Notas de Aula de SLC534 - Desenho Geométrico e Geometria Descritiva

Wagner Vieira Leite Nunes
Departamento de Matemática
ICMC - USP

16 de abril de 2015

Sumário

Capítulo 1

Desenho Geométrico

Ao longo deste capítulo trataremos de conceitos e problemas associados a Desenho Geométrico no plano.

1.1 Construções Elementares

Citando a introdução do Livro Construções Geométricas do Prof. Eduardo Wagner (Proj. IMPA/VITAE), as construções geométricas já haviam sido consideradas no século V a.C. .

A palavra **número** era usada somente para os inteiros e uma fração (ou número racional) era vista como a razão entre dois números inteiros.

A noção de número real estava ainda longe de ser concebida.

Nos problemas, as grandezas que apareciam, em vez de serem associadas a números, eram vistas como medidas de segmentos de reta.

Com isto, muitos problemas poderiam ser resolvidos geometricamente (mesmo que não se conhece o valor do mesmo do ponto de vista numérico), ou seja, **resolver** uma equação poderia estar associada a idéia de **construir** a solução.

Como motivação o autor considera o seguinte exemplo:

Exemplo 1.1.1 *Encontrar, geometricamente, uma solução* $\underline{x}$, *da equação*

$$a\,x = b\,c\,,$$

onde $a\,,b\,,c$ *são valores conhecidos (ou seja, medidas de segmentos de retas dados, com* $a \neq 0$*).*

Resolução:

Um modo como essa equação poderia ser resolvida era encará-la da seguinte forma: tentar encontrar, geometricamente, a altura, de comprimento $\underline{x}$, de um retângulo de base de comprimento $\underline{a}$ que tivesse a mesma área de um retângulo com altura de comprimento $\underline{b}$ e base de comprimento $\underline{c}$.

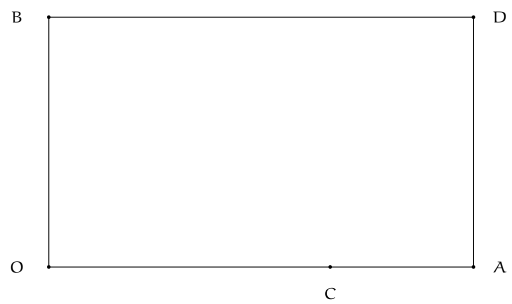
Para tanto agia-se da seguinte forma:

1º: Constrói-se, geometricamente, o retângulo $\square OBDA$ (veja figura abaixo), de tal modo que:

$$OA = a \quad \text{e} \quad OB = b\,.$$

2º: Sobre o lado $\overline{OA}$, encontra-se o ponto $\underline{C}$, de tal modo que (veja figura abaixo):

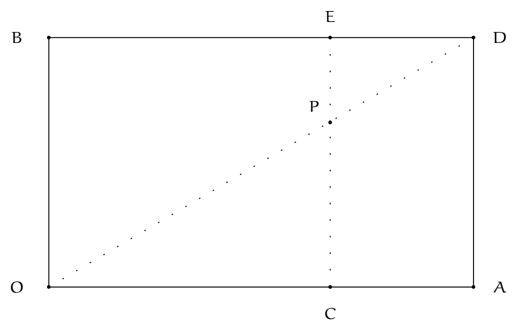
$$OC = c\,.$$



Observemos que, caso $c > a$, então o ponto $\underline{C}$ estará no prolongamento do lado $\overline{OA}$.

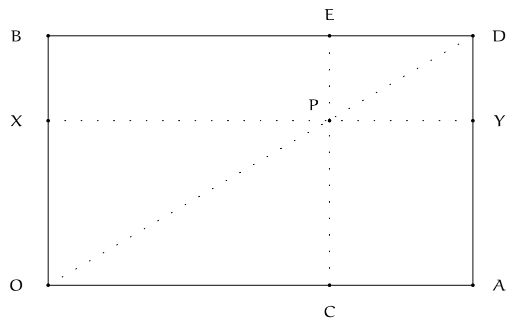
3º: Traça-se, pelo ponto $\underline{C}$, a reta paralela à reta que contém lado $\overline{OB}$.

Esta reta encontrará a diagonal (ou o prolongamento da mesma) $\overline{OD}$, do retângulo $\square OBDA$, em um ponto que denotaremos por $\underline{P}$ e também encontrará o lado $\overline{BD}$, do retângulo $\square OBDA$, em um ponto que denotaremos por $\underline{E}$ (veja figura abaixo).



4. Traça-se, pelo ponto $\underline{P}$, a reta paralela à reta que contém o lado $\overline{OA}$.

Esta encontrará os lados $\overline{OB}$ e $\overline{AD}$, do retângulo $\square OADB$, nos pontos que denotaremos por $\underline{X}$ e $\underline{Y}$, respectivamente (veja figura abaixo).



5. A solução da nossa equação será

$$x = OX\,.$$

Para demonstrar isso observemos que:

1. Como, por construção, as retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{XY}$, $\overleftrightarrow{OB}$ e $\overleftrightarrow{CE}$, $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são paralelas, segue que os triângulos ΔODA, ΔOBD são congruentes (caso LLL comum); os triângulos ΔOPC, ΔOXP são congruentes (caso LLL comum) e os triângulos ΔPDY, ΔPED também são congruentes (caso LLL comum).

   Portanto, dois a dois, eles têm mesma área.

2. Temos que

$$\text{área}(\Delta OBD) = \text{área}(\Delta ODA) \tag{1.1}$$

   e

$$\text{área}(\Delta OBD) = \text{área}(\Delta OXP) + \text{área}(\square XBEP) + \text{área}(\Delta PED) \tag{1.2}$$
$$\text{área}(\Delta ODA) = \text{área}(\Delta OPC) + \text{área}(\square CPYA) + \text{área}(\Delta PDY)\,. \tag{1.3}$$

   Sabemos que

$$\text{área}(\Delta OPC) = \text{área}(\Delta OXP) \quad \text{e} \tag{1.4}$$
$$\text{área}(\Delta PDY) = \text{área}(\Delta PED)\,. \tag{1.5}$$

   Logo, de (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) e (1.5), segue que

$$\text{área}(\square XBEP) = \text{área}(\square CPYA)\,. \tag{1.6}$$

   Logo os retângulos $\square XBEP$ e $\square CPYA$ têm mesma área.

3. Temos também que

$$\begin{aligned}
\text{área}(\square OBEC) &= \text{área}(\Delta OPC) + \text{área}(\Delta OXP) + \text{área}(\square XBEP) \\
&\overset{(1.4)}{=} 2\,\text{área}(\Delta OPC) + \text{área}(\square XBEP) \\
&\overset{(1.6)}{=} 2\,\text{área}(\Delta OCP) + \text{área}(\square CPYA) \\
&\overset{(1.4)}{=} \text{área}(\Delta OCP) + \text{área}(\Delta OXP) + \text{área}(\square CPYA) \\
&= \text{área}(\square OXYA).
\end{aligned}$$

Logo os retângulos $\square OBEC$ e $\square OXYA$ têm mesma área, ou seja,

$$OC \cdot OB = OA \cdot OX\,, \quad \text{isto é}, \quad b\,c = a\,x\,.$$

Assim encontramos, geometricamente, a solução $\underline{x}$ para nossa equação!

1.1.1 Retas Perpendiculares

Definição 1.1.1 *Sejam $\underline{r}$ uma reta.*

Uma **reta perpendicular** *à reta $\underline{r}$ é uma reta que forma ângulo reto (isto é, igual a $\dfrac{\pi}{2}$ radianos) com a reta $\underline{r}$.*

Com isto podemos resolver, geometricamente, o seguite problema:

Problema 1.1.1 *Dados uma reta $\underline{r}$ e um ponto $\underline{P}$ encontrar, geometricamente, a reta perpendicular à reta $\underline{r}$, que contenha o ponto $\underline{P}$.*

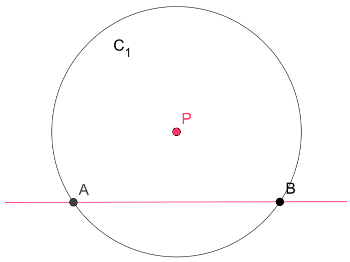
Resolução:

1.o caso: o ponto $\underline{P}$ não pertence à reta $\underline{r}$:

Como encontrar, geometricamente, a reta perpendicular a uma reta $\underline{r}$, que contém o ponto $\underline{P}$, que não pertence a reta $\underline{r}$?

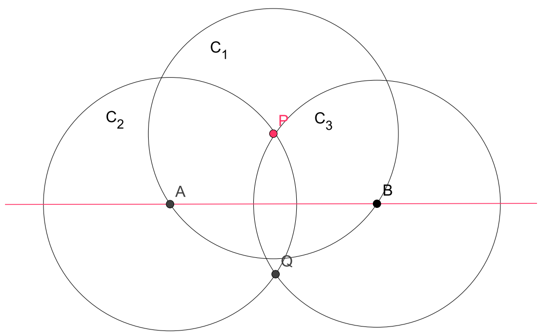
Uma construção possível seria:

1. Centrando o compasso no ponto $\underline{P}$, com uma abertura maior que a distância do ponto $\underline{P}$ à reta $\underline{r}$, tracemos uma circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}_1}$, que interceptará a reta $\underline{r}$ em dois pontos, distintos, que denotaremos por $\underline{A}$ e $\underline{B}$ (ver figura abaixo);

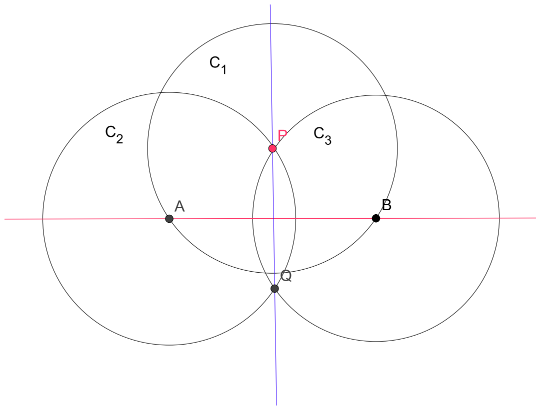


2. Centrando o compasso no ponto $\underline{A}$, com abertura AP, tracemos a circunferência, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}_2}$, e centrando o compasso no ponto $\underline{B}$, com abertura AP, tracemos a circunferência, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}_3}$.

   Com isto temos que as circunferências $\underline{\mathcal{C}_2}$ e $\underline{\mathcal{C}_3}$ se interceptam em dois pontos, que denotaremos por $\underline{P}$ e $\underline{Q}$ (ver figura abaixo);



3. A reta que contém os pontos $\underline{P}$ e $\underline{Q}$, é a reta perpendicular a reta $\underline{r}$ e que contém o ponto $\underline{P}$ (ver figura abaixo).



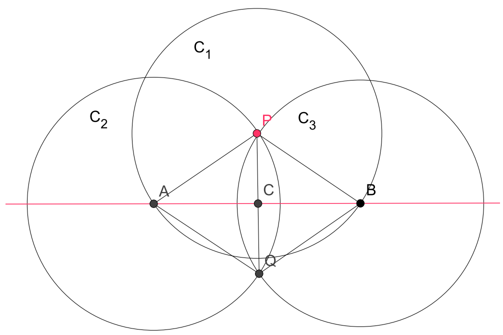
Para mostrar que isto é de fato verdade, consideremos $\underline{C}$, o ponto de intersecção da reta $\underline{r}$ com a reta que contém os pontos (distintos) $\underline{P}$ e $\underline{Q}$.

Observemos que (veja figura abaixo):

$$\Delta PBQ \equiv \Delta PQA \text{ (LLL comum,)} \quad \text{logo,} \quad \widehat{CPB} \equiv \widehat{APC} \quad \text{e}$$

$$\Delta APC \equiv \Delta CPB \text{ (LAL comum,)} \quad \text{logo,} \quad AC = CB \;\text{ e }\; \widehat{PCA} \equiv \widehat{BCP}\,. \tag{1.7}$$

$$\text{Como} \quad \widehat{PCA} + \widehat{BCP} = \pi \quad \text{e} \quad \widehat{PCA} \equiv \widehat{BCP}\,, \quad \text{segue que} \quad \widehat{PCA} = \frac{\pi}{2}\,. \tag{1.8}$$



Portanto a reta $\underline{r}$ e a reta que contém os pontos$\underline{P}$ e $\underline{Q}$ são perpendiculares, como queríamos mostrar.

Observação 1.1.1 *Na verdade acabamos de provar que as diagonais do losango $\Diamond APBQ$, cruzam-se perpendicularmente.*

De fato, pois, de (1.8), segue que:

$$\frac{\pi}{2} = \widehat{PCA} = \widehat{BCP} = \widehat{ACQ} = \widehat{QCB}\,,$$

e nos seus respectivos pontos médios, pois, de (1.7), segue que:

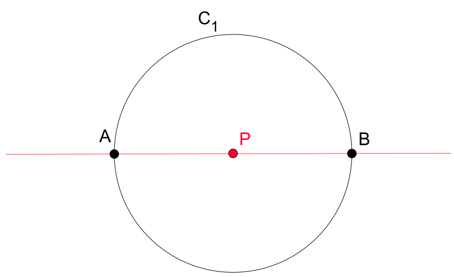
$$AC = CB \quad e \quad CP \equiv QC\,.$$

2.o caso: O ponto P pertence à reta r:

Como encontrar, geometricamente, a reta perpendicular a uma reta r, que contém o ponto P, que pertence a reta r ?

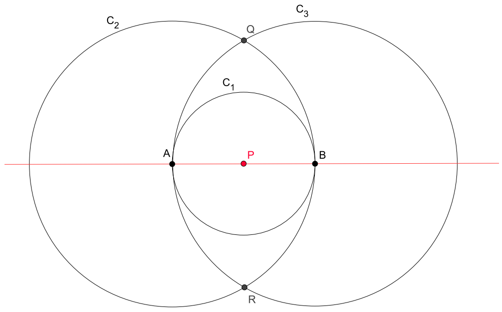
Uma construção possível seria:

1. Centrando o compasso no ponto P, com umaabertura qualquer, tracemos uma circunferência, que denotaremos por $\mathcal{C}_1$, que interceptará a reta r em dois pontos, que denotarems por A e B (ver figura abaixo):

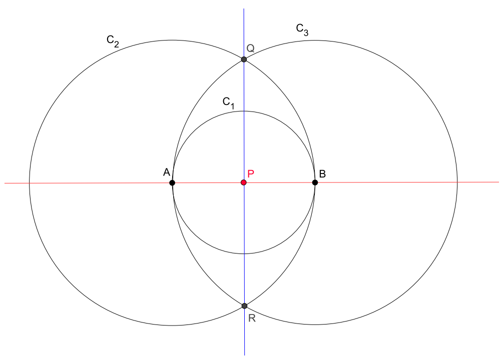


2. Centrando o compasso no ponto A, com abertura AB (poderíamos ter escolhido qualquer abertura maior que AP), tracemos a circunferência, que denotaremos por $\mathcal{C}_2$, e centrando o compasso no ponto B, com abertura AB (ou a mesma escolhida anteriormente), tracemos uma circunferência, que denotaremos por $\mathcal{C}_3$.

   Com isto, teremos que as circunferência $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ se interceptarão em dois pontos, que denotaremos por Q e R (ver a figura abaixo):

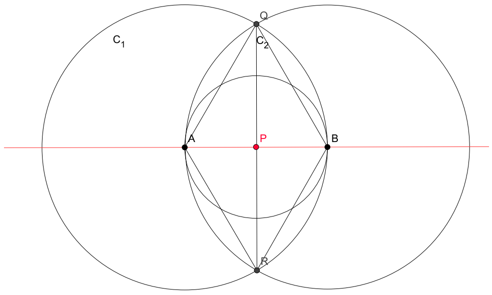


3. A reta que contém os pontos P e Q é a reta perpendicular a reta r e que contém o ponto P (veja figura abaixo).



Para mostrarmos que isto é verdade, observemos que o quadrilátero $\lozenge AQBR$ é um losango (pois seus lados têm mesma medida que é igual ao raio da circunferência $\underline{\mathcal{C}_2}$ ou $\underline{\mathcal{C}_3}$ - ver figura abaixo).

Logo, como vimos anteriormente, suas diagonais cruzam-se perpendicularmente, isto é, a reta $\underline{r}$ e a reta que contém os pontos $\underline{Q}$ e $\underline{R}$ são perpendiculares e a segunda contém o ponto $\underline{P}$ (que será o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e do segmento $\overline{RQ}$), completando a demonstração da afirmação.



□

1.1.2 Reta Mediatriz

Definição 1.1.2 *Sejam $\underline{A}$ e $\underline{B}$ são pontos distintos.*

A **reta mediatriz** *do segmento $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes do ponto $\underline{A}$ e do ponto $\underline{B}$.*

Com isto, podemos tratar do s

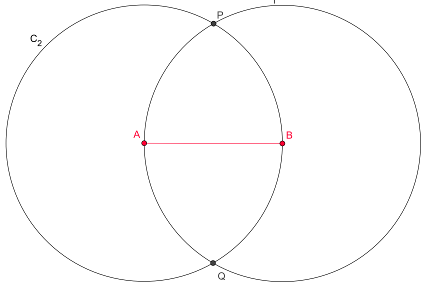
Problema 1.1.2 *Encontrar, geometricamente, a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.*

Resolução:

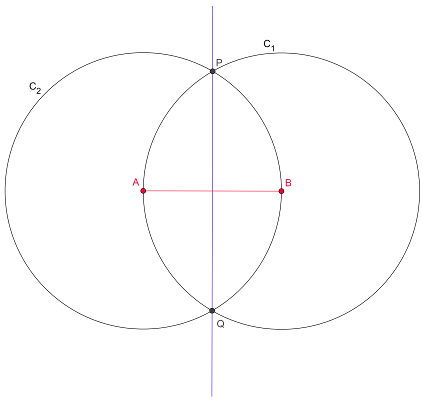
Uma construção possível seria:

1. Centrando o compasso no ponto $\underline{A}$, com abertura AB, tracemos uma circunferência, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}_1}$, e centrando o compasso nos pontos $\underline{B}$, com abertura AB (bastaria ser maior que $\dfrac{AB}{2}$), tracemos uma circunferência, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}_2}$.

   As circunferências $\underline{\mathcal{C}_1}$ e $\underline{\mathcal{C}_2}$ se interceptarão em dois pontos, que denotaremos por $\underline{P}$ e $\underline{Q}$ (ver figura abaixo);



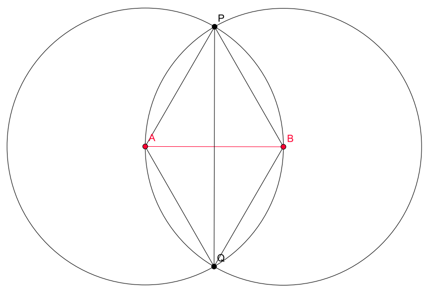
2. Afirmamos que a reta que contém os pontos $\underline{P}$ e $\underline{Q}$ é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ (veja a figura abaixo).



Mostremos que a afirmação acima é verdadeira.

Para isto observemos que o quadrilátero $\lozenge APBQ$ é um losango (pois seus lados têm mesma medida que é igual ao raio da circunferência $\underline{\mathcal{C}_1}$ ou $\underline{\mathcal{C}_2}$, a saber AP - veja figura abaixo).

Logo, como vimos anteriormente, suas diagonais cruzam-se perpendicularmente nos seus pontos médios, isto é, nos pontos $\underline{P}$ e $\underline{Q}$ estão na mediatriz (veja a figura abaixo).



Falta mostrar que todo ponto da reta que contém os pontos $\underline{P}$ e $\underline{Q}$, são equidistantes dos pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$.

Isso será deixado como exercício para o leitor (a seguir).

Exercício 1.1.1 *Mostrar a afirmação acima.*

1.2 Retas Paralelas

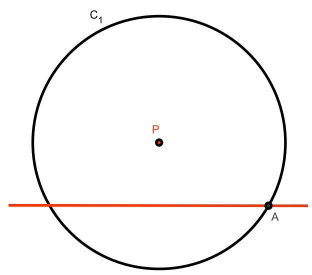
Problema 1.2.1 *Encontrar, geometricamente, a reta paralela à reta $\underline{r}$ dada, que contém o ponto $\underline{P}$, que não pertence à reta $\underline{r}$.*

Resolução:

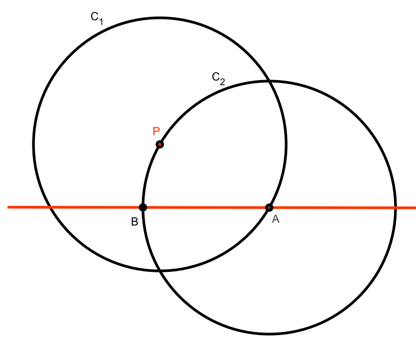
Daremos três possibilidades para a construção:

1.2.1 1.a construção da paralela

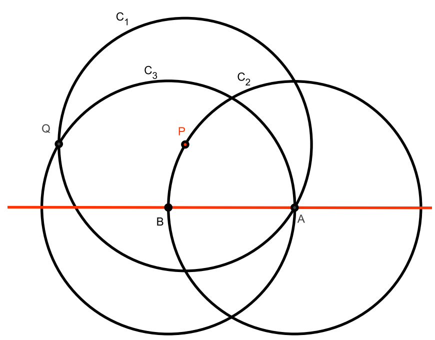
1. Centrando o compasso no ponto P, escolha uma abertura PA de tal modo que, a circunferência, que denotaremos por $\mathcal{C}_1$, obtida intercepte a reta r em um ponto, que denotaremos por A (no caso de obter dois pontos, escolha um deles);



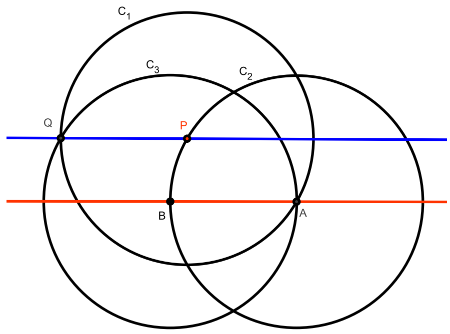
2. Centrando o compasso no ponto A, com abertura PA, tracemos uma circunferência, que denotaremos por $\mathcal{C}_2$, que intercepterá a reta r em um ponto B (na verdade obteremos dois pontos, escolha um deles);



3. Centrando o compasso no ponto B, com a abertura PA, tracemos uma circunferência, que denotaremos por $\mathcal{C}_3$, que intercepterá a circunferência $\mathcal{C}_1$ em um ponto Q, que está no mesmo semi-plano determinado pela reta r e que contém o ponto P (na verdade também interceptará a reta r no ponto A);



4. Afirmamos que a reta que contém os pontos $\underline{P}$ e $\underline{Q}$ é uma reta paralela a reta $\underline{r}$ (e contém o ponto $\underline{P}$ - veja a figura abaixo).



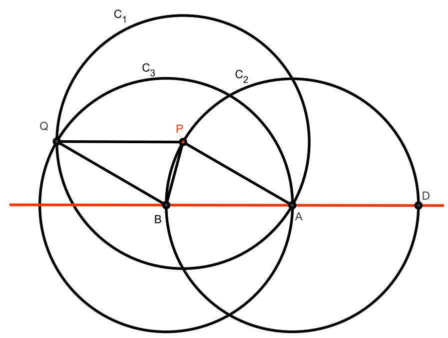
Mostremos que a afirmação acima é verdadeira.

Para isto, observemos que quadrilátero $\Diamond PABQ$ é um losango (pois seus lados têm mesma medida que é igual ao raio da circunferência - ver figura abaixo).

Logo, como vimos anteriormente, seus lados adjacentes são paralelos o que mostra que a reta $\underline{r}$ e a reta que contém os pontos $\underline{P}$ e $\underline{Q}$ são paralelas.

Observação 1.2.1 *Uma outra demonstração seria:*

Consideremos o ponto $\underline{D}$, o outro ponto de intersecção da reta $\underline{r}$ com a circunferência $\underline{\mathcal{C}_2}$ (veja a figura abaixo).



Observemos que o triângulo ΔPAB é isósceles (pois, os lados $\overline{PA}$ e $\overline{AB}$ têm mesma medida e são iguais a medida do raio da circunferência $\underline{\mathcal{C}_2}$).

Assim

$$\widehat{BPA} \equiv \widehat{ABP}.$$

Os triângulos ΔPAB e ΔPBQ são congruentes (LLL comum), segue que

$$\widehat{BPA} = \widehat{QPB}. \tag{1.9}$$

Do triângulo ΔPAB, temos que

$$\widehat{BPA} + \widehat{ABP} + \widehat{PAB} = \pi \quad \textit{e como} \quad \widehat{BPA} = \widehat{ABP}, \qquad \textit{teremos:}$$
$$2\,\widehat{BPA} + \widehat{PAB} = \pi. \tag{1.10}$$

Por outro lado,

$$\widehat{DAP} + \widehat{PAB} = \pi \qquad \textit{e, de (1.10), teremos:}$$
$$\widehat{DAP} = 2\,\widehat{BPA} \overset{(1.9)}{=} \widehat{BPA} + \widehat{QPB} = \widehat{QPA}.$$

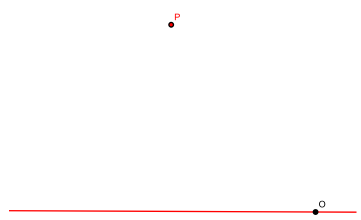
Conclusão:

$$\widehat{DAP} = \widehat{QPA}.$$

Portanto a reta $\underline{r}$ e a reta que contém os pontos $\underline{P}$ e $\underline{Q}$ são paralelas (pois a reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{P}$ tem ângulos alternos internos iguais com as retas que contém os pontos $\underline{Q}$ e $\underline{P}$ e a reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{D}$).

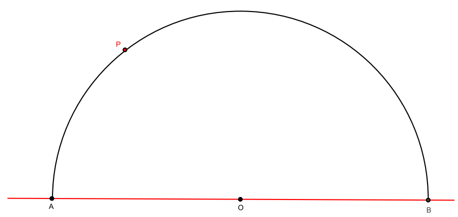
1.2.2 2.a construção da paralela

1. Escolha um ponto $\underline{O}$ sobre a reta $\underline{r}$, que não pertença à reta perpendicular a reta $\underline{r}$ que contém o ponto $\underline{P}$ (veja figura abaixo);

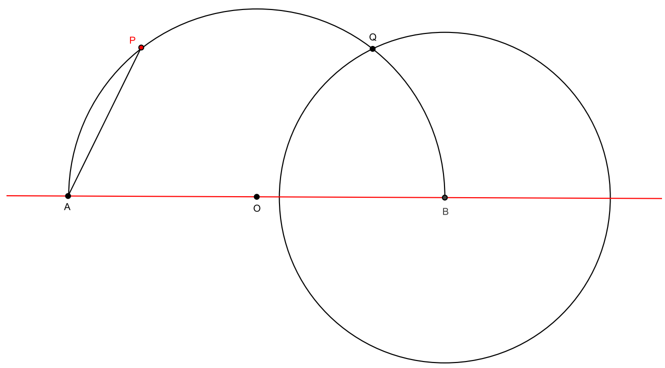


2. Centrando o compasso no ponto $\underline{O}$, tracemos uma semi-circunferência, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}_1}$, que contém o ponto $\underline{P}$ (ou seja seu raio será OP) e está contida no semi-plano determinado pela reta $\underline{r}$ e que contém o ponto $\underline{P}$.

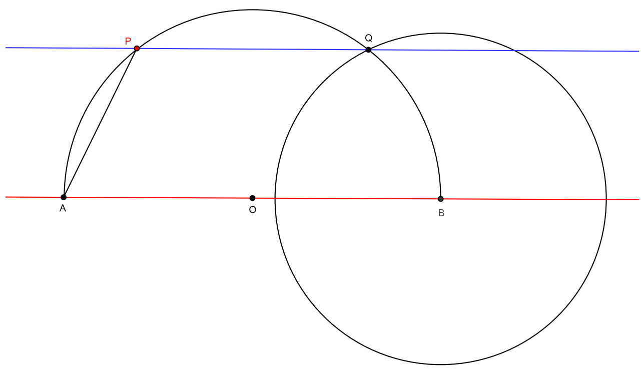
   Esta semi-circunferência interceptará a reta $\underline{r}$ em dois pontos, que denotaremos por $\underline{A}$ e $\underline{B}$ (ver figura abaixo);



3. Centrando o compasso no ponto B com abertura AP, tracemos uma circunferência, que denotaremos por $\mathcal{C}_2$, que intercepterá a semi-circunferência $\mathcal{C}_1$ em um ponto, que denotaremos por Q (figura abaixo);



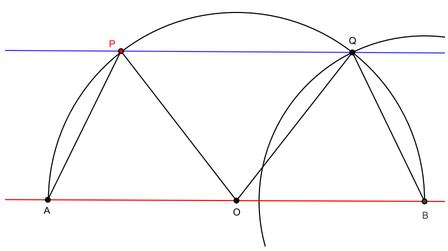
4. A reta que contém os pontos P e Q é uma reta paralela a reta r (e que contém o ponto P) (veja a figura abaixo).



Mostremos que a reta encontrada é a reta paralela à reta r que contém o ponto P.

Para isto, observemos que os triângulos ΔOAP, ΔOQB e ΔOPQ são isósceles, logo deveremos ter (veja a figura abaixo):

$$\widehat{OAP} \equiv \widehat{APO}, \quad \widehat{QBO} \equiv \widehat{OQB} \quad \text{e} \quad \widehat{OPQ} \equiv \widehat{PQO}. \tag{1.11}$$



Além disso os triângulos ΔOAP, ΔOQB são congruentes (caso LLL), logo, deveremos ter:

$$\widehat{POA} = \widehat{BOQ}\,.$$

Do triângulo ΔOPQ temos

$$\pi = \widehat{OPQ} + \widehat{QOP} + \underbrace{\widehat{PQO}} \overset{(1.11)}{=} 2\,\widehat{OPQ} + \widehat{QOP}.$$

Mas

$$\pi = \widehat{POA} + \widehat{QOP} + \widehat{BOQ} = 2\widehat{POA} + \widehat{QOP}.$$

Logo

$$\widehat{POA} = \widehat{OPQ}\,,$$

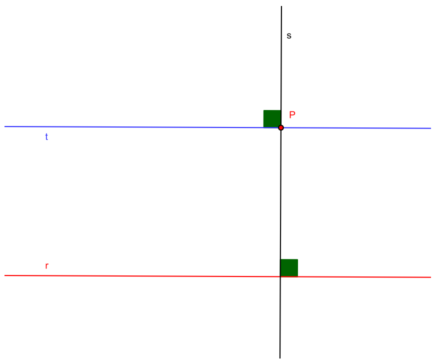
mostrando que a reta $\underline{r}$ e a reta que contém os pontos $\underline{P}$ e $\underline{Q}$ são paralelas (são ângulos alternos internos).

□

1.2.3 3.a construção da paralela

1. Tracemos a reta perpendicular, que denotaremos por $\underline{s}$, à reta $\underline{r}$ que contém o ponto $\underline{P}$ (como na seção (1.1.1));
2. Tracemos a reta perpendicular, $\underline{t}$, a reta s que contém o ponto P (como na seção (1.1.1));
4. A reta $\underline{t}$ que contém os pontos $\underline{P}$ é a reta paralela a reta $\underline{r}$ (e contém o ponto $\underline{P}$).

   A figura abaixo ilustra a situação.



A demonstração, neste caso, é muito simples, visto que a reta $\underline{t}$ (que contém o ponto $\underline{P}$) e a reta $\underline{r}$ são perpendiculares a reta $\underline{s}$, logo elas devem ser retas paralelas.

1.3 Bissetriz

Lembremos a:

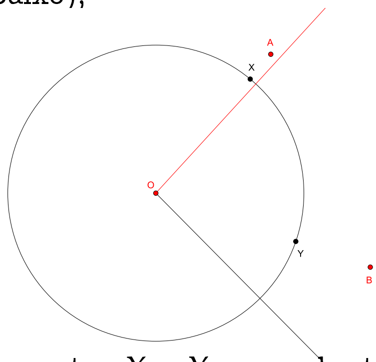
Definição 1.3.1 *Se os pontos $\underline{O}$, $\underline{A}$ e $\underline{B}$ não são colineares, a* **bissetriz** *do ângulo $\widehat{BOA}$ é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes dos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ do ângulo dado.*

1.3.1 Construção da bissetriz

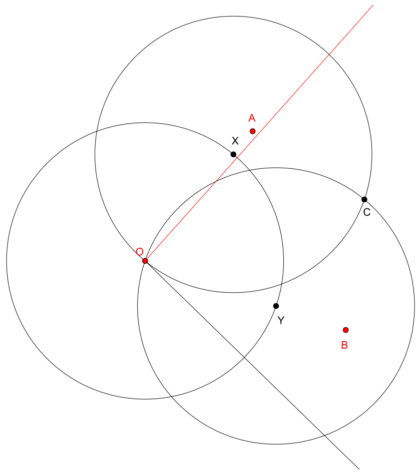
A questão que colocamos é a seguinte: como traçar a reta bissetriz do ângulo $\widehat{BOA}$?

Uma construção possível seria:

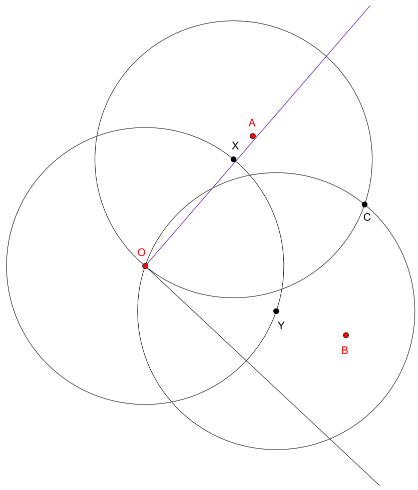
1. Centrando o compasso no ponto O, com uma abertura qualquer, tracemos uma circunferência, que interceptará os lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ do ângulo em dois pontos, que denotaremos por $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ (veja a figura abaixo);



2. Centrando o compasso nos pontos $\underline{X}$ e $\underline{Y}$, com abertura do item acima, tracemos as circunferências, que se interceptarão em um ponto, que denotaremos por $\underline{C}$ (e no ponto $\underline{O}$ - veja a figura aba



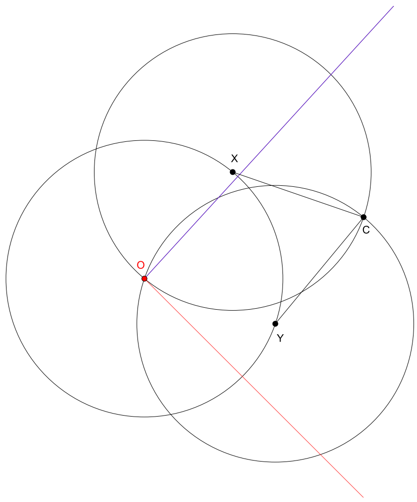
3. A semi-reta que contém os pontos $\underline{O}$ e $\underline{C}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{BOA}$ (veja a figura abaixo).



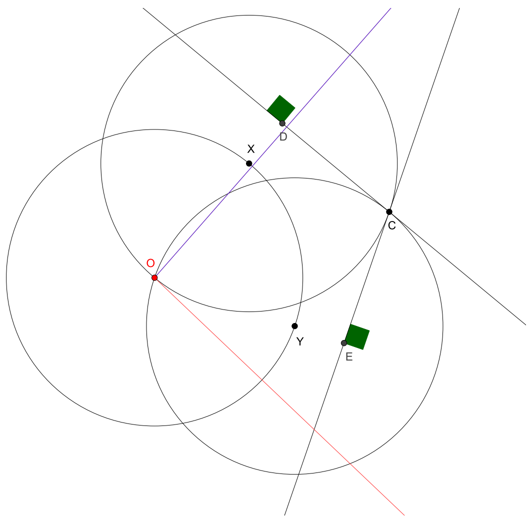
A seguir exibiremos a demonstração que a construção acima nos fornece, realmente, a bissetriz do ângulo $\widehat{BOA}$.

Observemos que os triângulos ΔOXC e ΔOCY são congruentes (LL L comum - veja a figura abaixo) assim

$$\widehat{COX} \equiv \widehat{COY}. \tag{1.12}$$



Consideremos as retas perpendiculares aos lados $\overline{OA} = \overline{OX}$ e $\overline{OB} = \overline{OY}$, que contém o ponto $\underline{C}$, que interceptarão estes mesmos lados em dois pontos, que denotaremos por $\underline{D}$ e $\underline{E}$, respectivamente (veja a figura abaixo).



Como os triângulos ΔODC e ΔOCE são congruentes (L comum A (por (1.12)) e A oposto ao lado comum, que é reto), segue que

$$CD \equiv CE$$

mostrando que o ponto $\underline{C}$ pertencerá a bissetriz do ângulo $\widehat{BOA}$.

Falta mostrar que todo ponto da semi-reta que contém o ponto $\underline{O}$ e o ponto $\underline{C}$, é equidistante dos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ do ângulo $\widehat{BOA}$.

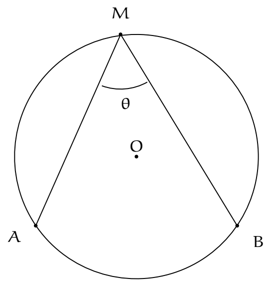
Isso será deixado como exercício (a seguir) para o leitor.

□

Exercício 1.3.1 *Mostre que a semi-reta* $\overrightarrow{OC}$ *é a bissetriz do ângulo* $\widehat{BOA}$ *.*

1.4 Arco Capaz

Consideremos dois pontos, que denotaremos por $\underline{A}$ e $\underline{B}$, distintos, pertencentes a uma circunferência, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, cujo centro está em um ponto, que indicaremos por $\underline{O}$.



Afirmamos que para todo ponto, que indicaremos por $\underline{M}$, sobre um dos arcos da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ (veja a figura abaixo), determinados pelos pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$, o ângulo

$$\theta \doteq \widehat{AMB}$$

será constante.

De fato, observemos que (veja figura abaixo):

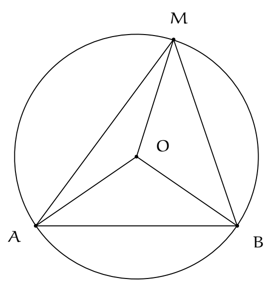
$$\Delta OAM \text{ é um triângulo isósceles, assim teremos: } \alpha \doteq \widehat{OAM} = \widehat{AMO}; \tag{1.13}$$

$$\Delta AOB \text{ é um triângulo isósceles, assim teremos: } \beta \doteq \widehat{BAO} = \widehat{OBA}; \tag{1.14}$$

$$\Delta BOM \text{ é um triângulo isósceles, assim teremos: } \gamma \doteq \widehat{MBO} = \widehat{OMB}. \tag{1.15}$$

Notemos também, que:

$$\begin{aligned} \theta &= \widehat{AMO} + \widehat{OMB} \\ &\overset{(1.13) \text{ e } (1.15)}{=} \alpha + \gamma . \end{aligned} \tag{1.16}$$



Do triângulo ΔAOB, segue que:

$$\begin{aligned}\pi &= \widehat{BAO} + \widehat{AOB} + \widehat{OBA} \\ &\overset{(1.14)}{=} 2\,\beta + \widehat{AOB} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Do triângulo ΔAMB, temos que:

$$\begin{aligned}\pi &= \overbrace{\widehat{AMB}}^{=\widehat{AMO}+\widehat{OMB}} + \overbrace{\widehat{MBA}}^{=\widehat{MBO}+\widehat{OBA}} + \overbrace{\widehat{BAM}}^{\widehat{BAO}+\widehat{OAM}} \\ &\overset{(1.13),(1.14)\text{ e }(1.15)}{=} (\alpha+\gamma) + (\gamma+\beta) + (\beta+\alpha) \\ &= 2\,[(\alpha+\gamma)+\beta] \\ &\overset{(1.16)}{=} 2\,\theta + 2\,\beta\,. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Comparando (1.17) com (1.18), teremos:

$$2\,\beta + \widehat{AOB} \overset{(1.17)}{=} \pi \overset{(1.18)}{=} 2\theta + 2\beta\,,$$

ou seja,

$$2\,\theta = \widehat{AOB}\,,$$

o que implicará

$$\theta = \frac{\widehat{AOB}}{2},$$

ou seja, o ângulo $\underline{\theta}$ será constante, como queríamos demonstrar.

$\square$

Com isto podemos introduzir A:

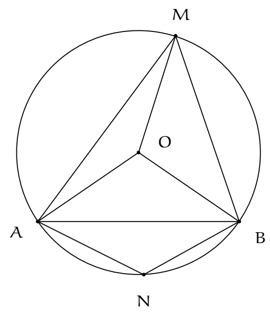
Definição 1.4.1 *O arco* $\overset{\frown}{AMB}$ *será denominado* **arco capaz do ângulo** $\theta = \widehat{AMB}$, *sobre o segmento* $\overline{AB}$.

Observação 1.4.1

1. *Podemos concluir que um observador que anda sobre o arco, determinado pelos pontos* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$, *da circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$ *(o arco capaz) verá o segmento* $\overline{AB}$ *sempre sob um mesmo ângulo (o ângulo* $\underline{\theta}$*).*

2. *Consideremos um ponto, que indicaremos por* $\underline{N}$, *que pertence ao outro arco da circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$, *determinado pelos pontos* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$.

   Então o ângulo $\widehat{BNA}$ *também será constante e, além disso, será igual a* $\underline{\pi-\theta}$ *(veja a figura abaixo).*



De fato, sabemos que o ângulo $\widehat{AOB}$ *satisfaz:*

$$\widehat{AOB} = 2\theta$$

e que o ângulo $2\widehat{BNA}$*, é igual ao suplementar do ângulo* $\widehat{AOB}$ *(por causa do arco capaz* $A\overset{\frown}{N}B$*), ou seja,*

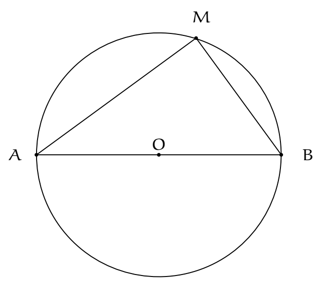
$$2\widehat{BNA} = 2\pi - 2\theta, \qquad \textit{ou ainda ,} \quad \widehat{BNA} = \pi - \theta\,,$$

como afirmamos.

3. *Um caso particular, importante é quando o segmento* $\overline{AB}$ *é o diâmetro da circunferência.*

   Neste caso temos que teremos
   $$\widehat{AMB} = \frac{\pi}{2}\,,$$
   ou seja, o triângulo ΔAMB *é retângulo no vértice* $\underline{M}$.

   Com isto acabamos de demonstrar que um triângulo que tenha como um de seus lados, o diâmetro de uma circunferência e o outro vértice sobre um dos arcos de uma semi-circunferência, deverá ser um triângulo retângulo e o ângulo reto corresponderá ao oposto do lado que é o diâmetro da circinferência (na figura abaixo o ângulo $\widehat{AMB}$*).*



4. *Devido ao fato acima, uma semi-circunferência será chamada de* **arco capaz do ângulo** $\frac{\pi}{2}$, *associada ao segmento que um diâmetro da circunferência.*

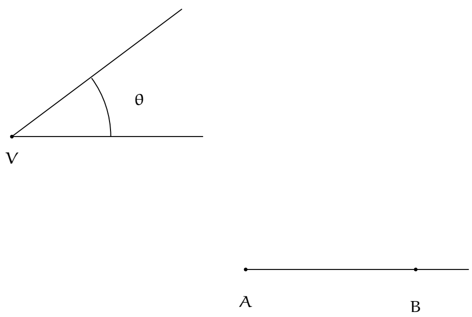
Nosso objetivo é construir, geometricamente, o arco capaz de um ângulo dado.
Para isto precisamos saber como transportar, geometricamente, ângulos.

1.4.1 Transporte de ângulos

Consideremos um ângulo $\underline{\theta}$, com vértice em um ponto, que indicaremos por $\underline{V}$, e dois pontos distintos, que serão indicados por $\underline{A}$ e $\underline{B}$.

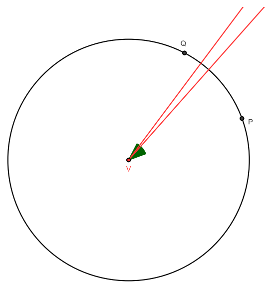
Queremos encontrar um ponto, que indicaremos por $\underline{X}$, de tal modo que (veja a figura abaixo)

$$\widehat{BAX} = \theta\,.$$

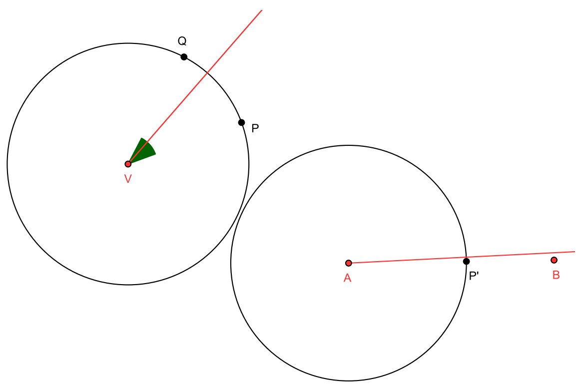


Neste caso agiremos da seguinte forma:

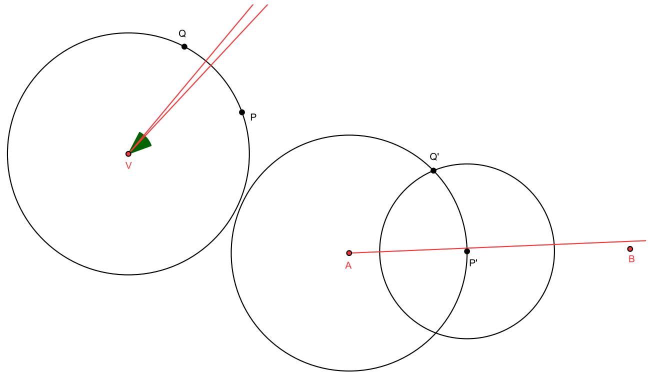
1. Traçamos uma circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, centrada um um ponto, que indicaremos por $\underline{V}$, com raio qualquer, que determinará dois pontos, que indicaremos por $\underline{P}$ e $\underline{Q}$, pertencentes aos lados do ângulo $\underline{\theta}$ (veja a figura abaixo);



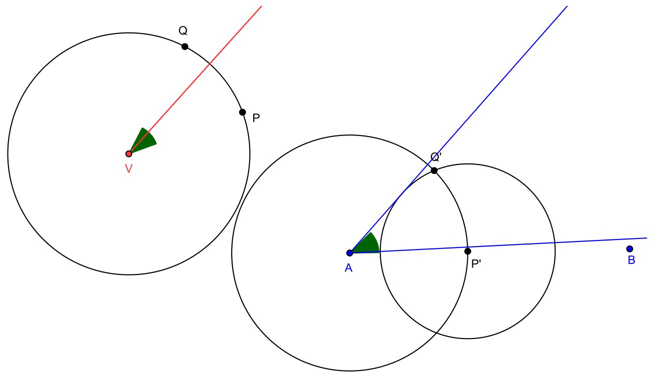
2. Traçamos uma circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}\,'}$, centrada no ponto $\underline{A}$, com o mesmo raio da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ do item 1., que determinará um ponto, que indicaremos por $\underline{P'}$, sobre a semi-reta determinada pelos pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$, que tem como extremo o ponto $\underline{A}$ (veja a figura abaixo);



3. Tracemos, pelo ponto $\underline{B}$, uma circunferência centrada no ponto $\underline{P'}$, com o raio igual a PQ, que interceptará a circunferência $\underline{\mathcal{C}'}$ do item 2. em um ponto, que indicaremos por $\underline{Q'}$ (na verdade temos um outro ponto que poderia ser escolhido - veja a figura abaixo).



4. Com isto afirmamos que
$$\widehat{P'AQ'} = \widehat{PVQ} = \theta\,,$$
ou seja, transportamos, geometricamente, o ângulo $\underline{\theta}$.



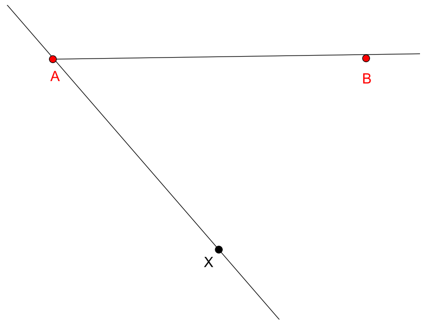
Para mostrar isto, observemos que, por construção, os triângulos ΔPVQ e $\Delta P'AQ'$ são conguentes (caso LLL), em particular, teremos
$$\widehat{P'AQ'} = \widehat{PVQ}\,,$$
com queríamos demonstrar.

1.4.2 Construção do arco capaz

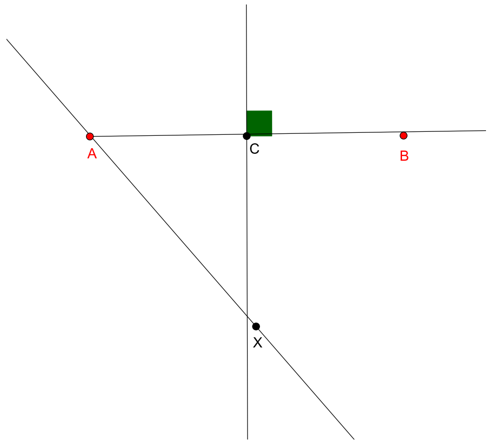
A seguir faremos a construção do arco capaz do ângulo $\underline{\theta}$, associado ao segmento $\overline{AB}$.

1. Suponhamos que um ponto, que indicaremos por $\underline{X}$, seja de tal modo que
$$\widehat{XAB} = \theta\,.$$

   Notemos que estamos usamos o transporte do ângulo $\underline{\theta}$ (veja a figura abaixo).

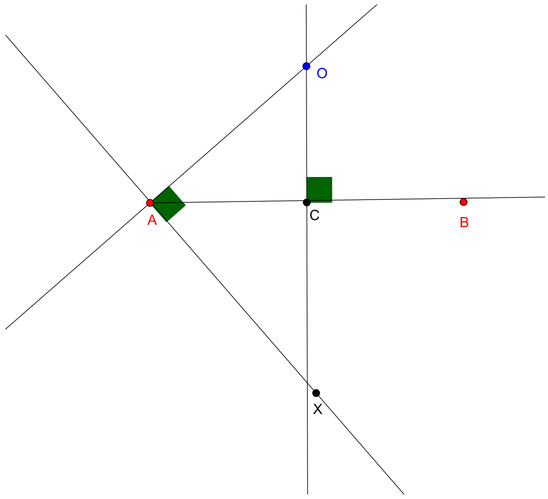


2. Tracemos a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, que encontra o segmento $\overline{AB}$ no seu ponto médio, que indicaremos por $\underline{C}$ (veja a figura abaixo).

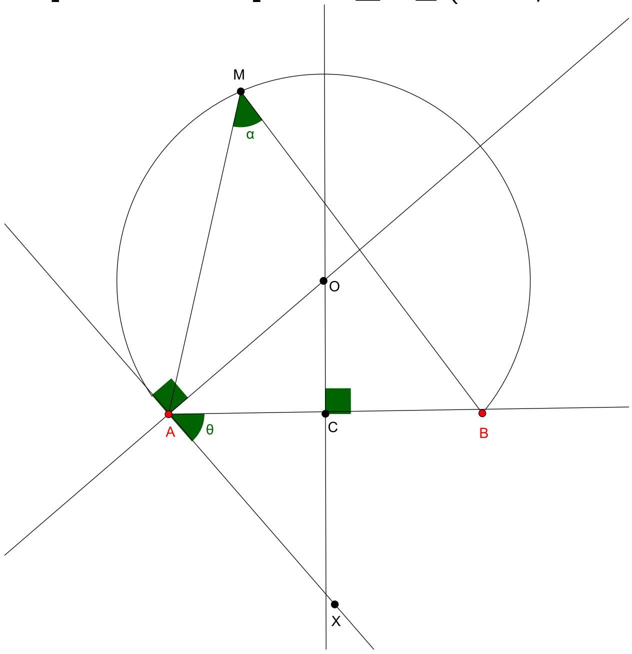


3. Tracemos a reta perpendicular à reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{X}$, que contém o ponto $\underline{A}$.

   Esta encontrará a mediatriz do item 2. em um ponto, que indicaremos por $\underline{O}$(veja a figura abaixo).



4. O arco capaz do ângulo $\underline{\theta}$, associado ao segmento $\overline{AB}$, será o arco da circunferência de centro no ponto $\underline{O}$ e raio $\overline{OA}$, situado no semi-plano oposto ao que contém ponto $\underline{X}$, relativamente à reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$ (isto é, $\alpha = \theta$ - veja figura abaixo).

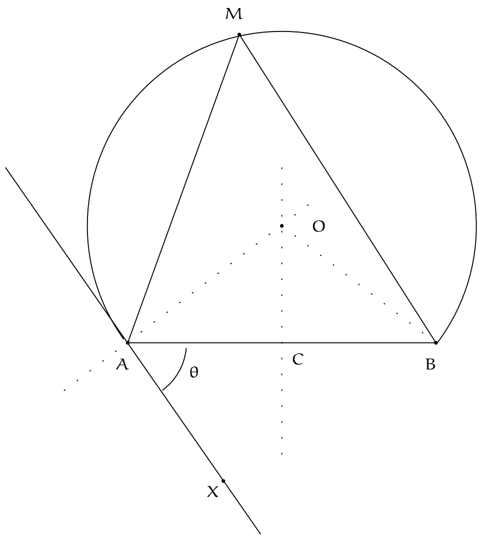


Mostremos que realmente

$$\alpha = \theta\,,$$

ou seja, o arco de circunferência obtido acima, é o arco capaz do ângulo $\underline{\theta}$, associado ao segmento $\overline{AB}$.

Para isto, observemos que os triângulos ΔAOC e ΔBCO são congruentes (caso LL L comum - veja figura abaixo).



Logo

$$\widehat{AOC} = \widehat{COB}\,, \quad \text{ou seja,} \quad \widehat{AOC} = \frac{1}{2}\,\widehat{AOB} \overset{\text{arco capaz}}{=} \widehat{AMB} \tag{1.19}$$

Do triângulo ΔAOC temos que

$$\pi = \widehat{OCA} + \widehat{CAO} + \widehat{AOC} \overset{\widehat{OCA}=\frac{\pi}{2}}{=} \frac{\pi}{2} + \widehat{CAO} + \widehat{AOC},$$

isto é,

$$\widehat{AOC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{CAO}\,. \tag{1.20}$$

Relativamente ao ponto $\underline{A}$, temos:

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \widehat{CAO} + \widehat{XAC} \overset{\widehat{XAC}=\theta}{=} \frac{\pi}{2} + \widehat{CAO} + \theta\,, \qquad \text{isto é,} \quad \frac{\pi}{2} - \widehat{CAO} = \theta\,. \tag{1.21}$$

Logo de (1.20) e (1.21), segue que

$$\widehat{AOC} = \theta\,.$$

Portanto,

$$\overbrace{\widehat{AMB}}^{=\alpha} \overset{(1.19)}{=} \widehat{AOC} = \theta\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad \alpha = \theta\,,$$

ou ainda, o arco $A\overset{\frown}{M}B$ será arco capaz do ângulo $\underline{\theta}$, associado ao segmento $\overline{AB}$, como queríamos demonstrar.

1.5 Divisão de um Segmento em Partes Iguais

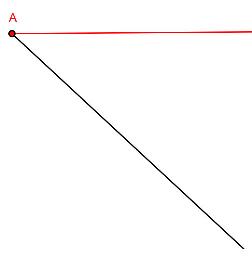
Fixemos dois pontos distintos, que indicaremos por $\underline{A}$ e $\underline{B}$.

Apresentaremos, a seguir, um método muito simples de dividir um segmento $\overline{AB}$, em $\underline{n}$ segmentos disjuntos de mesmo comprimento, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado.

Para ilustrar, consideraremos o caso em que $\underline{n = 5}$, ou seja, dividiremos o segmento $\overline{AB}$ em $\underline{5}$ segmentos disjuntos, justapostos, onde cada um desses segmentos têm o mesmo comprimento.

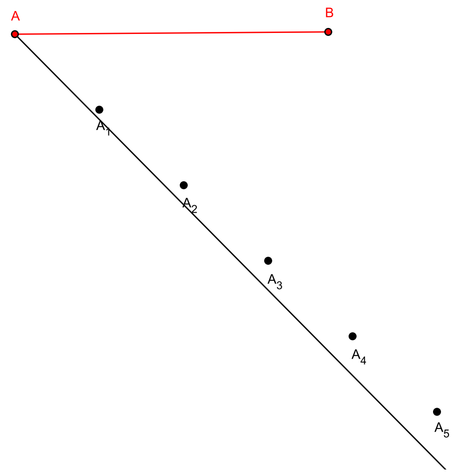
Agimos da seguinte forma:.

1. Tracemos uma semireta qualquer com extremo no ponto $\underline{A}$, distinta da semireta que contém o ponto $\underline{B}$ (veja a figura abaixo);

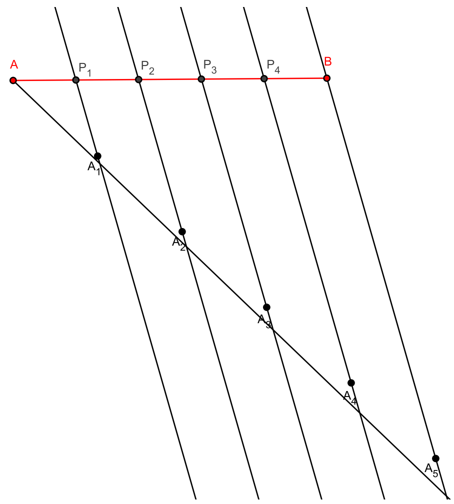


2. Sobre esta semireta construímos, com uso do compasso, $\underline{5}$ segmentos justapostos, de mesmo comprimento (veja a figura abaixo), que denominaremos por:

$$\overline{AA_1}\,, \quad \overline{A_1A_2}\,, \quad \overline{A_2A_3}\,, \quad \overline{A_3A_4} \quad \text{e} \quad \overline{A_4A_5}\,;$$



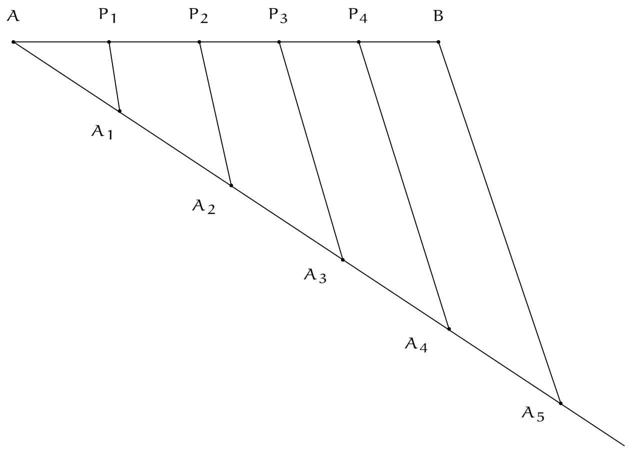
3. Tracemos as retas paralelas à reta que contém os pontos $\underline{B}$ e $\underline{A_5}$, pelos pontos $\underline{A_1}$, $\underline{A_2}$, $\underline{A_3}$ e $\underline{A_4}$, que encontrarão o segmento de reta $\overline{AB}$ em quatro pontos, que indicaremos por pontos $\underline{P_1}$, $\underline{P_2}$, $\underline{P_3}$, $\underline{P_4}$, respectivamente (veja a figura abaixo);



4. Afirmamos que os segmentos $\overline{AP_1}$, $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$ e $\overline{P_4B}$ têm mesmo comprimento e assim dividem o segmento $\overline{AB}$ em $\underline{5}$ segmentos disjuntos, justapostos, todos com mesmo comprimento.

Mostremos que isto realmente é verdade.

Para isto, observemos que os triângulos ΔAP_1A_1 e ΔAP_2A_2 são semelhantes, pois, por construção, à reta que contém os pontos $\underline{P_1}$ e $\underline{A_1}$ é paralela à reta que contém os pontos $\underline{P_2}$ e $\underline{A_2}$ (caso AAA - veja a figura abaixo).



Logo, pelo Teorema de Thales, temos que a razão entre os comprimentos dos lados correspondentes dos triângulos acima, deverão ser iguais, em particular, teremos:

$$\frac{AP_1}{AP_2} = \frac{AA_1}{AA_2} \overset{AA_2=2AA_1}{=} \frac{AA_1}{2\,AA_1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ou seja,}\quad AP_2 = 2\,AP_1 \tag{1.22}$$

$$\text{ou ainda,}\quad P_1P_2 \overset{\text{figura acima}}{=} AP_2 - AP_1 \overset{(1.22)}{=} 2\,AP_1 - AP_1 = AP_1\,,$$

portanto,

$$P_1P_2 = AP_1. \tag{1.23}$$

De modo semelhante, temos que os triângulos ΔAP_1A_1 e ΔAP_3A_3 são semelhantes, pois, por construção, à reta que contém os pontos $\underline{P_1}$ e $\underline{A_1}$ é paralela à reta que contém os pontos $\underline{P_3}$ e $\underline{A_3}$ (caso AAA - veja a figura acima).

Novamente, pelo Teorema de Thales, teremos que a razão entre o comprimento dos lados correspondentes dos triângulos acima deverão ser iguais, em particular, teremos:

$$\frac{AP_1}{AP_3} = \frac{AA_1}{AA_3} \overset{AA_3=3AA_1}{=} \frac{AA_1}{3\,AA_1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ou seja,}\quad AP_3 = 3\,AP_1 \tag{1.24}$$

$$\text{ou ainda,}\quad P_2P_3 \overset{\text{figura acima}}{=} AP_3 - AP_1 - P_1P_2 \overset{(1.24)\,\text{e}\,(1.23)}{=} 3\,AP_1 - AP_1 - AP_1 = AP_1\,,$$

isto é,

$$P_2P_3 = AP_1$$

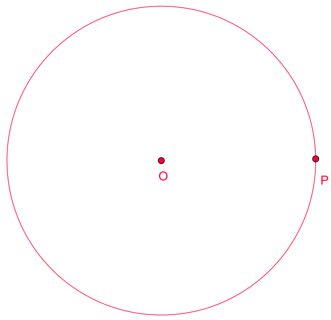
e assim por diante.

Com isto obtemos a divisão do segmento $\overline{AB}$ em $\underline{5}$ segmentos disjuntos justapostos, sendo que todos estes têm o mesmo comprimento.

1.6 Traçado de Tangentes a uma Circunferência

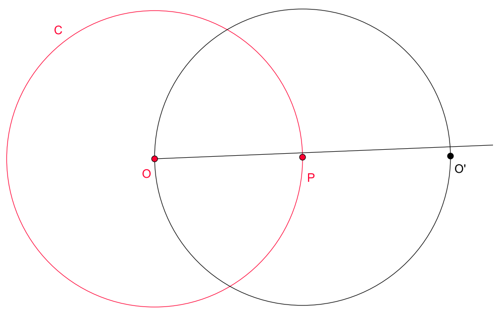
1.6.1 Reta tangente a uma circunferência por um ponto da mesma

A primeira situação que consideraremos é de encontrar, geometricamente, a reta tangente a uma circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, de centro em um ponto, que denotaremos por $\underline{O}$, que contém um ponto, que chamaremos de $\underline{P}$ (sendo o ponto $\underline{P}$ distinto do ponto $\underline{O}$ - veja figura abaixo).

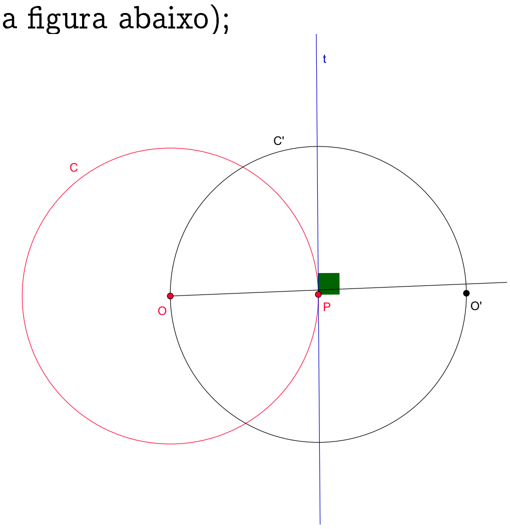


Para este fim agiremos da seguinte forma:

1. Tracemos uma circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}'}$, de centro no ponto $\underline{P}$ e raio $\underline{PO}$, que encontrará a reta que contém os pontos $\underline{O}$ e $\underline{P}$ em um ponto, que indicaremos por $\underline{O'}$, diferente do ponto $\underline{O}$ (veja figura abaixo);



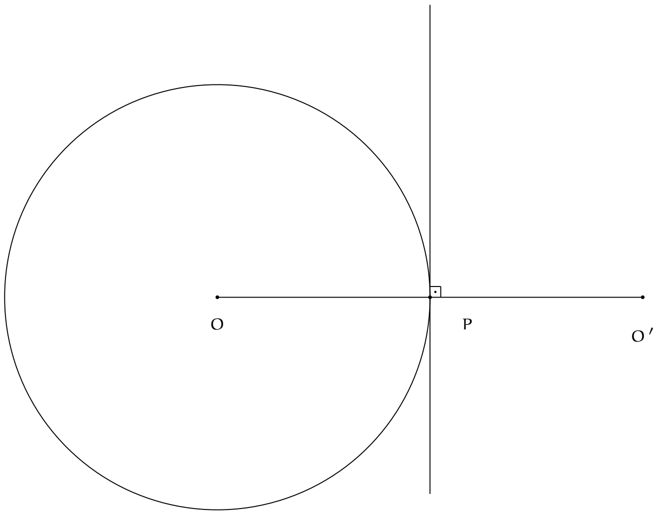
2. Tracemos a mediatriz do segmento $\overline{OO'}$ (que, por construção, conterá o ponto $\underline{P}$ como seu ponto médio - veja a figura abaixo);



3. Afirmamos que a reta mediatriz, obtida no item 2., é a reta tangente $\underline{t}$ a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ que contém o ponto $\underline{P}$ (veja a figura abaixo).

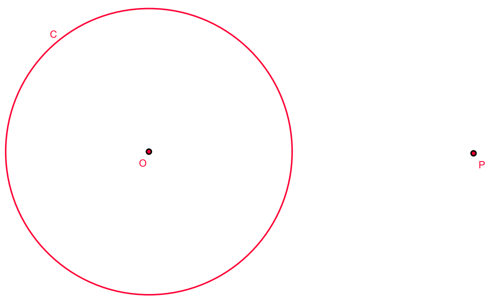
Mostremos que isto é realmente verdade.

Para isto, observemos que como a reta mediatriz, obtida no item 2,. acima é perpendicular ao segmento $\overline{OP}$ (e contém o ponto $\underline{P}$), segue que ela deverá ser, necessariamente, a reta tangente à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ que contém o ponto $\underline{P}$ (veja figura abaixo).



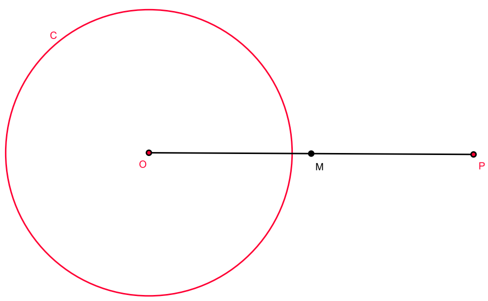
1.6.2 Reta tangente a uma circunferência por um ponto exterior a mesma

A segunda situação que consideraremos é de encontrar, geometricamente, a reta tangente a uma circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}}$ de centro em um ponto, que chamaremos de $\underline{O}$, que contenha um ponto, que denotaremos por $\underline{P}$, que está cituado no exterior do círculo determinado pela circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ (veja a figura abaixo).



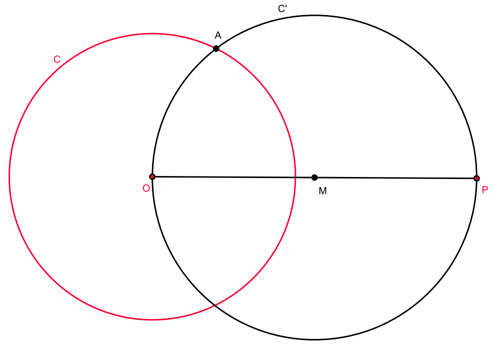
Para este fim agiremos da seguinte forma:

1. Por meio da construção da mediatriz do segmento $\overline{OP}$, encontremos o ponto médio, que indicaremos por $\underline{M}$, do segmento $\overline{OP}$ (veja figura abaixo);

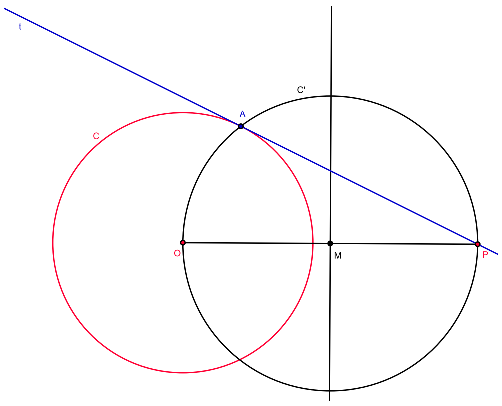


2. Tracemos a circunferência, que chamaremos de $\underline{\mathcal{C}'}$, de centro no ponto $\underline{M}$ e raio $\underline{MO}$ (que é igual a $\underline{MP}$).

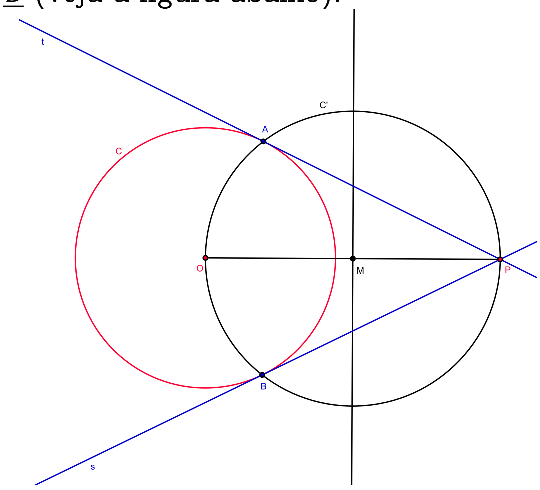
   Esta circunferência, interceptará a circunferência dada inicialmente, em um ponto, que indicaremos por $\underline{A}$ (e um outro ponto, que chamaremos de $\underline{B}$) (veja afigura abaixo);



3. Afirmamos que a reta, que chamaremos de $\underline{t}$, que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{P}$, é uma reta tangente a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ no ponto $\underline{A}$ (veja a figura abaixo).



   Notemos que teremos uma outra reta tangente à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, que será a que contém o ponto $\underline{P}$ e o ponto $\underline{B}$ (veja a figura abaixo).



Mostremos que a afirmação acima é verdadeira, ou seja, o ângulo

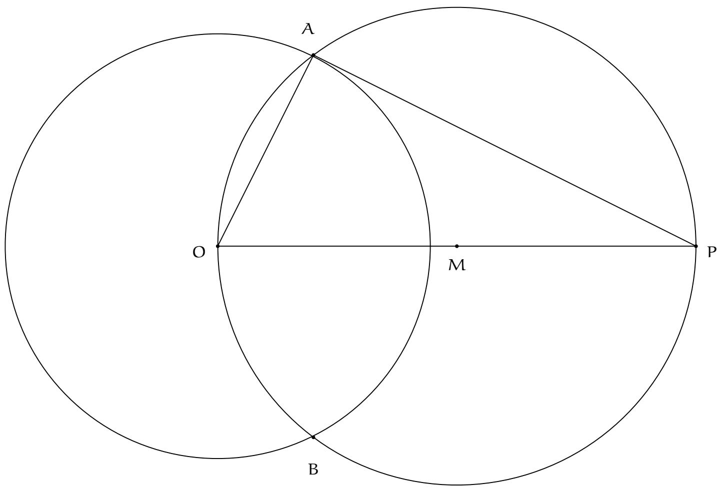
$$\widehat{OAP} = \frac{\pi}{2},$$

ou ainda, é um ângulo reto.

De fato, pois ele é o ângulo do arco capaz associado ao segmento $\overline{PO}$, que é diâmetro da circunferência de centro no ponto $\underline{M}$ e raio igual a $\underline{MP}$.

Logo (veja a figura abaixo) o ângulo

$$\widehat{OMP} = \pi.$$



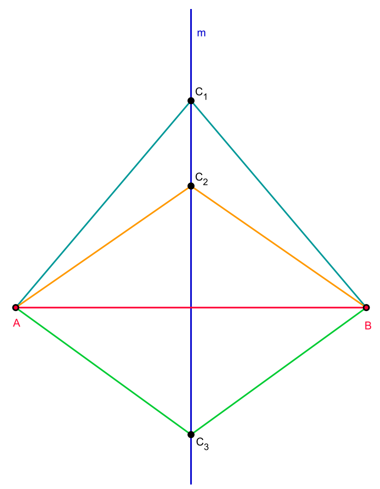
Portanto a reta que contém os pontos $\underline{P}$ e $\underline{A}$, é uma reta tangente à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, no ponto $\underline{A}$, pois o segmento $\overline{OA}$, que é o raio da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, é perpendicular o segmento $\overline{AP}$.

De modo semelhante, podemos mostrar que a reta que contém os pontos $\underline{B}$ e $\underline{P}$, também será uma reta tangente à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, no ponto $\underline{B}$.

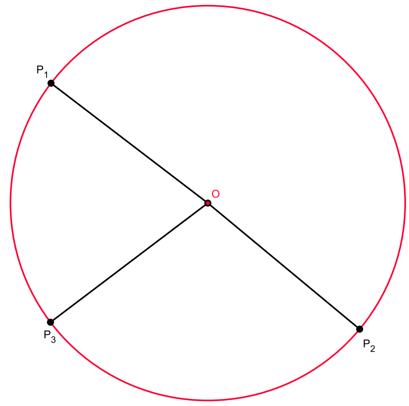
1.7 Exemplos

Lembremos que a expressão **lugar geométrico no plano**, corresponde ao conjunto formado pelos pontos do plano que satisfazem a uma determinada propriedade.

Por exemplo, a **mediatriz** é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de dois pontos distintos fixados (veja a figura abaixo);



De modo semelhante uma **circunferência** é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à uma distância fixa de um ponto fixado (veja a figura abaixo).

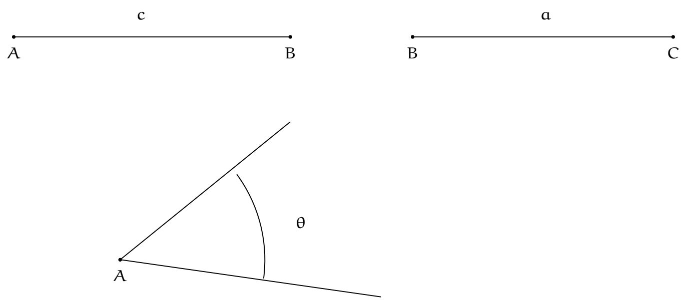


Ao dizermos que uma figura geométrica $\underline{\mathcal{F}}$ é o lugar geométrico dos pontos que possuem uma determinada propriedade $\underline{\mathcal{P}}$, queremos dizer que todos os pontos do conjunto $\underline{\mathcal{F}}$ possuim a propriedade $\underline{\mathcal{P}}$ e nenhum ponto fora do conjunto $\underline{\mathcal{F}}$ tem a propriedade $\underline{\mathcal{P}}$.

Nos dois exemplos acima, geometricamente, para a mediatriz de um segmento e a circunferência de centro em um ponto e raio fixados, temos que as figuras acima representam os únicos conjuntos dos pontos do plano geométrico, que satisfazem as correspondentes propriedades que determinam a mediatriz de um segmento e a circunferência de centro em um ponto e raio fixados, respectivamente.

A seguir consideraremos alguns outros exemplos relacionados com a situação acima.

Exemplo 1.7.1 *Construir um triângulo* ΔABC *conhecendo-se os lados* $c = \overline{AB}$, $a = \overline{BC}$ *e o ângulo* $\widehat{A} = \theta$, *geometricamente, como na figura abaixo.*

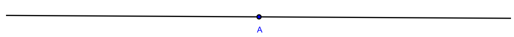


Resolução:

Temos várias possibilidade para a construção de um triângulo ΔABC com as três propriedades acima.

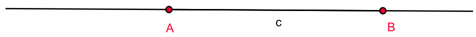
Vamos apresentar uma das possíveis construções:

1. Escolha uma reta e um ponto da mesma, que chamaremos de $\underline{A}$ (veja a figura abaixo);

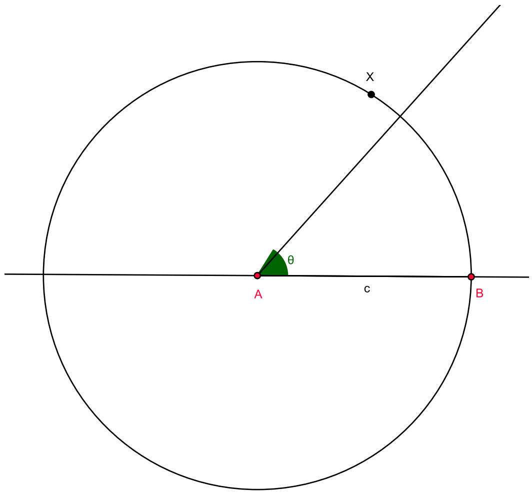


2. Traçando-se uma circunferência, de centro em $\underline{A}$ e raio $c = \overline{AB}$, obteremos, na intersecção desta circunferência com a reta um ponto, que denotaremos por $\underline{B}$.

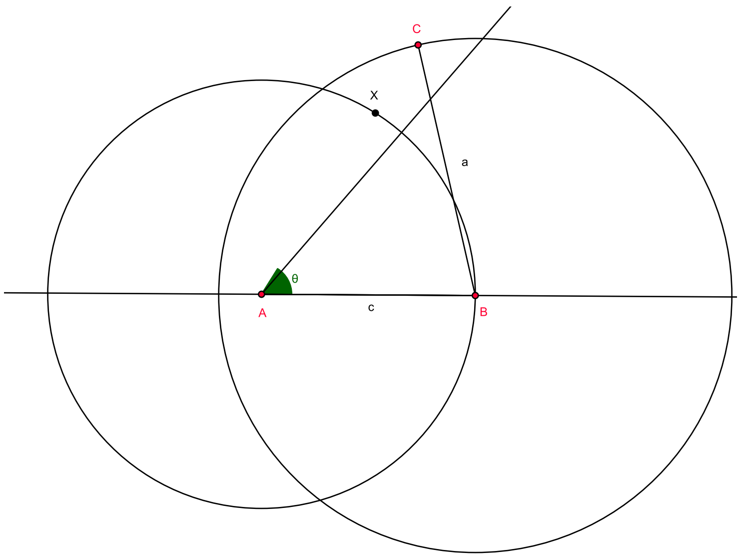
   Notemos que teremos um outro ponto com a mesma propriedade aciam, que dará origem a um outro triângulo congruente ao que iremos construir (veja a figura abaixo).



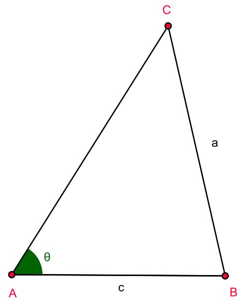
3. Encontremos um ponto, que chamaremos de $\underline{X}$, de tal modo que $\widehat{BAX} = \theta$ (transporte do ângulo $\underline{\widehat{A}}$ - veja afigura abaixo).



4. Tracemos a circunferência de centro no ponto $\underline{B}$ e raio igual a $\overline{BC} = a$, que interceptará a semireta que contém o ponto $\underline{A}$ (como extremo) e o ponto $\underline{X}$, em um ponto, que indicaremos por $\underline{C}$ (veja a figura abaixo);



5. Os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$ serão os vértices do triângulo procurado. (veja a figura abaixo);



Na verdade há uma infinidade de triângulos que podem ser construídos com as três propriedades acima.

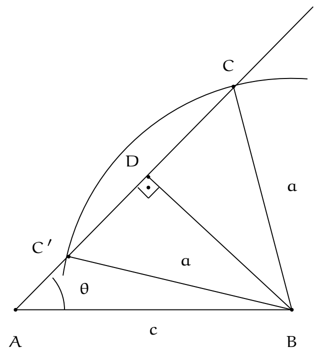
Deixaremos como exercício para o leitor a construção de outros casos.

Observação 1.7.1

1. *Observemos que, do ponto de vista analítico, se fixarmos a medida do ângulo* $\widehat{\underline{A}}$ *e tivermos*
$$c\,\text{sen}(\theta) < a < c\,, \tag{1.25}$$
então teremos apenas duas soluções para o nosso problema.

   De fato, o valor
$$c\,\text{sen}(\theta)\,,$$
deve ser menor valor mínimo para o raio $\underline{a}$*, para que a circunferência centrada no ponto* $\underline{B}$*, com esse raio, intercepte a reta que contém os pontos* $\underline{A}$ *e* $\underline{X}$*, pois sabemos que*
$$\text{sen}(\theta) = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{c}, \qquad \textit{logo} \qquad BD = c\,\text{sen}(\theta)\,,$$
onde $\underline{D}$ *é o "pé" da altura do triângulo* ΔABC*, relativamente ao lado* $\overline{AC}$*.*

   Portanto, se satisfaz (1.25), poderemos construir dois triângulos com as propriedades requeridas (na figura abaixo, os triângulos ΔABC *e* $\Delta ABC'$*).*

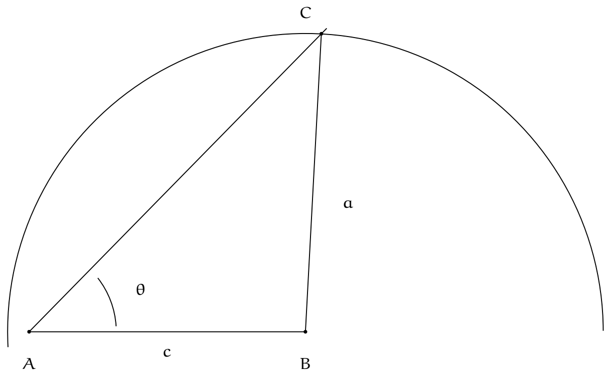


2. *Na situação acima, se*

$$a > c\,,$$

então a solução será única, pois neste caso a circunferência centrada no ponto $\underline{B}$ *e raio igual a* $\underline{a}$*, só interceptará a semireta que contém o ponto* $\underline{A}$*, em um único ponto (veja a figura abaixo).*

Assim, só teremos o triângulo ΔABC *como solução para o problema.*



3. *As construções acima mostram porque as três propriedades do Exemplo* (1.7.1), *ou seja, dados o ângulo* $\widehat{A}$*, e os lados* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$, ***não*** *necessariamente implicam em congruência de triângulos, já que os triângulos* ΔACB *e* $\Delta AC'B$ *do item 1. possuem as três propriedades do Exemplo* (1.7.1), *mas* ***não*** *são, necessariamente, congruentes.*

4. *Acrescentando uma propriedade adicional às três propriedades do Exemplo* (1.7.1) *poderemos ter um novo caso de congruência, a saber:*

   Se dois triângulos ΔABC *e* $\Delta A'B'C'$ *tem as seguintes propriedades:*

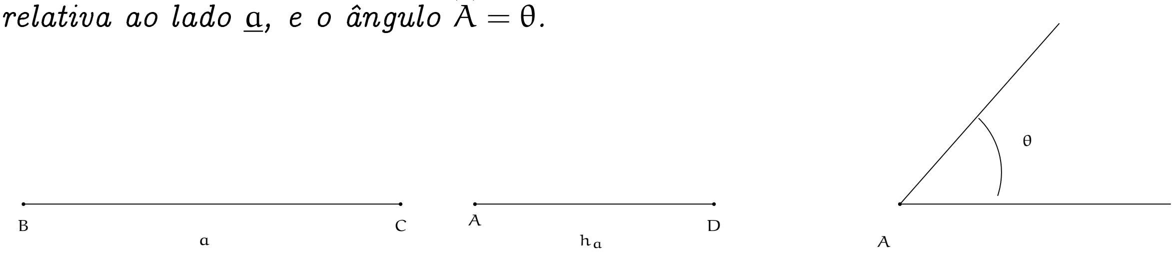
   $$\widehat{A} = \widehat{A'}, \quad AB = A'B', \quad BC = B'C' \quad e \quad BC > AB$$

   então os triângulos são, necessariamente, congruentes.

   Para provar isto basta notar que, na Observação acima item 2., que a circunferência centrada no ponto $\underline{B}$ *e raio igual ao comprimento do segmento de reta* $\underline{a = \overline{BC}}$*, só encontra aquela semireta em um único ponto, no caso o ponto* $\underline{C}$*.*

   Logo só podemos construir um, e somente um, triângulo (ou seja, um único triângulo) com as propriedades requeridas do Exemplo (1.7.1)*, se fixarmos o ângulo* $\widehat{\underline{A}}$ *e os lados* $a = \overline{BC}$ *e* $c = \overline{AB}$*.*

Exemplo 1.7.2 *Construir um triângulo* ΔABC*, conhecendo-se o lado* $a = \overline{BC}$*, a altura* h_a*, relativa ao lado* $\underline{a}$*, e o ângulo* $\widehat{A} = \theta$*.*



Resolução:

Vamos a uma possível construção:

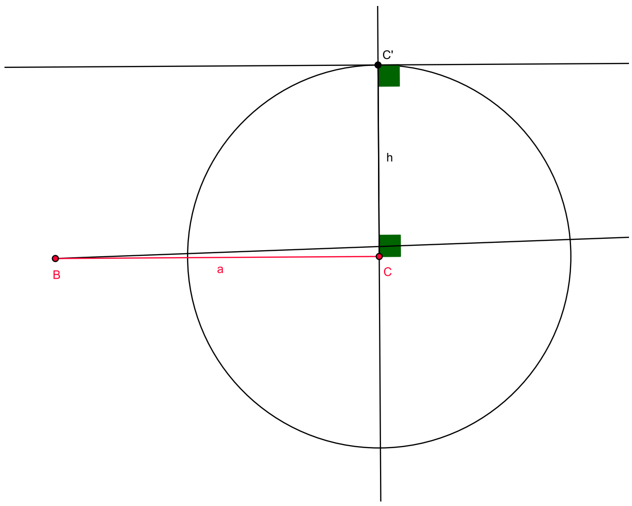
1. Escolhamos uma semireta, com extremo no ponto $\underline{B}$ e encontremos, utilizando-se o compasso para transportar a medida do segmento $\overline{BC}$, um ponto sobre a mesma, que indicaremos por $\underline{C}$, de tal modo que (veja a figura abaixo)

2. Encontremos uma reta, paralela à semireta obtida no item 1., que dista $\underline{h_a}$ da mesma.

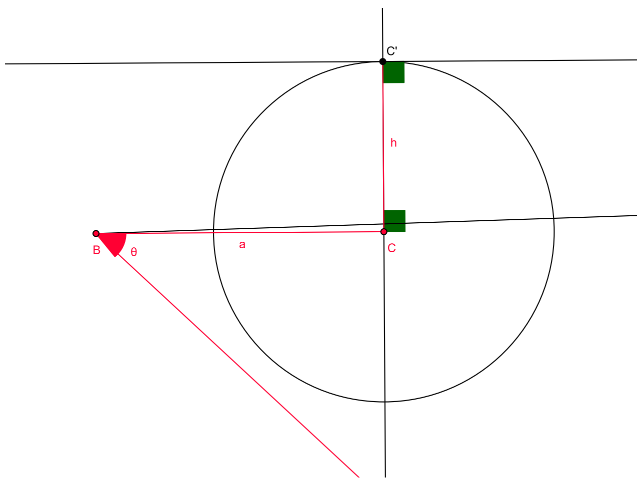
   Podemos fazer isto construindo-se, por exemplo, a reta perpendicular, que chamaremos de $\underline{t}$, à semireta do item 1., que contém o ponto $\underline{C}$ e, com ajuda do compasso, encontramos um ponto, que denotaremos por $\underline{C'}$, sobre essa perpendicular, de tal modo que (na verdade existem dois pontos sobre a perpendicular, que distam $\underline{h_A}$ do ponto $\underline{C}$)

$$CC' = h_a .$$

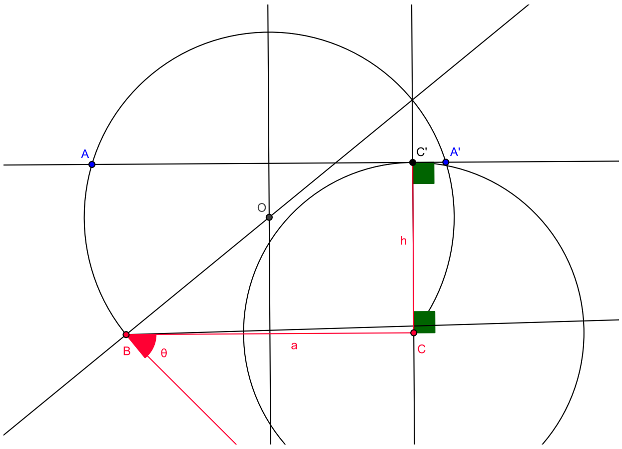
   Depois traçamos a reta perpendicular a reta $\underline{t}$ pelo ponto $\underline{C'}$ (veja a figura abaixo).



