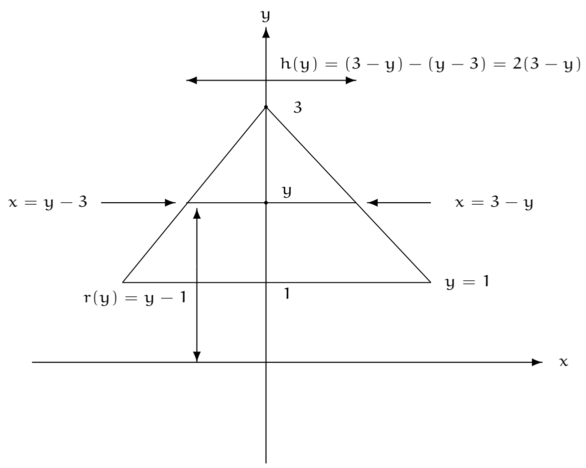
Observemos que

$$y - 3 = x = -y + 3 \quad \text{se, e somente, se,} \quad y = 3.$$

Logo, para cada $y \in [1,3]$, o valor da área, que indicaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(y)$, da seção cilíndrica do sólido S em $\underline{y}$ será dada por (veja a figura abaixo)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(y) &= 2\pi\,[\text{raio da seção cilíndrica do sólido S em } \underline{y}]\,[\text{altura da seção cilíndrica do sólido S em } \underline{y}\\ &= 2\pi\,(y-1)\,[(3-y)-(y-3)] = 2\pi(y-1)(6-2y)\,,\end{aligned}$$

ou seja, uma função contínua em $[1,3]$.



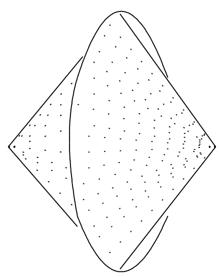
Portanto, do Método das Cascas Cilíndricas (isto é, Teorema (13.5.1)), segue que

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(y)\,dy = 2\pi\int_1^3 (y-1)(6-2y)\,dy \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{232}{3}\pi \text{ u.v.}.$$

Portanto

$$V = \frac{232}{3}\pi \text{ u.v.}.$$

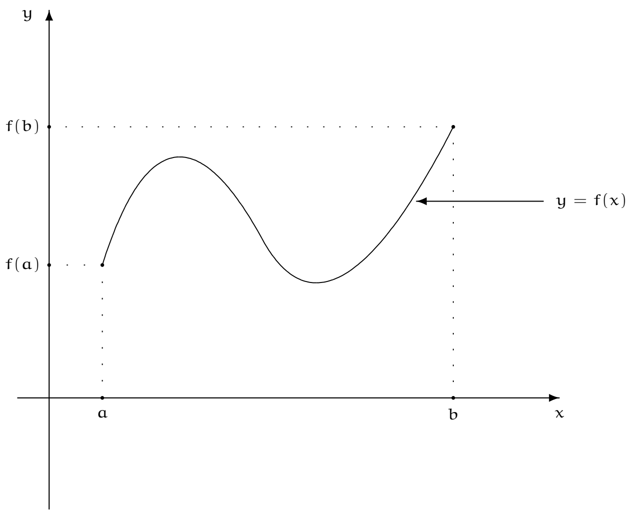
Abaixo temos uma figura que representa o sólido em questão.



13.6 Comprimento de curvas dadas pelo gráfico de uma função, avlores reias, de uma variável real

Consideremos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função.

Nosso objetivo é encontrar uma expressão para o valor do comprimento, que indicaremos por $\underline{l}$, da curva determinada pela representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ (veja a figura abaixo).



A idéia central do resultado a seguir é, "aproximar" a curva por uma poligonal, as quais sabemos calcular o valor do seu comprimento.

Para isto temos o:

Teorema 13.6.1 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função continuamente diferenciável em* $[a, b]$.

Então o valor do comprimento $\underline{l}$ *da curva determinada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *será dado por:*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx \text{ u.c.},$$

onde u.c. *denotará a unidade de comprimento.*

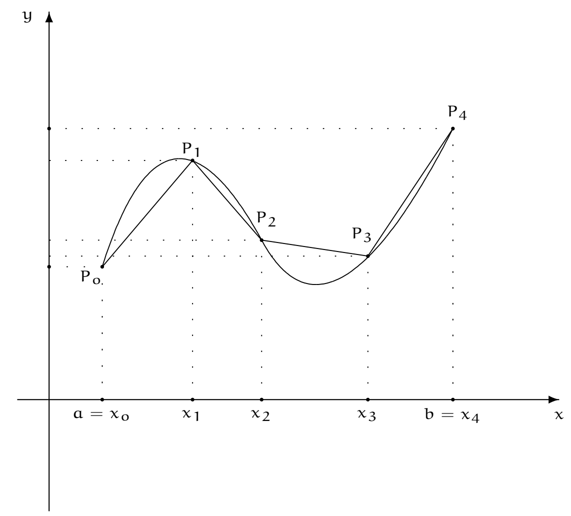
Demonstração:

Para tanto, consideremos

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o = a, \cdots, x_n = b\}$$

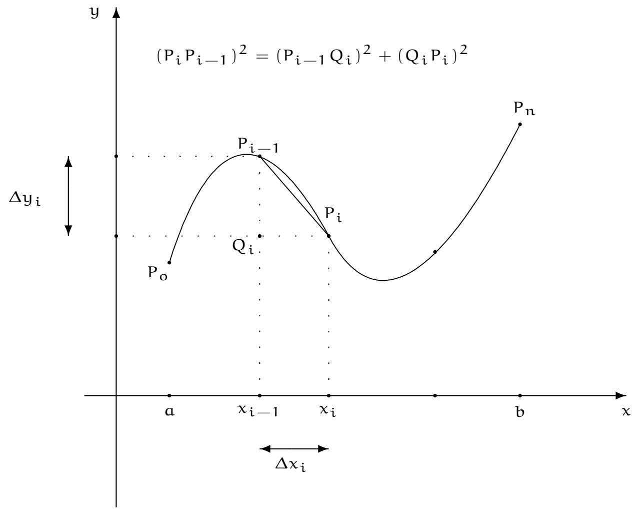
uma partição de $[a, b]$.

Consideremos, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, o ponto $P_i \doteq (x_i, f(x_i))$ que pertence ao gráfico da função $\underline{f}$, e o respectivo segmento de reta $\overline{P_{i-1}, P_i}$ (veja a figura abaixo).



Observemos que o comprimento do segmento $\overline{P_{i-1}P_i}$ é dado por (pelo Teorema de Pitágoras - veja a figura abaixo)

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} \tag{13.11}$$



Como a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) (pois a função $\underline{f}$ é continuamente diferenciável em $[a, b]$) segue, do Teorema do Valor Médio, que, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, podemos encontrar $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, de modo que

$$f'(\xi_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_1 - x_{i-1}} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}, \quad \text{ou seja,} \quad f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\,\Delta x_i\,.$$

Substituindo esta expressão em (13.11), obteremos

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(\xi_i)\Delta x_i]^2} = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i\,.$$

Logo

$$l = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P_{i-1}P_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i \overset{\text{Def. Integral de Riemann}}{=} \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx\,,$$

como queríamos mostrar.

□

Com isto podemos resolver o

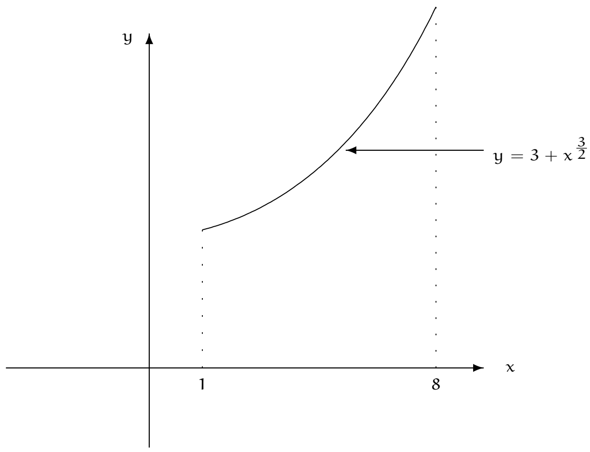
Exemplo 13.6.1 *Seja* $f : [1, 8] \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq 3 + x^{\frac{3}{2}}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [1, 8]\,.$$

Encontrar o valor do comprimento $\underline{l}$ *da curva que é a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *.*

<u>**Resolução:**</u>

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo.



Observemos que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $[1, 8]$ e

$$f\,'(x) = \frac{d}{dx}\left[3 + x^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para cada} \quad x \in [1, 8],$$

que é uma função contínua em $[1, 8]$, ou seja, a função $\underline{f}$ é continuamente diferenciável em $[1, 8]$.

Logo, do Teorema (13.6.1), segue que:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f\,'(x)]^2}\, dx = \int_1^8 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right]^2}\, dx \overset{x \geq 1 > 0, \text{ segue que } (\sqrt{x})^2 = |x| = x}{=} \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$$

$$\left\{\begin{array}{l} u \doteq 1 + \frac{9}{4}x \Rightarrow du = \frac{9}{4}\, dx \\ x = 1 \Rightarrow u = \frac{13}{4} \\ x = 8 \Rightarrow u = \frac{76}{4} = 19 \end{array}\right\} \underset{=}{} \int_{\frac{13}{4}}^{19} \sqrt{u}\, \frac{4}{9}\, dx \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{27}\left[152\sqrt{19} - 13\sqrt{13}\right] \text{ u.c.},$$

ou seja,

$$l = \frac{1}{27}\left[152\sqrt{19} - 13\sqrt{13}\right] \text{ u.c.}.$$

Temos os seguintes exercícios resolvidos:

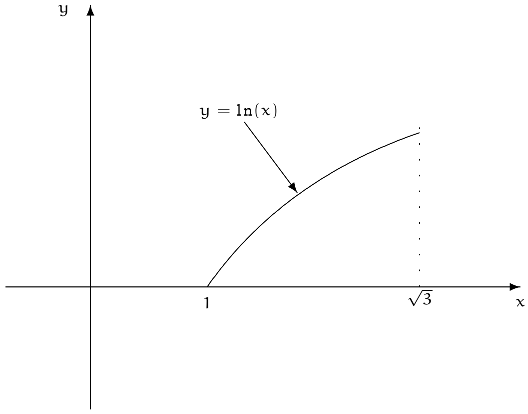
Exercício 13.6.1 *Seja* $f : [1, \sqrt{3}] \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \ln(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in [1, \sqrt{3}].$$

Encontrar o valor do comprimento $\underline{l}$ *da curva que é a representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *.*

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo.



Observemos que a função f é continuamente diferenciável em $[1, \sqrt{3}]$ (lembremos que $\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x}$, para cada $x \in (0, \infty)$).

Logo, do Teorema (13.6.1), segue que:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{x}\right]^2}\, dx = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\, dx \overset{x \geq 0}{=} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx$$
$$\overset{\text{Exercício}}{=} 2 - \sqrt{2} + \ln\left[2\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{3}\right] \text{ u.c.},$$

ou seja,

$$l = 2 - \sqrt{2} + \ln\left[2\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{3}\right] \text{ u.c.}.$$

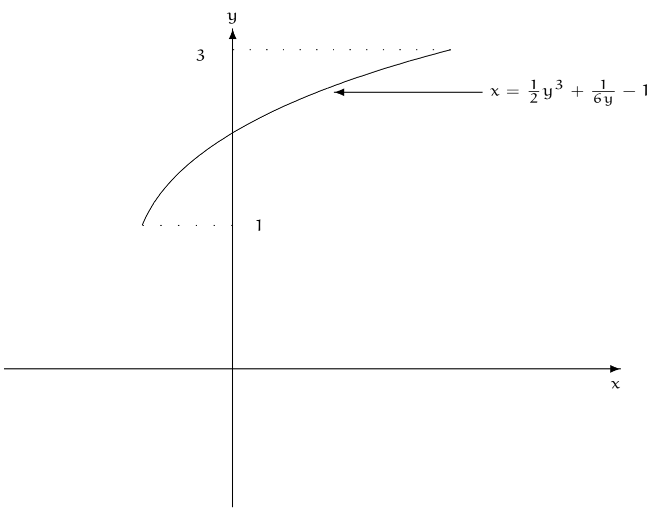
Para finalizar temos o:

Exercício 13.6.2 *Encontrar o valor do comprimento l da curva que é a representação geométrica do gráfico da função* $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(y) = \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{6y} - 1\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [1, 3]\,.$$

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função f é dada pela figura abaixo.



Observemos que a função $\underline{f}$ é continuamente diferenciável em $[1,3]$ e $\dfrac{d}{dy}f(y) = \dfrac{3}{2}y^2 - \dfrac{1}{6y^2}$, para cada $yin[1,3]$.