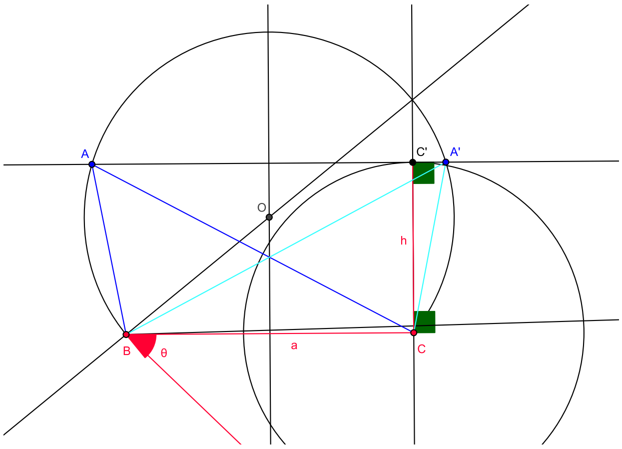
3. Transportemos o ângulo $\underline{\widehat{A}}$, para o ângulo $\underline{\widehat{B}}$, de tal modo que um lado do ângulo seja o segmento $\overline{BC}$ e o outro esteja contido no semiplano determinado pela reta que contém os pontos $\underline{B}$ e $\underline{C}$ e que não contenha o ponto $\underline{C'}$ (veja a figura abaixo).



4. Tracemos o arco capaz do ângulo $\underline{\widehat{B}}$ associado ao no segmento $\overline{BC}$, que interceptará a reta paralela do item 2. em um ponto, que chamaremos de $\underline{A}$ (e possivelmente em outro ponto, que chamaremos de $\underline{A'}$ - veja a figura abaixo).



5. O triângulo ΔACB (evaj a figura abaixo) satisfaz as condições requeridas.



Observação 1.7.2

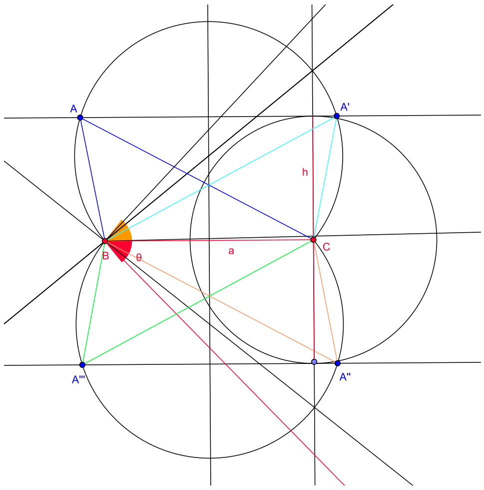
1. *No Exemplo (1.7.2) acima, fixado o lado $\overline{BC}$ e um dos semiplanos determinado pela reta que contém os pontos $\underline{B}$ e $\underline{C}$, temos somente duas soluções possíveis, a saber os triângulos ΔACB e $\Delta A'CB$ (como na figura acima).*

   Vale observar que estes dois triângulos são congruentes (caso LAL).

   Um é imagem do outro por uma reflexão, em relação a mediatriz do segmento $\overline{BC}$.

   Por abuso de notação, diremos que a solução é única (pois todas as soluções são congruentes duas a duas).

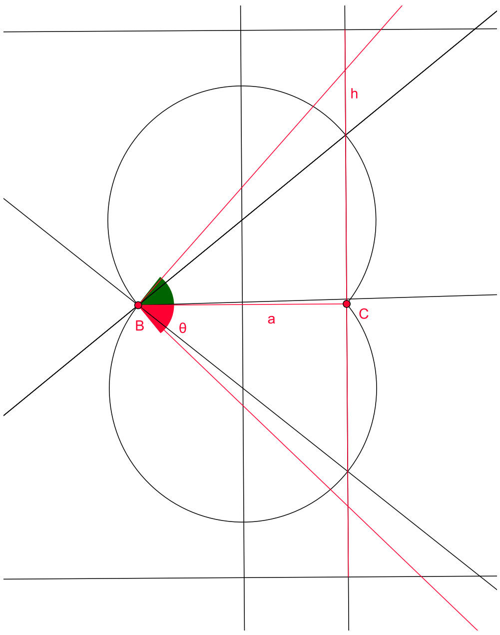
   Na verdade poderemos ter até quatro soluções, todas congruentes duas a duas (na figura abaixo temos os quatro triângulos ΔACB, $\Delta A'CB$, $\Delta A''CB$ e $\Delta A'''CB$ que são conguentes).



2. *Do ponto de vista analítico, dependendo das escolhas dos valores de* $\underline{BC}$, $\underline{h_a}$ *e da medida do ângulo* $\underline{\widehat{A}}$, *podemos* **<u>não</u>** *ter necessariamente solução para o problema.*

   Por exemplo, se $\underline{h_a}$ *for "muito grande", a reta paralela a semireta que contém os pontos* $\underline{B}$ *e* $\underline{C}$, *que dista* $\underline{h_a}$ *da mesma, não interceptará o arco capaz do ângulo* $\underline{\widehat{A}}$, *associado ao segmento de reta* $\overline{BC}$.

   Nestes caso **<u>não</u>** *existirá nenhum triângulo com as propriedades requeridas pelo Exemplo* (1.7.2) *(veja a figura abaixo).*



Mais precisamente, temos o seguinte exercício, cuja resolução deixaremos a cargo do leitor::

Exercício 1.7.1 *Se*

$$h_a > \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\widehat{A}\right)} + \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\widehat{A}\right)}\right),$$

<u>não</u> *existirá tal triângulo.*

Antes de exibirmos o próximo exemplo iremos estabelecer as seguintes notações:

Definição 1.7.1 *Consideremos o triângulo* ΔABC*, onde são dados:*

$$c = \overline{AB}, \quad b = \overline{AC} \quad e \quad a = \overline{BC}.$$

Denotemos por $\underline{M}$ *é o ponto médio do lado* $\overline{BC}$*.*

A **mediana relativa ao lado** $\overline{BC}$ *será o segmento de reta* $\overline{AM}$*.*

Denotaremos o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ *por* $\underline{m_a}$ *(veja figura abaixo), isto é,*

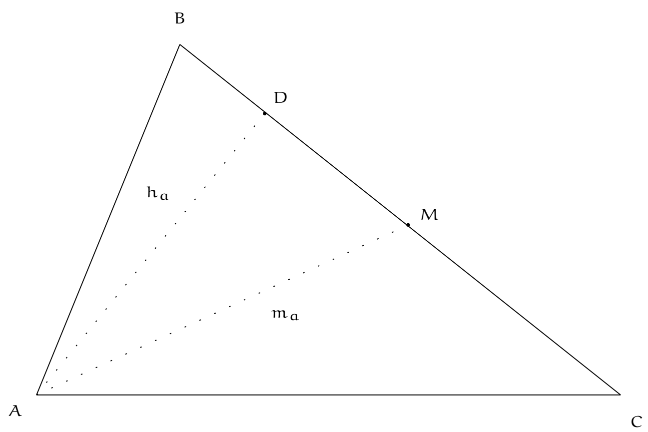
$$m_a \doteq AM.$$

Denotemos por $\underline{D}$*, o ponto de intersecção da reta perpendicular ao lado* $\overline{BC}$*, que contém o ponto* $\underline{A}$*, com o segmento* $\overline{BC}$*.*

O segmento $\overline{AD}$ *será denominado* **altura do triângulo** ΔABC **relativamente ao lado** $\overline{BC}$*.*

Denotaremos por $\underline{h_a}$*, o comprimento da altura relativa ao lado* $\overline{BC}$ *(veja afigura abaixo), isto é,*

$$h_a \doteq AD.$$



De modo semelhante denotaremos os comprimentos das medianas, relativas aos lados $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$*, por*

$$m_c \quad e \quad m_b,$$

respectivamente, e os comprimentos das alturas, relativas aos lados $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$*, por*

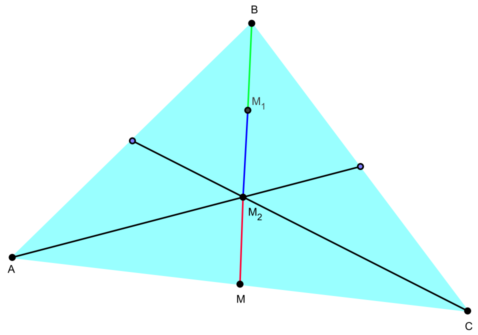
$$h_c \quad e \quad h_b,$$

respectivamente.

Para o próximo exemplo precisaremos do seguinte resultado, cuja resolução será deixada como exercício para o leitor:

Exercício 1.7.2 *Mostre que num triângulo qualquer, as medianas interceptam-se em um mesmo ponto (denominado* <u>baricentro</u> *do triângulo) e além disso, dividem cada uma delas na razão* $\underline{2:1}$*, ou seja (veja a figura abaixo):*

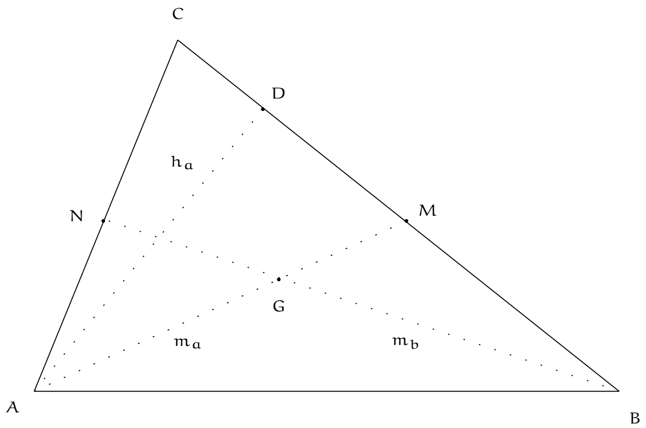
$$BM_1 = M_1M_2 = M_2M = \frac{1}{3}BM. \tag{1.26}$$



Exemplo 1.7.3 *Construir um triângulo ΔABC, dados segmentos, cujos comprimentos são das medianas, $\underline{m_a}$, $\underline{m_b}$ e da altura $\underline{h_a}$, com na figura abaixo.*

<u>**Resolução:**</u>

Para ajudar a entendermos o problema façamos uma ilustração dos elementos dados pelo problema na figura abaixo.

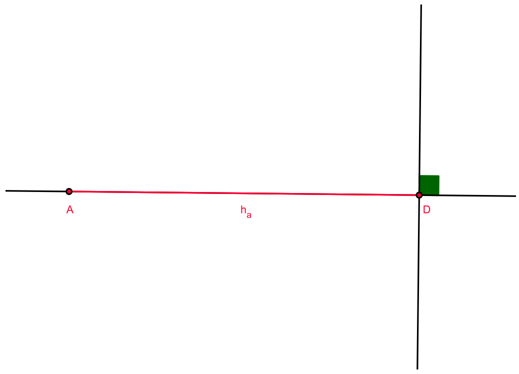


Do Exercício (1.7.2) acima, temos num triângulo qualquer, as medianas cortam-se em um mesmo ponto e dividem cada uma delas na razão $\underline{2:1}$.

Como conhecemos
$$AM = m_a\,,$$
podemos determinar o ponto $\underline{G}$ (baricentro do triângulo ΔACB) sobre o semgmento $\overline{AM}$, pois
$$AG = \frac{2}{3}\,AM = \frac{2}{3}\,m_a\,.$$
Para isto agiremos da seguinte forma:

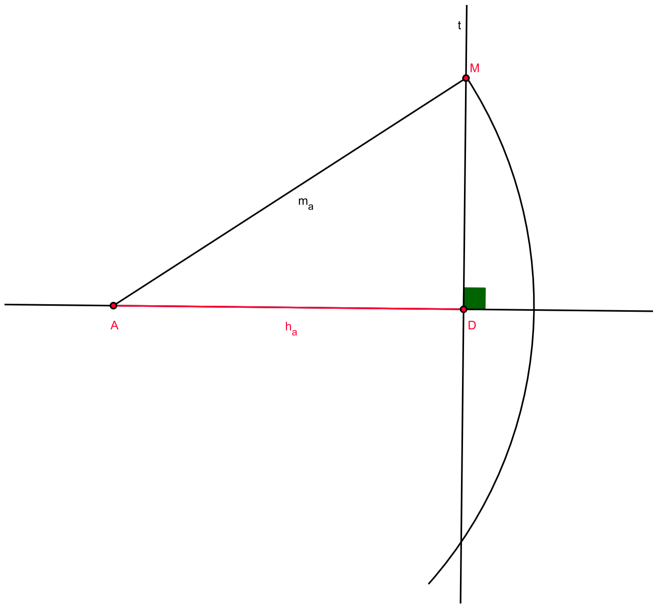
1. Escolhamos sobre uma reta, dois pontos, que denotaremos por $\underline{A}$ e $\underline{D}$, tal que (veja a figura abaixo)
$$AD = h_a\,.$$

2. Tracemos a reta $\underline{t}$, perpendicular a reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{D}$, pelo ponto $\underline{D}$ (veja a figura abaixo).

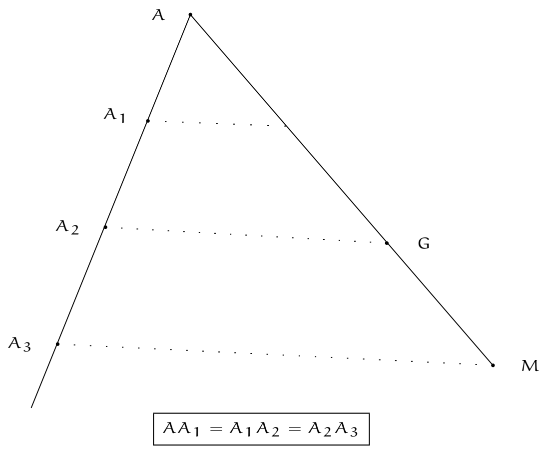


Observemos que os vértices $\underline{B}$ e $\underline{C}$, do triângulo procurado, deverão pertencer à reta $\underline{t}$, obtida acima (pois o triângulo deverá ter altura relativa ao lado $\overline{BC}$ igual a $\underline{h_a}$).

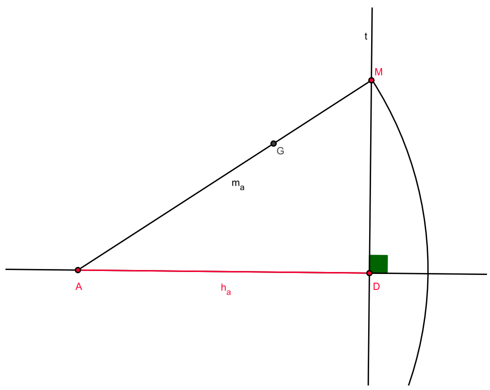
3. Como conhecemos
$$AM = m_a\,,$$
utilizando o compasso, podemos encontrar um ponto $\underline{M}$, sobre a reta $\underline{t}$ obtida no item 2. (este pode não ser único - veja a figura abaixo).



4. Novamenteo, como
$$AM = m_a\,,$$
podemos determinar o ponto $\underline{G}$ (intersecção das medianas) sobre o segmento $\overline{AM}$, pois
$$AG = \frac{2}{3}\,AM = \frac{2}{3}\,m_a\,.$$
Para isto precisamos dividir o segmento $\overline{AM}$ em três partes iguais, ou seja, utilizaremos o processo desenvolvido na seção (1.5).



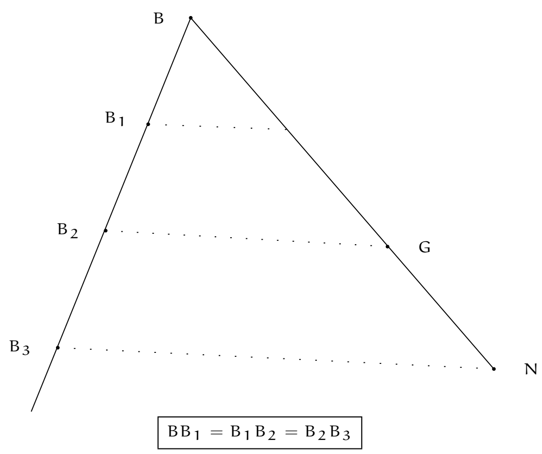
Deste modo encontramos um ponto, que chamaremos de <u>G</u>, sobre o segmento $\overline{AM}$ (com o uso do compasso).



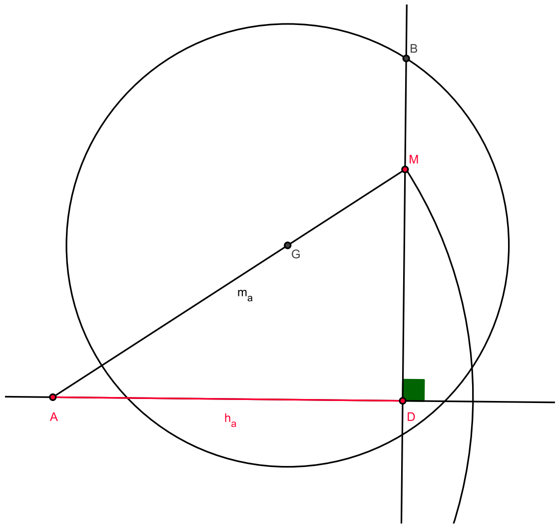
5. Sabemos que (veja a figura do início da resolução)

$$BG = \frac{2}{3}\,BN = \frac{2}{3}\,m_b\,.$$

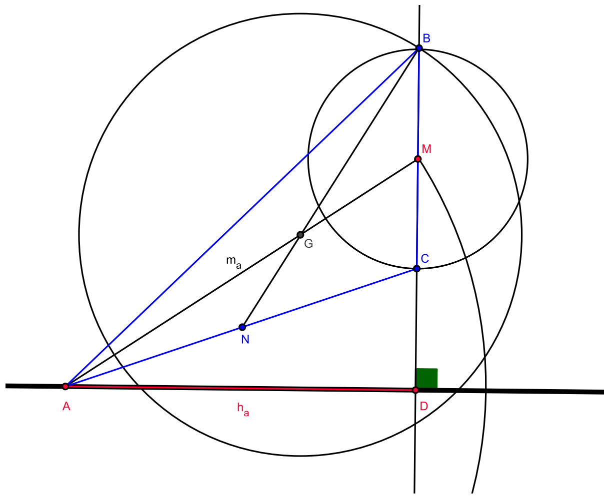
Por um processo análogo ao do item 4. podemos encontrar o comprimento <u>BG</u> (veja a figura abaixo).



6. O vértice $\underline{B}$ do triângulo procurado, será obtido da intersecção da reta que contém os pontos $\underline{D}$ e $\underline{M}$ (isto é, a reta $\underline{t}$) com a circunferência, de centro no ponto $\underline{G}$ e raio igual a $\underline{GB = BG}$, obtido no item 5. acima (podemos ter dois pontos de intersecção, escolhamos um deles - veja a figura abaixo).



7. O vértice $\underline{C}$, do triângulo procurado, está sobre a reta que contém os pontos $\underline{D}$ e $\underline{M}$, e pode ser obtido usando-se o fato que $\underline{BM = MC}$ (pois o ponto $\underline{M}$ deverá ser o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ - veja a figura abaixo).



Observação 1.7.3 *Dá construção acima podemos observar que o triângulo obtido poderá* **não** *ser único.*

As relações entre os dados do Exemplo (1.7.3), que tornam a construção possível, e/ou única, pode ser um exercício interessante, mas trabalhoso.

Deixaremos os detalhes dessas questões como exercício para o leitor.

Exemplo 1.7.4 *Dados uma circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, de centro em um ponto, que chamaremos de $\underline{O}$ e raio igual a $\underline{r}$, um ponto, que denotaremos por $\underline{P}$, que pertence ao exterior da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, e um segmento de comprimento, que indicaremos por $\underline{a}$, traçar, pelo ponto $\underline{P}$, um reta que determine na circunferência uma corda de que tenha comprimento exatamente igual ao do segmento $\underline{a}$.*

Resolução:

Observemos que em uma dada circunferência, todas as cordas de mesmo comprimento, são tangentes a uma outra circunferência de mesmo centro que a primeira (veja a figura abaixo).

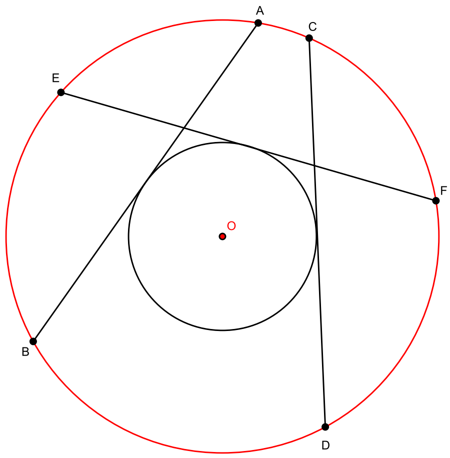


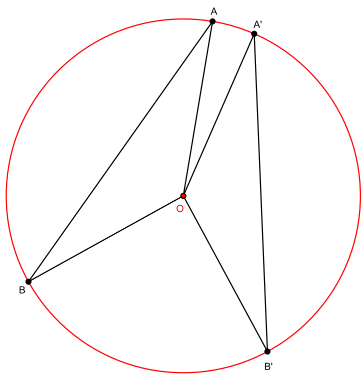
Figura 1.1: $AB = CD = EF$

Mostremos que esta afirmação é verdadeira.

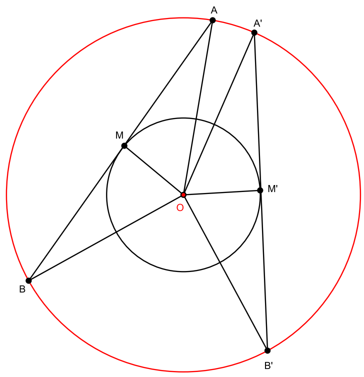
Para isto, notemos que, para quaisquer cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ de mesmo comprimento da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, de centro no ponto $\underline{O}$, os triângulos ΔAOB e $\Delta A'B'O$ são isósceles e congruentes pois os segmentos

$$\overline{OA}\,, \quad \overline{OB}\,, \quad \overline{OA'} \quad \text{e} \quad \overline{OB'}$$

são raios da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, e AB e $A'B'$ são os comprimentos das cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ (que estamos supondo serem iguais, assim teremos o caso LLL de congruência).



Logo as alturas dos triângulos isósceles ΔAOB e $\Delta A'B'O$, relativas ao lado $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, terão mesmos comprimentos e se denotarmos "pé" destas alturas por $\underline{M}$ e $\underline{M'}$, respectivamente, então eles perteccerão a uma mesma circunferência de centro no ponto $\underline{O}$, mostrando a afirmação (veja a figura abaixo).



Observemos que neste caso, os pontos

$$M \quad \text{e} \quad M',$$

serão os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, respectivamente.

De fato, pois os triângulos ΔAOM e ΔOBM são isósceles e congruentes (eles têm dois lados de mesmo comprimento e dois ângulos iguais).

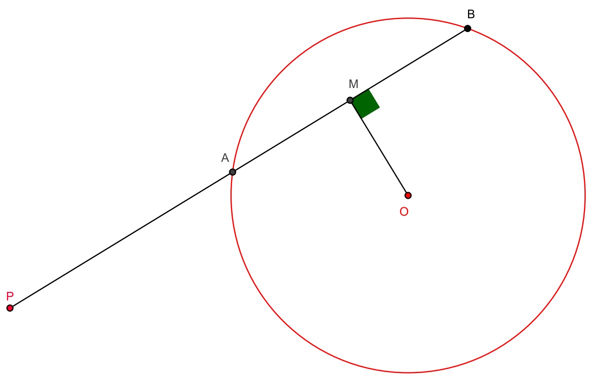
Notemos também que, se a reta que contém os pontos $\underline{P}$ e $\underline{B}$ é tal que o segmento $\overline{AB}$ tem o mesmo comprimento do segmento $\underline{a}$, é secante a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ e o ponto $\underline{M}$, é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, então o segmento $\overline{OM}$ deverá ser perpendicular ao segmento $\overline{PB}$.

De fato, pois os triângulos ΔAMO e ΔOMB são congruentes (pelo caso LLL), assim

$$\widehat{AMO} = \widehat{OMB}, \quad \text{mas} \quad \widehat{AMO} + \widehat{OMB} = \pi,$$

implicando que (veja a figura abaixo)

$$\widehat{AMB} = \frac{\pi}{2}.$$

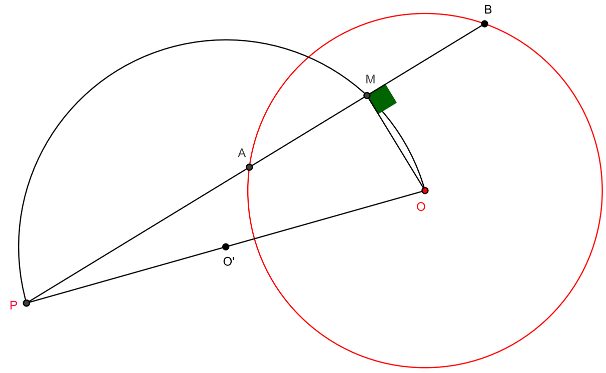


Assim o ponto $\underline{M}$ deverá pertencer ao arco capaz do ângulo $\frac{\pi}{2}$, associado ao segmento $\overline{PO}$.

De fato, pois

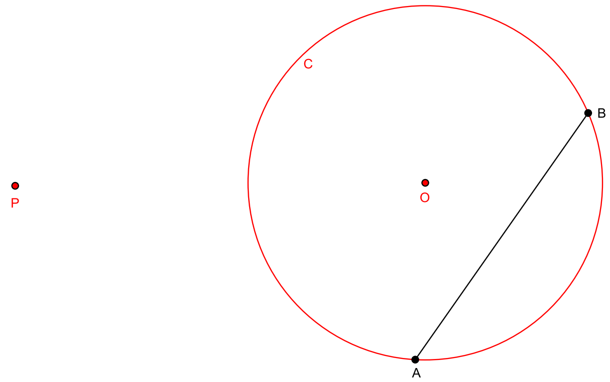
$$\widehat{PMO} = \frac{\pi}{2},$$

ou seja, este ângulo deverá estar inscrito na semi-circunferência, cujo diâmentro é o segmento $\overline{PO}$ (veja a figura abaixo).

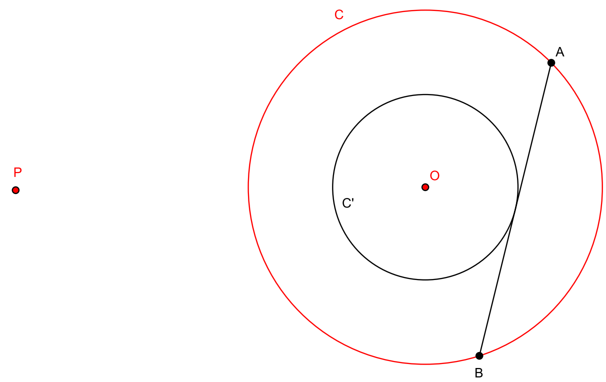


Podemos agora fazer a construção, como veremos a seguir:

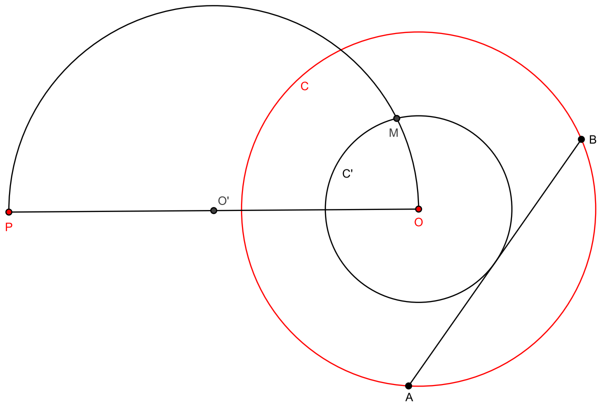
1. Traçamos na circunferência $\mathcal{C}$, uma corda $\overline{AB}$ qualquer, de comprimento igual ao do segmento $\underline{a}$ (usamos o compasso para tanto - veja a figura abaixo).



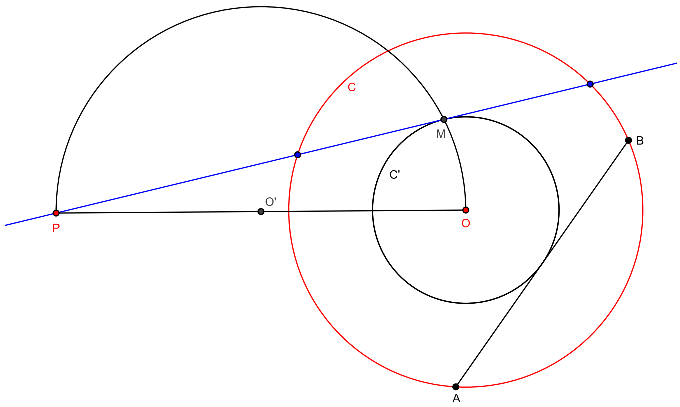
2. A seguir traçamos uma circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}'}$ de centro no ponto $\underline{O}$, tangente à corda $\overline{AB}$ obtida no item 1. (veja a figura abaixo).



3. Passemos agora a construir uma circunferência, que chamaremos de $\underline{\mathcal{C}''}$, cujo diâmentro é o segmento $\overline{PO}$, que interceptará a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ no ponto $\underline{M}$ (e em outro ponto - veja figura abaixo).

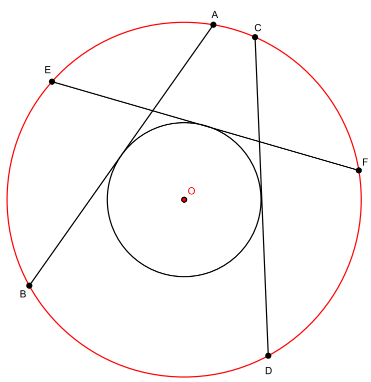


4. A reta que contém os pontos P e M é a reta procurada (veja a figura abaixo).

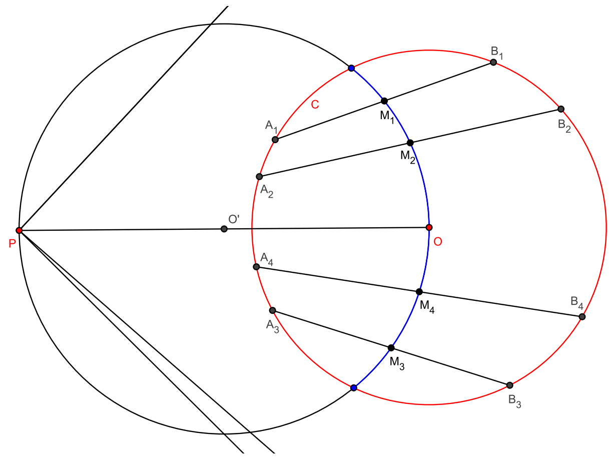


Observação 1.7.4 *Na resolução do Exemplo (1.7.4) acima, encontramos dois lugares geométricos interessantes, a saber:*

1. *O lugar geométrico das cordas de uma circunferência de centro no ponto $\underline{O}$, que possuem o mesmo comprimento, são os segmentos de reta que tem extremos na circunferência dada e que são tangentes a uma circunferência de centro no ponto $\underline{O}$ e tangente a uma das cordas de comprimento igual ao comprimento dado (veja a figura abaixo).*



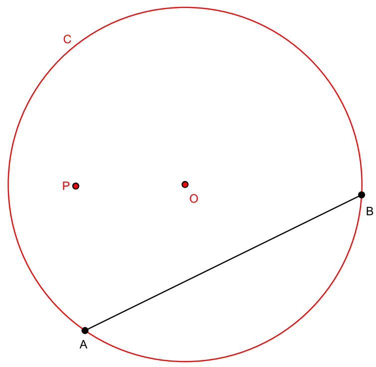
2. *Na situação do Exemplo (1.7.4) acima, o lugar geométrico dos pontos médios das cordas da circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$*, cujas retas contém o ponto* $\underline{\mathrm{P}}$*, estará contido na circunferência de centro em um ponto, que denotaremos por* $\underline{\mathrm{O}'}$*, que é o ponto médio do segmento* $\overline{\mathrm{PO}}$*, e raio* $\dfrac{\mathrm{PO}}{2}$ *(veja a figura abaixo).*



3. *O ponto* $\underline{\mathrm{P}}$*, poderia ser dado no interior da crcunferência de centro no ponto* $\underline{\mathrm{O}}$ *dada inicialmente.*

   A análise é semelhante a que tratamos acima e será deixada como exercício.

Exercício 1.7.3 *Faça o mesmo estudo que fizemos acima, para o caso em que o ponto* $\underline{\mathrm{P}}$*, esteja no interior da circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$*.*

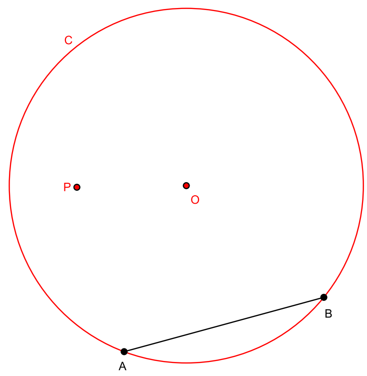


Observação 1.7.5 *Vale observar que o comprimento da corda* $\overline{\mathrm{AB}}$ ***não*** *pode ser qualquer.*

Mais precisamente, a distância da corda $\overline{\mathrm{AB}}$ *até o centro* $\underline{\mathrm{O}}$*, da circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$ ***não*** *pode ser maior que a distância do ponto* $\underline{\mathrm{P}}$ *ao ponto* $\underline{\mathrm{O}}$*.*

Por exemplo, na figura abaixo, ***não*** *existe nenhuma corda da circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$*, que tenha comprimento igual a* $\underline{\mathrm{AB}}$*, cuja reta que a contenha, passe pelo ponto* $\underline{\mathrm{P}}$*.*

Tente fazer a construção para este caso e verifique que não será possível!

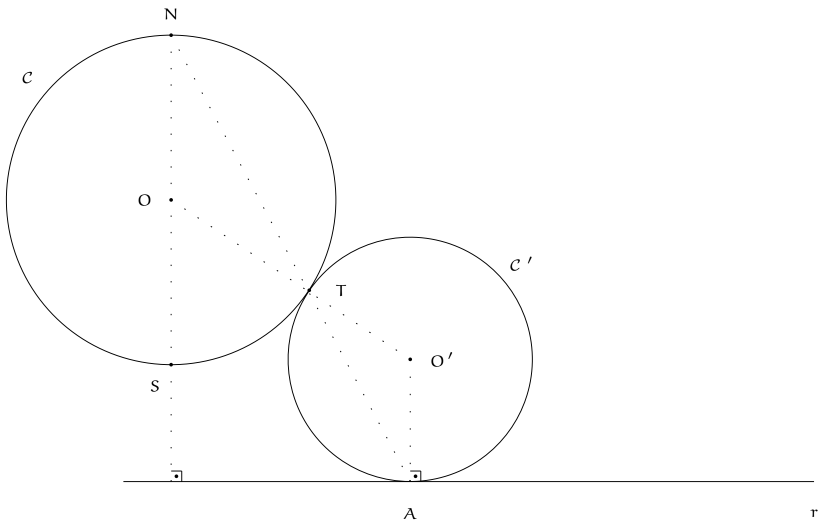


Exemplo 1.7.5 *Dados uma circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, uma reta, que denotaremos por $\underline{r}$, e um ponto, que chamaremos de $\underline{A}$, sobre a reta $\underline{r}$, construir uma circunferência, que indicaremos por $\mathcal{C}\,'$, tangente, exteriormente, a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ e tangente a reta $\underline{r}$, no ponto $\underline{A}$.*

Resolução:

Suponhamos que o problema está resolvido, ou seja, tenhamos obtido a figura abaixo.

Sejam $\underline{\mathcal{C}\,'}$ a circunferência procurada, de centro em um ponto, que indicaremos por $\underline{O'}$, e um ponto, que chamaremos de $\underline{T}$, de tangência das circunferências $\underline{\mathcal{C}}$ e $\underline{\mathcal{C}\,'}$ (veja a figura abaixo).

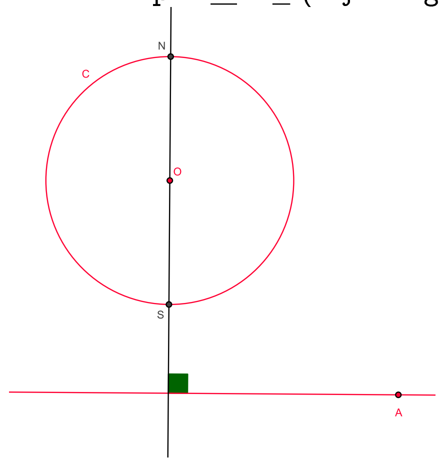


Sabemos que o segmento $\overline{OO'}$ deverá contér o ponto $\underline{T}$ (pois as circunferências $\underline{\mathcal{C}}$ e $\underline{\mathcal{C}\,'}$ são tangentes no ponto $\underline{T}$).

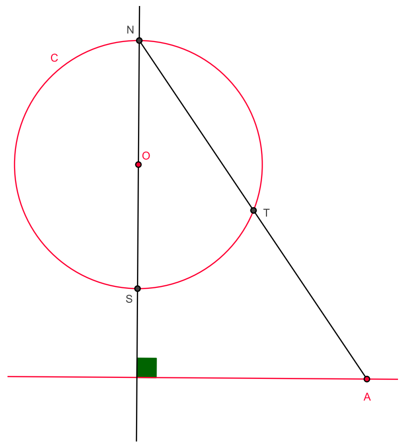
Além disso, o segmento $\overline{O'A}$ é perpendicular a reta $\underline{r}$, pois a circunferência $\underline{\mathcal{C}\,'}$ é tangente a reta $\underline{r}$ no ponto $\underline{A}$.

Baseado nesses fatos agiremos da seguinte forma:

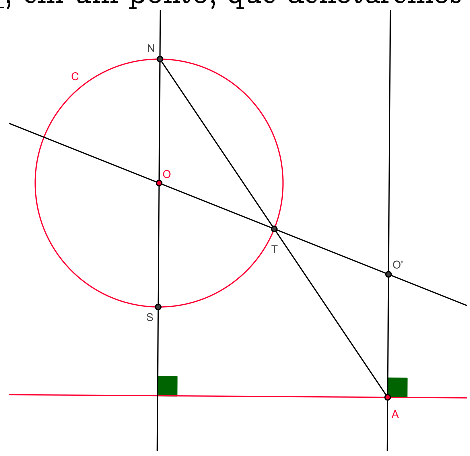
1. Tracemos pelo ponto $\underline{O}$, a reta perpendicular a reta $\underline{r}$, que interceptará a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ em dois pontos, que indicaremos por $\underline{N}$ e $\underline{S}$ (veja a figura abaixo).



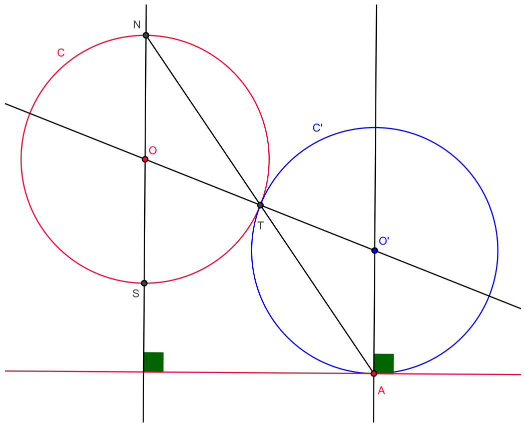
2. Tracemos o segmento $\overline{AN}$, que interceptará a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{T}$ (veja a figura abaixo).



3. Tracemos a perpendicular a reta $\underline{r}$, que contém ponto $\underline{A}$, que encontrará a reta, que contém os pontos $\underline{O}$ e $\underline{T}$, em um ponto, que denotaremos por $\underline{O'}$ (veja a figura abaixo).

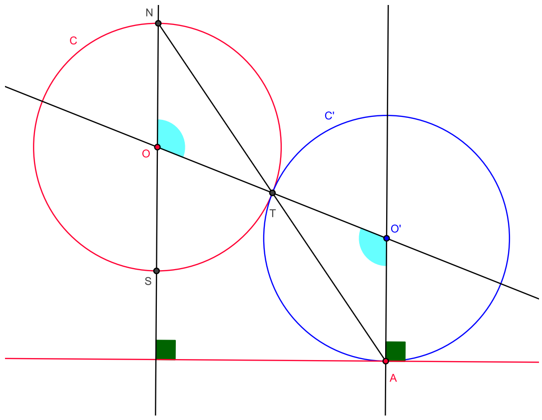


Afirmamos que a circunferência procurada tem centro no ponto $\underline{O'}$ e raio $O'A = O'T$ (veja a figura abaixo).

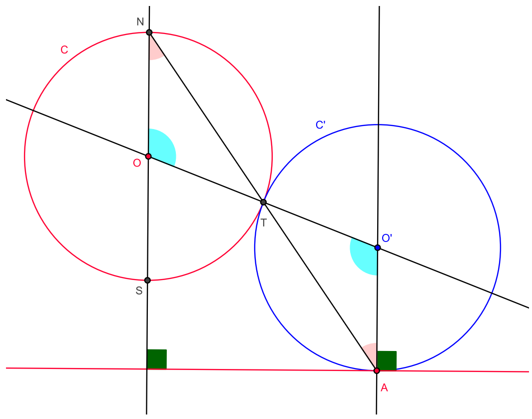


Para provar isto observemos que:

i. Os ângulos $\widehat{TON}$ e $\widehat{TO'A}$, são iguais pois são ângulos alternos internos das retas paralelas que contém os pontos $\underline{N}$, $\underline{O}$ e os pontos $\underline{O'}$, $\underline{A}$, respectivamente (veja a figura abaixo).



ii. De modo análogo, os ângulos $\widehat{ONT}$ e $\widehat{O'AT}$ são iguais, pois também são alternos internos das retas paralelas que contém os pontos $\underline{N}$, $\underline{O}$ e os pontos $\underline{O'}$, $\underline{A}$, respectivamente (veja a figura abaixo).



iii. Logo, pelo caso AAA, segue os triângulos ΔNTO e ΔTO$'$A são semelhantes.

iv. Da semelhança acima, segue que

$$\frac{O'T}{O'A} = \frac{OT}{ON} \overset{OT=ON}{=} 1, \quad \text{isto é,} \quad O'T = O'A\,.$$

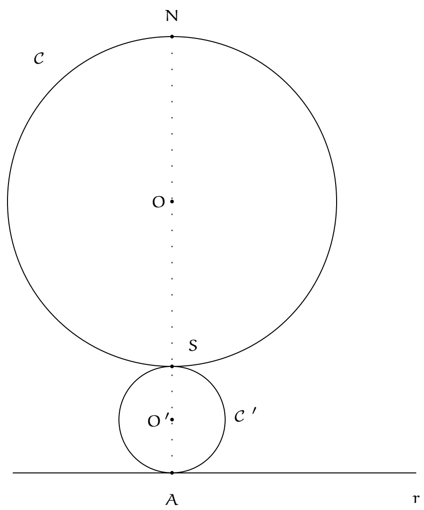
Assim, os pontos T e A pertencem à circunferência de centro no ponto O$'$ e raio O$'$T = O$'$A.

v. Além disso, a circunferência $\mathcal{C}\,'$, de centro no ponto O$'$ e raio O$'$T, será tangente à reta r, pois o segmento $\overline{O'A}$ é perpendicular à reta r, no ponto A, e também será tangente à circunferência $\mathcal{C}$, pois o ponto T, ponto de intersecção das circunferências, está sobre o segmento de reta que une os centros, isto é, O e O$'$, das circunferências o que implicará que elas são tangentes, completando a demonstração da afirmação.

Observação 1.7.6

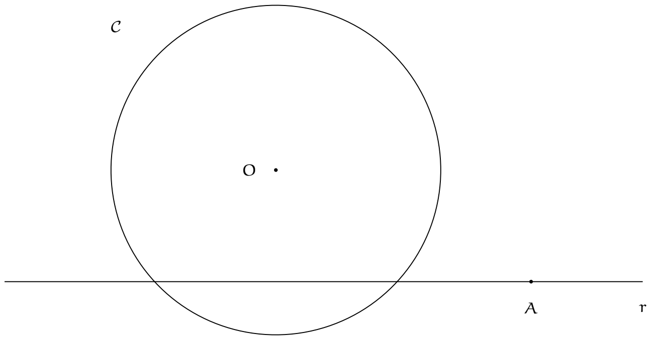
1. *Vale observar que na situação acima, ou seja, se a reta* r *não intercepta a circunferência* $\mathcal{C}$*, o problema terá sempre solução para qualquer ponto* A *escolhido sobre a reta* r*.*

   De fato, se o ponto A *for, por exemplo, o "pé" da reta perpendicular à reta* r *pelos pontos* N *e* O*, então o ponto* O$'$ *será o ponto médio do segmento* $\overline{SA}$ *(veja a figura abaixo).*



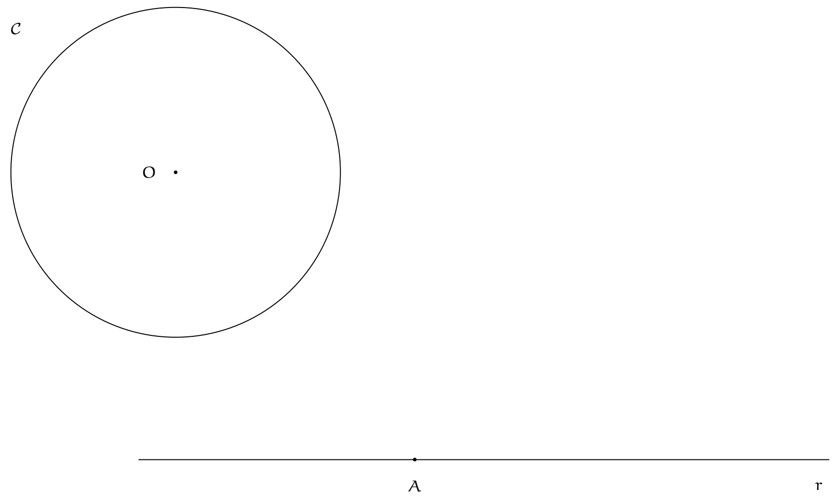
   Em qualquer outra posição que se encontre o ponto A*, sobre a reta* r*, a construção será a que apresentamos anteriormente.*

2. *Se a reta* r *for secante à circunferência* $\mathcal{C}$ *e o ponto* A *for exterior a circunferência* $\mathcal{C}$ *teremos quatro possíveis soluções (veja a figura abaixo).*



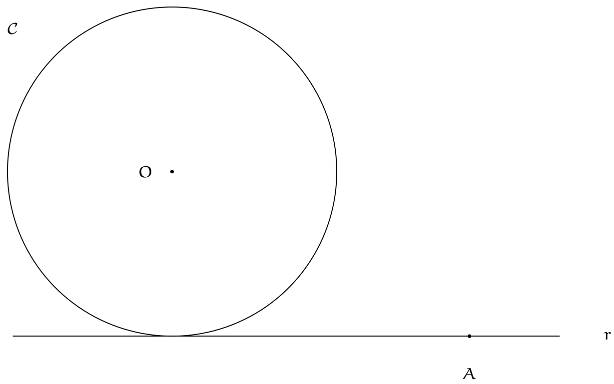
Isto será deixado como exercício (a seguir) para o leitor.

3. *O item 2. nos sugere um outro problema: construir uma circunferência $\underline{\mathcal{C}''}$ que seja tangente, interiormente à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, ou seja, a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ esteja contida no interior da circunferência $\underline{\mathcal{C}''}$, e também tangente à reta $\underline{r}$ no ponto $\underline{A}$ (veja a figura abaixo).*



A resolução será deixada como exercício (a seguir) para o leitor.

4. *Uma última possibilidade seria a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ ser tangente à reta $\underline{r}$ (veja a figura abaixo).*



A situação é semelhante aos casos anteriores e sua análise será deixada como exercício (a seguir) para o leitor.

Exercício 1.7.4 *Fazer as construções do item 2. da Observação* (1.7.6) *acima.*

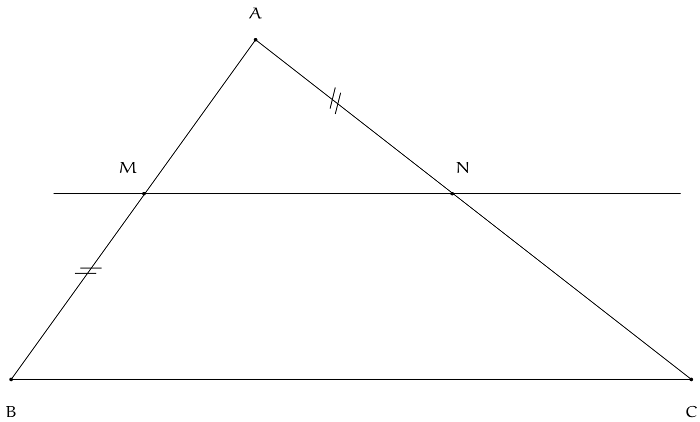
Exercício 1.7.5 *Fazer as construções do item 3. da Observação* (1.7.6) *acima.*
Sugestão: *considere o ponto* $\underline{S}$ *no lugar do ponto* $\underline{N}$, *na construção feita anteriormente.*

Exercício 1.7.6 *Fazer as construções do item 4. da Observação* (1.7.6) *acima.*

Exemplo 1.7.6 *Dado um triângulo* ΔABC, *traçar uma reta paralela ao lado* $\overline{BC}$, *que deverá interceptar o lado* $\overline{AB}$ *em um ponto, que denotaremos por* $\underline{M}$, *e o o lado* $\overline{AC}$ *em um ponto, que chamaremos de* $\underline{N}$, *de forma que*

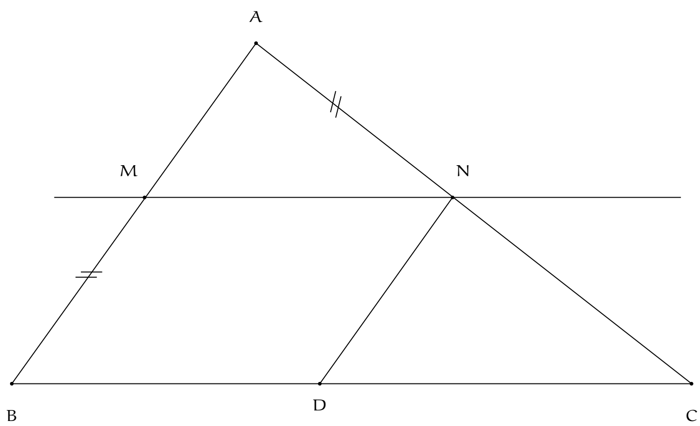
$$AN = MB .$$

Resolução:
A situação que se apresenta é ilustrada na figura abaixo (onde a reta que contém os pontos $\underline{M}$ e $\underline{N}$ é paralela a reta que contém os pontos $\underline{B}$ e $\underline{C}$):



Supondo que já tenhamos feito a construção.

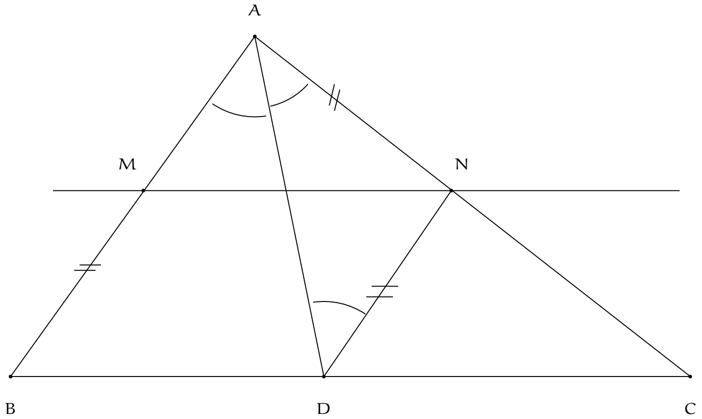
1. Encontremos um ponto, que chamaremos de $\underline{D}$, de tal modo que a reta que contém os pontos $\underline{N}$ e $\underline{D}$, seja paralela a reta que contém os pontos $\underline{M}$ e $\underline{B}$ (veja a figura abaixo);



2. O quadrilátero $\underline{MNDB}$ é um paralelogramo, pois os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{BD}$ e o segmentos $\overline{BM}$, $\overline{DN}$ são paralelos, respectivamente.

   Logo
   $$AN = ND\,, \quad \text{pois} \quad ND = MB$$
   e, por hipótese, (veja a figura acima)
   $$MB = AN\,.$$

3. Logo o triângulo ΔAND é isósceles, pois (veja a figura abaixo)
   $$NA = ND\,, \quad \text{e assim} \quad \widehat{NDA} = \widehat{DAN}\,.$$

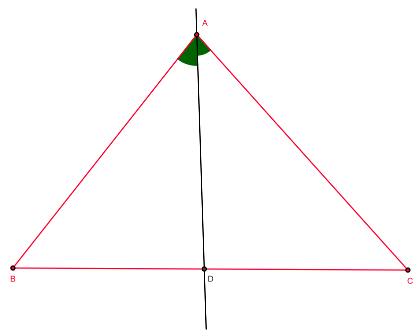


4. Como a reta que contém os pontos $\underline{N}$ e $\underline{D}$, e a reta que contém pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$ são paralelas, temos que
   $$\widehat{NDA} = \widehat{BAD}\,,$$
   pois estes, são ângulos alternos internos relativos à reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{D}$.

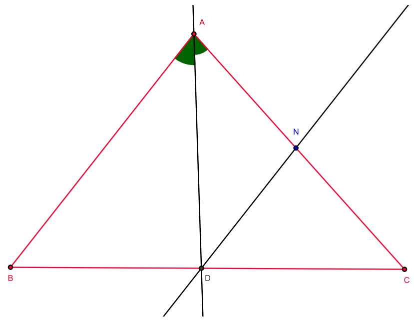
   Logo segue que a reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{D}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$.

Com isto podemos estamos prontos para fazer a construção, como veremos seguir:

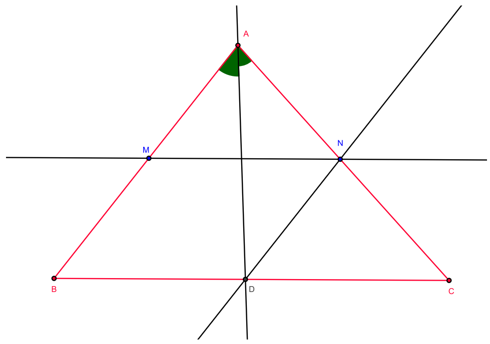
i. Tracemos a bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$, que interceptará o lado $\overline{BC}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{D}$ (veja a figura abaixo);



ii. Tracemos a reta paralela à reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$, que contém o ponto $\underline{D}$, que interceptará o lado $\overline{AC}$ em um ponto, que denotaremos por $\underline{N}$ (veja a figura abaixo);



iii. Traçando a reta paralela à reta que contém os pontos $\underline{B}$ e $\underline{C}$, que cotém o ponto $\underline{N}$, obtemos um ponto, que indicaremos por $\underline{M}$, na intersecção da mesma com o lado $\overline{AB}$, terminando a construção (veja a figura abaixo).



Observemos que, os pontos $\underline{M}$ e $\underline{N}$ encontrados acima, satisfazem as propriedades requeridas no exemplo.

De fato, pois como a reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{D}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$, segue que

$$\widehat{NAD} = \widehat{MAD}\,.$$

Além disso, a reta que contém os pontos $\underline{N}$ e $\underline{D}$, é paralela à reta que contém os pontos $\underline{M}$ e $\underline{A}$, assim teremos

$$\widehat{NDA} = \widehat{MAD} = \widehat{NAD}\,,$$

ou seja, o triângulo ΔAND é um triângulo isósceles.

Em particular,

$$AN = ND\,.$$

Como os segmentos $\overline{BM}$, $\overline{DN}$ são paralelos e os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{BD}$ também são paralelos, segue que o quadrilátero $\underline{BMND}$ é um paralelogramo, em particular

$$MB = DN = AN,$$

como pedido no exemplo.

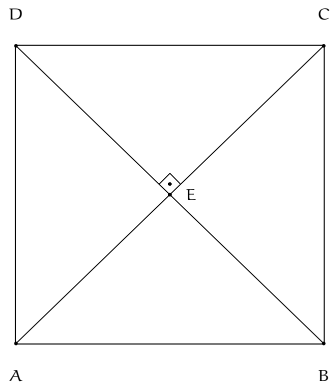
A seguir exibiremos a resolução de vários exercícios utilizando as técnicas desenvolvidas neste capíulo.

1.8 Exercícios

Exercício 1.8.1 *Construir um quadrado* $\square ABCD$ *conhecendo-se a sua diagonal* $\overline{AC}$.

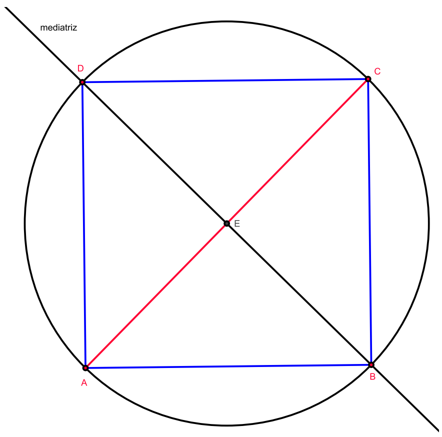
Resolução:

Observemos a figura abaixo:



Sabemos que as digonais de um quadrado interceptam-se perpendicularmente, nos seus pontos médios (pois é um caso particular de losango).

Logo, se denotarmos por $\underline{E}$, o ponto médio do segmento $\overline{AC}$, então os outros dois vértices, que indicaremos por $\underline{B}$ e $\underline{D}$, estarão na intersecção da circunferência de centro no ponto $\underline{E}$ e raio $AE = EC$, com a reta mediatriz do segmento $\overline{AC}$ (que tem o ponto $\underline{E}$ como intersecção com a reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{C}$ - veja a figura acima).



Mostremos que isto é realmente verdade.

Para isto observemos que o triângulo ΔAED será isósceles, pois

$$EA = ED\,,$$

assim

$$\widehat{EAD} = \widehat{ADE}\,. \tag{1.27}$$

Mas, no triângulo ΔAED, temos

$$\begin{aligned} \pi &= \widehat{DEA} + \widehat{EAD} + \widehat{ADE} \\ &\overset{\widehat{DEA}=\frac{\pi}{2}}{=} \frac{\pi}{2} + \widehat{EAD} + \widehat{ADE} \\ &\overset{(1.27)}{=} \frac{\pi}{2} + 2\,\widehat{EAD}\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\widehat{EAD} = \widehat{ADE} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Utilizando-se o mesmo raciocínio para o triângulo ΔAEB segue que

$$\widehat{BAE} = \widehat{EBA} = \frac{\pi}{4}.$$

Portanto

$$\widehat{BAD} = \widehat{EAD} + \widehat{BAE} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,.$$

De modo análogo (utilizando-se os triângulos ΔAEB, ΔBEC e ΔCED) podemos mostrar que (será deixado como exercício para o leitor)

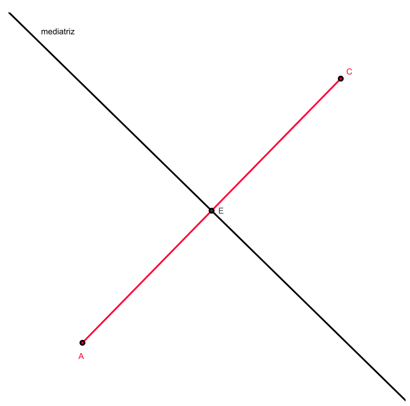
$$\widehat{CBA} = \widehat{DCB} = \widehat{ADC} = \frac{\pi}{2}\,,$$

isto é, o quadrilátero $\underline{ABCD}$ é um paralelogramo.

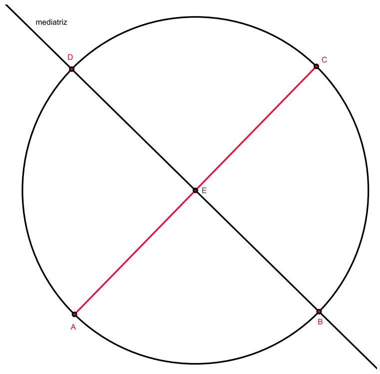
Além disso, os triângulos , ΔAEB, ΔBEC e ΔCED são triângulos congruentes (caso LAL), mostrando com isto que o quadrilátero $\underline{ABCD}$ é um quadrado.

Vamos obtê-lo geometricamente.

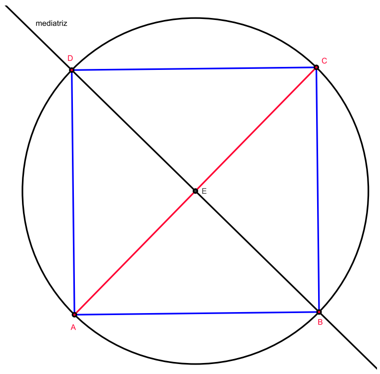
1. Encontremos a mediatriz do segmento $\overline{AC}$, que interceptará o segmento $\overline{AC}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{E}$ (o ponto médio do segemnto $\overline{AC}$ - veja a figura abaixo);



2. Tracemos a circunferência de centro no ponto $\underline{E}$, de raio $\overline{EA}$, que encontrará a mediatriz obtida no item 1. em dois pontos, que denotaremos por $\underline{B}$ e $\underline{D}$ (veja a figura abaixo);



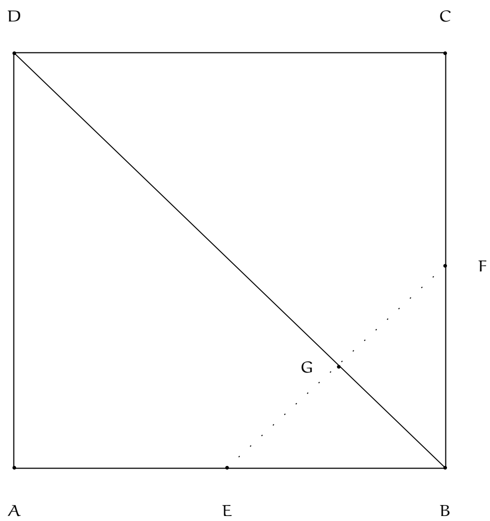
3. Os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ e $\underline{D}$ formam um quadrado, cuja diagonal é o segmento $\overline{AC}$ dado (veja a figura abaixo).



Exercício 1.8.2 *Construir um quadrado conhecendo-se os pontos médios de dois lados adjacentes.*

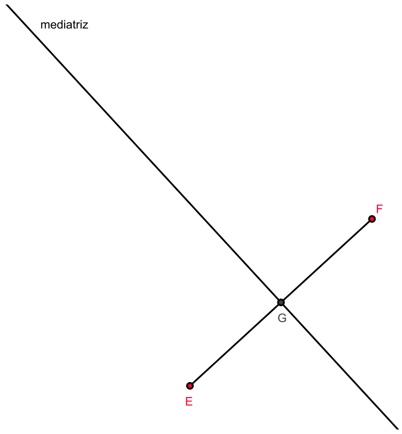
Resolução:

Para ilustrar o problema consideremos a figura abaixo:



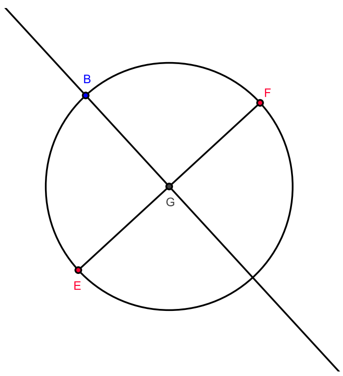
Suponhamos que sejam dados os pontos médios, que chamaremos de $\underline{E}$ e $\underline{F}$, dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do quadrado $\square ABCD$, respectivamente.

1. Começaremos traçando a mediatriz do segmento $\overline{EF}$ (veja a figura abaixo);

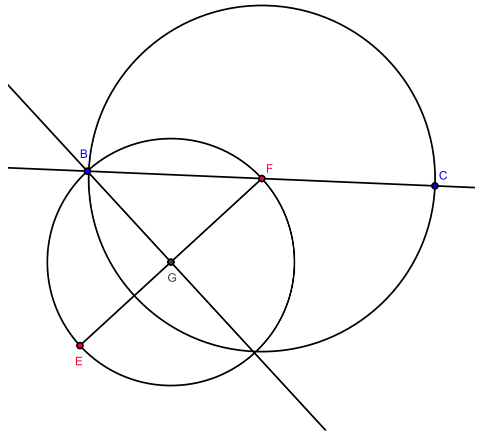


   Observemos que os vértices $\underline{B}$ e $\underline{D}$ do quadrado $\square ABCD$ pertencem a esta mediatriz. De fato, se indicarmos por $\underline{G}$, o ponto da intersecção do segmento de reta $\overline{BD}$ com o segmento de reta $\overline{EF}$, então os triângulos ΔBEG e ΔFBG serão congruentes (caso LLL, pois, por hipótese temos $EB = FB$, o segmento $\overline{GB}$ é um lado comum aos dois triângulos e o pontp $\underline{G}$ é ponto médio do segmento $\overline{EF}$ - veja a figura abaixo).
   Em particular,
   $$\widehat{EGB} = \widehat{BGF} \tag{1.28}$$
   e, no vértice $\underline{G}$, temos que:
   $$\widehat{EGB} + \widehat{BGF} = \pi, \quad \text{assim, (1.28) implicará} \quad \widehat{EGB} = \widehat{BGF} = \frac{\pi}{2},$$
   mostrando que o segmento de reta $\overline{BD}$ é perpendicular ao segmento $\overline{EF}$, ou seja, deverá estar contido na mediatriz do segmento $\overline{EF}$.

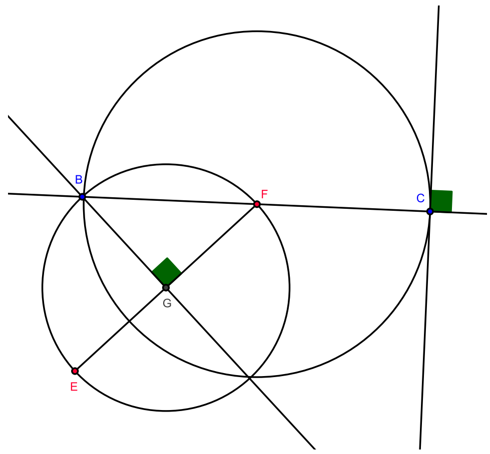
2. A semi-circunferência de centro no ponto $\underline{G}$ e raio igual a $\overline{EG} = \overline{GF}$, interceptará a mediatriz do item 1. em um ponto, que chamaremos de $\underline{B}$ (na verdade encontra em outro ponto que não será usado - veja a figura abaixo);
   O ponto $\underline{B}$ será um dos vértices do quadrado $\square ABCD$ (o ângulo $\widehat{EBF} = \dfrac{\pi}{2}$, pois o triângulo ΔEBF está inscrito na semi-circunferência de centro no ponto $\underline{G}$ e cujo diâmetro é o segemnto $\overline{EF}$).



3. A circunferência centrada no ponto F e raio $\overline{BF}$ encontrará a reta que contém os pontos F e B em um ponto, que chamaremos de C (e no ponto B), que será o outro vértice do quadrado $\square ABCD$ (veja a figura abaixo);

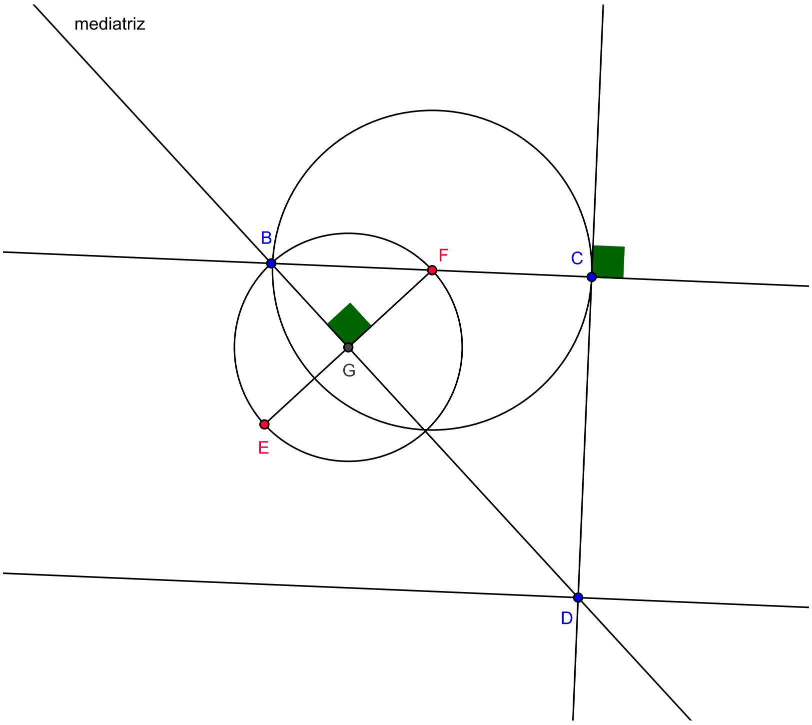


4. Pelo ponto C, tracemos a reta perpendicular à reta que contém o segmento $\overline{BC}$ (vje a afigura abaixo);

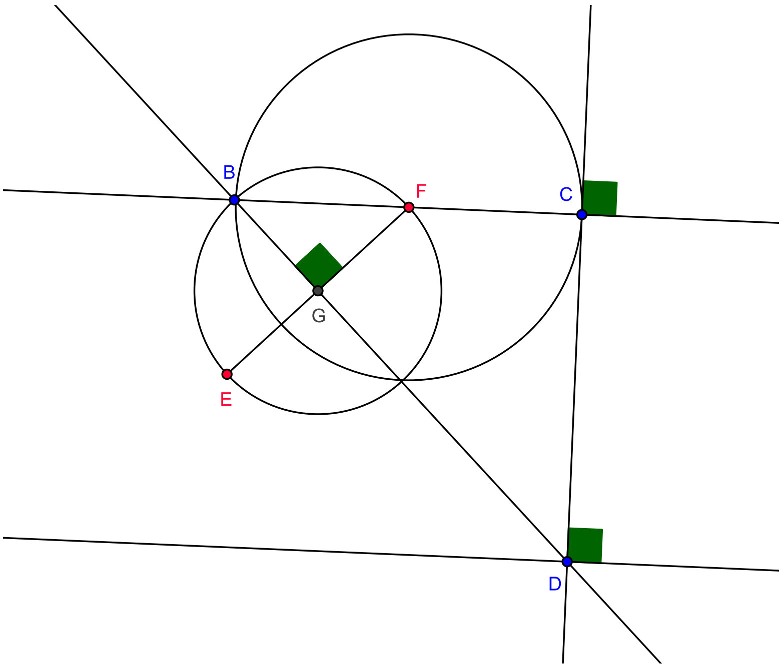


5. A mediatriz do segmento $\overline{EF}$, encontrará a reta perpendicular obtida no item 4. em um ponto, que chamaremos de D, que estará no mesmo semi-plano determinado pela reta que passa pelos pontos B e C e contém o ponto E (veja a figura abaixo);

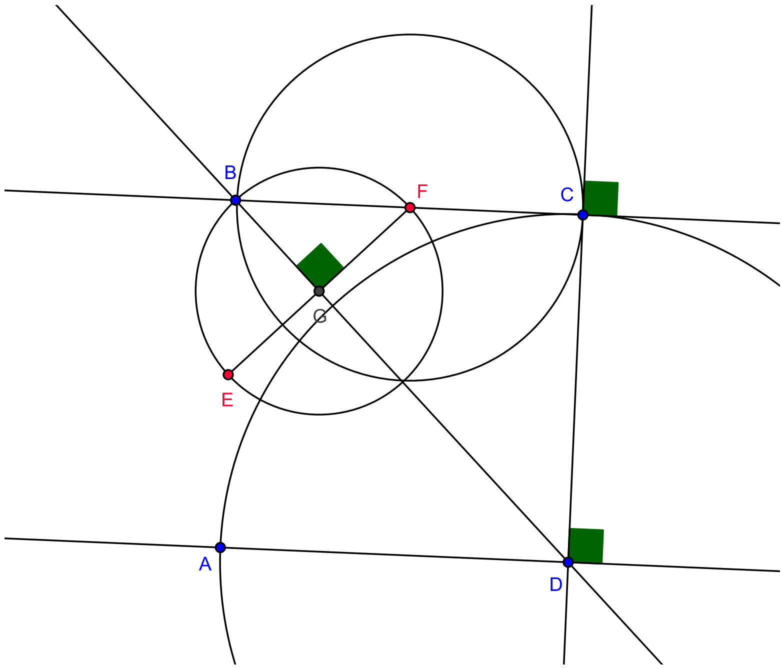
   O ponto D é outro vértice do quadrado $\square ABCD$, pois os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares e
$$CD = BC,$$
   por construção.



6. Pelo, ponto D, tracemos a reta perpendicular à reta que contém o segmento $\overline{CD}$ (veja a figura abaixo).



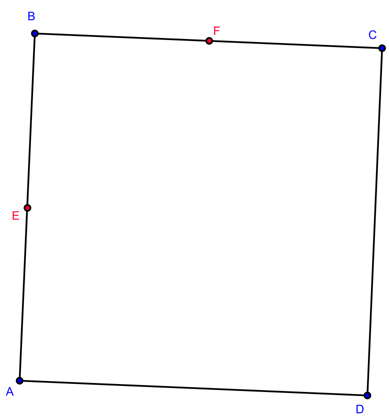
7. A circunferência de centro no ponto $\underline{D}$ e raio $BC = CD$, encontrará a reta perpendicular obtida no item 6., em um ponto, que chamaremos de $\underline{A}$, que está no mesmo semi-plano determinado pela reta que passa pelos pontos $\underline{C}$ e $\underline{D}$, e contém o ponto $\underline{E}$ (veja a figura abaixo).



O ponto $\underline{A}$ será o último vértice do quadrado $\square ABCD$, pois os segmentos de reta $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ são perpendiculares,

$$AB = AD = DC = BC\,,$$

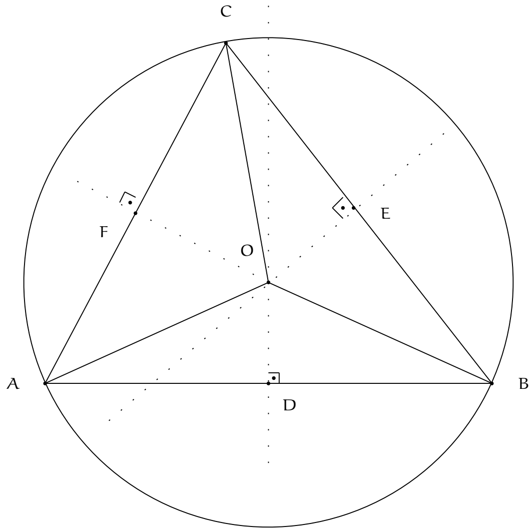
portanto os lados do quadrilátero $\underline{ABCD}$ são, dois a dois, paralelos, de mesmo comprimento e os pontos $\underline{E}$ e $\underline{F}$ são, por construção, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, completando a construção do quadrado $\square ABCD$ (veja a figura abaixo).



Exercício 1.8.3 *Dado um triângulo ΔABC construir uma circunferência circunscrita ao mesmo.*

<u>**Resolução:**</u>

Basta encontrar a intersecção das mediatrizes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ΔABC (que coincidirá com a intersecção da mediatriz do segmento $\overline{AC}$ como veremos na Observação (1.8.1) a seguir).



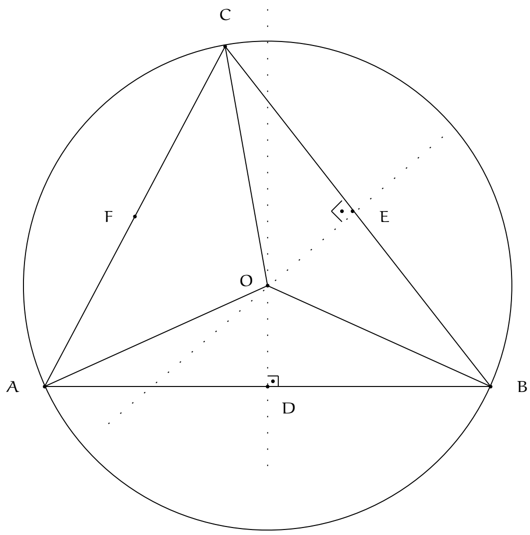
Mostremos que isto é realmente é verdade.

Para isto precisamos mostrar que

$$OA = OB = OC,$$

onde o ponto, que indicaremos por $\underline{O}$, é o ponto de interseção das mediatriz relativas aos lados do triângulo ΔABC (as três mediatrizes encontram-se em um único ponto como veremos na Obeservção (1.8.1), a seguir).

Consideremos três pontos, que indicaremos por $\underline{D}$, $\underline{E}$ e $\underline{F}$, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente e denotemos por $\underline{O}$, o ponto de interseção das mediatrizes, relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ (veja a figura abaixo).



Pelo caso LAL comum, os triângulos ΔAOD e ΔBDO são congruentes, pois

$$AD = DB\,, \quad \widehat{ODA} = \widehat{BDO} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Logo

$$AO = OB\,.$$

De modo análogo, os triângulos ΔBOE e ΔCEO são congruentes, pois

$$BE = EC\,, \quad \widehat{OEB} = \widehat{CEO} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Logo

$$OB = OC\,.$$

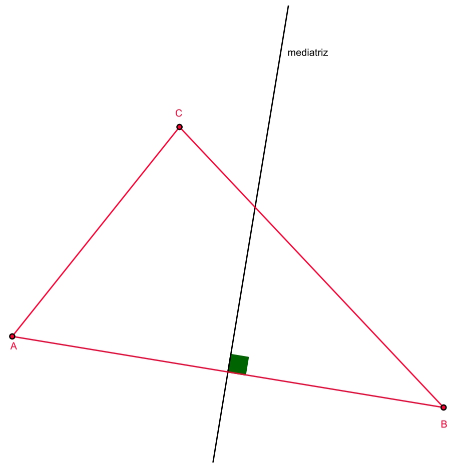
Logo podemos concluir que

$$OA = OB = OC\,.$$

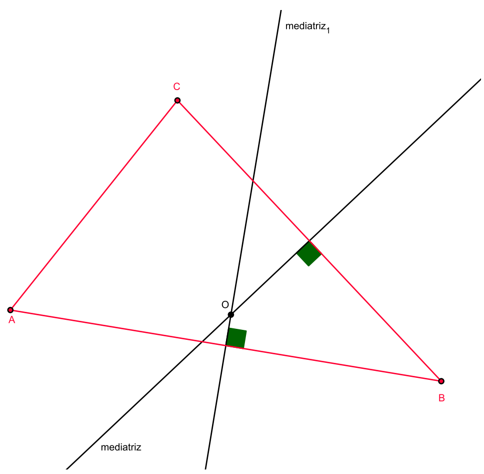
Portanto o triângulo ΔABC estará circunscrito na circunferência de centro no ponto $\underline{O}$ e raio $\overline{OA}$.

Geometricamente procedemos da seguinte forma:

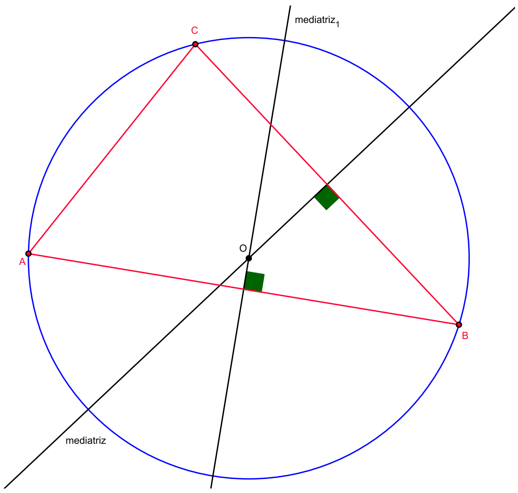
1. Tracemos a mediatriz do lado $\overline{AB}$ do triângulo ΔABC (veja a figura abaixo);



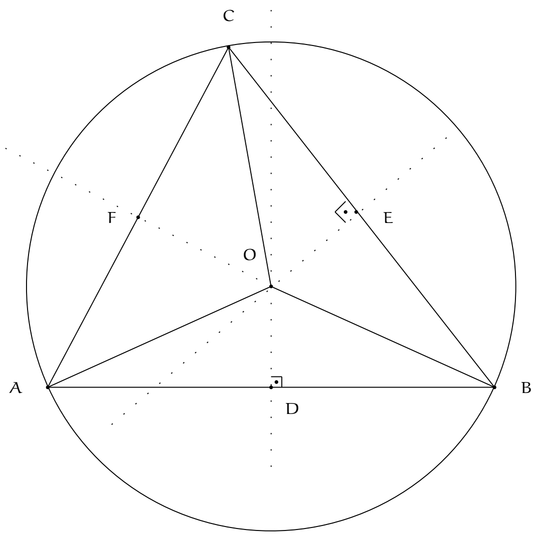
2. Observemos que a mediatriz do lado $\overline{BC}$ encontrará a mediatriz acima no ponto $\underline{O}$ (veja a figura abaixo);



3. A circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC terá centro no ponto $\underline{O}$ e raio $\overline{OA}$ (veja a figura abaixo).



Observação 1.8.1 *Como conseqüência temos que o ponto de intersecção das mediatrizes, pelos lados* $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$ *do triângulo* ΔABC*, também será o ponto* $\underline{O}$ *(veja a figura abaixo).*



De fato, pois os triângulos ΔAFO *e* ΔCOF *são congruentes (caso LLL comum), assim*

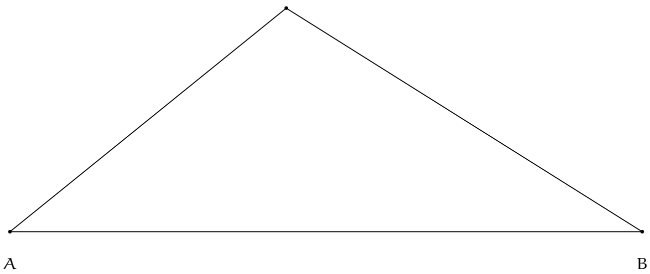
$$\widehat{AFO} = \widehat{OFC}.$$

Mas

$$\widehat{AFO} + \widehat{OFC} = \pi, \qquad \textit{logo} \quad \widehat{AFO} = \widehat{OFC} = \frac{\pi}{2},$$

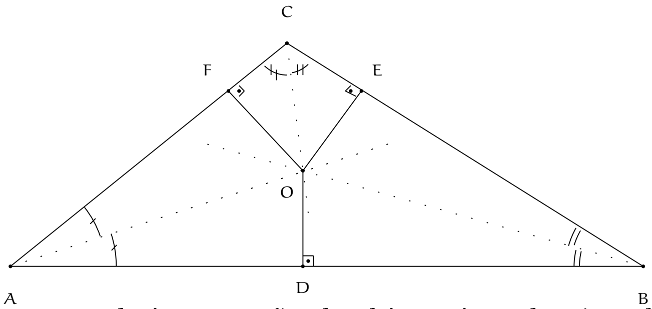
mostrando que o ponto $\underline{O}$*, está sobre a mediatriz, relativa ao lado* $\overline{AC}$ *do triângulo* ΔABC*.*

Exercício 1.8.4 *Dado o triângulo abaixo, construir uma circunferência inscrita ao mesmo.*



Resolução:

Basta encontrar a intersecção das bissetrizes dos ângulos $\widehat{CBA}$ e $\widehat{BAC}$ do triângulo ΔABC (que coincidirá com a intersecção da bissetriz do ângulo $\widehat{ACB}$, como veremos na Observação (1.8.2) a seguir).



Denotemos por $\underline{O}$, o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos do triângulo ΔABC (que estamos supondo que seja único, como será visto na Observação (1.8.2) a seguir - veja a figura acima).

Indicaremos por $\underline{D}$, $\underline{E}$ e $\underline{F}$, os pontos de intersecção das perpendiculares aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, que contém o ponto $\underline{O}$ (veja a figura acima).

Se mostrarmos que
$$OD = OE = OF,$$
então a circunferência centrada no ponto $\underline{O}$ e raio $\overline{OD}$, estará inscrita no triângulo ΔABC, pois será tangente aos lados do triângulo ΔABC, já que
$$\widehat{OEB} = \widehat{OFA} = \widehat{ODB} = \frac{\pi}{2}.$$

Para mostrar isto observemos que, pelo caso AAL comum, os triângulos ΔOBD e ΔOEB são congruentes, pois
$$\widehat{BDO} = \widehat{OEB} = \frac{\pi}{2}$$
e o lado $\overline{BO}$ é comum aos triângulos ΔOBD e ΔOEB.

Logo, em particular, segue que
$$OD = EO.$$

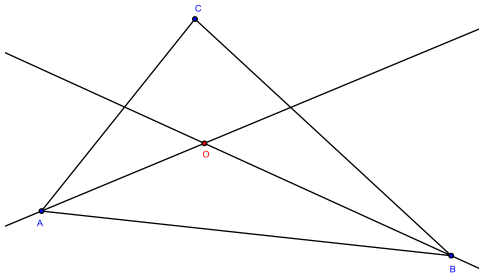
De modo análogo os triângulos ΔAOD e ΔAFO são congruentes, pois
$$\widehat{ODA} = \widehat{AFO} = \frac{\pi}{2}$$
e o lado $\overline{AO}$ é comum aos triângulos ΔAOD e ΔAFO.

Em particular, teremos
$$OD = OF.$$

Portanto
$$EO = OD = OF,$$
como queríamos mostrar.

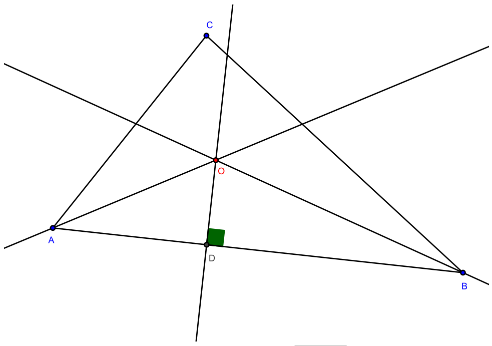
Para a construção geométrica temos:

1. Tracemos as bissetrizes dos ângulos $\widehat{CBA}$ e $\widehat{BAC}$, que se encontram em um ponto, que chamaremos de $\underline{O}$ (veja a figura abaixo);

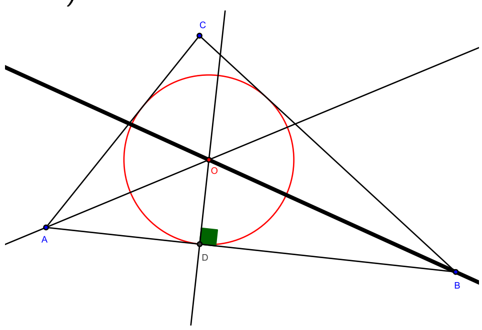


2. Encontremos a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, que contém o ponto $\underline{O}$.

   Esta reta interceptará a reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$ em um ponto, que indicaremos por $\underline{D}$ (veja a figura abaixo);



3. A circunferência de centro no ponto $\underline{O}$ e raio $\overline{OD}$, é a circunferência inscrita no triângulo ΔABC (veja a figura abaixo).



Observação 1.8.2 *Afirmamos que o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos $\widehat{BAC}$ e $\widehat{ACB}$ também será o ponto $\underline{O}$.*

De fato, os triângulos ΔCOF e ΔCEO são congruentes, pois

$$\widehat{OFC} = \frac{\pi}{2} = \widehat{CEO}, \quad FO = EO,$$

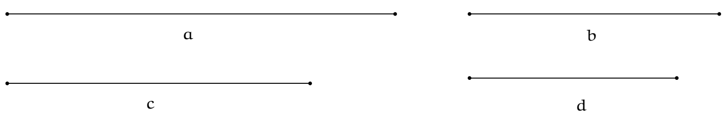
e o segmento $\overline{CO}$ é comum aos triângulos ΔCOF e ΔCEO.

Assim, segue que

$$\widehat{FCO} = \widehat{OCE},$$

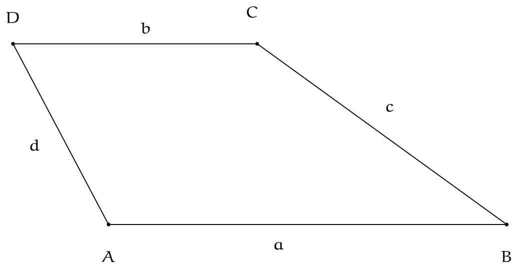
mostrando que a semi-reta que contém os pontos $\underline{C}$ e $\underline{O}$, é bissetriz do ângulo $\widehat{ACB}$, como queríamos demonstrar.

Exercício 1.8.5 *Construir um trapézio* $ABCD$, *onde as bases maior e menor são os segmentos de reta* $\overline{AB} = a$ *e* $\overline{CD} = b$, *respectivamente, e os outros dois lados são os segmentos de reta* $\overline{CB} = c$ *e* $\overline{AD} = d$, *todos dados na figura abaixo.*



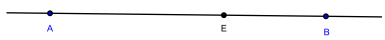
Resolução:

Consideremos sobre uma reta $\underline{r}$, dois pontos, que chamaremos de $\underline{A}$ e $\underline{B}$ de comprimento $\underline{AB}$ (isto é, transportar o segmento $\underline{\overline{AB}}$).

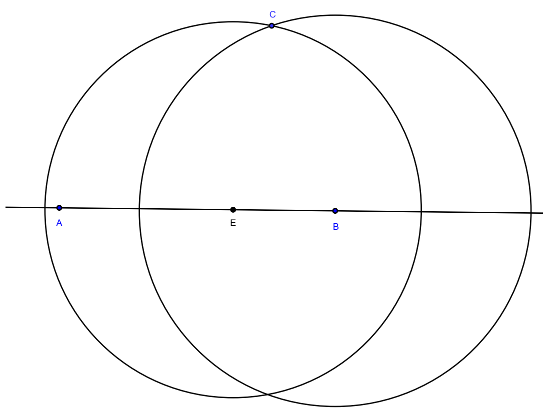


Sabemos que num trapézio $ABCD$, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos.
Com isto podemos fazer a construção do mesmo, da seguinte forma:

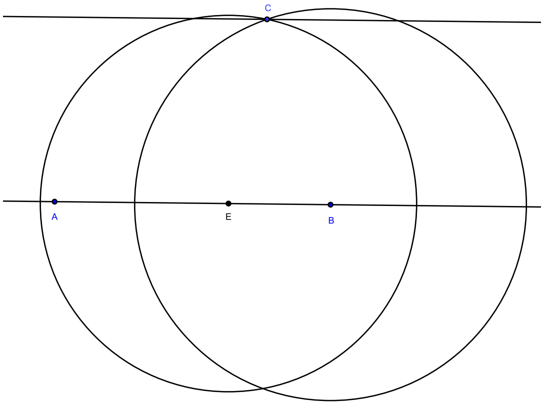
1. Indiquemos por $\underline{E}$, o ponto sobre o segmento $\overline{AB}$, tal que $AE = CD$ (ou seja, transportar o segmento $\overline{CD}$ - veja a figura abaixo);



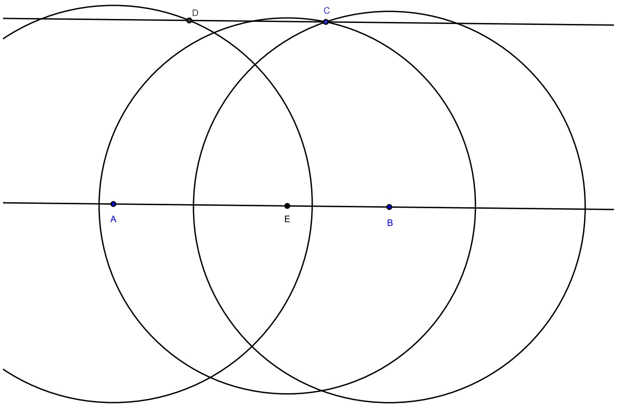
2. Denotemos por $\underline{C}$, o ponto de interseção da circunferência centrada no ponto $\underline{E}$ e raio $d = \overline{AD}$, com a circunferência centrada no ponto $\underline{B}$ e raio $c = \overline{CB}$ (na verdade temos um outro ponto na interseção - veja a figura abaixo);



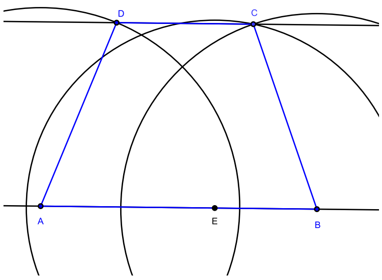
3. Obtenha a reta paralela à reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$, que contém o ponto $\underline{C}$ (veja a figura abaixo);



4. Indiquemos por $\underline{D}$, o ponto de interseção da circunferência centrada no ponto $\underline{A}$ e raio $d = \overline{AD}$, com a a reta do item 3. acima (veja a figura abaixo);



5. Os vértices do trapézio procurado, serão os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ e $\underline{D}$ (veja a figura abaixo).



De fato, observemos que na construção acima temos

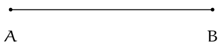
$$\overline{AB} = a\,, \overline{BC} = c \quad \text{e} \quad \overline{AD} = d\,.$$

Além disso, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos.
Só falta mostrar que

$$\overline{CD} = b\,.$$

Mas isso segue do fato que $ADCE$ é um paralelogramo, pois o segmento $\overline{AE}$ é paralelo a $\overline{CD}$ e segmento $\overline{AD}$ é paralelo a $\overline{EC}$, por construção, completando a resolução do exemplo.

Exercício 1.8.6 *Construir um hexágono regular* ABCDEF, *conhecendo-se o lado* $\overline{AB}$, *dado na figura abaixo.*



Resolução:

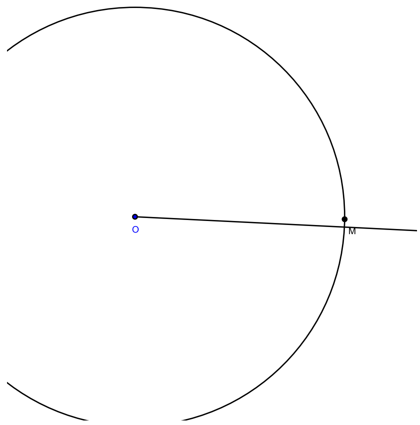
Para construí-lo basta lembrar que os ângulos internos de um hexágono regular são todos iguais a $\dfrac{2\pi}{3}$, pois a soma dos ângulos internos do mesmo é $4\,\pi$ (por que?).

Além disso, lembremos que basta sabermos construir um ângulo que tenha medida $\dfrac{\pi}{3}$ radianos, ou seja, um triângulo equilátero e assim teremos

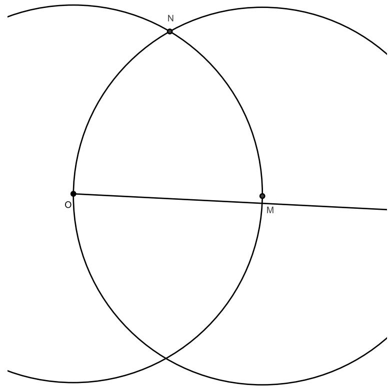
$$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}\,.$$

Para isto agimos da seguinte forma:

1. Fixemos uma semi-reta com extermidade em um ponto, que indicaremos por $\underline{O}$.
2. Tracemos uma circunferência de centro no ponto $\underline{O}$ e raio qualquer, que encontrará a semi-reta do item 1. acima, em um ponto, que chamaremos de $\underline{M}$ (veja a figura abaixo);

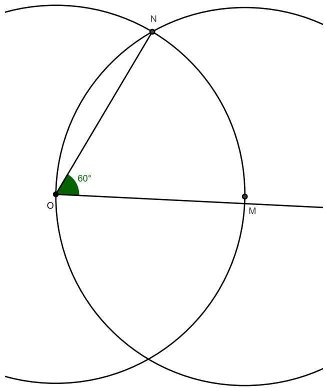


3. Tracemos uma circunferência, de centro no ponto $\underline{M}$ e raio igual ao do item 2. acima, que encontrará a circunferência item 2. acima, em um ponto, que denotaremos por $\underline{N}$ (na verdade temos um outro ponto - veja a figura abaixo);



Com isto teremos que o ângulo $\widehat{MON}$ terá a medida $\dfrac{\pi}{3}$ radianos, pois os pontos $\underline{O}$, $\underline{M}$ e $\underline{N}$, serão vértices de um triângulo equilátero já que

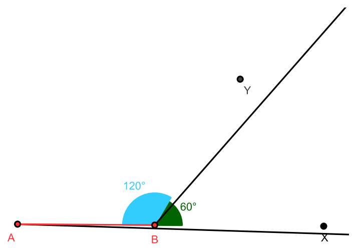
$$OM = ON = MN\,.$$



A construção do hexágono basea-se, excencialmente, no transporte conveniente do ângulo $\widehat{MON}$ obtido acima.

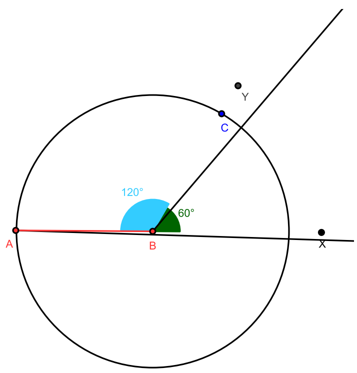
1. Transportemos o ângulo $\widehat{MON}$ para o vértice $\underline{B}$, mais precisamente, encontremos dois pontos, que indicaremos por $\underline{Y}$ e $\underline{X}$, sendo este último sobre a semi-reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$, tais que (o ponto $\underline{Y}$ deverá ser obtido! - figura abaixo

$$\widehat{XBY} = \widehat{MON}\,.$$

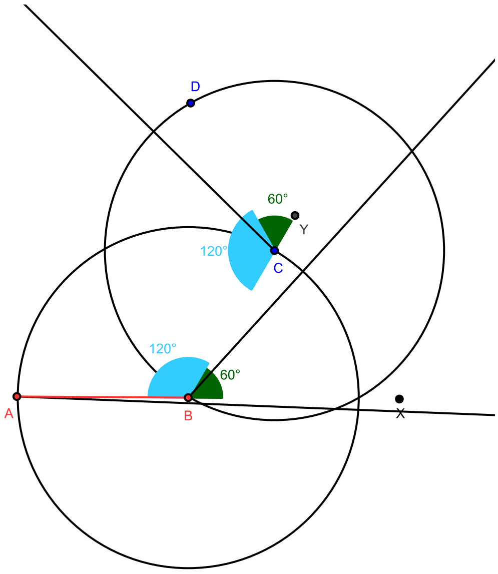


2. Sobre o segemnto $\overline{BY}$, do ângulo $\widehat{XBY}$, encontre um ponto, que chamaremos de $\underline{C}$, de tal modo que (veja a figura abaixo)

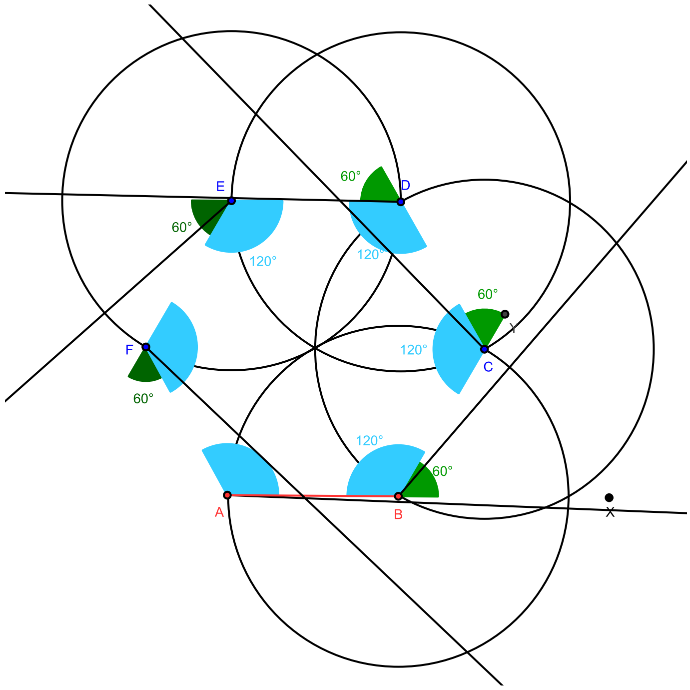
$$BC = AB\,.$$



3. Repita o processo acima no vértice $\underline{C}$, ou seja, trocando-se o segmento $\overline{AB}$, pelo segmento $\overline{BC}$, para encontrar um ponto, que chamaremos de $\underline{D}$, (cuidado no transporte do ângulo $\frac{\pi}{3}$; o ponto $\underline{D}$ deverá estar no semi-plano determinado pela reta que passa pelos pontos $\underline{B}$ e $\underline{C}$, que contém o ponto $\underline{A}$ - veja afigura abaixo).



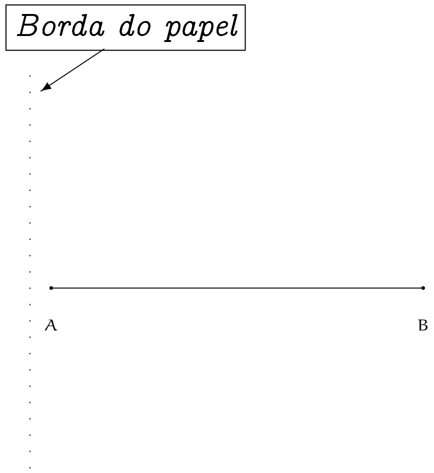
Repetindo a construção acima nos outros vértices, obteremos o hexágono regular, cujo lado $\overline{AB}$ foi dado.



Observação 1.8.3 *Lembremos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de $\underline{n}$-lados é dado por $\underline{(n-2)\,\pi}$.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

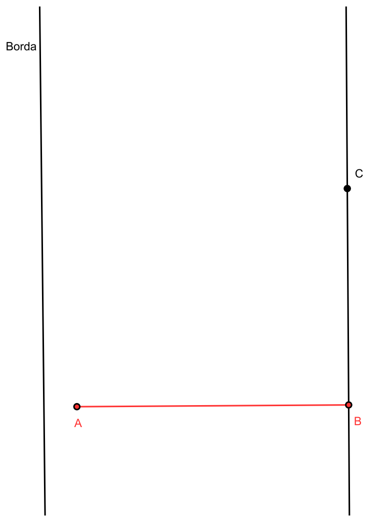
Exercício 1.8.7 *Construir uma reta, perpendicular ao segmento de reta $\overline{AB}$, que contenha o ponto $\underline{A}$, estando este em um ponto muito próximo da borda do papel (veja a figura abaixo).*



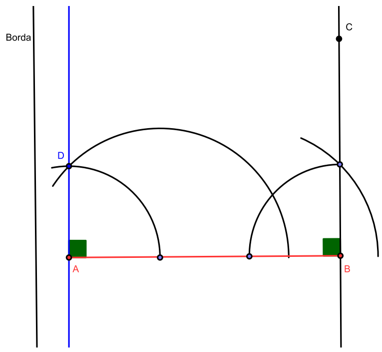
Resolução:

Neste caso podemos agir da seguinte forma:

1. Tracemos a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, pelo ponto $\underline{B}$.
   Escolhamos um ponto, que indicaremos por $\underline{C}$, da perpendicular obtida no item 1. acima, diferente do ponto $\underline{B}$ (veja a figura abaixo);

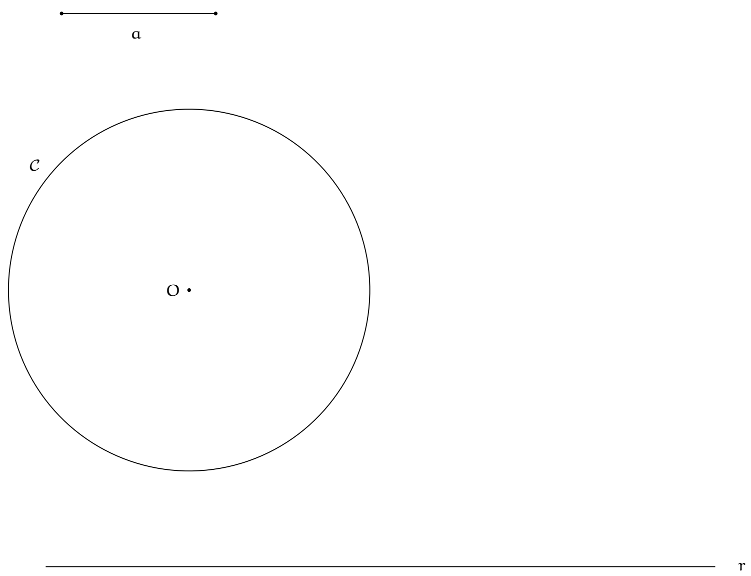


2. Trasportemos o ângulo $\widehat{CBA} = \dfrac{\pi}{2}$, de tal sorte que, um lado do ângulo transportado seja a semi-reta que tem extremidade no ponto $\underline{A}$ e que contém o ponto $\underline{B}$ (isso é possível sem ultrapassar a borda do papel - veja a figura abaixo);



3. A reta que contém o outro lado do ângulo transportado (isto é, a reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{D}$) será a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, que contém o ponto $\underline{A}$.

Exercício 1.8.8 *Dadas uma circunferência, que chamaremos de $\underline{\mathcal{C}}$, de raio $R > 0$ e uma reta $\underline{r}$, construir uma circunferência, que chamaremos de $\underline{\mathcal{C}\,'}$, de raio $a > 0$ dado, tangente à reta $\underline{r}$ e tangente, exteriormente, a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$.*



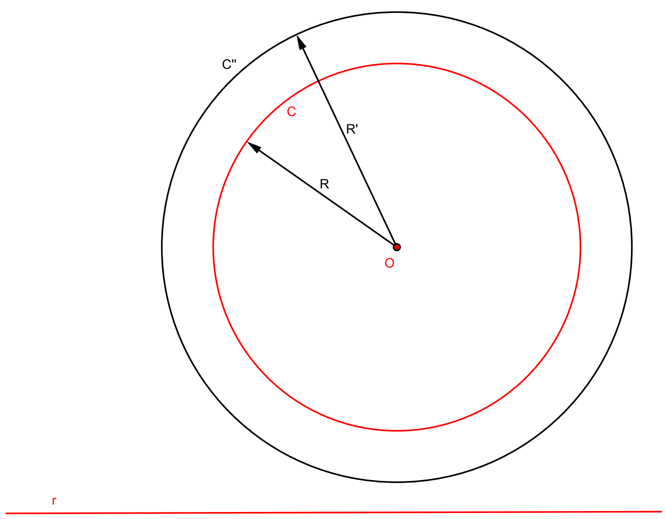
Resolução:

Um modo de encontrar geometricamente a circunferência $\underline{\mathcal{C}\,'}$ é a seguinte:

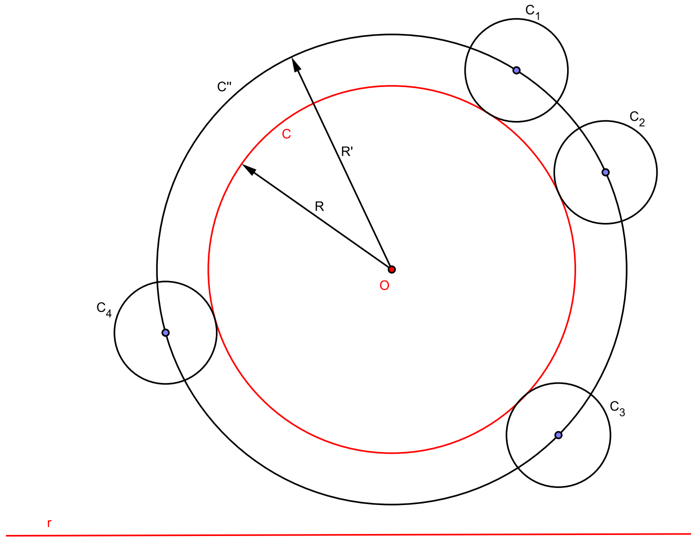
1. Denotemos por $\underline{O}$, o ponto que é o centro da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$.

   Tracemos uma circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}\,''}$, de centro no ponto $\underline{O}$ e raio (veja a figura abaixo)

$$R' \doteq R + a\,.$$

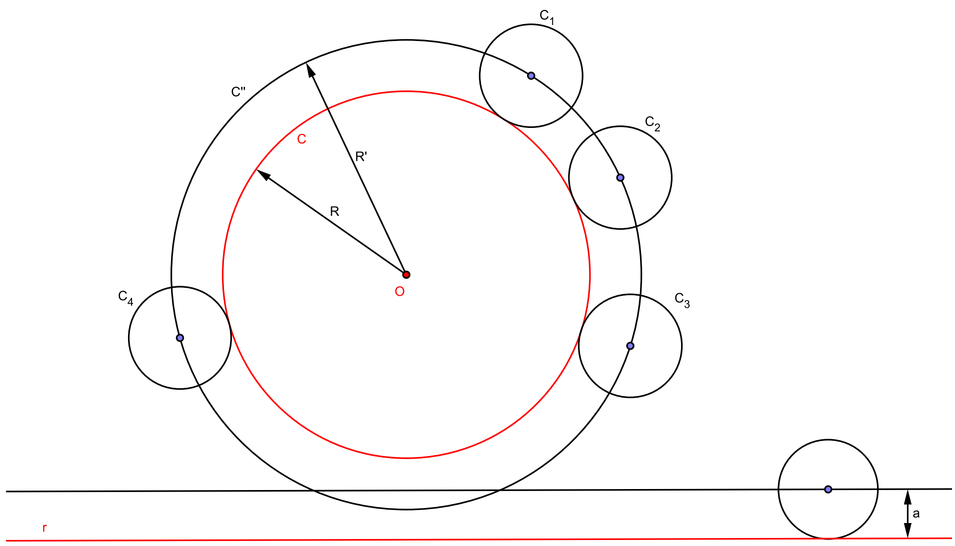


Observemos que todas as circunferência de raio igual a $\underline{a}$, tangentes à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, têm seus centros pertencentes à circunferência $\underline{\mathcal{C}''}$ (no caso, as circunferências $\underline{\mathcal{C}_i}$, para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ na figura abaixo são tangentes à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$);

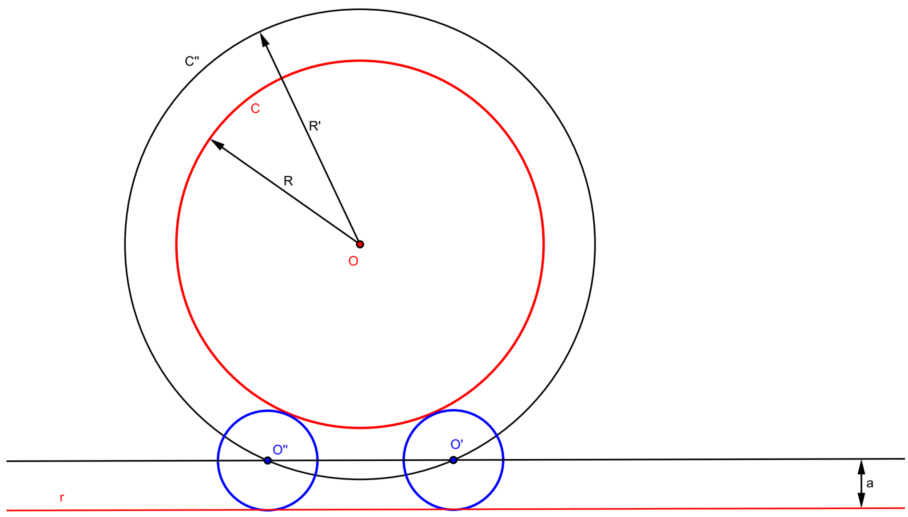


2. Encontremos uma reta paralela à reta $\underline{r}$ que dista $\underline{a}$ da mesma e está nosemi-plano, determinado pela reta $\underline{r}$, que contém a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$.

   Observemos que para a circunferência $\underline{\mathcal{C}'}$, de raio $\underline{a}$, ser tangente à reta $\underline{r}$, ela deverá ter seu centro sobre a reta paralela obtida no item 1. acima (veja a figura abaixo);



3. Na intersecção da circunferência, $\underline{\mathcal{C}''}$, obtida no item 1., com a reta paralela obtida no item 2. acima, obteremos um ponto, que indicaremos por $\underline{O'}$ (teremos um outro ponto, que indicaremos por $\underline{O''}$), que será o centro da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ procurada, que pode ser traçada, utlizando-se o raio $\underline{a}$ (veja a figura abaixo).

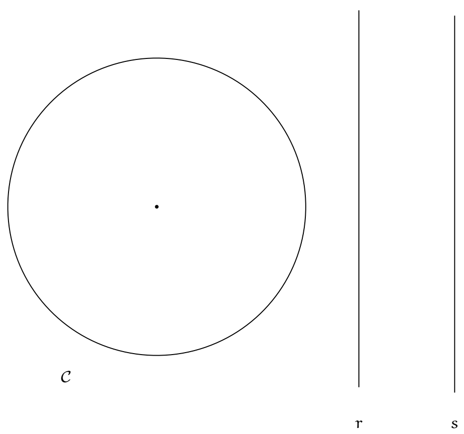


Exercício 1.8.9 *Dadas duas retas, que chamaremos de $\underline{r}$ e $\underline{s}$, e uma circunferência, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, determinar, geometricamente, todos os pontos da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ que são equidistantes da reta $\underline{r}$ e da reta $\underline{s}$. Qual o número máximo de soluções?*

Resolução:

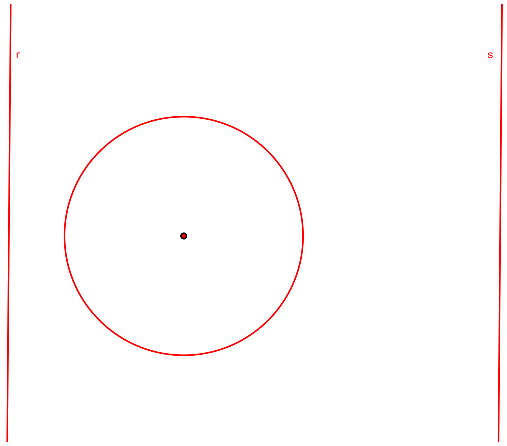
Estudaremos, geometricament, todas as possibilidades, a saber:

I. As retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são paralelas, distintas e a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ está contida em um dos semi-planos determinados por uma das retas (digamos a reta $\underline{r}$), que não contém a reta $\underline{s}$ (veja a figura abaixo):



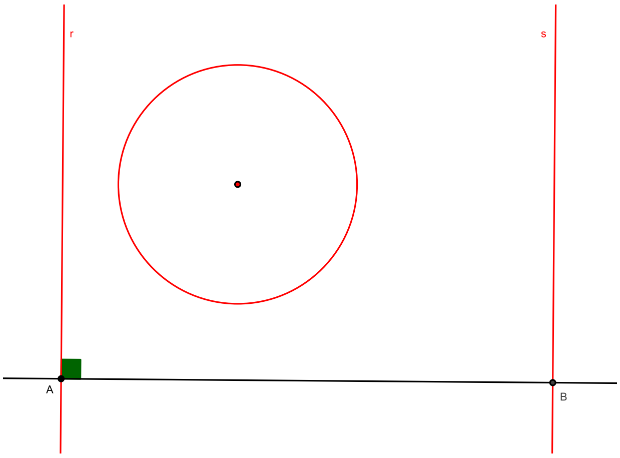
Neste caso o lugar geométrico para o problema acima será vazio, pois os pontos que são equidistantes da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ e da reta $\underline{r}$, estarão a uma distância da reta $\underline{s}$, estritamente maior, que à distância à reta $\underline{r}$.

II. As retas $\underline{r}$ e s são paralelas, distintas e a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ está na "faixa" delimitada pelas duas retas (veja a figura abaixo):



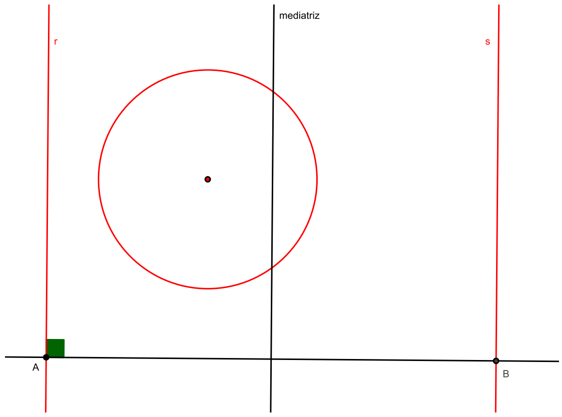
Passemos a resolução, geométrica, deste caso.

II.1. Considere a reta perpendicular à reta $\underline{r}$, que contém um ponto, que chamaremos de $\underline{A}$ da reta $\underline{r}$, que interceptará a reta $\underline{s}$ em um ponto, que denotaremos por $\underline{B}$. Notemos que esta reta será perpendicular à reta $\underline{s}$ (veja a figura abaixo);



II.2. Considere a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

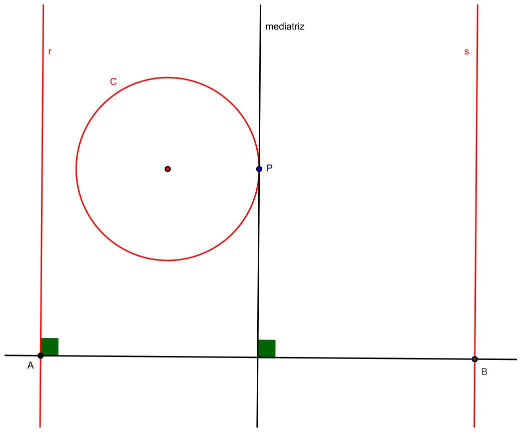
Lembremos que, esta mediatriz será o lugar geométrico de todos os pontos que são equidistantes das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ (veja a figura abaixo);



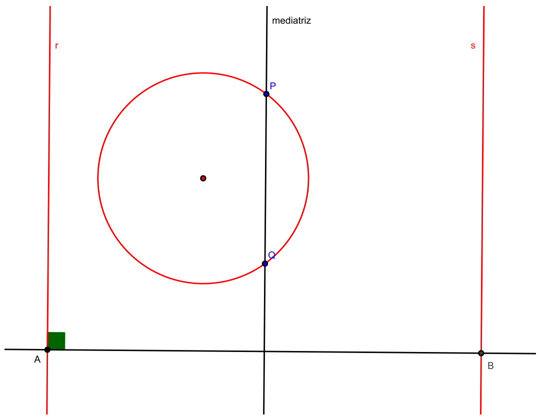
II.3. Portanto, cada ponto de intersecção da reta mediatriz obtida no item 2. acima, com a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, será equidistante das retas $\underline{r}$, $\underline{s}$.

Neste caso, podemos ter as seguinte situações:

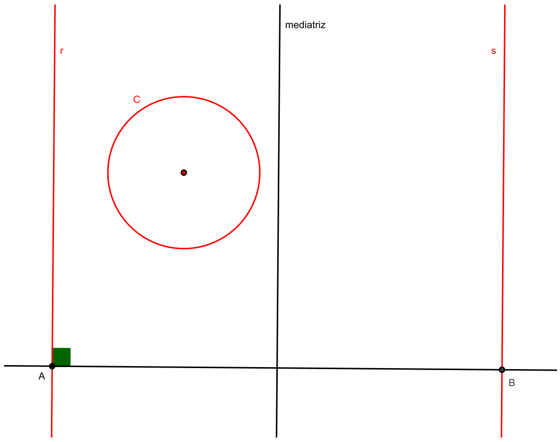
i. uma única solução, isto é um ponto, que chamaremos de $\underline{P}$, no caso que a mediatriz do item 2. acima seja tangente à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ (veja a figura abaixo):



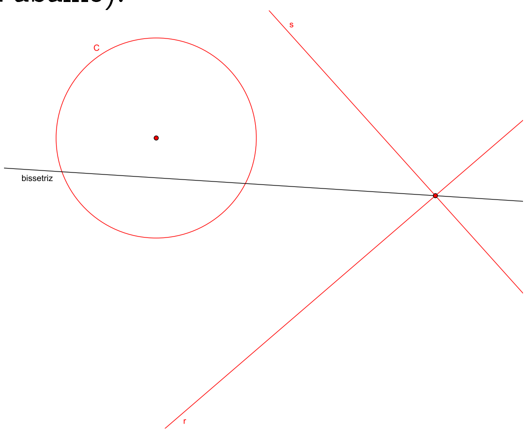
ii. duas soluções distintas, isto é dois pontos distintos, que indicaremos por $\underline{P}$ e $\underline{Q}$, no caso que a mediatriz do item 2. acima, seja secante a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ (veja a figura abaixo):



iii. ou nenhuma solução, isto é, conjunto vazio, caso a mediatriz do item 2. acima, não intercepte a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ (veja a figura abaixo):

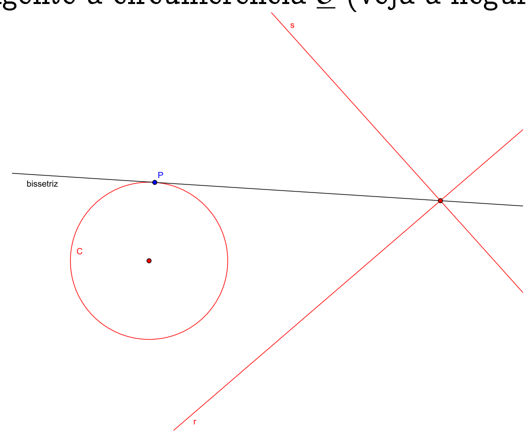


III. Se as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ forem concorrentes (não coincidentes), sabemos que o lugar geométrico dos pontos equidistantes das mesmas será a bissetriz dos ângulos determinados pelas mesmas (veja a figura abaixo).

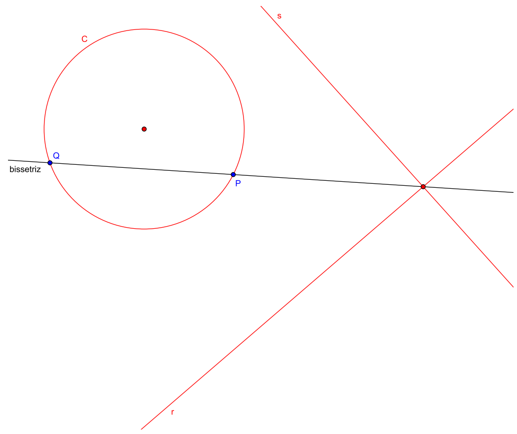


Neste caso, geometricamente, podemos ter as seguinte situações:

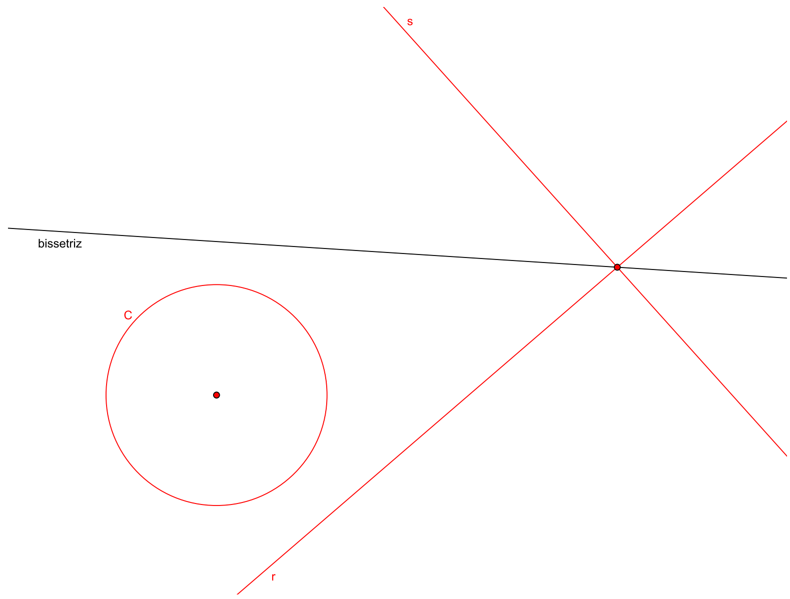
(a) uma única solução, isto é um único ponto, que chamaremos de $\underline{P}$, se a reta bissetriz for uma reta tangente a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ (veja a ficgura abaixo);



(b) duas soluções distintas, isto é, dois pontos, que denotaremos por P e Q, se a reta bissetriz for secante a circunferência $\mathcal{C}$ (veja a figura abaixo);

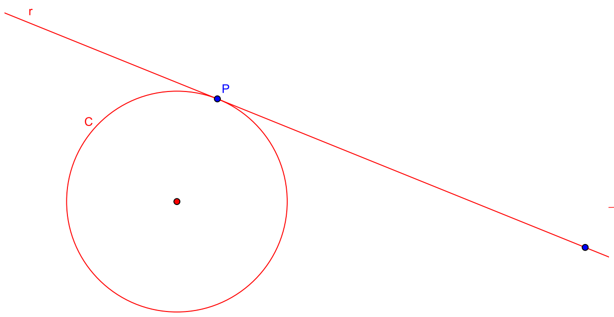


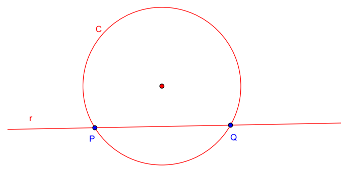
(c) nenhuma solução, isto é, o conjunto vazio, se a reta bissetriz não interceptar a circunferência $\mathcal{C}$ (veja a figura abaixo).



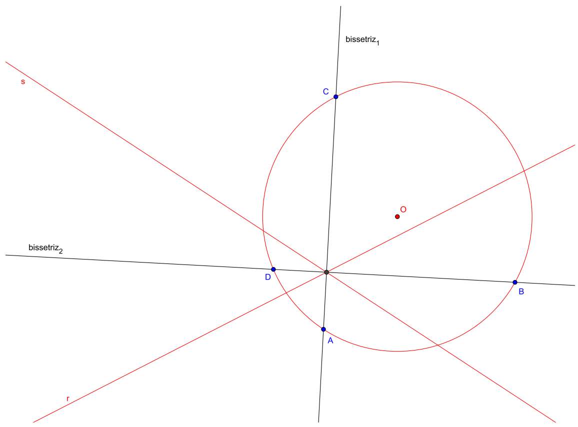
Observação 1.8.4 *No Exercício* (1.8.9) *acima, se as retas r e s forem concorrentes e, por exemplo, a reta r é secante a circunferência $\mathcal{C}$, então teremos apenas duas possibilidades:*

1. *se a reta s coincide com a reta s, então o conjunto procurado é formado pelos pontos de interseção da reta r com a circunferência $\mathcal{C}$ (que pode ser um único ponto se a reta $r = s$, for tangente a circunferência $\mathcal{C}$, ou dois pontos distintos se a a reta $r = s$ for secante a circunferência $\mathcal{C}$ (veja as figuras abaixo);*

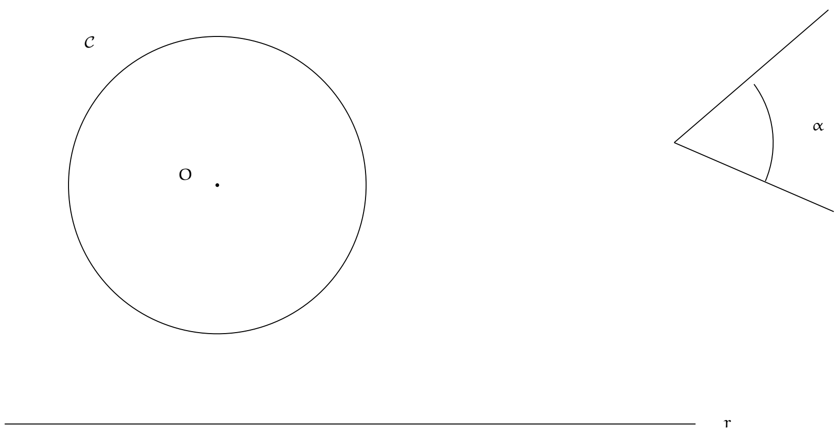




2. *se a reta $\underline{s}$ não for coincidente com a reta $\underline{s}$, então o lugar geométrico dependerá, como em um caso anterior (caso III (b) do Exercício (1.8.9)) , se a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ intercepta ou não as retas bissetrizes dos ângulos determinados pelas retas concorrentes $\underline{r}$ e $\underline{s}$ (podemos ter até 4 soluções - veja a figura abaixo);*

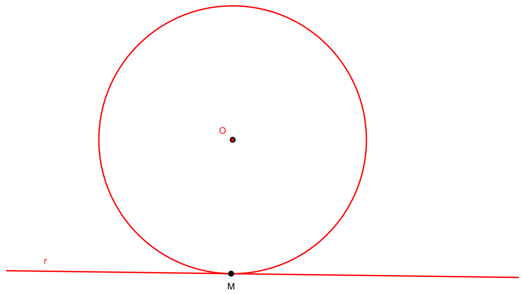


Exercício 1.8.10 *Dadas uma circunferência, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}}$ e um reta, que chamaremos de $\underline{r}$, determinar um ponto, que indicaremos por $\underline{P}$, pertencente a reta $\underline{r}$, de forma que as retas tangentes, que contém o ponto $\underline{P}$, à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ formem um ângulo $\underline{\alpha}$ dado.*



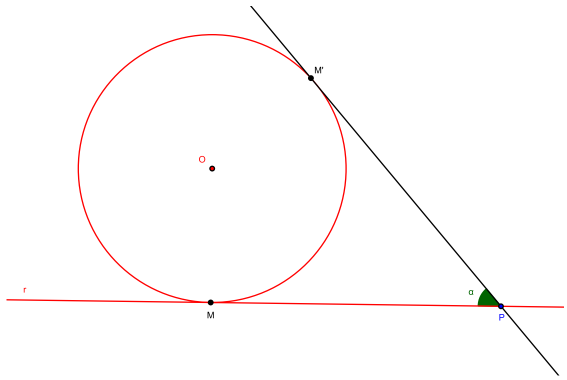
Resolução:

I. Consideremos primeiramente o caso em que a reta $\underline{r}$ é tangente a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ em num ponto, que chamaremos de $\underline{M}$ (veja a figura abaixo).



Neste caso podemos obter, geometricamente, um ponto, que chamaremos de $\underline{P}$, pertencente a reta $\underline{r}$ (exitirá outro), de tal modo que (veja a figura abaixo)

$$\widehat{OPM} = \frac{\alpha}{2}\,.$$

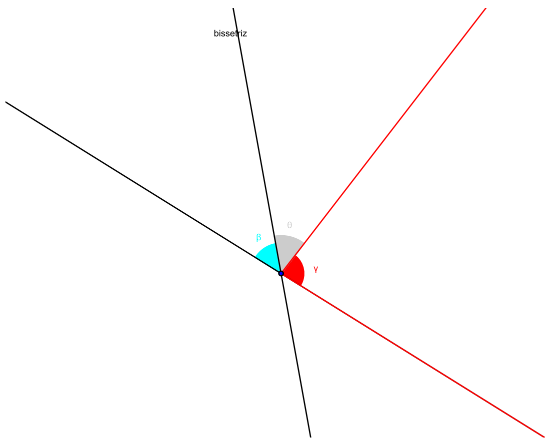


Para isto, obtenhamos um ângulo de medida

$$\theta \doteq \frac{\pi - \alpha}{2}\,.$$

Notemos que figura abaixo, temos que

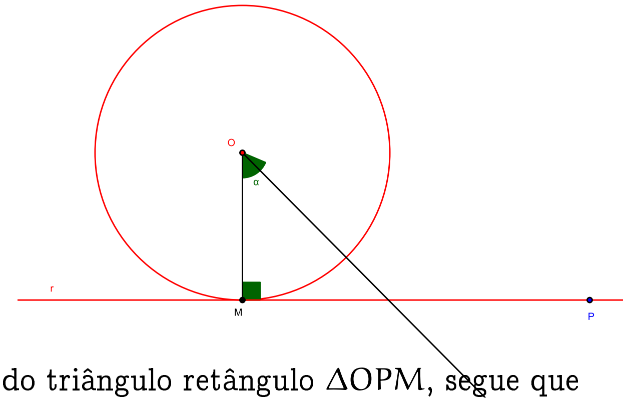
$$\gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \alpha \quad \text{e} \quad \beta + \alpha + \frac{\pi}{2} = \pi\,.$$



Façamos o transporte do ângulo

$$\theta = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

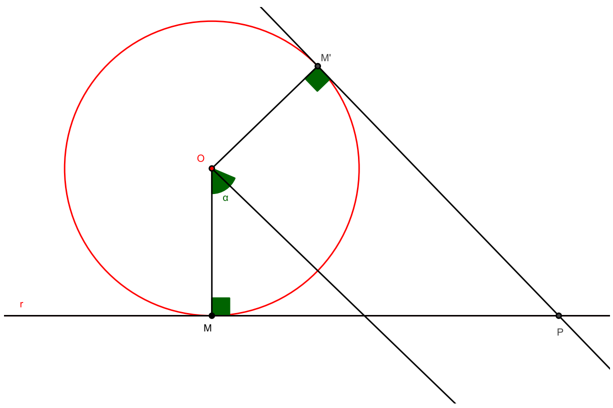
obtido no acima, de tal modo que, um dos lados do mesmo seja a semi-reta que tem origem no ponto $\underline{O}$ e que contenha o ponto $\underline{M}$, que encontrará a reta $\underline{r}$ no ponto $\underline{P}$ (veja a figura abaixo);



Observemos que, do triângulo retângulo ΔOPM, segue que

$$\widehat{OPM} = \frac{\alpha}{2}.$$

Denotemos por $\underline{M'}$, o ponto de tangência da outra reta tangente a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, que contém o ponto $\underline{P}$ (veja a figura abaixo);



Observemos que

$$\widehat{M'PO} = \widehat{OPM} = \frac{\alpha}{2},$$

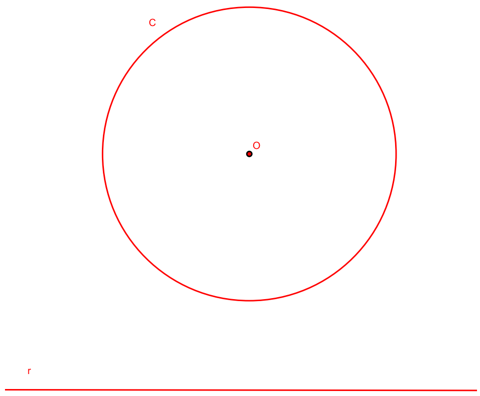
pois os triângulos ΔOPM e $\Delta OM'P$ são congruentes (caso ALA).

Logo

$$\widehat{M'PM} = \widehat{M'PO} = \widehat{OPM} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha,$$

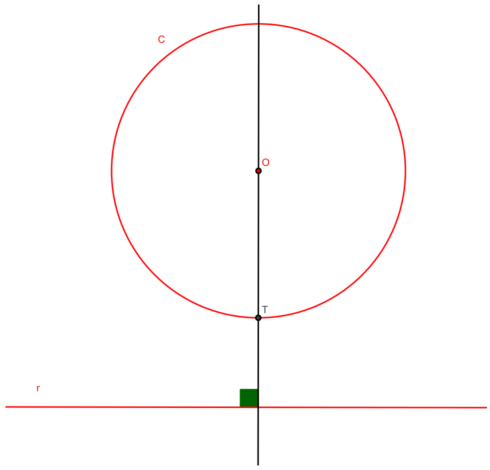
como pedido no exercício.

II. Consideremos agora o caso em que a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ e a reta $\underline{\mathrm{r}}$ não se interceptam (veja a figura abaixo).

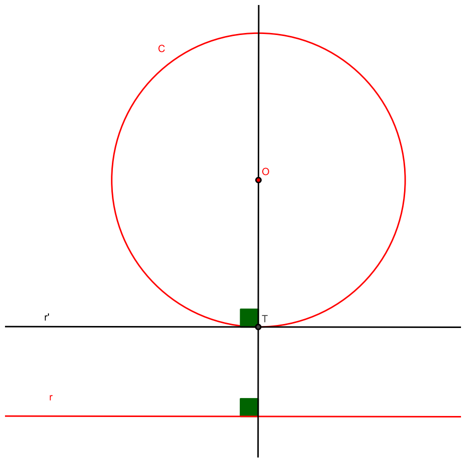


Neste caso, consideraremos uma reta, $\underline{\mathrm{r}'}$, paralela a reta $\underline{\mathrm{r}}$, que seja tangente a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$.

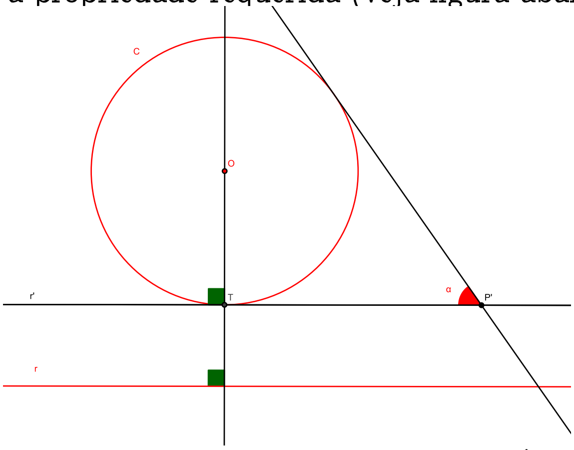
Para obtê-la, traçamos a reta perpendicular a reta $\underline{\mathrm{r}}$, que contém pelo ponto $\underline{\mathrm{O}}$, que interceptará a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{\mathrm{T}}$ (veja a figura abaixo).



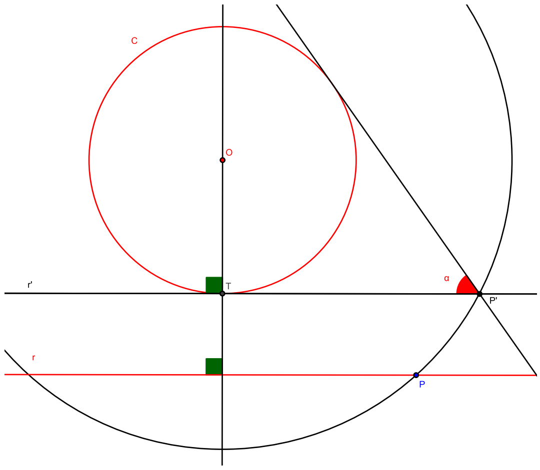
A seguir, traçamos a reta tangente à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ que contém o ponto $\underline{\mathrm{T}}$ (veja a figura abaixo).



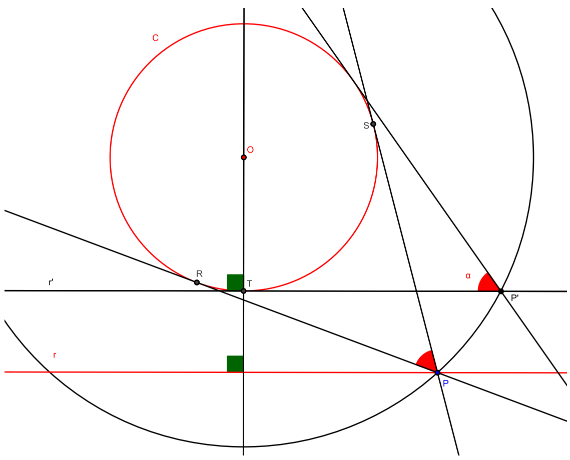
Agiremos como no item I, para obter um outro ponto, que chamaremos de P′, pertencente a reta r′, com a propriedade requerida (veja figura abaixo).



Consideremos uma circunferência, que indicaremos por $\mathcal{C}'$, de centro no ponto O e raio $\overline{OP'}$, que interceptará a reta r, em um ponto, que indicaremos por P (e em um outro, eventualmente - veja a figura abaixo).



Afirmamos que o ponto P tem a propriedade que queremos, ou seja, as semi-retas tangentes à circunferência $\mathcal{C}$, que contém o ponto P, formam ângulo de medida α (veja a figura abaixo).



Para isto basta mostrar que o ângulo

$$\widehat{SPR} = \alpha\,.$$

Notemos que, como

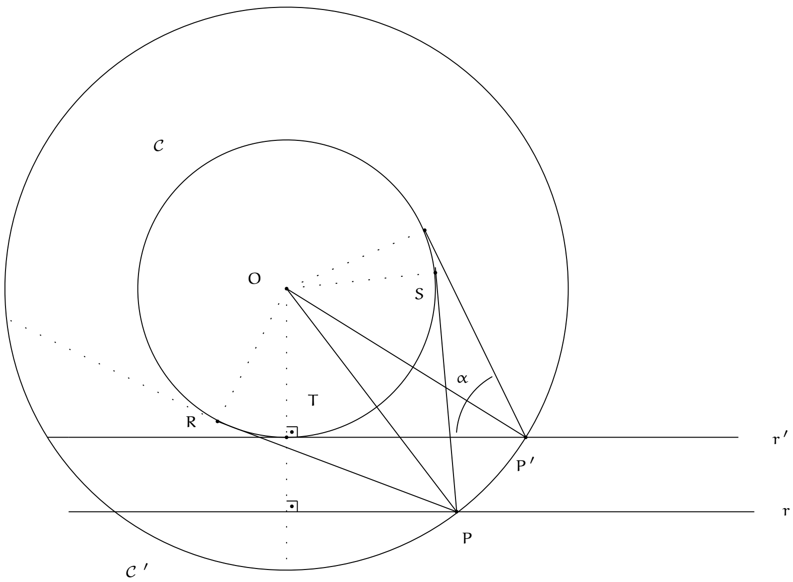
$$\widehat{OPR} = \widehat{SPO}\,,$$

pois a semi-reta que contém segmento de reta o $\overline{PO}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{SPR}$, e

$$\widehat{OP'T} = \frac{\alpha}{2}\,,$$

pois a semi-reta que contém o segmento $\overline{P'O}$ é bissetriz do ângulo $\underline{\alpha}$, segue que basta mostrarmos que (veja a figura abaixo)

$$\widehat{OPR} = \widehat{OP'T}\,.$$



Para isto observemos que os triângulos ΔOPR e $\Delta OP'T$ são congruentes, pelo caso LLL.

De fato, pois

$$OP = OP'\,, \quad OR = OT$$

e os segmentos $\overline{PR}$ e $\overline{P'T}$ correspondem a metade das cordas da circunferência $\underline{\mathcal{C}'}$, que são tangentes a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ nos pontos$\underline{R}$ e $\underline{T}$.

Logo essas cordas terão mesmo comprimento e seus pontos médios serão os pontos $\underline{R}$ e $\underline{S}$, respectivamente, ou seja

$$PR = P'T\,.$$

Em particular, segue que

$$\widehat{OPR} = \widehat{OP'T}\,,$$

completando a prova deste caso.

III. Consideremos o último caso em que a reta $\underline{r}$ é secante à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$.

Neste caso, agiremos de modo semelhante ao utilizado no item II. e será deixado como exercício (a seguir) para o leitor.

Exercício:

Fazer a construção para a situação III acima.

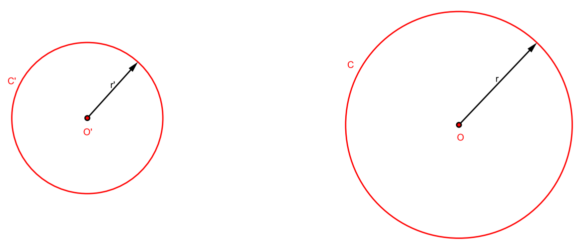
Exercício 1.8.11 *Construir uma reta tangente comum às circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$ *e* $\underline{\mathcal{C}'}$ *dadas.*

Resolução:

Denotemos por $\underline{\mathcal{C}}$ e $\underline{\mathcal{C}'}$ duas circunferências de centro em dois pontos, que indicaremos por $\underline{O}$ e $\underline{O'}$, com raios $\underline{r}$ e $\underline{r'}$, respectivamente.

Temos as seguintes possibilidades:

I. As circunferências são exteriores uma da outra (ou seja, distância entre os centros $\underline{O}$ e $\underline{O'}$, é maior que a soma dos raios $\underline{r}$ e r' - veja a figura abaixo).



Dividiremos o estudo deste caso em duas situações:

$$r = r'$$

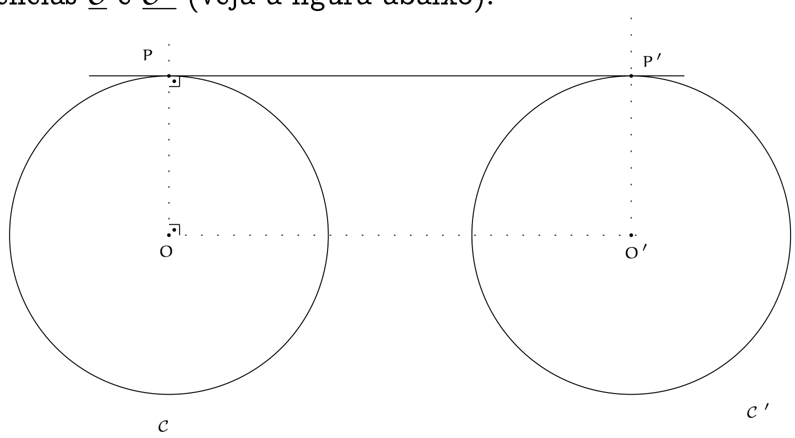
e a outra será

$$r > r'.$$

(a) Tratemos do caso que $\underline{r = r'}$.

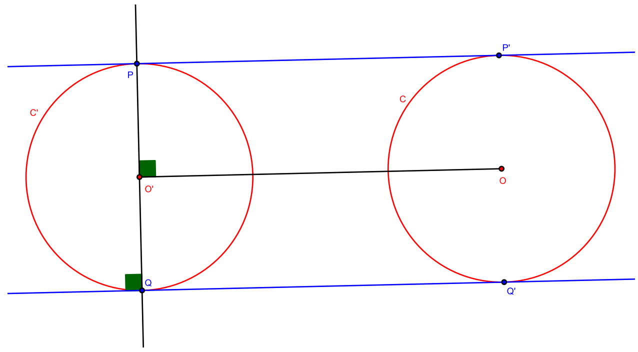
Neste caso, consideramos a reta perpendicular ao segmento $\overline{OO'}$, que contém o ponto $\underline{O}$, que interceptará a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{P}$.

A reta perpendicular ao segmento $\overline{OP}$, que contém o ponto $\underline{P}$, é uma reta tangente às circunferências $\underline{\mathcal{C}}$ e $\underline{\mathcal{C}'}$ (veja a figura abaixo).



De fato, o segmento $\overline{O'P'}$ (que é o raio da circunferência $\underline{\mathcal{C}\,'}$) é perpendicular ao segmento $\overline{PP'}$, no ponto $\underline{P'}$, que está na circunferência $\underline{\mathcal{C}\,'}$ (lembremos que $OP = O'P'$).

Observemos que, neste caso, temos uma outra reta tangente às circunferências $\underline{\mathcal{C}}$ e $\underline{\mathcal{C}\,'}$ (veja a figura abaixo).



(b) Se $r > r'$, agiremos da segunte forma:

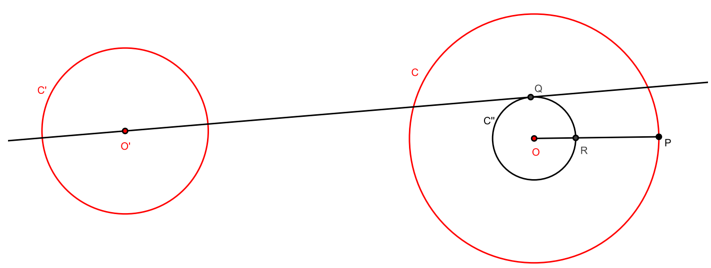
Consideremos um segmento $\overline{OP}$, que nos dá o raio da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$.

Encontremos um ponto, que chamaremos de $\underline{R}$, sobre o segmento $\overline{OP}$, de tal modo que

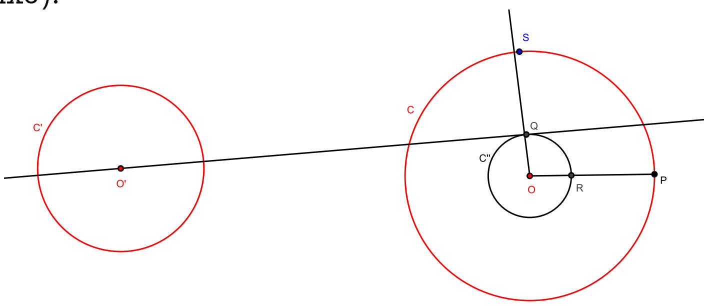
$$PR = r'$$

e tracemos umaa circunferência, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}\,''}$, de centro no ponto $\underline{O}$ e raio o segmento $\overline{OR}$, ou seja, o raio da circunferência $\underline{\mathcal{C}\,''}$ será igual $\underline{r - r'}$ (veja a figura abaixo).

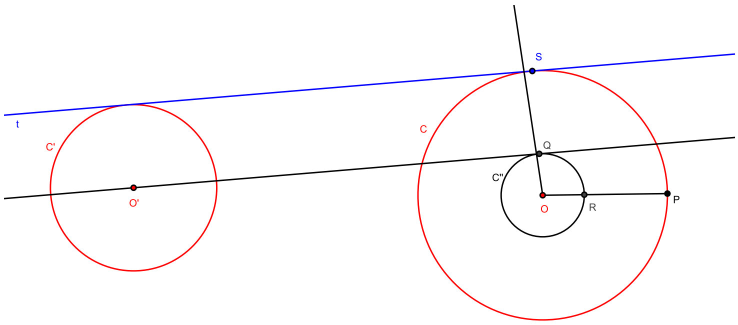
Encontremos a reta tangente à circunferência $\underline{\mathcal{C}\,''}$, que contém o ponto $\underline{O'}$, que tem um ponto de tangência na circunferência $\underline{\mathcal{C}\,''}$, que chamaremos de $\underline{Q}$ (na verdade temos duas retas tangentes distintas - veja a figura abaixo).



Consideremos a semi-reta, com extremidade no ponto $\underline{O}$, que contém o ponto $\underline{Q}$, que interceptará a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{S}$ (veja a figura abaixo).



Encontremos a reta, paralela à reta que contém os pontos $\underline{Q}$ e $\underline{O'}$ que contém o ponto $\underline{S}$ (veja a figura abaixo).



Esta reta, que chamaremos de $\underline{t}$, será, como mostraremos a seguir, a reta tangente às circunferências $\underline{\mathcal{C}}$ e $\underline{\mathcal{C}\,'}$, completando assim a construção.

Observemos que, realmente, a reta $\underline{t}$ é tangente às circunferências $\underline{\mathcal{C}}$ e $\underline{\mathcal{C}\,'}$.

De fato pois a reta que contém os pontos $\underline{O'}$ e $\underline{Q}$ é uma reta tangente à circunferência $\underline{\mathcal{C}\,''}$.

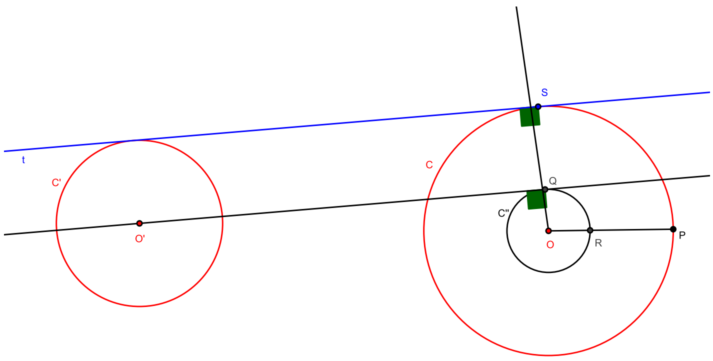
Logo

$$\widehat{O'QO} = \frac{\pi}{2}$$

e como a reta $\underline{t}$ é uma reta paralela à reta que contém os pontos $\underline{O'}$ e $\underline{Q}$ teremos:

$$\widehat{S} = \frac{\pi}{2},$$

ou seja, a reta $\underline{t}$ é uma reta tangente à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ (veja a figura abaixo).

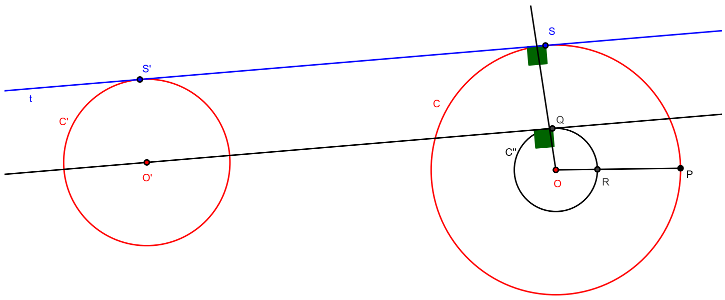


Denotemos por S', o ponto da reta t, tal que o quadrilátero $O'S'SQ$ seja um paralelogramo.

Neste caso temos que

$$O'S' = QS = RP = r',$$

ou seja, o ponto S' pertencerá á circunferência $\mathcal{C}'$ (veja a figura abaixo).



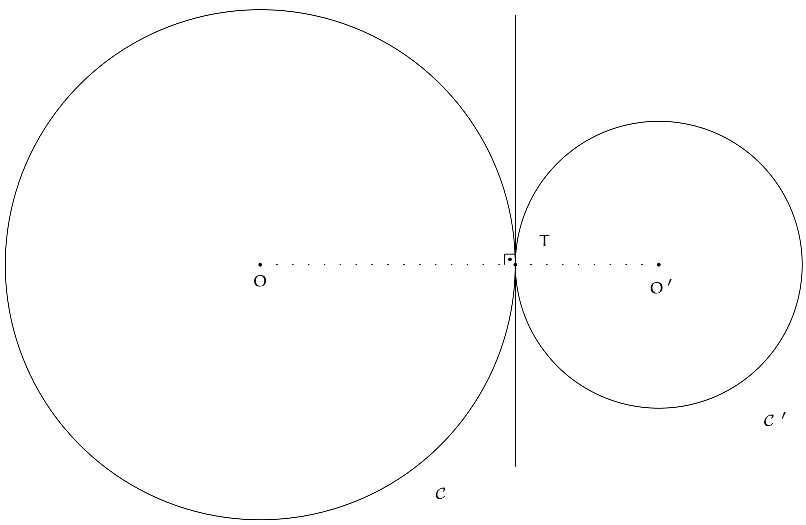
Para finalizar, mostremos que a reta t é a reta tangente à circunferência $\mathcal{C}'$ no ponto S', ou seja, que o segmento de reta $\overline{SS'}$ é perpendicular ao segmento $\overline{O'S'}$.

Para verificar isto, observamos que os segmentos $\overline{QS}$ e $\overline{O'S'}$ são paralelos e que o ângulo $\widehat{S'SQ}$ é um ângulo reto, implicando que o ângulo $\widehat{O'S'S}$ também deverá ser um ângulo reto.

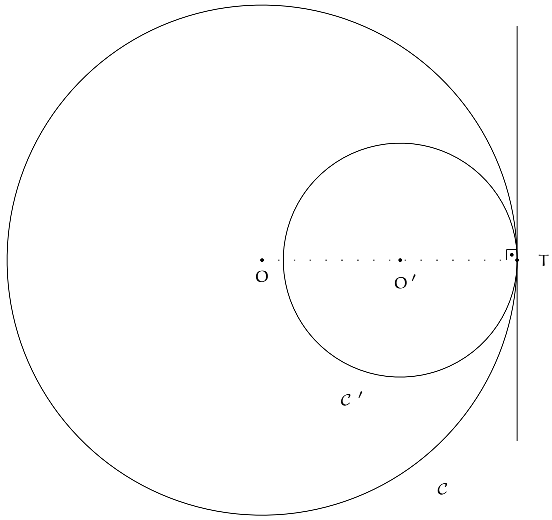
Portanto os segmentos $\overline{O'S'}$ e $\overline{S'S}$ são perpendiculares, pelo ponto S', mostrando que a reta que contém o segmento de reta $\overline{SS'}$ (ou seja, a reta t) é uma reta tangente às circunferência $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, nos pontos S e S', respectivamente, como queríamos demonstrar.

II. As circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, são tangentes em um ponto.

Podemos ter situação de tangência entre as circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, e as duas serem exteriores uma da outra (ou seja, a distância entre os centros O e O' é igual a soma dos seus respectivos raios, isot é, igual a $r + r'$ - veja a figura abaixo).



Outra possibilidade, seria termos uma tangência entre as circunferências $\underline{\mathcal{C}}$ e $\underline{\mathcal{C}\,'}$, e uma delas ser interior a outra, por exemplo a circunferência $\underline{\mathcal{C}\,'}$ está no interior da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, ou seja, a distância entre os centros $\underline{O}$ e $\underline{O'}$ seria a diferença os respectivos raios, ou ainda, $\underline{r - r'}$ - veja a figura abaixo).

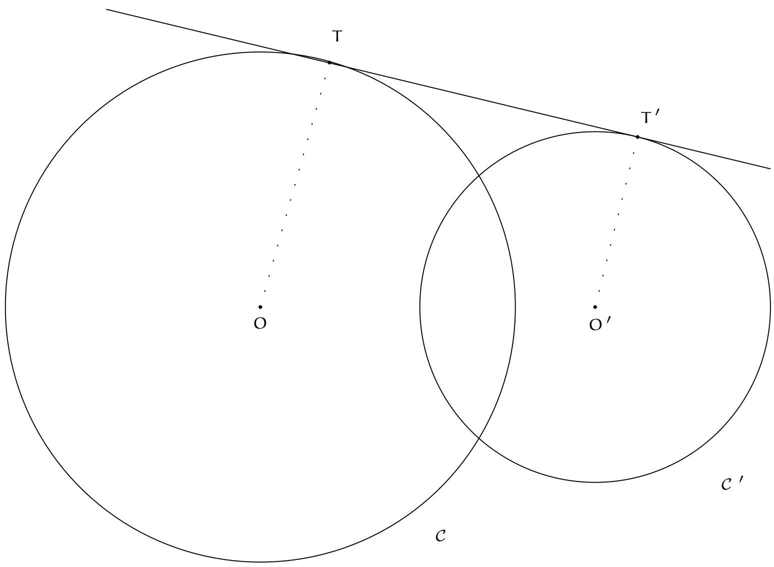


Em qualquer um dos casos acima, a reta tangente comum às duas circunferências $\underline{\mathcal{C}}$ e $\underline{\mathcal{C}\,'}$, será a reta tangente a uma delas, no ponto de intersecção das mesmas (veja a figura acima).

III. As circunferências $\underline{\mathcal{C}}$ e $\underline{\mathcal{C}\,'}$ são secantes.

Neste caso agiremos de modo semelhante ao do item I acima.

Deixaremos os detalhes como exercício (a seguir) para o leitor.



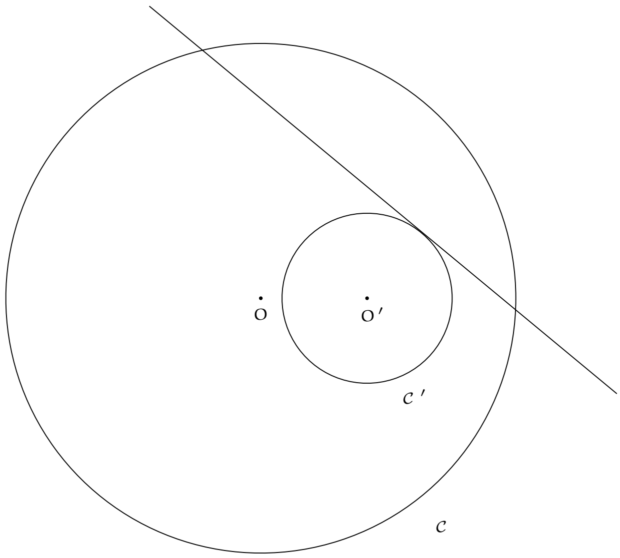
<u>Exercício:</u>

Fazer a construção do item III acima.

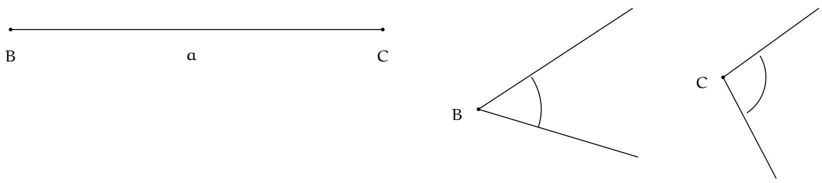
IV. Uma das circunferências $\underline{\mathcal{C}}$ ou $\underline{\mathcal{C}\,'}$, está no interior da outra.

Suponhamos, por exemplo, que a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ contenha, no seu interior, a circunferência $\underline{\mathcal{C}\,'}$.

Neste caso não existirá uma reta tangente comum à circunferências $\underline{\mathcal{C}}$ e $\underline{\mathcal{C}\,'}$, pois toda reta tangente a circunferência $\underline{\mathcal{C}\,'}$ será uma reta secante à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ (veja a figura abaixo).

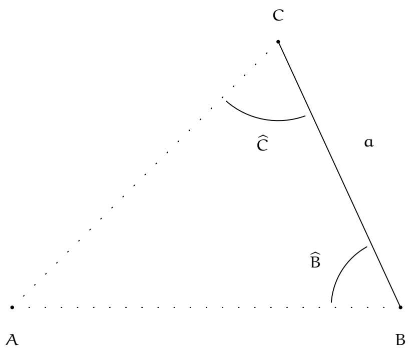


Exercício 1.8.12 *Construir um triângulo* ΔABC*, conhecendo-se o lado os lado* $\overline{BC} = a$*, os ângulos* $\widehat{B} = \widehat{CBA}$ *e* $\widehat{C} = \widehat{ACB}$*, dados abaixo.*



Resolução:

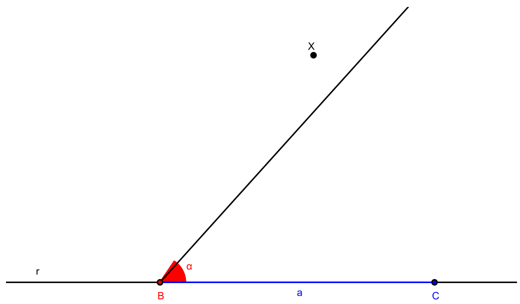
Um esboço da situação do problema acima, é dado na figura abaixo:



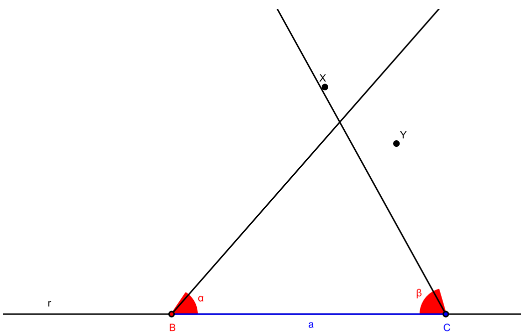
A construção pode ser feita da seguinte maneira:

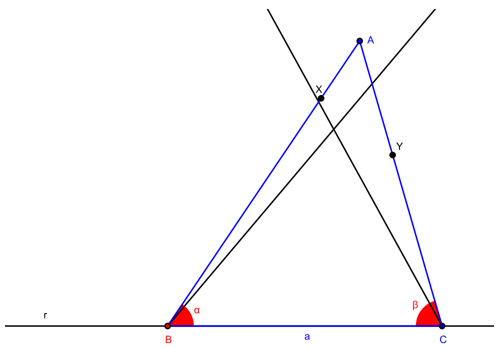
1. Escolha um ponto, que chamaremos de $\underline{B}$, sobre uma reta $\underline{r}$, e encontremos um ponto, que denotaremos por $\underline{C}$, sobre a mesma, de tal modo que $\overline{BC} = a$ (transporte de um segmento - veja a figura abaixo);

2. Encontremos um ponto, que denotaremos por $\underline{X}$, tal que o ângulo
$$\widehat{CBX} = \widehat{B}\,,$$
ou seja, transportemos o ângulo $\alpha \doteq \widehat{B}$ (veja a figura abaixo);



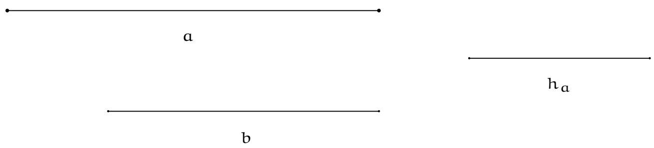
3. Encontremos um ponto, que chamaremso de $\underline{Y}$, no mesmo semi-plano determinado pela reta que contém o segmento $\overline{BC}$ e o ponto $\underline{X}$, de tal modo que o ângulo
$$\widehat{YCB} = \widehat{C}\,,$$
ou seja, transportamos o ângulo $\beta \doteq \widehat{C}$ (veja a figura abaixo, à esquerda);





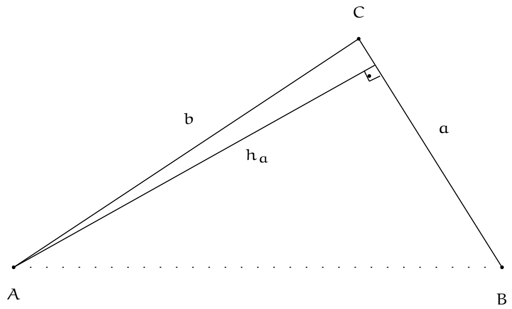
4. Na intesercção das semi-retas com extremidade nos pontos $\underline{B}$ e e no ponto $\underline{C}$, que contém os pontos $\underline{X}$ e $\underline{Y}$, respectivamente, estará o outro vértice, que chamaremos de $\underline{A}$, do triângulo ΔABC, terminando a construção (veja figura acima, à direita).

Exercício 1.8.13 *Construir um triângulo* ΔABC*, conhecendo-se os lados* $\overline{BC}$*,* $\overline{AC}$*, isto é,* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$*, respectivamente, e o comprimento* h_a *da altura relativa ao lado* $\overline{BC}$*.*



Resolução:

Um esboço da situação é dado pela figura abaixo:

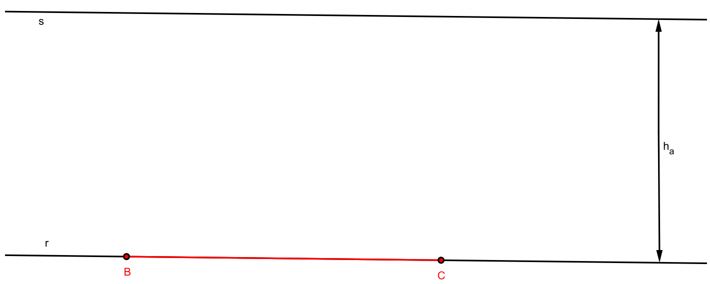


1. Escolhamos um ponto, que chamaremos de $\underline{B}$, sobre uma reta $\underline{r}$ e encontremos um ponto, que indicaremos por $\underline{C}$, sobre a mesma de tal modo que

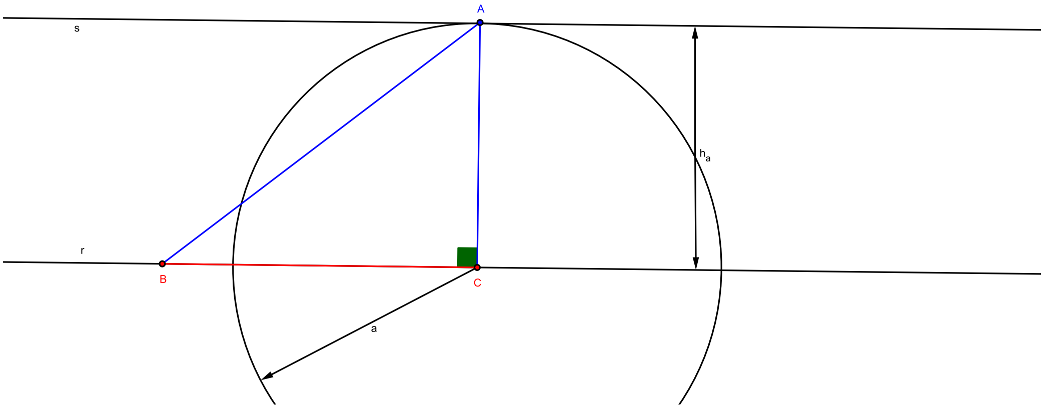
$$\overline{BC} = a\,,$$

   ou sejatransportar o segmento de reta $\overline{BC}$ (veja a figura abaixo);

2. Tracemos uma reta, que chamaremos de $\underline{s}$, paralela a reta $\underline{r}$, que dista $\underline{h_a}$ da reta $\underline{r}$ (veja a figura abaixo);



3. Tracemos a circunferência de centro no ponto $\underline{C}$ e raio $\underline{\overline{AC}}$, que encontrará a reta $\underline{s}$ num ponto, que será o vértice $\underline{A}$, do triângulo ΔABC (veja a figura abaixo).

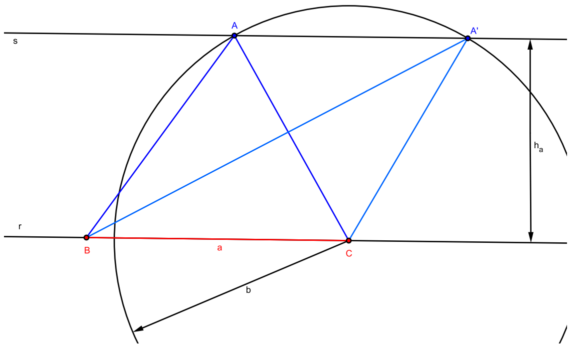


Observação 1.8.5 *Observemos que poderemos ter:*

1. *dois pontos, que indicaremos por* $\underline{A}$ *e* $\underline{A'}$*, se*

$$h_a < b\,,$$

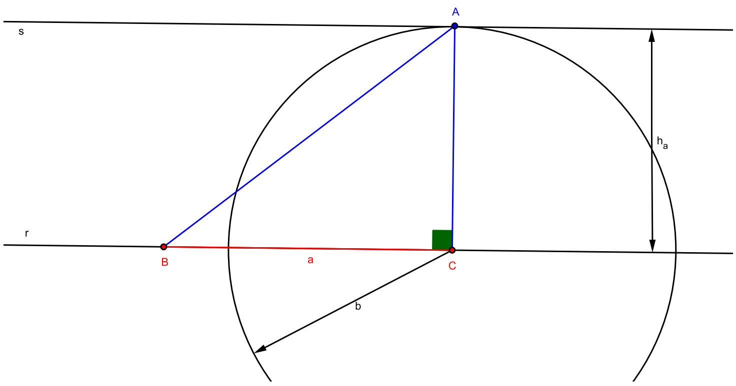
ou seja, dois triângulos, ΔABC *e* $\Delta A'BC$*, com as propriedades requeridas (veja a figura abaixo);*



2. *um único ponto* $\underline{A}$*, se*

$$h_a = b\,,$$

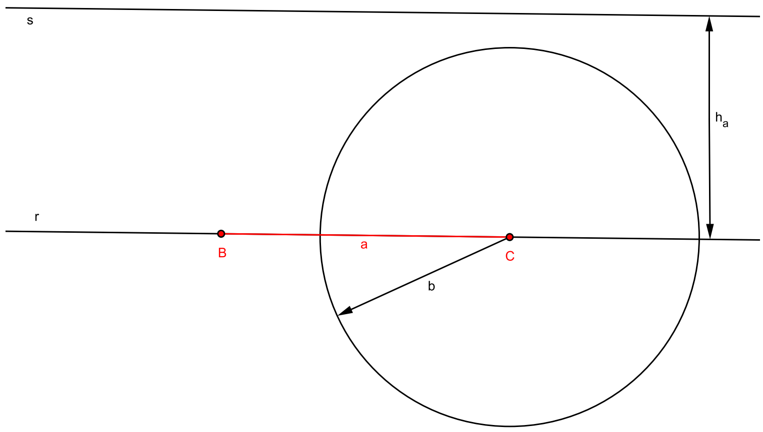
ou seja, um único triângulo ΔABC *(que será retângulo no vértice* $\underline{C}$*) com as propriedades requeridas (veja a figura abaixo);*



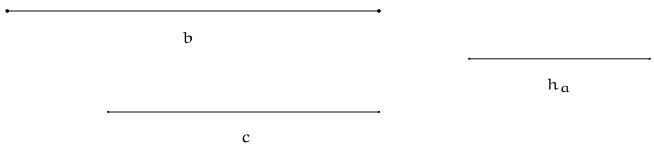
3. nenhum ponto se

$$h_a > b\,,$$

ou seja, nenhum triângulo ΔABC com as propriedades requeridas (veja a figura abaixo).