Logo, do Teorema (13.6.1), segue que:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(y)]^2}\,dy = \int_1^3 \sqrt{1+\left[\frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{6y^2}\right]^2}\,dy \overset{\text{Exercício}}{=} \int_1^3 \left(\frac{9}{6}y^2 + \frac{1}{6y^2}\right)dy$$
$$= \left[\frac{9}{18}y^3 - \frac{1}{6y}\right]\Big|_{y=1}^{y=3} = \frac{118}{4}\ \text{u.c.},$$

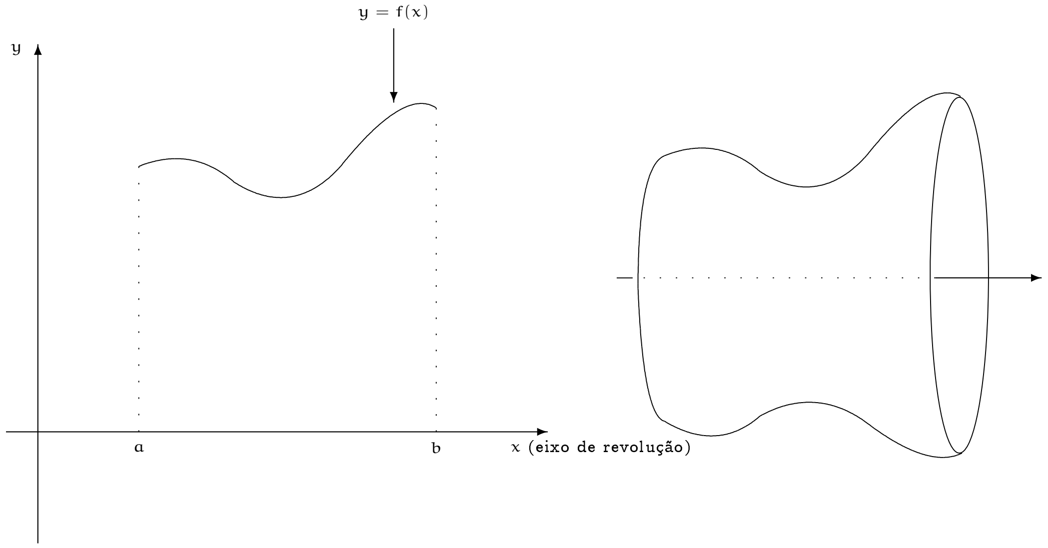
ou seja,

$$l = \frac{118}{4}\ \text{u.c.}.$$

13.7 Área de uma superfíce de revolução

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ não negativa em $[a,b]$.

Nosso objetivo é encontrar a área A da superfície de revolução $\mathcal{S}$ obtida da rotação da curva dada pela representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ em torno do eixo Ox (veja a figura abaixo).



Com a notação acima temos o:

Teorema 13.7.1 *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função continuamente diferenciável e não negativa em* $[a,b]$.

Então

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx\ \text{u.a.},$$

onde u.a. *denota unidades de área.*

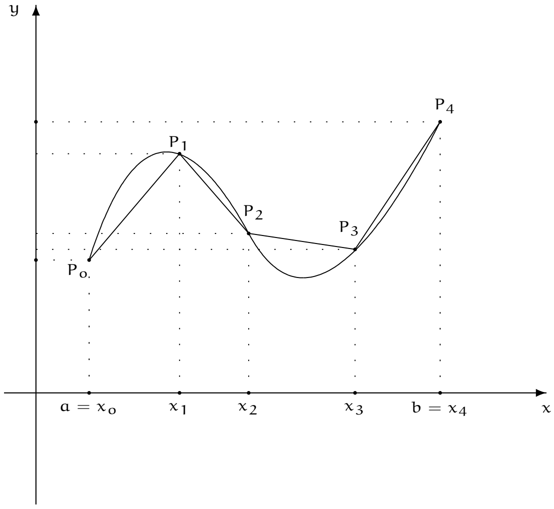
Demonstração:

Seja

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o = a, \cdots, x_n = b\}$$

uma partição de $[a,b]$.

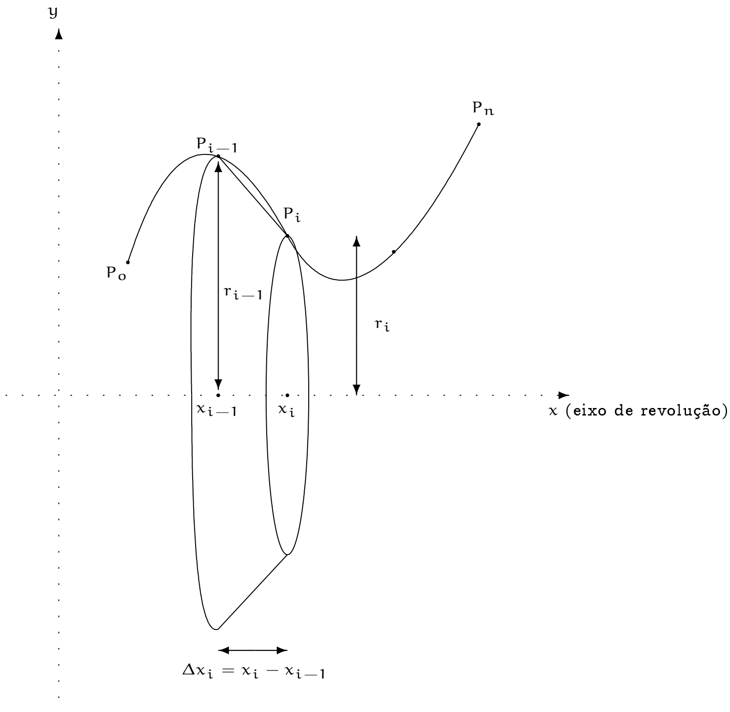
Consideremos, para cada $i \in \{1,\cdots,n\}$, o ponto do gráfico da função $\underline{f}$, que denotaremos por $P_i \doteq (x_i, f(x_i))$ e o respectivo segmento de reta $\overline{P_{i-1}, P_i}$ (veja a figura abaixo).



Quando o segmento $\overline{P_{i-1}P_i}$ é rotacionado em torno do eixo Ox obtemos a superfície lateral de um trono de cone, que indicaremos por S_i (veja a figura abaixo), cujos raios da base e do topo são

$$r_{i-1} \doteq f(x_{i-1}) \quad \text{e} \quad r_i \doteq f(x_i)\,,$$

respectivamente.



Observemos que a geratriz deste tronco de cone é o segmento $\overline{P_{i-1}P_i}$ que, como vimos na seção anterior, tem comprimento dado por

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{1 + \left[f\,'(\xi_i)\right]^2}\,\Delta x_i$$

onde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Assim, par cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, a área lateral do trono de cone S_i, que indicaremos por A_i, será dada por

$$A_i \overset{\text{Veja (*) na Observação abaixo}}{=} \pi(r_i + r_{i-1})\,(P_{i-1}P_i) = \pi\,[f(x_i) + f(x_{i-1})]\,\sqrt{1 + \left[f\,'(\xi_i)\right]^2}\,\Delta x_i\,.$$

Logo

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left\{\pi\,[f(x_i) + f(x_{i-1})]\,\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i\right\}$$

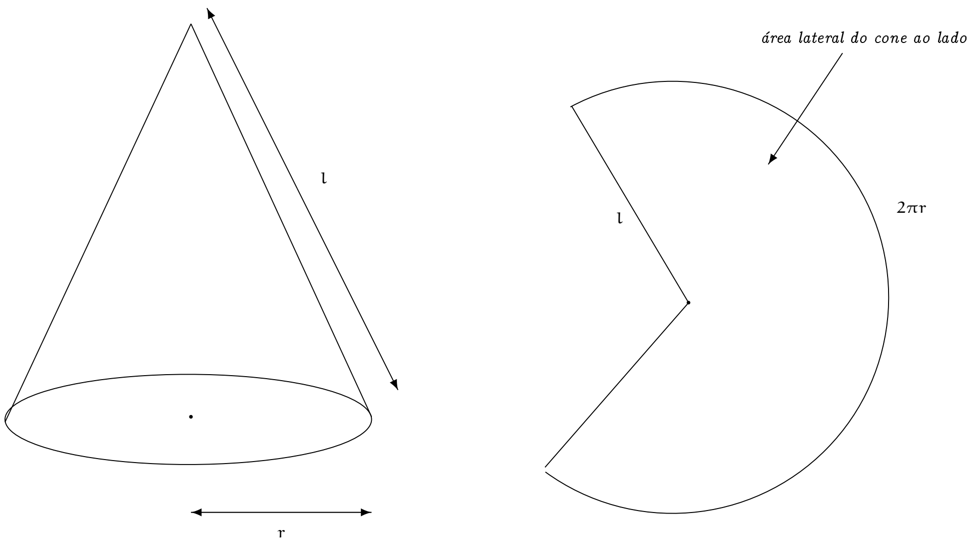
$$\overset{\text{Def. Integral de Riemann}}{=} 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f\,'(x)\right]^2}\,dx \text{ u.a.},$$

como queríamos mostrar. □

Observação 13.7.1 *A identidade (*) utilizada na demonstração acima, pode ser mostrada da seguinte forma:*

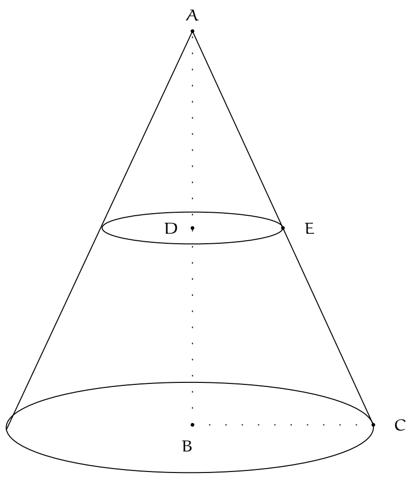
Se A_c *indicar o valor a área lateral de um cone, que tem como raio da base* $\underline{r}$ *e geratriz medindo* $\underline{l}$, *então temos que (veja a figura abaixo):*

$$\frac{A_c}{\pi l^2} = \frac{2\pi r}{2\pi l} \quad \textit{ou seja,} \quad A_c = \pi r\, l\,. \tag{13.12}$$



Com isto, como veremos a seguir, podemos obter a área lateral de um tronco de cone A_T *onde*

$$AC = l_1\,, \quad AE = l_2\,, \quad BC = r_1 \quad e \quad DE = r_2\,. \tag{13.13}$$



Observemos que os triângulos ΔABC e ΔADE são semelhantes (caso AAA - figura abaixo) logo

$$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}, \quad \textit{de (13.13), teremos:} \quad \frac{r_2}{l_2} = \frac{r_1}{l_1} \quad \textit{ou seja,} \quad r_2 l_1 = -r_2 l_2 . \tag{13.14}$$

Logo

$$A_T \overset{(13.12)}{=} \pi r_1 \, l_1 - \pi r_2 \, l_2 \overset{(13.14)}{=} \pi(r_1 + r_2)\,(l_1 - l_2) \;\; u.a.,$$

que foi a identidade (*) utilizada na demonstração do Teorema acima.

Com isto podemos resolver o:

Exemplo 13.7.1 *Seja* $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Encontre a área A da superfície de revolução $\mathcal{S}$ obtida quando rotacionamos a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ em torno do eixo Ox.