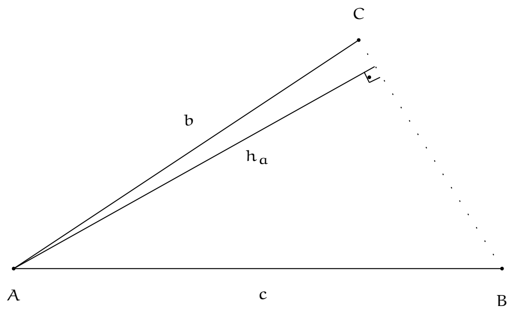


Exercício 1.8.14 *Construir um triângulo ΔABC, conhecendo-se os lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, ou seja, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ e o comprimento $\underline{h_a}$ da altura relativa ao lado $\overline{BC}$.*



Resolução:

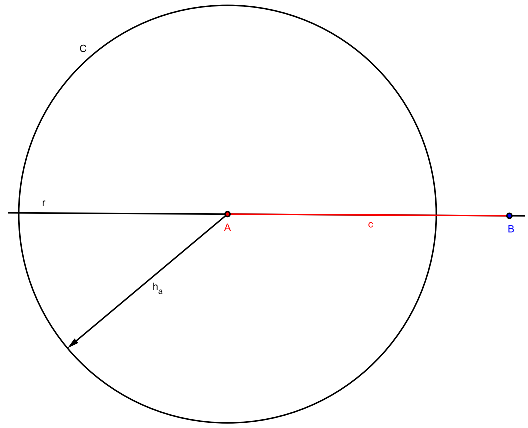
Um esboço da situação é dado pela figura abaixo:



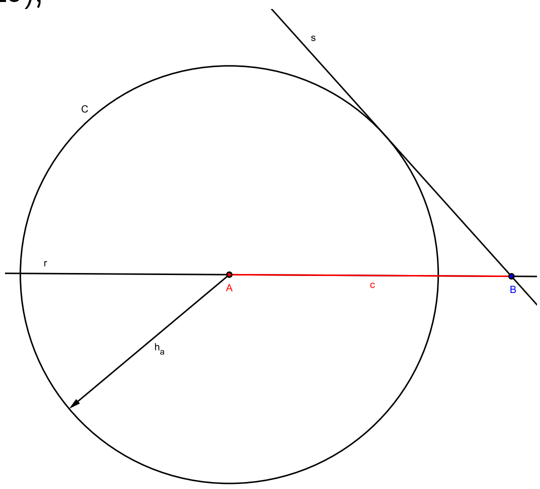
Para tanto:

1. Escolhamos um ponto, que chamaremos de $\underline{A}$, sobre uma reta $\underline{r}$ e encontremos um ponto, que denotaremos por $\underline{B}$, sobre a mesma de tal modo que $AB = c$ (veja a figura abaixo);

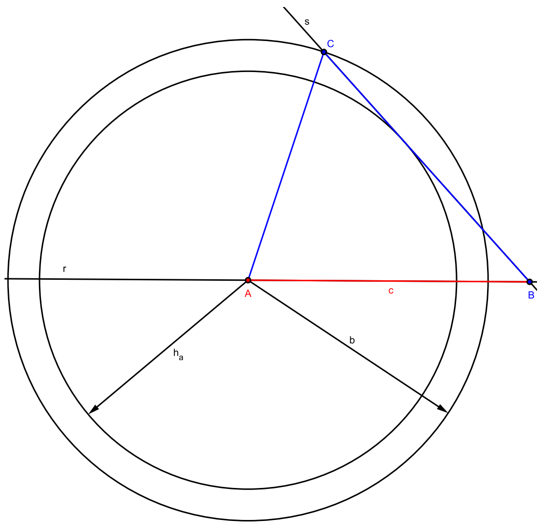
2. Tracemos a circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, de centro no ponto $\underline{A}$ e raio $\underline{h_a}$ (veja a figura abaixo);



3. Encontremos a reta, que chamaremos de $\underline{s}$, tangente à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, que contém o ponto $\underline{B}$ (figura abaixo);



4. Tracemos a circunferência, que chamaremos por $\underline{\mathcal{C}\,'}$, de centro no ponto $\underline{A}$ e raio igual $\underline{b}$, com isto, o vértice $\underline{C}$, do triângulo ΔABC, estará na intersecção da reta $\underline{s}$ com a circunferência $\underline{\mathcal{C}\,'}$ (pode existir um outro ponto), com isto obtemos o triângulo ΔABC, o triângulo procurado (veja a figura abaixo).



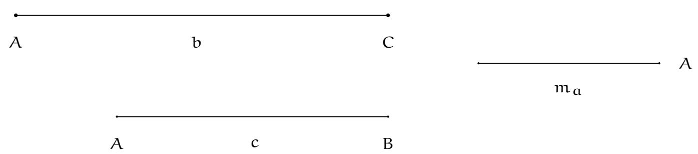
Observemos que, de fato, o triângulo encontrado tem as propriedades requeridas pois, por construção, temos que

$$AB = c \quad \text{e} \quad AC = b\,,$$

além disso o segmento $\overline{BC}$ é tangente à circunferência $\mathcal{C}$, de centro no ponto $\underline{A}$ e raio igual a $\underline{h_a}$.

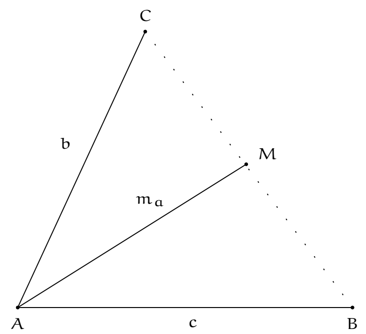
Assim, segue que a altura relativamente ao vértice $\underline{A}$ (ou ao lado $\overline{BC}$) será igual a $\underline{h_a}$.

Exercício 1.8.15 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se os lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, ou seja, $\underline{b}$ e $\underline{c}$, respectivamente, e a mediana $\underline{m_a}$ relativa ao lado $\overline{BC}$.*



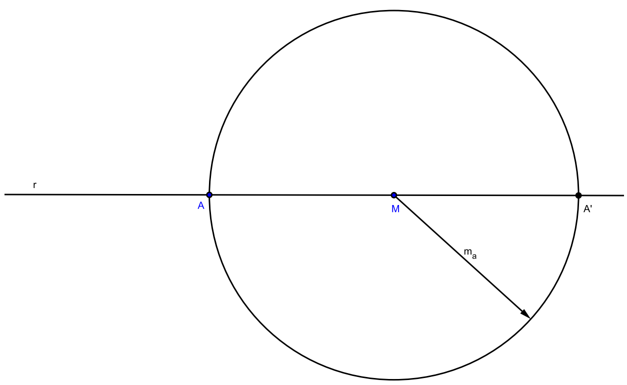
Resolução:

Geometricamente temos a seguinte situação:



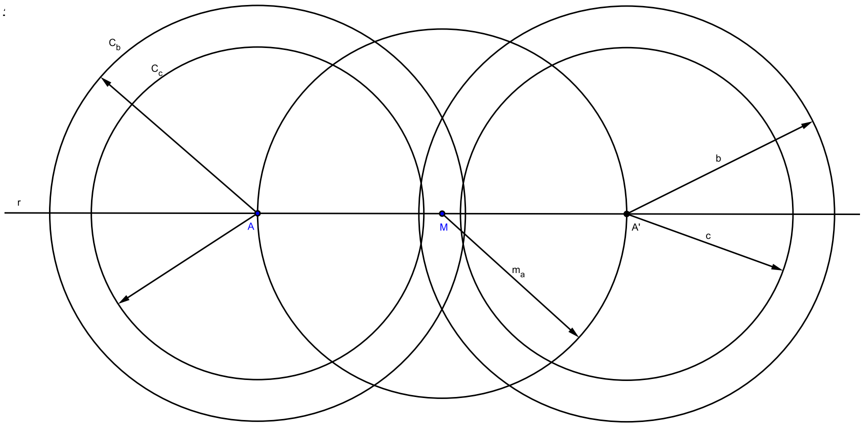
1. Consideremos, sobre uma reta $\underline{r}$, um ponto, que chamaremos de $\underline{M}$ e dois pontos, que denotaremos por $\underline{A}$ e $\underline{A'}$, de tal o ponto $\underline{M}$ seja o ponto médio do segmento $\overline{AA'}$ (veja a figura abaixo), isto é,

$$AM = A'M = m_a\,;$$

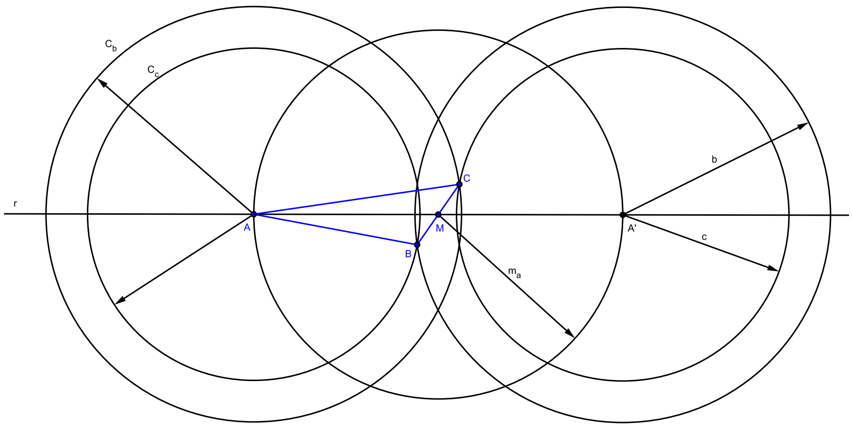


2. Tracemos as circunferências, $\mathcal{C}_b$ e $\mathcal{C}_c$ de centro em A e raios $\underline{b}$ e $\underline{c}$, respectivamente.

   De modo análgo tracemos duas circunferências, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}'_b}$ e $\underline{\mathcal{C}'_c}$, de centro no ponto



3. Na intersecção das circunferências $\underline{\mathcal{C}_b}$ e $\underline{\mathcal{C}'_c}$, obtemos o vértice $\underline{C}$ do triângulo procurado, e na intersecção das circunferências $\underline{\mathcal{C}_c}$ e $\underline{\mathcal{C}'_b}$, obtemos o vértice $\underline{B}$ do triângulo procurado, onde os pontos $\underline{B}$ e $\underline{C}$ são escolhidos nos semi-planos opostos, relativamente à reta $\underline{r}$ (veja a fig



Observemos que o triângulo ΔABC tem as propriedades requeridas pois, por construção, temos que

$$AC = b\,, \quad AB = c \quad \text{e} \quad AM = m_a\,.$$

Além disso, o ponto $\underline{M}$ é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, pois o quadrilátero $\underline{ACA'B}$ é um paralelogramo, já que os triângulos $\Delta ACA'$ e $\Delta AA'B$ são congruentes (caso LLL) e assim suas diagonais cruzam-se nos seus respectivos pontos médios.

Exercício 1.8.16 *Construir um triângulo ΔABC, conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é, que denotaremos por $\underline{a}$, a medida do ângulo $\underline{\widehat{A}}$ e o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, que indicaremos por $\underline{m_a}$.*

Resolução:

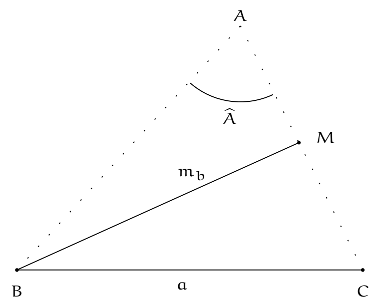
Exercício 1.8.17 *Construir um triângulo* ΔABC, *conhecendo-se os comprimentos dos lados* $\overline{BC}$, *isto é* $\underline{a}$, $\overline{AC}$, *isto é,* $\underline{b}$ *e o a medida do ângulo* $\underline{\widehat{A}}$.

Resolução:

Exercício 1.8.18 *Construir um triângulo* ΔABC, *conhecendo-se os comprimentos do lado* $\overline{BC}$, *a saber,* $\underline{a}$, *a medida do ângulo* $\underline{\widehat{A}}$ *e o comprimento da mediana relativa ao lado* $\overline{AC}$, *isto é,* $\underline{m_b}$.

Resolução:

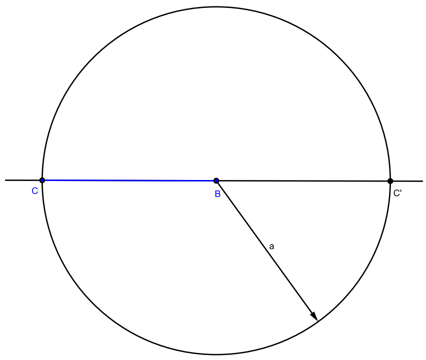
Geometricamente temos a seguinte situação:



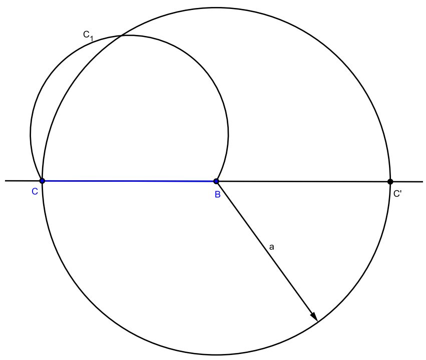
Neste caso podemos agir da seguinte forma:

1. Sobre uma reta $\underline{r}$, consideremos trê pontos, que chamaremos de $\underline{B}$, $\underline{C}$ e $\underline{C'}$, de tal modo que o ponto $\underline{B}$ seja o ponto médio do segmento $\overline{CC'}$ (veja a figura abaixo), isto é,

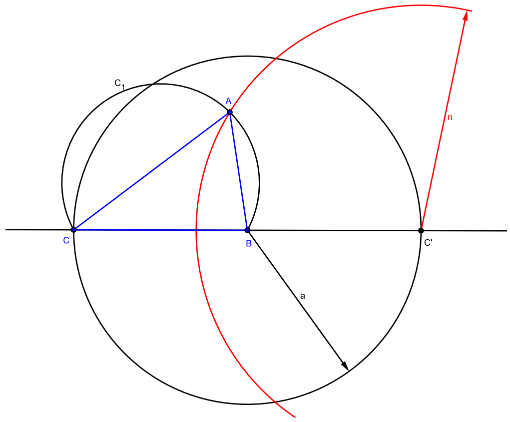
$$C'B = BC = a\,;$$



2. Construamos o arco capaz, que chamaremos de $\underline{\mathcal{C}_1}$, do ângulo $\underline{\widehat{A}}$ associado ao segmento $\overline{BC}$ (veja a figura abaixo):



3. A circunferência, que chamaremos de $\underline{\mathcal{C}}$, de centro no ponto $\underline{C'}$ e raio igual a $\underline{2m_b}$, intercepta o arco capaz $\underline{\mathcal{C}_1}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{A}$ e assim obteremos o triângulo ΔABC com as propriedades requeridas (veja afigura abaixo).



Mostremos que o triângulo acima ΔABC têm as propriedades requeridas.

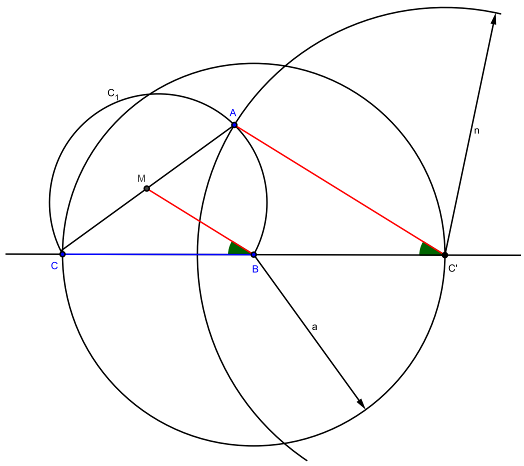
Observemos que

$$BC = a \quad \text{e} \quad \widehat{A}$$

são os valores dados pelo Exercício, por construção.

Para completar, denotemos por $\underline{M}$, um ponto sobre o segmento $\overline{AC}$ tal que (veja a figura abaixo)

$$\widehat{MBC} = \widehat{AC'B}\,.$$



Logo os triângulo $\Delta AC'C$ e ΔMBC são semelhantes (pois as retas que contém os pontos $\underline{M}$, $\underline{B}$ e os pontos $\underline{A}$, $\underline{C'}$, respectivamente, são paralelas), assim lados correspondentes guardam uma mesma relação (Teorema de Tales).

Em particular:

$$\frac{MB}{AC'} = \frac{BC}{C'C} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}\,, \quad \text{mas } AC' = 2\,m_b, \text{ logo:} \quad \frac{MB}{2m_b} = \frac{1}{2}\,,$$

ou seja,

$$MB = m_b\,.$$

Por outro lado,

$$\frac{MC}{AC} = \frac{BC}{C'C} = \frac{1}{2}, \quad \text{assim:} \quad MC = \frac{AC}{2},$$

ou seja, o ponto $\underline{M}$ é ponto médio do segmento $\overline{AC}$, mostrando que o triângulo ΔABC obtido acima satisfaz as propriedades requeridas do Exercício.

Exercício 1.8.19 *Construir um triângulo ΔABC, conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, ou seja, $\underline{a}$ e os comprimentos das medianas, relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, ou seja, $\underline{m_b}$ e $\underline{m_c}$.*

Resolução:

Exercício 1.8.20 *Construir um triângulo ΔABC, conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é, $\underline{a}$, e os comprimentos das alturas, relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, ou seja, $\underline{h_b}$ e $\underline{h_c}$.*

Resolução:

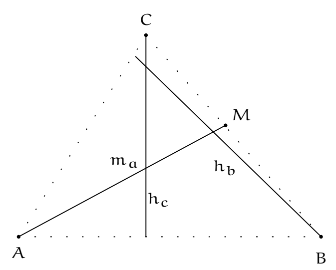
Exercício 1.8.21 *Construir um triângulo ΔABC, conhecendo-se o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, $\underline{m_a}$ e o comprimento das alturas relativas aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, ou seja, $\underline{h_a}$ e $\underline{h_b}$.*

Resolução:

Exercício 1.8.22 *Construir um triângulo ΔABC, conhecendo-se o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, $\underline{m_a}$, e o comprimento das alturas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, ou seja, $\underline{h_b}$ e $\underline{h_c}$.*

Resolução:

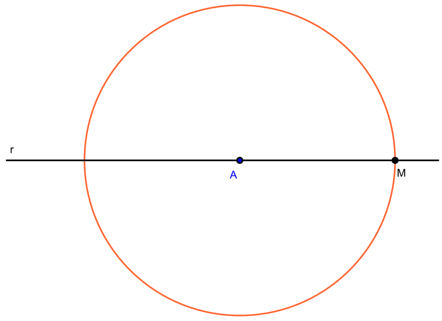
Geometricamente, temos a seguinte situação:



Passemos a construção:

1. Consideremos sobre uma reta, que chamaremos de $\underline{r}$, dois pontos, que denotaremos por $\underline{A}$ e $\underline{M}$, de tal modo que (veja a figura abaixo)

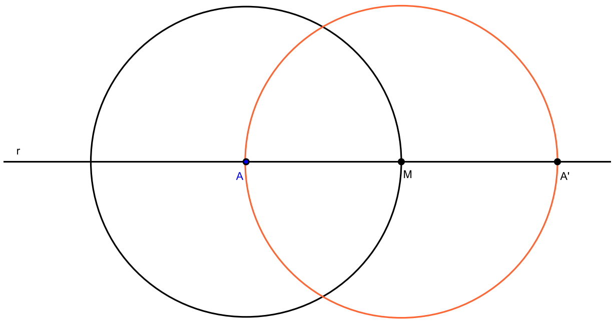
$$AM = m_a;$$



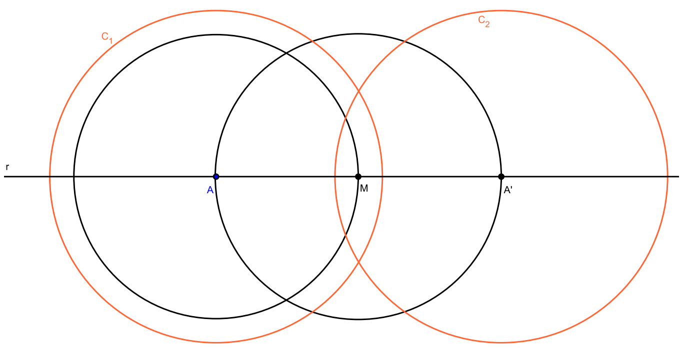
2. Encontremos um ponto, que chamaremos de $\underline{A'}$, sobre a reta $\underline{r}$, de tal modo que

$$A'M = AM\,,$$

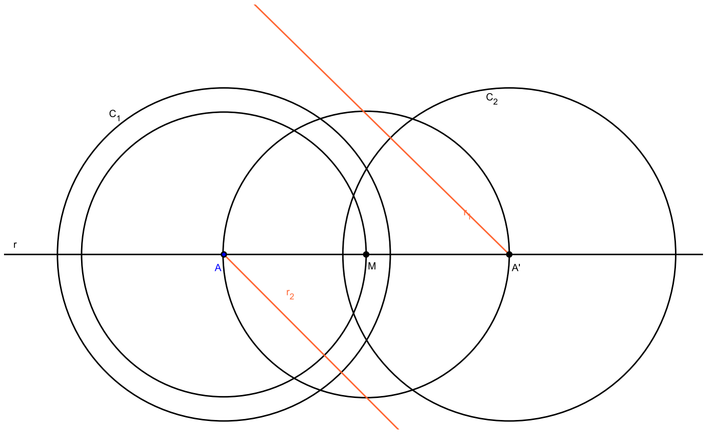
   ou seja, o ponto $\underline{A'}$ é o ponto simétrico do ponto $\underline{A}$, em relação ao ponto $\underline{M}$, sobre a reta $\underline{r}$ (veja a figura abaixo);



3. Consideremos duas circunferências, que chamaremos de $\underline{\mathcal{C}_1}$ e $\underline{\mathcal{C}_2}$, de centros nos pontos $\underline{A}$ e $\underline{A'}$, e raio igual a $\underline{h_b}$, respectivamente (veja a figura abaixo);

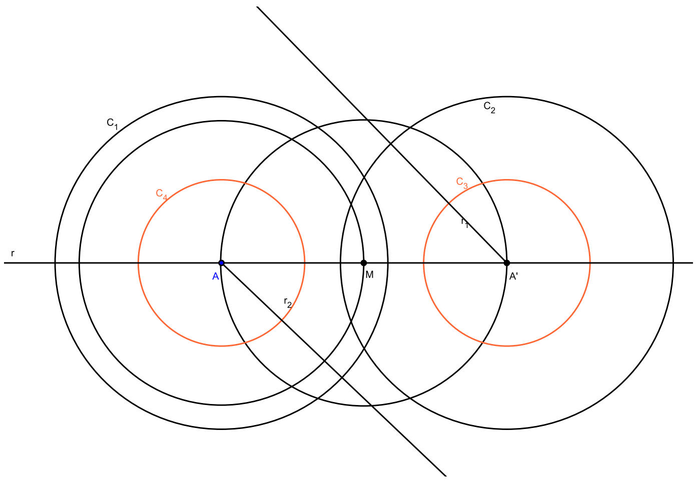


4. Tracemos duas semireta-retas, que chamaremos de $\underline{r_1}$ e $\underline{r_2}$, onde a semi-reta $\underline{r_1}$, será tangente a circunferência $\mathcal{C}_1$, e terá extremo será ponto $\underline{A'}$ e, a semi-reta $\underline{r_2}$, será tangente a circunferência $\mathcal{C}_2$, e terá tem extremo no ponto $\underline{A}$, de tal modo que as semi-retas $\underline{r_1}$ e $\underline{r_2}$, estejam em semi-planos opostos relativamente à reta $\underline{r}$ (veja a figura abaixo);



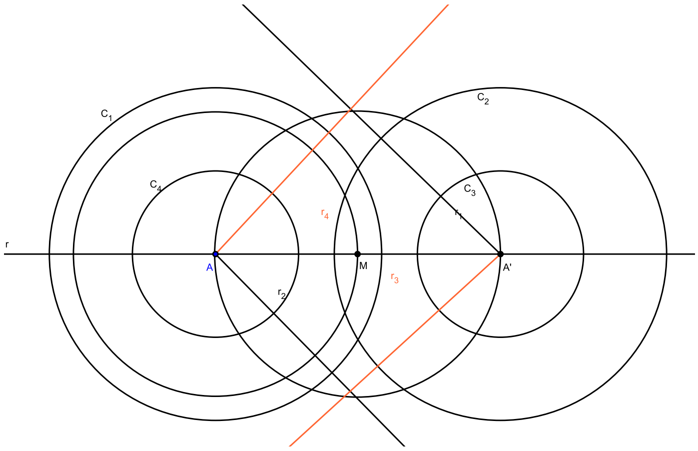
Sabemos que o vértice $\underline{B}$, do triângulo procurado, deverá estar sobre a reta $\underline{r_1}$ e o vértice $\underline{C}$, do triângulo procurado, deverá estar sobre a reta $\underline{r_2}$ pois, deste modo, a altura relativamente ao lado $\overline{AC}$ terá comprimento $\underline{h_b}$ e, além disso, deverão estar sobre um segmento que contenha o ponto $\underline{M}$ pois, deste modo, o ponto $\underline{M}$ será ponto médio do segmento $\overline{BC}$.

5. Consideremos as circunferências, que chamaremos de $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$, de centros nos pontos $\underline{A}$ e $\underline{A'}$ cujo raio é igual a $\underline{h_c}$, respectivamente (veja a figura abaixo);



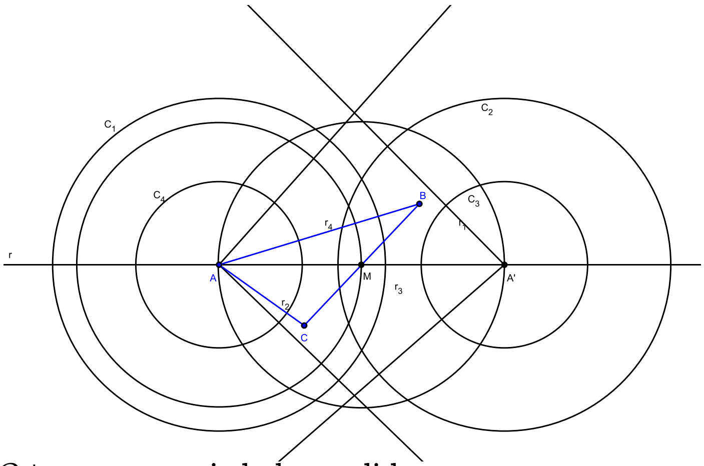
6. Tracemos duas semi-retas reta, que denotaremos por $\underline{r_3}$ e $\underline{r_4}$, de modo que a semi-reta $\underline{r_3}$ deverá ser tangente a circunferência $\mathcal{C}_3$ e cuja extremidade é o ponto $\underline{A'}$, e a semi-reta $\underline{r_4}$, deverá ser tangente a circunferência $\mathcal{C}_4$ e cuja extremidade será o ponto $\underline{A}$, de tal modo que as semi-retas $\underline{r_1}$ e $\underline{r_4}$, estejam em um mesmo semi-plano relativamente à reta $\underline{r}$ e o mesmo ocorra com as semi-retas $\underline{r_2}$ e $\underline{r_3}$ (veja a figura abaixo);

   Sabemos que o vértice $\underline{B}$, do triângulo procurado, deverá estar sobre a semir-reta $\underline{r_3}$ e o vértice $\underline{C}$, do triângulo procurado, deverá estar sobre a semi-reta $\underline{r_4}$ pois, deste modo,



a altura, relativamente ao lado $\overline{AB}$, terá comprimento igual a $\underline{h_c}$ e, sobre um segmento que contenha o ponto $\underline{M}$, pois deverá ser o ponto $\underline{M}$ o ponto médio do segmento $\overline{BC}$.

7. Na intersecção das retas r_1 e r_4 temos o vértice B e na intersecção das retas r_2 e r_3 temos o vértice C;



O triângulo ΔABC tem as propriedades pedidas.

De fato, o quadrilátero $\underline{ACA'B}$ é um paralelogramo, pois as semi-retas $\underline{r_1}$ e $\underline{r_2}$ são paralelas, assim como as semi-retas $\underline{r_3}$ e $\underline{r_4}$, por construção.

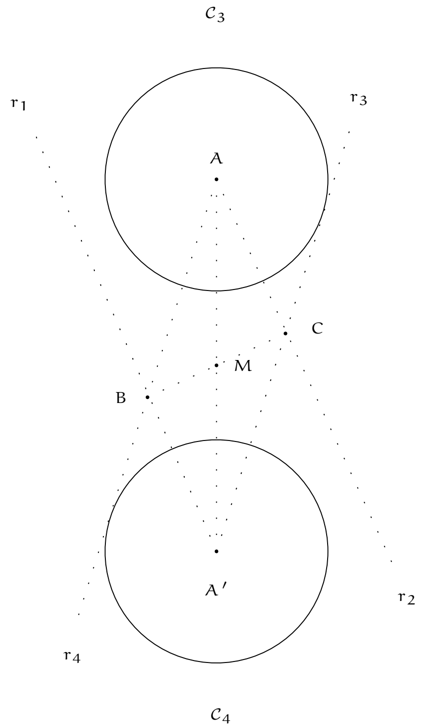
Logo o ponto $\underline{M}$ será o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ e assim

$$AM = m_a$$

será o comprimento da mediana, relativamente ao lado $\overline{BC}$.

Notemos que, por construção, a altura do triângulo ΔABC, relativamente ao lado $\overline{AC}$ terá comprimento igual a $\underline{h_b}$, pois as semi-retas $\underline{r_1}$ e $\underline{r_2}$ são paralelas e distam $\underline{h_b}$ uma da outra, e a altura, relativamente ao lado $\overline{AB}$, terá comprimento igual a $\underline{h_c}$, pois as semi-retas $\underline{r_3}$ e $\underline{r_4}$ são paralelas e distam $\underline{h_c}$ uma da outra, logo o triângulo ΔABC terá as propriedades requeridas pelo Exercício.

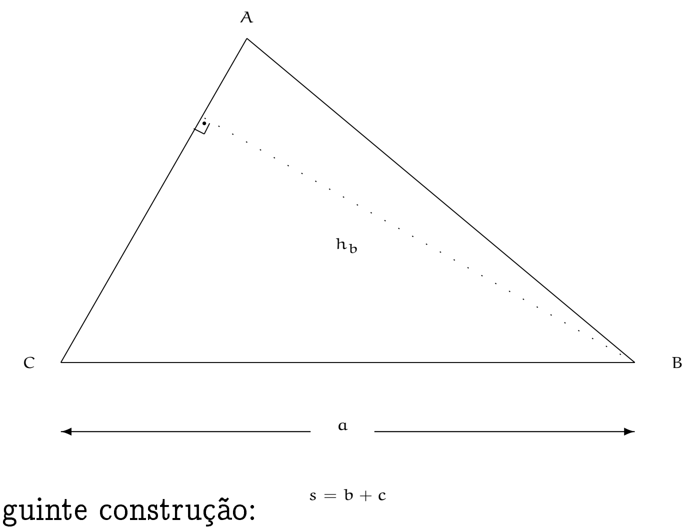
A seguir temos uma figura que ilustra a construção do triângulo procurado.



Exercício 1.8.23 *Construir um triângulo ΔABC, conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é $\underline{a}$, a soma dos comprimentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, isto é, $s = b + c$, e a altura relativamente ao lado $\overline{AC}$, ou seja $\underline{h_b}$.*

Resolução:

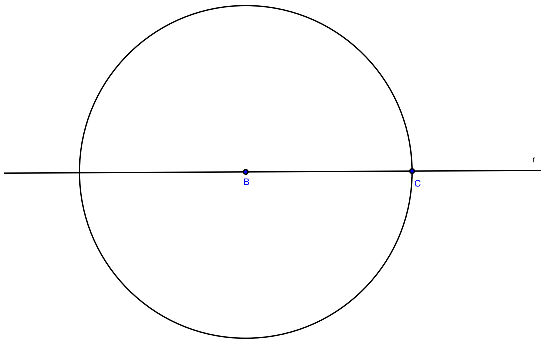
Geometricamente temos a seguinte situação:



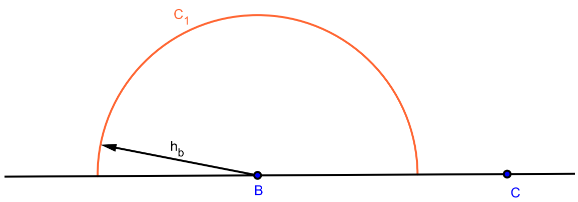
Considermos a seguinte construção:

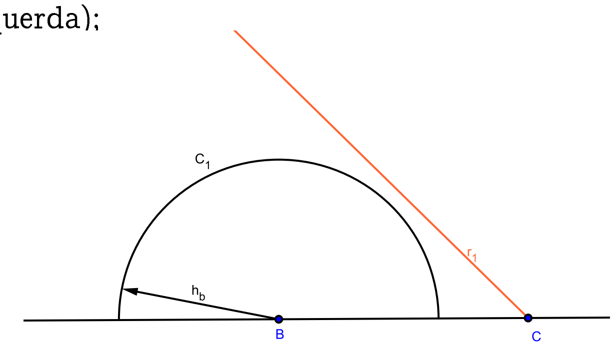
1. Sobre uma reta, que chamaremos de $\underline{r}$, escolhamos dois pontos, que indicaremos por $\underline{B}$ e $\underline{C}$, de tal modo que (veja a figura abaixo)

$$BC = a;$$



2. Tracemos uma semi-circunferência, que chamaremos de $\underline{\mathcal{C}_1}$, de centro no ponto $\underline{B}$ e raio iguala a $\underline{h_b}$ (veja a figura abaixo, à esquerda);

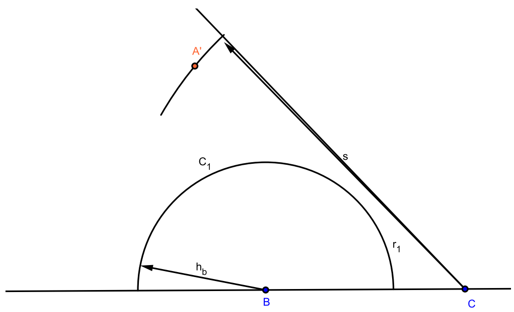




3. Pelo ponto $\underline{C}$, tracemos a semi-reta, que chamaremos de $\underline{r_1}$, tangente à semi-circunferência $\underline{\mathcal{C}_1}$, que estará contida no mesmo semi-plano desta semi-circunferência (veja a figura acima, à direita);

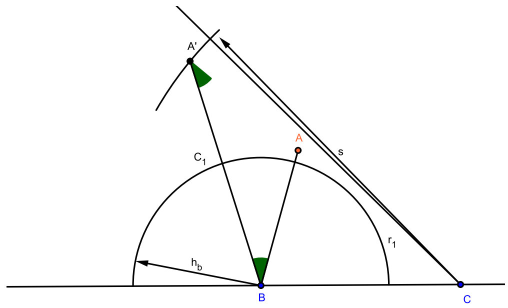
4. Sobre a semi-reta $\underline{r_1}$ considerarada acima, encontremos um ponto, que chamaremos de $\underline{A'}$ de modo que (veja a figura abaixo)

$$CA' = s\,;$$



5. Trasportemos o ângulo $\widehat{BA'C}$ para o vértice $\underline{B}$, mais precisamente, encontremos um ponto, que chamaremos de $\underline{A}$, sobre a semi-reta $\underline{r_1}$, de tal modo (veja a figura abaixo) que

$$\widehat{ABA'} = \widehat{BA'C};$$



Com isto o triângulo $\Delta A'AB$ será isósceles, ou seja,

$$AB = AA'$$

e o triângulo procurado será ΔABC (veja afigura acima).

De fato, o triângulo ΔABC terá as propriedades requeridas pois, por construção,

$$BC = a,$$

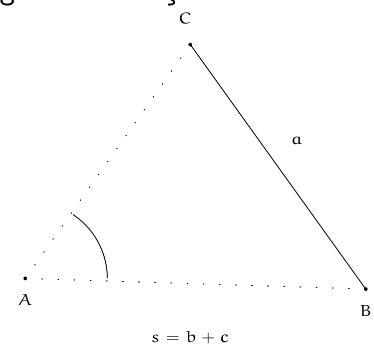
a altura relativa ao lado $\overline{AC}$ é $\underline{h_b}$ (pois a semi-reta $\underline{r_1}$ é tangente à circunferência $\underline{\mathcal{C}_1}$) e

$$AC + AB \overset{AB=AA'}{=} CA + AA' = b + c = s.$$

Exercício 1.8.24 *Construir um triângulo ΔABC, conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é, $\underline{a}$, a soma dos comprimentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, isto é, $s = c+b$ e o ângulo $\widehat{A} = \widehat{BAC}$.*

Resolução:

Geometricamente temos a seguinte situação:

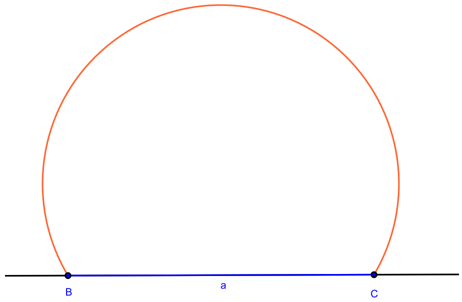


Passemos a construção:

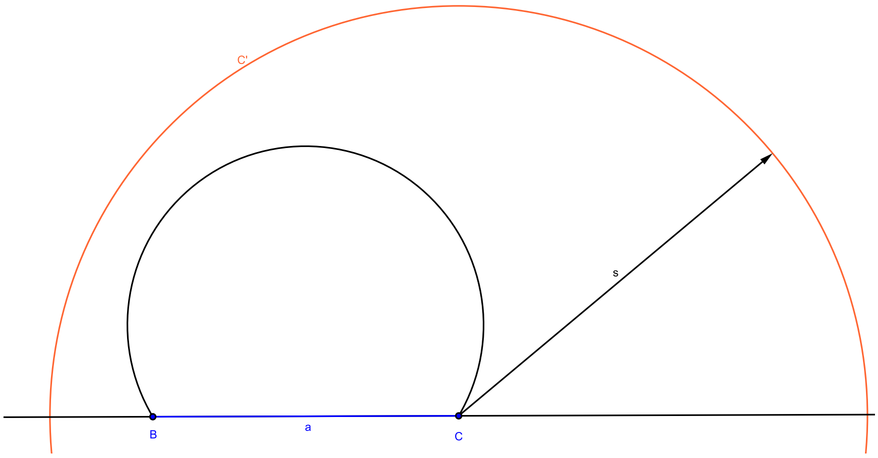
1. Consideremos sobre uma reta, que denotaremos por $\underline{r}$, dois pontos, que indicaremos por $\underline{B}$ e $\underline{C}$, de tal modo que (veja a figura abaixo)

$$BC = a.$$

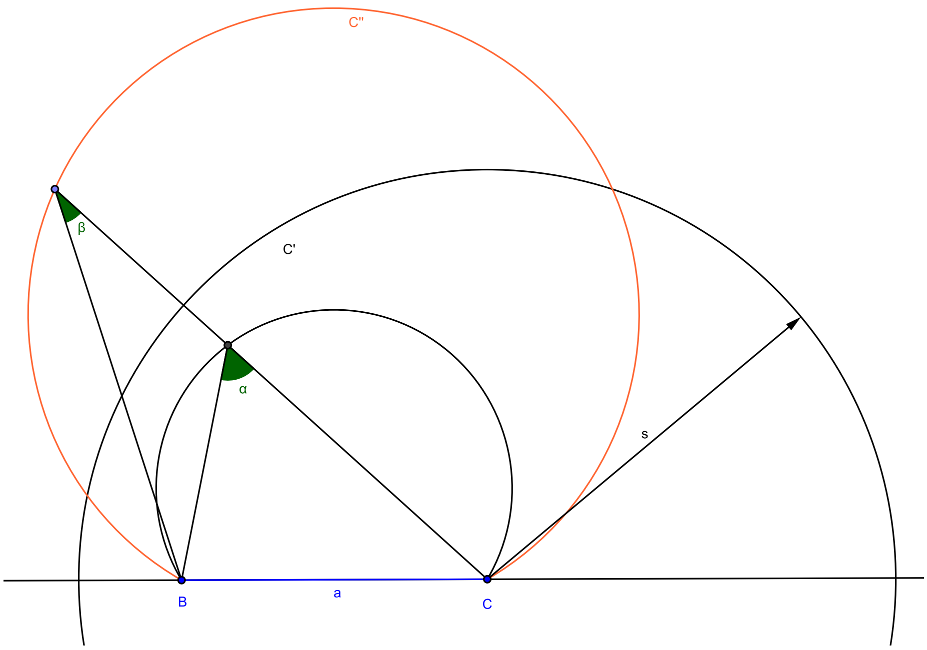
2. Construamos o arco capaz, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, do ângulo $\underline{\widehat{A}}$, associado ao segmento $\overline{BC}$ (veja a figura abaixo):



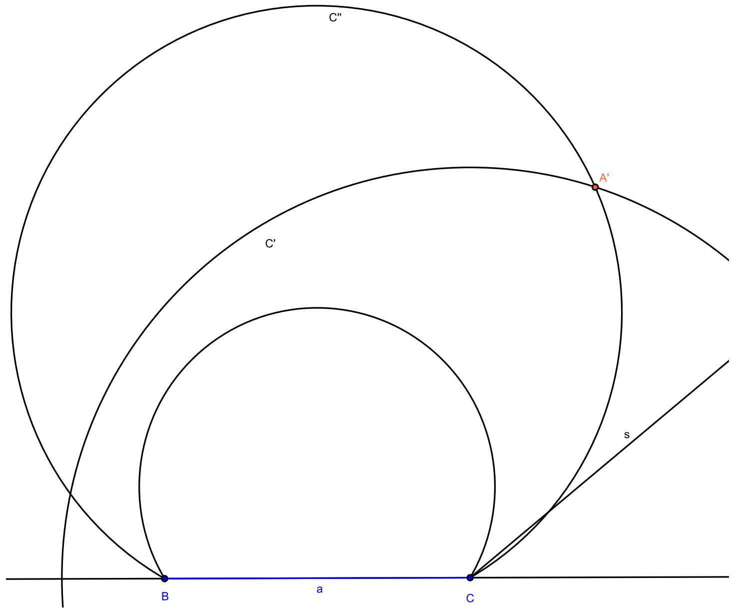
3. Consideremos uma circunferência, que chamaremos de $\underline{\mathcal{C}\,'}$, de centro no ponto $\underline{C}$ e raio igual a $s = b + c$ (veja a figura abaixo);



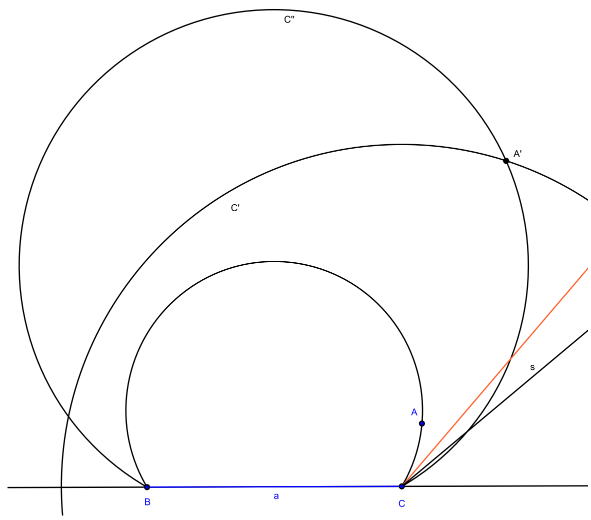
4. Construamos o arco capaz, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}\,''}$, do ângulo $\dfrac{\widehat{A}}{2}$, associado ao segmento $\overline{BC}$ (veja a figura abaixo);



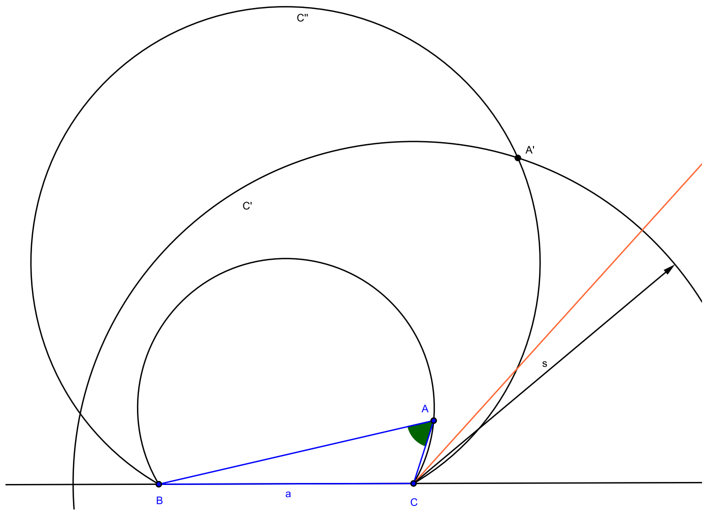
5. Consideremos um ponto, que indicaremos por $\underline{A'}$, obtido da intersecção do arco capaz do ângulo $\dfrac{\widehat{A}}{2}$, associado ao segmento $\overline{BC}$, isto é, $\underline{\mathcal{C}''}$, com a circunferência $\underline{\mathcal{C}'}$ (veja a figura abaixo);



6. A reta que contém os pontos $\underline{A'}$ e $\underline{C}$, interceptará o arco capaz $\underline{\mathcal{C}}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{A}$ (veja a figura abaixo);



O triângulo ΔABC têm as propriedades requeridas pelo Exercício (veja a figura abaixo).

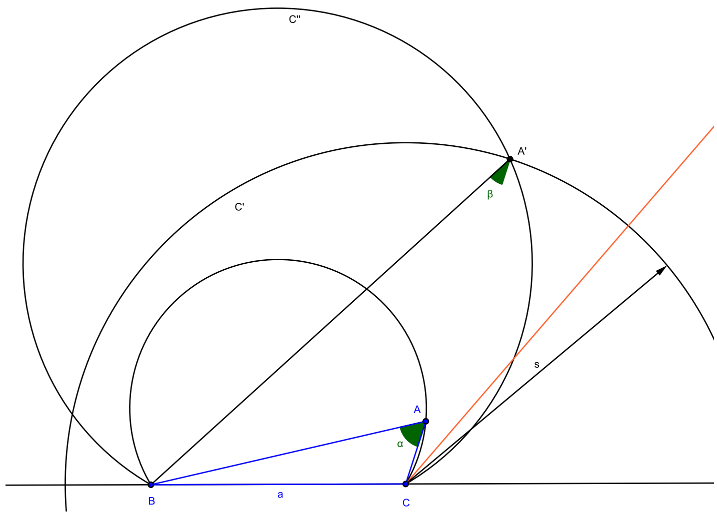


Para mostrar isto, observemos que (veja a figura abaixo)

$$\widehat{A'AB} = \pi - \widehat{A}\,.$$

Mas, por construção, temos que (veja a figura abaixo)

$$\widehat{BA'A} = \frac{\widehat{A}}{2}\,.$$



Logo

$$\begin{aligned}\widehat{ABA'} &= \pi - \left[\widehat{BA'A} + \widehat{A'AB}\right]\\ &= \pi - \left\{\frac{\widehat{A}}{2} + \left[\pi - \widehat{A}\right]\right\}\\ &= \frac{\widehat{A}}{2}\\ &= \widehat{BA'A}\,,\end{aligned}$$

o que mostra que o triângulo $\Delta A'AB$ é isósceles, em particular, temos que

$$AB = A'A.$$

Portanto

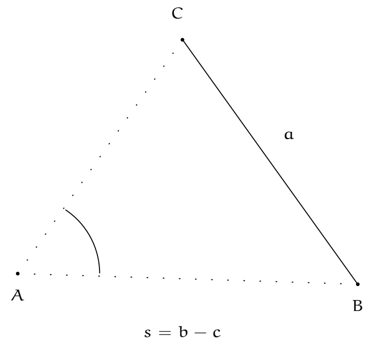
$$BA + AC = A'A + AC = s,$$

ou seja, o triângulo ΔABC tem as propriedades requeridas.

Exercício 1.8.25 *Construir um triângulo ΔABC, conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é $\underline{a}$, o ângulo $\underline{\widehat{A}}$ e a diferença dos comprimentos dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, isto é,* $s = b - c$.

Resolução:

Geometricamente temos a seguinte situação:

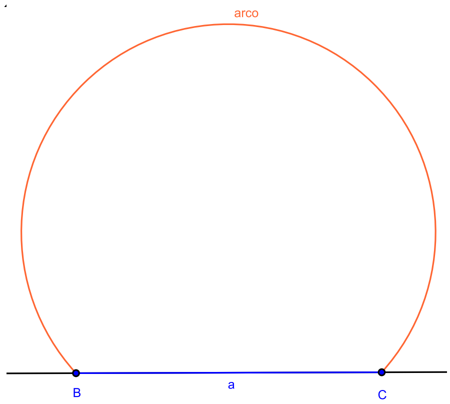


Passemos a construção:

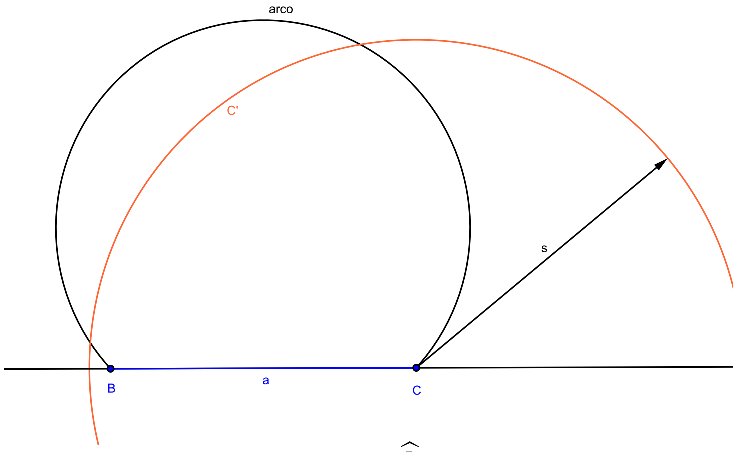
1. Consideremos sobre uma reta, que chamaremos de $\underline{r}$, dois pontos, que indicaremos por $\underline{B}$ e $\underline{C}$, de tal modo que (veja a figura abaixo)

$$BC = a;$$

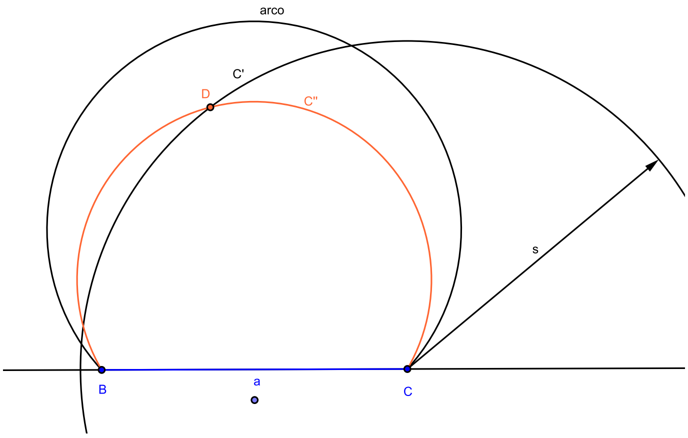
2. Construamos o arco capaz, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, do ângulo $\underline{\widehat{A}}$, associado ao segmento $\overline{BC}$ (veja a figura abaixo):



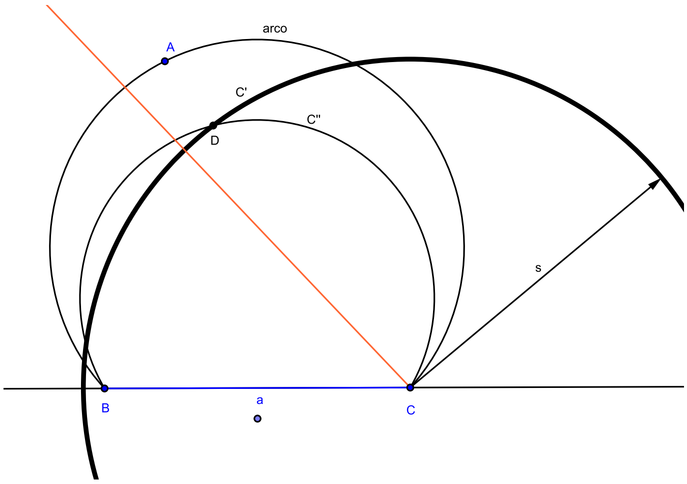
3. Tracemos uma circunferência, que chamaremos de $\underline{\mathcal{C}'}$, de centro no ponto $\underline{C}$ e raio $s = b - c$ (veja a figura abaixo);



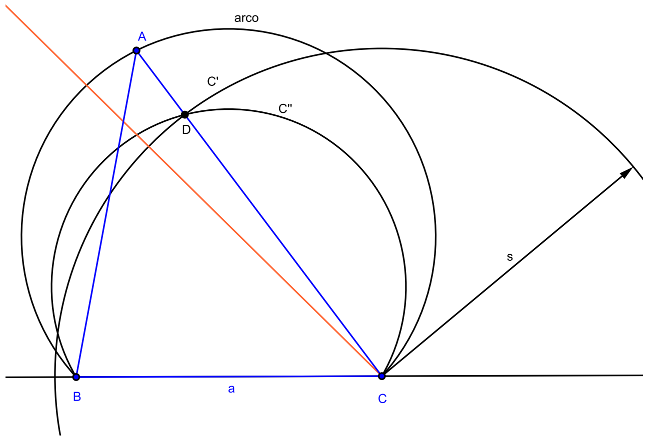
4. Tracemos o arco capaz, $\mathcal{C}\,''$, do ângulo $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\widehat{A}}{2}$ associado ao segmento $\overline{BC}$ que encontrará a circunferência $\mathcal{C}\,'$ no ponto D (figura abaixo);



5. A reta que passa pelos pontos C e D encontrará o arco capaz do ângulo $\widehat{A}$, isto é, $\mathcal{C}$, no ponto A (figura abaixo);



Afirmamos que o triângulo ΔABC tem as propriedades requeridas pelo Exercício.



De fato, por construção, temos que

$$BC = a\,.$$

Observemos que (veja figura abaixo)

$$\widehat{ADB} = \pi - \widehat{BDC} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Logo

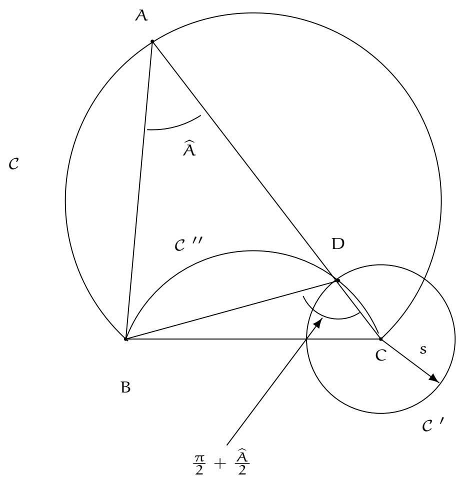
$$\widehat{ABD} = \pi - \widehat{BAD} - \widehat{ADB} = \pi - \widehat{A} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2},$$

ou seja, o triângulo ΔABD é isósceles.

Em particular, temos

$$AB = AD\,, \quad \text{assim, segue que,} \quad AC - AB = AC - AD = DC = s\,,$$

concluindo a verificação.



Exercício 1.8.26 *Construir um triângulo* ΔABC, *conhecendo-se o perímetro* $AB + BC + CA = 2p$ *e as medidas dos ângulos* $\underline{\widehat{B}}$ *e* $\underline{\widehat{C}}$.

Resolução:

Exercício 1.8.27 *Construir um triângulo* ΔABC, *conhecendo-se o perímetro* $AB + BC + CA = 2p$, *a medida do ângulo* $\underline{\widehat{A}}$ *e o comprimento da altura relativa ao lado* $\overline{BC}$, *isto é,* $\underline{h_a}$.

Resolução:

Exercício 1.8.28 *Construir um triângulo* ΔABC, *conhecendo-se o comprimento do lado* $\overline{BC}$, *isto é,* $\underline{a}$, *o comprimento da altura relativa ao lado* $\overline{BC}$, *isto é,* $\underline{h_a}$, *e a medida do raio, que denotaremos por* $\underline{R}$, *da circunferência circunscrita no mesmo.*

Resolução:

Exercício 1.8.29 *Construir um triângulo* ΔABC, *conhecendo-se os comprimentos da altura relativa ao lado* $\overline{BC}$, *isto é,* $\underline{h_a}$, *da mediana relativa ao lado* $\overline{BC}$, *isto é,* $\underline{m_a}$ *e a medida do raio, que chamaremos de* $\underline{R}$, *da circunferência circunscrita no mesmo.*

Resolução:

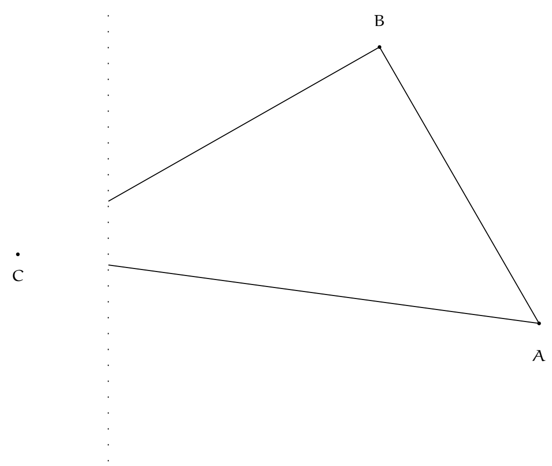
Exercício 1.8.30 *Construir um triângulo* ΔABC, *conhecendo-se a medida do ângulo* $\underline{\widehat{A}}$, *o comprimento do lado* $\overline{AC}$, *isto é,* $\underline{b}$, *e a medida do raio, que chamaremos de* $\underline{r}$, *da circunferência inscrita no mesmo.*

Resolução:

Exercício 1.8.31 *Construir um triângulo* ΔABC, *conhecendo-se os comprimentos da altura relativa ao lado* $\overline{BC}$, *isto é,* $\underline{h_a}$, *da mediada relativa ao lado* $\overline{BC}$, *isto é,* $\underline{m_a}$ *e da bissetriz do ângulo* $\underline{\widehat{A}}$.

Resolução:

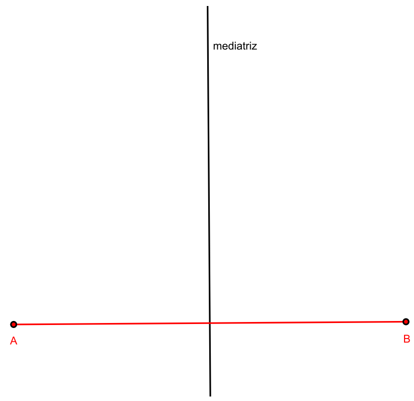
Exercício 1.8.32 *Determinar o raio de uma circunferência circunscrita o triângulo* ΔABC, *cujo vértice* $\underline{C}$ *é inacessível (veja a figura abaixo).*



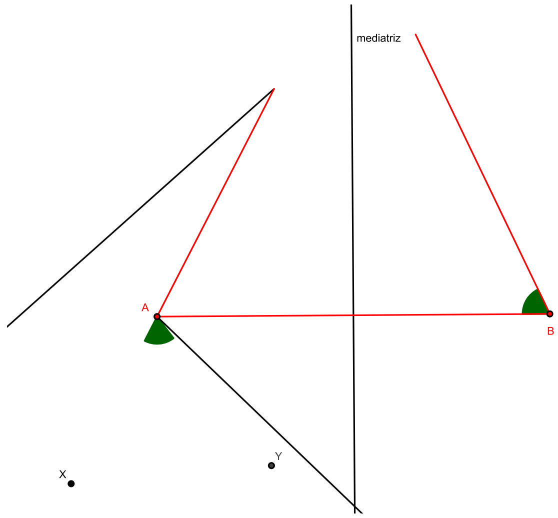
Resolução:

Neste caso agiremos da seguinte forma:

1. Encontremos a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ (veja a figura abaixo);



2. Encontre um ponto, que denotaremos por $\underline{X}$, pertencente a semi-reta que está contida na reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{C}$, cuja extremidade é ponto $\underline{A}$, que não contém o ponto $\underline{C}$, e um ponto, que denotaremos por $\underline{Y}$, no semi-plano determinado pela reta que passa pelos pontos $\underline{A}$ e $\underline{C}$, que contém o ponto $\underline{B}$, de tal modo que o ângulo $\widehat{YAX} = \widehat{B}$ (tranporte do ângulo $\underline{\widehat{B}}$ - veja a figura abaixo);



Como conseqüência temos que

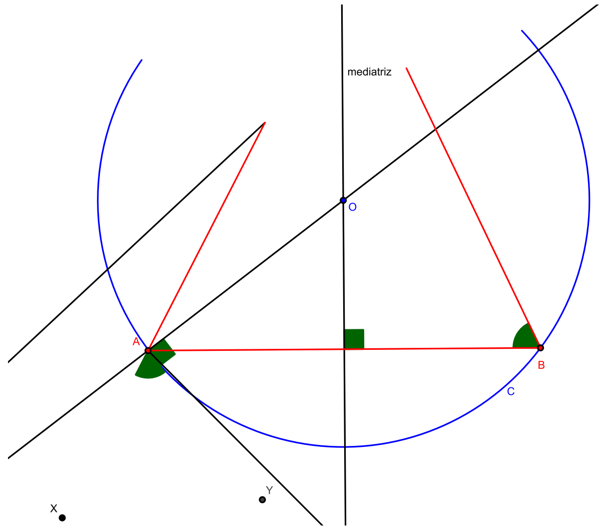
$$\widehat{BAY} = \widehat{C}\,.$$

De fato, pois, por um lado, a soma dos ângulo internos do triângulo ΔABC é $\underline{\pi}$ e, por outro lado,

$$\widehat{A} + \widehat{BAY} + \widehat{YAX} = \pi = \underbrace{\widehat{BAC}}_{\widehat{A}} + \widehat{BAY} + \underbrace{\widehat{YAX}}_{\widehat{B}}, \quad \text{assim} \quad \widehat{BAY} = \widehat{C}\,.$$

Deste modo obtivemos a medida do ângulo $\underline{\widehat{C}}$.

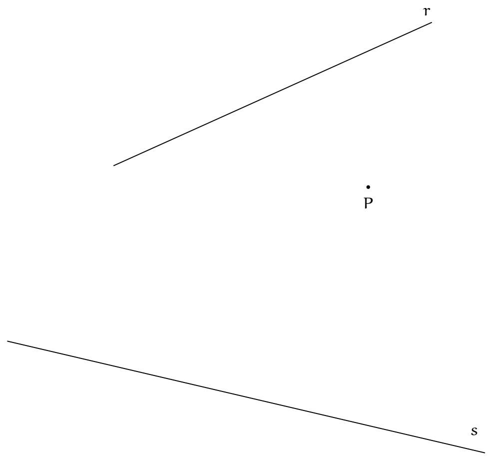
3. Encontremos o centro, que indicaremos por $\underline{O}$, do arco capaz, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, do ângulo $\widehat{BAY} = \widehat{C}$, associado ao segmento $\overline{AB}$ (veja a figura abaixo);



O centro O, da circunferência que determina o arco capaz acima (obtido da intersecção da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ com a perpendicular a reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{Y}$, pelo ponto $\underline{A}$) será o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC.

A demonstração é imediata já que o vértice deverá estar sobre o arco capaz $\underline{\mathcal{C}}$.

Exercício 1.8.33 *Traçar por um ponto, que chamaremos de* $\underline{P}$, *uma reta que contenha o ponto de interseção (inacessível) das retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$.



<u>Resolução:</u>

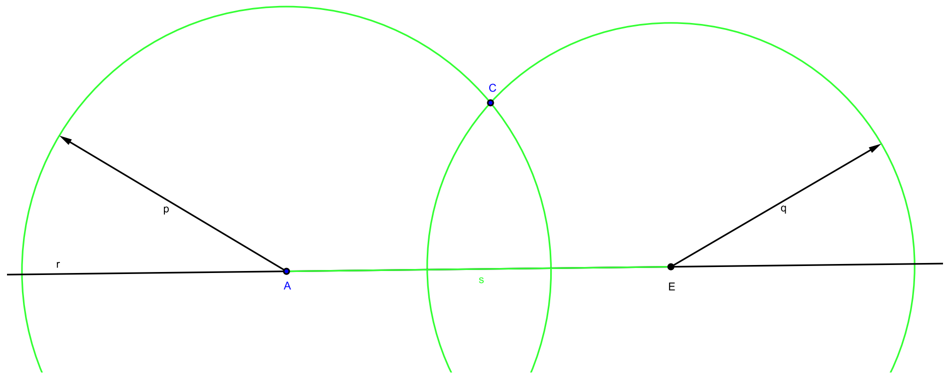
Exercício 1.8.34 *Construir um trapézio* $\underline{ABCD}$, *conhecendo-se a soma das bases* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$, *isto é,* $\underline{AB + CD = s}$, *o comprimento das diagonais* $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$, *isto é,* $\underline{AC = p}$ *e* $\underline{BD = q}$, *respectivamente, e o comprimento do lado* $\overline{AD}$, *ou seja,* $\underline{AD = a}$.

<u>Resolução:</u>

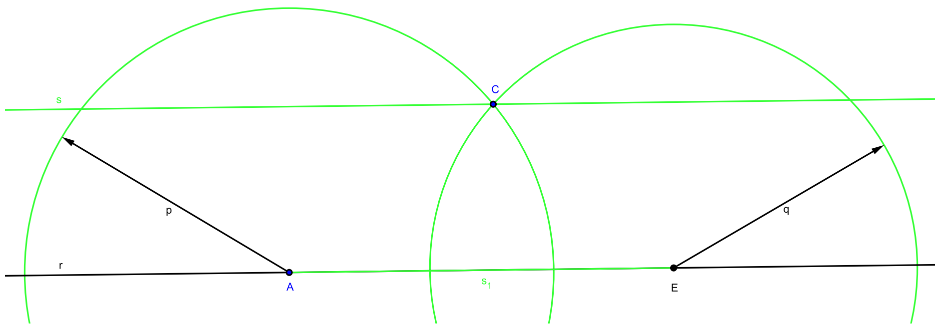
1. Consideremos sobre uma reta, que indicaremos por $\underline{r}$, dois pontos, que chamaremos de $\underline{A}$ e $\underline{E}$, de tal modo (veja a figura abaixo) que

$$AE = s\,;$$

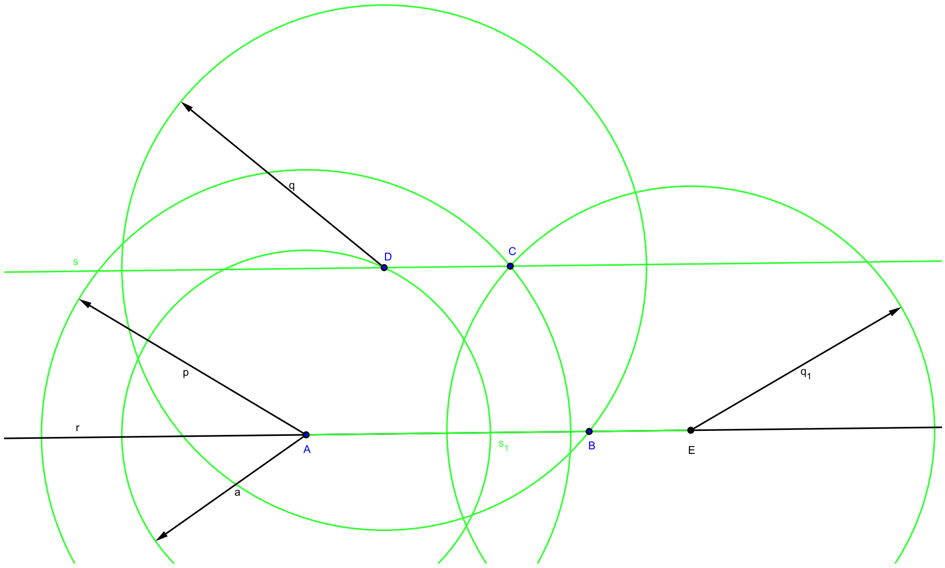
2. Consideremos um ponto, que chamaremos de $\underline{C}$, que é intersecção das circunferências de centros nos pontos $\underline{A}$ e $\underline{E}$ e raios iguais a $\underline{p}$ e $\underline{q}$, respectivamente (veja a figura abaixo);



3. Tracemos a reta, que chamaremos de $\underline{s}$, paralela à reta $\underline{r}$, que cotenha o ponto $\underline{C}$ (veja a figura abaixo);



4. A circunferência de centro no ponto $\underline{A}$ e raio igual a $\underline{a}$, encontrará a reta $\underline{s}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{D}$, e a circunferência de centro no ponto $\underline{D}$ e raio igual $\underline{q}$, encontrará a reta $\underline{r}$ em um ponto, que indicaremos por $\underline{B}$ (veja a figura abaixo);



O trapézio $\underline{ABCD}$ obtido acima é o procurado pois, por construção, temos:

$$AD = a\,, \quad AC = p \quad \text{e} \quad BD = q\,.$$

Além disso temos que

$$CD = BE\,,$$

pois o quadrilátero $BECD$ é um paralelogramo.

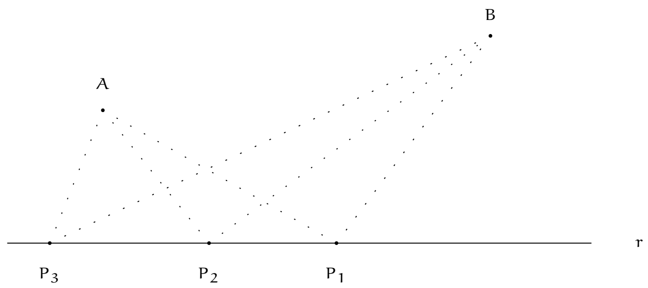
Assim

$$AB + CD = AB + BE = s\,.$$

Exercício 1.8.35 *Dados dois pontos, que indicaremos por $\underline{A}$ e $\underline{B}$ pertencentes a um mesmo semi-plano determinado por uma reta, que chamaremos de $\underline{r}$, determinar um ponto, que denotaremos por $\underline{P}$, pertencente à reta $\underline{r}$, de forma que a soma $PA + PB$ seja a menor valor possível.*

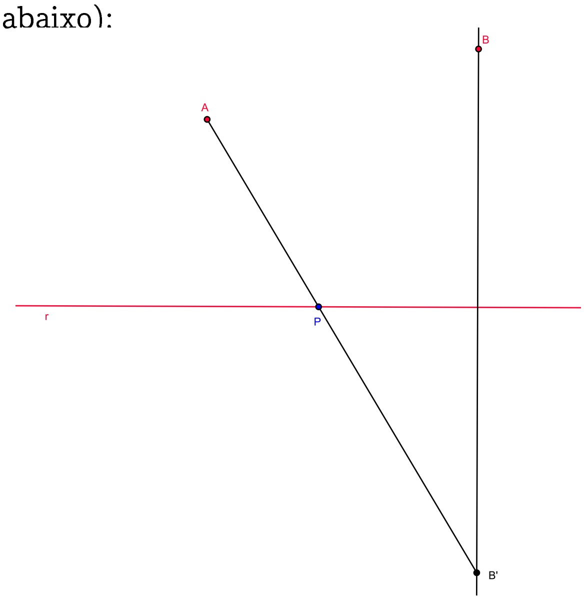
<u>**Resolução:**</u>

Observemos a figura:

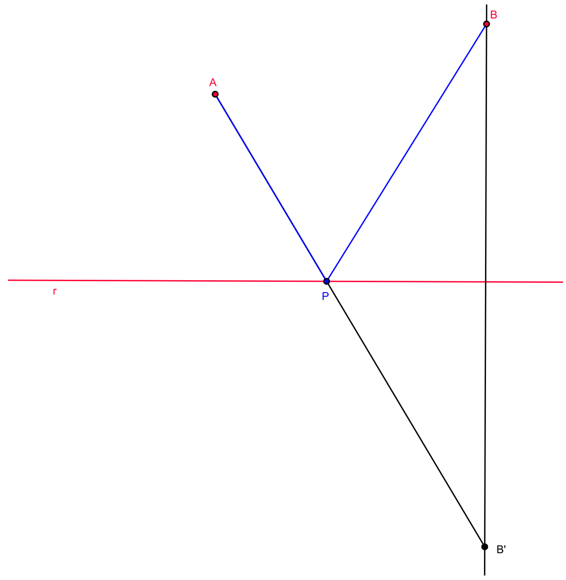


1. Denotemos por $\underline{B'}$, o ponto simétrico do ponto $\underline{B}$, em relação à reta $\underline{r}$, que pode ser obtido traçando-se a perpendicular a reta $\underline{r}$ pelo ponto $\underline{B}$, que encontrará a reta $\underline{r}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{C}$; assim podemos encontrar o ponto $\underline{B'}$, pertencente à sem-reta obtida da perpendicular com extremidade no ponto $\underline{C}$, que não contém o ponto $\underline{B}$, de modo que $CB' = CB$ (veja figura abaixo);

2. Tracemos o segmento $\overline{AB'}$, que interceptará a reta $\underline{r}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{P}$ (veja a figura abaixo):



3. Afirmamos que o ponto P, tem a propriedade que a soma $PA + PB$ será a menor valor da expressão $AX + XB$, para todo ponto, que indicaremos por X, pertencente à reta r (veja a figura abaixo).



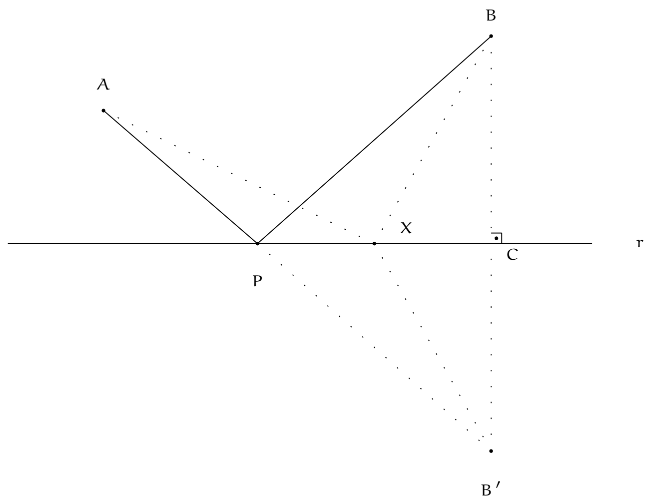
De fato, para qualquer ponto X pertencente à reta r, temos que a soma

$$AX + XB \geq AP + PB$$

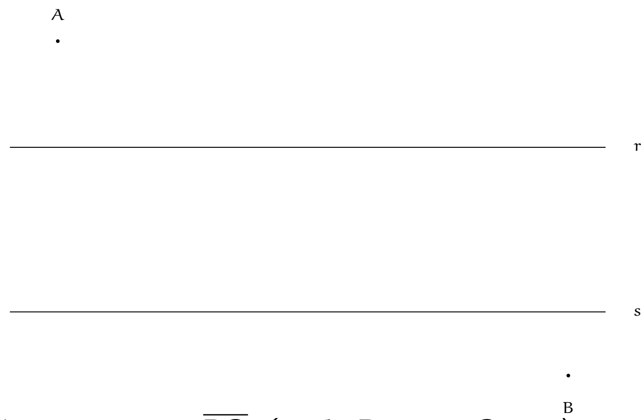
pois os pontos A, P e B′ são colineares e se $X \neq P$, teremos que os pontos A, X e B′ não serão colineares, ou seja,

$$AX + XB = AX + XB' \geq AP + PB' = AP + PB,$$

mostrando que este valor é o menor possível (veja a figura abaixo).



Exercício 1.8.36 *Suponhamos que duas retas paralelas, que indicaremos por r e s, são as margens de um rio e dois pontos, que chamaremos de A e B, representam duas cidade em lados opostos da margem desse rio (veja figura abaixo).*



Deseja-se construir uma ponte $\overline{PQ}$ (onde $P \in r$ e $Q \in s$), perpendicular às margens do rio, de forma que construindo-se as estradas $\overline{AP}$ e $\overline{BQ}$, o percurso total da cidade A até a cidade B seja o menor possível. Deteminar a posição da ponte, isto é, a posição dos pontos P e Q.

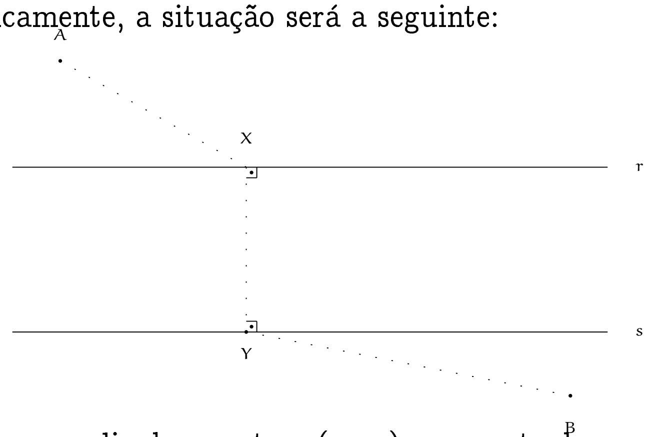
Resolução:

Na verdade devemos determinar onde deverá ficar o ponto P, para que a soma

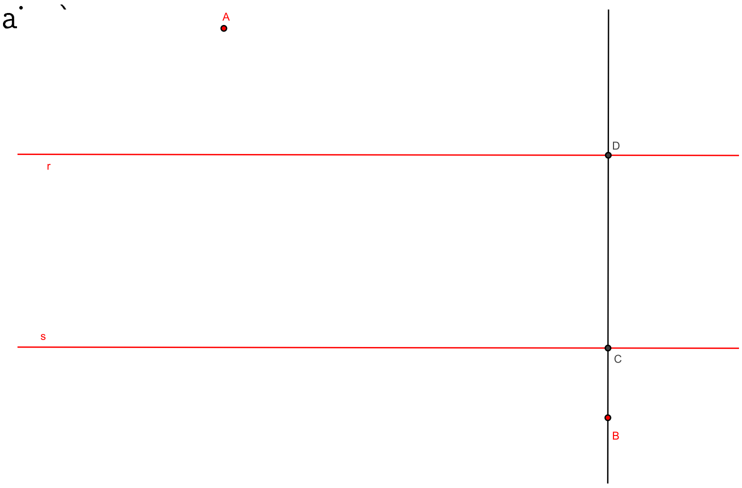
$$AP + PQ + QB$$

seja o menor valor possível, com os pontos P e Q, sobre as retas r e s, respectivamente.

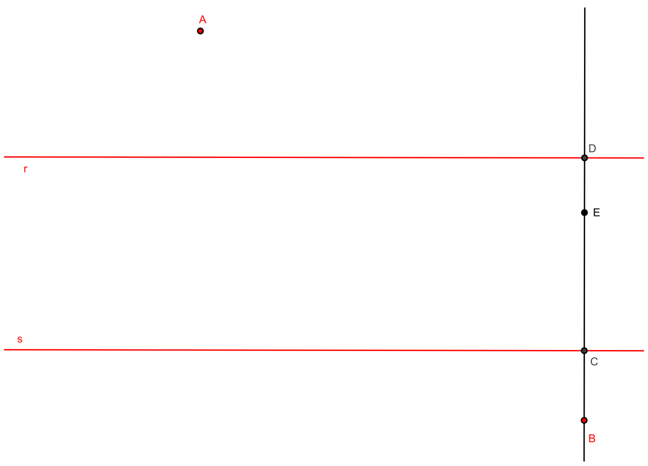
Em geral, geometricamente, a situação será a seguinte:



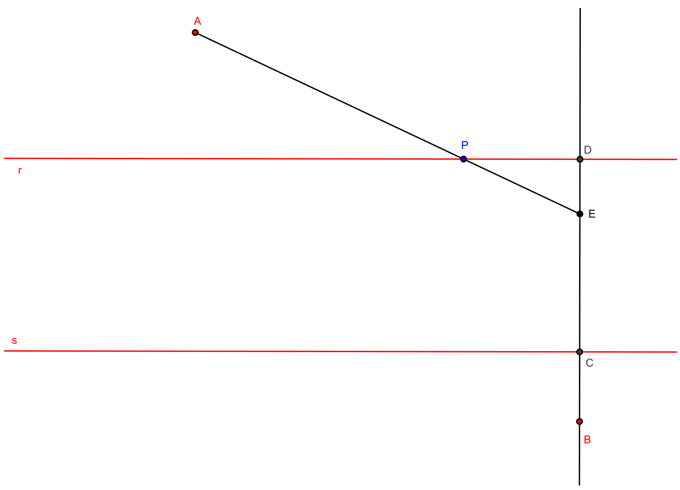
1. Encontremos a perpendicular a reta r (ou s) que contenha o ponto B, que encontrará a reta s em um ponto, que chamaremos de C, e a reta r em um ponto, que indicaremos por D (veja a figura aba



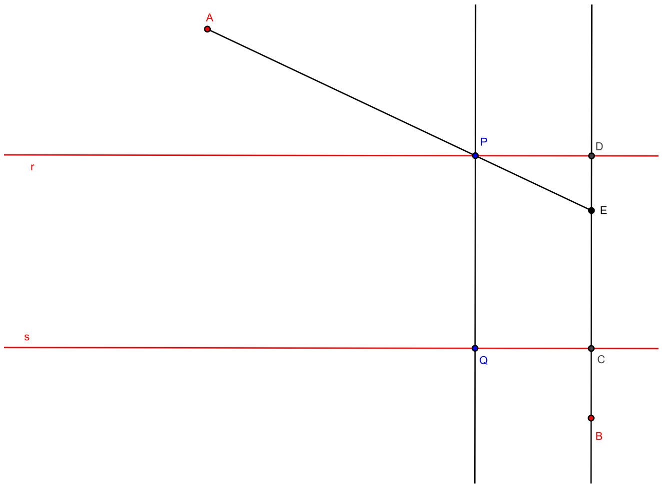
2. Encontre um ponto, que indicaremos por E, pertencente ao segmento $\overline{BD}$ obtido no item 1., de modo que $BE = CD$ (veja a figura abaixo);



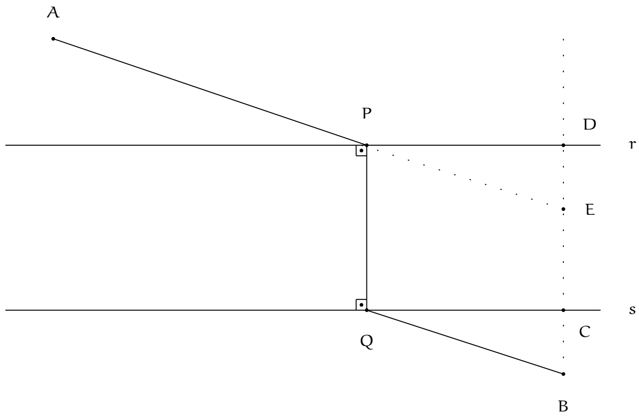
3. Tracemos o segmento de reta $\overline{AE}$, que encontrará a reta r em um ponto, que indicaremos por P (veja a figura abaixo);



4. A reta perpendicular a reta r (ou s) pelo ponto P, encontrará a reta s em um ponto, que indicaremos por Q (veja a figura abaixo);



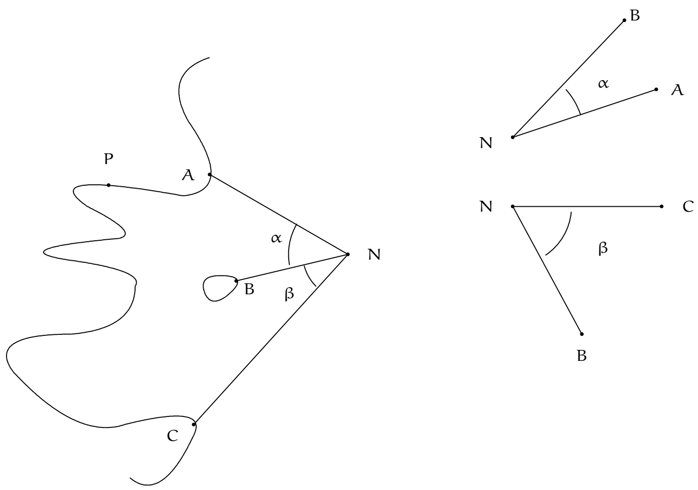
5. A poligonal $\overline{AP} \cup \overline{PQ} \cup \overline{QB}$, será o caminho procurado (ou seja é o menor valor procurado).



A demonstração desse fato é semelhante a do Exercíçio 35. (se as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ fossem coincidentes seria exatamente o caso do Exercício 35.) e será deixada como exercício.

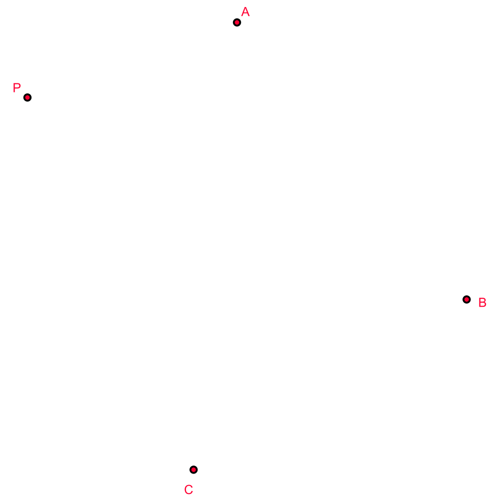
Exercício 1.8.37 *Um navio* $\underline{N}$ *deseja atingir o porto, que chamaremos de* $\underline{P}$*, da carta náutica mostrada na figura abaixo. Em derto instante, o capitão avista três faróis, que indicaremos por* $\underline{A}$*,* $\underline{B}$ *e* $\underline{C}$ *(não colineares) e mede os seguintes ângulos* $\widehat{\underline{ANB}}$ *e* $\widehat{\underline{BNC}}$*.*

Utilizando a régua e o compasso, determine a posição do navio e sua distância ao porto. A escala da carta náutica é $1:10.000$*.*

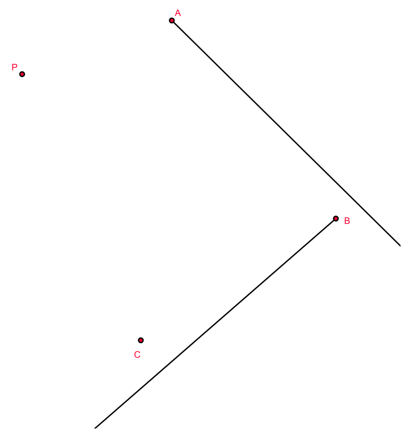


Resolução:

Vamos a resolução:



1. Consideremos a semi-reta que contém o segmento $\overline{AB}$, com extremidade no ponto $\underline{A}$, denotada por $\overrightarrow{AB}$, e a semi-reta que contém o segmento $\overline{BC}$, com extremidade no ponto $\underline{B}$, denotada por $\overrightarrow{BC}$ (veja a figura abaixo);

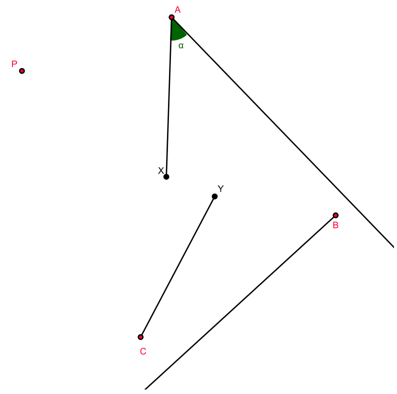


2. Encontremos um ponto, que chamaremos de $\underline{X}$, no semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ que comtém o ponto $\underline{P}$, de tal modo que (veja a figura abaixo)

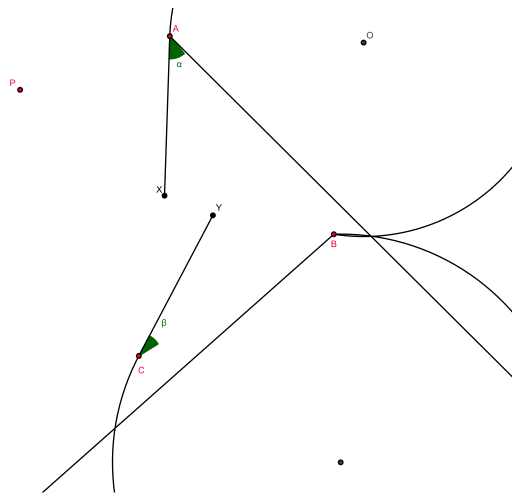
$$\widehat{XAB} = \alpha\,.$$

De modo semelhante, podemos encontrar um ponto, que denotaremos por $\underline{Y}$, no semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$, que contém o ponto $\underline{P}$, de tal modo que (veja a figura abaixo)

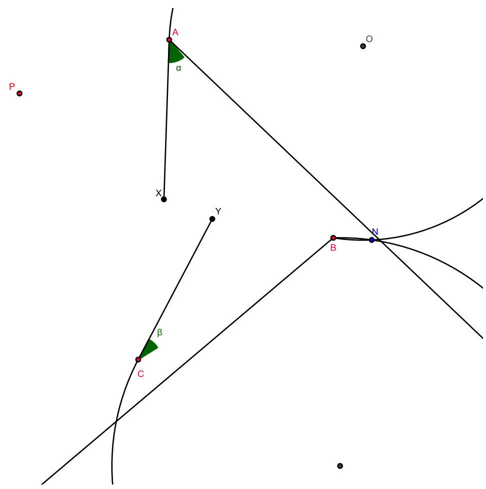
$$\widehat{YCB} = \beta\,.$$



3. Tracemos o arco capaz dos ângulos $\alpha = \widehat{BAX}$, relativamente ao segmento $\overline{AB}$, e o arco capaz do ângulo $\beta = \widehat{BCY}$, relativamente ao segmento $\overline{BC}$ (veja a figura abaixo);



4. Na interseção dos arcos capazes encontra-se um ponto, que indicaremos por N, ou seja, o ponto de localização na carta náutica do navio. O outro ponto de intersecção das duas circunferência é o ponto B (veja a figura baixo);



5. Tendo a localização do ponto, podemos utilizar uma régua enumerada para medir a distância do ponto $\underline{N}$ ao ponto $\underline{P}$, que multiplicada por 10.000, nos dará a distância real do navio ao porto.

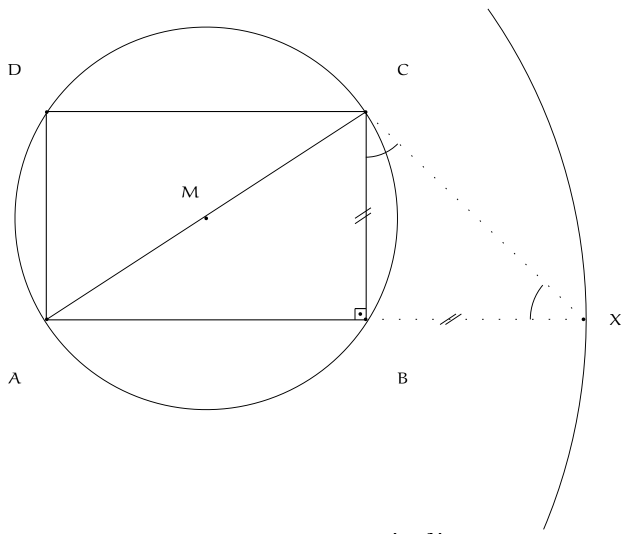
Exercício 1.8.38 *Construir um triângulo* ΔABC, *sabendo-se que o comprimento* $AB = 5.3\,cm$, $\cos\left(\widehat{A}\right) = 0.6$ *e que o lado* $\overline{BC}$ *tenha o menor compreensível possível.*

Resolução:

Exercício 1.8.39 *Construir um retângulo, que denotaremos por* $ABCD$, *conhecendo-se o comprimento de uma de suas diagonal, a saber,* $AC = d$, *e de seu semi-perímetro seja dado, isto é,* $AB + BC = p$.

Resolução:

Suponhamos que o problema está resolvido.



Observemos que se um ponto, que indicaremos por $\underline{X}$, é um ponto de intersecção da circunferência de centro no ponto $\underline{A}$ e raio $\underline{p}$, com a reta que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$, então o triângulo ΔXBC será isósceles, pois

$$AB + BC = p = AB + BX, \quad \text{logo} \quad BX = BC.$$

Assim

$$\widehat{BCX} = \widehat{CXB}.$$

Mas o ângulo

$$\widehat{XBC} = \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2},$$

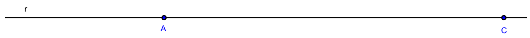
logo, da soma dos ângulos internos do triângulo ΔBCX ser igual a $\underline{\pi}$, segue que

$$\widehat{BCX} = \widehat{CXB} = \frac{\pi}{4}.$$

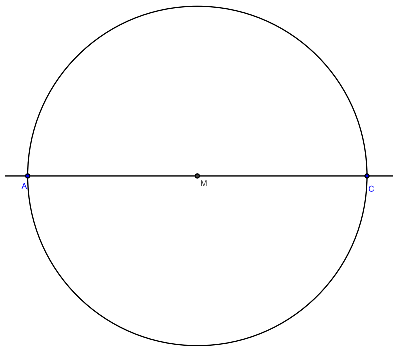
Portanto o ponto $\underline{X}$ está na intersecção da circunferência de centro no ponto $\underline{A}$ e raio $\underline{p}$, com o arco capaz do ângulo $\frac{\pi}{4}$, associado ao segmento $\overline{AC}$, e assim podemos construir o retângulo pedido.

Vamos a construção geométrica:

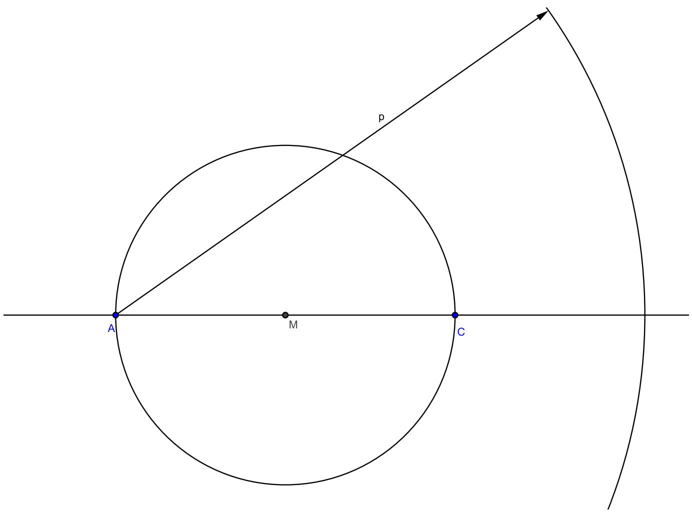
1. Dada uma reta, que chamaremos de $\underline{r}$, e um ponto, que denotaremos por $\underline{A}$, sobre a mesma encontremos um ponto, que chamaremos de $\underline{C}$, de tal modo que $AC = d$ (veja a figura abaixo);



2. Encontremos o ponto médio, que denotaremos por $\underline{M}$, do segmento $\overline{AC}$, e tracemos uma circunferência de centro em um ponto, que chamaremos de $\underline{M}$, que contenha os pontos $\underline{A}$ e $\underline{C}$ (isto é, seu raio será $MA = MC$), que será indicada por $\underline{\mathcal{C}}$ (veja a figura abaixo);

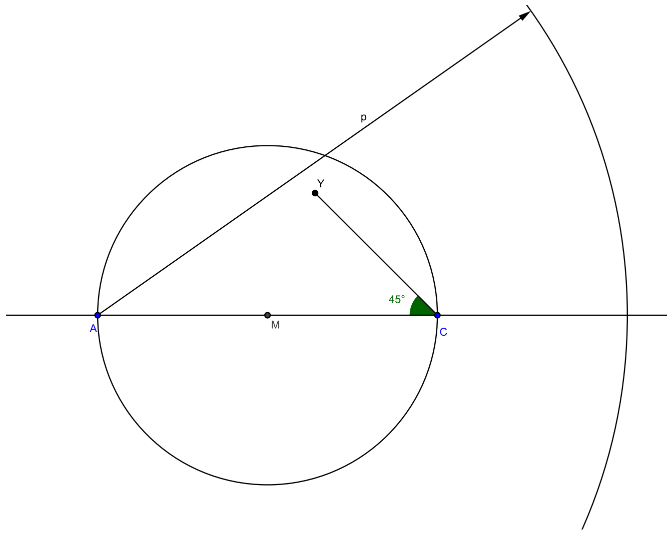


3. Tracemos uma circunferência de centro no ponto $\underline{A}$ de raio igual a $\underline{p}$, que será indicada por $\underline{\mathcal{C}\,'}$ (veja a figura abaixo);



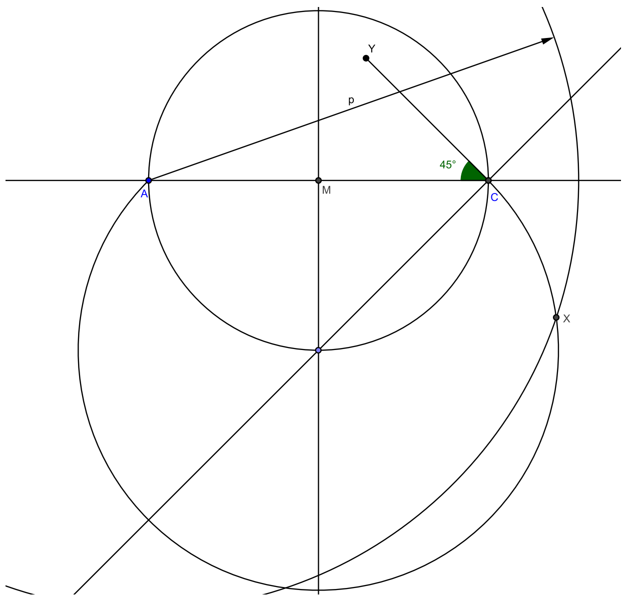
4. Encontremos um ponto, que chamaremos de $\underline{Y}$, de modo que $\widehat{YCA} = \dfrac{\pi}{4}$ (veja a figura

abaixo);



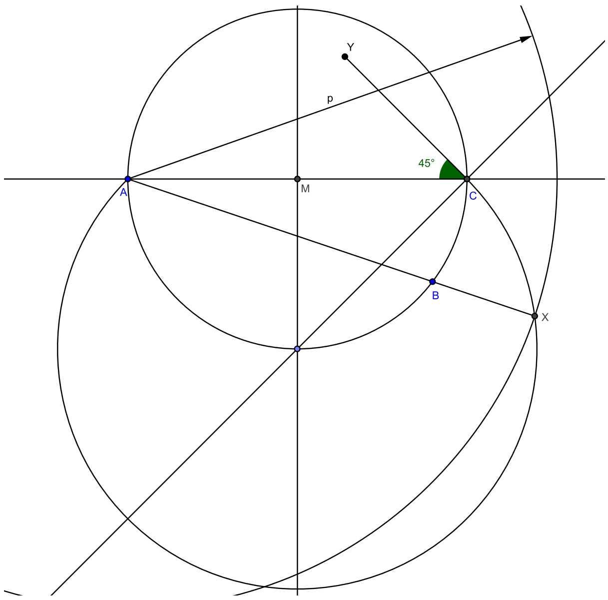
5. Tracemos o arco capaz do ângulo acima sobre o segmento $\overline{AC}$.

   Este arco encontrará a circunferência $\underline{\mathcal{C}\,'}$ em um ponto, que indicaremos por $\underline{X}$ (podemos ter outro ponto - veja a figura abaixo);



6. O segmento de reta $\overline{AX}$ interceptará a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{B}$.

O ponto $\underline{B}$ é um dos vértice do retângulo procurado (veja a figura abaixo);



De fato, temos que o triângulo ΔABC é um triângulo retângulo, no ângulo $\underline{\widehat{B}}$, pois o ponto $\underline{B}$ pertence a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ (cuja hipotenusa é o segmento $\overline{AC}$).

Como o triângulo ΔBXC é isósceles.

Na verdade, temos que $\widehat{BXC} = \dfrac{\pi}{4}$ e como $\widehat{XBC} = \dfrac{\pi}{2}$, segue que $\widehat{XCB} = \dfrac{\pi}{4}$)e assim

$$BX = BC \, .$$

Assim, teremos

$$AB + BC = AB + BX = p,$$

pois os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{X}$ são colineares e

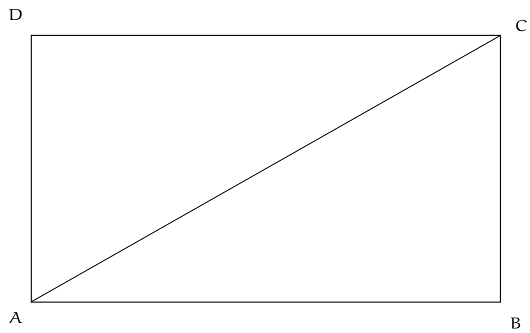
$$AX = p$$

será o raio da circunferência $\underline{\mathcal{C}\,'}$.

Os outros vértices podem ser obtidos, encontrando-se a intersecção das circunferências de centros nos pontos $\underline{A}$ e $\underline{C}$ e raios iguais a $\underline{BC}$ e $\underline{AB}$, respectivamente.

Observação 1.8.6 *Podemos obter uma solução algébrica para o problema acima, como veremos a seguir:*

Suponhamos que o retângulo $ABCD$ *tenha as propriedades requeridas.*



Sabemos que

$$AC = d\,, \qquad 2\,AB + 2\,BC = 2\,p \qquad e \qquad AB^2 = d^2 - BC^2\,, \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned}
\textit{em particular,}\quad & AB + BC = p\,, \\
\textit{e assim,}\quad & BC = p - AB \\
\textit{e, de (1.29), teremos,}\quad & AB^2 = d^2 - (p - AB)^2\,, \\
\textit{ou seja,}\quad & AB^2 = d^2 - \left(p^2 - 2\,p\,AB + AB^2\right)\,, \\
\textit{isto é,}\quad & AB^2 - p\,AB - \frac{p^2 - d^2}{2} = 0\,, \qquad (1.30) \\
\textit{ou ainda,}\quad & AB = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4\frac{p^2 - d^2}{2}}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{3\,p^2 - 2\,d^2}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Como

$$3\,p^2 - 2\,d^2 > p^2\,,$$

pois

$$p = AB + BC > AC = d\,,$$

temos duas soluções algébricas para o problema acima mas somente uma pode ser obtida geometicamente, a saber,

$$AB = \frac{p + \sqrt{3\,p^2 - 2\,d^2}}{2},$$

pois

$$\sqrt{3\,p^2 - 2\,d^2} > p\,. \tag{1.31}$$

Algebricamente teremos:

$$\begin{aligned}
x_2 &\doteq p - AB \\
&= p - \frac{p + \sqrt{3\,p^2 - 2\,d^2}}{2} \\
&= \frac{p - \sqrt{3\,p^2 - 2\,d^2}}{2} < 0
\end{aligned}$$

será a outra solução da equações do segundo grau (1.30) acima.

Tendo o valor de $\overline{AB}$, podemos obter, geometricamente, o retângulo com as propriedades requeridas, bastando para isto executar os itens abaixo:

1. *Encontremos sobre uma reta, que indicaremos por* $\underline{r}$, *dois pontos, que chamaremos de* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$, *tal que o segmento* $\overline{AB}$ *tenha comprimento iguala a* $\underline{AB}$, *obtido em* (1.8.6) *acima;*

2. *Tracemos, pelo ponto* $\underline{A}$, *a circunferência, de centro no ponto* $\underline{A}$ *e raio igual a* $d = (AC)$*;*

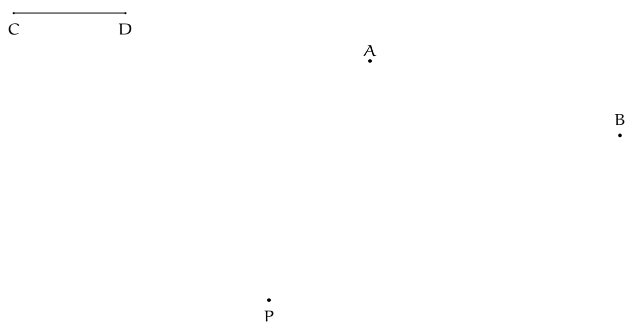
3. *A reta perpendicular à reta* $\overleftrightarrow{AB}$, *que contém o ponto* $\underline{B}$, *encontrará a circunferência do item acima em um ponto, que indicaremos por* $\underline{C}$*;*

4. *Tracemos as circunferência de centros nos pontos* $\underline{A}$ *e* $\underline{C}$ *e raios* $\underline{BC}$ *e* $\underline{AB}$, *respectivamente.*

   Na intersecção dessas duas circunferências (que estiverem no mesmo semi-plano determinado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$*) encontraremos o outro vértice, que chamaremos de* $\underline{D}$.

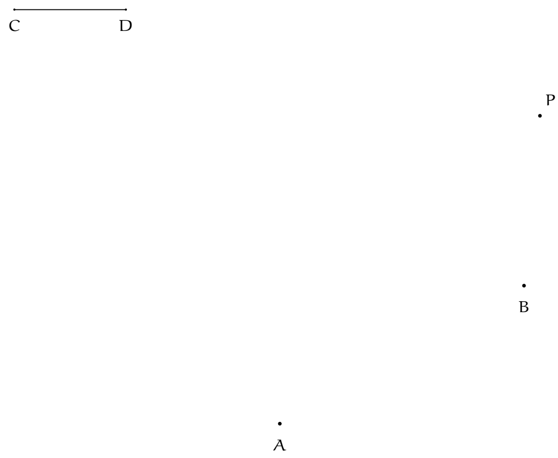
Como veremos no próximo capítulo, em algumas situações, as soluções algébricas podem ser mais simples de serem obtidas do que as soluções geométricas (por meio de regra e compasso, somente).

Exercício 1.8.40 *Dados, em posição, três pontos, que indicaremos por* $\underline{A}$, $\underline{B}$ *e* $\underline{P}$, *e um segmento* $\overline{CD}$, *traçar, pelo ponto* $\underline{P}$, *uma reta, que indicaremos por* $\underline{r}$, *de modo que os pontos* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$ *estejam num mesmo semi-plano determinado pela reta* $\underline{r}$ *e que a soma das distâncias dos pontos* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$ *à reta* $\underline{r}$, *sejam iguais a* $2\,CD$ *(veja a figura abaixo).*



Resolução:

Exercício 1.8.41 *Dados, em posição, três pontos, que indicaremos por* $\underline{A}$, $\underline{B}$ *e* $\underline{P}$, *e um segmento* $\overline{CD}$, *traçar, pelo ponto* $\underline{P}$, *uma reta* $\underline{r}$, *de modo que, os pontos* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$, *pertençam a lados opostos dos semi-planos determinado pela reta* $\underline{r}$ *e cuja a soma das distâncias dos pontos* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$ *à reta* $\underline{r}$ *sejam iguais a* $\underline{CD}$ *(veja a figura abaixo).*

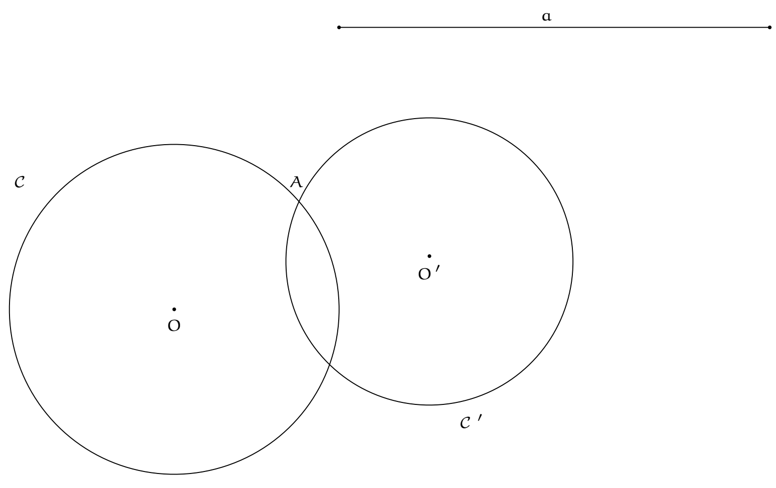


Resolução:

Exercício 1.8.42 *Resolva os problemas 40. e 41., substituindo a palavra "soma" por "diferença"nos respectivos exercícios.*

Resolução:

Exercício 1.8.43 *Dados duas circunferências, que indicaremos por* $\underline{\mathcal{C}}$ *e* $\underline{\mathcal{C}\,'}$*, um ponto, que chamaremos de* $\underline{A}$*, e* $a > 0$*, como na figura abaixo, traçar, pelo ponto* $\underline{A}$*, uma reta secante que contenha os pontos* $\underline{A}$*,* $P \in \mathcal{C}$ *e* $Q \in \mathcal{C}\,'$*, de forma que tenhamos* $\underline{PQ = a}$*.*



Resolução:

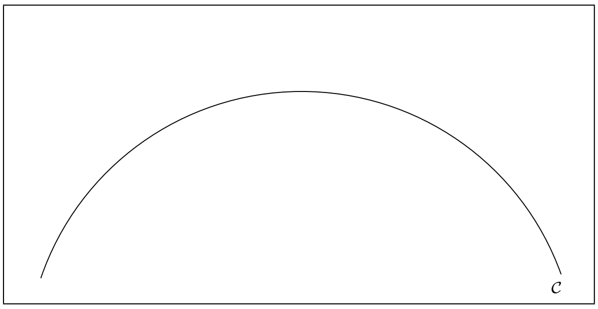
Exercício 1.8.44 *Utilizando a figura acima, encontrar dois pontos, que indicaremos por* $\underline{P}$ *e* $\underline{Q}$*, com* $P \in \mathcal{C}$ *e* $Q \in \mathcal{C}\,'$*, tal que os pontos* $\underline{P}$*,* $\underline{A}$ *e* $\underline{Q}$ *sejam colineares e o segmento* $\overline{PQ}$ *tenha o maior comprimento possível.*

Resolução:

Exercício 1.8.45 *Utilizando a figura do Exercício 43. acima, encontrar dois pontos, que indicaremos por $\underline{\mathrm{P}}$ e $\underline{\mathrm{Q}}$, com $\mathrm{P} \in \mathcal{C}$ e $\mathrm{Q} \in \mathcal{C}\,'$ tais que os pontos $\underline{\mathrm{P}}$, $\underline{\mathrm{A}}$ e $\underline{\mathrm{Q}}$ sejam colineares e $\underline{\mathrm{PA} = \mathrm{AQ}}$.*

Resolução:

Exercício 1.8.46 *Conhecemos de uma circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, apenas a parte que se vê na figura abaixo. Limitando-se ao espaço disponível, determine o raio da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$.*



Resolução:

Exercício 1.8.47 *Construir um quadrado, conhecendo-se um ponto pertencente a cada um dos lados do mesmo.*

Resolução:

Exercício 1.8.48 *Consideremos quatro pontos, que indicaremos por $\underline{\mathrm{A}}$, $\underline{\mathrm{B}}$, $\underline{\mathrm{C}}$ e $\underline{\mathrm{D}}$, distintos, sobre uma reta, que indicaremos por $\underline{\mathrm{r}}$, distribuidos sobre a mesma nessa ordem. Traçar, pelos pontos $\underline{\mathrm{A}}$ e $\underline{\mathrm{B}}$, duas retas paralelas e pelos, pontos $\underline{\mathrm{C}}$ e $\underline{\mathrm{D}}$, outras duas retas paralelas, de modo que as interseções dessas retas formem um quadrado.*

Resolução:

Exercício 1.8.49 *Consideremos dois pontos, que indicaremos por $\underline{\mathrm{A}}$ e $\underline{\mathrm{B}}$, que perteçam a um mesmo semi-plano determinado por uma reta, que chamaremos de $\underline{\mathrm{r}}$. Determinar um ponto, que denotaremos por $\underline{\mathrm{P}}$, pertencente à reta $\underline{\mathrm{r}}$, de modo que o ângulo, formado pela reta $\underline{\mathrm{r}}$ e pelo segmento $\overline{\mathrm{PB}}$, seja igual ao dobro do o ângulo formado pela reta $\underline{\mathrm{r}}$ e pelo segmento $\overline{\mathrm{PA}}$.*

Resolução:

Exercício 1.8.50 *Consideremos dois pontos, que chamaremos de $\underline{\mathrm{A}}$ e $\underline{\mathrm{B}}$, que perteçam a um mesmo semi-plano determinado por uma reta, que chamaremos de $\underline{\mathrm{r}}$. Determinar um ponto, que denotaremos por $\underline{\mathrm{P}}$, pertencente a reta $\underline{\mathrm{r}}$, de modo que a medida do ângulo $\widehat{\mathrm{APB}}$ seja o maior valor possível.*

Resolução:

Capítulo 2

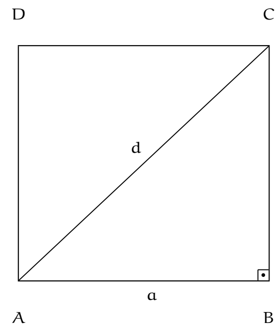
Expressões Algébricas

2.1 Introdução

Neste capítulo trataremos de problemas de construções geométricas, via resolução de equações algébricas e vice-versa.

Como motivação consideremos o seguinte problema:

Exemplo 2.1.1 *Constriur um quadrado $\square ABCD$, conhecendo-se a soma da diagonal com um dos lados, por exemplo, a soma $\underline{AC + AB}$ (veja a figura abaixo).*



Resolução:

Suponhamos que

$$AB = a$$

(não conhecemos este comprimento) e denotemos a diagonal do quadrado por $\underline{d}$ (que também não conhecemos).

Logo, como o triângulo ΔABC (veja a figura acima) é um triângulo retângulo e isósceles, do Teorema de Pitágoras, segue que

$$d^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\overset{CD=AB=a}{=} 2\,a^2$$

$$\text{assim, teremos:} \quad d = a\sqrt{2}\,. \tag{2.1}$$

Assim

$$d + a = a\sqrt{2} + a\,,$$

por hipótese, é um valor conhecido, que indicaremos por $\underline{s}$.

Portanto, devemos resolver a seguinte equação algébrica:

$$
\begin{aligned}
& d + a = s \\
\text{que, de (2.1), tornar-se-á:} \quad & a\sqrt{2} + a = s \\
\text{ou seja,} \quad & a = \frac{s}{\sqrt{2}+1}\,, \\
\text{ou ainda,} \quad & a = \frac{s}{\sqrt{2}+1}\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \\
& \;= \frac{s\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} \\
& \;= s\left(\sqrt{2}-1\right)\,, \\
\text{isto é,} \quad & a = s\left(\sqrt{2}-1\right)\,. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Portanto temos uma fórmula para encontrarmos o comprimento de um dos lados (e portanto todos) do quadrado e podemos traçá-lo geometricamente.

Deixaremos como exercício para o leitor fazer o traçado.

Veremos, mais adiante, como essa solução pode ser construída geometricamente.

2.2 A 4.ª Proporcional

Definição 2.2.1 *Sejam $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ o comprimento de três segmentos.*

Diremos que $\underline{x}$ é a **4.ª, proporcional entre $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$** *se*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}\,. \qquad (2.3)$$

Observação 2.2.1

1. *A relação (2.3) acima é equivalente a igualdade*

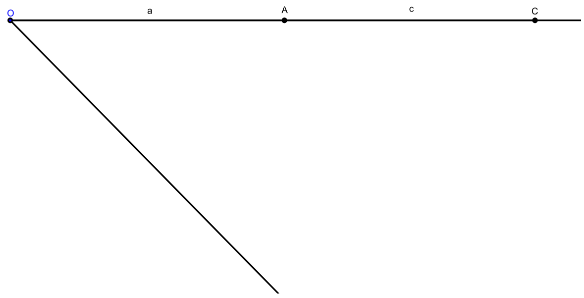
$$a\,x = b\,c \qquad (2.4)$$

   que apareceu no Exemplo (1.1.1) no início do curso, onde obtivemos a sua resolução geométrica, utilizando as ideias dos gregos.

2. *Vamos obter $\underline{x}$, geometricamente, de uma outra maneira, utilizando o* **Teorema de Tales**.

   Para isto:

   (a) Consideremos um ângulo qualquer (não raso, isto é, que não tenha medida $\underline{\pi}$) com vértice em um ponto, que indicaremos por $\underline{O}$ (veja a figura abaixo).

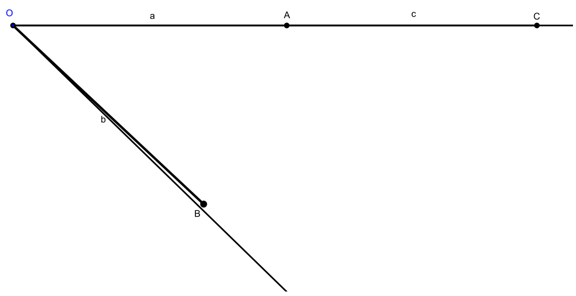


(b) Sobre um dos lados do ângulo do item acima, encontremos dois pontos, que denotaremos por $\underline{A}$ *e* $\underline{C}$*, de tal modo que (veja a figura abaixo)*

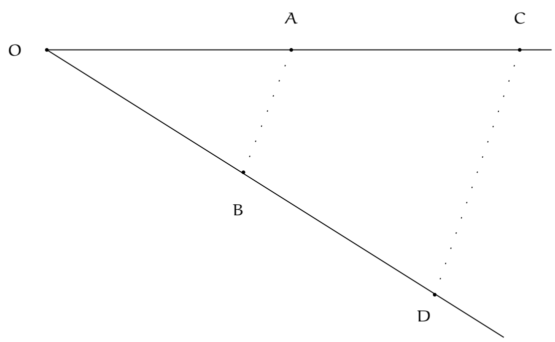
$$OA = a \quad e \quad AC = c\,. \tag{2.5}$$

(c) Sobre o outro lado do ângulo considerado no item (a), encontremos um ponto, que denotaremos por $\underline{B}$*, de modo modo que (veja a figura abaixo)*

$$OB = b\,. \tag{2.6}$$



(d) Tracemos, pelo ponto $\underline{C}$*, uma reta paralela à reta* $\overleftrightarrow{AB}$*, que interceptará a semi-reta* $\overrightarrow{OB}$ *em um ponto, que indicaremos por* $\underline{D}$ *(veja a figura abaixo).*



(e) Afirmamos que

$$x \doteq BD\,, \tag{2.7}$$

isto é, a solução da 4.ª proporcional entre $\underline{a}$*,* $\underline{b}$ *e* $\underline{c}$*, isto é, satisfaz a identidade* (2.3).

Mostremos que isto realmente é verdade.

Para isto, notemos que como as retas $\overleftrightarrow{AB}$ *e* $\overleftrightarrow{CD}$ *são paralelas, os triângulos* ΔOAB *e* ΔOCD *são semelhantes (caso AAA).*

Logo, pelo Teorema de Tales, lados correspondentes guardam uma mesma proporção, por exemplo:

$$
\begin{aligned}
& \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}\,, \\
\textit{ou seja,} \quad & \frac{OA}{OB} = \frac{OA + AC}{OB + BD}\,, \\
\textit{que, de (2.5), (2.6) e (2.7), teremos:} \quad & \frac{a}{b} = \frac{a + c}{b + x}\,, \\
\textit{isto é,} \quad & a\,(b + x) = b\,(a + c)\,,
\end{aligned}
$$

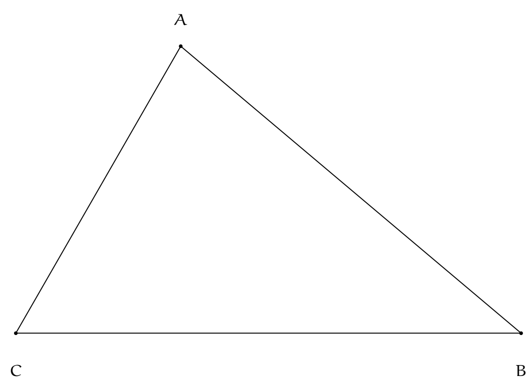
que implicará em (observemos que $ab = ba$*)*

$$
\begin{aligned}
& a\,x = b\,c\,, \\
\textit{ou, equivalentemente:} \quad & \frac{a}{b} = \frac{c}{x}\,,
\end{aligned}
$$

mostrando que (2.7) é a 4.a proporcional entre $\underline{a}$, $\underline{b}$ *e* $\underline{c}$, *isto é, satisfaz a identidade (2.3).*

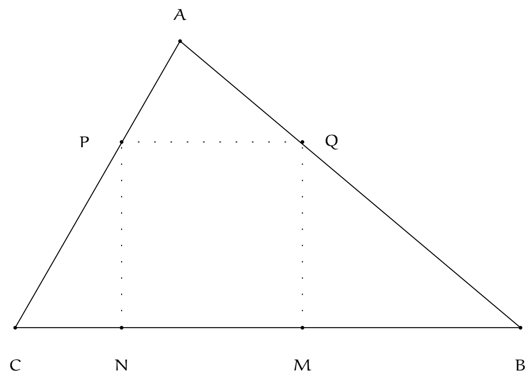
Trataremos, a seguir, de vários exemplos que mostrarão como esta noção poderá ser útil em muitas construções geométricas.

Exemplo 2.2.1 *Inscrever no triângulo* ΔABC *um quadrado, de modo que este quadrado tenha um lado sobre o segmento* $\overline{BC}$.



Resolução:

Suponhamos que o problema foi resolvido (veja a figura abaixo).



Observemos que o quadrado $\square MNPQ$ está inscrito no triângulo ΔABC, e seu lado $\overline{MN}$ está sobre o lado $\overline{BC}$ do triângulo ΔABC.

Consideremos

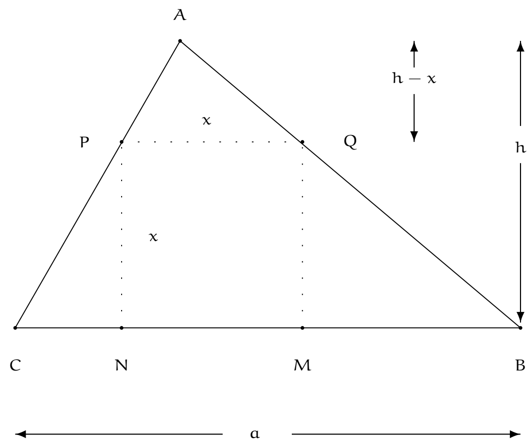
$$a \doteq BC$$

e denotemos o comprimento da altura do triângulo ΔABC, relativamente ao lado $\overline{BC}$ por $\underline{h}$, isto é,

$$h = h_a\,.$$

Seja $\underline{x}$ o comprimento do lado do quadrado $\square MNPQ$, isto é, (veja a figura abaixo)

$$x = PQ = QM = NM = PN\,.$$



Observemos que os triângulos ΔAQP e ΔABC são semelhante , pois as retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{CB}$ são paralelas (caso AAA).

Logo, do Teorema de Tales, elementos correspondentes aos triângulos ΔAQP e ΔABC, quardam uma mesma proporção, em particular, temos que:

$$\frac{h-x}{h} = \frac{QP}{BC} = \frac{x}{a}\,,$$

$$\text{assim,}\quad x\,h = a\,h - a\,x\,,$$

$$\text{ou seja,}\quad a\,x + x\,h = a\,h\,,$$

$$\text{isto é,}\quad x = \frac{a\,h}{a+h}\,. \tag{2.8}$$

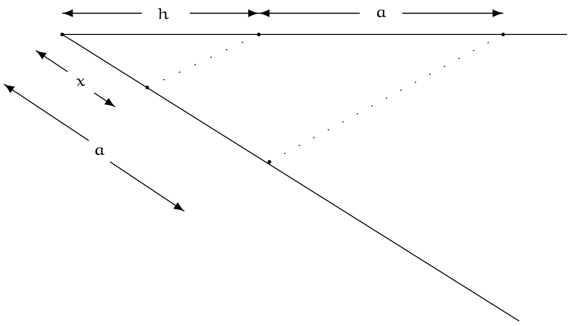
Portanto temos uma fórmula que nos dá o valor $\underline{x}$ em função dos valores $\underline{a}$ e $\underline{h}$.

Para construirmos o quadrado pedido, observemos que a relação (4.2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{a+h}{a} = \frac{h}{x},$$

isto é, $\underline{x}$ é a 4.ª proporcional entre $\underline{a+h}$, $\underline{a}$ e $\underline{h}$.

Logo podemos obter um segmento de comprimento $\underline{x}$ utilizando a: construção a seguir:



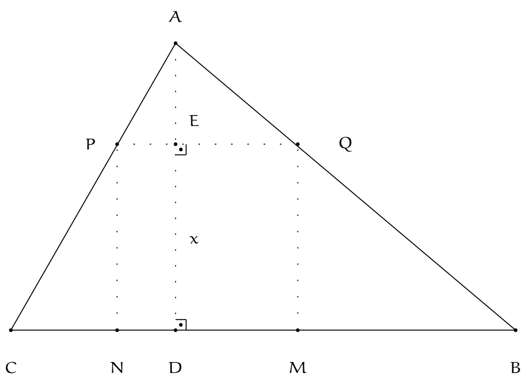
Conhecido o valor $\underline{x}$, gemometricamente, podemos traçar o quadrado pedido $\square MNPQ$, da seguinte forma:

1. Tracemos a altura $\overline{AD}$ do triângulo ΔABC, bastando para isto encontrar a reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BC}$ pelo ponto $\underline{A}$ (veja a figura abaixo);

2. Sobre o segmento $\overline{AD}$, encontrar um ponto, que indicaremos por $\underline{E}$, de modo que (veja a figura abaixo)
$$DE = x;$$

3. A reta paralela a reta $\overleftrightarrow{BC}$, que contém o ponto $\underline{E}$, interceptará os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ em dois pontos, que indicaremos por $\underline{Q}$ e $\underline{P}$, respectivamente (veja a figura abaixo);

4. Traçando-se as retas perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{QP}$ pelos pontos Q e P obtermos, na intersecção com a reta $\overleftrightarrow{BC}$, os outros dois vértices M e N, respectivamente (figura abaixo).



5. O quadrilátero MNPQ é um quadrado que está inscrito no triângulo ΔABC, cujo um lado $\overline{MN}$ está sobre o lado $\overline{BC}$, como queríamos.

   Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

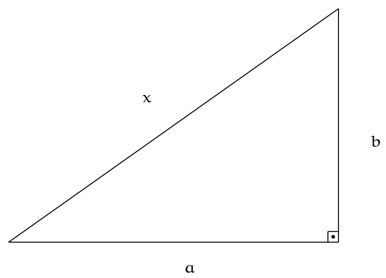
2.3 Sobre a Equação $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$

Observação 2.3.1 *Sejam $\underline{a}$ e $\underline{b}$ comprimentos de dois segmentos.*

1. *Então o número real (maior que zero)*

$$x \doteq \sqrt{a^2 \pm b^2}, \tag{2.9}$$

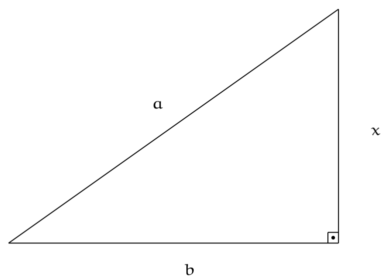
pode ser interpretado, pelo Teorema de Pitágoras, como sendo o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos têm comprimentos $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (veja a figura abaixo).



2. *De modo semelhante, o número real (maior que zero)*

$$x \doteq \sqrt{a^2 - b^2} \tag{2.10}$$

pode ser interpretado, pelo Teorema de Pitágoras, como o valor do comprimento de um dos catetos de um triângulo retângulo, que tem hipotenusa com comprimento $\underline{a}$, e outro cateto com comprimento $\underline{b}$ (veja a figura abaixo).



3. *Mais geralmente, expressões do tipo*

$$\sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2 \pm \underbrace{\cdots}_{\text{número finito de parcelas}}}, \tag{2.11}$$

podem ser construídas, geometricamente, utilizando-se várias vezes os procedimentos acima, ou seja, o Teorema de Pitágoras, como veremos no exemplo a seguir.

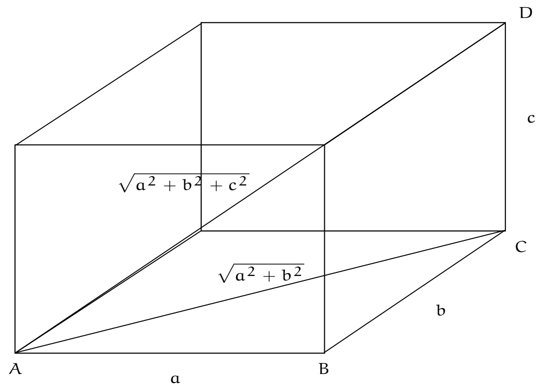
Exemplo 2.3.1 *Construir a diagonal de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões das arestas são $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$.*

Resolução:

Sabemos que o comprimento diagonal de um paralelepípedo retângulo, cujos comprimentos das arestas que o determinam são: $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$, será dada por

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,, \tag{2.12}$$

bastanto para tanto, aplicar o Teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos ΔABC e ΔACD (veja a figura abaixo).



Para a construção de um segmento com o comprimento dado por (2.12), podemos agir da seguinte forma:

Seja

$$m \doteq \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{2.13}$$

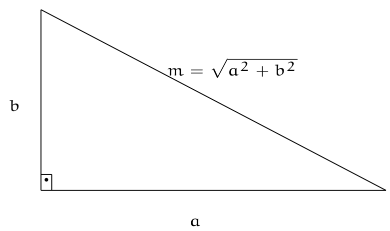
Deste modo, de (2.13) e (2.12), deveremos ter

$$x = \sqrt{m^2 + c^2} \tag{2.14}$$

e assim determinamos o comprimento da diagonal, geometricamente, utilizando-se duas vezes o procedimento definido anteriormente, a saber:

1. Construimos o triângulo retângulo de catetos com comprimentos $\underline{a}$ e $\underline{b}$.

   Logo, sua hipotenusa terá comprimento $\underline{m}$, dado por (2.13) (veja figura abaixo);

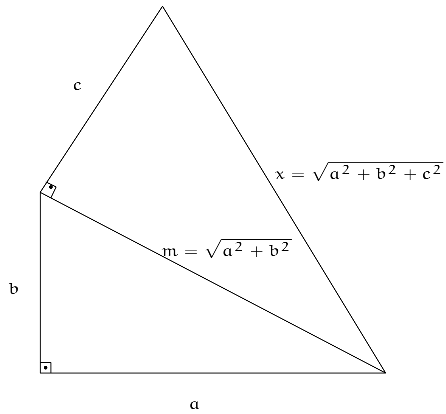


2. Depois construimos o triângulo retângulo, com um cateto de comprimento $\underline{c}$ e o outro cateto com comprimento $\underline{m}$.

   Assim, sua hipotenusa, terá comprimento

$$\sqrt{c^2 + m^2} \overset{m^2 \overset{(2.13)}{=} a^2+b^2}{=} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \overset{(2.12)}{=} x\,,$$

   como queríamos (veja a figura abaixo).



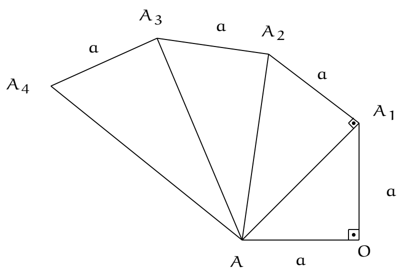
2.4 A Expressão $a\sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$

Observação 2.4.1

1. *Dado $\underline{a}$, o comprimento de um segmento, podemos construir segmentos cujos comprimentos são*

$$a\sqrt{2}\,, \quad a\sqrt{3}\,, \quad a\sqrt{4}, \cdots, a\sqrt{n}, \cdots$$

   por meio da seguinte construção:



   De fato, aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ΔOAA_1 isósceles, cujos catetos tem comprimento igual a $\underline{a}$, isto é,

$$OA = OA_1 = a\,, \tag{2.15}$$

   segue que

$$\begin{aligned} AA_1{}^2 &= OA_1{}^2 + OA^2 \\ &\overset{(2.15)}{=} a^2 + a^2 = 2\,a^2\,, \end{aligned}$$

e assim teremos

$$AA_1 = a\sqrt{2}\,. \tag{2.16}$$

Aplicando-se, novamente, o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ΔAA_1A_2*, cujos catetos tem comprimento iguais a* $\underline{a}$*, isto é,*

$$AA_1 \overset{(2.16)}{=} \sqrt{a} \quad e \quad A_1A_2 = a\,, \tag{2.17}$$

segue que

$$\begin{aligned} AA_2^2 &= AA_1^2 + A_1A_2^2 \\ &\overset{(2.17)}{=} 2\,a^2 + a^2 = 3\,a^2\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$AA_2 = a\sqrt{3}\,.$$

Logo, por indução, podemos mostrar que:

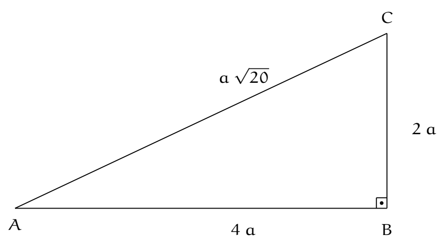
$$AA_1 = a\sqrt{2}\,, \quad AA_2 = a\sqrt{3}\,, \quad AA_3 = a\sqrt{4}\,, \quad AA_4 = a\sqrt{5}\,, \cdots$$

2. *Se* $\underline{n}$ *for muito grande podemos, algumas vezes, encontrar um caminho mais rápido para construir o segmento com comprimento igual a* $\underline{a\sqrt{n}}$ *.*

   Por exemplo, se queremos construir um segmento de comprimento igual a $\underline{a\sqrt{21}}$*, podemos agir da seguinte forma:*

   (a) *Construimos um triângulo retângulo, cujos catetos têm comprimentos* $\underline{4\,a}$ *e* $\underline{2\,a}$*, respectivamente.*

   Logo sua hipotenusa, pelo Teorema de Pitágoras, terá comprimento igual a $\underline{a\sqrt{20}}$ *(veja a figura abaixo).*



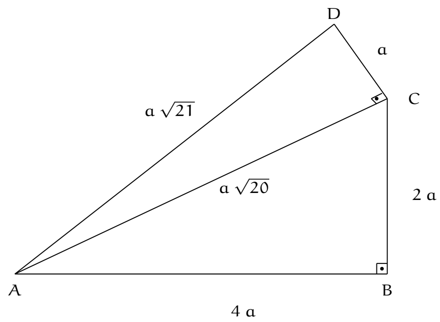
De fato, pois aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ΔABC*, obteremos*

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{16\,a^2 + 4a^2} \\ &= a\sqrt{20}\,, \end{aligned}$$

com isto obtemos um segmento cujo comprimento é igual a $\underline{a\sqrt{20}}$*, a saber, o segmento* $\overline{AC}$*.*

(b) *Em seguida construimos um triângulo retângulo, cujos catetos têm comprimentos iguais a $\underline{a\sqrt{20}}$ e $\underline{a}$, respectivamente.*

Deste modo, sua hipotenusa, terá comprimento igual a $\underline{a\sqrt{21}}$ (veja a figura abaixo).



De fato, pois aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ΔACD, obteremos

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{AC^2 + CD^2} \\ &= \sqrt{20\,a^2 + a^2} \\ &= a\sqrt{21}\,, \end{aligned}$$

com isto obtemos um segmento de comprimento igual a $\underline{a\sqrt{21}}$, a saber, o segmento $\overline{AD}$.

Um outro de exemplo que podemos aplicar as idéias acima é dado pelo:

Exemplo 2.4.1 *Construir um quadrado conhecendo-se a soma, que indicaremos por $\underline{s}$, do comprimento da diagonal com o comprimento de um dos lados do mesmo.*

Resolução:

Denotemos por $\underline{a}$, o comprimento de um lado do quadrado procurado.

Sabemos, do Exemplo (2.1.1), que

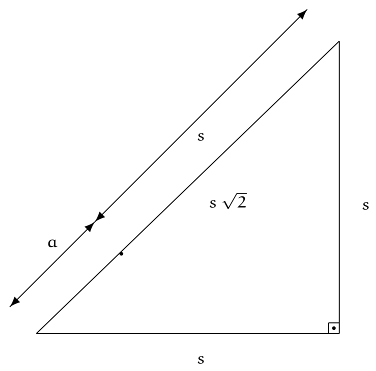
$$a = s\left(\sqrt{2} - 1\right) = s\sqrt{2} - s\,. \tag{2.18}$$

Para obter, geometricamente, um segmento de reta cujo comprimento é dado por (2.18), construiremos um triângulo retângulo isósceles, cujos comprimentos dos catetos são iguais a $\underline{s}$.

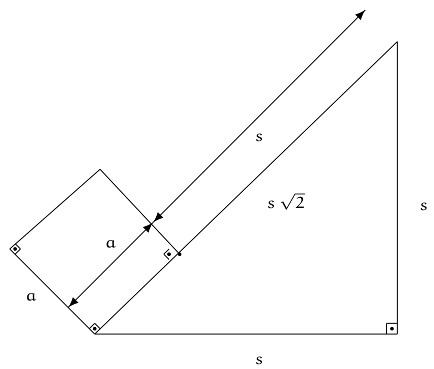
Deste modo temos que sua hipotenusa terá comprimento

$$s\sqrt{2}\,. \tag{2.19}$$

Subtraindo-se $\underline{s}$, do valor (2.19) acima, obteremos o valor $\underline{a}$ (veja (2.18)), e portanto um segmento de comprimento $\underline{a}$ (veja a figura abaixo).



Com isto podemos construir nosso quadrado a partir desse lado de comprimento conhecido (veja a figura abaixo).



2.5 A Média Geométrica

Definição 2.5.1 *Dados os números reais positivos* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$*, definimos* **média aritmética entre** $\underline{a}$ **e** $\underline{b}$*, indicada por* $\underline{m_a}$*, como sendo:*

$$m_a \doteq \frac{a+b}{2}. \tag{2.20}$$

De modo semelhante, definimos a **média geométrica entre** $\underline{a}$ **e** $\underline{b}$*, indicada por* $\underline{m_g}$*, como sendo como:*

$$m_g \doteq \sqrt{a\,b}\,. \tag{2.21}$$

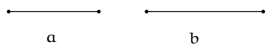
Definimos a **média Pitagórica entre** $\underline{a}$ **e** $\underline{b}$*, indicada por* $\underline{m_p}$*, como sendo:*

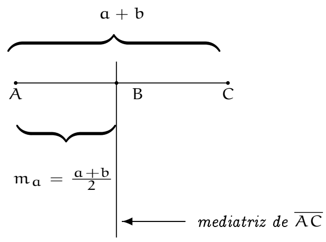
$$m_p \doteq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \tag{2.22}$$

Observação 2.5.1

1. *A construção da média aritmética entre dois números reais positivos* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$ *é simples.*

   Para isto basta encontrar o ponto médio de um intervalo, cujo comprimento é igual a $\underline{a+b}$ *(via mediatriz - veja a figura abaixo);*

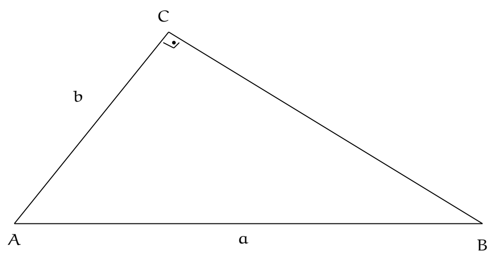




Ou seja, $\underline{AB}$, *o comprimento do segmento* $\overline{AB}$, *é igual a média aritmética de* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$.

2. *A construção da média geométrica aparece em um triângulo retângulo.*

   Suponhamos que um triângulo retângulo ΔABC *tem um dos catetos de comprimento é igual a* $\underline{b}$ *e a hipotenusa tem comprimento igual a* $\underline{a}$ *(veja a figura abaixo).*



Se denotarmos por $\underline{h}$, *o comprimento da altura, relativa a hipotenusa* $\overline{AB}$, *então temos as seguintes relações, cuja verificação será deixada como exercício para o leitor:*

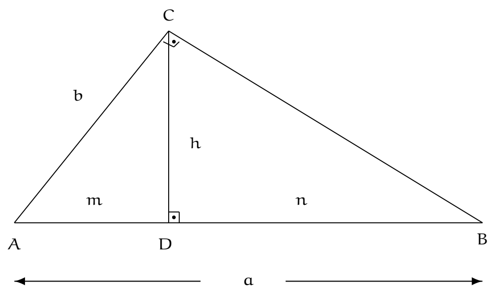
$$h^2 = m\,n\,, \tag{2.23}$$

$$b^2 = a\,m\,, \tag{2.24}$$

onde

$$m = AD\,, \quad n = DB$$

e denotamos por $\underline{D}$, *o ponto de interseção da reta perpendicular à reta* $\overleftrightarrow{AB}$, *que contém o ponto* $\underline{A}$, *com a reta* $\overleftrightarrow{AB}$ *(veja a figura abaixo).*



Assim, (2.23) nos diz que o comprimento da altura do triângulo ΔABC*, relativamente ao lado* $\overline{AB}$ *(ou seja, à hipotenusa do mesmo, ou ainda,* $\underline{h}$*) é a média geométrica entre os comprimentos das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa, isto é,*

$$h = \sqrt{m\,n}\,. \tag{2.25}$$

Por outro lado, (2.24) nos diz que o comprimento de um dos catetos é a média geométrica do comprimento da sua projeção ortogonal sobre a hipotenusa e do comprimento da própria hipotenusa, ou seja,

$$b = \sqrt{a\,m}\,. \tag{2.26}$$

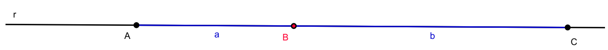
A construção da média geométrica entre $\underline{a}$ e $\underline{b}$, pode ser feita de várias maneiras diferentes. Exibiremos três modos distintos de fazê-la:

1.a construção:

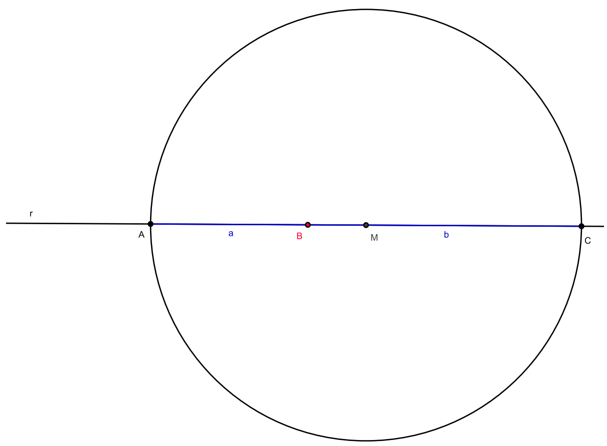
(a) Sobre uma reta, que indicaremos por $\underline{r}$, obtenha três pontos, que denotaremos por $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$, tal modo que

$$AB = a \quad \text{e} \quad BC = b\,,$$

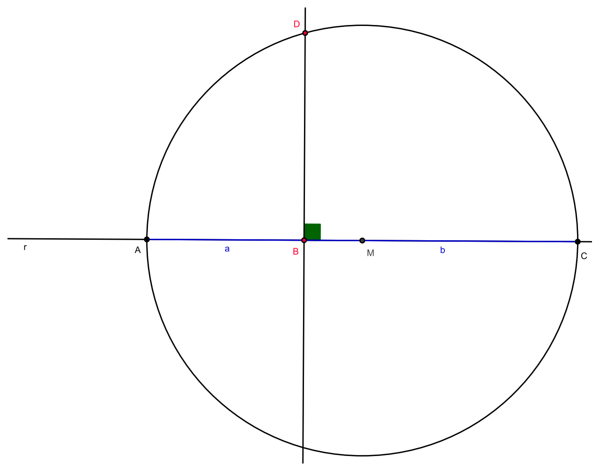
com o ponto $\underline{B}$ pertencente ao segmento $\overline{AC}$ (veja a figura abaixo);



(b) Construa uma semi-circunferência, de centro no ponto médio, que chamaremos de $\underline{M}$, do segmento $\overline{AC}$ e raio igual a $\dfrac{AC}{2}$ (veja a figura abaixo);



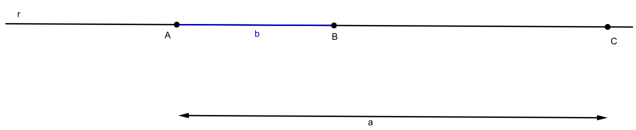
(c) Encontre a reta perpendicular à reta $\underline{r}$, que conténha o ponto $\underline{B}$, que encontrará a circunferência obtida no item (b) em um ponto, que denotaremos por $\underline{D}$ (veja a figura abaixo);



(d) Notemos que

$$BD = \sqrt{a\,b}\,,$$

ou seja, $\underline{BD}$ será a média geométrica de $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (veja a figura abaixo).

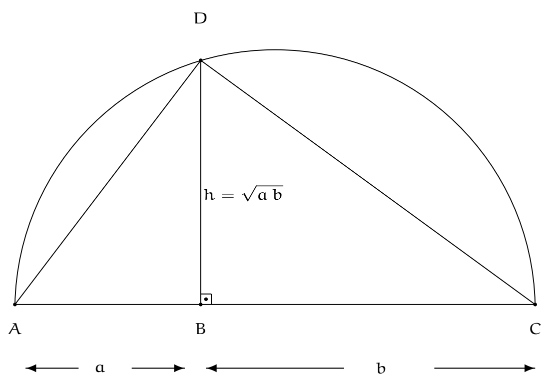


De fato pois, por contrução, o triângulo ΔADC é um triângulo retângulo, no vértice $\underline{D}$.

Logo, do item 2. da Observação (2.5.1), segue que o comprimento da altura do triângulo ΔADC, que chamaremos de $\underline{h}$, relativamente a hipotenusa $\overline{AC}$, será igual a $a\,b$, isto é,

$$BD = h = \sqrt{a\,b}\,,$$

ou seja, $\underline{BD}$ será média geométrica de $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (veja a figura abaixo).



<u>2.a construção:</u>

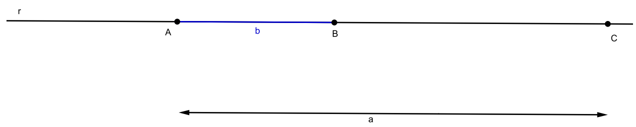
Suponhamos que

$$a > b\,.$$

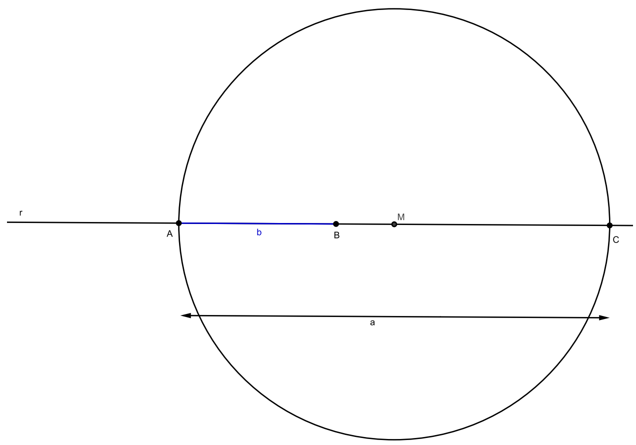
(a) Encontremos sobre uma reta, que denotaremos por $\underline{r}$, três pontos, que chamaremos de $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$, de modo que

$$AC = a\,, \quad AB = b\,,$$

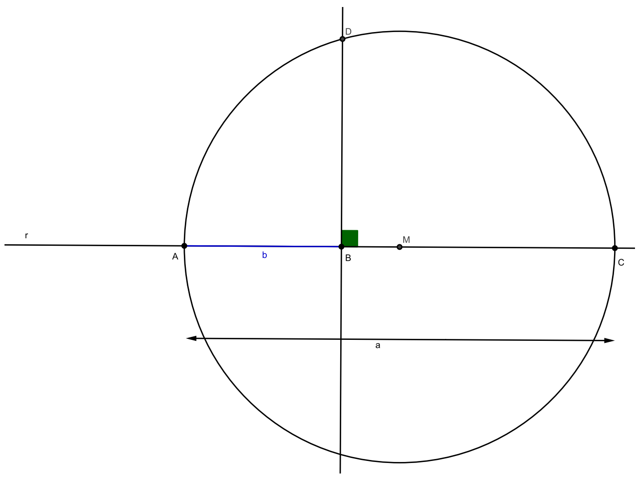
com o ponto $\underline{B}$ pertencente ao segmento $\overline{AC}$ (veja a figura abaixo);



(b) Tracemos uma semi-circunferência, de centro no ponto médio, que denotaremos por $\underline{M}$, do segmento $\overline{AC}$ e raio igula a $\dfrac{AC}{2}$ (veja a figura abaixo);



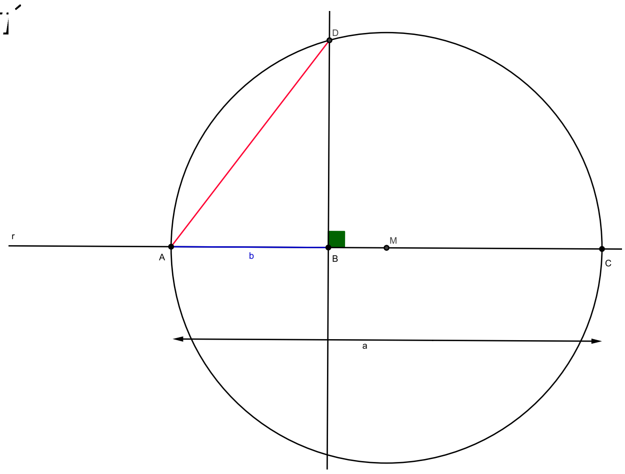
(c) Encontremos a reta perpendicular à reta $\underline{r}$, que contenha o ponto $\underline{B}$, que encontrará a sem-circunferência acima em um ponto, que chamaremos de $\underline{D}$ (veja a figura abaixo);



(d) Com isto teremos que

$$AD = \sqrt{a\,b}\,,$$

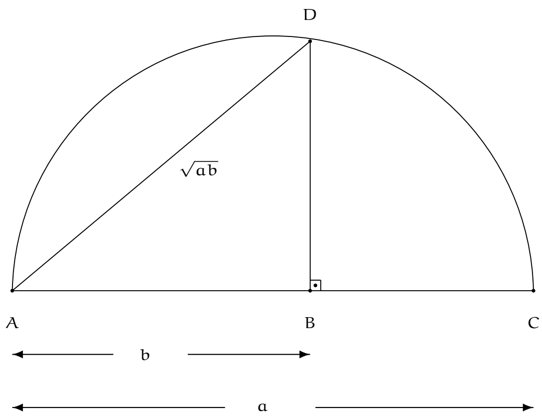
ou seja, a média geométrica entre $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (veja a figura abaixo).



De fato, do item 2. da Observação (2.5.1), teremos que

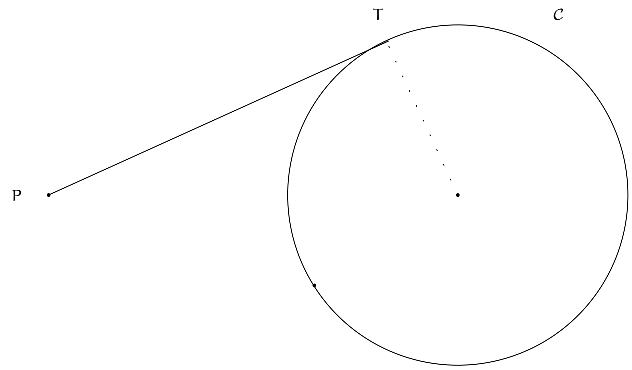
$$\mathrm{AD}^2 = a\,b\,, \quad \text{isto é,} \quad \mathrm{AD} = \sqrt{a\,b}\,,$$

ou seja, $\underline{\mathrm{AD}}$ será média geométrica de $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (veja a figura abaixo).



III. A terceira das construções, utilizará a noção de potência de um ponto relativamente a uma circunferência, que será introduzida a seguir.

Definição 2.5.2 *Dada uma circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}}$ e um ponto, que chamaremos de $\underline{\mathrm{P}}$, exterior a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, definimos a* **potência do ponto $\underline{\mathrm{P}}$, relativamente à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$**, *como sendo o comprimento do segmento $\overline{\mathrm{PT}}$, elevado ao quadrado (isto é, PT^2), onde o ponto $\underline{\mathrm{T}}$ denota um ponto de tangência da reta tangente à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, que contém o ponto $\underline{\mathrm{P}}$ (veja a figura abaixo).*

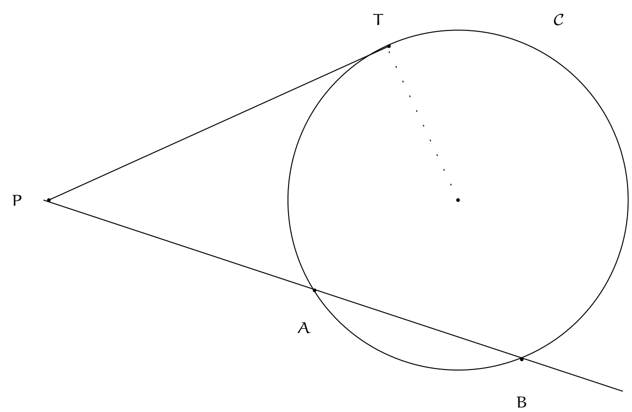


O Teorema abaixo nos dá um outro modo de construir a média geométrica entre dos números positivos, a saber:

Teorema 2.5.1 (Teorema da Secante-Tangente) *Denotemos por* $\underline{\mathrm{P}}$*, um ponto exterior a uma circunferência, que indicaremos por* $\underline{\mathcal{C}}$*,* $\overleftrightarrow{\mathrm{PT}}$ *e* $\overleftrightarrow{\mathrm{PAB}}$ *as retas tangente e secante a circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$*, respectivamente (o ponto* $\underline{\mathrm{T}}$ *é um ponto de tangência da reta* $\overleftrightarrow{\mathrm{PT}}$ *com a circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$*, os pontos* $\underline{\mathrm{A}}$ *e* $\underline{\mathrm{B}}$ *pertencem a circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$ *e sobre a reta secante - veja a figura abaixo).*

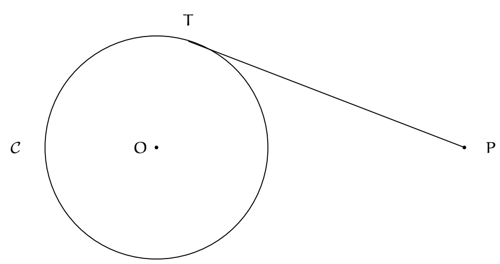
Então

$$\mathrm{PT}^2 = \mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB}\,. \tag{2.27}$$

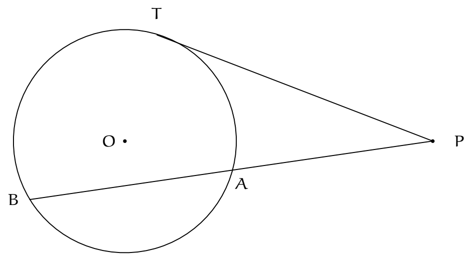


Demonstração:

Suponhamos que a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ tem centro em um ponto, que indicaremos por $\underline{\mathrm{O}}$ e raio $\underline{\mathrm{OT}}$, onde $\underline{\mathrm{T}}$ denota o ponto de tangência da reta que contém o ponto $\underline{\mathrm{P}}$, com a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ (veja a figura abaixo).

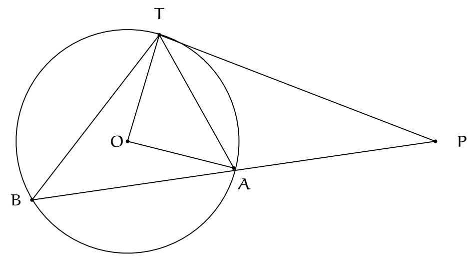


Consideremos um ponto, que indicaremos por $\underline{A}$, pertencente a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ e um outro ponto, que chamaremos de $\underline{B}$, obtido da interseção da reta que contém o segmento $\overline{PA}$ com a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ (veja a figura abaixo).



Com isto, em particular, obtemos os seguintes triângulos (veja a figura abaixo)

$$\Delta PBT \quad \text{e} \quad \Delta PAT\,.$$



Afirmamos que os triângulos ΔPBT e ΔPAT são semelhantes.
De fato, definamos os seguintes ângulos:

$$\alpha \doteq \widehat{PBT}\,, \tag{2.28}$$

$$\beta \doteq \widehat{BTP}\,, \tag{2.29}$$

$$\gamma \doteq \widehat{TPB}\,, \tag{2.30}$$

$$y \doteq \widehat{TAO}\,, \tag{2.31}$$

$$x \doteq \widehat{ATP}\,, \tag{2.32}$$

$$z \doteq \widehat{PAT}\,. \tag{2.33}$$

Como o triângulo ΔOTA é isósceles (pois $OT = OA$ é o raio da circunferência), teremos:

$$\widehat{OTA} = \widehat{TAO} \overset{(2.31)}{=} y \tag{2.34}$$

$$\widehat{AOT} \overset{\text{arco capaz}}{=} 2\,\widehat{ABT} = 2\,\widehat{PBT} \overset{(2.28)}{=} 2\,\alpha\,. \tag{2.35}$$

Assim, do triângulo ΔOTA, segue que

$$\underbrace{\widehat{AOT}}_{\overset{(2.35)}{=}2\,\alpha} + \underbrace{\widehat{OTA} + \widehat{TAO}}_{\underset{\widehat{OTA}=\widehat{TAO}}{\overset{(2.31)}{=}} \, y \; 2y} = \pi\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad 2\,\alpha + 2\,y = \pi\,,$$

$$\text{ou ainda,} \quad \alpha + y = \frac{\pi}{2}\,. \tag{2.36}$$

Observemos também que:

$$\widehat{OTP} = \frac{\pi}{2}, \tag{2.37}$$

$$\text{logo,} \quad x + y \overset{(2.32)\text{ e }(2.31)}{=} \widehat{ATP} + \underbrace{\widehat{TAO}}_{\overset{(2.34)}{=}\widehat{OTA}}$$

$$= \widehat{ATP} + \widehat{OTA}$$

$$= \widehat{OTP} \overset{(2.37)}{=} \frac{\pi}{2}. \tag{2.38}$$

Das equações (2.36) e (2.38) acima, segue que

$$x = \alpha, \tag{2.39}$$

$$\text{que, de (2.28) e (2.32), é equivalente a:} \quad \widehat{ATP} = \widehat{PBT}. \tag{2.40}$$

Por outro lado, do triângulo ΔPBT, segue que

$$\widehat{PBT} + \widehat{BTP} + \widehat{TPB} = \pi$$

$$\text{que, de (2.28), (2.29) e (2.30), é equivalente a:} \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi \tag{2.41}$$

e do triângulo ΔPAT, segue que

$$\underbrace{\widehat{PAT}}_{\overset{(2.33)}{=}z} + \underbrace{\widehat{ATP}}_{\overset{(2.32)}{=}x} + \underbrace{\widehat{TPA}}_{=\widehat{TPB}\overset{(2.33)}{=}\gamma} = \pi,$$

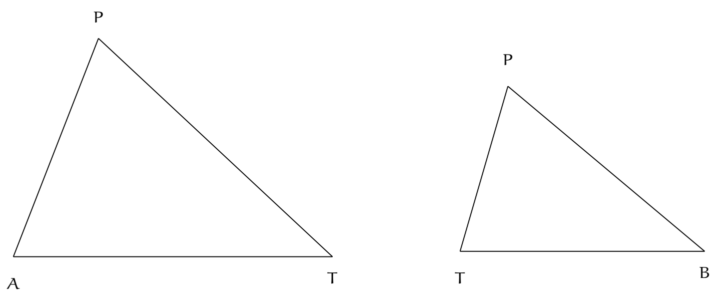
$$\text{ou seja,} \quad z + \underbrace{x}_{\overset{(2.39)}{=}\alpha} + \gamma = \pi$$

$$\text{ou ainda,} \quad z + \alpha + \gamma = \pi. \tag{2.42}$$

Comparando (2.41) com (2.42), segue que

$$z = \beta, \quad \text{ou ainda,} \quad \widehat{PAT} = \widehat{BTP},$$

o que implicará que os triângulos ΔPAT e ΔPBT são semelhantes (caso AAA), como afirmamos.



Logo, pelo Teorema de Tales, elementos correspondentes dos dois triângulos guardam uma mesma proporção, em particular, temos que a seguinte identidade:

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB}, \quad \text{isto é,} \quad PA \cdot PB = PT^2,$$

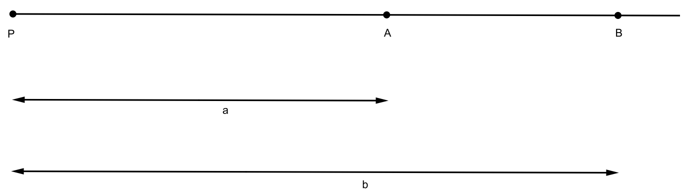
concluindo a demonstração do resultado.

$\square$

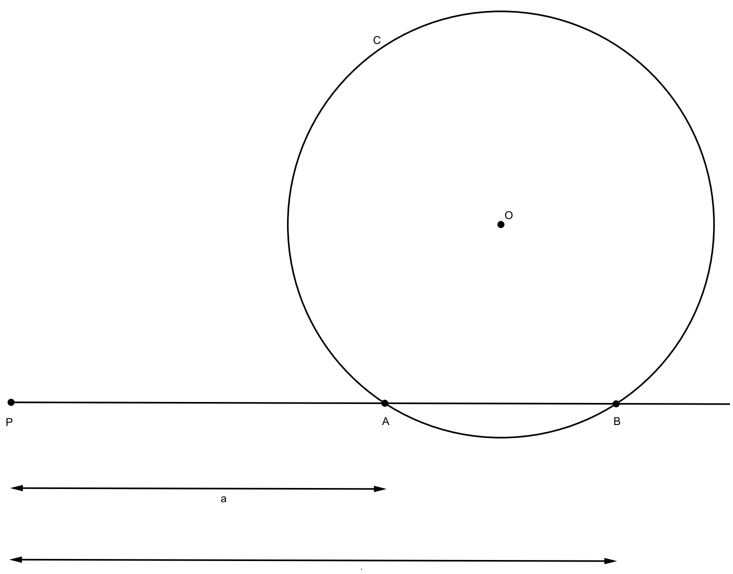
Observação 2.5.2

1. *Para obter, geometricamente, a média geométrica pelo terceiro modo, agiremos da seguinte forma:*

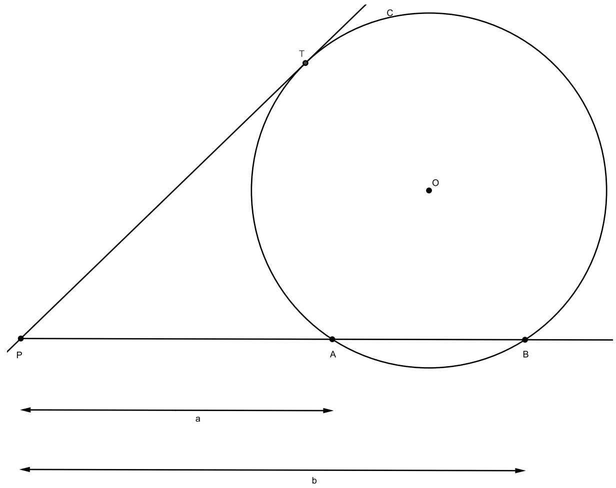
   (a) *Dados $\underline{a}$ e $\underline{b}$, encontremos três pontos, que indicaremos por $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{P}$, pertencentes a uma semi-reta, que extremidade no ponto $\underline{P}$, de modo que (veja a figura abaixo)*
   $$PA = a \quad e \quad PB = b\,. \tag{2.43}$$



   (b) *Encontremos uma circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, que contenha os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$. Notemos que seu centro estará na mediatriz do segmento $\overline{AB}$ (veja a figura abaixo).*



   (c) *Encontremos um ponto, que chamaremos de $\underline{T}$, de tangência da reta tangente à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, que contém o ponto $\underline{P}$ (veja a figura abaixo);*



(d) *Com isto temos que* $\underline{PT}$ *é a média geométrica de* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$.

De fato, do Teorema da Secante-Tangente, segue que

$$PT^2 = PA \cdot PB, \quad \textit{ou seja,} \quad PT = \sqrt{PA \cdot PB} \overset{(2.43)}{=} \sqrt{a\,b}\,,$$

mostrando-se que $\underline{PT}$ *é a média gemométrica entre* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$.

2. *Se, na terceira construção, obtida acima, escolhermos uma outra circunferência, que indicaremos por* $\underline{\mathcal{C}\,'}$, *o ponto de tangência, que chamaremos de* $\underline{T'}$ *irá mudar.*

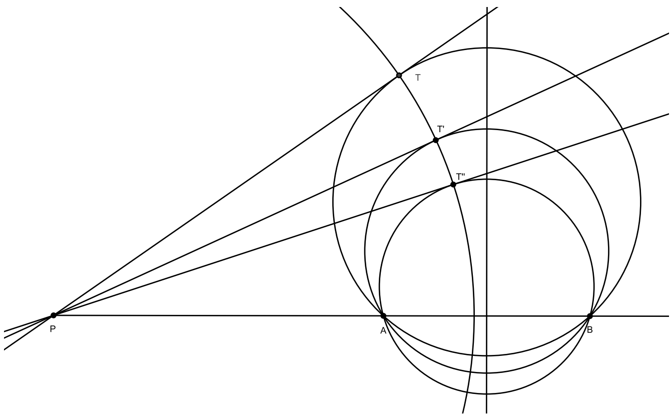
   Porém o comprimento do segmento $\overline{PT'}$ *não se alterará, ou seja,*

$$PT = PT'. \tag{2.44}$$

3. *Na verdade o que mostramos é que o lugar geométrico formado pelos pontos de tangência das retas tangentes, que contenham o ponto* $\underline{P}$, *às circunferências que contenham os pontos* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$, *pertencem a uma circunferência, de centro no ponto* $\underline{P}$ *e raio igual a* $\underline{PT}$, *onde o ponto* $\underline{T}$ *foi escolhido com anteriormente.*

   Isto segue do fato que $\underline{PT}$ *é constante, a saber, (veja a figura abaixo)*

$$PT = \sqrt{a\,b}\,.$$



Exemplo 2.5.1 *Encontrar, geometricamente, um segmento de comprimento $\underline{x}$, de modo que $\underline{x}$ seja uma solução da equação do 2.o grau*

$$x^2 - a\,x + b^2 = 0\,, \tag{2.45}$$

onde $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são números reais, não negativos fixados.

Resolução:

Observemos que, para a equação do 2.o grau (2.45) acima, ter solução real deveremos ter

$$\Delta = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot b^2 > 0 \quad \text{ou seja,} \quad a \geq 2\,b\,. \tag{2.46}$$

Observemos que se

$$a = 2b\,,$$

então, a equação do 2.o grau (2.45) acima, tornar-se-á

$$(x - b)^2 = 0\,,$$

cuja única solução será

$$x = b\,.$$

Logo um segmento $\overline{AB}$ de comprimento $\underline{b}$ será a solução da equação do 2.o grau (2.45).
A seguir consideraremos o caso

$$a > 2\,b\,.$$

1.ª Solução:

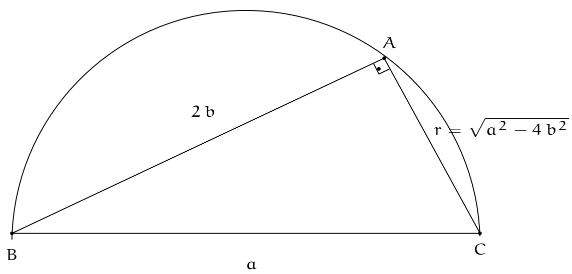
Algebricamente sabemos que

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\,b^2}}{2}\,.$$

Observemos que

$$r \doteq \sqrt{a^2 - 4\,b^2} < \sqrt{a^2} = a \tag{2.47}$$

será o comprimento de um cateto do triângulo retângulo ΔABC, cuja hipotenusa $\overline{AB}$, tem comprimento $\underline{a}$ e o outro cateto $\overline{AC}$ tem comprimento $\underline{2\,b}$ (veja a figura abaixo).



Logo a construção das soluções da equação do 2.o grau (2.45) poderá ser feita e serão

$$x_1 \doteq \frac{a - r}{2} \qquad \text{e} \qquad x_2 \doteq \frac{a + r}{2} \tag{2.48}$$

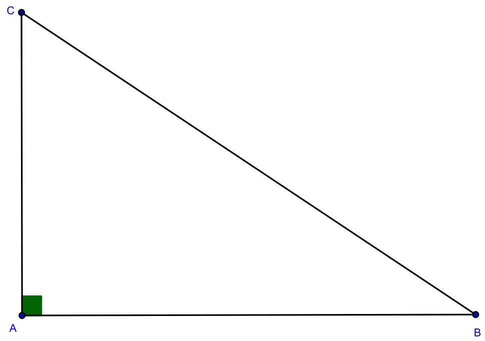
que poderão ser obtidas, geometricamente, de modo simples, como veremos a seguir.

1. Construa um triângulo retângulo ΔABC, com ângulo reto no vértice $\underline{A}$, de tal modo que

$$AB = 2\,b \quad \text{e} \quad BC = a\,. \tag{2.49}$$

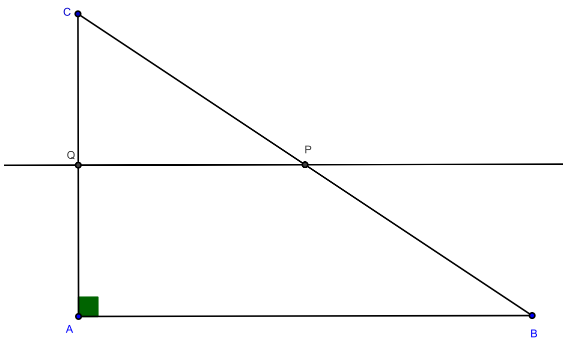
Deste modo, pelo Teorema de Pitágoras, teremos: (veja a figura abaixo)

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{BC^2 - AB^2} \\ &\overset{(2.49)}{=} \sqrt{(2\,b)^2 - a^2} \overset{(2.47)}{=} r\,. \end{aligned} \tag{2.50}$$



2. Pelo ponto médio, que indicaremos por $\underline{P}$, do segmento $\overline{BC}$, tracemos a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, que interceptará o segmento $\overline{AC}$ em um ponto, que denotaremos por $\underline{Q}$ (veja a figura abaixo), ou seja,

$$PC = \frac{BC}{2} \overset{(2.49)}{=} \frac{a}{2}\,. \tag{2.51}$$



Observemos que os triângulos ΔCBA e ΔCPQ são semelhantes (caso AAA).

Logo, pelo Teorema de Tales, os comprimentos de lados correspondentes quardam uma mesma proporção, em particular:

$$\frac{QC}{\underbrace{AC}_{\overset{(2.50)}{=} r}} = \frac{\overbrace{PC}^{\overset{(2.51)}{=} \frac{a}{2}}}{BC},$$

$$\text{ou seja,} \quad \frac{QC}{r} = \frac{\frac{a}{2}}{a},$$

isto é,

$$QC = \frac{r}{2}. \tag{2.52}$$

3. A circunferência, de centro no ponto $\underline{C}$ e raio $\overline{QC}$, encontrará a reta $\overleftrightarrow{BC}$ em dois pontos, que chamaremos de $\underline{M}$ e $\underline{N}$ (veja a figura abaixo).

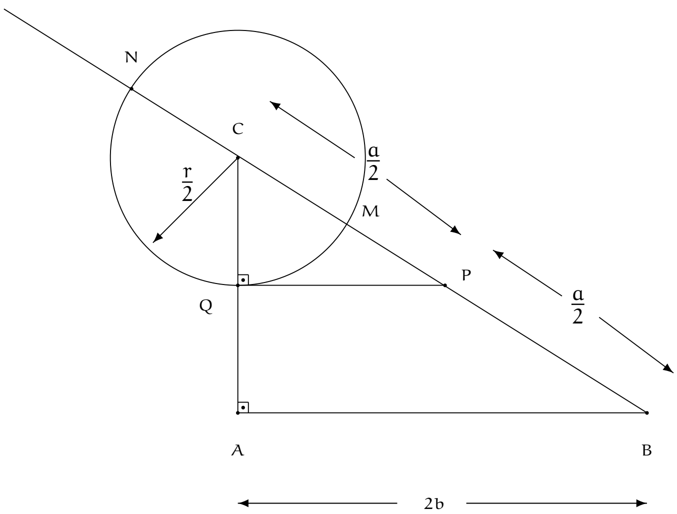
   Com isto teremos:

$$\begin{aligned} x_1 &\doteq PM = PC - \overbrace{MC}^{=QC} \\ &= PC - QC \\ &\overset{(2.51) \text{ e } (2.52)}{=} \frac{a}{2} - \frac{r}{2} \\ &= \frac{a-r}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x_2 &\doteq PN = PC + CN \\ &= PC + QC \\ &\overset{(2.51) \text{ e } (2.52)}{=} \frac{a}{2} + \frac{r}{2} \\ &= \frac{a+r}{2} \end{aligned}$$

serão as raízes da equação do 2.o grau (2.45) (veja a figura abaixo).



2.ª Solução:

Denotemos por $\underline{x_1}$ e $\underline{x_2}$ as soluções da equação do 2.o grau (2.45).

Então deveremos ter que a soma das raízes deverá ser $\underline{a}$, isto é,

$$x_1 + x_2 = a \tag{2.53}$$

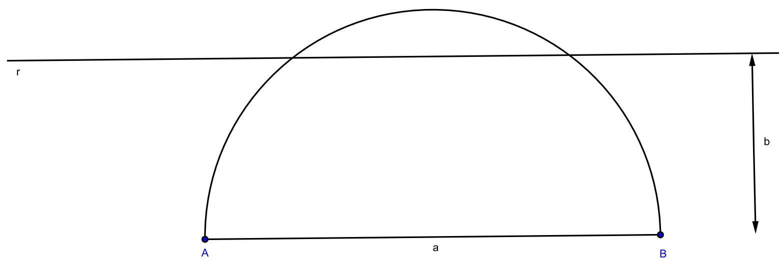
e o produto das raízes deverá ser $\underline{b^2}$, isto é,

$$x_1 \cdot x_2 = b^2\,, \quad \text{ou seja,} \quad \sqrt{x_1 \cdot x_2} = b\,. \tag{2.54}$$

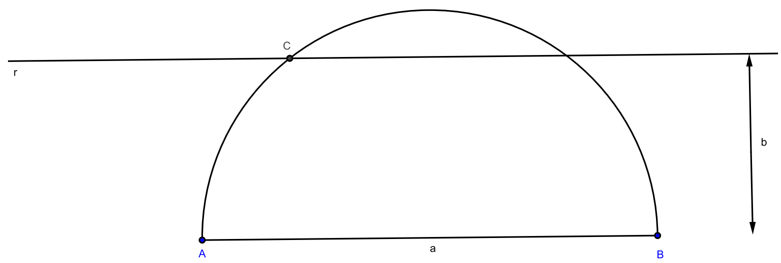
Logo, devemos encontrar, geometricamente, dois segmentos de reta de modo que a soma dos seus comprimentos dos mesmos seja igual a $\underline{a}$ e a média geométrica dos seus comprimentos seja igual a $\underline{b}$.

Para isto temos a seguinte constução:

1. Consideremos uma semi-circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ que tem comprimento $\underline{a}$ e um reta, que indicaremos por $\underline{r}$, paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, que dista $\underline{b}$ da mesma (veja a figura abaixo);



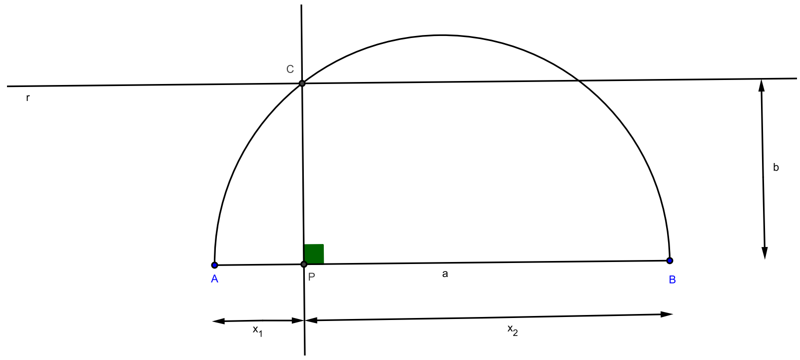
2. A reta$\underline{r}$, obtida no item acima interceptará a semi-circunferência acima em um ponto, que indicaremos por $\underline{C}$ (veja a figura abaixo);



3. A projeção ortogonal do ponto $\underline{C}$, sobre o segmento $\overline{AB}$, nos fornecerá um ponto, que chamaremos de $\underline{P}$, de modo que

$$x_1 \doteq PA \qquad e \qquad x_2 \doteq PB \tag{2.55}$$

serão as soluções da equação do 2.o grau (2.45) (veja a figura abaixo).

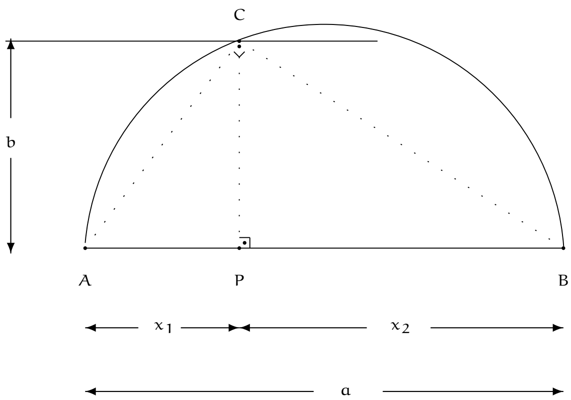


Para mostrar que a afirmação é verdadeira basta observar que o triângulo ΔABC é um triângulo retângulo no vértice $\underline{C}$.