Resolução:

Como a função $\underline{f}$ é continuamente diferenciável em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ temos, pelo Teorema (13.7.1), que

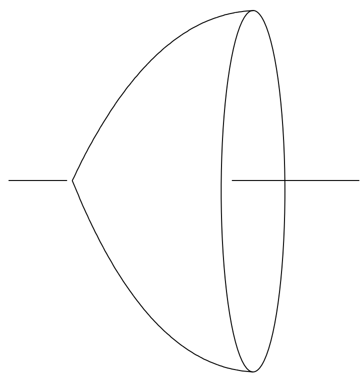
$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} \, dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x) \sqrt{1 + [\cos(x)]^2} \, dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \doteq \cos(x) \Rightarrow du = -\operatorname{sen}(x)\, dx \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0 \end{array} \right\} = \int_1^0 \sqrt{1 + u^2}\,(-du) \overset{\text{Exercício}}{=} \pi \left[\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right] \;\; u.a.,$$

ou seja,

$$A = \pi \left[\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right] \;\; u.a..$$

A superfície $\mathcal{S}$ tem sua representação geométrica dada pela figura abaixo:

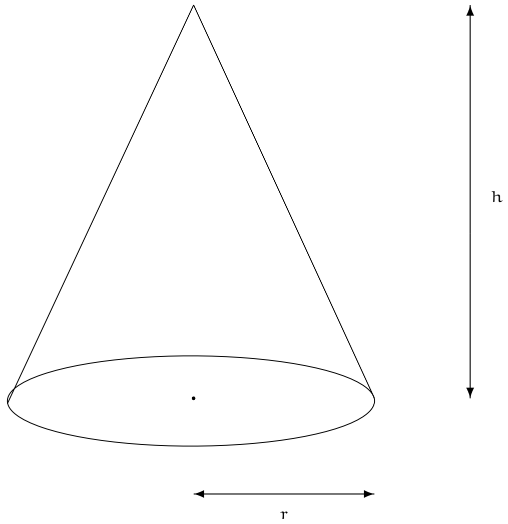


Temos os seguinte exercícios resolvidos:

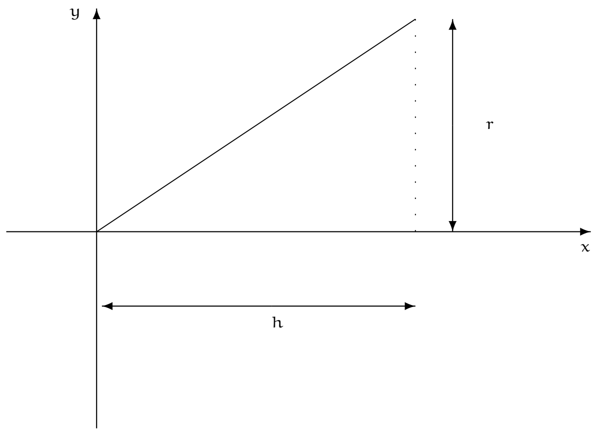
Exercício 13.7.1 *Calcular a área lateral de um cone circular reto cujo raio da base mede $r > 0$ e a altura mede $h > 0$.*

Resolução:

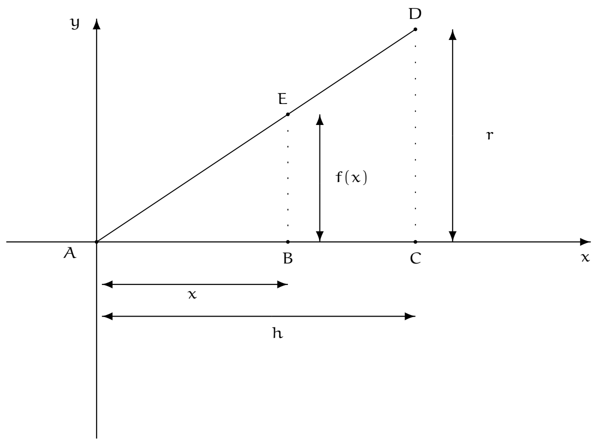
Geometricamente temos



Observemos que a superfície acima pode ser obtida como rotação do gráfico da geratriz do cone (veja a figura abaixo) em torno do eixo Ox.



Podemos descrever a geratriz como gráfico de uma função de $\underline{x}$, para $x \in [0, h]$, da seguinte forma: Na figura abaixo os triângulos ΔABE e ΔACD são semelhantes (caso AAA).



Logo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \frac{x}{f(x)} = \frac{h}{r},$$

ou seja, a função $f : [0, h] \to \mathbb{R}$ será dada por

$$f(x) \doteq \frac{r}{h}x, \quad \text{para cada} \quad x \in [0, h].$$

Como a função $\underline{f}$ é continuamente diferenciável em $[0, h]$ temos, pelo Teorema (13.7.1), que

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h}x\sqrt{1 + \left[\frac{r}{h}\right]^2}\, dx \overset{\text{Exercício}}{=} \pi r l \text{ u.a.},$$

ou seja,

$$A = \pi r l \text{ u.a.}.$$

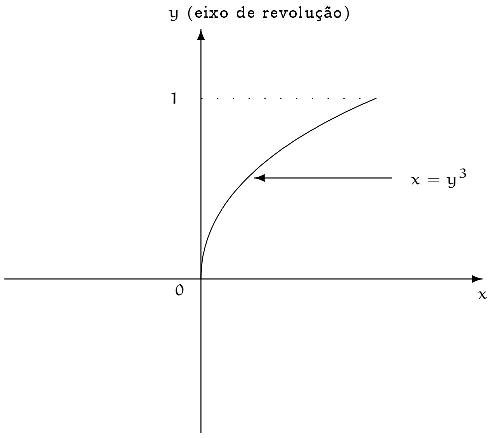
Para finalizar temos o:

Exercício 13.7.2 *Calcular a área da superfície de revolução* $\mathcal{S}$ *obtida da rotação da representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *em torno do eixo* Oy*, onde a função* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(y) \doteq y^3, \quad \textit{para cada} \quad y \in [0, 1].$$

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dada pela figura abaixo.



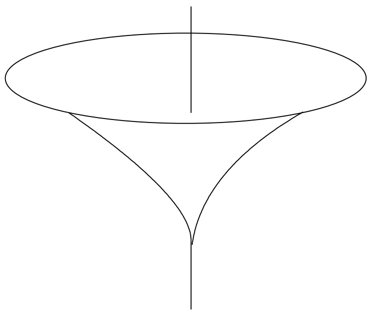
Como a função $\underline{f}$ é continuamente diferenciável em $[0, 1]$ temos, pelo Teorema (13.7.1), que

$$A = 2\pi \int_a^b f(y)\sqrt{1 + [f'(y)]^2}\, dy = 2\pi \int_0^1 y^3\sqrt{1 + [3y^2]^2}\, dx$$
$$= 2\pi \int_0^1 y^3\sqrt{1 + 9y^4}\, dx \overset{\text{Eexercício}}{=} \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \text{ u.a.},$$

ou seja,

$$A = \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \text{ u.a.}.$$

A superfície revolução $\mathcal{S}$ tem sua representação geométrica dads pela figura abaixo:



Capítulo 14

Integrais impróprias de funções reais de uma variável real

Observação 14.0.2 *Lembremos que, até o monento, só tratamos de estudar integrais definidas de funções que são limitadas e definidas em um intervalo fechado e limitado.*

O que trataremos neste Capítulo são integrais de funções definidas em intervalos **não** *limitados ou de funções que* **não** *são limitadas.*

14.1 Integrais impróprias de funções reais de uma variável real de 1.a espécie

Começaremos pela questão associada ao domínio da função não ser um intervalo limitado da reta $\mathbb{R}$.

Para isto temos a

Definição 14.1.1 *Seja* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função integrável em* $[a, b]$ *para cada* $b \in [a, \infty)$.

Definiremos a **integral imprópria da função $\underline{f}$ (de 1.a espécie) em $[a, \infty)$**, *denotada por* $\int_a^\infty f(x)\,dx$, *como sendo*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \doteq \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Diremos que a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *é* **convergente** *se o limite acima existir e for finito.*

Caso contrário diremos que integral imprópria $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *é* **divergente**.

De modo análogo temos a

Definição 14.1.2 *Seja* $g : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ *uma função integrável em* $[a, b]$ *para cada* $a \in (-\infty, b]$.

Definiremos a **integral imprópria da função $\underline{g}$ (de 1.a espécie) em $(-\infty, b]$**, *denotada por* $\int_{-\infty}^b g(x)\,dx$, *como sendo*

$$\int_{-\infty}^b g(x)\,dx \doteq \lim_{a\to-\infty} \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Diremos que a integral imprópria $\int_{-\infty}^b g(x)\,dx$ *é* **convergente** *se o limite acima existir e for finito.*

Caso contrário diremos que integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx$ *é* **divergente**.

Temos os seguinte exemplos:

Exemplo 14.1.1 *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que neste caso a função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ será dada por

$$f(x) \doteq e^{-x}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0,\infty)\,.$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $[0,\infty)$ segue que ela será integrável em $[0,b]$, para cada $b \in [0,\infty)$ fixado.

Além disso, temos que a integral imprópria (de 1.a espécie) será:

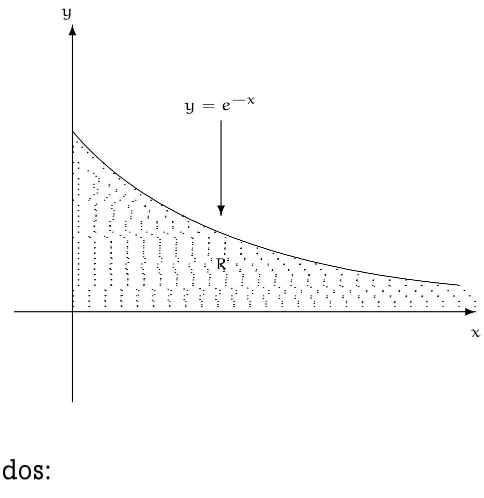
$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx \doteq \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=b}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-b} - (-1)\right] \overset{\lim\limits_{b\to\infty} e^{-b} = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{e^b} = 0}{=} 1\,.$$

Logo a integral imprópria $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ será convergente e seu valor é 1.

Observação 14.1.1 *Como a função* $\underline{f}$ *do Exemplo acima é não negativa segue que a integral imprópria calculada acima nos fornecerá a área, cujo valor denotaremos por* A*, da região* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pela reta* $x = 0$ *e o eixo* Ox *(veja a figura abaixo), ou seja,*

$$A = 1 \text{ u.a.}.$$



Temos os exercícios resolvidos:

Exercício 14.1.1 *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que neste caso a função $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ será dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{x^2}, \quad \text{para cada} \quad x \in [1, \infty).$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $[1, \infty)$, segue que ela será integrável em $[1, b]$, para cada $b \in [1, \infty)$ fixado.

Além disso temos a integral imprópria (de 1.a espécie) será:

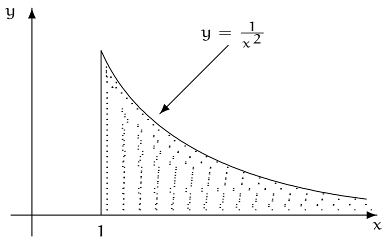
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx \doteq \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{x=b} \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b} - (-1) \right] \overset{\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b} = 0}{=} 1.$$

Logo a integral imprópria $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$ será convergente e seu valor é 1.

Observação 14.1.2 *Como a função* $\underline{f}$ *do Exemplo acima é não negativa segue que a integral imprópria calculada acima nos fornecerá a área, cujo valor denotaremos por* A*, da região* R*, contida no plano* xOy*, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$ *, pela reta* $x = 1$ *e o eixo* Ox *(veja a figura abaixo), ou seja,*

$$A = 1 \text{ u.a.}.$$



Temos também o:

Exemplo 14.1.2 *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx.$$

Resolução:

Observemos que neste caso a função $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ será dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{x}, \quad \text{para cada} \quad x \in [1, \infty).$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $[1, \infty)$ segue que ela será integrável em $[1, b]$, para cada $b \in [1, \infty)$ fixado.

Além disso temos integral imprópria (de 1.a espécie) será:

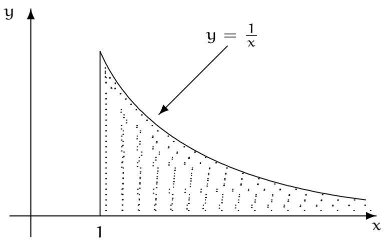
$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[\ln(x) \Big|_{x=1}^{x=b} \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln(b) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} \right] = \infty.$$

Logo a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ será divergente.

Observação 14.1.3 *Como a função $\underline{f}$ do Exemplo acima é não negativa segue que a integral imprópria calculada acima nos fornecerá a área, cujo valor denotaremos por A, da região R, contifs no plano xOy, delimitada pela representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, pela reta $x = 1$ e o eixo Ox (veja a figura abaixo), ou seja,*

$$A = \infty.$$



Os dois Exercícos acima podem ser obtidos do seguinte resultado geral:

Proposição 14.1.1 *Seja $p \in \mathbb{R}$.*

A integral imprópria de 1.a espécie

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

é convergente se, e somente se, $p > 1$.

<u>Demonstração:</u>

O caso $p = 1$ foi tratado no Exemplo acima.

Logo podemos supor que $p \neq 1$.

Observemos que neste caso a função $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ será dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{x^p}, \quad \text{para cada} \quad x \in [1, \infty).$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $[1, \infty)$ segue que ela será integrável em $[1, b]$, para cada $b \in [1, \infty)$ fixado.

Além disso temos integral imprópria (de 1.a espécie) será:

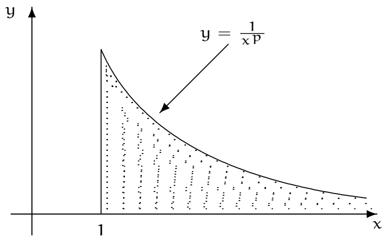
$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx &\doteq \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx \overset{p\neq 1}{=} \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\Big|_{x=1}^{x=b}\right] \\ &= \frac{1}{(1-p)}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right] = \begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & \text{para} \quad p > 1; \\ \infty, & \text{para} \quad p < 1\end{cases}.\end{aligned}$$

Logo a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ será convergente se, e somente se, $p > 1$ (em particular, será divergente se $p \leq 1$), completando a demonstração.