Logo do item 2. da Observação (2.5.1), sabemos que o comprimento da altura $\overline{CP}$, relativa a hipotenusa $\overline{AB}$, (isto é, $CP = b$) satisfaz

$$b^2 = x_1 \cdot x_2 \,,$$

ou seja, obtivemos, geometricamente, as soluções da equação do 2.o grau (2.45) (veja a figura abaixo).



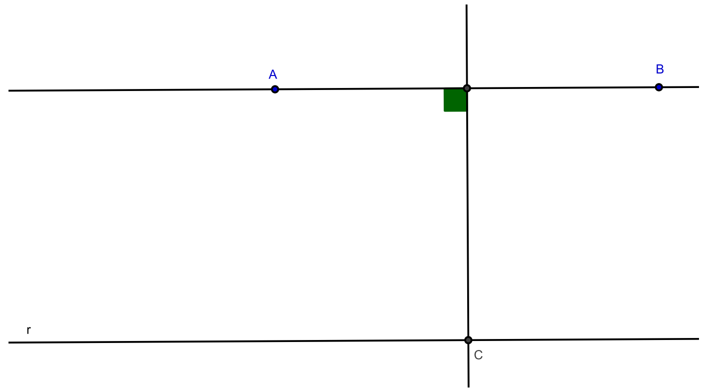
Exemplo 2.5.2 *Dados dois pontos distintos, que indicaremos por $\underline{A}$ e $\underline{B}$, pertencentes a um mesmo semi-plano determinado por uma reta, que chamaremos de $\underline{r}$, construir, geometricamente, uma circunferência, que contenha os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$ e seja tangente à reta $\underline{r}$.*

Resolução:

1.o Caso: a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a reta $\underline{r}$.

Neste caso agiremos da seguinte forma:

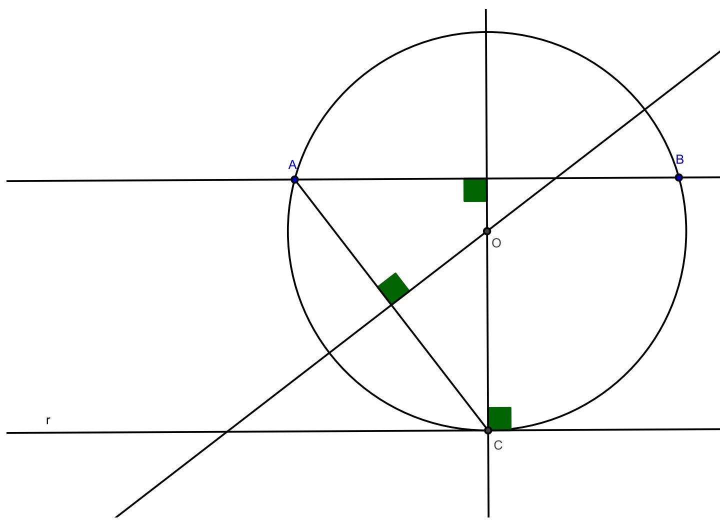
(a) Consideramos a reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$, que interceptará a reta $\underline{r}$ em um ponto, que indicaremos por $\underline{C}$ (veja a figura abaixo).



(b) A circunferência procurada será a que contém os pontos A, B e C.

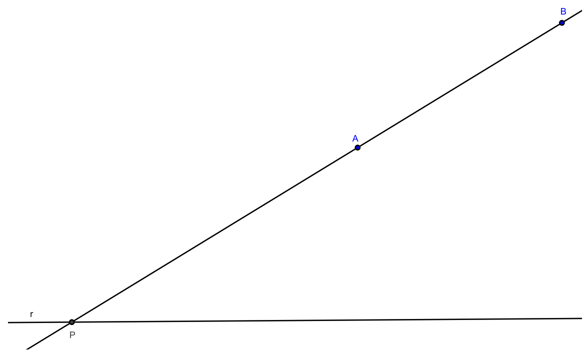
Para traçá-la, bastará encontrar a mediatriz do segmento $\overline{AC}$ e na intersecção da mesma com a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ teremos o centro da circunferência procurada, que denotaremos por O.

O raio será igual a OC ou OA ou OB (veja figura abaixo).

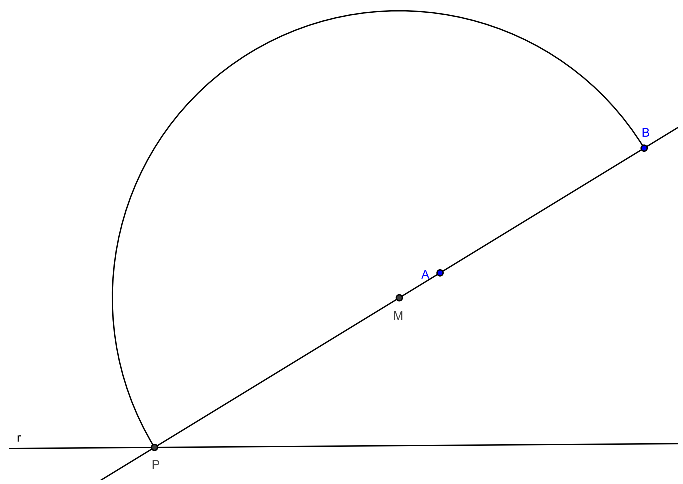


2.o Caso: A reta $\overleftrightarrow{AB}$ não é paralela a reta r (veja a figura abaixo).
Neste caso agiremos da seguinte forma:

(a) Como as retas r e a reta que contém pontos A e B não são paralelas, existirá um ponto, que indicaremos por P, que pertencerá a interceção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com a reta r (veja a figura abaixo).



(b) Consideremos a semi-circunferência de centro no ponto médio, que indicaremos por $\underline{M}$, do segmento $\overline{PB}$ (estamos supondo que $PA < PB$) e raio igual a $\dfrac{PB}{2}$ (veja a figura abaixo).



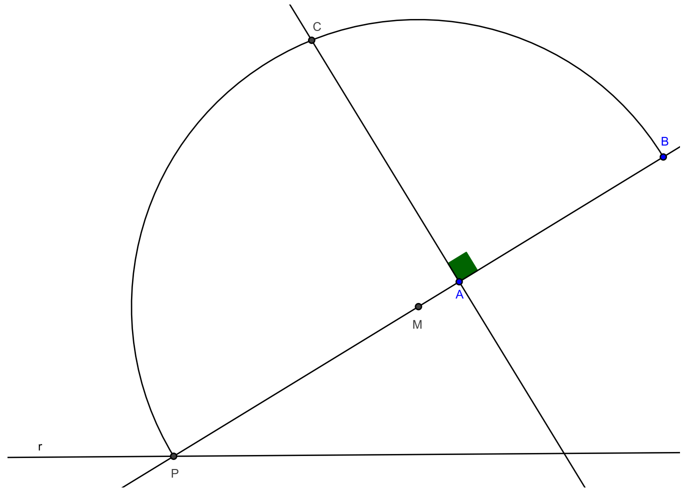
(c) Denotemos por $\underline{C}$ o ponto da intersecção da reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$, que contém o ponto $\underline{A}$, com a semi-circunferência obtida no item (b) acima (veja a figura abaixo).

Do item 2. da Observação (2.5.1), sabemos que

$$PC^2 = PA \cdot PB\,,$$

pois o triângulo ΔPCB é um triângulo retângulo no vértice $\underline{C}$.

Observemos que se denotarmos por $\underline{T}$, o ponto de tangência da circunferência



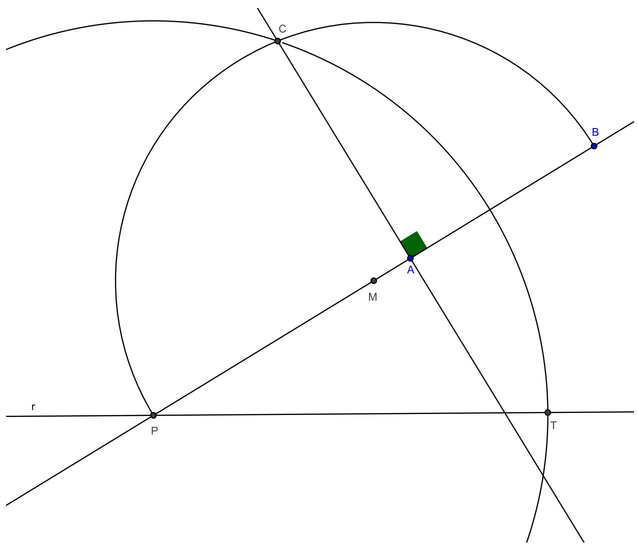
procurada com a reta $\underline{r}$ então, do Teorema da Secante-Tangente, segue que

$$PT^2 = PA \cdot PB,$$

ou seja, $\underline{PT}$ é a média geométrica entre $\underline{PA}$ e $\underline{PB}$, assim,

$$PT = PC\,.$$

(d) A circunferência de centro no ponto $\underline{P}$ e raio igual a PC, interceptará a reta $\underline{r}$ no ponto $\underline{T}$, que pertence ao semi-plano determinado pela reta $\overleftrightarrow{PC}$ que contém o ponto $\underline{A}$ (veja a figura abaixo).

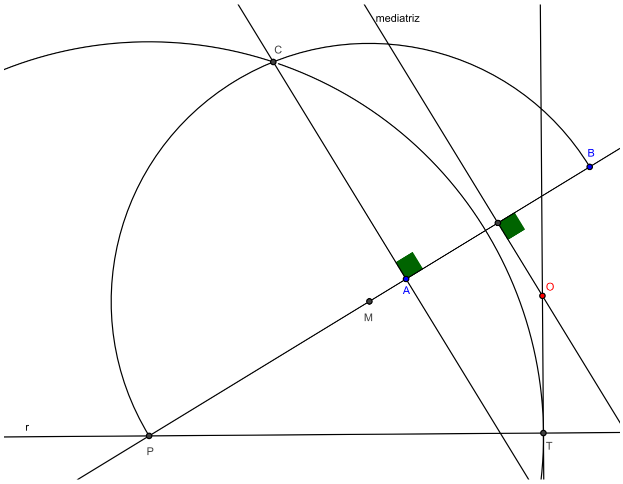


(e) A perpendicular à reta $\underline{r}$, contendo o ponto $\underline{T}$, interceptará a reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$ em ponto, que indicaremos por $\underline{O}$ (veja a figura abaixo).

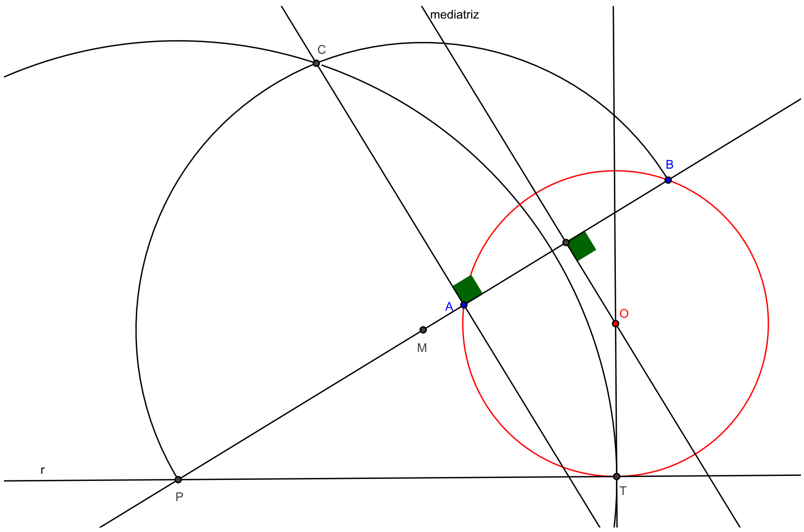
Afirmamos que

$$OT = OA = OB\,.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.



(f) A circunferência procurada terá centro no ponto O e seu raio será igual a OT ou OA ou OB (veja a figura abaixo).

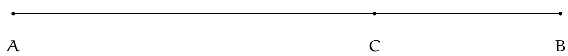


2.6 O Segmento Áureo

Consideremos um ponto, que chamaremos de C, sobre o segmento $\overline{AB}$ (excetuando-se os extremos, isto é, $C \neq A$ e $C \neq B$), de tal modo que a razão entre os comprimentos dos segmentos de menor comprimento pelo comprimento do outro (que tem maior comprimento) seja igual a razão entre o comprimento deste último, pelo de comprimento total.

Para ilustrar, consideremos a relação e a figura abaixo :

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}. \tag{2.56}$$



Definição 2.6.1 *Na situação acima, o segmento* $\overline{AC}$, *será dito* **segmento áureo do segmento $\overline{AB}$**.

Observação 2.6.1

1. *Com isto temos que segmento* $\overline{AC}$ *será segmento áureo do segmento* $\overline{AB}$ *se, e somente se,*

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

ou, equivalentemente, temonados-e

$$AB = a\,, \tag{2.57}$$

se tivermos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} AC^2 &= \overbrace{AB}^{\overset{(2.57)}{=} a} \cdot CB \\ &= a \cdot \overbrace{CB}^{=AB-AC} \\ &= a \cdot (\overbrace{AB}^{\overset{(2.57)}{=} a} - AC) \\ &= a \cdot (a - AC) \\ &= a^2 - a \cdot AC\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$AC^2 + a \cdot AC - a^2 = 0\,, \tag{2.58}$$

que é uma equação do 2.o grau (na variável $\underline{AC}$*), cujas raízes são*

$$x_1 \doteq \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4\,a^2}}{2} < 0$$

e

$$x_2 \doteq \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4\,a^2}}{2} \overset{a>0}{=} a\,\frac{\sqrt{5} - 1}{2} > 0\,.$$

A raiz $x_1 < 0$ *será descartada (não representa um comprimento de um segmento), logo*

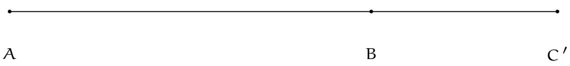
$$AC = a\,\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\,. \tag{2.59}$$

1. *Esse número aparArece em várias situações no desenvolvimento da Matemática, por exemplo, ele é o comprimento do lado de um decágono regular inscrito numa circunferência de raio* $\underline{a}$*.*

   A demonstração disso será deixada como exercício para o leitor.

2. *Suponhamos que um ponto, que indicaremos por* $\underline{C'}$*, pertencente a reta* $\overleftrightarrow{AB}$*, é um ponto exterior ao segmento* $\overline{AB}$*, com a seguinte propriedade (veja a figura abaixo):*

$$\frac{BC'}{AB} = \frac{AB}{AC'}\,. \tag{2.60}$$



Neste caso podemos introduzir a:

Definição 2.6.2 *O segmento* $\overline{AC'}$ *será dito* <u>**segmento áureo externo ao segmento $\overline{AB}$**</u>.

Observação 2.6.2

1. *Notemos que segmento* $\overline{AC'}$ *é segmento áureo externo ao segmento* $\overline{AB}$ *se, e somente se,*
$$\frac{BC'}{AB} = \frac{AB}{AC'},$$
ou, equivalentemente, tomando-se
$$AB = a, \tag{2.61}$$
tivermos:
$$\begin{aligned} AC' \cdot \overbrace{BC'}^{=AC'-AB} &= AB^2 \overset{(2.61)}{=} a^2 \\ \textit{ou ainda,} \quad a^2 &= AC' \cdot (AC' - AB) \\ &\overset{(2.61)}{=} AC' \cdot (AC' - a) \\ &= AC'^2 - a \cdot AC' \end{aligned}$$
ou seja,
$$AC'^2 - a \cdot AC' - a^2 = 0. \tag{2.62}$$
A equação acima é uma equação do 2.o grau (na variável <u>AC'</u>*), cujas raízes são*
$$x_1 \doteq \frac{a - \sqrt{a^2 + 4\,a^2}}{2} = a\,\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$$
e
$$x_2 \doteq \frac{a + \sqrt{a^2 + 4\,a^2}}{2} \overset{a>0}{=} a\,\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0.$$
A raiz $x_1 < 0$ *será descartada (não representa um comprimento de um segmento), logo*
$$AC' = a\,\frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \tag{2.63}$$

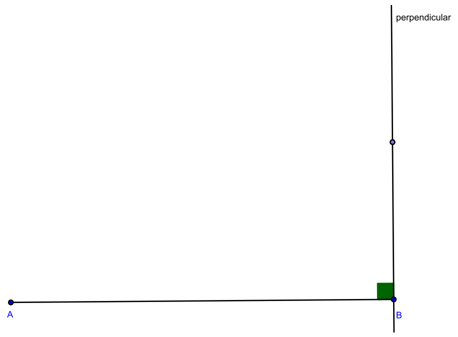
2. *Observemos que,*
$$\begin{aligned} AC \cdot AC' &\overset{(2.60)\, e\, (2.63)}{=} a\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot a\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \\ &= a^2\,\frac{5 - 1}{4} = a^2 \\ &\overset{(2.61)}{=} AB^2, \end{aligned} \tag{2.64}$$
ou seja, a média geométrica entre <u>AC</u> *e* <u>AC'</u> *será* <u>AB</u>.

3. *Dado o segmento* $\overline{AB}$ *daremos, a seguir, um modo de obter, geometricamente, a razão áurea do segmento* $\overline{AB}$.

   (a) *Para isto escolhemos um segmento* $\overline{AB}$, *de modo que*

   $$AB = a \tag{2.65}$$

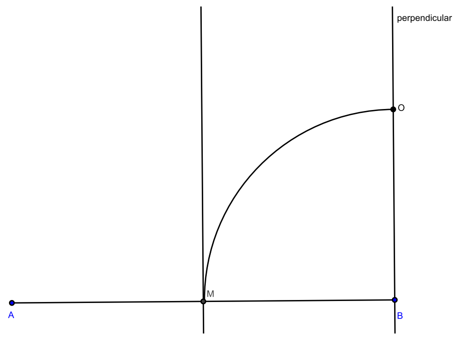
   tracemos a reta perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$ *pelo ponto* $\underline{B}$ *(veja a figura abaixo);*



   (b) *Encontramos um ponto, que denotaremos por* $\underline{O}$, *pertencente à reta perpendicular obtida item acima, de modo que*

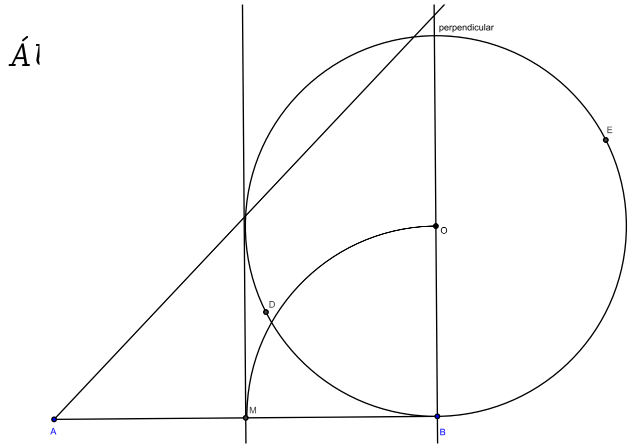
   $$OB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

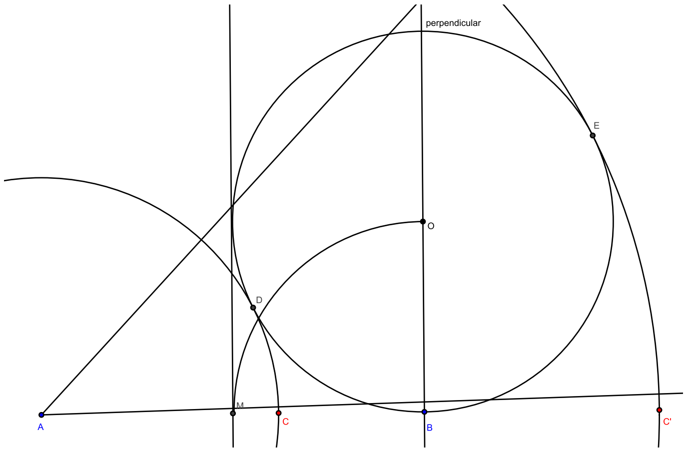
   Observemos que existem dois pontos que tem a mesma propriedade, escolhamos um deles (veja a figura abaixo).



   (c) *A circunferência de centro no ponto* $\underline{O}$ *e raio igual a* $\frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$, *interceptará a reta* $\overleftrightarrow{AO}$ *em dois pontos, que denotaremos por* $\underline{D}$ *e* $\underline{E}$ *(veja a figura abaixo);*

   (d) *As circunferências de centro no ponto* $\underline{A}$ *e raios iguais a* $\underline{AD}$ *e* $\underline{AE}$, *interceptarão a semi-reta que tem extremidade no ponto* $\underline{A}$ *e contém o ponto* $\underline{B}$, *em dois pontos, que chamaremos de* $\underline{C}$ *e* $\underline{C'}$ *(veja a figura abaixo);*





(e) *Com isto teremos:*

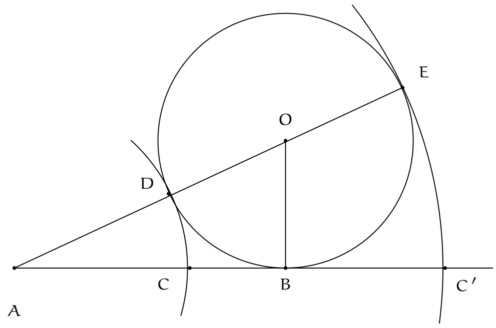
$$AC = a\,\frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad e \quad AC' = a\,\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

isto é, $\overline{AC}$ *e* $\overline{AC'}$ *são segmentos áureo e áureo externos do segmento* $\overline{AB}$*, respectivamente.*

De fato, para mostrar que isto é verdade, basta observar que, do Teorema da Secante-Tangente, temos que

$$\begin{aligned} AB^2 &\overset{(2.65)}{=} a^2 \\ &\overset{\text{teor. da secante-tangente}}{=} \underbrace{AD}_{=AC}\cdot\underbrace{AE}_{=AC'} \\ &= AC\cdot AC', \end{aligned}$$

pois o segmento $\overline{AB}$ *é tangente a circunferência e o segmento* $\overline{AE}$ *é secante à circunferência nos pontos* $\underline{D}$ *e* $\underline{E}$ *e* $AD = AC$*,* $AE = AC'$*, por construção (veja a figura abaixo).*



2.7 Os Números: $\frac{1}{a}$, a^2 e $\sqrt{a}$

Nesta seção trataremos dos problemas relacionados a encontrar, geometricamente, segmentos de comprimentos

$$\frac{1}{a}, \quad a^2 \quad \text{e} \quad \sqrt{a},$$

fixado para $a > 0$.

Para isto precisaremos fixar um segmento com comprimento unitário.

Comecemos pela:

Observação 2.7.1

1. *Sejam* $a > b > 0$.

   Suponhamos que $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$ *são comprimentos de dois segmentos. Então segmentos que tenham comprimento*

   $$\textit{a soma,} \quad a + b, \quad \textit{e a diferença,} \quad a - b$$

   podem ser obtidos, geometricamente, da seguinte maneira:

   Escolhamos sobre uma reta, que indicaremos por $\underline{r}$, *dois pontos, que chamaremos de* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$, *de modo que*

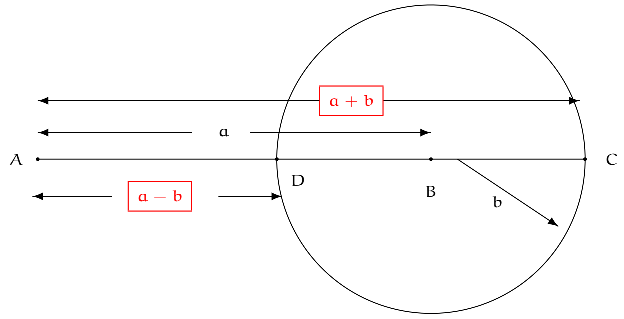
   $$AB = a\,. \tag{2.66}$$

   A circunferência de centro no ponto $\underline{B}$ *e raio* $\underline{b}$, *interceptará a reta* $\underline{r}$ *em dois pontos, que indicaremos por* $\underline{C}$ *e* $\underline{D}$, *sendo o ponto* $\underline{C}$ *pertencente ao exterior do segmento* $\overline{AB}$ *e o ponto* $\underline{D}$ *pertencente ao interior do segmento* $\overline{AB}$ *(veja a figura abaixo).*

   Neste caso termeos

   $$AD = a - b \quad e \quad AC = a + b\,, \tag{2.67}$$

   como queríamos (veja a figura abaixo).



2. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *e* $a > 0$ *(comprimento de um segmento dado), podemos construir, geometricamente, segmentos de comprimentos*

$$n \cdot a, \quad \frac{a}{n} \quad e \quad a\sqrt{n},$$

como vimos nas seções (1.5) *e* (2.4).

3. *Uma questão interessante seria:*

Dado $b > 0$, *como dar um significado geométrico para a expressão* $\dfrac{a}{b}$ *?*

Observemos que como estabelecemos um segmento como sendo a unidade de medida do comprimento (isto é, associamos a esse segmento o número real $\underline{1}$, *que será seu comprimento) a expressão* $\dfrac{a}{b}$ *poderá ser representada, geometricamente, por um segmento, ou seja, poderemos construir um segmento cujo comprimento seja* $\dfrac{a}{b}$.

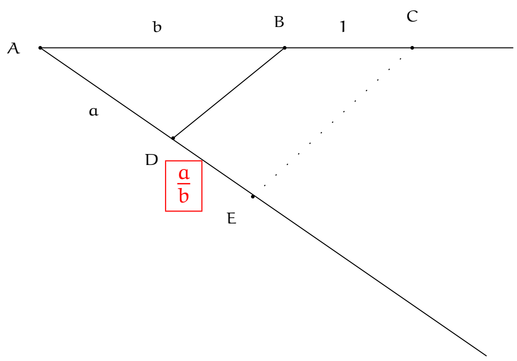
De fato, se definirmos

$$x \doteq \frac{a}{b}$$

poderemos reescrever a identidade acima da seguinte maneira:

$$x = \frac{a \cdot 1}{b}, \qquad ou\ ainda, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{x},$$

e assim $\underline{x}$ *será a quarta proporcional entre os segmentos de comprimento* $\underline{b}$, $\underline{a}$ *e o segmento unitário (veja a figura abaixo).*



$AB = b$, $BC = 1$, $AD = a$ *então*, $DE = \dfrac{a}{b}$

Devido a isso, podemos introduzir a:

Definição 2.7.1 *Na situação do item 3. da Observação acima, estando estabelecido um segmento unitário, diremos que a expressão*

$$x = \frac{a}{b} \tag{2.68}$$

é **construtível**.

Observação 2.7.2

1. *Podemos utilizar as ideias acima para fazer mesmo ocorre com as expressões do tipo:*
$$\frac{1}{a}, \quad a^2 \quad e \quad \sqrt{a},$$
para representar segmentos com os respectivos comprimentos acima, ou seja, também são **construtíveis**.

2. *A seguir daremos uma construção alternativa de um segmento de comprimento* $\frac{1}{a}$.
Lembremos que um modo de obtê-lo seria tomando-se
$$a = 1 \quad e \quad b = a$$
no item 3. da Observação acima.
Um outro modo seria:

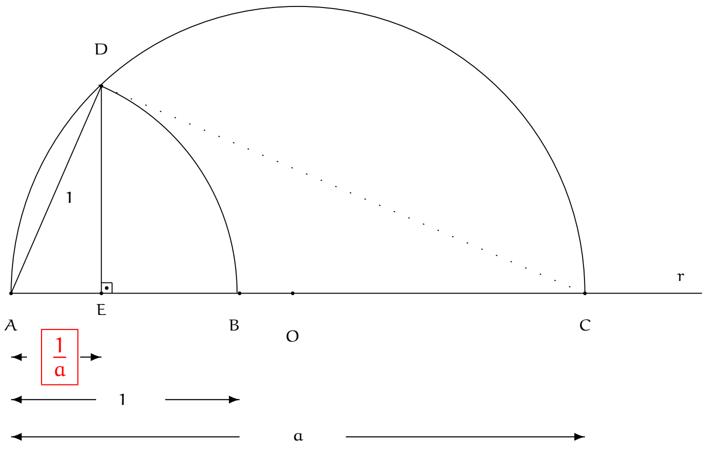
   (a) *Denotemos por* $\underline{A}$ *e* $\underline{C}$, *dois pontos sobre uma reta, que chamaremos de* $\underline{r}$, *de modo que (veja a figura abaixo)*
$$AC = a. \tag{2.69}$$

   (b) *Encontremos o ponto médio, que chamaremos de* $\underline{O}$, *do segmento* $\overline{AC}$ *e tracemos a semi-circunferência, que indicaremos por* $\underline{\mathcal{C}}$, *de centro no ponto* $\underline{O}$ *e raio igual a* $OA = OC$ *(veja a figura abaixo).*

   (c) *Tracemos a circunferência de centro no ponto* $\underline{A}$ *e raio igual a* $\underline{1}$, *que interceptará a semi-circunferência* $\mathcal{C}$ *do item acima, em um ponto, que chamaremos de* $\underline{D}$ *e à reta* $\underline{r}$ *em ponto, que denotaremos por* $\underline{B}$ *(veja a figura abaixo);*

   (d) *A reta perpendicular a reta* $\underline{r}$, *que contém o ponto* $\underline{D}$ *interceptará a reta* $\underline{r}$ *em um ponto, que indicaremos por* $\underline{E}$ *(veja a figura abaixo);*

   (e) *Com isto temos que o (veja a a figura abaixo)*
$$AE = \frac{1}{a}.$$



$\boxed{AB = AD = 1\,, AC = a \quad \textit{logo},\ AE = \frac{1}{a}}$

Para mostrar a afirmação acima, observamos que o triângulo ΔADC *é um triângulop retângulo no vértice* $\underline{D}$.

Logo, do item 2. da Observação (2.5.1), teremos que

$$\underbrace{AD}_{=1}^{2} = \underbrace{AC}_{=a} \cdot AE\,, \qquad \textit{ou seja,} \qquad 1 = a \cdot AE\,,$$

que implicará

$$AE = \frac{1}{a}\,,$$

como queríamos demonstrar.

3. *Construção de um segmento de comprimento* $\underline{a^2}$*:*

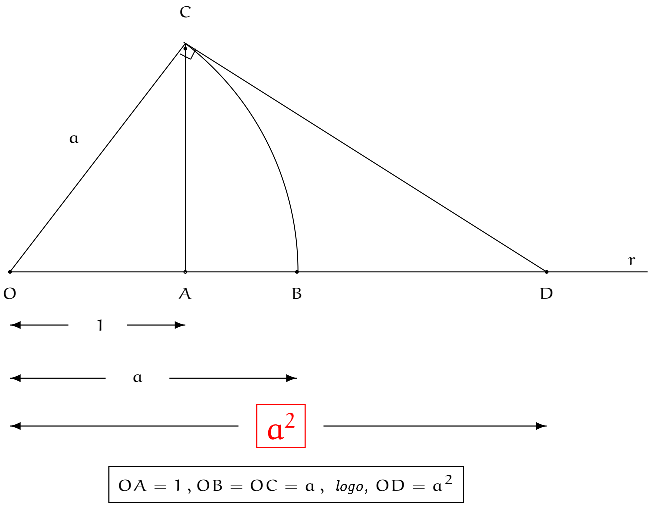
   (a) *Denotemos por* $\underline{O}$ *e* $\underline{A}$*, dois pontos sobre uma reta, que chamaremos de* $\underline{r}$*, tais que*
   $$OA = 1\,. \tag{2.70}$$

   (b) *A semi-circunferência de centro no ponto* $\underline{O}$ *e raio igual a* $\underline{a}$*, interceptará a reta perpendicular à reta* $\underline{r}$*, que contém o ponto* $\underline{A}$*, em um ponto, que chamaremos de* $\underline{C}$ *e a reta* $\underline{r}$ *em um ponto, que denotaremos por* $\underline{B}$ *(veja a figura abaixo), em particular, teremos*
   $$OC = a\,. \tag{2.71}$$

   (c) *A reta perpendicular à reta* $\overleftrightarrow{OC}$*, que contém o ponto* $\underline{C}$*, interceptará a reta* $\underline{r}$ *em um ponto, que denotaremos por* $\underline{D}$ *(veja a figura abaixo).*

(d) *Com isto temos que (veja a figura abaixo)*

$$OD = a^2 \,. \tag{2.72}$$



Para mostrar a afirmação acima observamos que o triângulo ΔOCD *é um triângulo retângulo no vértice* $\underline{C}$.

Logo, do item 2. da Observação (2.5.1), teremos

$$\underbrace{OC}_{\overset{(2.72)}{=} a}{}^2 = \underbrace{OA}_{\overset{(2.70)}{=} 1} \cdot OD \,, \qquad \textit{ou seja,} \quad a^2 = OD \,,$$

como queríamos demonstar.

4. *Construção de um segmento de comprimento* $\sqrt{a}$*:*

   (a) *Denotemos por* $\underline{O}$, $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$, *três pontos sobre uma reta, que indicaremos por* $\underline{r}$, *de modo que*

   $$OA = 1 \,, \quad OB = a \,, \tag{2.73}$$

   com o ponto $\underline{A}$ *pertencente ao segmento* $\overline{OB}$ *(veja a figura abaixo).*

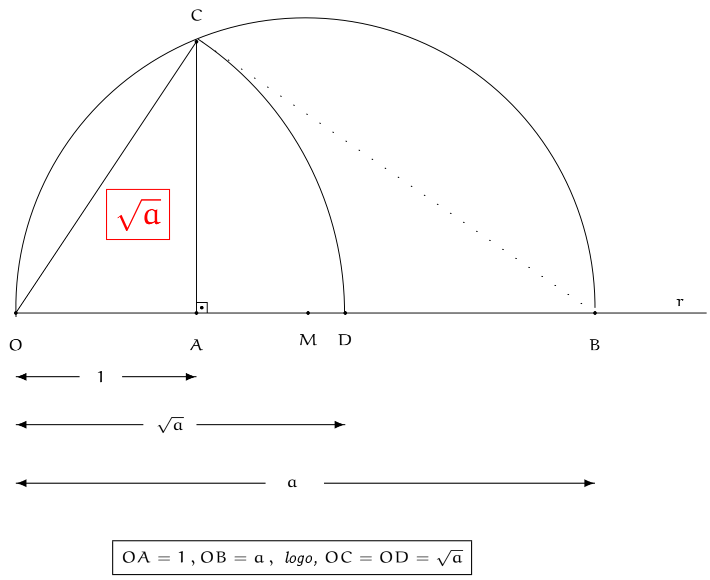
   (b) *Tracemos uma semi-circunferência, que indicaremos por* $\underline{\mathcal{C}}$, *de centro no ponto, que chamaremos de* $\underline{M}$, *ponto médio do segmento* $\overline{OB}$, *e raio igual a* $OM = MB$ *(veja a figura abaixo).*

   (c) *A reta perpendicular à reta* $\underline{r}$, *que contém o ponto* $\underline{A}$, *interceptará a semi-circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$, *obtida no item acima, em um ponto, que denotaremos por* $\underline{C}$ *(veja a figura abaixo).*

   (d) *A circunferência de centro no ponto* $\underline{O}$ *e raio igual a* $\underline{OC}$, *encontrará o segmento* $\overline{OB}$ *em um ponto, que chamaremos de* $\underline{D}$ *(veja a figura abaixo).*

(e) Com isto temos que o (veja figura abaixo)

$$OD = \sqrt{a}\,. \tag{2.74}$$



Para mostrar que isto realmente ocorrerá, observamos que o triângulo ΔOCB é um triângulo retângulo no vértice $\underline{C}$.

Logo, do item 2. da Observação (2.5.1), teremos

$$OC^2 = \underbrace{OA}_{\overset{(2.74)}{=}1} \cdot \underbrace{OB}_{\overset{(2.74)}{=}a} = a\,, \qquad \textit{ou seja,} \quad OD = OC = \sqrt{a}\,,$$

como queríamos demonstrar.

2.8 Exercícios

Para os exercícios que seguem vamos supor que esteja fixa uma unidade de comprimento, ou seja, um segmento cujo comprimento é igual a $\underline{1}$.

Exercício 2.8.1 *Construir um segmento, cujo comprimento é dado por*

$$x \doteq \frac{a\,b\,c}{d\,e}\,, \tag{2.75}$$

onde $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, $\underline{e}$ são comprimentos de segmentos dados ($x \neq 0$).

Resolução:

Observemos que

$$x = \frac{a\,b\,c}{d\,e} \quad \text{se, e somente se,} \quad \frac{d\,e}{a\,b} = \frac{c}{x}, \tag{2.76}$$

ou seja, $\underline{x}$ será a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{d\,e}$, $\underline{a\,b}$, $\underline{c}$.

Portanto, para resolver o problema, basta construir segmentos de comprimentos

$$y \doteq a\,b \quad \text{e} \quad z \doteq d\,e\,. \tag{2.77}$$

Observemos que isto é equivalente a constuir segmentos de comprimentos $\underline{b}$, $\underline{a}$, $\underline{y}$ e $\underline{e}$, $\underline{d}$, $\underline{z}$, de modo que

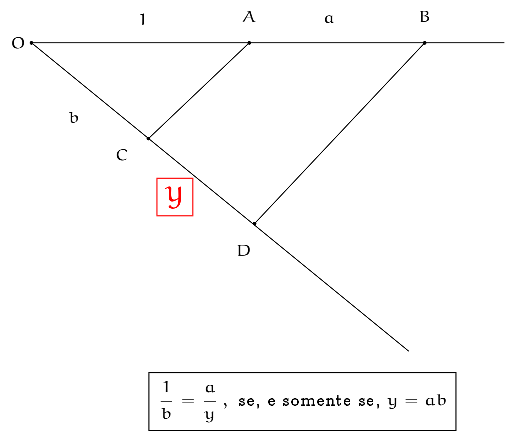
$$\frac{1}{b} = \frac{a}{y} \quad \text{e} \quad \frac{1}{e} = \frac{d}{z}, \tag{2.78}$$

respectivamente, ou seja, $\underline{y}$ e $\underline{z}$ deverão ser as quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{1}$, $\underline{b}$, $\underline{a}$ e $\underline{1}$, $\underline{e}$, $\underline{d}$, respectivamente.

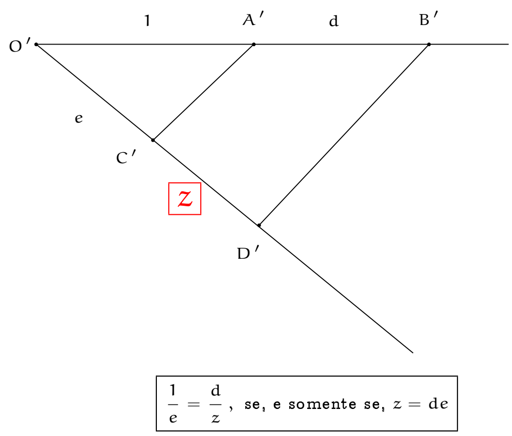
Deste modo podemos construir segmentos de comprimentos $\underline{y}$ e $\underline{z}$ e, com estes, construirmos um segmento de comprimento $\underline{x}$.

Vamos agora obter, geometricamente, um segmento de comprimento $\underline{x}$.

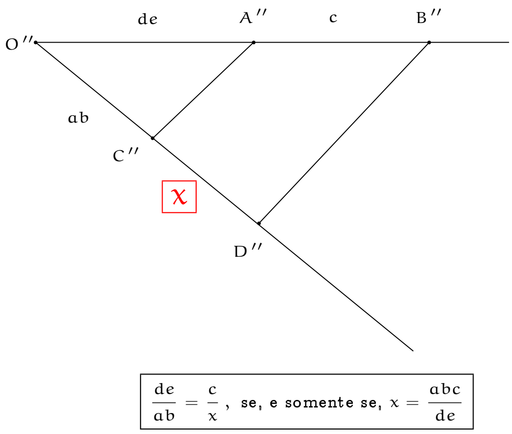
1. Obtenhamos um segmento de comprimento $\underline{y}$, via (2.78), ou seja, a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{1}$, $\underline{b}$,$\underline{a}$ (veja a figura abaixo):



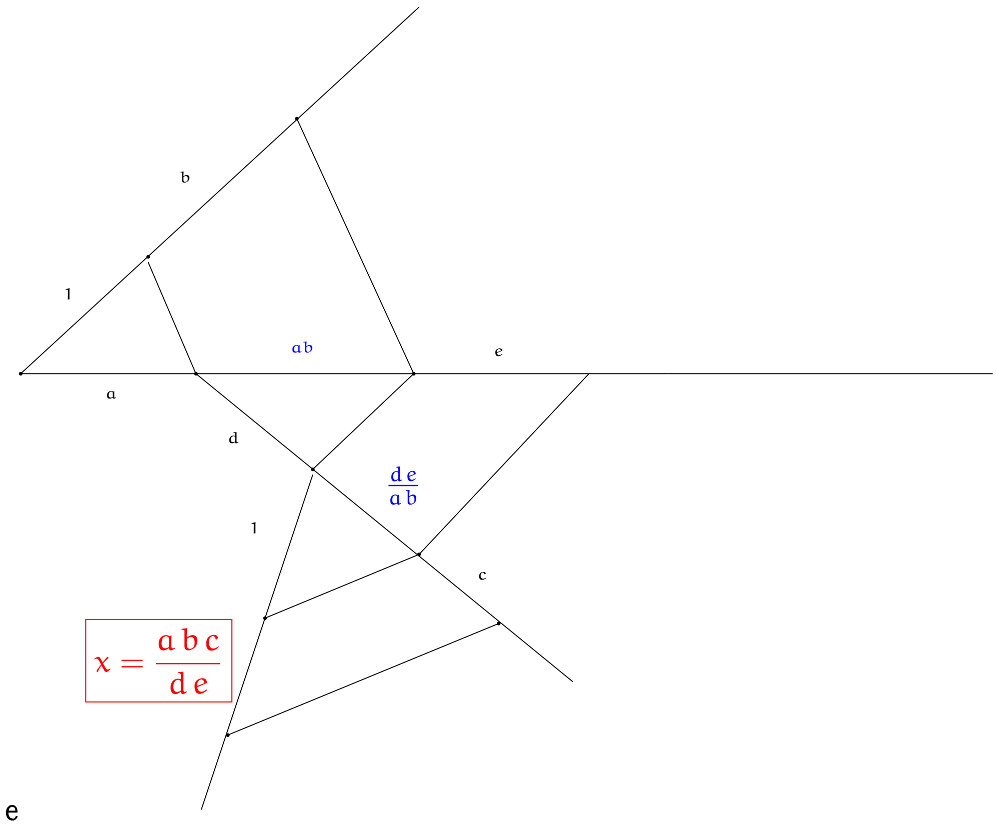
2. De modo semelhante obtemos um segmento de comprimento $\underline{z}$, via (??), ou seja, a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{1}$, $\underline{e}$, $\underline{d}$ (veja a figura abaixo).



3. Com os comprimentos $\underline{y}$ e $\underline{z}$, dados por (2.78), podemos obter $\underline{x}$, via (2.76), ou seja, a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{d\,e}$, $\underline{a\,b}$, $\underline{c}$ (veja a figura abaixo).



Um outro modo de obtermos, geometricamente, um segmento de comprimento $\underline{x}$ é dado pela figura abaixo:



Exercício 2.8.2 *Construir um segmento cujo comprimento é igual a*

$$x \doteq \sqrt{a^2 + 3\,b^2}\,, \tag{2.79}$$

onde $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$ *são comprimentos de segmentos dados.*

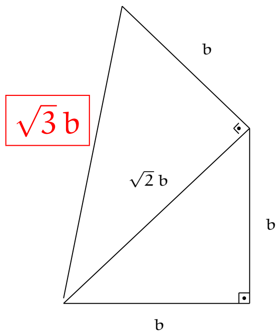
Resolução:

Observemos que

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a^2 + 3\,b^2} \\ &= \sqrt{a^2 + \left(\sqrt{3}\,b\right)^2}. \end{aligned} \tag{2.80}$$

Notemos que sabermos construir um segmento cujo comprimento é igual a $\sqrt{3}\,b$, poderemos construir $\underline{x}$ da seguinte forma:

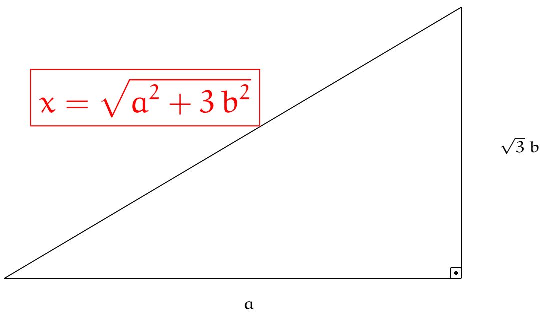
1. Para a construção de um segmento cujo comprimento é igual a $\sqrt{3}\,b$, temos a figura abaixo:



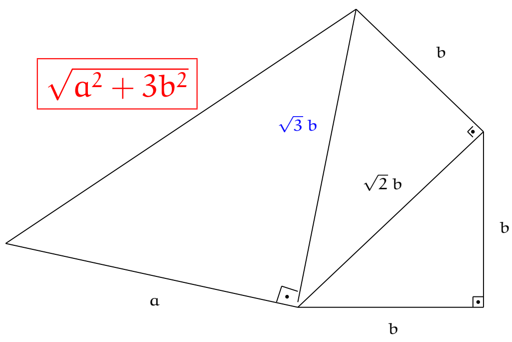
2. Para obter um segmento cujo comprimento é igual a $\underline{x}$, isto é,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a^2 + \left(\sqrt{3}\,b\right)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + c^2}, \end{aligned}$$

onde $c = \sqrt{3}\,b$ foi obtido no item 1. acima, agiremos da seguinte forma:



Ou de maneira direta temos, geometricamente:



Exercício 2.8.3 *Construir um segmento de comprimento igual a*

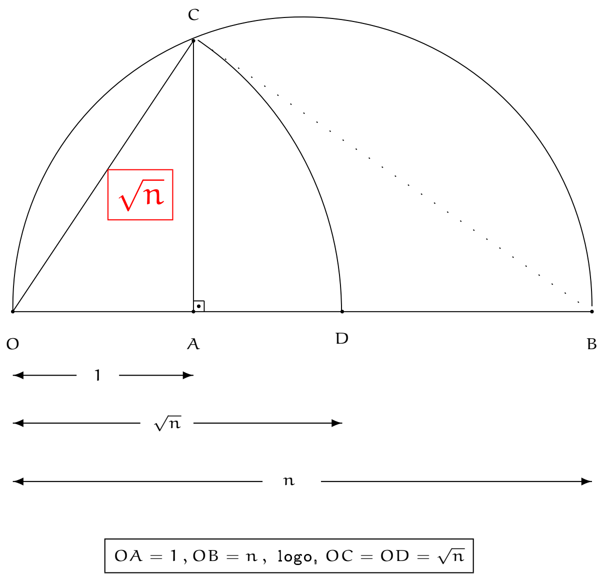
$$x \doteq \frac{a}{\sqrt{n}},$$

onde $\underline{a}$ *é o comprimento de um segmento dado e* $n \in \mathbb{N}$.

Resolução:

Uma possibilidade de obtermos, geometricamente, um segmento cujo comprimento é igual a $\underline{x}$, é a seguinte:

1. Obtenhamos, geometricamente,, um segmento cujo comprimento é igual a $\sqrt{n}$ (como na Observação (2.7.2) item 4.):

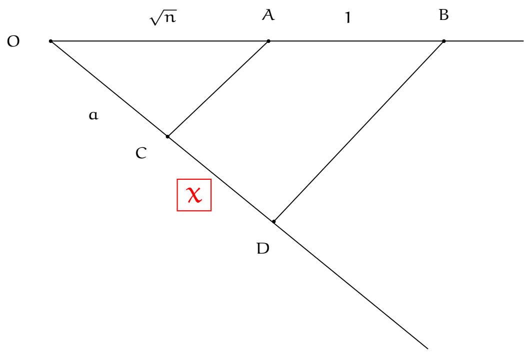


2. Observemos que

$$x = \frac{a}{\sqrt{n}}, \qquad \text{se, e somente se,} \qquad \frac{\sqrt{n}}{a} = \frac{1}{x}, \tag{2.81}$$

ou seja, $\underline{x}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{\sqrt{n}}$, $\underline{a}$, $\underline{1}$.

Logo podemos obtê-lo geometricamente, como na figura abaixo:



$$\boxed{\frac{\sqrt{n}}{a} = \frac{1}{x}\,, \text{ se, e somente se, } x = \frac{a}{\sqrt{n}}}$$

Exercício 2.8.4 *Construir um segmento com comprimento* $\sqrt{5.8}$ *centímetros.*

<u>**Resolução:**</u>

1. Observemos que

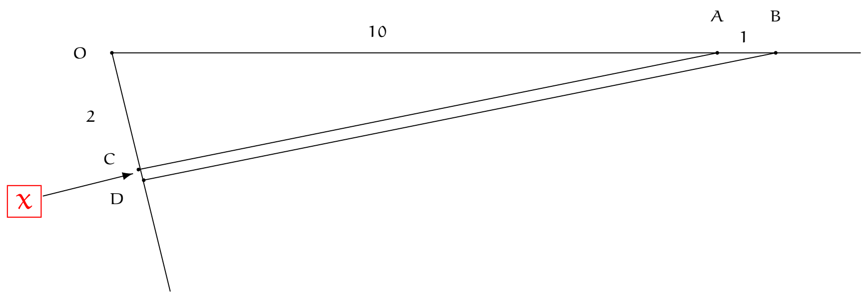
$$5.8 = 6 - 0.2\,. \tag{2.82}$$

2. Para obter um segmento cujo comprimento é igual a $0,2\,\text{cm}$, podemos agir da seguinte forma:

   Observemos que

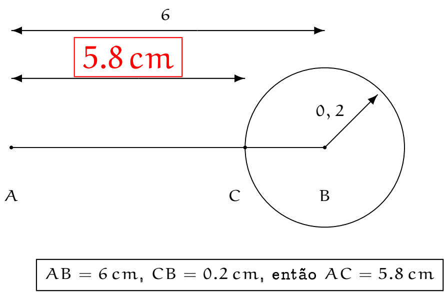
$$x = 0.2 = \frac{2}{10} \qquad \text{se, e somente se,} \qquad \frac{10}{2} = \frac{1}{x}\,, \tag{2.83}$$

   isto é, $\underline{x}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{10}$, $\underline{2}$, $\underline{1}$, que pode ser obtida, geometricamente, da seguinte forma:

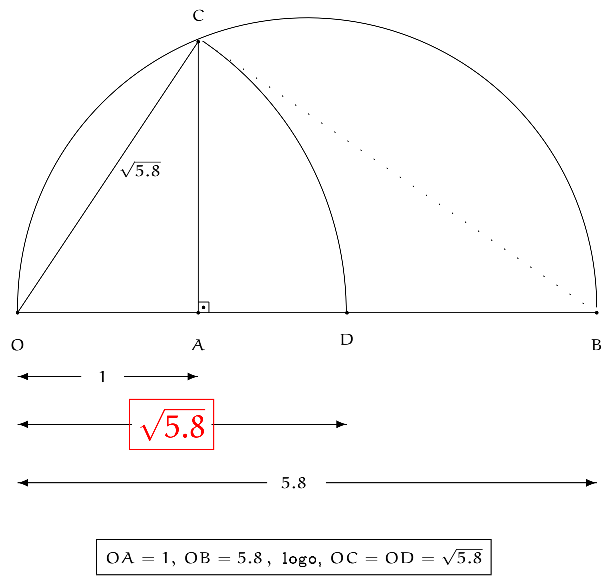


$$\boxed{\frac{10}{2} = \frac{1}{x}\,, \text{ logo, } x = \frac{2}{10}}$$

3. Tendo um segmento cujo comprimento é igual a $x = 0.2\,\text{cm}$ podemos, geometricamente, obter um segmento de comprimento $5.8\,\text{cm}$, da seguinte forma:



4. Sabendo construir um segmento cujo comprimento é igual a 5.8 cm, podemos construir um outro segmento cujo comprimento é igual a $\sqrt{5.8}$ cm, como na Observação (2.7.2) item 4. (veja a a figura abaixo).



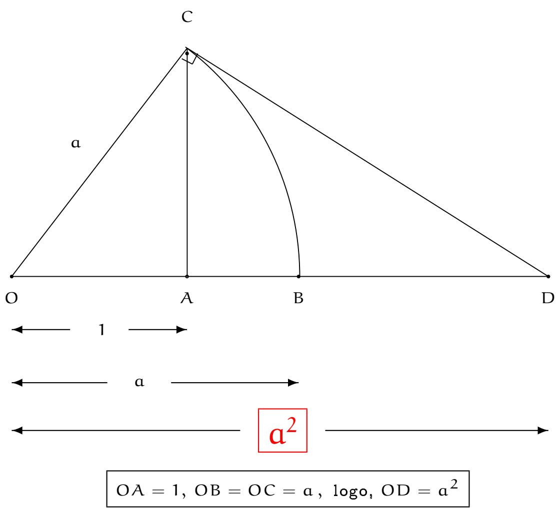
Exercício 2.8.5 *Construir um segmento cujo comprimento é igual a*

$$x \doteq \frac{a^2}{b}, \tag{2.84}$$

onde $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

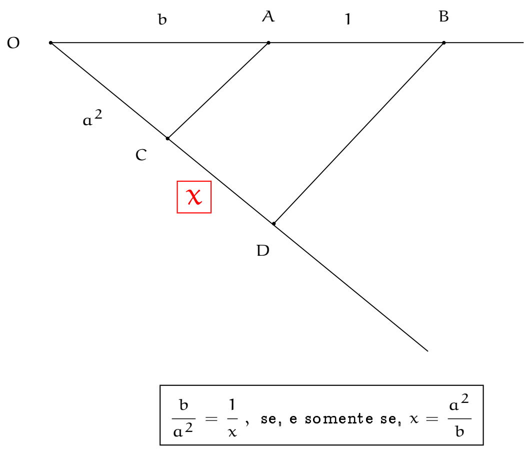
1. Primeiramente construimos um segmento cujo comprimento é igual a $\underline{a^2}$, obtido na Observação (2.7.2) item 3. (veja a figura abaixo):



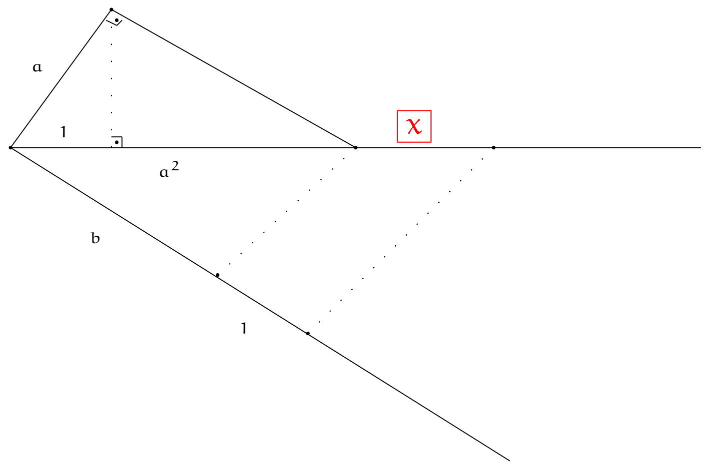
2. Observemos que

$$x = \frac{a^2}{b} \quad \text{se, e somente se,} \quad \frac{b}{a^2} = \frac{1}{x}\,,$$

ou seja, $\underline{x}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{b}$, $\underline{a^2}$, $\underline{1}$, assim podemos executar a seguinte construção:



Podemos obter um segmento de comprimento $x = \dfrac{a^2}{b}$, em uma única figura, podemos agir da seguinte forma:



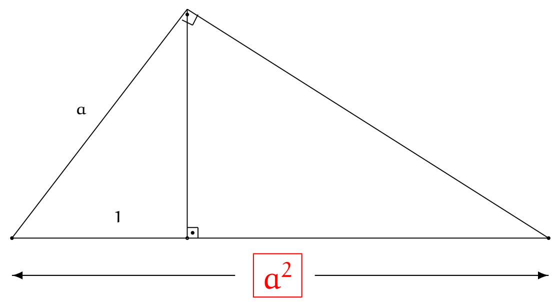
Exercício 2.8.6 *Construir um segmento de comprimento cujo comprimento é igual a*

$$x \doteq \frac{a^2 + bc}{d},$$

onde $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ e $\underline{d}$ são comprimentos de segmentos dados.

Resolução:

1. Construimos um segmento de comprimento $\underline{a^2}$, como no Exercício acima (veja a figura abaixo):



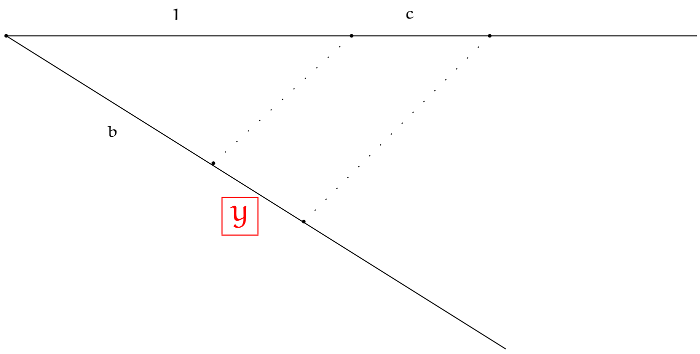
2. Para construir um segmento de comprimento cujo comprimento é igual a

$$y \doteq b\,c\,,$$

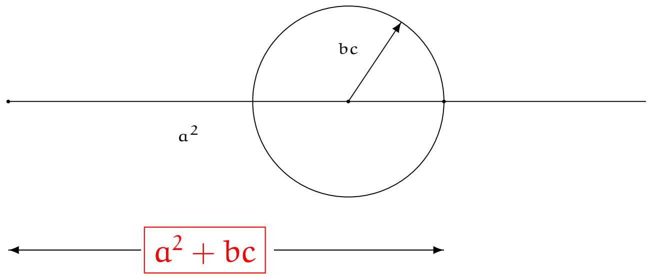
basta observarmos que esta igualdade é equivalente a

$$\frac{1}{b} = \frac{c}{y},$$

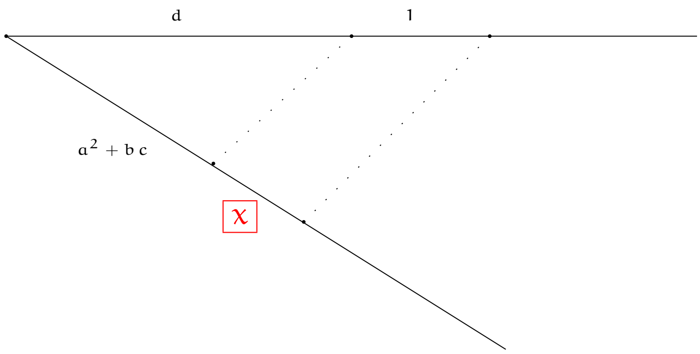
ou seja, $\underline{y}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{1}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, assim proceder a seguinte construção:



3. Podemos agora obter um segmento cujo comprimento é igual a $\underline{a^2 + bc}$, por meio da seguinte construção:



4. Finalmente podemos construir
$$x = \frac{a^2 + b\,c}{d}$$
escrevendo a igualdade assim da seguinte forma:
$$\frac{d}{a^2 + bc} = \frac{1}{x},$$
ou seja, $\underline{x}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{d}$, $\underline{a^2 + bc}$, $\underline{1}$ e com isto temos a seguinte construção:



Exercício 2.8.7 *Construir um segmento cujo comprimento é igual a*
$$x \doteq \frac{a^3 + a^2\,b}{a^2 + b^2},$$
onde $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são comprimentos de segmentos dados.

Resolução:

Observemos que

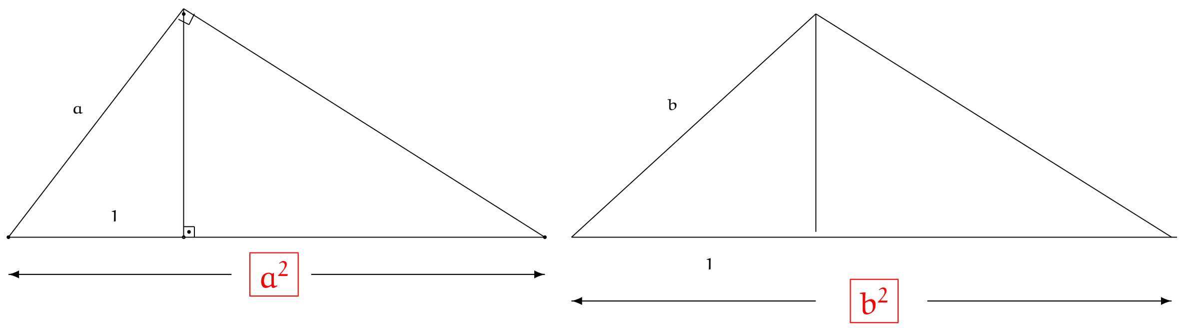
$$
\begin{aligned}
x &= \frac{a^3 + a^2 b}{a^2 + b^2} \\
&= a^2 \frac{a+b}{a^2+b^2},
\end{aligned}
$$

ou ainda, $$\frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{a^2}{x},$$

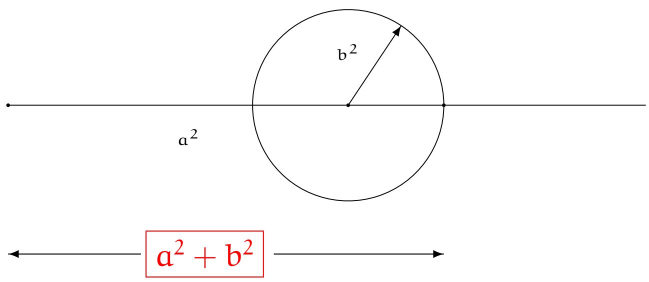
isto é, $\underline{x}$ é a quarta proporcional dos segemtos $\underline{a^2+b^2}$, $\underline{a+b}$, $\underline{a^2}$.

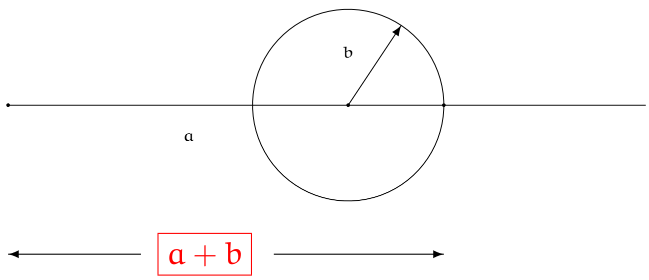
Com isto podemos obter, geometricamente, um segmento de comprimento $\underline{x}$, da seguinte forma:

1. Construimos segmentos de comprimentos $\underline{a^2}$ e $\underline{b^2}$, como no Exercício anterior (veja as figuras abaixo):

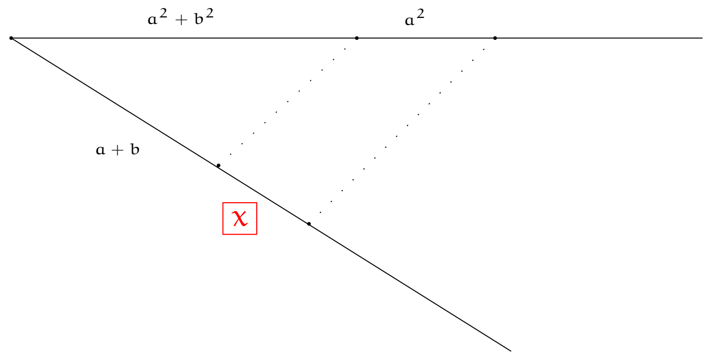


2. Podemos agora obter segmentos de comprimentos $\underline{a^2+b^2}$ e $\underline{a+b}$, como mostram as figuras abaixo:





3. Como
$$x = \frac{a^3 + a^2 b}{a^2 + b^2}$$
é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{a^2 + b^2}$, $\underline{a + b}$, $\underline{a^2}$ teremos, geometricamente, a seguinte construção:



Exercício 2.8.8 *Resolver, geometricamente o sistema não linear (isto é, encontrar, geometricamente, dois segmentos cujos são* $\underline{x}$ *e* $\underline{y}$ *que satisfaçam o sistema)*

$$\begin{cases} x + y = a \\ x\,y = b^2 \end{cases}, \qquad (2.85)$$

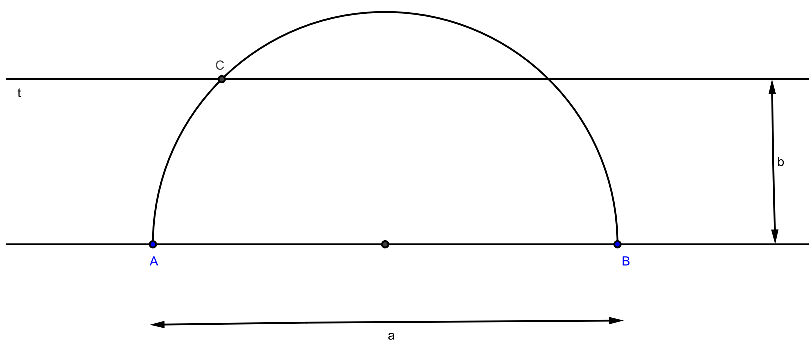
onde $a\,, b > 0$ *são comprimentos de dois segmentos dados.*

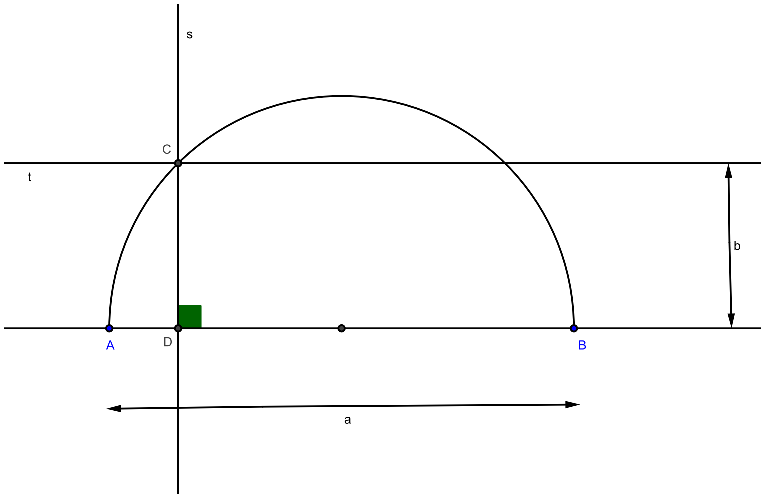
<u>Resolução:</u>

Precisamos encontrar segmentos de comprimentos $\underline{x}$ e $\underline{y}$, de modo modo que a soma e a média geométrica dos mesmos sejam $\underline{a}$ e $\underline{b^2}$, respectivamente.

Para isto:

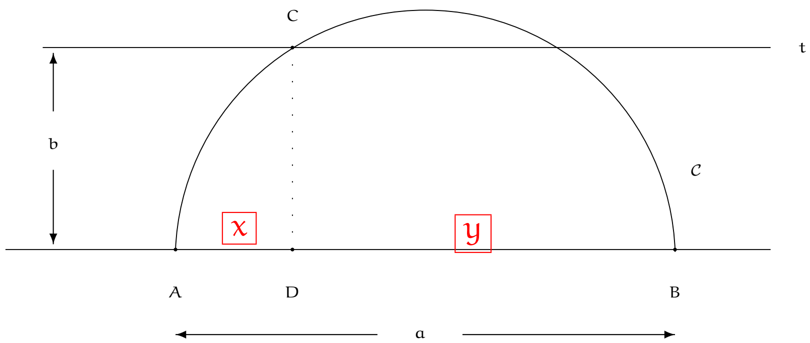
1. Consideremos um dois pontos, que chamaremos de $\underline{A}$ e $\underline{B}$, de modo $\overline{AB} = a$, uma semi-circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, cujo diâmetro tem comprimento $\underline{AB}$ e uma reta, que denotaremos por $\underline{t}$, paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e distando $\underline{b}$ da mesma, que interceptará a semi-circunferêcia $\underline{\mathcal{C}}$ em um ponto, que denotaremos por $\underline{C}$ (veja a figura abaixo):





2. Consideremos a reta, que denotaremos por $\underline{s}$, perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$, contendo o ponto $\underline{C}$, cuja interseção com a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é um ponto, que chamaremos de $\underline{D}$ (veja a figura abaixo):

3. Afirmamos que
$$x \doteq AD \quad \text{e} \quad y \doteq DB \tag{2.86}$$
são as soluções do sistema não linear (2.85).



De fato, como, por construçao, o triângulo ΔACB é um triângulo retângulo no vértice $\underline{C}$ segue, do item 2. da Observação (2.5.1), que
$$CD^2 = AD \cdot DB$$
e, também da construção, temos que
$$AB = AD + DB\,.$$

Como
$$CD = b \quad \text{e} \quad AB = a\,,$$
segue, de (2.86), que
$$b^2 = x\,y \quad \text{e} \quad a = x + y\,,$$
como queríamos mostrar.

Observação 2.8.1 *Vale observar que o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação*

$$x + y = a$$

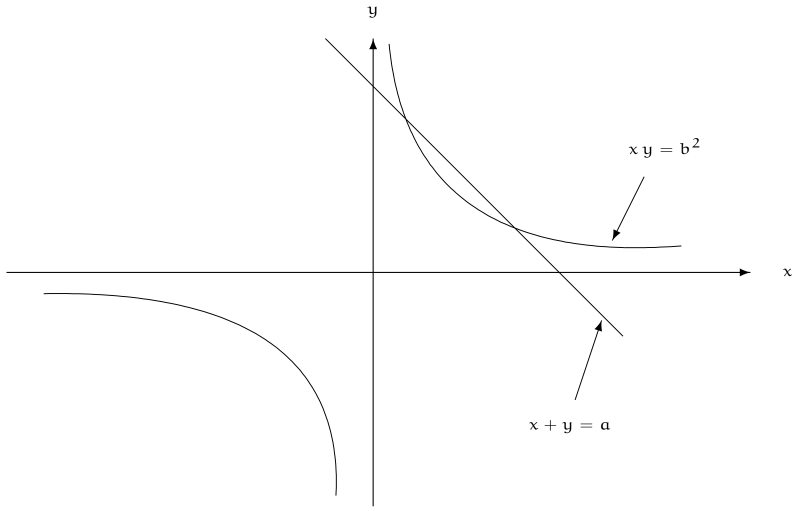
é uma reta e o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação

$$x\,y = b^2$$

é uma hipérbole.

Logo resolver o sitema não linear (2.85) é, geometricamente, encontrar a interseção desses lugares geométricos, no caso, a interseção da reta com a hipérbole

Notemos que poderemos ter até dois pontos de interseção, ou seja, duas soluções distintas para o sistema não linear (2.85) (figura abaixo).



Exercício 2.8.9 *Resolver, geometricamente, o sistema não linear (isto é, encontrar, geometricamente, dois segmentos cujos são* $\underline{x}$ *e* $\underline{y}$ *que satisfaçam o sistema):*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ x + y = b \end{cases}, \tag{2.87}$$

onde $a\,, b > 0$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

Observemos que

$$x^2 - y^2 = (x - y)\,(x + y)\,.$$

Como

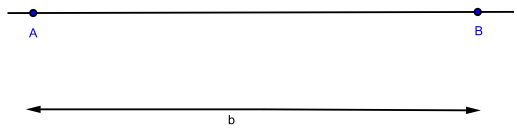
$$x + y = b\,,$$

logo o sistema não linear (2.87) é equivalente ao seguite sistema linear:

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{a^2}{b} \\ \\ x + y = b \end{cases}. \tag{2.88}$$

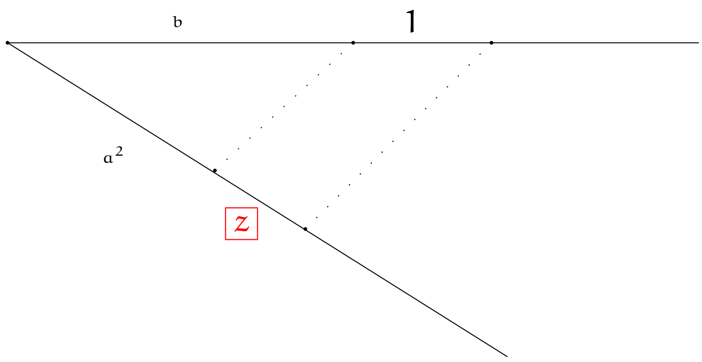
Para obtermos segmentos cujos comprimentos $\underline{x}$ e $\underline{y}$, soluções do sistema linear (2.88), agiremos da seguinte forma:

1. Consideremos dois pontos, que indicaremos por $\underline{A}$ e $\underline{B}$ de modo que $AB = b$ (veja a figura abaixo);



2. Construir um segmento cujo comprimento é igual a $\underline{a^2}$ (como no item 3. da Observação (2.7.2));

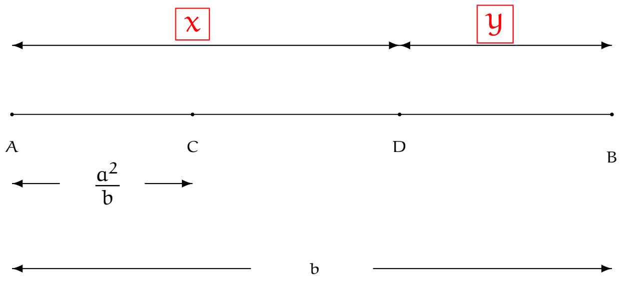
3. Obtenhamos um segmento de comprimento $z = \dfrac{a^2}{b}$, ou seja,
$$\frac{b}{a^2} = \frac{1}{z},$$
isto é, $\underline{z}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{b}$, $\underline{a^2}$, $\underline{1}$ (veja a figura abaixo);



4. Sobre o segmento $\overline{AB}$, encontremos um ponto, que indicaremos por $\underline{C}$, de modo modo que
$$AC = \frac{a^2}{b}, \tag{2.89}$$
veja no item 3. da Observação (2.7.1) como construir um segmento com esse comprimento).

5. Denotemos por $\underline{D}$ o ponto médio do segmento $\overline{CB}$.

   Afirmamos que
$$x \doteq AD \quad \text{e} \quad y \doteq DB, \tag{2.90}$$
satisfazem ao sistema linear (2.88) (veja a figura abaixo).



De fato, observemos que

$$AD + DB = AB$$

que, de (2.90), e equivalente a:

$$x + y = b\,. \tag{2.91}$$

Por outro lado, $CD = DB$, pois o ponto $\underline{D}$ é o ponto médio do segmento $\overline{CB}$.

Logo

$$\begin{aligned} x - y &\overset{(2.90)}{=} AD - DB \\ &= AD - CD \\ &= AC \overset{(2.89)}{=} \frac{a^2}{b}\,, \end{aligned}$$

$$\text{assim,}\quad x - y = \frac{a^2}{b}\,, \tag{2.92}$$

isto é, (2.91) e (2.92) implicam que $\underline{x}$ e $\underline{y}$ dados por (2.90), satisfazem o sistema linear (2.88), que é equivalente ao sistema não linear (2.87), como queríamos demonstrar.

Observação 2.8.2 *Observemos que o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação*

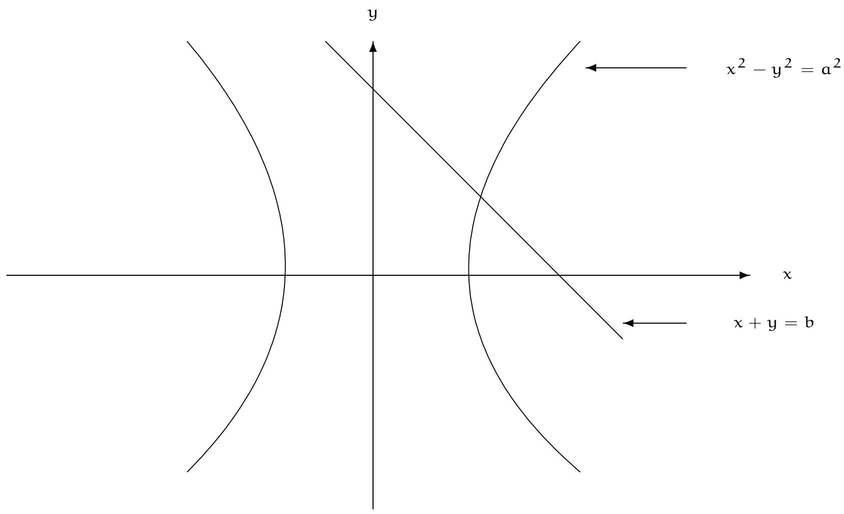
$$x + y = b$$

é uma reta e o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação

$$x^2 - y^2 = a^2$$

é uma hipérbole.

Logo resolver o sistema não linear (2.87) é equivalente a encontrar, geometricamente, a interseção dos lugares geométricos, no caso, a interseção da reta com a hipérbole, que podem ter como soluções até dois pontos (veja a figura abaixo).



Exercício 2.8.10 *Resolver, geometricamente, o sistema não linear (isto é, encontrar, geometricamente, dois segmentos cujos são* $\underline{x}$ *e* $\underline{y}$ *que satisfaçam o sistema)*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x\,y = b^2 \end{cases}, \tag{2.93}$$

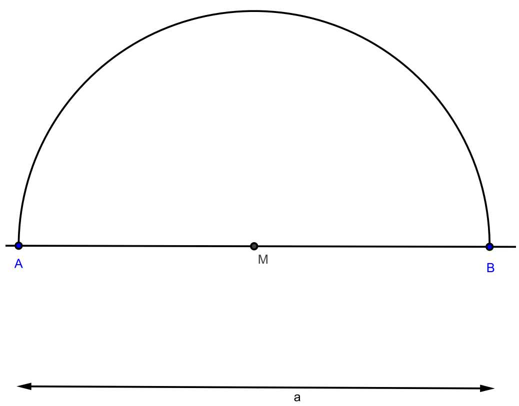
onde $a\,, b > 0$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

Temos a seguinte constução:

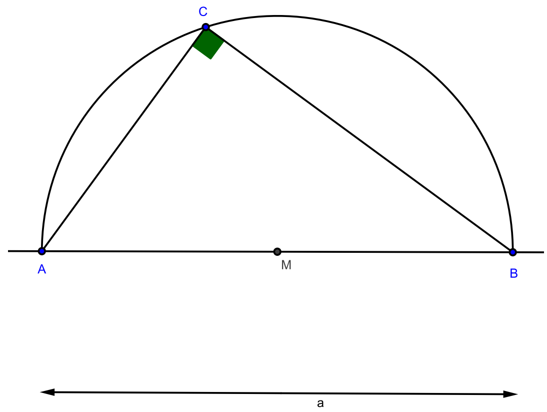
1. dois pontos, que indicaremos por $\underline{A}$ e $\underline{B}$ de modo que $AB = a$ (veja a figura abaixo);

   Construamos uma semi-circunferência, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, que tenha como diâmetro o segmento $\overline{AB}$ (veja a figura abaixo);



2. Observemos que se um ponto, que indicaremos por $\underline{C}$, é um ponto qualquer da semi-circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, então temos

$$AC^2 + CB^2 = a^2\,, \tag{2.94}$$



pois o segmento $\overline{AB}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo ΔABC (veja a figura abaixo). Assim, definindo-se

$$x \doteq AC \quad \text{e} \quad y \doteq CB \tag{2.95}$$

segue, de(2.94) e (2.95), que

$$x^2 + y^2 = a^2 . \tag{2.96}$$

Logo, se um ponto $\underline{C}$ pertence a semi-circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, temos que $\underline{x}$ e $\underline{y}$, dados por (2.95), satisfazem a 1.a equação do sistema (2.93) dado.

3. Por outro lado, se

$$h \doteq AD \tag{2.97}$$

é o comprimento da altura do um triângulo ΔABC, relativamente ao lado $\overline{AB}$, como o ponto $\underline{C}$ pertence a semi-circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ segue que a área do triângulo ΔABC será dada por:

$$\frac{a \cdot h}{2} . \tag{2.98}$$

Mas a área do triângulo ΔABC também pode ser dada por:

$$\frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{x \cdot y}{2} \overset{(2.93)}{=} \frac{b^2}{2} , \tag{2.99}$$

onde, usamos que $\underline{x}$ e $\underline{y}$ devem satisfazer a 2.a equação do sistema não linear (2.93). Logo, de (2.98) e (2.99) segue que deveremos ter:

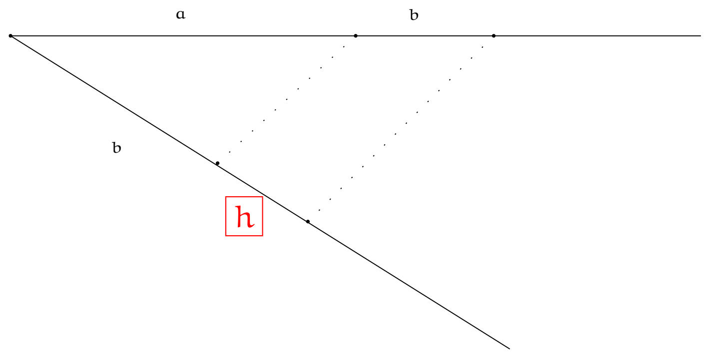
$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{b^2}{2} , \tag{2.100}$$

isto é,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{h},$$

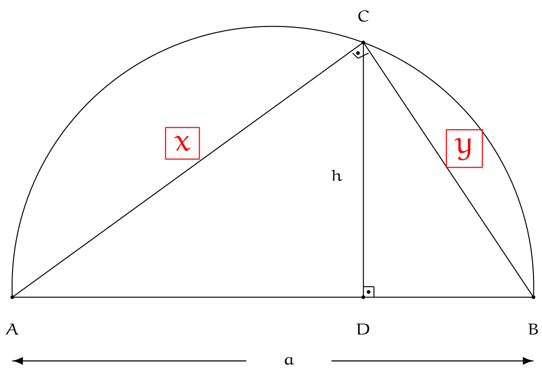
ou seja, $\underline{h}$ deve ser a 4.a proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{b}$.

Geometricamente, temos:



Deste modo obtemos um segmento de comprimento $\underline{h}$.

4. Tracemos a reta paralela a reta $\overleftrightarrow{AB}$, que dista $\underline{h}$ da mesma, que interceptará a semi-circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ em um ponto, que indicaremos por $\underline{C}$ (veja a figura abaixo).



Deste modo teremos
$$x \doteq AC \quad \text{e} \quad y \doteq CB \tag{2.101}$$
serão soluções do sistema não linear (2.93) dado.

De fato, pois

$$x^2 + y^2 \overset{(2.101)}{=} AC^2 + CB^2 \overset{(2.94)}{=} a^2$$
e
$$x \cdot y \overset{(2.101)}{=} AC \cdot CB \overset{(2.99)}{=} a \cdot h \overset{(2.100)}{=} b^2,$$

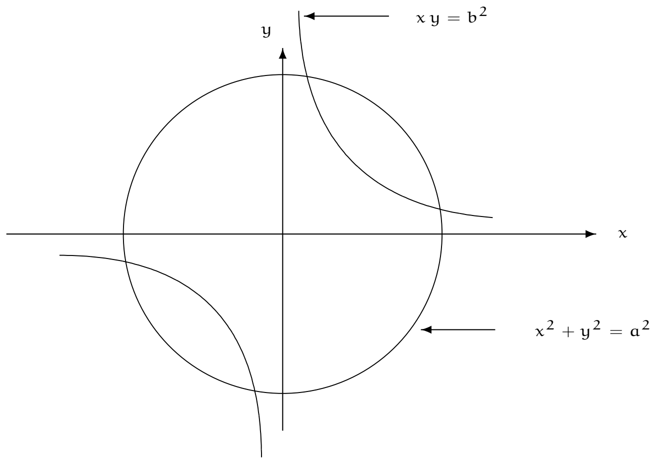
como queríamos demonstrar.

Observação 2.8.3 *Observemos que o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação*
$$x^2 + y^2 = a^2$$
é uma circunferência, de centro na origem $\underline{O}$ e raio igual a $\underline{a}$ e o o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação
$$x\,y = b^2$$

é uma hipérbole.

Logo, resolver o sistema não linear (2.93) é, geometricamente, encontrar a interseção dos lugares geométricos acima, no caso, a interseção da circunferência com a hipérbole, que podem ocorrer em dois pontos.

Na verdade podem ser 4 *pontos, mas como* $x, y > 0$ *teremos somente dois pontos (veja a figura abaixo).*



Exercício 2.8.11 *Resolver, geometricamente, o sistema (não-linear)*

$$\begin{cases} x - y = a \\ x\,y = b^2 \end{cases}, \tag{2.102}$$

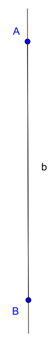
onde $a\,, b > 0$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

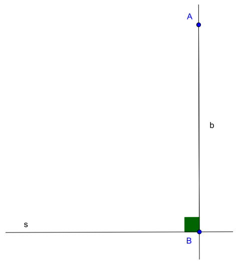
Temos a seguinte construção:

1. Consideremos em uma reta, que chamaremos de $\underline{r}$, dois pontos, que indicaremos por $\underline{A}$ e $\underline{B}$, tais que (veja a figura abaixo)

$$AB = b\,. \tag{2.103}$$

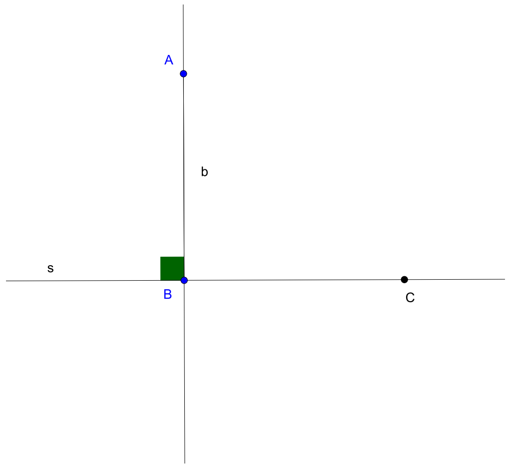


2. Considere uma reta, que chamaremos de $\underline{s}$, perpendicular à reta $\underline{r}$, que contenha o ponto B (veja a figura abaixo);



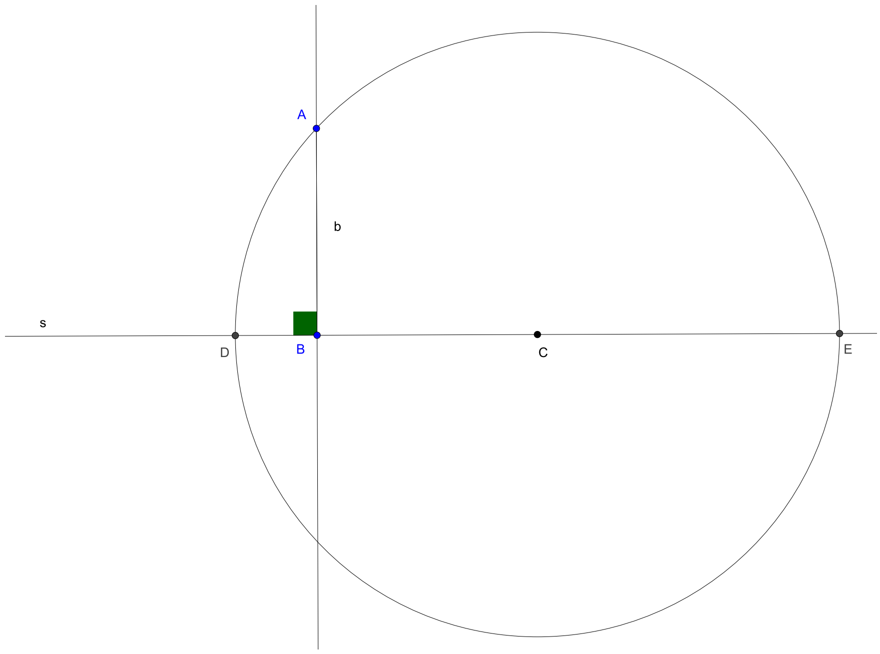
3. Obtenha um ponto, que indicaremos por C, pertecente à reta $\underline{s}$, de modo que (veja a figura abaixo)

$$BC = \frac{a}{2}\,. \tag{2.104}$$

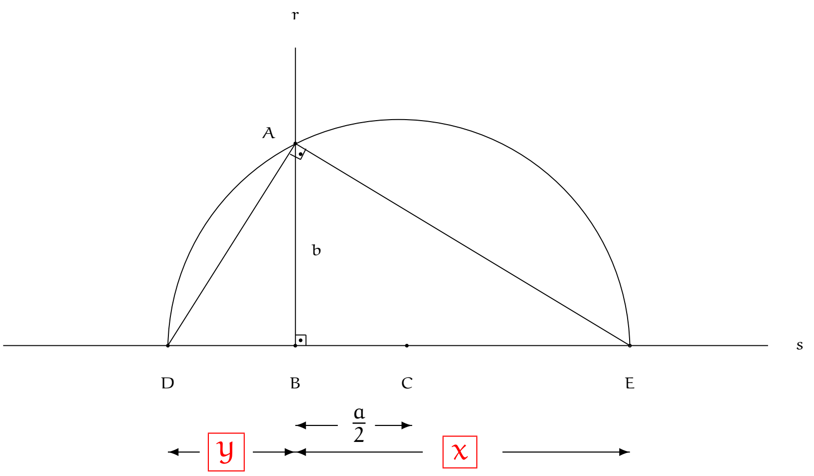


4. Construa umaa circunferência, de centro no ponto $\underline{C}$ e raio igual a CA.

   Denotemos por $\underline{D}$ e $\underline{E}$, os pontos de interseção da circunferência do teim 4. com a reta $\underline{s}$ (veja a figura abaixo);



5. Deste modo afirmamos que
$$y \doteq DB \quad \text{e} \quad x \doteq BE \tag{2.105}$$
são soluções do sistema (não-linear) (2.102) (veja a figura abaixo).



De fato, como o triângulo ΔAED é um triângulo retângulo no vértice $\underline{A}$ segue, do item 2. da Observação (2.5.1), que
$$\underbrace{AB}_{\overset{(2.103)}{=} b}{}^2 = \underbrace{DB}_{\overset{(2.105)}{=} y} \cdot \underbrace{BE}_{\overset{(2.105)}{=} x},$$
isto é,
$$b^2 = x\,y\,.$$

Além disso, por construção (veja a figura acima), temos que
$$2\,(\underbrace{DB}_{\overset{(2.105)}{=} y} + \underbrace{BC}_{\overset{(2.104)}{=} \frac{a}{2}}) = \underbrace{DB}_{\overset{(2.105)}{=} y} + \underbrace{BE}_{\overset{(2.105)}{=} x},$$
isto é,
$$2\left(y + \frac{a}{2}\right) = y + x\,, \quad \text{logo} \quad x - y = a\,,$$
mostrando que $\underline{x}$ e $\underline{y}$, definidos em (2.105), satisfazem o sistema (não-linear) (2.102).

Exercício 2.8.12 *Encontrar, geometricamente, uma solução da equação*
$$x^2 - a\,x - b^2 = 0\,,$$
onde $a\,,b > 0$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

As soluções algébricas são:
$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4\,b^2}}{2} = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4\,b^2}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4\,b^2}}{2} = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4\,b^2}}{2}\,.$$

Observemos que

$$a - \sqrt{a^2 + 4\,b^2} < 0, \qquad \text{pois} \qquad a < \sqrt{a^2 + 4\,b^2}, \quad \text{e} \quad a + \sqrt{a^2 + 4\,b^2} > 0$$

logo encontraremos, geometricamente, somente a solução $\underline{x_1}$.

Para resolver o problema basta, essencialmente, construir um segmento de comprimento

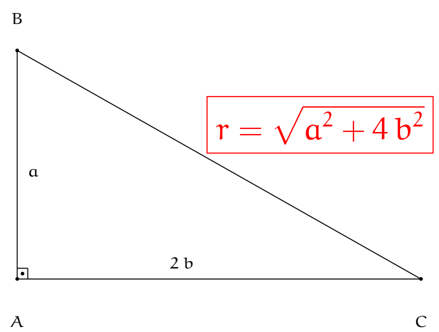
$$r \doteq \sqrt{a^2 + 4\,b^2}\,.$$

Para isto:

1. Consideremos o triângulo ΔABC retângulo no vértice $\underline{A}$, onde os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ têm comprimentos $\underline{a}$ e $\underline{2\,b}$, repectivamente.

   Logo a hipotenusa $\overline{BC}$ terá comprimento (veja a figura abaixo)

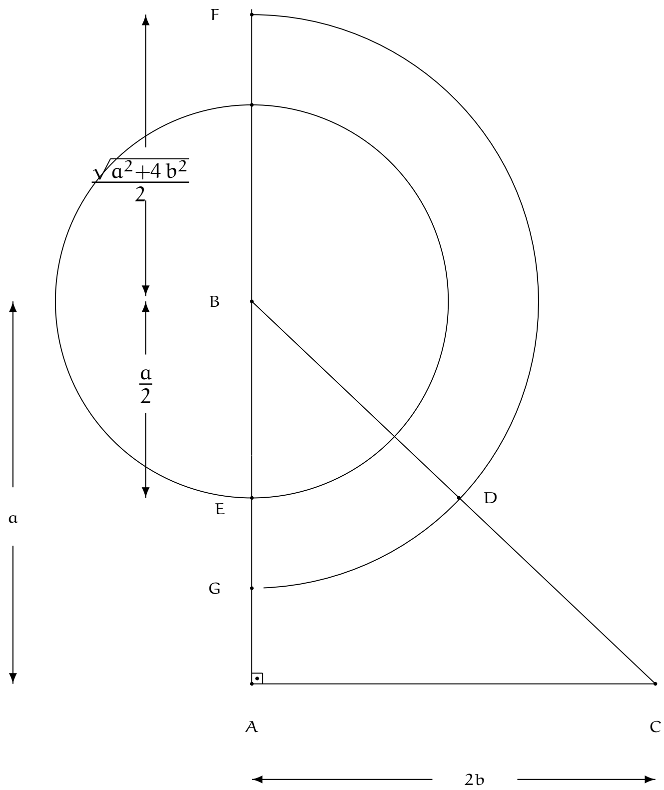
   $$r = \sqrt{a^2 + 4\,b^2}\,.$$



2. Considere os pontos médios, que indicaremos por $\underline{D}$ e $\underline{E}$, dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente (veja a figura abaixo);

3. A circunferência de centro no ponto $\underline{B}$ e raio $\overline{BD}$, encontrará a reta $\overleftrightarrow{AB}$ num ponto, que chamaremos de $\underline{F}$, de tal modo que o ponto $\underline{B}$ pertencerá ao segmento $\overline{AF}$ (veja a figura abaixo).

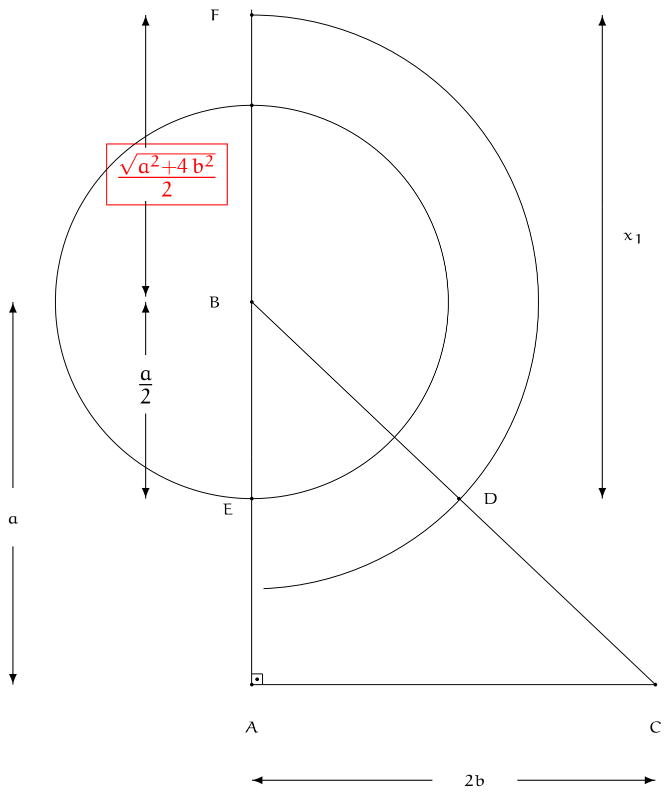
4. A circunferência de centro no ponto $\underline{B}$ e raio $\dfrac{a}{2}$, encontrará a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{E}$, tal que o ponto $\underline{E}$ pertença ao segmento $\overline{AB}$ (veja a figura abaixo).



5. Deste modo, por construção, temos que

$$x_1 = EF$$

será uma solução procurada (veja a figura abaixo).



Exercício 2.8.13 *Construir a solução da equação*

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

onde $a, b > 0$ *são comprimentos de segmentos dados.*

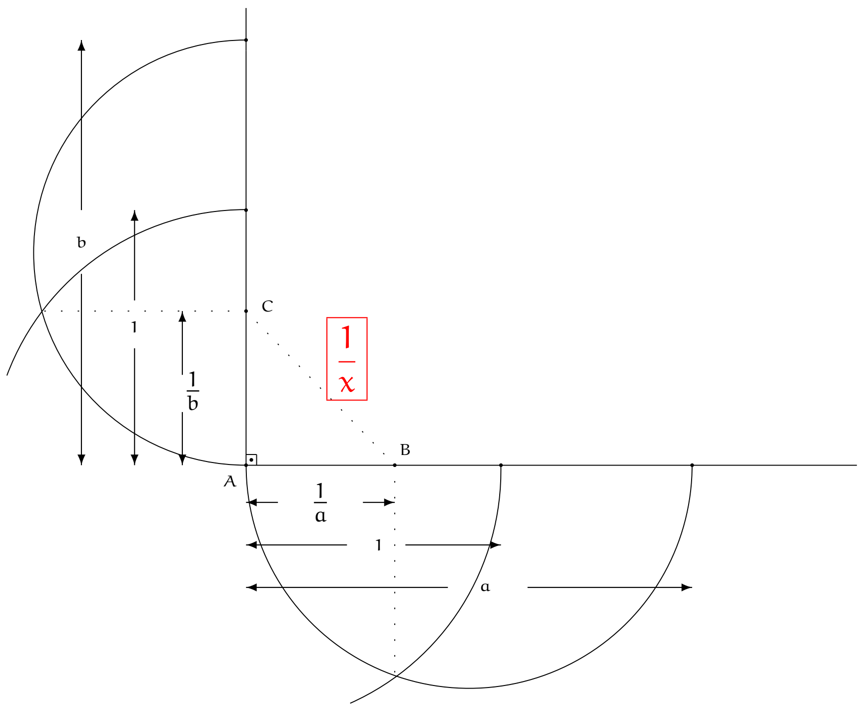
Resolução:

Temos a seguinte construção:

1. Consideremos um triângulo retângulo ΔABC tal que seus catetos têm comprimentos

$$AB = \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad AC = \frac{1}{b}.$$

A Observação (2.7.2) item 2., nos diz como construir um segmento de comprimento $\frac{1}{a}$ (veja a figura abaixo).



Deste modo, sua hipotenusa terá comprimento

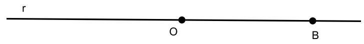
$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}},$$

que é o valor $\frac{1}{x}$ procurado.

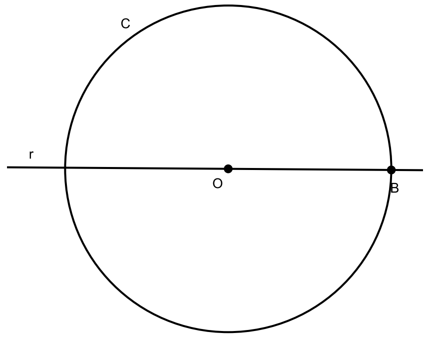
2. Se $\frac{1}{x} = 1$, então $x = 1$, ou seja, o comprimento de um segmento de comprimento $\underline{1}$, satisfaz a equação dada;

3. Se $\frac{1}{x} < 1$, faremos a seguinte construção: e

   (a) Sobre uma reta $\underline{r}$ encontremos pontos, que chamaremos de $\underline{O}$ e $\underline{B}$, tais que $OB = 1$ (veja a figura abaixo);

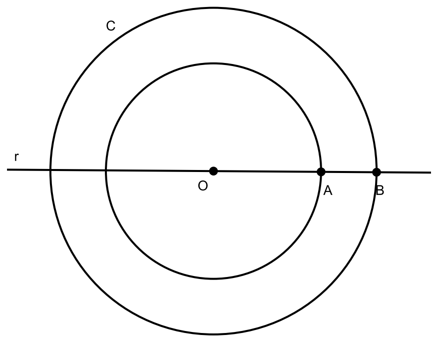


(b) Tracemos a circunferência, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, de centro no ponto $\underline{\text{O}}$ e raio $\text{OC} = 1$ (veja a figura abaixo);

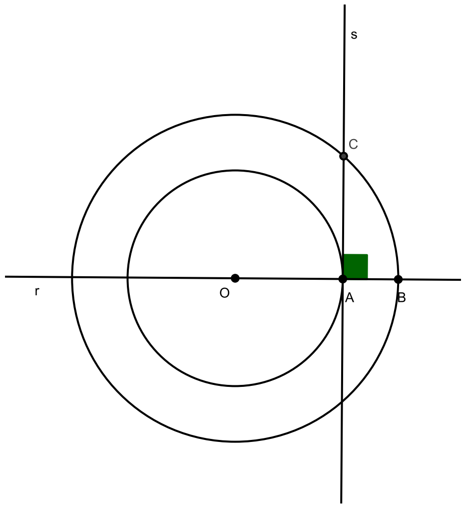


(c) Sobre a reta $\underline{\text{r}}$, encontremos um ponto, que indicaremos por $\underline{\text{A}}$, tal que $\text{O}A = \dfrac{1}{x}$ e de modo que os pontos $\underline{\text{A}}$ e $\underline{\text{B}}$, estão sobre a mesma semi-reta determinada pela reta $\underline{\text{r}}$ com extremo no ponto $\underline{\text{O}}$.

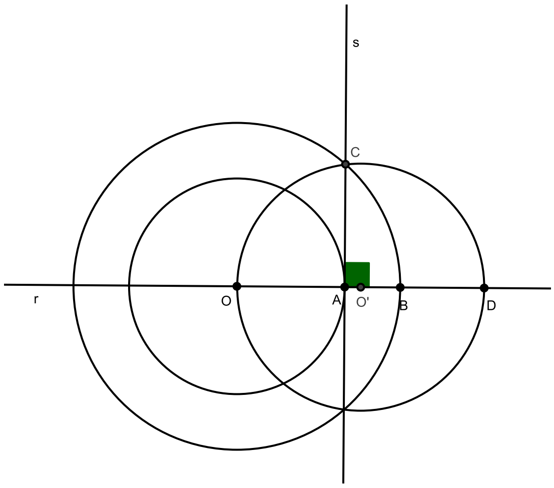
Observemos que o ponto $\underline{\text{A}}$ pertence ao segmento $\overline{\text{OB}}$, pois $\dfrac{1}{x} < 1$ (veja a figura abaixo);



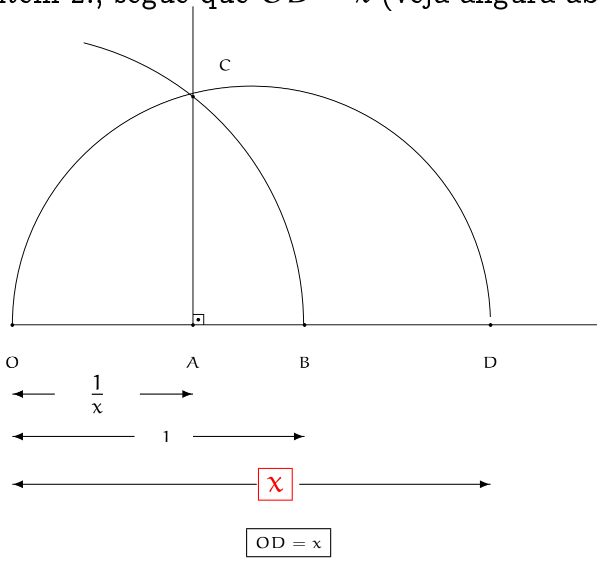
(d) A reta $\underline{\text{s}}$ perpendicular à reta $\underline{\text{r}}$, pelo ponto $\underline{\text{A}}$, encontrará a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{\text{C}}$ (na verdade em dois pontos, escolha um deles - figura abaixo);



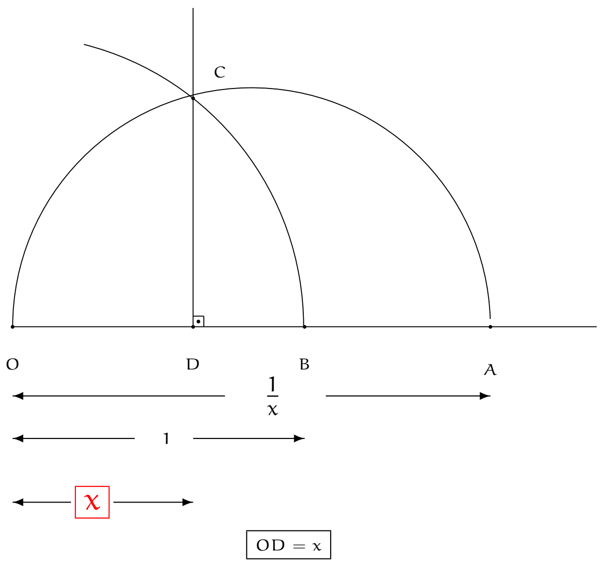
(e) A circunferência de centro sobre a reta r, que contém os pontos O e C, encontrará a semi-reta que está contida na r, com extremidade no ponto O, em um ponto, que chamaremos de D (veja a figura abaixo);



(f) Da Observação (2.7.2) item 2., segue que $OD = x$ (veja afigura abaixo).



4. Se $\dfrac{1}{x} > 1$, a construção é semelhante a do item 3. acima (veja a figura abaixo):



Exercício 2.8.14 *Construir a solução da equação*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

onde $a, b > 0$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

Exercício 2.8.15 *Construir um triângulo retângulo, conhecendo-se a soma dos comprimentos dos catetos da altura relativa à hipotenusa.*

Resolução:

Exercício 2.8.16 *Dados o centro e o raio de uma circunferência, que indicaremos por* $\underline{C}$ *e um ponto, que chamaremos de* $\underline{P}$, *que está no exterior da mesma, pede-se traçar, pelo ponto* $\underline{P}$, *uma secante* PAB, *à circunferência* $\underline{C}$, *de modo que o ponto* $\underline{A}$, *seja o ponto médio do segmento* $\overline{PB}$.

Resolução:

Exercício 2.8.17 *Construir um triângulo retângulo conhecendo-se o comprimento da hipotenusa e a soma dos comprimentos dos catetos.*

Resolução:

Exercício 2.8.18 *A média harmônica de dois segmentos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$*, que têm comprimentos* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$*, respectivamente, é um segmento* $\overline{EF}$ *que tem comprimento* $\underline{h}$*, onde*

$$h = \frac{2\,a\,b}{a+b}\,.$$

Construa, geometricamente, a média harmônica dos segmentos $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$*.*

Resolução:

Exercício 2.8.19 *Um* **retângulo áureo** *é um retângulo em um lado é o segmento áureo do outro lado adjacente. Construir um retângulo áureo conhecendo-se o seu perímetro.*

Resolução:

Exercício 2.8.20 *Inscrever em uma circunferência dada um retângulo cujo perímetro é dado.*

Resolução:

Exercício 2.8.21 *Dadas uma circunferência, que chamaremos de* $\underline{\mathcal{C}}$ *e uma reta, que indicaremos por* $\underline{t}$*, tangente à circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$*, construir um quadrado que tenha dois vértices sobre a circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$ *e os outros dois vértices sobre a reta* $\underline{t}$*.*

Resolução:

Exercício 2.8.22 *Construir um trapézio isósceles que está circunscrito à uma circunferência, conhecendos suas bases.*

Resolução:

Exercício 2.8.23 *Dados os dois pontos distintos, que indicaremos por* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$*, pertencentes à reta, que chamaremos de* $\underline{r}$*, construir duas circunferências, que chamaremos de* $\underline{\mathcal{C}}$ *e* $\underline{\mathcal{C}'}$*, que são tangentes entre si, de modo que a circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$ *seja tangente à reta* $\underline{r}$ *no ponto* $\underline{B}$ *e o raio da circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$ *seja o dobro do raio da circunferência* $\underline{\mathcal{C}'}$*.*

Resolução:

Exercício 2.8.24 *O comprimento do lado de um decágono inscrito em uma circunferência de raio* $\underline{R}$ *será* $R\,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Dada uma circunferência, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, *de centro no ponto, que chamaremos de* $\underline{O}$, *e raio, que chamaremos de* $\underline{R}$, *considere quatro pontos, que chamaremos de* $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ *e* $\underline{D}$, *de modo que os segmentos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *são dois diâmetros da circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$, *perpendiculares entre si. Denotemos por* $\underline{M}$, *o ponto médio do segmento* $\overline{OA}$. *Chamemos de* $\underline{P}$, *o ponto de interseção da circunferência de centro no ponto* $\underline{M}$ *e raio* $\overline{MC}$, *com o segmento* $\overline{OA}$. *Mostre que o segmento* $\overline{OP}$ *é o lado de um decágono inscrito na circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$ *e construa o polígono correspondente.*

Resolução:

Exercício 2.8.25 *O comprimento de um pentágono regular inscrito em uma circunferência de raio* $\underline{r}$ *é dado por* $r\,\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$.
Considerando-se a construção descrita no Exercício 3.8.24 acima, mostre que o segmento $\overline{CP}$ *é o lado do pentágono regular inscrito na circunferência acima e construa o polígono correspondente.*

Resolução:

Exercício 2.8.26 *Construa um pentágono regular conhecendo-se um dos seus lados.*

Resolução:

Exercício 2.8.27 *Construa um pentágono regular conhecendo-se uma de suas diagonais.*

Resolução:

Exercício 2.8.28 *Dado um quadrado, construa um octógono regular cortando os "cantos" desse quadrado.*

Resolução:

Exercício 2.8.29 *Dados dois pontos distintos, que chamaremos de* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$, *pertencentes a um mesmo semi-plano determinado por uma reta, que denotaremos por* $\underline{r}$, *determinar um ponto, que indicaremos por* $\underline{P}$, *pertencente à reta* $\underline{r}$, *de modo que o ângulo* $\widehat{APB}$ *seja o maior possível.*

Resolução:

Exercício 2.8.30 *Dados dois pontos distintos, que chamaremos de* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$*, e dois segmentos, de comprimentos que serão denotados por* $\underline{m}$ *e* $\underline{n}$*, dividir harmonicamente o segmento* $\overline{AB}$ *na razão* $\dfrac{m}{n}$*, ou seja, determinar dois pontos, que indicaremos por* $\underline{M}$ *e* $\underline{N}$*, pertencentes à reta que contém os pontos* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$*, de modo que*

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}.$$

Notemos que a circunferência, cujo comprimento do diâmetro é igual a $\underline{MN}$ *será denominada* **circunferência de Apolônio do segmento $\overline{AB}$, na razão $\dfrac{m}{n}$**. *Para todo ponto, que chamaremos de* $\underline{P}$*, pertencente a esta circunferência, teremos*

$$\widehat{APM} = \widehat{MPB} \quad e \quad \frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}.$$

Resolução:

Exercício 2.8.31 *Dados três pontos distintos, que indicaremos por* $\underline{A}$*,* $\underline{B}$ *e* $\underline{C}$*, nesta ordem, pertencentes a uma reta, que chamaremos de* $\underline{r}$*, obter o lugar geométrico dos pontos, que denotaremos por* $\underline{P}$*, tais que*

$$\widehat{APB} = \widehat{BPC}.$$

Resolução:

Exercício 2.8.32 *Dados uma circunferência, que chamaremos de* $\underline{\mathcal{C}}$ *e dois segmentos, cujos comprimentos serão denotados por* $\underline{h}$ *e* $\underline{m}$*, respectivamente, inscrever na circunferência* $\underline{\mathcal{C}}$*, um trapézio cuja altura tem comprimento* $\underline{h}$ *e de modo que a soma dos comprimentos das bases do mesmo, seja igual a* $\underline{m}$*.*

Resolução:

Exercício 2.8.33 *Dados dois pontos distintos, que indicaremos por* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$*, e um segmento, cujo comprimento será denotado por* $\underline{k}$*, contruir o lugar geométrico dos pontos, que indicaremos por* $\underline{P}$*, tais que*

$$PA^2 + PB^2 = k^2.$$

Resolução:

Exercício 2.8.34 *Construir um triângulo* $\underline{\Delta ABC}$ *conhencendo-se o comprimento do lado* $\overline{BC}$*, que indicaremos por* $\underline{a}$*, o comprimento da altura relativa ao lado* $\overline{BC}$*, que denotaremos por* $\underline{h_a}$*, e a soma dos quadrados dos comprimentos dos outros dois lados, que denotaremos por* $\underline{k}$*, ou seja,*

$$AB^2 + AC^2 = k^2 .$$

Resolução:

Exercício 2.8.35 *Dados dois pontos distintos, que indicaremos por* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$*, pertencentes a um mesmo semi-plano determinado por uma reta, que chamaremos de* $\underline{r}$*, determinar um ponto, que indicaremos por* $\underline{P}$*, pertencente à reta* $\underline{r}$*, de modo que a soma*

$$PA^2 + PB^2$$

seja o menor possível.

Resolução:

Exercício 2.8.36 *Dados dos números reais maiores que zero, que indicaremos por* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$*, construir, geometricamente, um segmento cujo comprimento é igual a* $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$*.*

Resolução:

Exercício 2.8.37 *Dados dois segmentos de reta, cujos comprimentos serão denotados por* $\underline{a}$*, e* $\underline{b}$*, respectivamente, e um segmento de comprimento unitário, construir um segmento cujo comprimento seja igual a* $\underline{a\,b}$*.*

Resolução:

Exercício 2.8.38 *Dados um segmento de reta, cujo comprimento é igual a* $\underline{a}$*, e um segmento de comprimento unitário, construir um segmento cujo comprimento é igula a* $\underline{\sqrt[4]{a}}$*.*

Resolução:

Exercício 2.8.39 *Dados três segmentos de reta, cujos comprimentos serão denotados por* $\underline{a}$*,* $\underline{b}$ *e* $\underline{c}$ *e um segmento de comprimento unitário, construir um segmento de comprimento cujo comprimento seja igual a* $\underline{\sqrt{a\,b\,c}}$*.*

Resolução:

Exercício 2.8.40 *Dado um segmento de reta, cujo comprimento será denotado por* $\underline{a}$*, e um segmento de comprimento unitário, construir um segmento de reta cujo comprimento seja igual a* $\underline{a^{\frac{2}{3}}}$*.*

Resolução:

Capítulo 3

Áreas de Polígonos

3.1 Equivalências

A seguir trataremos de várias questões relacionadas com áreas de polígonos (convexos).

Na verdade relacionaremos a área de um polígono, que indicaremos por $\underline{\mathcal{P}}$, com $\underline{a^2}$, onde denotaremos por $\underline{a}$, o comprimento de um segmento, mais precisamente, diremos, neste caso, que a área de um polígono $\underline{\mathcal{P}}$, é **equivalente** a do quadrado, cujo lado é um segmento de comprimento $\underline{a}$.

A questão, olhada sob esse ponto de vista, será encontrar um processo que transforme, sem alterar sua área, um polígono dado em um quadrado.

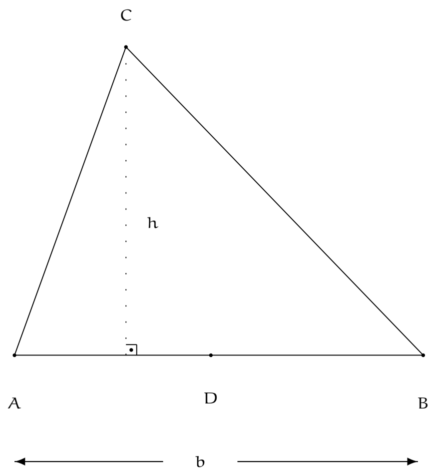
Começaremos por uma situação mais simples, a saber:

3.1.1 Triângulos

Começaremos pelo caso em que o polígono $\underline{\mathcal{P}}$ é um triângulo:

Consideremos uma triângulo ΔABC dado.

Suponhamos que $b \doteq AB$ e denotemos a altura do mesmo, relativa ao lado $\overline{AB}$, por $\underline{h}$ (veja a figura abaixo).



Observemos que o triângulo ΔABC é equivalente a um quadrado de lado de comprimento $\underline{a}$, então deveremos ter

$$a^2 = \frac{b \cdot h}{2},$$

ou seja,

$$a = \sqrt{\frac{b}{2} \cdot h}\,.$$

Portanto, o comprimento do lado do quadrado, equivalente ao triângulo ΔABC, é a média geométrica entre $\frac{b}{2}$ e h.

A construção (já feita anteriormente) é a seguinte:

Na figura abaixo, o triângulo ΔPQR é retângulo no vértice R, com

$$PS = h\,, \quad SQ = \frac{b}{2}$$

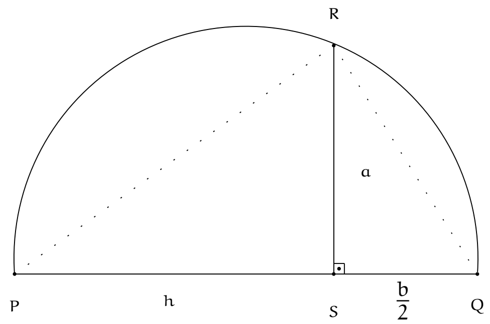
e altura, relativamente ao lado $\overline{PQ}$, dada por

$$RS = a\,.$$

Logo da, Observação (2.5.1) item 2., teremos que

$$RS^2 = PS \cdot SQ\,, \quad \text{ou seja,} \quad a^2 = \frac{b \cdot h}{2},$$

como queríamos.



Com isto resolvemos o problema de construir um quadrado equivalente a um triângulo dado, conhecendo-se um lado e a altura, relativamente a esse lado, do triângulo.

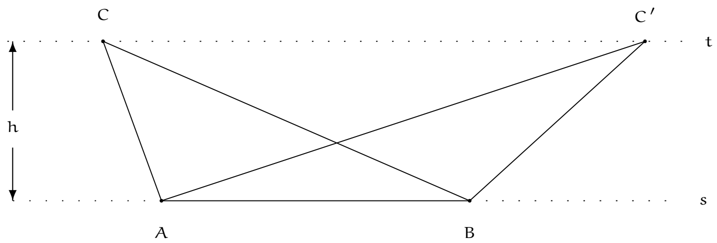
3.1.2 Quadriláteros

Passemos agora a tratar do caso em que o polígono $\underline{\mathcal{P}}$ é um quadrilátero.

Observação 3.1.1 *Lembremos que num triângulo ΔABC, cuja base $\overline{AB}$ está fixada, deslocando-se o vértice $\underline{C}$, sobre uma reta paralela, distando a altura, relativamente à base $\overline{AB}$, sua área não se alterará.*

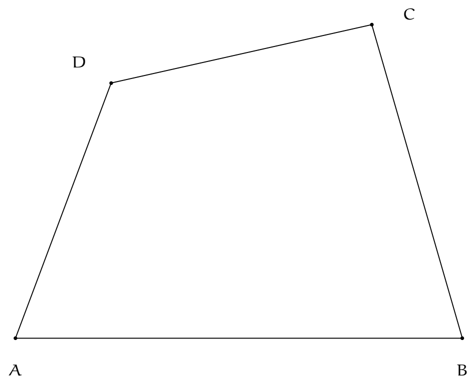
Na figura abaixo as retas $\underline{s}$ e $\underline{t}$ são paralelas.

Neste caso, os triângulos ΔABC e $\Delta ABC'$ têm mesma área, pois eles têm mesma altura $\underline{h}$, relativamente ao lado $\overline{AB}$ (veja a figura abaixo).

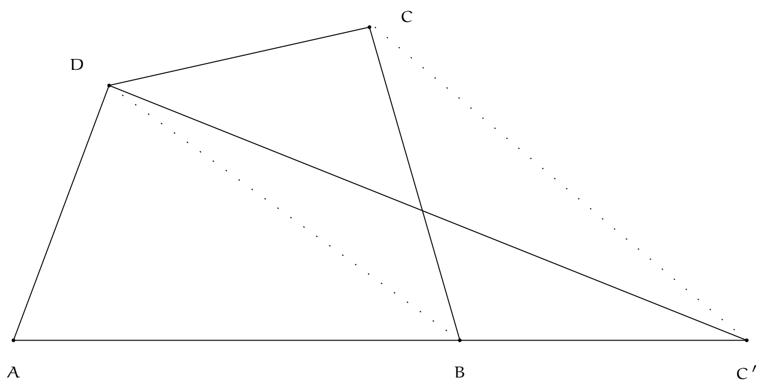


Numa primeira etapa "transformaremos" nosso polígono $\underline{\mathcal{P}}$, que no caso é um quadrilátero, em um triângulo equivalente ao mesmo.

Para exemplificar, consideremos o quadrilátero $ABCD$ como na figura abaixo.



Tracemos pelo vértice $\underline{C}$, uma reta paralela à diagonal $\overline{BD}$, que encontrará o segmento $\overline{AB}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{C'}$ (veja a figura abaixo).



Com isto os triângulos ΔCBD e $\Delta C'BD$ são equivalentes, ou seja,

$$\text{área}\,(\Delta DBC) = \text{área}\,(\Delta DBC') \tag{3.1}$$

De fato, têm mesma área, pois temos que o lado $\overline{BD}$ é comum a ambos, e têm a mesma altura, relativamente ao lado $\overline{BD}$, pois as retas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são paralelas.

Como

$$\begin{aligned}\text{área}\,(ABCD) &= \text{área}\,(\Delta ABD) + \underbrace{\text{área}\,(\Delta BDC)}_{\overset{(3.1)}{=}\text{área}(\Delta DBC')}\\ &= \text{área}\,(\Delta ABD) + \text{área}\,(\Delta BDC')\ ,\end{aligned}$$

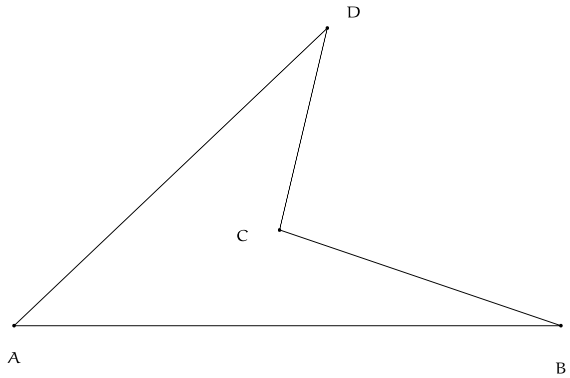
ou seja, o triângulo $\Delta ADC'$ é equivalente ao quadrilátero $ABCD$.

Observação 3.1.2

1. *Vale observar que podemos agir do mesmo se o quadrilátero* **não** *for convexo.*

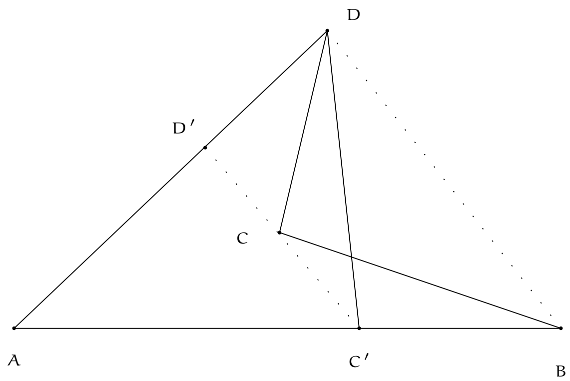
   Lembremos que um subconjunto $\underline{\mathcal{R}}$ *do plano é dito* **convexo** *se, dados dois pontos do mesmo, o segmento de reta que une esses dois pontos, deverá estar inteiramente contido no subconjunto* $\underline{\mathcal{R}}$.

2. *Para ilustrar temos que o quadrilátero da figura abaixo, que* **não** *é convexo.*



Porém a construção feita no início desta seção pode ser realizada também neste caso.

De fato, a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{BD}$ *passando pelo vértice* $\underline{C}$, *encontrará a reta* $\overleftrightarrow{AB}$ *em um ponto, que chamaremos de* $\underline{C'}$, *e a reta* $\overleftrightarrow{AD}$ *em um ponto, que denotaremos por* $\underline{D'}$ *(veja a figura abaixo).*



O triângulo $\Delta AC'D$ *é equivalente ao quadrilátero* $ABCD$, *pois a soma das áreas dos triângulos* $\Delta C'CB$ *e* $\Delta CDD'$ *é igual a área do triângulo* $\Delta C'DD'$ *(veja figura acima).*

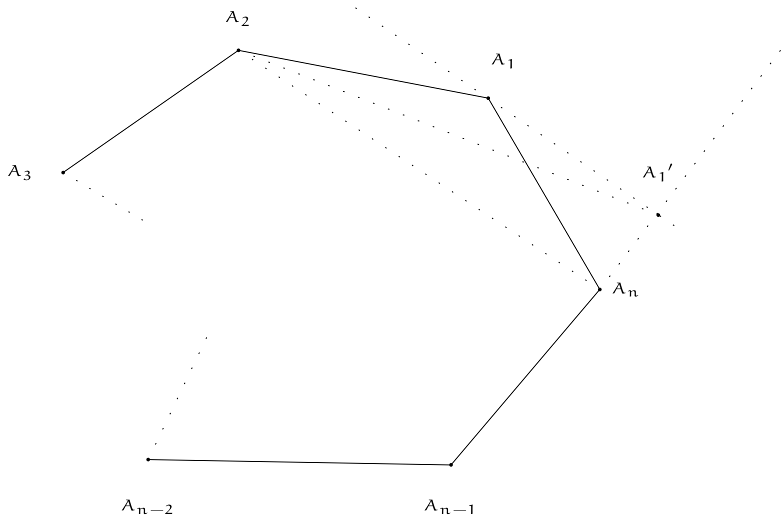
De fato, se denotarmo por $\underline{h}$, *a altura do triângulo* $\Delta C'D'D$, *relativamente ao lado* $\overline{D'C'}$, *então teremos:*

$$\begin{aligned} \text{área}(\Delta CDD') + \text{área}(\Delta C'CB) &= \frac{D'C \cdot h}{2} + \frac{CC' \cdot h}{2} \\ &= \frac{D'C' \cdot h}{2} \\ &= \text{área}(\Delta C'DD'). \end{aligned}$$

3.1.3 Polígonos em geral

Para resolvermos o problema de "transformar" um polígono $\underline{\mathcal{P}}$ geral, em um quadrado equivalente mostraremos, primeiramente, como "transformar" um polígono $\underline{\mathcal{P}}$ de $\underline{n}$-lados em um polígono, que denotaremos por $\underline{\mathcal{P}'}$, que tem $\underline{(n-1)}$-lados, equivalente polígono $\underline{\mathcal{P}}$.

Dado um polígono de $\underline{n}$-lados, que denotaremos por $\underline{A_1 A_2 \cdots A_n}$, tracemos pelo vértice $\underline{A_1}$, uma reta paralela ao lado $\overline{A_2 A_n}$, que encontrará a reta $\overleftrightarrow{A_{n-1} A_n}$ em um ponto, que denotaremos por $\underline{A_1{}'}$ (veja a figura abaixo).



Observemos que o polígono $\underline{A_1{}' A_2 \cdots A_n}$ (que tem $\underline{(n-1)}$-lados) é equivalente ao polígono $\underline{A_1 A_2 \cdots A_n}$ (que tem $\underline{n}$-lados).

De fato, na situação acima, se o polígono é convexo, os triângulos

$$\Delta A_2 A_n A_1 \quad \text{e} \quad \Delta A_2 A_n A_1'$$

são equivalentes (pois têm ao lado $\overline{A_2 A_n}$ em comum, e mesma altura, relativamente ao lado $\overline{A_2 A_n}$, pois as retas $\overleftrightarrow{A_2 A_n}$ e $\overleftrightarrow{A_1 A_1{}'}$ são paralelas).

Se o polígono $\underline{\mathcal{P}}$ não for convexo, agimos como no item 2. da Observação (3.1.2) acima e poderemos concluir o mesmo.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Desta forma "transformamos" um polígono $\underline{\mathcal{P}}$ de $\underline{n}$-lados em um polígono $\underline{\mathcal{P}'}$ de $\underline{(n-1)}$-lados que é equivalente ao polígono $\underline{\mathcal{P}}$.

Repetindo o processo acima (por indução) podemos "transformar" um polígono $\underline{\mathcal{P}}$, que têm $\underline{n}$-lados, em um triângulo, equivalente ao polígono $\underline{\mathcal{P}}$ e finalmente, este último em um quadrado equivalente ao memso (veja a seção (3.1.1)), ou seja, em um quadrado equivalenete ao polígono $\underline{\mathcal{P}}$ de $\underline{n}$-lados, dado inicialmente.

3.2 Partições do Plano

A seguir exibiremos alguns exemplos que tratarão do problema de dividir uma região limitada do plano em partes satisfazendo certas condições.

Definição 3.2.1 *Diremos que as figuras planas* $\underline{\mathcal{F}}$ *e* $\underline{\mathcal{F}'}$ *são* **semelhantes**, *com* **razão de semelhança** $\underline{\alpha > 0}$, *se existir uma aplicação* $\sigma : F \to F'$ *bijetora, que tem a seguinte propriedade:*

Para $X, Y \in \mathcal{F}$, *considerando-se* $X' \doteq \sigma(X)$, $Y' \doteq \sigma(Y) \in \mathcal{F}'$ *deveremos ter:*

$$X'Y' = \alpha \cdot XY.$$

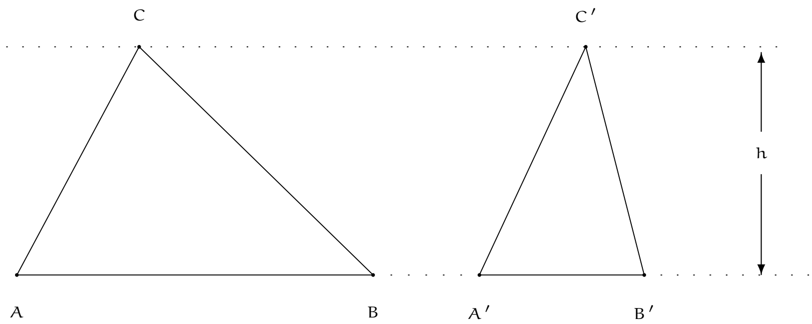
Neste caso, diremos que aplicação $\underline{\sigma}$ *é uma* **semelhança, de razão** $\underline{\alpha}$**, entre** $\mathcal{F}$ **e** $\mathcal{F}'$ *e os pontos* $\underline{X}$ *e* $\underline{X'}$ *considerados acima, serão ditos* **homólogos**.

Em várias situações que trataremos a seguir usaremos as seguintes propriedades básicas da Geometria plana:

P1. Se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas respectivas áreas é igual a razão entre os comprimentos das suas respectivas bases (relativas as alturas consideradas), isto é,

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} = \frac{AB}{A'B'},$$

onde $\underline{\mathcal{A}}$ e $\underline{\mathcal{A}'}$ denotam as áreas dos triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$, respectivamente (veja a figura abaixo).



De fato,

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} = \frac{\frac{AB \cdot h}{2}}{\frac{A'B' \cdot h}{2}} = \frac{AB}{A'B'}.$$

P2. A razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre as mesmas.

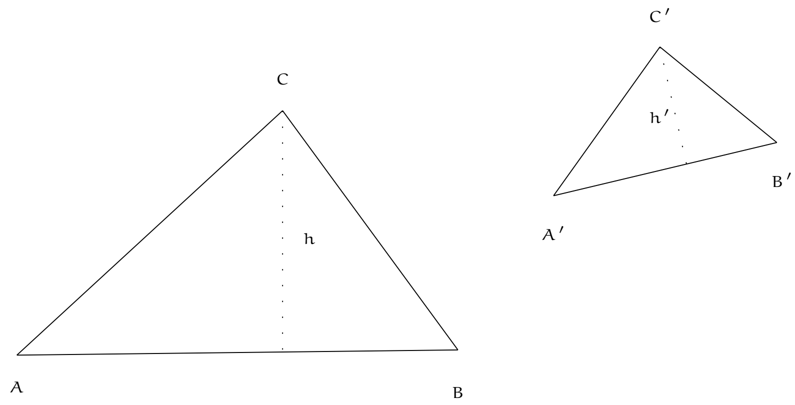
2.1 Para o caso de triângulos, temos que afirmação acima é válida.

De fato, sejam ΔABC e $\Delta A'B'C'$ triângulos semelhantes, ou seja, têm três ângulos iguais, ou ainda,

$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \quad \widehat{B} = \widehat{B'} \quad \text{e} \quad \widehat{C} = \widehat{C'}.$$

Então, do Teorema de Tales, sabemos que correspondentes elementos dos triângulos guardam uma mesma proporção, por exemplo (veja a figura abaixo):

$$\alpha \doteq \frac{AB}{A'B'} = \frac{h}{h'}. \tag{3.2}$$



Logo se $\underline{\mathcal{A}}$ e $\underline{\mathcal{A}'}$ denotam as áreas dos respectivos triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$, teremos

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} &= \frac{\frac{AB \cdot h}{2}}{\frac{A'B' \cdot h'}{2}} \\ &= \underbrace{\frac{AB}{A'B'}}_{\overset{(3.2)}{=}\alpha} \cdot \underbrace{\frac{h}{h'}}_{\overset{(3.2)}{=}\alpha} \\ &= \alpha^2,\end{aligned}$$

como afirmamos inicialmente.

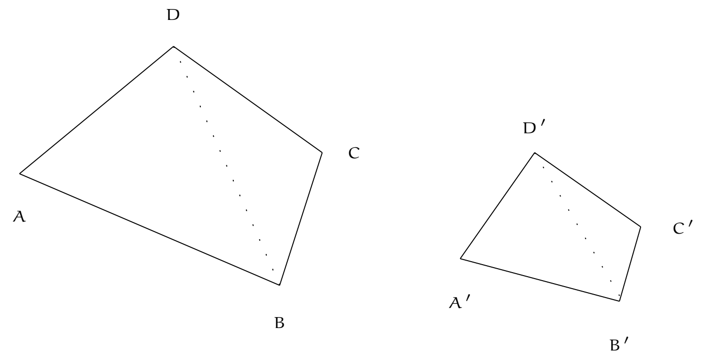
2.2 Para o caso de polígonos em geral, a afirmação acima também é válida.

De fato, pois podemos decompor os polígonos envolvidos em um número finito de triângulos justapostos que serão, dois a dois semelhantes, e aplicar o processo acima em cada um dos pares de triângulos semelhantes.

Se a razão de semelhança entre os dois polígonos é $\underline{\alpha}$, então a razão de semelhança entre os correspondentes triângulos da decomposição acima também será $\underline{\alpha}$.

Logo, do item acima, a razão entre as áreas dos correspondentes triângulos semelhantes na decomposição acima será $\underline{\alpha^2}$.

Logo, somando-se as áreas dos triângulos obtidos na decomposição de cada um dos polígonos, obteremos as áreas dos respectivos polígonos, e assim obtemos a razão $\underline{\alpha^2}$, entre as áreas dos polígonos dados incialmente.



Para ilustrar, notemos que, na figura acima, teremos:

$$\begin{aligned}\frac{\text{área}(ABCD)}{\text{área}(A'B'C'D')} &= \frac{\text{área}(\Delta ABD) + \text{área}(\Delta BCD)}{\Delta(A'B'D') + \text{área}(\Delta B'C'D')}\\ &= \frac{\alpha^2\,\text{área}(\Delta A'B'D') + \alpha^2\,\text{área}(\Delta B'C'D')}{\text{área}(\Delta A'B'D') + \text{área}(\Delta B'C'D')}\\ &= \alpha^2.\end{aligned}$$

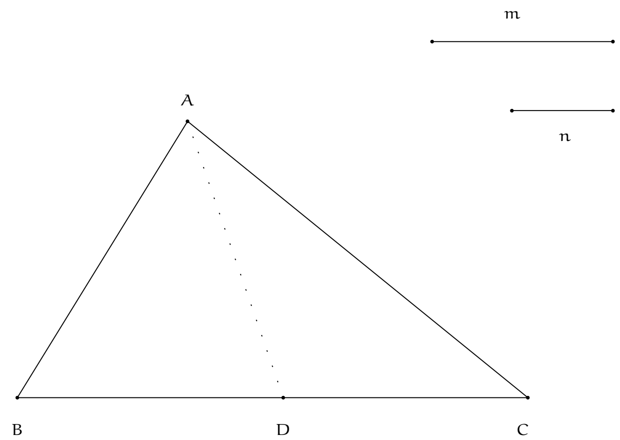
2.3 Para círculos a situação é análoga.

A verificação deste caso será deixada como exercício para o leitor.

2.4 Situações mais gerais podem ser encontrada em *Medida e Forma em Geometria* - Elon Lages Lima, IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, 1991, página 48, cuja verificação será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo 11.

Sejam $\underline{m}$ e $\underline{n}$ números reais positivos. Dado o triângulo ΔABC encontrar um ponto, que denotaremos por $\underline{D}$, pertencente ao lado $\overline{BC}$, de modo que a reta $\overleftrightarrow{AD}$ divida o triângulo em dois outros, a saber ΔADB e ΔACD, cujas áreas sejam proporcionais a $\underline{m}$ e $\underline{n}$.



Resolução:

Suponhamos que o ponto $\underline{D}$ já foi encontrado.

Como os triângulos ΔADB e ΔACD têm mesma altura, relativamente às bases $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$, respectivamente (que será igual a altura do ΔABC relativamente à base $\overline{BC}$), da Propriedade P1. acima, segue que se a razão entre as áreas dos triângulos ΔADB e ΔADC será

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{área}(ADB)}{\text{área}(ACD)} \overset{\text{Propriedade P1.}}{=} \frac{BD}{DC},$$

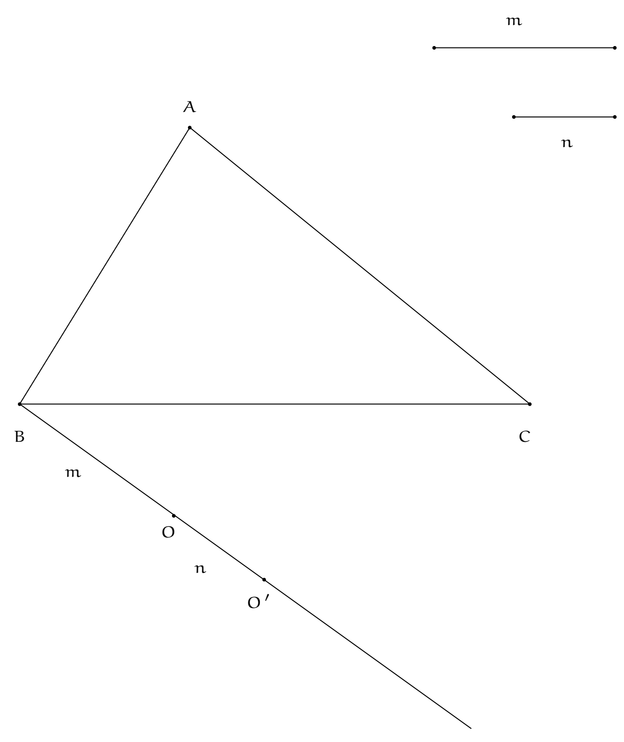
ou seja, a razão entre as respectivas bases deverá ser a mesma, a saber:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}.$$

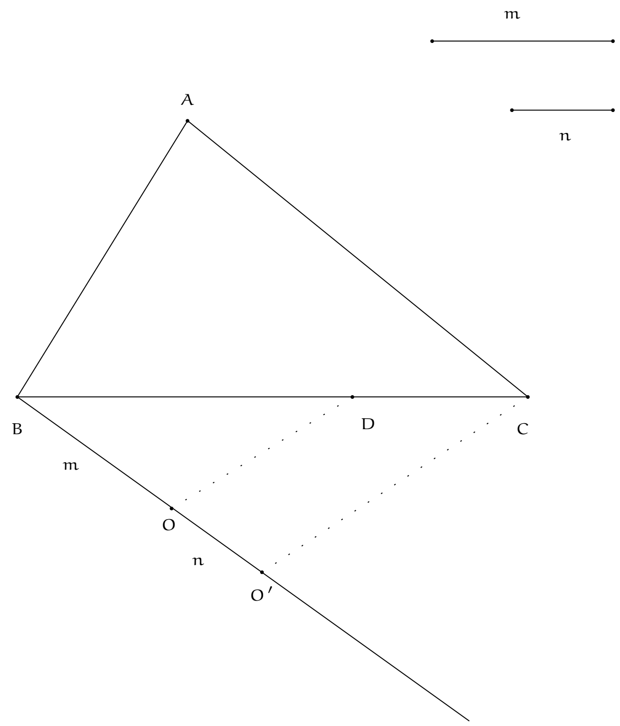
Com isto podemos obter o ponto $\underline{D}$, pertencente ao lado $\overline{BC}$ por meio da seguinte construção:

1. Consideremos uma semi-reta com extremos no ponto $\underline{B}$ e sobre esta reta, encontremos dois pontos, que indicaremos por $\underline{O}$ e $\underline{O'}$, tais que (veja a figura abaixo);

$$BO = m \quad \text{e} \quad OO' = n. \tag{3.3}$$



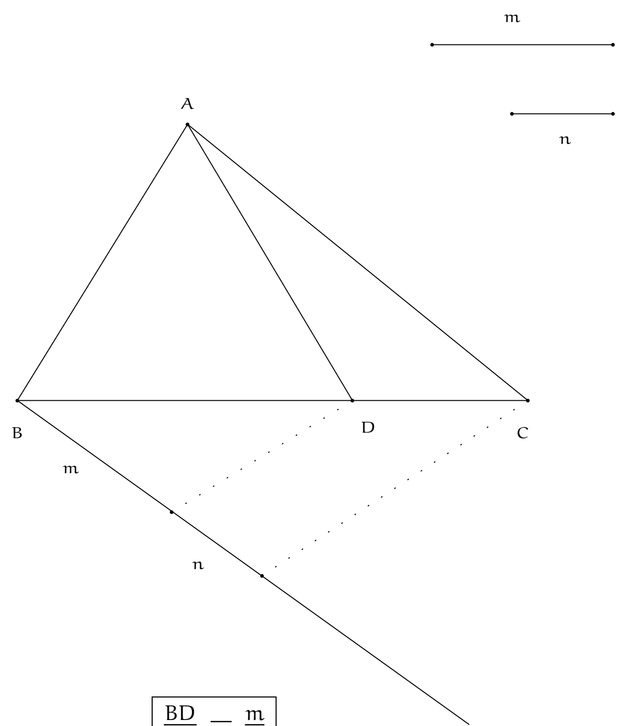
2. Tracemos a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{O'C}$, pelo ponto $\underline{O}$, que encontrará a semi-reta $\overrightarrow{BC}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{D}$ (veja a figura abaixo);



3. Como os triângulos ΔOBD e $\Delta O'BC$ são semelhantes (caso AAA) segue que

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BO}{OO'} \overset{(3.3)}{=} \frac{m}{n}.$$

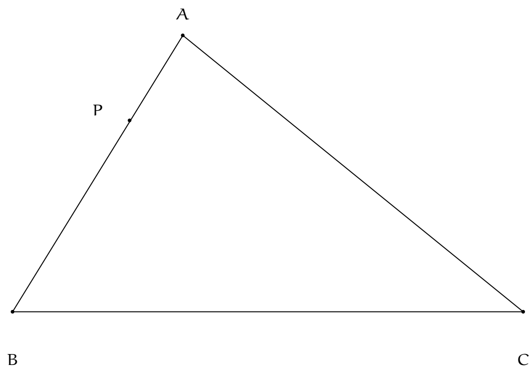
4. Pela Propriedade P1, os triângulos ΔABD e ΔADC resolvem o problema (veja figura abaixo).



$$\boxed{\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}}$$

Exemplo 12.

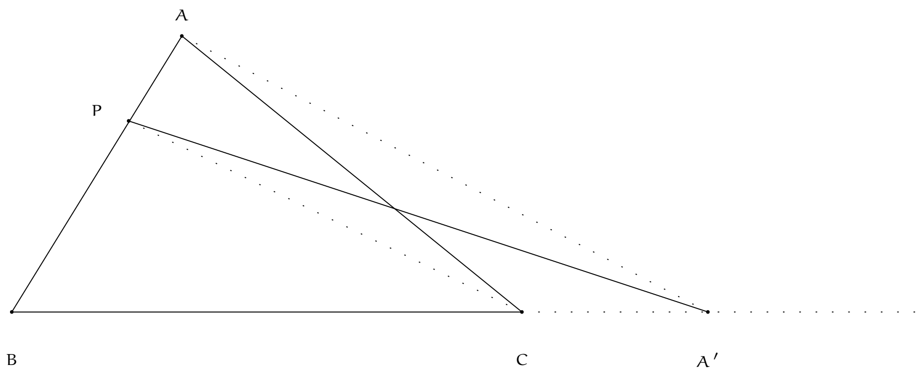
Dado um ponto, que denotaremos por $\underline{P}$, pertencente ao lado $\overline{AB}$, do triângulo ΔABC, traçar por esse ponto, uma reta que divida o triângulo em duas partes equivalentes (ou seja, dois polígonos que tenham a mesma área).



Resolução:

Temos a seguinte construção:

1. Tracemos pelo ponto $\underline{A}$ uma reta, paralela à reta $\overleftrightarrow{PC}$, que encontrará a semi-reta lado $\overrightarrow{BC}$ em um ponto, que denotaremos por $\underline{A'}$ (veja a figura abaixo);



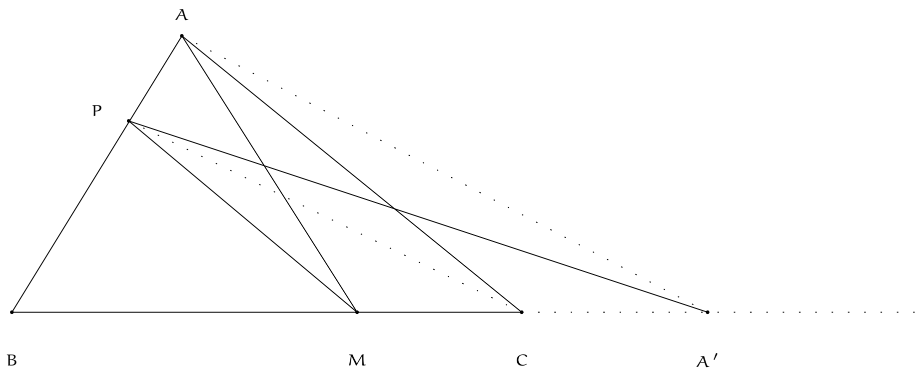
   Notemos que os triângulos $\Delta PA'C$ e ΔPAC são equivalentes pois têm mesma base, a saber, o segmento $\overline{PC}$, e mesma altura, relativa a esse lado, pois as retas $\overleftrightarrow{PC}$ e $\overleftrightarrow{AA'}$ são paralelas.

2. Denotemos por $\underline{M}$ o ponto médio do segmento $\overline{BA'}$.

   Afirmamos que a mediana $\overline{PM}$ do triângulo $\Delta PA'B$, divide o mesmo em duas regiões que são equivalentes.

   De fato, pois os triângulos ΔPMB e $\Delta PA'M$ têm mesma altura, relativamente às bases respectivas bases $\overline{BM}$ e $\overline{MA'}$ que têm mesmo comprimento, pois o ponto $\underline{M}$ é ponto médio do segmento $\overline{BA'}$ (veja a figura abaixo), assim, teremos:

$$\text{área}(\Delta PMB) = \text{área}(\Delta PA'M). \tag{3.4}$$



Logo o segmento $\overline{PM}$ também divide o triângulo ΔABC em duas partes equivalentes. De fato, pois:

$$\text{área}(\Delta ACB) = \text{área}(\Delta PMB) + \underbrace{\text{área}(PACM)}\,. \tag{3.5}$$

Mas:

$$\begin{aligned}\text{área}(\Delta ACB) &= \text{área}(\Delta PA'B)\\ &= \text{área}(\Delta PMB) + \underbrace{\text{área}(\Delta PA'M)}\,.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Logo, de (3.5) e (3.6), segue que

$$\text{área}(PACM) = \text{área}(\Delta PA'M) \overset{(3.4)}{=} \text{área}(\Delta PMB)\,.$$

Portanto

$$\text{área}(\Delta ACB) = \text{área}(\Delta PMB) + \text{área}(PACM)$$

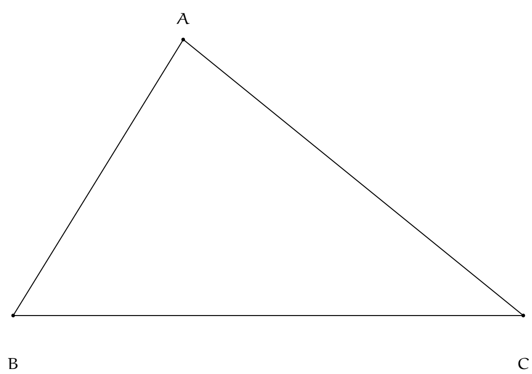
e

$$\text{área}(\Delta PACM) = \text{área}(PMB)\,,$$

completando a resolução do exercício.

Exemplo 13.

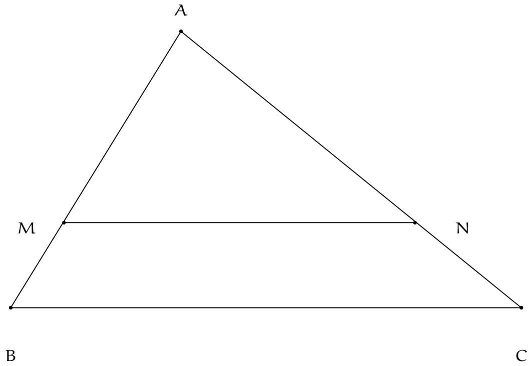
Dado o triângulo ΔABC, traçar uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$, que divida o mesmo em duas regiões que são equivalentes (ou seja, dois polígonos que têm mesma área).



Resolução:

Suponhamos que a construção esteja pronta (veja figura abaixo).

1. Denotemos por $\underline{M}$ e $\underline{N}$ os pontos pertencentes aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, tais que a reta $\overleftrightarrow{MN}$ é paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e o triângulo ΔANM e o paralelogramo $MNCB$ sejam equivalentes (ou seja, a reta $\overleftrightarrow{MN}$ é a reta procurada - veja a figura abaixo).



2. Como os triângulo ΔACB e ΔANM são semelhantes (pois a reta $\overleftrightarrow{MN}$ é paralela a reta $\overleftrightarrow{BC}$) segue, da Propriedade P2. acima, que

$$\frac{1}{2} = \frac{\text{área}(\Delta ANM)}{\text{área}(\Delta ACB)} \stackrel{\text{Propriedade P2.}}{=} \left(\frac{AM}{AB}\right)^2.$$

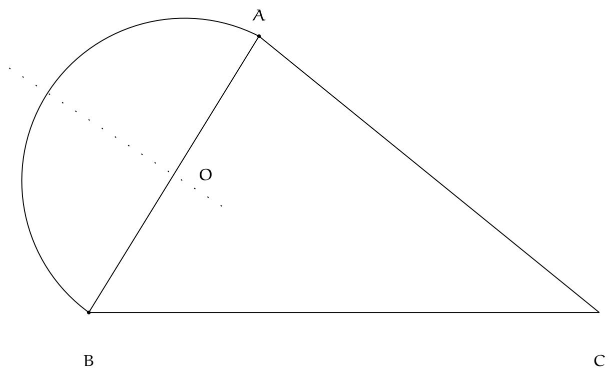
Logo

$$AM = \frac{\sqrt{2}}{2} AB. \tag{3.7}$$

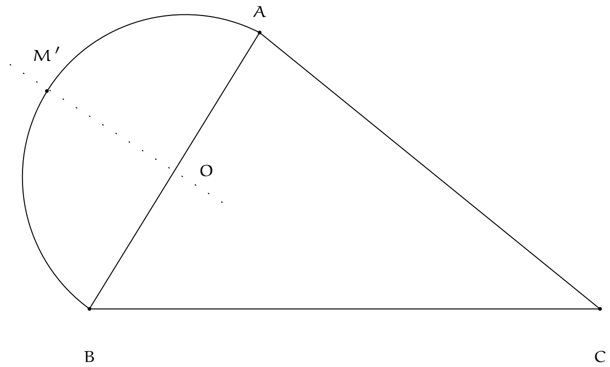
Portanto basta encontrarmos, geometricamente, o ponto $\underline{M}$ pertencente ao segmento $\overline{AB}$ com a propriedade (3.7).

Para isto temos a seguinte construção:

1. Traçemos uma semi-circunferência, de diâmetro $\overline{AB}$, ou seja, seu centro será um ponto, que chamaremos de $\underline{O}$, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e raio $\frac{AB}{2}$ (veja a figura abaixo);



2. Pelo ponto $\underline{O}$, traçamos uma reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$, que interceptará a semi-circunferência do item 1. acima, em ponto, que chamaremos de $\underline{M'}$ (veja a figura abaixo).



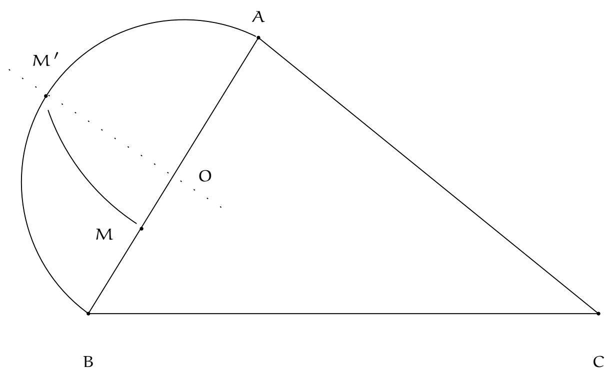
Como $\Delta AOM'$ é um triângulo retângulo no vértice $\underline{O}$, segue que

$$\begin{aligned}(AM')^2 &= (OM')^2 + (OA)^2\\ &= \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2\\ &= \frac{(AB)^2}{2},\\ \text{ou seja,}\quad AM' &= \frac{AB}{\sqrt{2}},\\ \text{ou ainda,}\quad AM' &= \frac{AB}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}AB.\end{aligned}$$

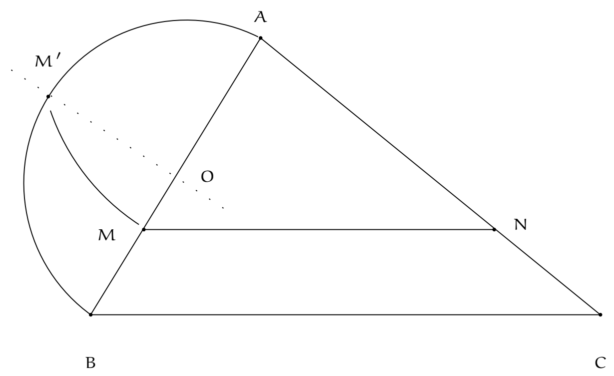
3. Assim encontramos o ponto $\underline{M}$, pertencente ao segmento $\overline{AB}$, de tal modo que

$$\begin{aligned}AM &= AM'\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}AB.\end{aligned}$$

Para isto basta traçarmos a circunferência de centro no ponto $\underline{A}$ e raio igual a $AM' = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$, que encontrará o segmento $\overline{AB}$ no ponto $\underline{M}$ (veja a figura abaixo);

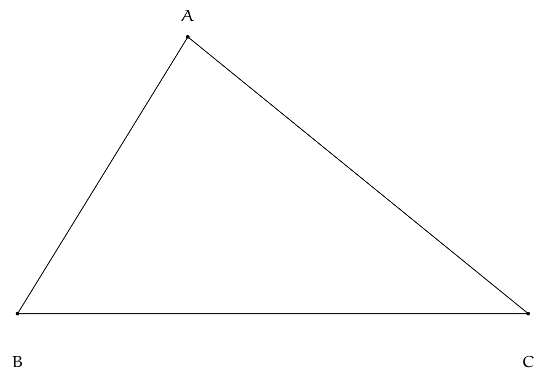


4. A reta procurara é a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$, que contém o ponto $\underline{M}$ (veja a figura abaixo).



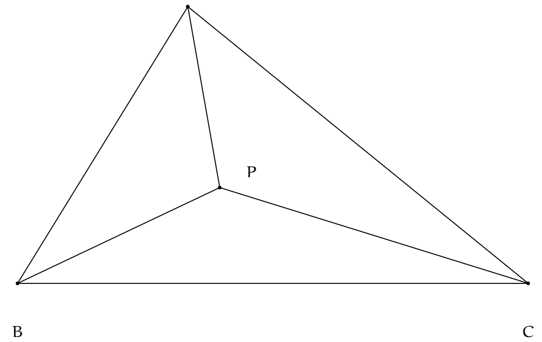
Exemplo 14.

Consideremos três números reais positivos, que chamaremos de $\underline{m}$, $\underline{n}$ e $\underline{p}$. Dado o triângulo ΔABC, determinar um ponto, que chamaremos de $\underline{P}$, pertencente ao seu interior, de tal modo que as áreas dos triângulos ΔPAB, ΔPBC e ΔPAC sejam, respectivamente, proporcionais aos segmentos de comprimentos $\underline{m}$, $\underline{n}$ e $\underline{p}$.



Resolução:

A situação geométrica é dada pela figura abaixo:

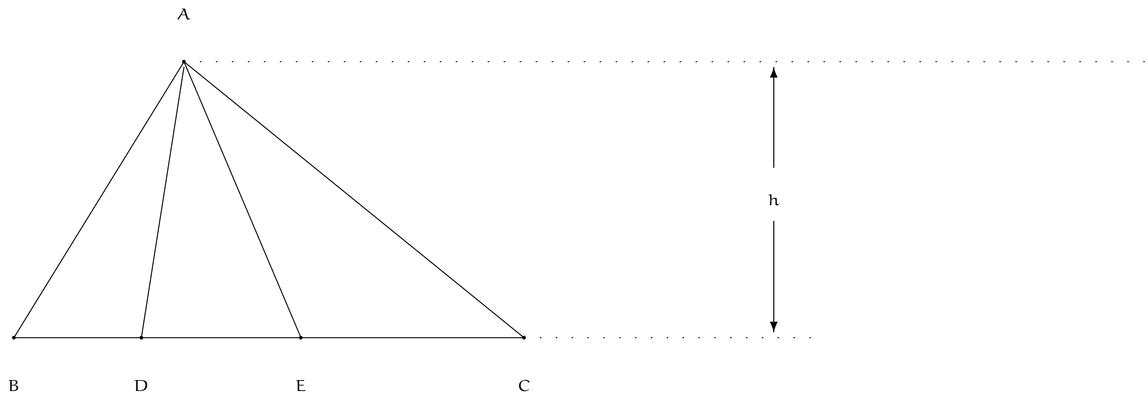


Queremos encontrar o ponto $\underline{P}$ pertencente ao interior do triângulo ΔABC, de tal modo que

$$\frac{\text{área}(\Delta PBA)}{\text{área}(\Delta PCB)} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\text{área}(\Delta PBA)}{\text{área}(\Delta PAC)} = \frac{m}{p} \quad \text{e} \quad \frac{\text{área}(\Delta PCB)}{\text{área}(\Delta PAC)} = \frac{n}{p}.$$

1. Primeiramente consideraremos o problema de encontrar dois pontos, que denotaremos por $\underline{D}$ e $\underline{E}$, pertencentes ao lado $\overline{BC}$, de forma que os triângulos ΔADB, ΔAED e ΔACE tenham áreas, respectivamente, proporcionais a $\underline{m}$, $\underline{n}$ e $\underline{p}$, isto é (veja a figura abaixo):

$$\frac{\text{área}(\Delta ADB)}{\text{área}(\Delta AED)} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\text{área}(\Delta ADB)}{\text{área}(\Delta ACE)} = \frac{m}{p} \quad \text{e} \quad \frac{\text{área}(\Delta AED)}{\text{área}(\Delta ACE)} = \frac{n}{p}.$$



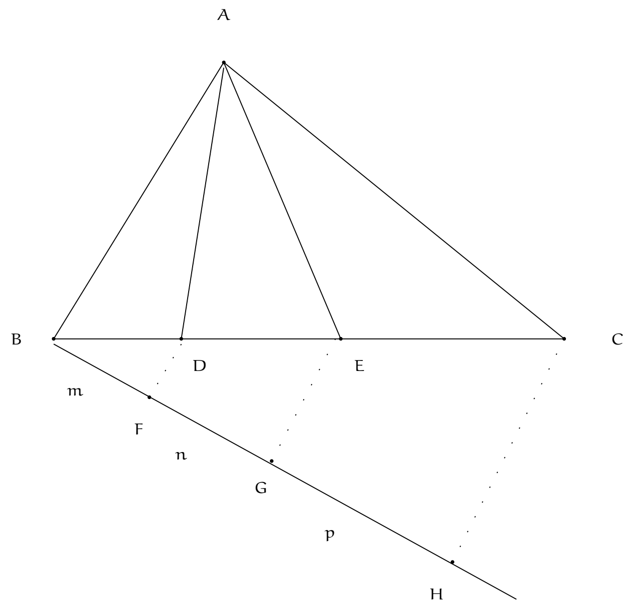
Notemos que, da Propriedade P1., como os triângulos ΔADB, ΔAED e ΔACE têm mesma altura, que indicaremos por $\underline{h}$, segue, das relações acima que:

$$\frac{\frac{BD}{2}\cdot h}{\frac{DE}{2}\cdot h} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\frac{BD}{2}\cdot h}{\frac{EC}{2}\cdot h} = \frac{m}{p} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{DE}{2}\cdot h}{\frac{EC}{2}\cdot h} = \frac{n}{p}$$

se, e somente se, $\dfrac{BD}{DE} = \dfrac{m}{n}, \quad \dfrac{BD}{EC} = \dfrac{m}{p} \quad \text{e} \quad \dfrac{DE}{EC} = \dfrac{n}{p},$

ou ainda,
$$\frac{BD}{m} = \frac{DE}{n} = \frac{EC}{p}. \tag{3.8}$$

Logo podemos obter os pontos $\underline{D}$ e $\underline{E}$ como indicado na figura abaixo:

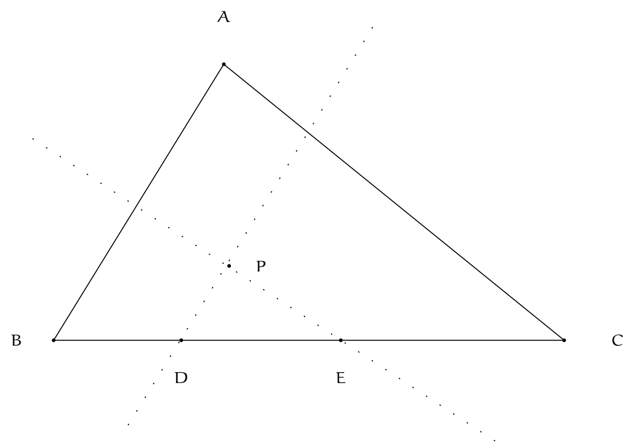


$$\boxed{BF = m\,,\ FG = n \text{ e } GH = p}$$

Notemos que as retas $\overleftrightarrow{FD}$, $\overleftrightarrow{GE}$ são paralelas à reta $\overleftrightarrow{HC}$.

2. Para finalizar, tracemos pelos pontos $\underline{D}$ e $\underline{E}$, retas paralelas as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente.

   Denotemos por $\underline{P}$, o ponto de interseção das retas acima (veja a figura abaixo).



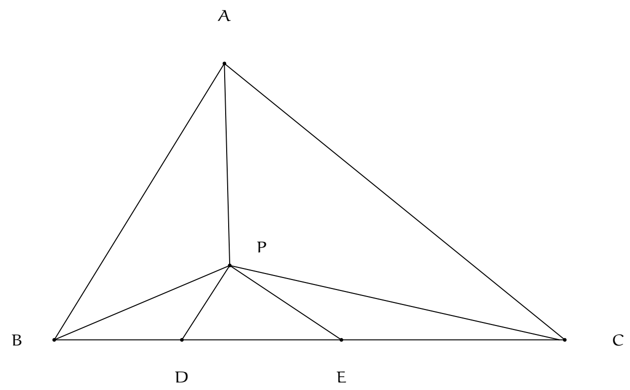
3. Afirmamos que os triângulos ΔPBA, ΔPCB e ΔPAC têm as propriedades pedidas.

De fato, (veja a figura abaixo) os triângulos ΔADB e ΔAPB têm mesma área, pois têm mesma base $\overline{AB}$ e mesma altura relativamente à base $\overline{AB}$, pois os pontos $\underline{D}$ e $\underline{P}$ pertencem a uma mesma reta que é paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, ou seja,

$$\text{área}(\Delta ADB) = \text{área}(\Delta APB)\,. \tag{3.9}$$

Notemos também que os triângulos ΔACE e ΔACP também têm mesma área, pois têm mesma base $\overline{AC}$ e mesma altura, relativamente à base $\overline{AC}$, pois os pontos $\underline{E}$ e $\underline{P}$ pertencem a uma mesma reta que é paralela à reta $\overleftrightarrow{AC}$, ou seja,

$$\text{área}(\Delta ACE) = \text{área}(\Delta PAC). \tag{3.10}$$



Mas,

$$\text{área}(\Delta ACB) = \text{área}(\Delta ADB) + \text{área}(\Delta AED) + \text{área}(\Delta ACE)\,. \tag{3.11}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\text{área}(\Delta ACB) &= \text{área}(\Delta APB) + \text{área}(\Delta PCB) + \text{área}(\Delta PAC)\\ &\overset{(3.9)\text{ e }(3.10)}{=} \text{área}(\Delta ADB) + \text{área}(\Delta PCB) + \text{área}(\Delta ACE)\,.\end{aligned}$$

Comparando a identidade acima com (3.11) obteremos:

$$\text{área}(\Delta PCB) = \text{área}(\Delta AED). \tag{3.12}$$

Notemos que os triângulos ΔADB e ΔAED têm mesma altura, relativamente às bases $\overline{BD}$ e $\overline{DE}$, respectivamente (veja a figura acima), assim:

$$\begin{aligned}\frac{\text{área}(\Delta APB)}{\text{área}(\Delta PCB)} &\overset{(3.9)\text{ e }(3.12)}{=} \frac{\text{área}(\Delta ADB)}{\text{área}(\Delta AED)}\\ &= \frac{\frac{BD}{2}\cdot h}{\frac{DE}{2}\cdot h}\\ &= \frac{BD}{DE}\\ &\overset{(3.8)}{=} \frac{m}{n}\,.\end{aligned}$$

Notemos também que os triângulos ΔAED e ΔACE têm mesma altura, relativamente às bases $\overline{DE}$ e $\overline{EC}$, respectivamente (veja a figura acima), assim:

$$\frac{\text{área}(\Delta PCB)}{\text{área}(\Delta PAC)} \overset{(3.10)\text{ e }(3.12)}{=} \frac{\text{área}(\Delta AED)}{\text{área}(\Delta ACE)} = \frac{\frac{DE}{2}\cdot h}{\frac{EC}{2}\cdot h} = \frac{DE}{EC} \overset{(3.8)}{=} \frac{n}{p}\,.$$

De modo semelhante (deixaremos como exercício para o leitor) mostra-se que

$$\frac{\text{área}(\Delta PBA)}{\text{área}(\Delta PAC)} = \frac{m}{p}\,.$$

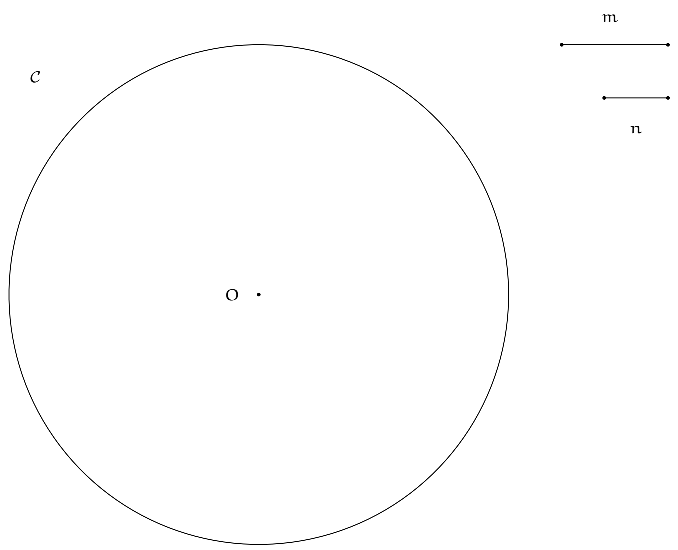
Portanto

$$\frac{\text{área}(\Delta PBA)}{\text{área}(\Delta PCB)} = \frac{m}{n}\,, \quad \frac{\text{área}(\Delta PBA)}{\text{área}(\Delta PAC)} = \frac{m}{p} \quad \text{e} \quad \frac{\text{área}(\Delta PCB)}{\text{área}(\Delta PAC)} = \frac{n}{p}\,,$$

completando a resolução.

Exemplo 15.

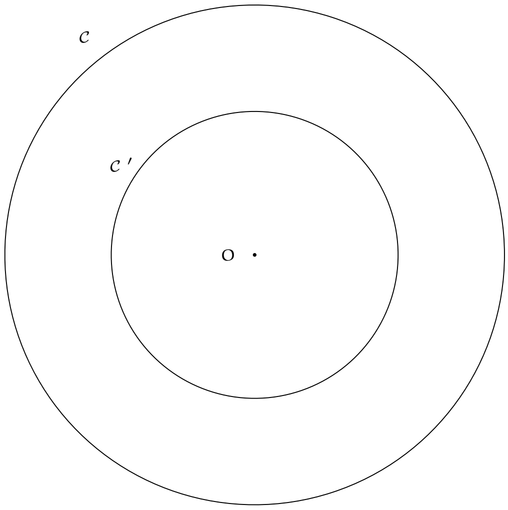
Consideremos dois números reais positivos, que denotaremos por $\underline{m}$ e $\underline{n}$. Dado uma circunferência, que indicaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, traçar uma outra circunferência, que chamaremos de $\underline{\mathcal{C}'}$, concêntrica à circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, contida no interior da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, de modo que as áreas do círculo menor e da coroa determinada pelas circunferências sejam proporcionais ao $\underline{m}$ e $\underline{n}$.



Resolução:

Denotemos por $\underline{r}$ e $\underline{O}$, o raio e o centro da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, respectivamente.

Queremos construir uma circunferência $\underline{\mathcal{C}\,'}$, de centro no ponto $\underline{O}$ e raio, que chamaremos de $\underline{r'}$, de modo que a área do círculo determinado pela circunferência $\underline{\mathcal{C}\,'}$ e a área exterior a circunferência $\underline{\mathcal{C}\,'}$ e interior a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$, sejam proporcionais a $\underline{m}$ e $\underline{n}$, respectivamente (veja a figura abaixo).



Observemos que deveremos ter:

$$\text{área}(\mathcal{C}) = \text{área}(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}\,') + \text{área}(\mathcal{C}\,').$$

Notemos que, se encontrarmos $\underline{r'}$, tal que

$$\frac{\text{área}(\mathcal{C}\,')}{\text{área}(\mathcal{C})} = \frac{m}{m+n},$$

então teremos

$$\begin{aligned}
\frac{\text{área}(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}\,')}{\text{área}(\mathcal{C}\,')} &= \frac{\text{área}(\mathcal{C}) - \text{área}(\mathcal{C}')}{\text{área}(\mathcal{C}\,')} \\
&= \frac{\text{área}(\mathcal{C})}{\text{área}(\mathcal{C}\,')} - 1 \\
&= \frac{m+n}{m} - 1 \\
&= \frac{n}{m},
\end{aligned}$$

cujo inverso é o que queremos, ou seja, teremos:

$$\frac{\text{área}(\mathcal{C}\,')}{\text{área}(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}\,')} = \frac{m}{n}.$$

Lembremos que, da Propriedade P2., teremos

$$\frac{\text{área}(\mathcal{C}')}{\text{área}(\mathcal{C})} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2,$$

ou seja, precisamos encontrar $r' > 0$, de modo que

$$\frac{m}{m+n} = \frac{\text{área}(\mathcal{C}\,')}{\text{área}(\mathcal{C})} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2,$$

ou seja, $r' > 0$, deverá satisfazer a seguinte relação:

$$\frac{r'^2}{r^2} = \frac{m}{m+n}. \tag{3.13}$$

Para isto agimos da seguinte forma:

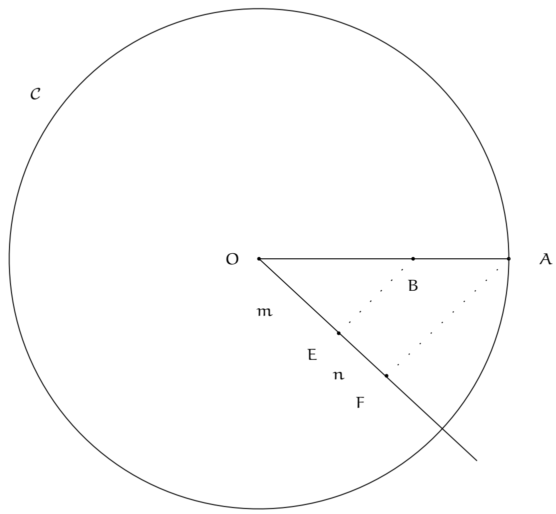
1. Consideremos o segmento $\overline{OA}$, onde $A \in \mathcal{C}$, e um ponto, que chamaremos de B, pertencente ao segmento $\overline{OA}$, de tal modo que

$$\frac{OB}{BA} = \frac{m}{n}.$$

Para isto basta considerar, sobre uma semireta que tem origem no ponto O, diferente da semi-reta $\overrightarrow{OA}$, dois pontos, que chamaremos de E e F, de modo que

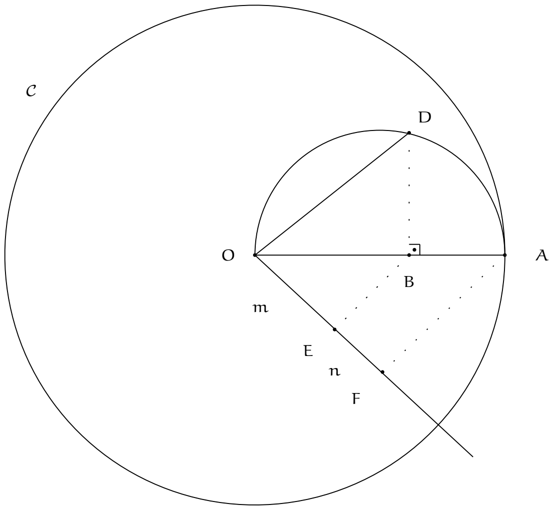
$$OE = m \quad \text{e} \quad EF = n.$$

Na figura abaixo o segmento $\overline{BE}$ é paralelo ao segmento $\overline{AF}$ e assim obtemos o ponto B, com a propriedade acima.