□

Observação 14.1.4 *Como a função $\underline{f}$ da Proposição acima é não negativa segue que a integral imprópria calculada acima nos fornecerá a área, cujo valor denotaremos por A, da região delimitada pela representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, pela reta $x = 1$ e o eixo Ox (veja a figura abaixo), ou seja,*

$$A = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} \text{ u.a. }, & \textit{para} \quad p \in (1, \infty) \\ \infty \,, & \textit{para} \quad p \in (0, 1] \end{cases} .$$



Um outro caso importante é dado pelo exercício resolvido:

Exercício 14.1.2 *Sejam $s > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ fixados.*

Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécia

$$\int_a^\infty e^{-st}\, dt\,.$$

<u>**Resolução:**</u>

Observemos que neste caso, para cada $s > 0$ fixo, temos a função $f_s : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ será dada por

$$f_s(t) \doteq e^{-st}, \quad \text{para cada} \quad t \in [a, \infty)\,.$$

Como a função f_s é contínua em $[a, \infty)$ segue que ela será integrável em $[a, b]$, para cada $b \in [a, \infty)$ fixado.

Além disso temos integral imprópria (de 1.a espécie) será:

$$\int_a^\infty e^{-st}\, dt \doteq \lim_{b\to\infty} \int_a^b e^{-st}\, dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_{t=a}^{t=b} \right]$$
$$= \frac{1}{(-s)} \lim_{b\to\infty} \left[e^{-sb} - e^{-sa} \right] \overset{\lim\limits_{b\to\infty} e^{-sb} = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{1}{e^{sb}} = 0\,,\ \text{para } s > 0}{=} \frac{e^{-as}}{s}.$$

Logo a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty e^{-st}\, dx$ será convergente e seu valor será $\dfrac{e^{-as}}{s}$ para $s > 0$.

Observação 14.1.5

1. *Podemos ver que, para $s \leq 0$, então a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty e^{-st}\, dt$ será divergente.*

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Se a função* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *é uma função limitada então, para cada* $s \in [0,\infty)$, *a integral imprópria de 1.a espécie*
$$F(s) \doteq \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$
(cuja convergência foi estudada no Exemplo acima para o caso em que $f(t) = 1$, *para* $t \in [0,\infty)$ *e tomando-se* $a = 0$*) será convergente e desempenhará um papel muito importante no estudo das Equações Diferenciais Ordinárias Lineares.*

   Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

   A função $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *dada pela integral imprópria (de 1.a espécie) acima será denominada* **transformada de Laplace** *da função* $\underline{f}$.

Com as definições acima podemos introduzir a:

Definição 14.1.3 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função integrável em* $[a,b]$, *para cada* $a, b \in \mathbb{R}$, *com* $a \leq b$.

Definiremos a **integral imprópria da função** $\underline{f}$ **(de 1.a espécie) em** $(-\infty,\infty)$, *denotada por* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, *como sendo*
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \doteq \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx\,,$$
onde $c \in \mathbb{R}$ *está fixo.*

Diremos que a integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *é* **convergente** *se as integrais impróprias* $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ *e* $\displaystyle\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$ *forem convergentes.*

Caso contrário diremos que integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *é* **divergente**.

Observação 14.1.6

1. *Se a integral imprópria* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *é convergente então, para* $c \in \mathbb{R}$, *temos que*
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to-\infty} \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

2. *Observemos que se, para algum* $c \in \mathbb{R}$, *as integrais impróprias* $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ *e* $\displaystyle\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$ *forem convergentes então para todo* $d \in \mathbb{R}$ *as integrais impróprias* $\displaystyle\int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx$ *e* $\displaystyle\int_{d}^{\infty} f(x)\,dx$ *também serão convergentes.*

   De fato, pois como a função $\underline{f}$ *é integrável em* $[c,d]$, *segue que a integral definida* $\displaystyle\int_c^d f(x)\,dx$ *existirá para qualquer* $d \in \mathbb{R}$ *fixado.*

   Logo
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^d f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx\right]\\ &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{a\to-\infty} \int_c^d f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

De modo semelhante podemos mostrar que

$$\int_d^\infty f(x)\,dx = \int_d^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx\,,$$

assim

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^d f(x)\,dx + \int_{-\infty}^d f(x)\,dx\,.$$

Com isto temos o:

Exemplo 14.1.3 *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx\,.$$

<u>**Resolução:**</u>

Observemos que neste caso a função $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ será dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{1+x^2}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $(-\infty, \infty)$, segue que ela será integrável em $[a, b]$, para cada $a, b \in \mathbb{R}$ fixados, com $a \leq b$.

Além disso, para $c \in \mathbb{R}$ temos que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \doteq \int_{-\infty}^c \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_c^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\int_c^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_c^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg}(x)\Big|_{x=c}^{x=b}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(c)\right] \\
&= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(c)\,, \\
\int_{-\infty}^c \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^c \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left[\operatorname{arctg}(x)\Big|_{x=a}^{x=c}\right] = \lim_{a\to-\infty}\left[\operatorname{arctg}(c) - \operatorname{arctg}(a)\right] = \operatorname{arctg}(c) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \operatorname{arctg}(c) + \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

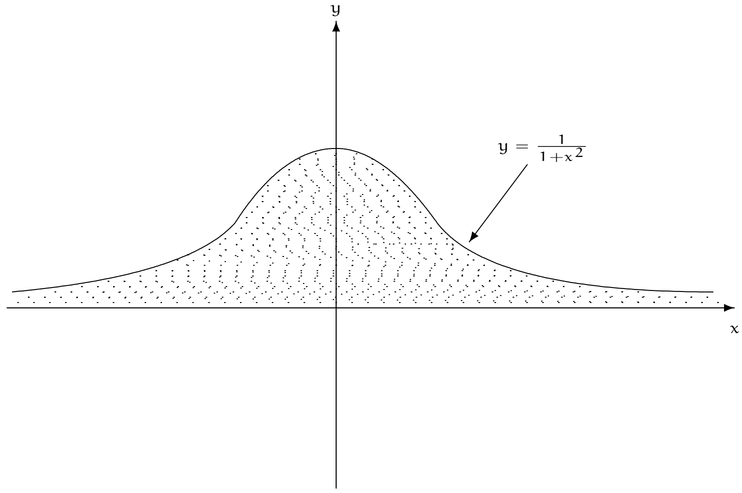
Logo a integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ será convergente e além disso

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^c \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_c^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(c)\right] + \left[\operatorname{arctg}(c) + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

isto é,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

Observação 14.1.7 *Em particular, temos que a área da região delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$*, dada no Exemplo acima, e pelo eixo* Ox *será dada pela integral imprópria calculada acima, isot é, terá valor* π u.a. *(veja a figura abaixo).*



Temos as seguinte propriedades para integrais impróprias de 1.a espécie:

Proposição 14.1.2 *Sejam* $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *funções integráveis em* $[a, b]$*, para cada* $b \in [a, \infty)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. *Se a integral imprópria* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *é convergente então, para cada* $c \geq a$*, temos que a integral imprópria* $\displaystyle\int_c^\infty f(x)\,dx$ *será convergente.*
   Além disso,
$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\text{integral definida}} + \underbrace{\int_c^\infty f(x)\,dx}_{\text{integral imprópria de 1.a espécie}} .$$

2. *Se a integral imprópria* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *é convergente então a integral imprópria* $\displaystyle\int_a^\infty (\lambda\, f)(x)\,dx$ *também será convergente.*
   Além disso,
$$\int_a^\infty (\lambda\, f)(x)\,dx = \lambda \int_a^\infty f(x)\,dx\,.$$

3. *Se a integrais impróprias* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ *são convergentes então as integrais impróprias* $\displaystyle\int_a^\infty (f+g)(x)\,dx$, $\displaystyle\int_a^\infty (f-g)(x)\,dx$*, também serão convergentes.*
   Além disso,
$$\int_a^\infty (f+g)(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx + \int_a^\infty g(x)\,dx$$
   e
$$\int_a^\infty (f-g)(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx - \int_a^\infty g(x)\,dx\,.$$

4. *Se* $\lambda \neq 0$*, a integral imprópria* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *é convergente e a integral imprópria* $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ *é divergente então as integrais impróprias* $\displaystyle\int_a^\infty (f+g)(x)\,dx$, $\displaystyle\int_a^\infty (f-g)(x)\,dx$ *e* $\displaystyle\int_a^\infty (\lambda\, g)(x)\,dx$ *serão divergentes.*

Demonstração:

As demonstrações seguem das propriedades básicas de limites no infinito e limites infinitos, e serão deixadas como exercício para o leitor.

□

Observação 14.1.8 *Vale um resultado análogo para integrais impróprias em* $(-\infty, b]$ *e em* $(-\infty, \infty)$.

Deixaremos a cargo do leitor os enunciados e as respectivas demonstrações.

Temos também o:

Teorema 14.1.1 *(da Comparação para integrais impróprias de 1.a espécie) Sejam* $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *funções integráveis em* $[a, b]$*, para cada* $b \in [a, \infty)$*, e satisfazendo*

$$0 \leq f(x) \leq g(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, \infty)\,.$$

Então:

(i) Se a integral imprópria $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *for convergente então segue que a integral imprópria* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *será convergente e*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx\,.$$

(ii) Se a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *for divergente então segue que a integral imprópria* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *será divergente.*

Demonstração:

De (i).:

Como a integral imprópria $\int_a^\infty g(x)\,dx$ é convergente segue existe e, é finito, o limite $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b g(x)\,dx$.

Mas das propriedades de integral definida temos que:

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,,$$

para cada $b \in [a, \infty)$ fixado.

Logo, do Teorema da Comparação para Limites no Infinito, segue que

$$0 \leq \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \leq \lim_{b\to\infty} \int_a^b g(x)\,dx < \infty\,,$$

mostrando que o limite $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existe, e é finito, ou seja, a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)\,dx$ será convergente e teremos

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx\,.$$

De (ii).:

Suponhamos, por absurdo, que a integral imprópria $\int_a^\infty g(x)\,dx$ será convergente.

Do item (i) deveríamos ter que a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é convergente, o que contraria a hipótese de do item (ii) .

Portanto $\int_a^\infty g(x)\,dx$ será divergente, completando a demonstração do resultado.

□

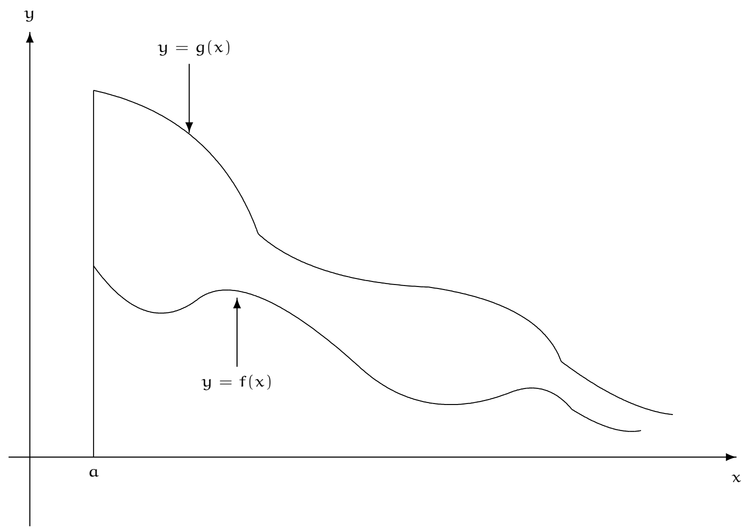
Observação 14.1.9

1. *Vale um resultado análogo para integrais impróprias em* $(-\infty, b]$ *e em* $(-\infty, \infty)$.

   Deixaremos como exercício para o leitor os enunciados e respectivas as demonstrações dos mesmos.

2. *O item 1. do resultado acima nos diz, geometricamente, que se a área de uma região plana (não limitada) é finita então a área de qualquer região plana contida na 1.a também será finita.*

   Por outro lado, o item 2. nos diz, geometricamente, que se a área de uma região plana é infinita então a área de qualquer região plana que contenha a 1.a também será infinita (veja a figura abaixo).



Como uma aplicação do resultado acima temos o:

Exemplo 14.1.4 *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx\,.$$

<u>**Resolução:**</u>

Observemos que se a função $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [1, \infty)\,,$$

então temos que a função $\underline{f}$ será integrável em $[1,b]$, para cada $b \in [1,\infty)$ fixado (pois ela é uma função contínua em $[1,\infty)$).

Se a função $g : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(x) \doteq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{para cada} \quad x \in [1,\infty),$$

então, pela Proposição (14.1.1) (com $p = \frac{3}{2} > 1$), temos que a integral imprópria

$$\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

será convergente.

Mas, para cada $x \in [1,\infty)$, temos que

$$0 \leq f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \overset{1+x^3 \geq x^3}{\leq} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = g(x).$$

Logo, do Teorema da Comparação para Integrais Impróprias item (i), segue que a integral imprópria

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$$

será convergente.

Temos os seguintes exercícios resolvidos:

Exercício 14.1.3 *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

Resolução:

Consideremos as funções $f, g : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$g(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f(x) \doteq 1+x, \quad \text{para cada} \quad x \in [1,\infty).$$

Observemos que

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \geq 1 + x^2, \quad \text{para cada} \quad x \in [1,\infty),$$

ou seja,

$$1 + x \geq \sqrt{1+x^2}, \quad \text{para cada} \quad x \in [1,\infty). \tag{14.1}$$

Logo

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \overset{(14.1)}{\geq} \frac{1}{1+x} = f(x), \quad x \geq 1.$$

Mas

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{1+x}\,dx \overset{\text{Exercício}}{=} \infty,$$

isto é, a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x}$ é divergente.

Logo, do Teorema (14.1.1) item (ii), segue que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ também será divergente.

Temos também o:

Exercício 14.1.4 *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx\,.$$

Resolução:

Consideremos as funções $f, g : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x) \doteq e^{-x^2}, \quad g(x) \doteq e^{-x}, \quad \text{para cada} \quad x \in [1,\infty)\,.$$

Observemos que

$$0 \leq f(x) = e^{-x^2} \overset{e^x \leq e^{x^2}}{\leq} e^{-x} = g(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [1,\infty)\,.$$

Mas

$$\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty e^{-x} \overset{\text{Exemplo (14.1.1)}}{=} 1,$$

isto é, a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ é convergente.

Logo, do Teorema (14.1.1) item (i), segue que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ também será convergente.

O resultado a seguir pode ser muito útil no estudo da convergência de integrais impróprias de 1.a espécie, a saber:

Teorema 14.1.2 *Seja $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,b]$, para cada $b \in [a,\infty)$, não negativa em $[a,\infty)$ e suponhamos que existe $p \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{x\to\infty} x^p\, f(x) = A\,,$$

onde $A \in [0,\infty]$.

Então:

(i) Se $p \in (1,\infty)$ e $A \in [0,\infty)$, teremos que a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ será convergente.

(ii) Se $p \in (-\infty,1]$ e $A \in (0,\infty]$, teremos que a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ será divergente.

Demonstração:

De (i).:

Como

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = A \in [0,\infty)\,,$$

dado $\varepsilon \doteq 1 > 0$, podemos encontrar $K > 0$ (podemos supor $K \geq a$) tal que:

$$\text{se} \quad x \geq K\,, \quad \text{teremos} \quad |x^p f(x) - A| < \varepsilon = 1\,,$$

ou seja,

$$\text{se} \quad x \geq K\,, \quad \text{teremos} \quad -1 + A < x^p f(x) < 1 + A\,,$$

ou ainda

$$\text{se} \quad x \geq K\,, \quad \text{teremos} \quad \frac{-1+A}{x^p} < f(x) < \frac{1+A}{x^p}\,,$$

em particular,

$$\text{se} \quad x \geq K, \quad \text{teremos} \quad 0 \leq f(x) < \frac{1+A}{x^p}.$$

Como $1 < p$ segue, pela Proposição (14.1.1), que a integral imprópria $\displaystyle\int_K^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ será convergente, logo a integral imprópria $\displaystyle\int_K^\infty \frac{1+A}{x^p}\,dx$ também será convergente.

Assim, do Teorema da Comparação para Integrais Impróprias de 1.a espécie item (i), segue que a integral imprópria $\displaystyle\int_K^\infty f(x)\,dx$ será convergente e como a função $\underline{f}$ é integrável em $[a,b]$, para cada $b \in [a,\infty)$, segue que a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ será convergente.

De (ii).:

Consideremos, primeiramente, o caso que $A \in (0,\infty)$.

Como

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = A \neq 0,$$

dado $\varepsilon \doteq \dfrac{A}{2} > 0$, podemos encontrar $K > 0$ (podemos supor $K \geq a$) tal que

$$\text{se} \quad x \geq K, \quad \text{teremos} \quad |x^p f(x) - A| < \varepsilon = \frac{A}{2},$$

ou seja,

$$\text{se} \quad x \geq K, \quad \text{teremos} \quad -\frac{A}{2} + A < x^p f(x) < \frac{A}{2} + A,$$

ou ainda

$$\text{se} \quad x \geq K, \quad \text{teremos} \quad \frac{A}{2x^p} < f(x) < \frac{3A}{2}x^p,$$

em particular,

$$\text{se} \quad x \geq K, \quad \text{teremos} \quad 0 \leq \frac{A}{2x^p} < f(x).$$

Como $p \in (-\infty, 1]$ segue, pela Proposição (14.1.1), que a integral imprópria $\displaystyle\int_K^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ será divergente, logo a integral imprópria $\displaystyle\int_K^\infty \frac{A}{2x^p}\,dx$ também será divergente (pois $A \neq 0$).

Assim, do Teorema da Comparação para Integrais Impróprias de 1.a espécie item (ii), segue que a integral imprópria $\displaystyle\int_K^\infty f(x)\,dx$ será divergente e como a função $\underline{f}$ é integrável em $[a,b]$, para cada $b \in [a,\infty)$, segue que a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ será divergente.

Agora consideraremos o caso que $A = \infty$.

Como

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = A = \infty,$$

dado $R > 0$, podemos encontrar $K > 0$ (podemos supor $K \geq a$) tal que:

$$\text{se} \quad x \geq K, \quad \text{teremos} \quad x^p f(x) > R,$$

ou seja,

$$\text{se} \quad x \geq K \quad \text{teremos} \quad 0 \leq \frac{R}{x^p} < f(x).$$

Como $p \in (-\infty, 1]$ segue, pela Proposição (14.1.1) , que a integral imprópria $\displaystyle\int_K^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ será divergente, logo a integral imprópria $\displaystyle\int_K^\infty \frac{R}{x^p}\,dx$ também será divergente (pois $R \neq 0$).

Assim, do Teorema da Comparação para Integrais Impróprias de 1.a espécie item (ii), segue que a integral imprópria $\displaystyle\int_K^\infty f(x)\,dx$ será divergente e como a função $\underline{f}$ é integrável em $[a, b]$, para cada $b \in [a, \infty)$, segue que a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ será divergente.

□

Observação 14.1.10

1. *Vale um resultado análogo para integrais impróprias em* $(-\infty, b]$.

   Deixaremos como exercício para o leitor o enunciado e a respectiva demonstração do mesmo.

2. *O resultado acima nos diz como a função* $\underline{f}$ *deve se comportar "perto" de* ∞ *para possuir uma integral imprópria de 1.a espécie convergente (ou divergente).*

   Por exemplo, se $f(x) \sim \dfrac{1}{x^p}$, *para* $x \sim \infty$, *com* $p \in (1, \infty)$ *então integral imprópria de 1.a espécie será convergente.*

3. *se no item (i)* $A = \infty$ *ou no item (ii)* $A = 0$ *nada podemos afirmar.*

   Deixaremos como exercício para o leitor encontrar contra-exemplos para cada um dos casos acima.

Apliquemos o resultado acima ao:

Exemplo 14.1.5 *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^\infty \frac{x^2 + 2x + 1}{4x^4 + 25x^3 + 2x + 5}\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que se a função $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ for dada por

$$f(x) \doteq \frac{x^2 + 2x + 1}{4x^4 + 25x^3 + 2x + 5}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [1, \infty)\,,$$

então a função $\underline{f}$ será integrável em $[1, b]$, para cada $b \in [1, \infty)$ fixado (pois função $\underline{f}$ é uma função contínua em $[1, \infty)$), não negativa em $[1, \infty)$ e além disso

$$\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[x^2\,\frac{x^2 + 2x + 1}{4x^4 + 25x^3 + 2x + 5}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{4x^4 + 25x^3 + 2x + 5} \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{4} \doteq A\,.$$

Como $p = 2 > 1$ e $A \in [0, \infty)$ segue, do Teorema acima item (i), que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2 + 2x + 1}{4x^4 + 25x^3 + 2x + 5}\,dx$ será convergente.

Temos os seguintes exercícios resolvidos:

Exercício 14.1.5 *Estudar a convegência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^\infty \frac{1 - \cos(x)}{x^2}\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que se a função $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ for dada por

$$f(x) \doteq \frac{1-\cos(x)}{x^2}, \quad \text{para cada} \quad x \in [1, \infty)$$

então função $\underline{f}$ será integrável em $[1, b]$ para cada $b \in [1, \infty)$ (pois a função $\underline{f}$ é uma função contínua em $[1, \infty)$), não negativa em $[1, \infty)$ e além disso

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[x^{\frac{3}{2}}\,\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^{\frac{1}{2}}} \overset{\text{Exercício}}{=} 0 \doteq A.$$

Como $p = \dfrac{3}{2} > 1$ e $A \in [0, \infty)$ segue, do Teorema acima item (i), que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx$ será convergente.

Temos também o:

Exercício 14.1.6 *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que se a função $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ for dada por

$$f(x) \doteq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}, \quad \text{para cada} \quad x \in [1, \infty)\,,$$

então a função $\underline{f}$ será integrável em $[1, b]$, para cada $b \in [1, \infty)$ fixado (pois a função $\underline{f}$ é uma função contínua em $[1, \infty)$), não negativa em $[1, \infty)$ e além disso

$$\lim_{x\to\infty} x\, f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[x\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\right] \overset{x^2=\sqrt{x^4}}{=} \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{x^4+x^2+1}} \overset{\text{Exercício}}{=} 1 \doteq A\,.$$

Como $p = 1$ e $A \in (0, \infty)$ segue, do Teorema (14.1.2) item (ii), que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx$ será divergente.

Podemos também aplicar o resultado acima ao:

Exercício 14.1.7 *Estudar a convegência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^\infty \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que se a função $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ for dada por

$$f(x) \doteq \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}, \quad \text{para cada} \quad x \in [1, \infty)\,,$$

então a funçao $\underline{f}$ será integrável em $[1, b]$, para cada $b \in [1, \infty)$ fixado (pois a função $\underline{f}$ é uma função contínua em $[1, \infty)$), não negativa em $[1, \infty)$ e além disso

$$\lim_{x\to\infty} x\, f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[x\,\frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}\right] \overset{\text{se } x>1 \text{ teremos } x^3-x=\sqrt{(x^3-x)^2}}{=} \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{\left(x^3-x\right)^2}{x^6+16}} \overset{\text{Exercício}}{=} 1 \doteq A\,.$$

Como $p = 1$ e $A \in (0, \infty)$ segue, do Teorema (14.1.2) item (ii), que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}\,dx$ será divergente.

Exercício 14.1.8 *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que se a função $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ for dada por

$$f(x) \doteq \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [1, \infty)\,,$$

então a função $\underline{f}$ será integrável em $[1, b]$, para cada $b \in [1, \infty)$ fixado (pois a função $\underline{f}$ é uma função contínua em $[1, \infty)$), não negativa em $[1, \infty)$ e além disso

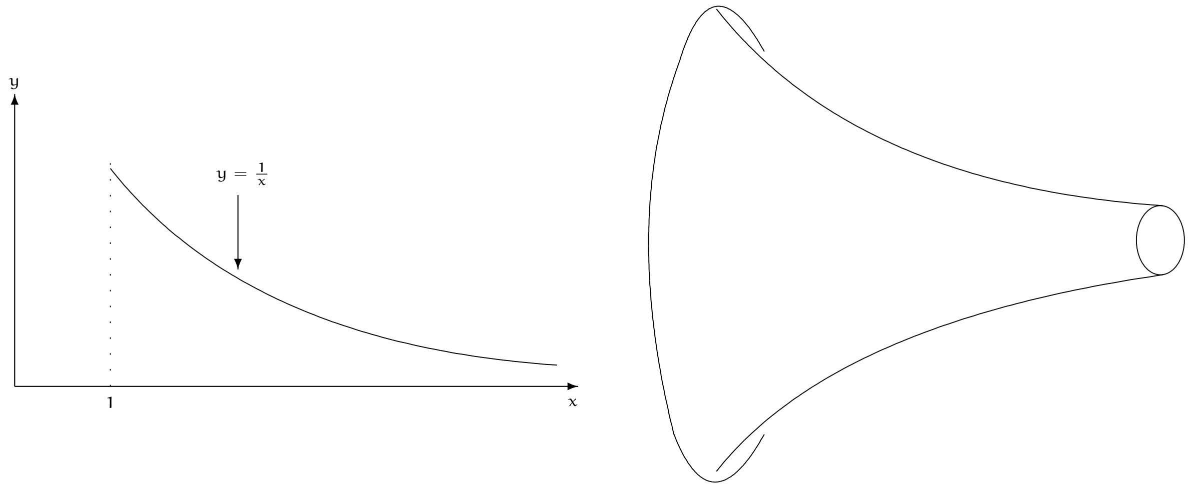
$$\lim_{x\to\infty} x f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right] \overset{0<x=\sqrt{x^2}}{=} \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} \overset{[\text{Exercício}]}{=} 1 \doteq A\,.$$

Como $p = 1$ e $A \in (0, \infty)$ segue, do Teorema (14.1.2) item (ii), que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$ será divergente.

Observação 14.1.11 *Observemos que da extensão natural da Proposição (13.7.1), o valor da área de uma superfície de revolução obtida da rotação da representação geométrica gráfico da função $\underline{f}$ acima em torno do eixo Ox será dada por*

$$A = 2\pi\int_1^\infty f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx = 2\pi\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\left[\frac{-1}{x^2}\right]^2}\,dx = 2\pi\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx = \infty\,,$$

ou seja, a área da superfície acima será ∞ (vejam as figuras abaixo).

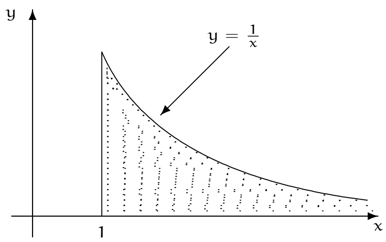


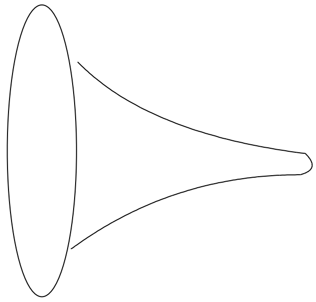
Por outro lado, lembremos que, do Exemplo (14.1.1), temos que a integral imprópria

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1\,,$$

ou seja, é convergente e seu valor é 1.

Logo, da extensão natural do Teorema (13.3.1), segue que o volume V *do sólido de revolução obtido da rotação da região* R *do plano* xOy *delimitado pela representação geométrica gráfico do gráfico da função* $y = \dfrac{1}{x}$, *pela reta* $x = 1$ *e pelo eixo* Ox *(vejam as figuras abaixo)*





será dado por

$$V = \int_1^\infty A(x)\,dx = \pi \int_1^\infty f^2(x)\,dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \pi \text{ u.v.}.$$

Conclusão: *a observação acima no diz que a superfície do sólido de revolução acima tem área* ∞, *mas seu volume é finito e igual a* π u.v..

Para finalizar temos o seguinte resultado:

Teorema 14.1.3 *Seja* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função integrável em* $[a, b]$, *para cada* $b \in [a, \infty)$.

Se a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ *for convergente então a integral imprópria* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *também será convergente.*

Demonstração:

Observemos que, para cada $x \in [a, \infty)$, temos que

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$$

ou seja,

$$0 \le f(x) + |f(x)| \le |f(x)| + |f(x)| = 2|f(x)|.$$

Como a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty 2|f(x)|\,dx$ é convergente segue, do Teorema da Comparação para Integrais Impróprias de 1.a espécie, que a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty [f(x) + |f(x)|]\,dx$ será convergente.

Mas

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty [f(x) + |f(x)|] - |f(x)|\,dx = \underbrace{\int_a^\infty [f(x) + |f(x)|]\,dx}_{\text{convergente}} - \underbrace{\int_a^\infty |f(x)|\,dx}_{\text{convergente}},$$

mostrando que a a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ também será convergente.

□

Observação 14.1.12

1. *Vale um resultado análogo para integrais impróprias em* $(-\infty, b]$ *ou* $(-\infty, \infty)$.

   Deixaremos como exercício para o leitor os enunciados e a demonstrações dos mesmos.

2. *Em geral,* **não vale a recíproca** *do resultado acima, ou seja, pode ocorrer da integral imprópria* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *ser convergente mas a integral imprópria* $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ *ser divergente.*

   Por exemplo, pode-se mostrar que a integral imprópria $\int_1^\infty \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\,dx$ *é convergente mas integral imprópria* $\int_1^\infty \left|\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right|\,dx$ *é divergente.*

   Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que estas afirmações são verdadeiras.

Exercício 14.1.9 *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que se a função $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ for dada por

$$f(x) \doteq \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}, \quad \text{para cada} \quad x \in [1,\infty)\,,$$

então a função $\underline{f}$ será integrável em $[1,b]$, para cada $b \in [1,\infty)$ fixado(pois a função $\underline{f}$ é uma função contínua em $[1,\infty)$), não negativa em $[1,\infty)$ e além disso

$$\lim_{x\to\infty} x\,f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{0<x=\sqrt{x^2}}{=} \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} \overset{\text{Exercício}}{=} 1 \doteq A\,.$$

Como $p = 1$ e $A \in (0,\infty)$ segue, do Teorema (14.1.2) item (ii), que a integral imprópria $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$ será divergente.

14.2 Integrais impróprias de funções reais de uma variável real de 2.a espécie

Trataremos agora da questão associada a integral de uma função não limitada em um intervalo limitado.

Para isto temos a

Definição 14.2.1 *Sejam* A *um intervalo de* $\mathbb{R}$*,* $a \in A$ *e* $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Diremos que a função $\underline{f}$ *tem um* **descontinuidade infinita em** $\underline{x = a}$ *se uma das seguintes situações ocorrer:*

(i)

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

(ii) *ou*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

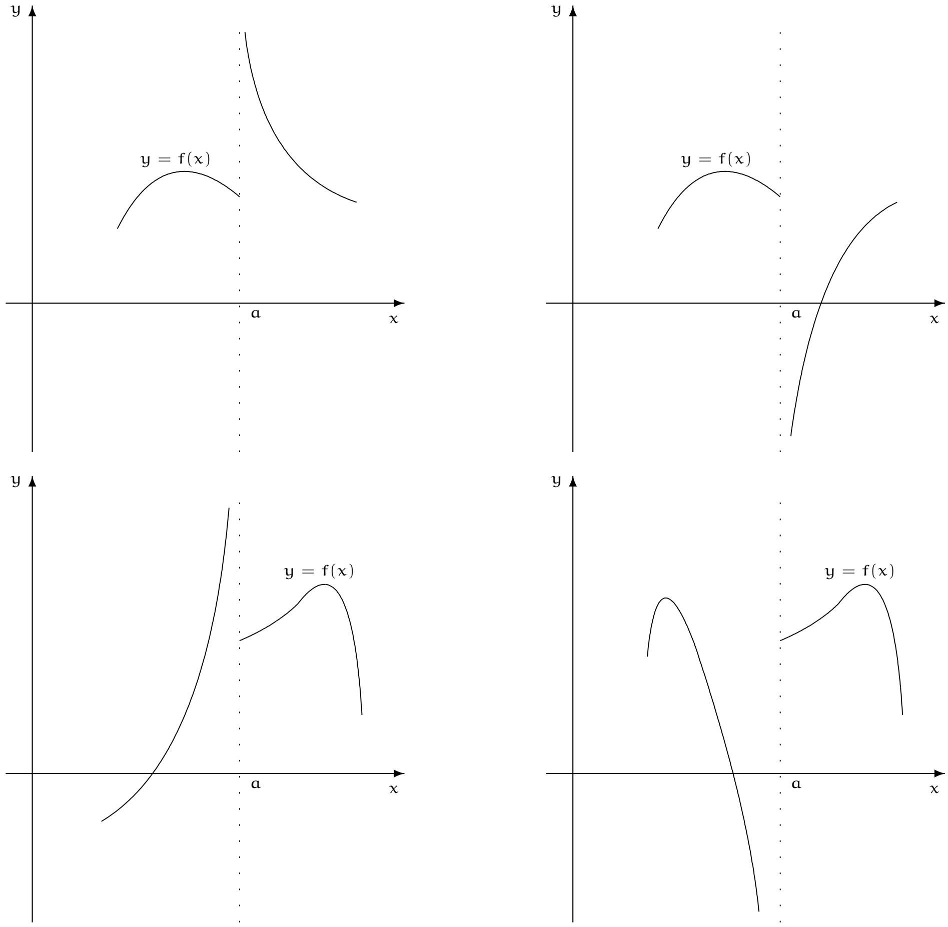
(iii) *ou*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

(iv) *ou*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty\,.$$

Observação 14.2.1 *Geometricamente, podemos ter as seguintes situações:*

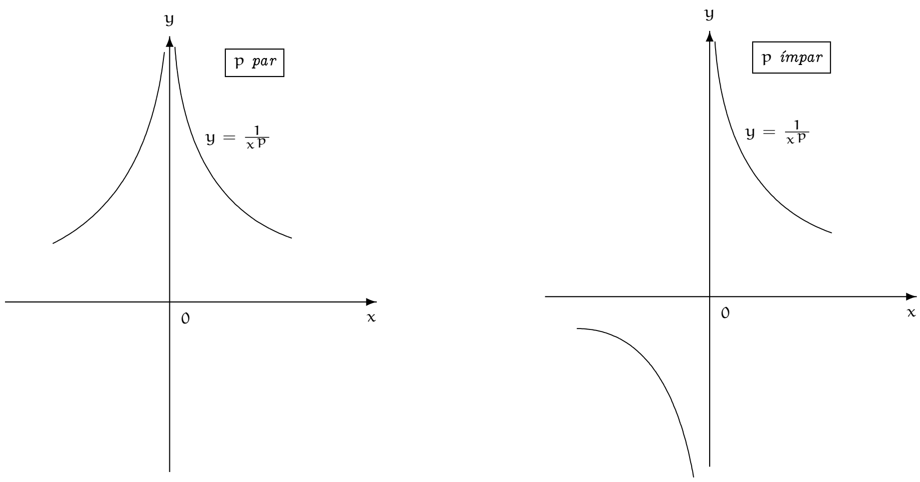


Para ilustrar temos o:

Exemplo 14.2.1 *Sejam* $p \in \mathbb{N}$ *e* $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{x^p}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Então a função $\underline{f}$ *tem uma descontinuidade infinita em* $a = 0$.



Resolução:

De fato, pois

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty\,.$$

Observemos que também temos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \begin{cases} \infty\,, & \text{para } p \in (0,\infty) \text{ que é par} \\ -\infty, & \text{para } p \in (0,\infty) \text{ que é ímpar} \end{cases}\,.$$

Com a definição acima podemos introduzir a:

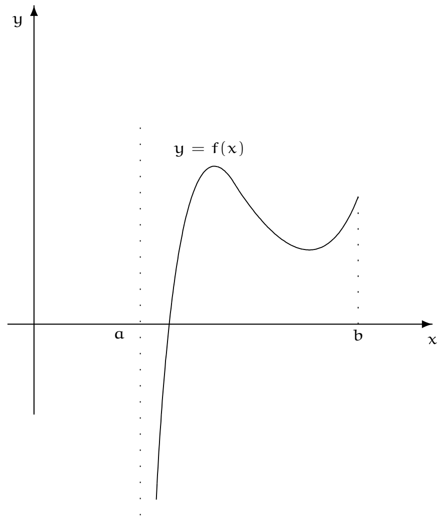
Definição 14.2.2 *Seja* $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função que tem uma descontinuidade infinita em* $x = a$ *e é integrável em* $[c,b]$, *para cada* $c \in (a,b]$ *fixado.*

Definiremos a **integral imprópria da função f (de 2.a espécie) em** $(a,b]$, *denotada por* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, *como sendo*

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Diremos que a integral imprópria $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *é* **convergente** *se o limite acima existir e for finito.*

Caso contrário diremos que integral imprópria $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *é* **divergente**.



De modo análogo temos a

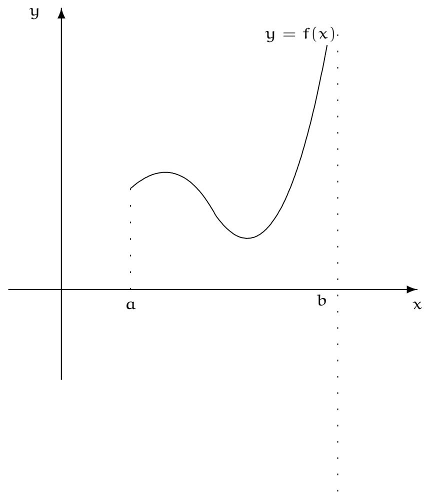
Definição 14.2.3 *Seja* $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ *uma função que tem uma descontinuidade infinita em* $x = b$ *e é integrável em* $[a,c]$, *para cada* $c \in [a,b)$ *fixado.*

Definiremos a **integral imprópria da função g (de 2.a espécie) em** $[a,b)$, *denotada por* $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$, *como sendo*

$$\int_a^b g(x)\,dx \doteq \lim_{c\to b^-} \int_a^c g(x)\,dx\,.$$

Diremos que a integral imprópria $\int_a^b g(x)\,dx$ *é* **convergente** *se o limite acima existir e for finito.*

Caso contrário diremos que integral imprópria $\int_a^b g(x)\,dx$ *é* **divergente**.



Com isto temos os seguinte exemplos:

Exemplo 14.2.2 *Estudar a convergência da integral imprópria de 2.a espécie*

$$\int_0^3 \frac{1}{x}\,dx\,.$$

Resolução:

Observemos que a função $f:(0,3] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{x}, \quad \text{para cada} \quad x \in (0,3]\,,$$

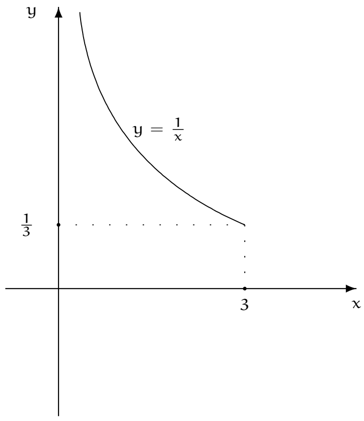
tem uma descontinuidade infinita em $x = 0$ (a verificação disto será deixada como exercício para o leitor) e como ela é contínua em $(0,3]$ será integrável em $[c,3]$, para cada $c \in (0,3]$ fixado.

Assim

$$\int_0^3 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^3 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \left[\ln(x) \Big|_{x=c}^{x=3} \right]$$
$$= \lim_{c \to 0^+} [\ln(3)| - \ln(c)] \overset{\text{Exercício}}{=} \infty\,,$$

mostrando que a integral imprópria de 2.a espécie $\int_0^3 \frac{1}{x}\,dx$ é divergente.

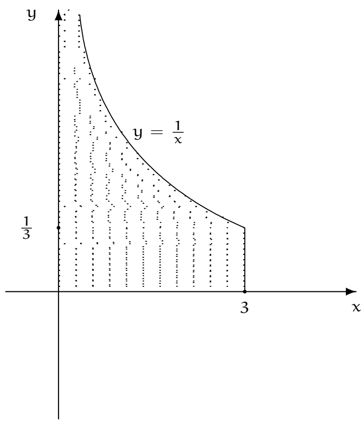
A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ é dado pela figura abaixo.



Observação 14.2.2 *Como a função* $\underline{f}$ *acima é não negativa segue que a área, cujo valor denotaremos por* A, *da região* R, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *pelas retas* $x = 0$, $x = 3$ *e pelo eixo* Ox *será dada pela integral imprópria acima, ou seja,*

$$A = \infty.$$

A figura abaixo nos dá a representação geométrica da região R.



Podemos ter outros tipos de integrais impróprias, a saber:

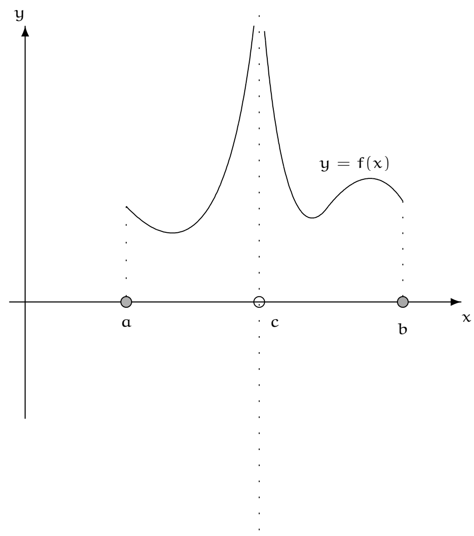
Definição 14.2.4 *Seja* $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua* $[a, b] \setminus \{c\}$ *e que tem uma descontinuidade infinita em* $x = c$.

Definiremos a **integral imprópria da função** $\underline{f}$ **(de 2.a espécie) em** $[a, b]$, *denotada por* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, *como sendo*

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\textit{2.a espécie}} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{\textit{2.a espécie}}.$$

Diremos que a integral imprópria $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *é* **convergente** *se as integrais impróprias* $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ *e* $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ *forem convergentes.*

Caso contrário diremos que integral imprópria $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *é* **divergente**.



Com isto temos o:

Exemplo 14.2.3 *Estudar a convergência da integral imprópria*

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx.$$

<u>**Resolução:**</u>

Observemos que a função $f : [0,2] \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}, \quad \text{para cada} \quad x \in [0,2] \setminus \{1\},$$

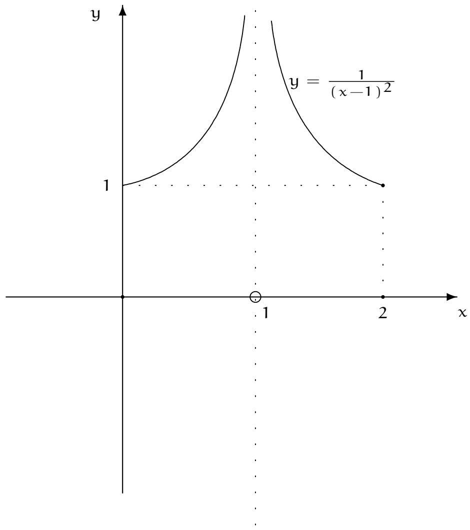
tem uma descontinuidade infinita em $x = 1 \in [0,2]$ (a verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor) e é contínua em $[0,3] \setminus \{1\}$.

Assim

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx = \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx + \lim_{t \to 1^+} \int_t^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx$$
$$= \lim_{t \to 1^-} \left[(x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_{x=0}^{x=t} \right] + \lim_{t \to 1^+} \left[(x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_{x=t}^{x=2} \right] \overset{\text{Exercício}}{=} 1 + 1 = 2,$$

mostrando que a integral imprópria $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx$ é convergente.

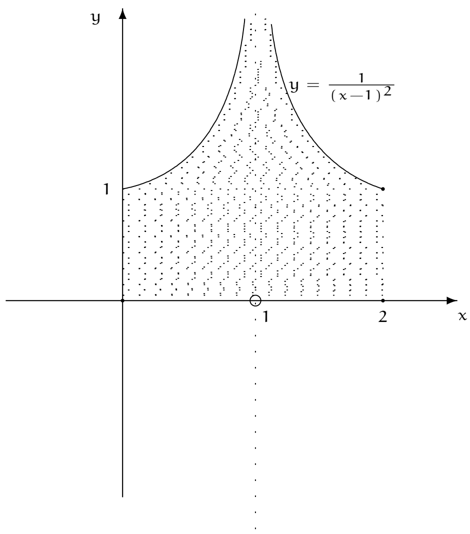
A figura abaixo nos dá a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$:



Observação 14.2.3 *Como a função* $\underline{f}$ *acima é não negativa segue que a área, cujo valor denotaremos por* A, *da região* R, *contida no plano* xOy, *delimitada pela representação geométrica do gráfico da função* $\underline{f}$, *pelas retas* $x = 0$, $x = 2$ *e pelo eixo* Ox *será dada pela integral imprópria calculada acima, ou seja,*

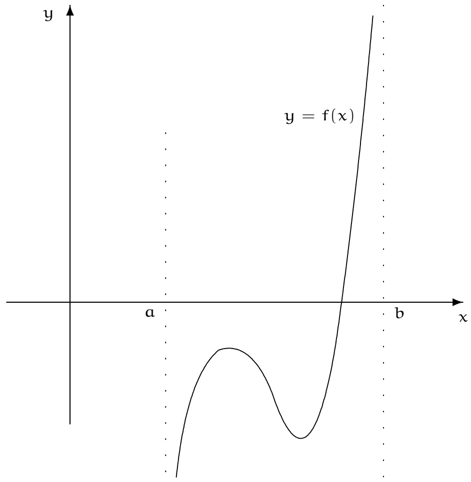
$$A = 2 \text{ u.a.}.$$

A figura abaixo nos dá a representação geométrica da região R.



Observação 14.2.4 *Podemos ter outros tipos de integrais impróprias, como por exemplo:*

1. *Seja* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *uma função é contínua em* (a, b) *mas tem descontinuidades infinitas em* $x = a$ *e* $x = b$ *(a figura abaixo ilustra uma possibilidade desta situação).*



Neste caso definimos a **integral imprópria da função f em** (a, b), *indicada por* $\int_a^b f(x)\, dx$, *como sendo*

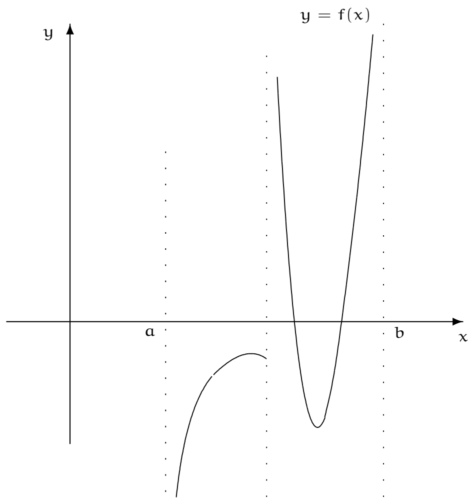
$$\int_a^b f(x)\, dx \doteq \underbrace{\int_a^c f(x)\, dx}_{2.a\ espécie} + \underbrace{\int_c^b f(x)\, dx}_{2.a\ espécie},$$

onde $c \in (a, b)$.

A integral imprópria $\int_a^b f(x)\, dx$ *será dita* **convergente** *se as integrais impróprias* $\int_a^c f(x)\, dx$ *e* $\int_c^b f(x)\, dx$ *forem convergentes.*

Caso contrário a integral imprópria $\int_a^b f(x)\, dx$ *será dita* **divergente**.

2. *Sejam* $c \in (a, b)$ *e* $f : (a, b) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ *uma função é contínua em* $(a, b) \setminus \{c\}$ *mas tem descontinuidades infinitas em* $x = a$, $x = b$ *e* $x = c$ *(a figura abaixo ilustra uma possibilidade para esta situação).*



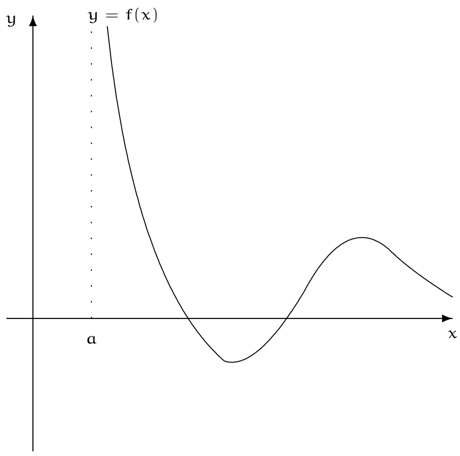
Neste caso definimos a **integral imprópria da função $\underline{f}$ em $(a,b)\setminus\{c\}$**, *indicada por* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, *como sendo*

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\text{2.a espécie nos dois extremos}} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{\text{2.a espécie nos dois extremos}} .$$

A integral imprópria $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *será dita* **convergente** *se as integrais impróprias* $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ *e* $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ *forem convergentes.*

Caso contrário a integral imprópria $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *será dita* **divergente**.

3. *Seja* $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ *uma função é contínua em* (a,∞) *mas tem uma descontinuidade infinita em* $x=a$ *(a figura abaixo ilustra uma possibilidade para esta situação).*



Neste caso definimos a **integral imprópria da função $\underline{f}$ em (a,∞)**, *indicada por* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$, *como sendo*

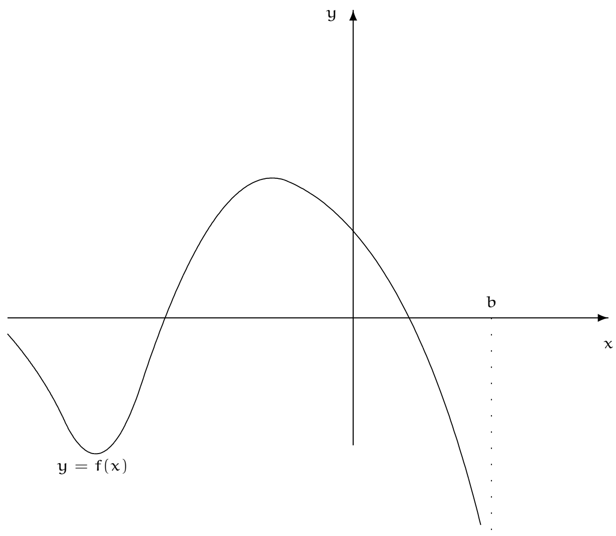
$$\int_a^\infty f(x)\,dx \doteq \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\text{2.a espécie}} + \underbrace{\int_c^\infty f(x)\,dx}_{\text{1.a espécie}},$$

onde $c\in(a,\infty)$.

A integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *será dita* **convergente** *se as integrais impróprias* $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ *(esta é de 2.a espécie) e* $\displaystyle\int_c^\infty f(x)\,dx$ *(esta é de 1.a espécie) forem convergentes.*

Caso contrário diremos que a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *será dita* **divergente**.

4. *Seja* $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ *uma função é contínua em* $(-\infty,b)$ *mas tem uma descontinuidade infinita em* $x=b$ *(a figura abaixo ilustra uma possibilidade para esta situação).*



Neste caso definimos a **integral imprópria da função f em $(-\infty, b)$**, *indicada por* $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, *como sendo*

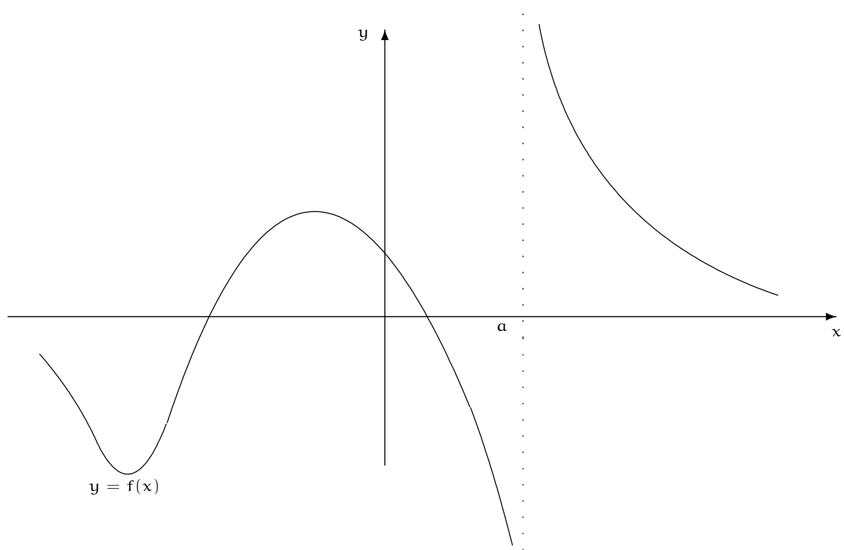
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \doteq \underbrace{\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx}_{1.a\ espécie} + \underbrace{\int_{c}^{b} f(x)\,dx}_{2.a\ espécie},$$

onde $c \in (-\infty, b)$.

A integral imprópria $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ *será dita* **convergente** *se as integrais impróprias* $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ *(esta é de 1.a espécie) e* $\int_{c}^{b} f(x)\,dx$ *(esta é de 2.a espécie) forem convergentes.*

Caso contrário a integral imprópria $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ *será dita* **divergente**.

5. *Seja* $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *uma função é contínua em* $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ *mas tem uma descontinuidade infinita em* $x = a$ *(a figura abaixo ilustra uma possibilidade para esta situação).*



Neste caso definimos a integral imprópria da função $\underline{f}$ *em* $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, *indicada por* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, *como sendo*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \doteq \underbrace{\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx}_{1.a\ e\ 2.a\ \text{espécies}} + \underbrace{\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx}_{1.a\ e\ 2.a\ \text{espécies}} ,$$

onde $c \in (-\infty, \infty)$.

A integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *será dita* **convergente** *se as integrais impróprias* $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ *e* $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ *forem convergentes.*

Caso contrário a integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *será dita* **divergente**.

6. *Podemos ter outros tipos de integrais impróprias que podem ser estudadas suas convergências seguindo as idéias acima.*

Com isto temos a:

Proposição 14.2.1 *Sejam* $a < c$ *e* $p \in (0, \infty)$ *fixados.*

A integral imprópria de 2.a espécie

$$\int_a^c \frac{1}{(x-c)^p}\,dx ,$$

será convergente se, e somente, se $p \in (0, 1)$.

Demonstração:

Observemos que se $f : [a, c) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{(x-c)^p}, \quad \text{para cada} \quad x \in [a, c) ,$$

então a função $\underline{f}$ será contínua em $[a, c)$, logo integrável em $[a, b]$, para $b \in [a, c)$ fixado, e terá um descontinuidade infinita em $x = c$.

Logo a integral

$$\int_a^c \frac{1}{(x-c)^p}\,dx$$

é uma integral imprópria de 2.a espécie.

Se $p = 1$ temos:

$$\int_a^c \frac{1}{x-c} = \lim_{t\to c^-} \int_a^t \frac{1}{x-c}\,dx = \lim_{t\to c^-} \qquad = \lim_{t\to c^-} [\ln|t-c| - \ln|a-c|] \overset{\text{Exercício}}{=} -\infty .$$

Se $p \neq 1$ temos:

$$\int_a^c \frac{1}{(x-c)^p} = \lim_{t\to c^-} \int_a^t \frac{1}{(x-c)^p}\,dx = \lim_{t\to c^-} \left[\frac{1}{1-p}(x-c)^{1-p} \Big|_{x=a}^{x=t} \right]$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{t\to c^-} \left[(t-c)^{1-p} - (a-c)^{1-p} \right] = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}(a-c)^{1-p}, & \text{para cada} \quad p \in (0,1) \\ \infty, & \text{para cada} \quad p \in (1, \infty) \end{cases} .$$

Conclusão:

$$\int_a^c \frac{1}{(x-c)^p} = \begin{cases} \text{convergente}\,, & \text{para cada} \quad p \in (0,1) \\ \text{divergente}\,, & \text{para cada} \quad p \in [1,\infty) \end{cases} \quad ,$$

completando a demonstração.

□

Temos as seguinte propriedades para integrais impróprias de 2.a espécie:

Proposição 14.2.2 *Sejam* $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$ *funções integráveis em* $[a,c]$, *para cada* $c \in (a,b)$ *fixados, com descontinuidade infinita em* $x = a$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. *Se a integral imprópria* $\int_a^b f(x)\,dx$ *é convergente então, para cada* $c \in (a,b)$, *temos que a integral imprópria* $\int_c^b f(x)\,dx$ *será convergente.*

   Além disso,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\textit{integral definida}} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{\textit{integral imprópria de 2.a espécie}} .$$

2. *Se a integral imprópria* $\int_a^b f(x)\,dx$ *é convergente então a integral imprópria* $\int_a^b (\lambda\, f)(x)\,dx$ *também será convergente.*

   Além disso,

$$\int_a^b (\lambda\, f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

3. *Se a integrais impróprias* $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ *são convergentes então as integrais impróprias* $\int_a^b (f+g)(x)\,dx$, $\int_a^b (f-g)(x)\,dx$, *também serão convergentes.*

   Além disso,

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^\infty g(x)\,dx$$

   e

$$\int_a^b (f-g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^\infty g(x)\,dx\,.$$

4. *Se,* $\lambda \neq 0$, *a integral imprópria* $\int_a^b f(x)\,dx$ *é convergente e a integral imprópria* $\int_a^b g(x)\,dx$ *é divergente então as integrais impróprias* $\int_a^b (f+g)(x)\,dx$, $\int_a^b (f-g)(x)\,dx$ *e* $\int_a^b (\lambda\, g)(x)\,dx$ *serão divergentes.*

Demonstração:

As demonstrações seguem das propriedades básicas de limites no infinito e serão deixadas como exercíco para o leitor.

□

Observação 14.2.5 *Vale um resultado análogo para as outras integrais impróprias introduzidas na Observação (14.2.4).*

Deixaremos a cargo do leitor os enunciados e as respectivas demonstrações dos mesmos.

Temos o seguinte resultado importante para o estudo de integrais impróprias de 2.a espécie:

Teorema 14.2.1 *(da Comparação para integrais impróprias de 2.a espécie) Sejam* $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas em* $(a, b]$*, com descontinuidades infinitas em* $x = a$ *e satisfazendo*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in (a, b].$$

Então:

(i) se a integral imprópria $\int_a^b g(x)\,dx$ *for convergente teremos que a integral imprópria* $\int_a^b f(x)\,dx$ *será convergente e*

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx;$$

(ii) se a integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ *for divergente teremos que a integral imprópria* $\int_a^b g(x)\,dx$ *será divergente .*

Demonstração:

A demonstração deste resultado é semelhante a do Teorema da Comparação para Integrais Impróprias de 1.a espécie.

Deixaremos como exercício para o leitor a sua demonstração.

□

Observação 14.2.6 *Valem os resultados análogos ao Teorema acima para cada uma das integrais impróprias introduzidas na Observação (14.2.4).*

Deixaremos como exercíco para o leitor enunciá-los e demonstrá-los.

Apliquemos ao

Exemplo 14.2.4 *Estudar a convergência da integral imprópria de 2.a espécie*

$$\int_3^6 \frac{\ln(x)}{(x-3)^4}\,dx.$$

Resolução:

Observemos que a função $g : (3, 6] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) \doteq \frac{\ln(x)}{(x-3)^4}, \quad \text{para cada} \quad x \in (3, 6],$$

tem uma descontinuidade infinita em $c = 3$ e é contínua em $(3, 6]$, logo será uma função integrável em $[c, 6]$, para cada $c \in (3, 6]$ fixado.

Se considerarmos a funçaõ $f : (3, 6] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{(x-3)^4}, \quad \text{para cada} \quad x \in (3, 6],$$

então ela terá uma descontinuidade infinita em $c = 3$, será contínua em $(3, 6]$ e

$$0 \leq f(x) = \frac{1}{(x-3)^4} \overset{3 \leq x \Rightarrow 1 \leq \ln(3) \leq \ln(x)}{\leq} \frac{\ln(x)}{(x-3)^4} = g(x), \quad \text{para cada} \quad x \in (3, 6].$$

Além disso, pela Proposição (14.2.1) (com $p = 4 > 1$), temos que a integral imprópria

$$\int_3^6 f(x)\,dx = \int_3^6 \frac{1}{(x-3)^4}\,dx$$

é divergente.

Logo, do Teorema da Comparação para Integrais Impróprias de 2.a espécie item (ii), segue que a integral imprópria de 2.a espécie

$$\int_3^6 \frac{\ln(x)}{(x-3)^4}\,dx$$

será divergente.

Para finalizar temos o exercício resolvido:

Exercício 14.2.1 *Para cada* $t \in (0, \infty)$ *fixado, consideremos a integral imprópria*

$$\Gamma(t) \doteq \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\,dx,$$

que é denominada **função Gama**.

Então

(i) a integral imprópria acima é convergente para cada $t \in (0, \infty)$ *fixado;*

(ii) para $t \in (1, \infty)$ *temos que*

$$\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1);$$

(iii) em particular, se $n \in \mathbb{N}$ *temos que*

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Resolução:

De (i):

Observemos que

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\,dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x} x^{t-1}\,dx}_{(I)} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-x} x^{t-1}\,dx}_{(II)}.$$

Para $t \in [1, \infty)$ fixado, temos que a integral (I) será uma integral definida em $[0, 1]$, pois a função

$$x \mapsto e^x x^{\overbrace{t-1}^{\geq 0}}$$

é uma função contínua em $[0, 1]$.

Se $\in (0, 1)$ temos que

$$0 \leq e^{-x} x^{t-1} \leq x^{t-1} = \frac{1}{x^{1-t}}, \quad \text{para cada} \quad x \in (0, 1].$$

Como $1 - t < 1$, segue da Proposição (14.2.1), segue que a integral imprópria de 2.a espécie $\int_0^1 x^{t-1}\, dx$ será convergente.

Logo, do Teorema da Comparação para Integrais Impróprias de 2.a espécie, segue que a integral imprópria $\int_0^1 e^{-x} x^{t-1}\, dx$ também será convergente, mostrando que (I) será convergente para cada $t \in (0, \infty)$ fixado.

Para a integral imprópria de 1.a espécie (II), no temos que

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x} x^{t-1} \overset{\text{Exercício}}{=} 0 \,.$$

Assim, do Teorema (14.1.2) item (i) (com $A = 0$ e $p = 2$), segue a integral imprópria de 2.a espécie $\int_0^1 e^{-x} x^{t-1}\, dx$ será convergente.

Como (I) e (II) são convergentes segue que a integral imprópria $\int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx$ é convergente para cada $t \in (0, \infty)$ fixado, isto é, a função $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ está bem definida.

De (ii):

Para cad $t \in (1, \infty)$ temos que

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx = \lim_{a \to 0^+} \lim_{b \to \infty} \int_a^b e^{-x} x^{t-1}\, dx. \tag{14.2}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{-x} x^{t-1}\, dx &= \int_a^b \underbrace{x^{t-1}}_{=u} \underbrace{e^{-x}\, dx}_{=dv} = \left\{ \begin{array}{l} u = x^{t-1} \Rightarrow du = (t-1)x^{t-2}\, dx \\ dv = e^{-x}\, dx \Rightarrow v = -e^{-x} + C \end{array} \right\} \\
&= uv \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v\, du = \left[x^{t-1} \left(-e^{-x}\right) \right] \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b (-e^{-x})\,(t-1)x^{t-2}\, dx \\
&= \left[-b^{t-1}\, e^{-b} + a^{t-1} e{-}a \right] + (t-1) \int_a^b e^{-x}) x^{t-2}\, dx \,.
\end{aligned}$$

Substituindo em (14.2) obteremos

$$\begin{aligned}
\Gamma(t) &= \lim_{a \to 0^+} \lim_{b \to \infty} \left\{ \left[-b^{t-1}.e^{-b} + a^{t-1} e{-}a \right] + (t-1) \int_a^b e^{-x} x^{t-2}\, dx \right\} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} (t-1) \int_0^\infty e^{-x} x^{[(t-1)-1]}\, dx = (t-1)\Gamma(t-1) \,,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

De (iii):

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1 \,.$$

De item (ii), temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= (2-1)\Gamma(1) = 1 = 1! \\
\Gamma(3) &= (3-1)\Gamma(2) = 2 = 2! \\
\Gamma(4) &= (4-1)\Gamma(3) = 3.2! = 3! \cdots
\end{aligned}$$

e assim, por induição, segue o item (iii), completando a demonstração do resultado.

□

E assim podemos tratar do

Exercício 14.2.2 *Estudar a convergente da integral imprópria*

$$\int_0^\infty e^{-x} x^3 \, dx \, .$$

Resolução:

Observemos que

$$\int_0^\infty e^{-x} x^3 \, dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{(4-1)} \, dx = \Gamma(3) = 3! = 6 \, ,$$

logo a integral imprópria $\int_0^\infty e^{-x} x^3 \, dx$ será convergente e seu valor será 6.

$\boxed{\textbf{F I M}}$