$\boxed{OE = m \text{ e } EF = n}$

2. Traçando-se a semi-circunferência, cujo diâmetro é igual a $\overline{OA}$ (de centro no seu ponto médio) e a reta perpendicular ao segmento $\overline{OA}$, contendo o ponto B, encontraremos um ponto, que indicaremos por D, na interseção das mesmas (veja a figura abaixo).



$$\boxed{OE = m \text{ e } EF = n}$$

3. Observemos que o triângulo ΔODA é retângulo no vértice $\underline{D}$, logo

$$OD^2 = OB \cdot OA\,. \tag{3.14}$$

Da semelhança dos triângulos ΔOBE e ΔOAF (caso AAA) segue que

$$\frac{OB}{OA} = \frac{m}{m+n}\,,$$

mas

$$OA = r\,,$$

assim teremos:

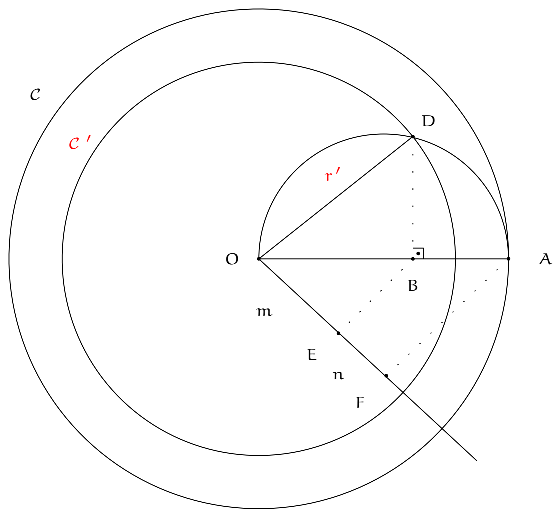
$$OB = \frac{m}{m+n} \cdot r\,.$$

Logo

$$OD^2 \overset{(3.14)}{=} \frac{m}{m+n} \cdot r^2\,,$$

$$\text{ou ainda,} \quad \frac{OD^2}{r^2} = \frac{m}{m+n}\,, \quad \text{ou seja,} \quad r' \doteq OD$$

satisfaz a relação (3.13) e assim será o raio da circunferência $\underline{\mathcal{C}'}$ procurada, completando a resolução (veja a figura abaixo).

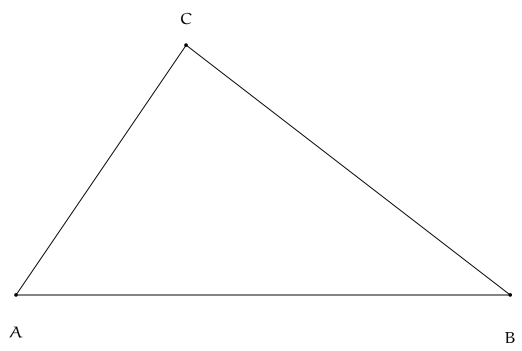


$$\boxed{\mathrm{OE} = m \text{ e } \mathrm{EF} = n}$$

3.3 Exercícios

Exercício 3.3.1 *Dado um triângulo ΔABC, construir um triângulo $\Delta A'B'C'$ equivalente ao triângulo ΔABC tal que*

$$\widehat{A'} = \widehat{A} \quad e \quad A'B' = A'C'.$$

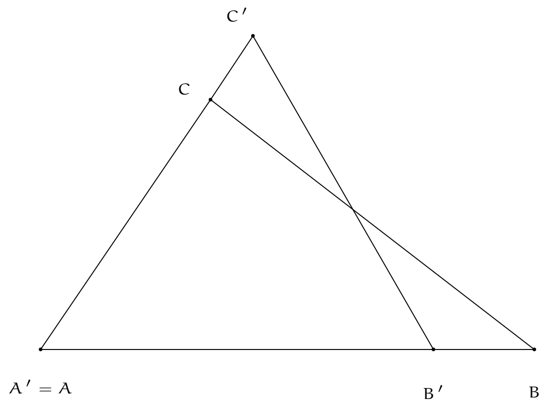


Resolução:

Suponhamos que o triângulo $\Delta A'B'C'$ está construído.

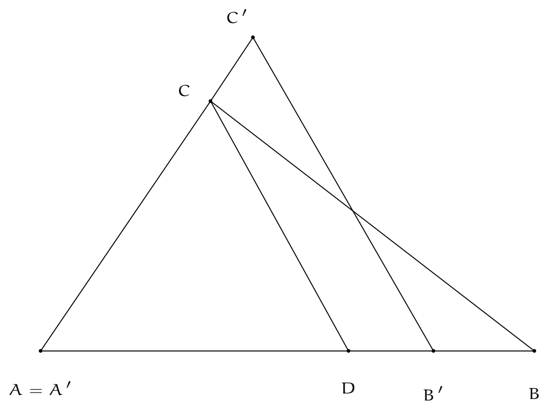
Podemos supor, sem perda de generalidade, que (veja figura abaixo)

$$A' = A.$$



Denotemos por $\underline{D}$, um ponto pertencente ao segmento $\overline{AB}$, tal que (veja a figura abaixo)

$$AD = AC.$$



Observemos que os triângulo $\Delta AC'B'$ e ΔACD são semelhantes, pois temos um ângulo comum, a saber, o ângulo $\widehat{A}$, $AC = AD$ e $AC' = AB'$, ou seja, os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{C'B'}$ são paralelos.

Logo, da Propriedade P2., segue-se que

$$\frac{\text{área}(\Delta ACD)}{\text{área}(\Delta AC'B')} = \left(\frac{AC}{AC'}\right)^2. \tag{3.15}$$

Por outro lado, notemos que as alturas dos triângulos ΔACD e ΔACB, relativamente as bases $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ são iguais e seu vlaor comum denotaremos por $\underline{h}$ (veja a figura acima).

Assim teremos

$$\frac{\text{área}(\Delta ACD)}{\text{área}(\Delta ACB)} = \frac{\frac{AD}{2} \cdot h}{\frac{AB}{2} \cdot h} \overset{AD=AC}{=} \frac{AC}{AB}. \tag{3.16}$$

Logo, de (3.15) e (3.16), segue que

$$\left(\frac{AC}{AC'}\right)^2 = \frac{AC}{AB}, \tag{3.17}$$

$$\text{ou seja,} \quad (AC')^2 = AB \cdot AC.$$

Portanto os triângulos $\Delta AC'B'$ e ΔACB terão mesma área.

De fato, notemos que,

$$
\begin{aligned}
\frac{\text{área}(\Delta ACD)}{\text{área}(\Delta AC'B')} &\overset{\text{Prop. P2.}}{=} \left(\frac{AC}{AC'}\right)^2 \\
&\overset{(3.17)}{=} \frac{AC}{AB} \\
&\overset{(3.16)}{=} \frac{\text{área}(\Delta ACD)}{\text{área}(\Delta ABC)}\,, \\
\text{isto é,} \quad \text{área}(\Delta AC'B') &= \text{área}(\Delta ABC)\,.
\end{aligned}
$$

Logo basta obter o ponto, que indicaremos por $\underline{C'}$, pertencente à semi-reta $\overset{\mapsto}{AC}$, de tal modo que

$$(AC')^2 = AB \cdot AC\,.$$

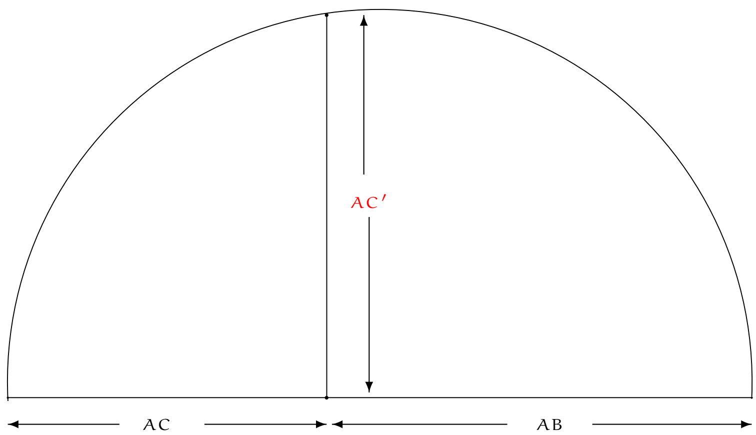
Para isto lembremos que num triângulo retângulo temos (ver Observação (2.5.1) item 2.)

$$h^2 = m \cdot n\,,$$

ou seja, basta construimos um triângulo retângulo de tal modo que a base oposta ao ângulo reto tenha comprimento

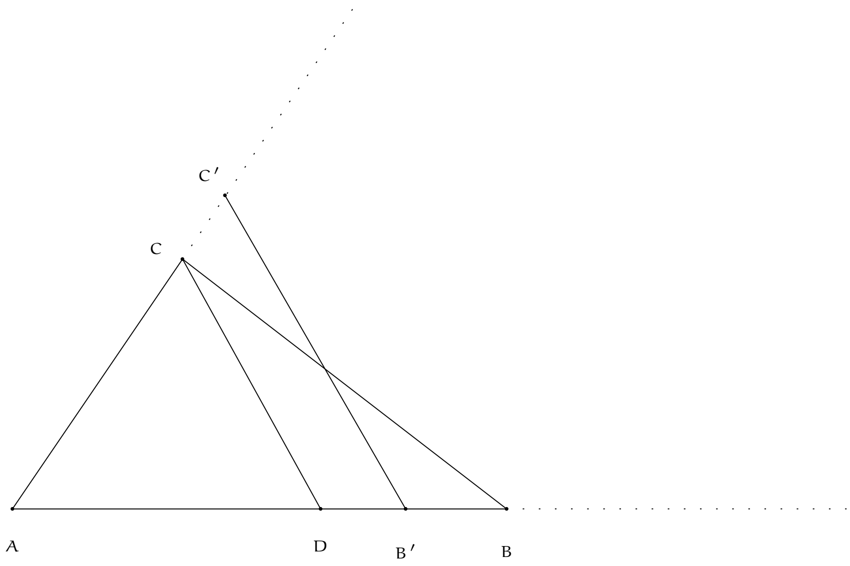
$$AB + AC\,.$$

Com isso sua altura terá comprimento $\underline{AC'}$ (veja a figura abaixo).

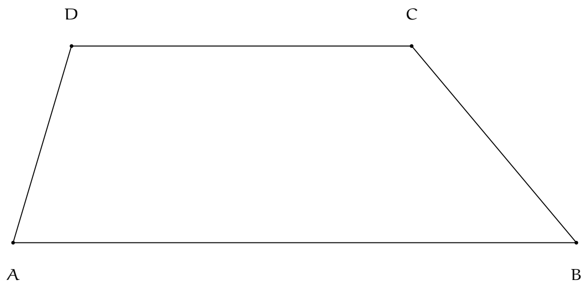


Logo teremos como construir o triângulo $\Delta AB'C'$ com as propriedades pedidas, bastanto, para tanto, transportarmos o comprimento $\underline{AC'}$, para o lado $\overset{\mapsto}{AC}$ do ângulo $\widehat{A}$.

O ponto $\underline{B'}$ será obtido da interseção da circunferência, de centro em $\underline{A}$ e raio $\overline{AC'}$, com a semi-reta $\overset{\mapsto}{AB}$ (veja a figura abaixo).

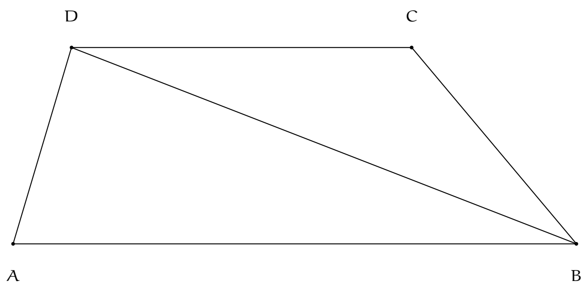


Exercício 3.3.2 *Construir um quadrado equivalente a um trapézio* ADCB *dado.*

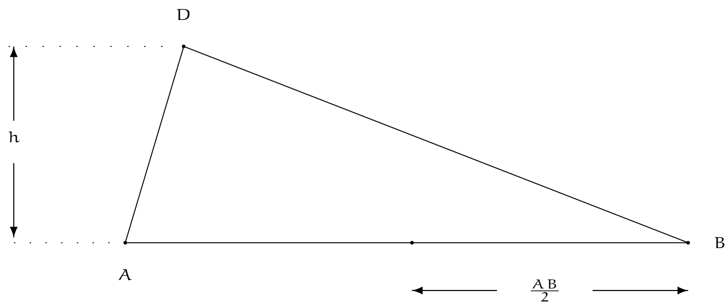


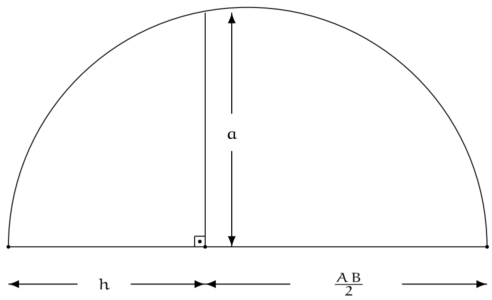
Resolução:

Consideremos os triângulo ΔADB e ΔBDC como na figura abaixo.



1. Podemos transformar cada um desses triângulos em quadrados equivalentes, para isto temos a figura abaixo:





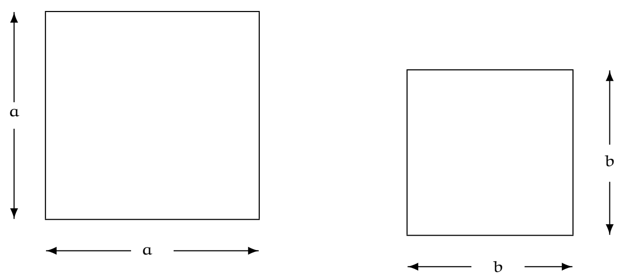
Com o segmento de comprimento $\underline{a}$, obtido acima, podemos construir um quadrado que é equivalente ao triângulo ΔADB.

Lembremos que

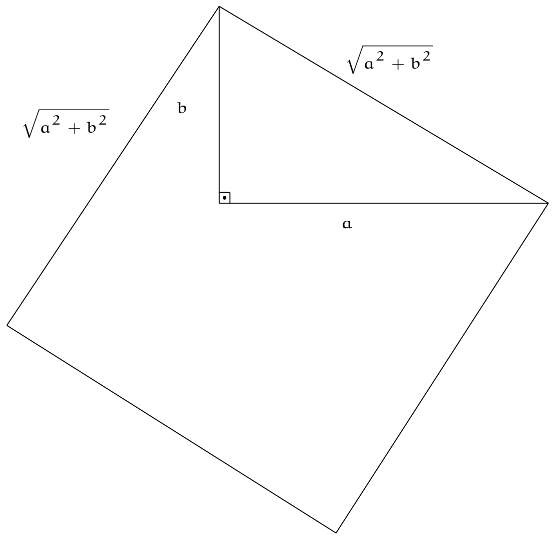
$$a^2 = \frac{AB}{2} \cdot h\,.$$

Agindo do mesmo modo com o triângulo ΔBDC obtemos o segmento de comprimento $\underline{b}$, com o qual podemos construir um quadrado que é equivalente ao triângulo ΔBDC.

2. Logo o trapézio $ADCB$ será equivalente aos dois quadrados cujos lados têm comprimentos $\underline{a}$ e $\underline{b}$, obtidos acima, isto é, a área do trapézio $ADCB$ será $a^2 + b^2$.

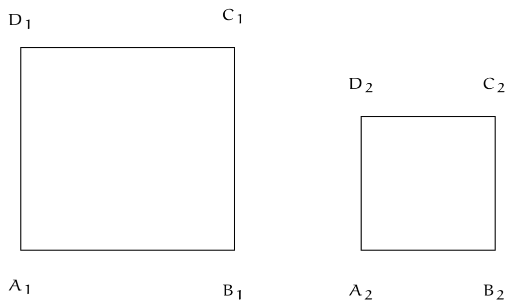


3. Podemos agora construir um quadrado de lado $\sqrt{a^2 + b^2}$ (veja a figura abaixo);



4. Assim o quadrado cujo lado tem comprimento $\sqrt{a^2 + b^2}$ será equivalente ao trapézio $ABCD$, pois sua área será igual a $a^2 + b^2$, como queríamos.

Exercício 3.3.3 *Construir um quadrado cuja área seja a soma das áreas de dois outros quadrados dados.*



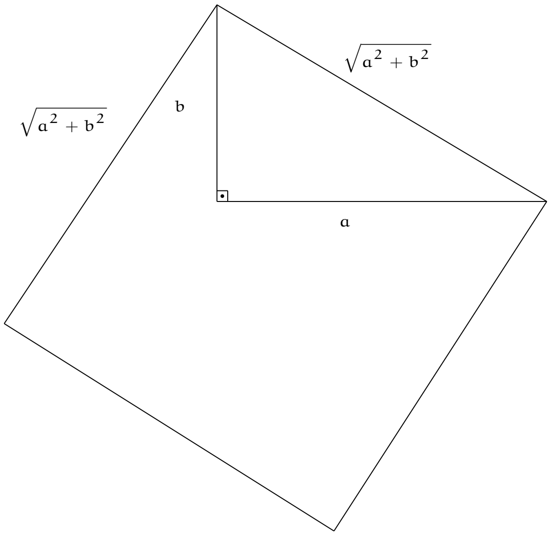
Resolução:

Podemos repetir as idéias usadas no Exercício anterior.

Mas claramente, consideremos quatro pontos, que indicaremos por $\underline{A_1}$, $\underline{A_2}$, $\underline{B_1}$ e $\underline{B_2}$, de modo que

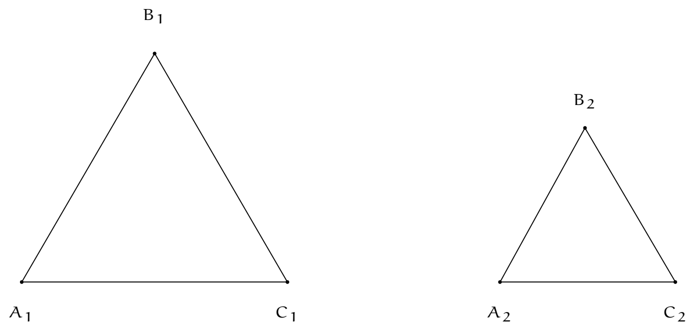
$$A_1B_1 = a \quad \text{e} \quad A_2B_2 = b\,.$$

Com isto podemos fazer a seguinte contrução:



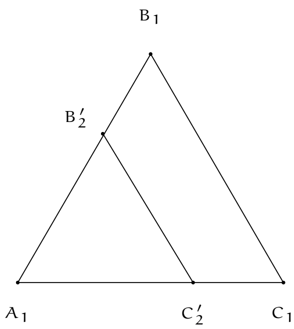
O quadrado construído acima, cujo lado tem comprimentos $\sqrt{a^2+b^2}$, terá área igual a a^2+b^2, que é igual a soma das áreas dos dois quadrados dados, com o queríamos.

Exercício 3.3.4 *Construir um triângulo cuja área seja a diferença das áreas de dois triângulos equiláteros dados.*



Resolução:

Como os triângulos $\Delta A_1B_1C_1$ e $\Delta A_2B_2C_2$ são equiláteros, podemos obter dois pontos, que indicaremos por B_2' e C_2', pertencentes aos segmentos $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_1C_1}$, respectivamente, de modo que os triângulos $\Delta A_1B_2'C_2'$ e $\Delta A_2B_2C_2$ sejam equivalentes (veja a figura abaixo).

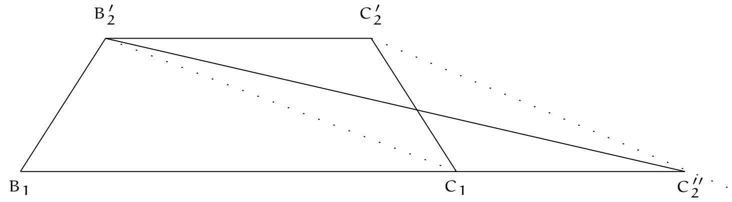


Com isto a diferença das áreas dos dois triângulos será igual a área do trapézio $B_2'B_1C_1C_2'$.

Podemos então transformar o trapézio acima num triângulo equivalente ao mesmo.

Para isto basta considerar a reta paralela a reta $\overleftrightarrow{B_2'C_1}$, que contém o ponto $\underline{C_2'}$.

Esta reta interceptará a reta $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{C_2''}$ (veja figura abaixo).



O triângulo $\Delta B_1C_2''B_2'$ é equivalente ao trapézio $B_1C_1C_2'B_2'$ e portanto sua área é igual a diferença das areas dos triângulos $\Delta A_1B_1C_1$ e $\Delta A_2B_2C_2$, como queríamos mostrar.

Exercício 3.3.5 *Construir um triângulo equilátero equivalente a um triângulo dado.*

<u>**Resolução:**</u>

Exercício 3.3.6 *Dado o triângulo* ΔABC, *construir um triângulo* $\Delta A'B'C'$, *que seja equivalente triângulo* ΔABC, *conhecendo-se dois lados do triângulo* $\Delta A'B'C'$.

<u>**Resolução:**</u>

Exercício 3.3.7 *Dados uma quadrado e os comprimentos* $\underline{m}$ *e* $\underline{n}$ *de dois segmentos, traçar por um dos vértices do quadrado, uma reta que divida a sua área em partes proporcionais a* $\underline{m}$ *e* $\underline{n}$.

<u>**Resolução:**</u>

Exercício 3.3.8 *Inscrever em uma circunferência dada, um retângulo equivalente a um quadrado dado.*

<u>**Resolução:**</u>

Exercício 3.3.9 *Dado um triângulo* ΔABC, *traçar um segmento* $\overline{DE}$, *paralelo ao segmento* $\overline{BC}$, *de modo que a área do triângulo* ΔADE *seja* $\dfrac{2}{3}$ *da área do triângulo* ΔABC.

<u>**Resolução:**</u>

Exercício 3.3.10 *Determinar o ponto* $\underline{P}$, *pertencente ao interior do triângulo* ΔABC, *de modo que as áreas dos triângulos* ΔPAB, ΔPBC *e* ΔPCA *sejam iguais.*

<u>**Resolução:**</u>

Exercício 3.3.11 *Denotemos por* $\underline{\mathrm{P}}$ *um ponto pertencente ao lado* $\overline{\mathrm{AB}}$ *do triângulo* $\Delta\mathrm{ABC}$. *Traçar pelo ponto* $\underline{\mathrm{P}}$, *duas retas, de modo que estas dividam o triângulo* $\Delta\mathrm{ABC}$ *em três partes, que tenham áreas iguais.*

Resolução:

Exercício 3.3.12 *Denotemos por* $\underline{\mathrm{P}}$ *um ponto pertencente ao lado* $\overline{\mathrm{AB}}$ *de um quadrilátero convexo* $\Delta\mathrm{ABCD}$. *Traçar pelo ponto* $\underline{\mathrm{P}}$, *uma reta que divida o quadrilátero em duas partes equivalentes.*

Resolução:

Exercício 3.3.13 *Sejam* $\underline{\mathrm{r}}$ *e* $\underline{\mathrm{s}}$ *duas retas concorrentes contendo o ponto* $\underline{\mathrm{A}}$ *e denotemos por* $\underline{\mathrm{M}}$ *um ponto que não pertence a nenhuma das duas retas acima. Encontrar um ponto* $\underline{\mathrm{B}}$, *pertencente à reta* $\underline{\mathrm{r}}$, *e um ponto* $\underline{\mathrm{C}}$, *pertencente à reta* $\underline{\mathrm{s}}$, *de modo que o segmento* $\overline{\mathrm{BC}}$ *contenha o ponto* $\underline{\mathrm{M}}$ *e a área do triângulo* $\Delta\mathrm{ABC}$ *seja a menor possível.*

Resolução:

Capítulo 4

Conceitos Básicos de Geometria Descritiva

O objetivo destes próximos capítulos é desenvolver aspectos básicos da Geometria Descritiva.

Utilizaremos a seguinte notação ao longo destes próximos capítulos:

Notação 4.0.1

1. *Os pontos do espaço serão indicados por letras maiúsculas:* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \cdots$.
2. *As retas do espaço serão indicadas por letras minúculas:* $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \cdots$.
3. *Os planos do espaço serão indicadas por letras gregas minúsuclas:* $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$.

4.1 Sistemas de Projeções

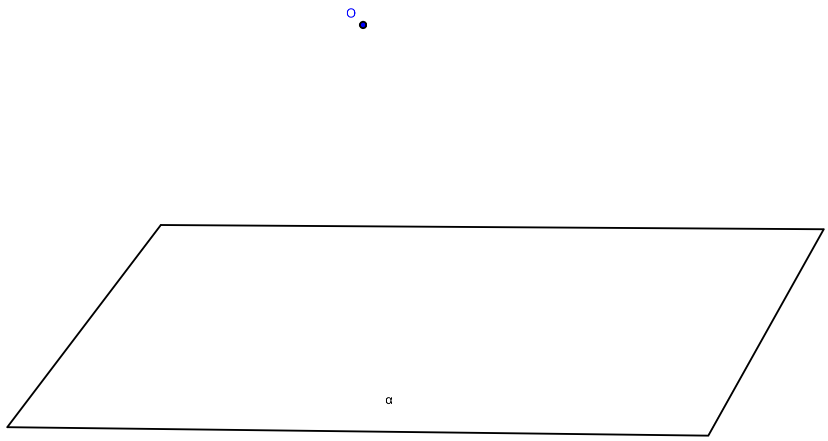
Estudaremos dois tipos de sistemas de projeções, a saber: o <u>**cônico**</u> (utilizado em Perspectiva) e o <u>**cilíndrico**</u> (utilizado em Geometria Descritiva).

A seguir introduziremos esses dois sistemas e daremos algumas propriedades relacionadas a cada um destes.

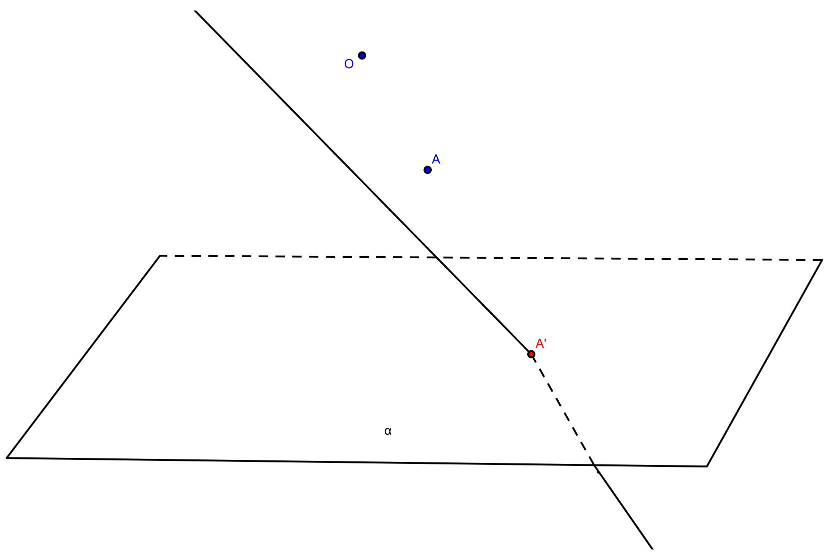
4.1.1 Sistema Cônico de Projeções

Consideremos um plano $\underline{\alpha}$ fixo no espaço, que denotaremos por <u>**plano das projeções**</u>, e um ponto $\underline{\mathrm{O}}$ fixo, que não pertence ao plano α, que denotaremos por <u>**centro das projeções**</u>.

Definição 4.1.1 *O ponto* $\underline{\mathrm{O}}$ *e o plano* $\underline{\alpha}$ *acima, definem o que chamaremos de* <u>**sistema cônico de projeções**</u> *(veja a figura abaixo).*



Observação 4.1.1 *Dado um ponto $\underline{A}$ no espaço, distinto do ponto $\underline{O}$ e não contido no plano $\underline{\alpha}$, tal que a reta $\overleftrightarrow{OA}$ não seja paralela ao plano $\underline{\alpha}$, então a reta $\overleftrightarrow{OA}$ interceptará o $\underline{\alpha}$ no ponto $\underline{A'}$ (veja a figura abaixo).*



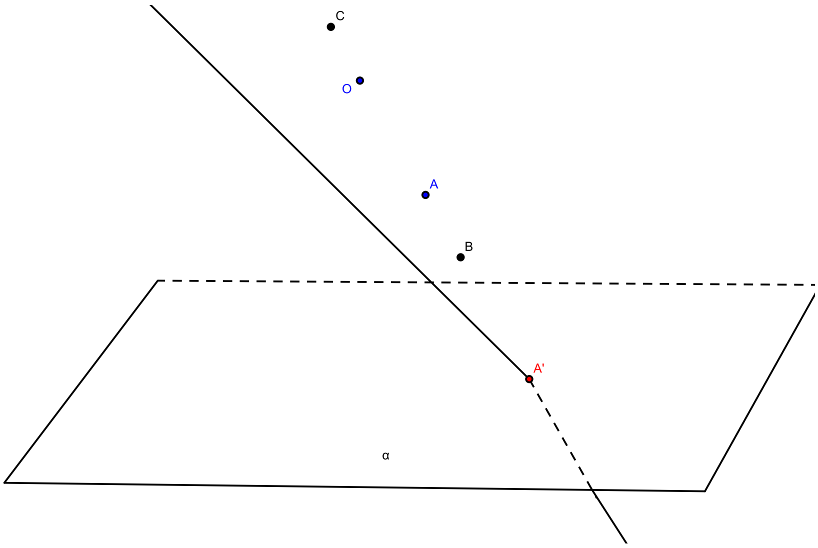
Com isto podemos introduzir a:

Definição 4.1.2 *Na situação acima, a reta $\overleftrightarrow{OA}$ será denominada* **reta projetante do ponto $\underline{A}$ sobre o plano $\underline{\alpha}$** *e o ponto $\underline{A'}$ será dito* **projeção cônica do ponto $\underline{A}$ sobre o plano $\underline{\alpha}$**.

Observação 4.1.2 *Notemos que a projeção cônica de um ponto, sobre um plano,* **não** *é uma aplicação biunívoca (isto é, injetora) do conjunto $\underline{\mathcal{A}}$, formado pelos pontos do espaço que são diferentes do ponto $\underline{O}$, que não pertencem ao plano $\underline{\alpha}$, onde a reta $\overleftrightarrow{OA}$ não seja paralela ao plano $\underline{\alpha}$, no plano $\underline{\alpha}$.*

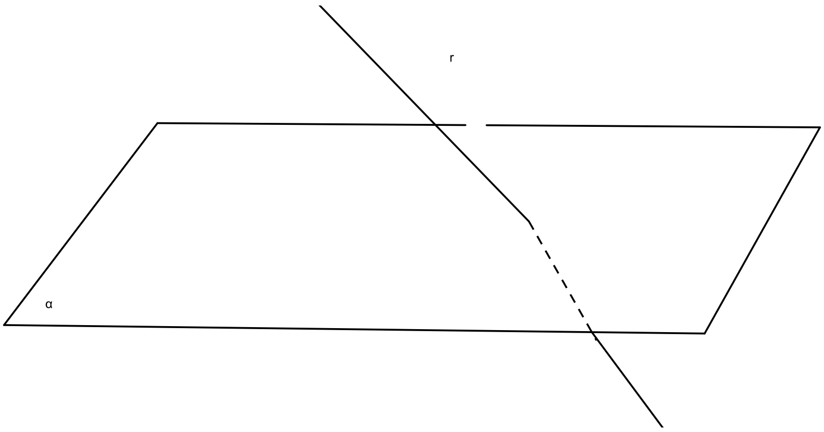
De fato, pois dado o ponto $A \in \mathcal{A}$*, todos os pontos da reta* $\overleftrightarrow{OA}$ *serão levados, pela projeção cônica, no ponto* $\underline{A'}$*, ou seja, a projeção cônica* **não** *é uma aplicação injetora.*

Na figura abaixo as projeções cônicas dos pontos $\underline{A}$*,* $\underline{B}$ *e* $\underline{C}$*, sobre o plano* $\underline{\alpha}$*, coincidem com o ponto* $\underline{A'}$*.*



4.1.2 Sistema Cilíndrico de Projeção

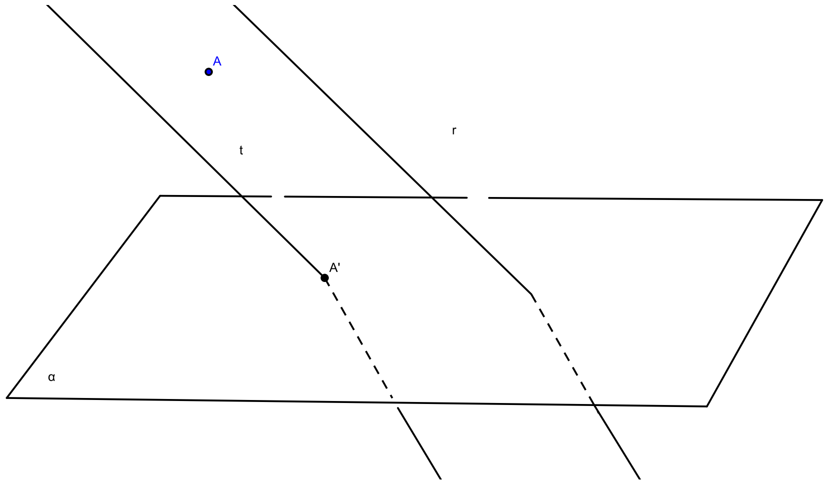
Consideremos um plano $\underline{\alpha}$ fixo no espaço e uma reta $\underline{r}$, que não seja paralela ao plano $\underline{\alpha}$ (veja a figura abaixo).



Dado um ponto $\underline{A}$, a reta $\underline{t}$, paralela à reta $\underline{r}$, que contém o ponto $\underline{A}$, interceptará o plano $\underline{\alpha}$ em um ponto, que denotaremos por $\underline{A'}$ (veja a figura abaixo).

Com isto temos a

Definição 4.1.3 *O ponto* $\underline{A'}$ *obtido acima, será denominado* **projeção cilíndrica do ponto $\underline{A}$ sobre o plano $\underline{\alpha}$ (relativamente à reta $\underline{r}$)**.

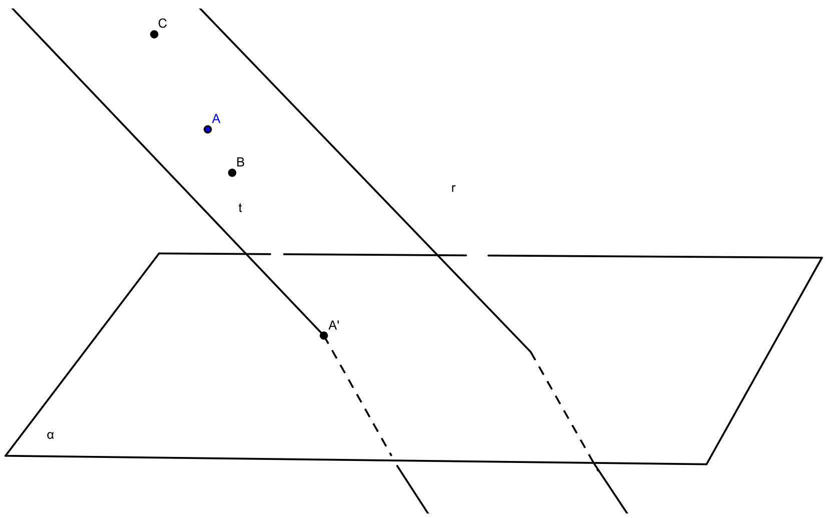


Observação 4.1.3

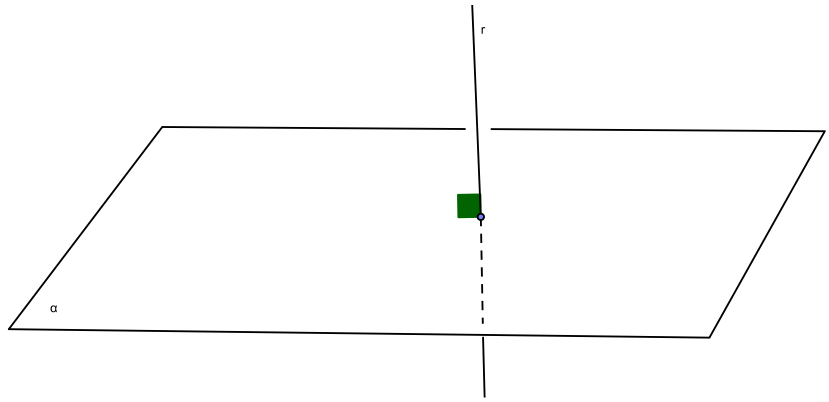
1. *Notemos que a projeção cilíndrica de um ponto, sobre um plano,* **não** *é uma aplicação biunívoca (isto é injetora) do conjunto* $\mathcal{B}$*, formado pelos pontos do espaço.*

   De fato, pois dados pontos $A \in \mathcal{B}$ *e* $A' \in \alpha$ *como na figura acima, todos os pontos da reta* $\overleftrightarrow{AA'}$ *serão levados, pela projeção cilíndrica, no ponto* A'*, ou seja, a projeção cilíndrica, sobre o plano,* **não** *é uma aplicação injetora.*

   Na figura abaixo as projeções cilíndricas dos pontos A*,* B *e* C*, sobre o plano* α*, coincidem com o ponto* A'*.*



2. *Se, na situação acima, a reta* r *é ortogonal ao plano* α*, diremos que a projeção cilíndrica sobre o plano* α *é uma* **projeção ortogonal sobre o plano** α **(relativamente à reta** r *(veja a figura abaixo).*



A seguir exibiremos alguns resultados importantes relacionados a projeção cilíndrica.

Nos resultados a seguir, consideraremos um plano $\underline{\alpha}$ espaço e uma reta $\underline{r}$ no espaço fixados, que de modo que a reta $\underline{r}$ não seja paralela ao plano $\underline{\alpha}$, fixados.

Começaremos estudando a projeção cilíndrica de uma reta no espaço, a saber:

Teorema 4.1.1

1. *A projeção cilíndrica, sobre o plano $\underline{\alpha}$ (relativamente à reta $\underline{r}$) de uma reta $\underline{t}$, que é paralela à reta $\underline{r}$ é um ponto (veja a figura abaixo).*

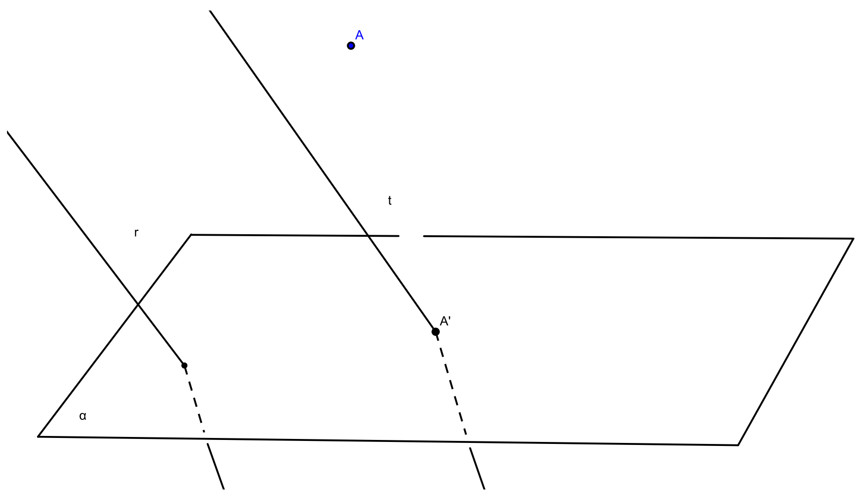


Figura 4.1:

2. *A projeção cilíndrica, sobre o plano $\underline{\alpha}$ (relativamente à reta $\underline{r}$) de uma reta $\underline{t}$, que não é paralela à reta $\underline{r}$ será uma reta $\underline{t'}$, que estará contida no plano $\underline{\alpha}$ (veja a figura abaixo).*

<u>**Demonstração:**</u>

As demonstrações destes resultados serão deixadas como exercício para o leitor.

□

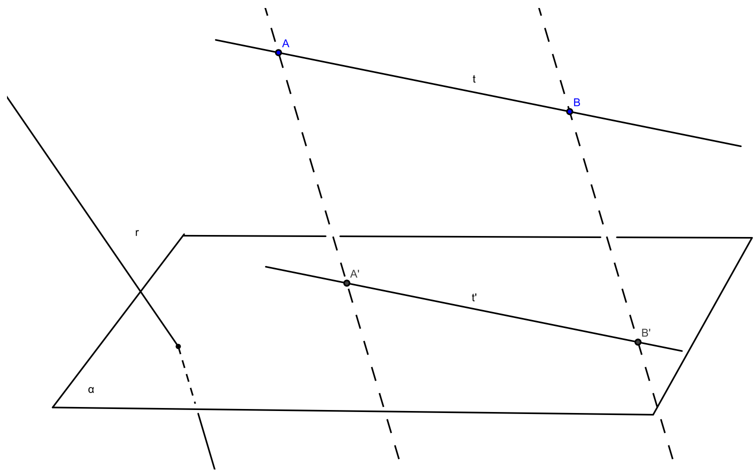


Figura 4.2:

Observação 4.1.4

1. *No item 1. do Teorema (4.1.1) acima, para obtermos o ponto que é a projeção cilíndrica, sobre o plano* $\underline{\alpha}$*, (relativamente à reta* $\underline{r}$*), da reta* $\underline{t}$*, basta encontrarmos um ponto, que chamaremos de* $\underline{A'}$*, que é a intersecção da reta* $\underline{t}$ *com o plano* $\underline{\alpha}$ *(veja a Figura (4.1) acima).*

2. *A reta* $\underline{t'}$ *do item 2. do Teorema (4.1.1) acima, é a reta* $\overleftrightarrow{A'B'}$*, onde os pontos* $\underline{A'}$ *e* $\underline{B'}$ *são as projeções cilíndricas, sobre o plano* $\underline{\alpha}$*, de dois pontos distintos, que chamaremos de* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$*, da reta* $\underline{t}$*, respectivamente (veja a Figura (4.2) acima).*

Um outro resultado importante está relacionado com as projeções cilíndricas, sobre o plano $\underline{\alpha}$ (relativamente à reta $\underline{r}$), de retas paralelas no espaço, a saber:

Teorema 4.1.2 *Sejam* $\underline{t}$ *e* $\underline{s}$ *retas paralelas e distintas no espaço.*

Então as projeções cilíndricas, sobre o plano $\underline{\alpha}$ *(relativamente à reta* $\underline{r}$*), serão de um, e somente um, dos seguintes tipos:*

1. *duas retas* $\underline{t'}$ *e* $\underline{s'}$ *coincidentes, contidas no plano* $\underline{\alpha}$ *(veja a figura (4.3) abaixo);*

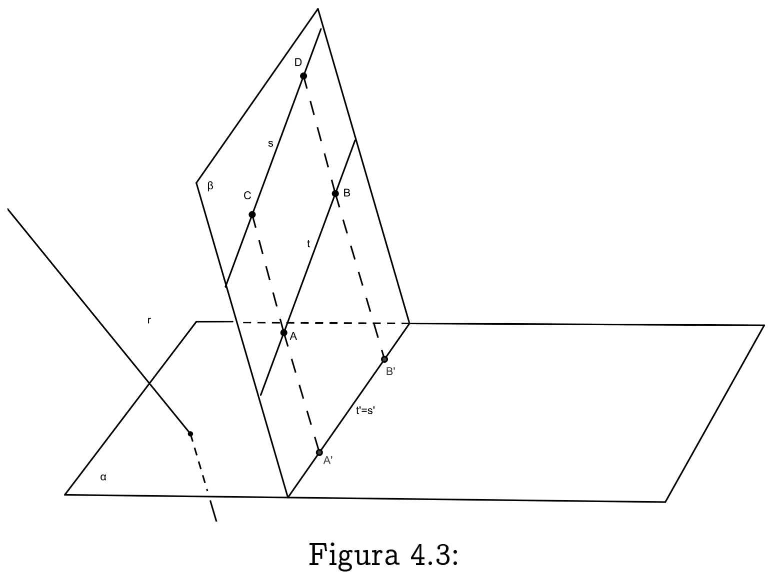


Figura 4.3:

2. *duas retas* $\underline{t'}$ *e* $\underline{s'}$ *paralelas, não coincidentes, contidas no plano* $\underline{\alpha}$ *(veja a figura* (4.4) *abaixo);*

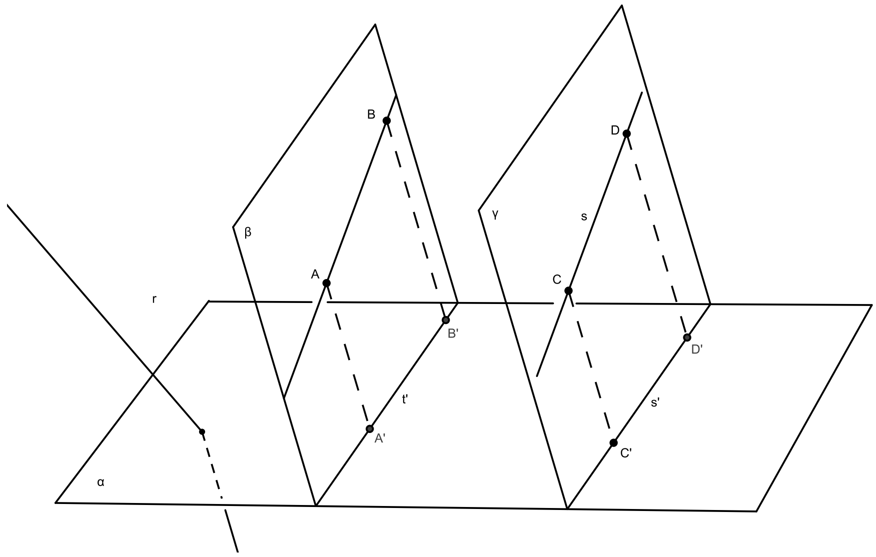


Figura 4.4:

3. *serão dois pontos, que chamaremos de* $\underline{A'}$ *e* $\underline{B'}$*, distintos pertencentes ao plano* $\underline{\alpha}$ *(veja a figura* (4.5) *abaixo);*

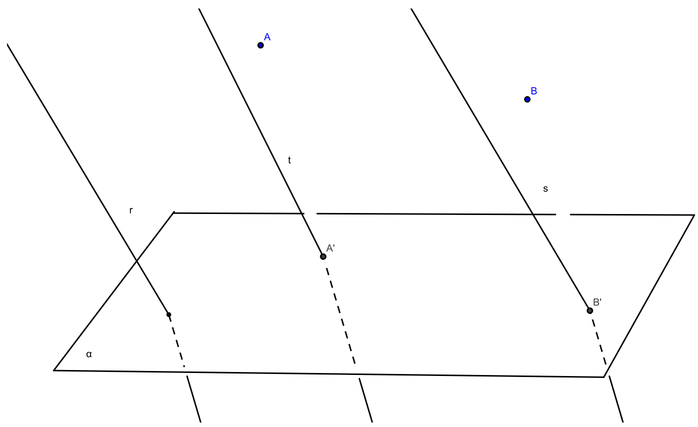


Figura 4.5:

Demonstração:

As demonstrações das propriedades acima serão deixadas como exercício para o leitor.

□

Observação 4.1.5

1. *O item 1. do Teorema* (4.1.2) *acima, ocorrerá quando o plano, que chamaremos de* $\underline{\beta}$*, determinado pelas retas* $\underline{t}$ *e* $\underline{s}$ *for paralelo à reta* $\underline{r}$ *(veja Figura* (4.3)*).*

2. *O item 3. do Teorema* (4.1.2) *acima, ocorrerá quando as retas* $\underline{t}$ *e* $\underline{s}$ *forem paralelas à reta* $\underline{r}$ *(veja a Figura* (4.5) *acima).*

Um outro resultado interessante é dado pelo:

Teorema 4.1.3 *Se dois segmentos do espaço são paralelos, mas não são paralelos à reta* $\underline{r}$*, então a razão entre seus comprimentos e de suas respectivas projeções cilíndricas (relativamente à reta* $\underline{r}$*) serão iguais, isto é, (veja a figura* (4.6) *abaixo).*

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

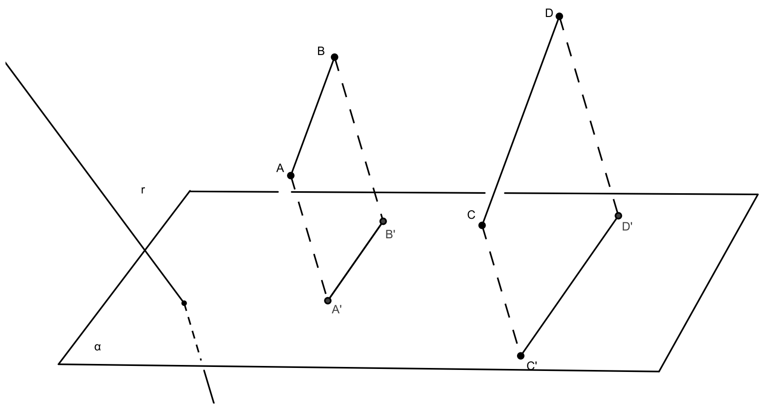


Figura 4.6:

<u>**Demonstração:**</u>

Consideremos primeiramente o caso em que os dois segmentos não estejam contidos em uma mesma reta.

Observemos que, como os segmentos são $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ são paralelos, do item 2. do Teorema (4.1.2), segue que os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$ também são paralelos.

Com isto temos que os triângulos $\Delta AB'A'$ e $\Delta CD'C'$ são semelhantes (caso AAA - verifique!).

Logo, pelo Teorema de Tales, temos que lados correspondentes quardam uma mesma proporção, em particular,

$$\frac{AB'}{A'B'} = \frac{CD'}{C'D'}, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB'}{CD'}. \tag{4.1}$$

De modo análogo, mostra-se que os triângulos $\Delta ABB'$ e $\Delta CDD'$ também são semelhantes.

Logo, pelo Teorema de Tales, temso que lados correspondentes quardam uma mesma proporção, em particular,

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{CD}{CD'}, \quad \text{ou ainda,} \quad \frac{AB}{CD} = \frac{AB'}{CD'}. \tag{4.2}$$

De (4.1) e (4.2), segue que

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'},$$

como queríamos demonstrar.

Deixaremos como exercício para o leitor o caso em que os segmentos dados estão sobre uma mesma reta.

□

Temos também a:

Proposição 4.1.1 *Com as hipóteses do Teorema (4.1.3) acima, segue que a projeção cilíndrica (relativamente à reta $\underline{r}$), do ponto médio, que denotaremos por $\underline{M}$, do segmento $\overline{AB}$ será o ponto médio, que chamaremos de $\underline{M'}$, do segmento $\overline{A'B'}$ (veja a figura (4.7) abaixo).*

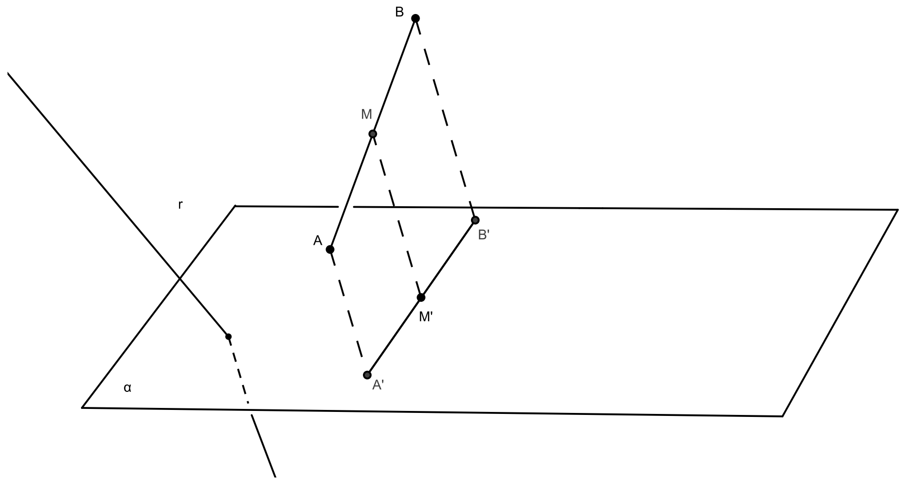


Figura 4.7: $A'M' = BM'$

Demonstração:

A conclusão do resultado acima segue do fato que $ABB'A'$ é um trapézio, que tem como bases os segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$, pois a reta que contém os vértices $\underline{A}$, $\underline{A'}$ e e a reta que contém os vértices $\underline{B}$, $\underline{B'}$, são retas paralelas à reta $\underline{r}$.

Logo se o ponto $\underline{M}$ é ponto médio do segmento $\overline{AB}$, temos que o segmento $\overline{MM'}$ será a base média do trapézio $ABB'A'$.

Assim o ponto $\underline{M'}$ deverá ser o ponto médio do segmento $\overline{A'B'}$, como queríamos mostrar.

□

Observação 4.1.6 *De modo alternativo, poderíamos ter aplicado o Teorema (4.1.3) acima, aos segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ para concluir que o ponto $\underline{M'}$, a projeção cilíndrica (relativamente à reta $\underline{r}$) do ponto $\underline{M}$, sobre o plano $\underline{\alpha}$, é o ponto médio do segmento $\overline{A'B'}$.*

Um outro resultado importante é dado pelo:

Teorema 4.1.4 *Uma região limitada $\underline{\mathcal{F}}$, contida num plano paralelo ao plano de projeções $\underline{\alpha}$, terá projeção cilíndrica (relativamente à reta $\underline{r}$) em Verdadeira Grandeza (que indicaremos por V.G.) com a região $\underline{\mathcal{F}}$ (veja a figura (4.8) abaixo).*

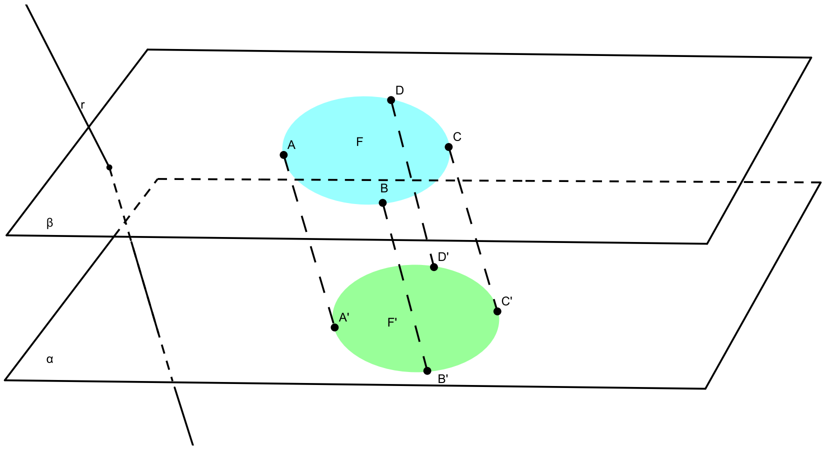


Figura 4.8: $\beta \parallel \alpha$

Demonstração:

A demonstração deste resultado tem início mostrando-se que a afirmação é verdadeira para um polígono contido no plano $\underline{\beta}$, que é paralelo ao plano de projeções $\underline{\alpha}$.

Mas se um polígono está contido num plano $\underline{\beta}$, este é paralelo ao plano de projeções $\underline{\alpha}$, então a projeção cilíndrica (relativamente à reta $\underline{r}$) deste polígono estará em Verdadeira Grandeza (que indicaremos por V.G.) com o polígono original (veja a figura (4.9) abaixo).

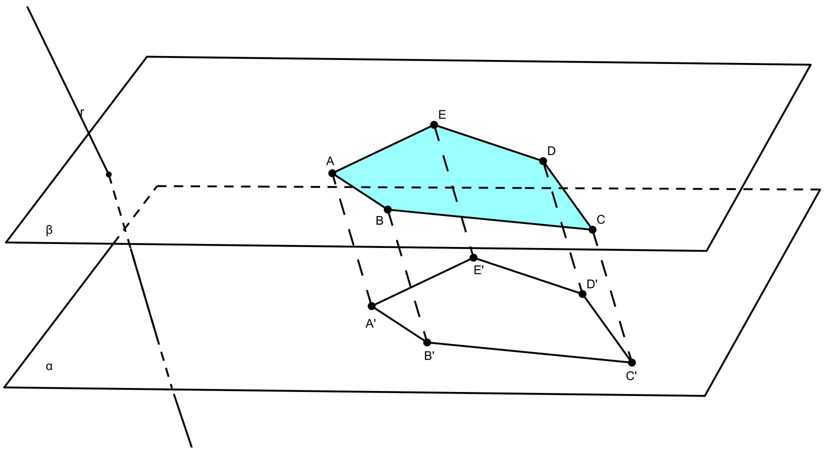


Figura 4.9: $\beta \parallel \alpha$

Para completarmos a demonstração, consideramos uma região limitada do plano $\underline{\beta}$, que é paralelo ao plano de projeções $\underline{\alpha}$, cuja fronteira seja uma curva que possa ser aproximada por uma poligonal fechada, que formará um polígono cuja projeção cilíndricas, sobre o plano $\underline{\alpha}$ (relativamente à reta $\underline{r}$), estará em V.G. com o respectivo polígono.

Deste modo pode-se mostrar, utilizando-se o processo de aproximação da fronteira da região por uma poligonal fechada, que a projeção cilíndrica (relativamente à reta $\underline{r}$) da região limitada do plano $\underline{\beta}$ estará em V.G. com a mesma.

A demonstração no caso geral, em que a região $\underline{\mathcal{F}}$ contida no plano $\underline{\beta}$ é qualquer, será omitida.

$\square$

Um outro resultado interessante é dado pelo:

Teorema 4.1.5 *Qualquer região plana contida em um plano $\underline{\beta}$, que é paralelo à reta $\underline{r}$, tem sua projeção cilíndrica, sobre o plano $\underline{\alpha}$ (relativamente à reta $\underline{r}$), contida na intersecção dos planos $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$, isto é, contido em uma reta que está contida no plano $\underline{\alpha}$ (veja a figura (4.10) abaixo).*

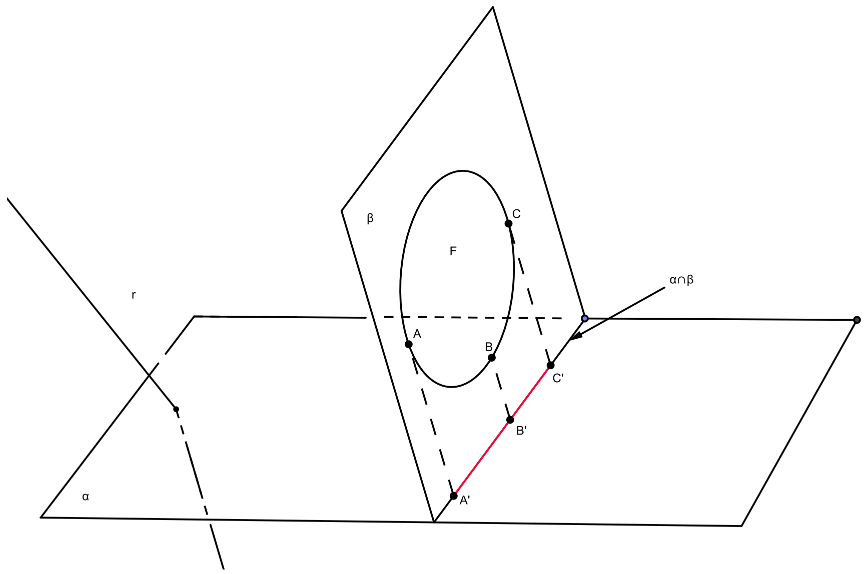


Figura 4.10: $r \parallel \beta$

Demonstração:

Este resultado é conseqüência da demonstração do item 1. do Teorema (4.1.2).

Deixaremos a redação da mesma como exercício para o leitor.

□

Definição 4.1.4 *Na situação acima, a reta obtida da interseção dos planos $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ será denomindada* **traço do plano $\underline{\beta}$ no plano $\underline{\alpha}$**.

Para finalizar esta sub-seção temos o:

Teorema 4.1.6 *Suponhamos que a reta $\underline{r}$ seja ortogonal ao plano $\underline{\alpha}$.*

Consideremos duas retas $\underline{t}$ e $\underline{s}$ perpendiculares ou, mais geralmente ortogonais no espaço, de modo que a reta $\underline{t}$ seja paralela ao plano de projeções $\underline{\alpha}$.

Então as projeções cilíndricas ortogonais, sobre o plano $\underline{\alpha}$ (relativamente à reta $\underline{r}$), das retas $\underline{t}$ e $\underline{s}$ serão perpendiculares entre si, isto é, as retas $\underline{t'}$ e $\underline{s'}$ são perpendiculares (veja a figura (4.11) abaixo).

Demonstração:

A conclusão do resultado, segue do fato que se considerarmos dois planos, que chamaremos de $\underline{\beta}$ e $\underline{\gamma}$, que são ortogonais ao plano $\underline{\alpha}$, e que contém as retas $\underline{t}$ e $\underline{s}$, respectivamente, então as retas

$$t' = \beta \cap \alpha \quad \text{e} \quad s' = \gamma \cap \alpha$$

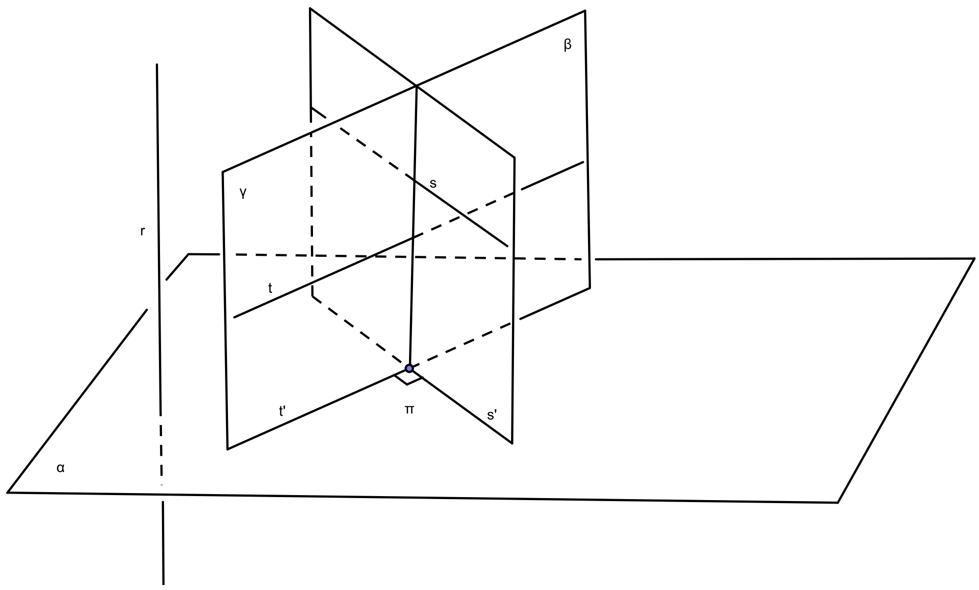


Figura 4.11: $\underline{r} \parallel \underline{\beta}$

serão perpendiculares.

Deixaremos como exercício para o leitor a demonstração deste fato.

Para finalizar observemos que as retas $\underline{t'}$ e $\underline{s'}$ são as projeções cilíndricas ortogonais, sobre o plano $\underline{\alpha}$ (relativamente à reta $\underline{r}$), das retas $\underline{t}$ e $\underline{s}$, respectivamente, completando a demonstração.

□

Observação 4.1.7 *As conclusões do Teorema (4.1.6) acima* **só são válidas** *para projeções cilíndricas ortogonais, sobre o plano $\underline{\alpha}$ (relativamente à reta $\underline{r}$).*

Deixaremos como exercício para o leitor encontrar exemplos de projeções cilíndricas **não** *ortogonais, sobre o plano $\underline{\alpha}$ (relativamente à reta $\underline{r}$), que* **não** *satisfazem as conclusões do Teorema (4.1.6) acima.*

Como conseqüência do Teorema acima temos o:

Corolário 4.1.1 *Sejam $\underline{r}$ uma reta ortogonal ao plano $\underline{\alpha}$ e $\underline{s}$ e $\underline{t}$ retas no espaço.*

Suponhamos que:

1. *As retas $\underline{s}$ e $\underline{t}$ são ortogonais ou perpendiculares;*
2. *A reta $\underline{s}$ é paralela ou está contida no plano $\underline{\alpha}$ e a reta $\underline{t}$ não é perpendicular ao plano $\underline{\alpha}$;*
3. *As projeções ortogonais das retas $\underline{s}$ e $\underline{t}$, no plano $\underline{\alpha}$, são perpendiculares.*

Se valem duas das afirmações acima então valerá a outra afirmação restante.

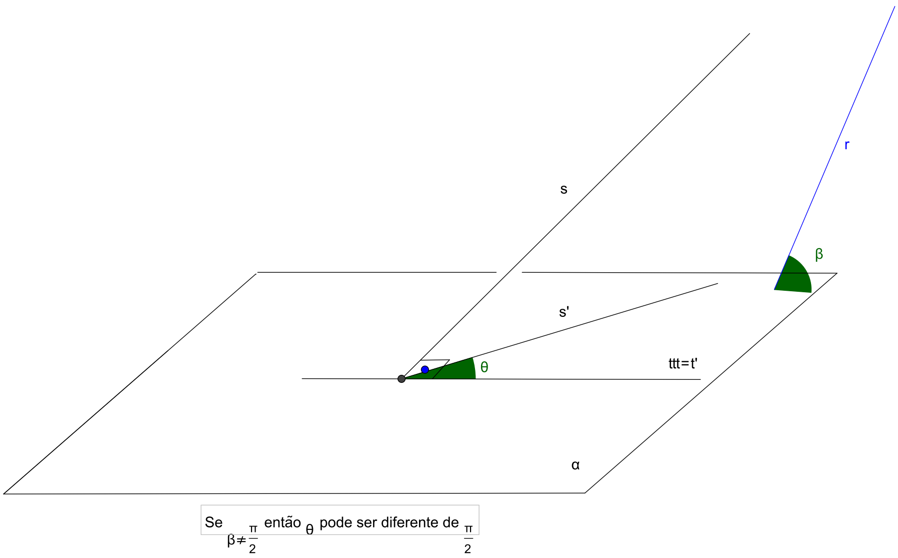
Demonstração:

A demonstração deste resulado será deixado como exercício para o leitor.

□

Observação 4.1.8

1. *Se a projeção no plano* $\underline{\alpha}$, **<u>não</u>** *for ortogonal ao plano* $\underline{\alpha}$, *isto é, se a reta* $\underline{r}$ *não for ortogonal ao plano* $\underline{\alpha}$, *a conclusão do resultado acima* **<u>não</u>** *será verdadeira, como mostra o exemplo abaixo.*



2. *Na verdade isto é uma conseqüência do fato que um ângulo,* **<u>não</u>** *reto, só se projeta ortogonalmente em* V.G. *quando os seus dois lados são paralelos ao plano de projeção* $\underline{\alpha}$ *(veja a figura (4.12) abaixo).*

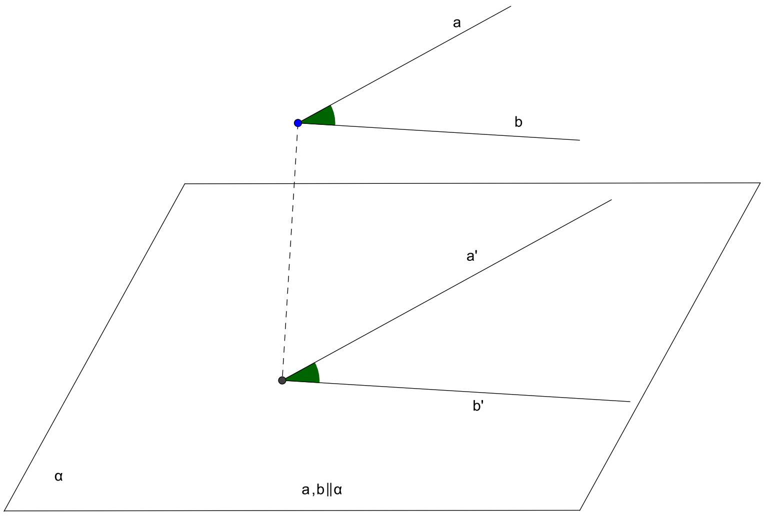


Figura 4.12: r ∥ β

3. *Já para um ângulo reto, basta que um dos lados do ângulo ser paralelo ao plano de projeção* $\underline{\alpha}$, *para que sua projeção ortogonal, no plano* $\underline{\alpha}$, *esteja em* V.G. *(isto é, seja um ângulo reto - veja a figura* (4.13) *abaixo).*

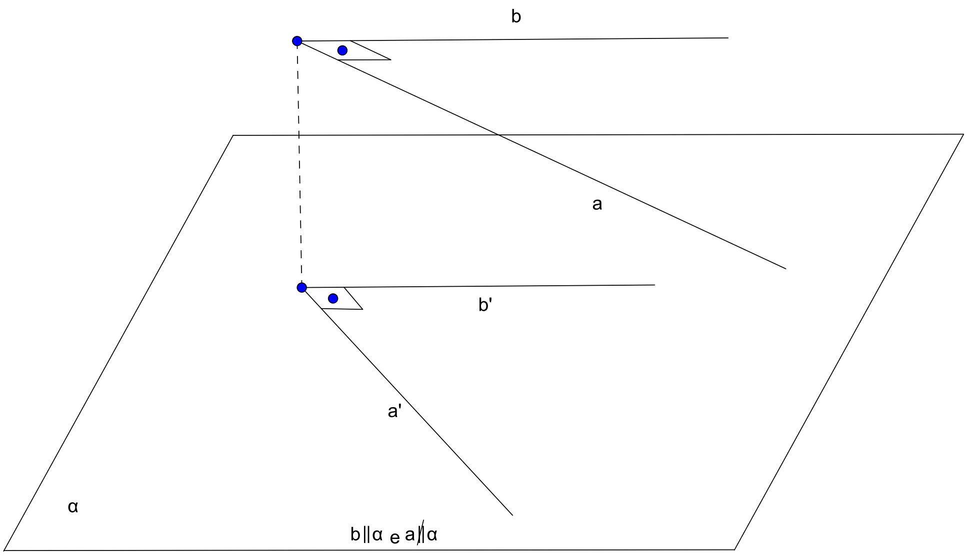


Figura 4.13: $r \parallel \beta$

4.2 Método de Monge

Gaspar Monge (1746-1818) foi um matemático francês, um dos criadores da Geometria Descritiva e fundador da Escola Politécnica de Paris.

Como vimos nas seções anteriores, o sistema de projeção cilíndrico, em um plano de projeções, **não** nos fornece uma maneira biunívoca (isto é, injetora) de representarmos pontos do espaço.

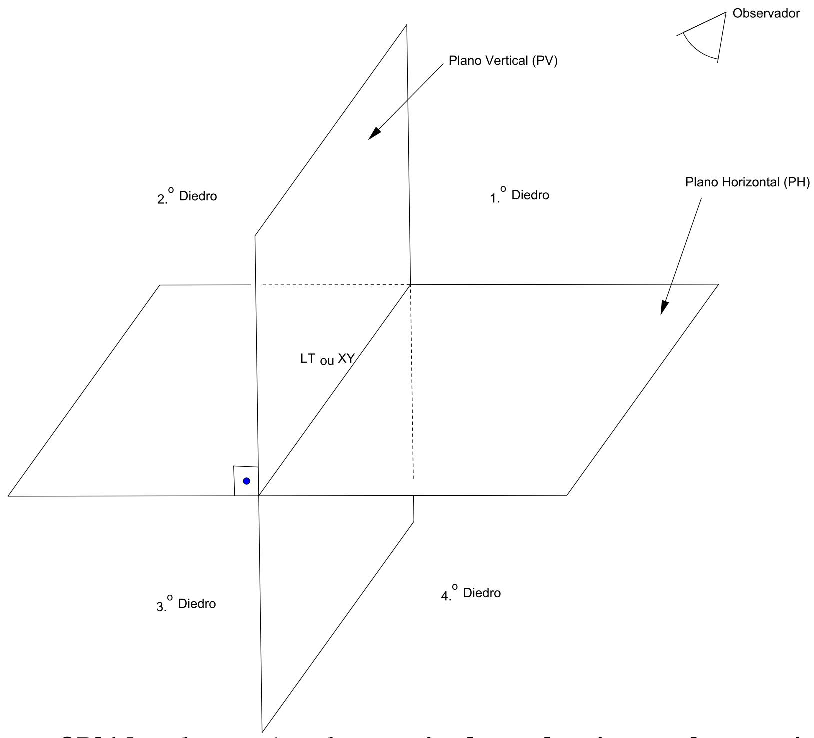
O método que apresentaremos a seguir, que será utilizado ao longo de todas estas notas, nos fornecerá uma relação biunívoca (isto é, injetora) e sobrejetora de representarmos pontos do espaço em um sistema formado por dois planos ortogonais entre si.

O sistema que utilizaremos para projetar um ponto do espaço nesses dois planos ortogonais será o sistema de projeção cilíndrica ortogonal em cada um dos planos ortogonais.

Definição 4.2.1 *Dados os dois planos ortogonais, chamaremos um deles de* **plano horizontal**, *que será denotado por* PH, *e o outro de* **plano vertical**, *que será denotado por* PV *(veja a figura abaixo).*

A interseção dos planos PH *e* PV *será uma reta que será denominada de* **linha de terra** *e indicada por* LT *(ou* XY *- veja figura figura abaixo).*

Os planos PH *e* PV, *dividem o espaço em quatro regiões distintas e disjuntas, as quais denominaremos de* **diedros** , *mais especificamente,* 1.º, 2.º, 3.º *e* 4.º *diedros (veja a figura abaixo).*

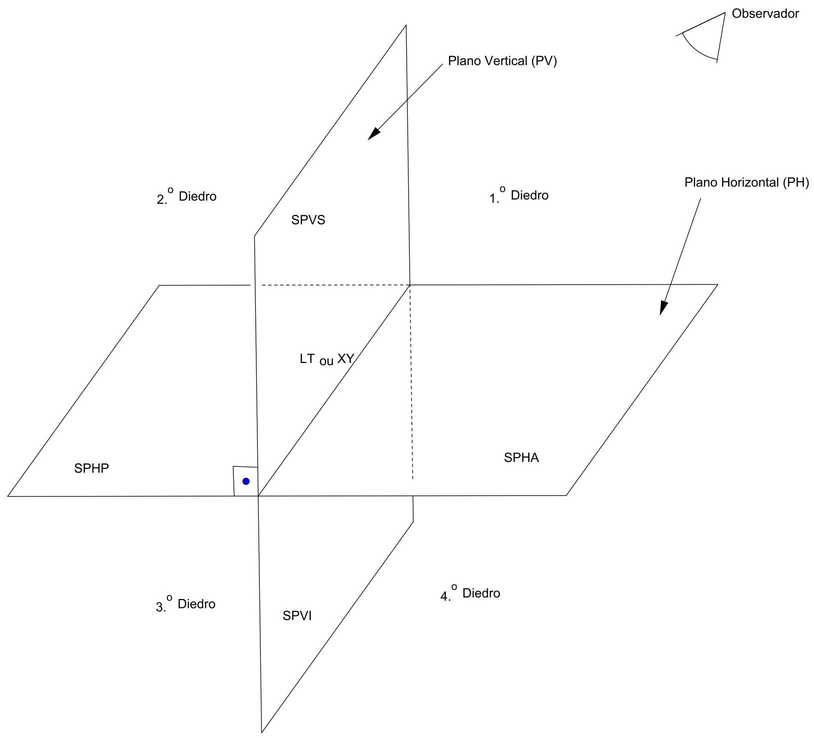


Denotemos por SPHA, *denominado* **semi-plano horizontal anterior**, *o semi-plano contido no plano horizontal* PH *que está no* 1.º *(e* 4.º*) diedro (veja a figura abaixo).*

Denotemos s por SPHP, *denominado* **semi-plano horizontal posterior**, *o semi-plano contido no plano horizontal* PH *que está no* 2.º *(e* 3.º*) diedro (veja a figura abaixo).*

Indicaremos por SPVS, *denominado* **semi-plano vertical superior**, *ao semi-plano contido no plano vertical* PV *que está no* 1.º *(e* 2.º*) diedro (veja a figura abaixo).*

Indicaremos por SPVI, *denominado* **semi-plano vertical inferior**, *ao semi-plano contido no plano vertical* PV *que está no* 3.º *(e* 4.º*) diedro (veja a figura abaixo).*



Observação 4.2.1 *Nas considerações que serão feitas adiante vamos supor, exceto menção contrária, que o observador está situado no* 1.º *diedro (veja a figura acima).*

4.3 Exercícios

Fixemos um plano $\underline{\alpha}$ e uma reta $\underline{\mathrm{r}}$, que não é paralela ao plano $\underline{\alpha}$, e consideremos o sistema de projeções cilíndricas associado a estes.

Exercício 4.3.1 *Completar as frases abaixo:*

1. *Se uma reta $\underline{\mathrm{t}}$ é paralela à reta $\underline{\mathrm{r}}$, então sua projeção cilíndrica, sobre o plano $\underline{\alpha}$, relativamente à reta $\underline{\mathrm{r}}$, será ________________________.*
2. *Se uma reta $\underline{\mathrm{t}}$ é perpendicular ao plano $\underline{\alpha}$, então sua projeção cilíndrica ortogonal, sobre o plano $\underline{\alpha}$, relativamente à reta $\underline{\mathrm{r}}$, será ________________.*
3. *Se dois segmentos de reta têm mesma direção e esta é diferente da direção da reta $\underline{\mathrm{r}}$, então a razão entre os seus comprimentos será ____________.*
4. *Se um ponto divide um segmento numa razão dada, então a projeção cilíndrica, sobre o plano $\underline{\alpha}$, relativamente à reta $\underline{\mathrm{r}}$, deste ponto dividirá a projeção cilíndrica, sobre o plano $\underline{\alpha}$, relativamente à reta $\underline{\mathrm{r}}$, do segmento na ________ razão.*
5. *Se uma região pertence a um plano paralelo ao plano $\underline{\alpha}$, então a projeção cilíndrica, sobre o plano $\underline{\alpha}$, relativamente à reta $\underline{\mathrm{r}}$, desta região será _______ em* V.G..
6. *Se um ponto pertence a um plano paralelo à reta $\underline{\mathrm{r}}$, então a projeção cilíndrica, sobre o plano $\underline{\alpha}$, relativamente à reta $\underline{\mathrm{r}}$, deste ponto pertencerá a __________.*
7. *Se uma região está contida é ortogonal ao plano $\underline{\alpha}$, então a projeção cilíndrica da região, sobre o plano $\underline{\alpha}$, relativamente à reta $\underline{\mathrm{r}}$, será uma _____ pertencente ao .*
8. *Se a projeção ortogonal, sobre o plano $\underline{\alpha}$, de um segmento tem comprimento menor que o comprimento do segmento dado, então o segmento não é ______.*

Exercício 4.3.2 *Encontrar a posição das regiões, de modo que as projeções ortogonais, sobre o plano $\underline{\alpha}$, sejam as dadas em cada item abaixo:*

1. *a projeção ortogonal de um quadrado é um retângulo (que não é um quadrado).*
2. *a projeção ortogonal de um losango é um quadrado.*
3. *a projeção ortogonal de um pentágono é um segmento de reta.*
4. *a projeção ortogonal de um triângulo equilátero é um triângulo isósceles.*

Exercício 4.3.3 *Suponhamos que os planos $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ são ortogonais e que a reta $\underline{\mathrm{r}}$ não é paralela aos planos $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$.*

Se duas retas têm projeções cilíndricas no plano, sobre o plano $\underline{\alpha}$, relativamente à reta $\underline{\mathrm{r}}$, coincidentes e projeções cilíndricas no plano $\underline{\beta}$ concorrentes que podemos concluir a respeito das posições relativas das duas retas no espaço?

Capítulo 5

Estudo do Ponto - Épura de um Ponto

Começaremos nossos estudos representando um ponto do espaço pelo Método de Monge.

Ao longo deste capítulo vamos fixar dois planos ortogonais que denotaremos por PH e PV, respectivamente (como no final do capítulo anterior).

Definição 5.0.1 *Seja A um ponto do espaço.*

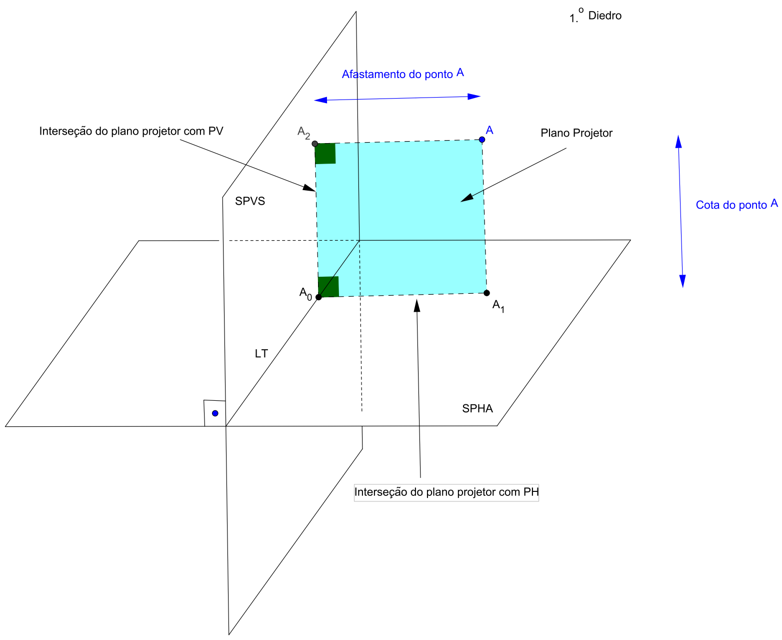
Projetando-se, ortogonalmente, o ponto A, no plano horizontal PH e no plano vertical PV, obteremos as respectivas projeções, que denotaremos por A_1 e A_2.

O ponto A_1 será denominado de **projeção horizontal do ponto A** *e o ponto A_2 será chamado de* **projeção vertical do ponto A** *(a figura abaixo ilustra o caso em que o ponto A pertence ao 1.o diedro).*

O plano determinado pelos pontos A, A_1 e A_2 será denominado **plano projetor do ponto A** *(veja a figura abaixo).*

Observemos que o plano projetor do ponto A é um plano ortogonal ao plano horizontal PH e ao plano vertical PV (veja a figura abaixo).

Além disso, as interseções do plano projetor com os planos PH e PV são duas retas, que contém os segmentos $\overline{A_1A_o}$ e $\overline{A_2A_o}$, respectivamente, onde o ponto A_o é o ponto de interseção de cada uma dessas retas com a reta que é a interseção dos planos PH e PV, que será denominada **linha de terra** *e denotada por LT (veja a figura abaixo).*



O comprimento do segmento $\overline{AA_1}$ (isto é, AA_1, ou ainda, a distância do ponto $\underline{A}$ ao plano $\underline{PH}$) será denominado **cota do ponto $\underline{A}$** *e o comprimento do segmento $\overline{AA_2}$ (isto é, AA_2, ou ainda, a distância do ponto $\underline{A}$ ao plano $\underline{PV}$) será denominado* **afastamento do ponto $\underline{A}$** *(veja a figura acima).*

Pelo método de Monge, um ponto A fica completamente determinado se conhecermos os pontos A_1 e A_2 (sua projeções horizontal e vertical, ou ainda, sua cota e seu afastamento, respectivamente).

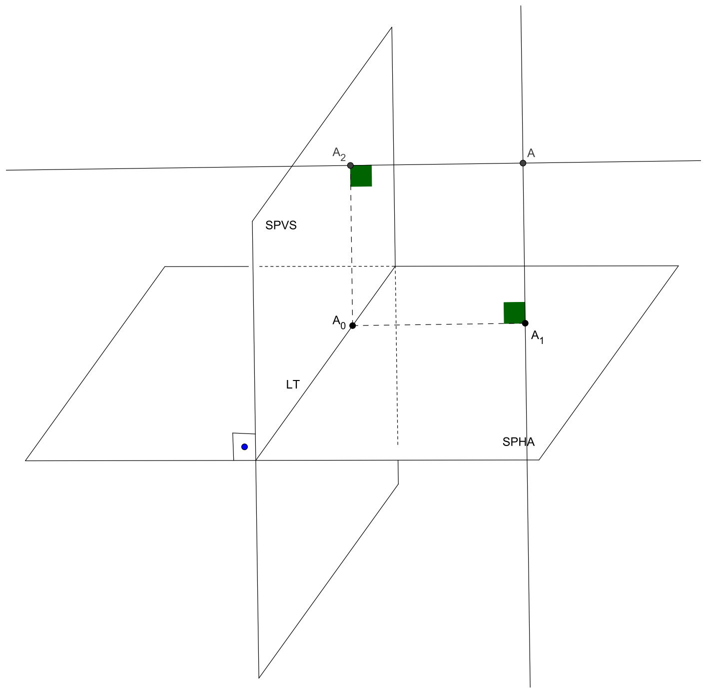
Observação 5.0.1

1. *Observemos que, na situação acima, para qualquer ponto $\underline{A}$ do espaço, poderemos obter suas projeções no plano $\underline{PH}$ e no plano $\underline{PV}$ (isto é $\underline{A_1}$ e $\underline{A_2}$), e com isto poderemos representar qualquer ponto do espaço em termos de suas projeções ortogonais nos planos $\underline{PH}$ e $\underline{PV}$.*

   Reciprocamente, se conhecemos as projeções ortogonais de um ponto do espaço nos planos $\underline{PH}$ e $\underline{PV}$, isto é, os pontos $\underline{A_1}$ e $\underline{A_2}$, respectivamente, poderemos obter um, único, ponto $\underline{A}$ do espaço, que possua como projeções horizontais e verticais os pontos $\underline{A_1}$ e $\underline{A_2}$, respectivamente.

   Para isto basta encontrar o ponto $\underline{A}$ que é a interseção das retas perpendiculares aos planos $\underline{PH}$ e $\underline{PV}$, que contém os pontos $\underline{A_1}$ e $\underline{A_2}$, respectivamente, este será o ponto procurado (veja a figura abaixo).

   O processo acima proposto por Monge é portanto biunívoco (isto é, injetor) e sobrejetor.



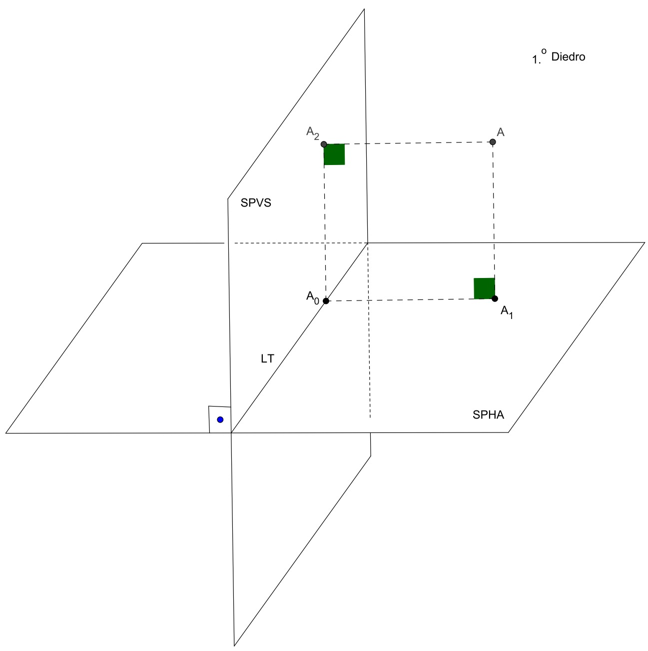
2. *Dados dois planos ortogonais, como no sistema de Monge acima, vamos determinar um modo de representar um ponto do espaço em um* **<u>único plano</u>**, *ou seja,*

desenvolveremos um método de representar um ponto do espaço em um único plano.

Para isto consideremos, inicialmente, um ponto $\underline{\mathrm{A}}$ *do espaço, que pertença ao* 1.º *diedro determinado pelos planos* $\underline{\mathrm{PH}}$ *e* $\underline{\mathrm{PV}}$.

Encontremos os pontos $\underline{\mathrm{A}_1}$ *e* $\underline{\mathrm{A}_2}$, *que denotam, respectivamente, as projeções horizontais e verticais do ponto* $\underline{\mathrm{A}}$ *(ou seja, suas projeções ortogonais nos planos* $\underline{\mathrm{PH}}$ *e* $\underline{\mathrm{PV}}$, *respectivamente).*

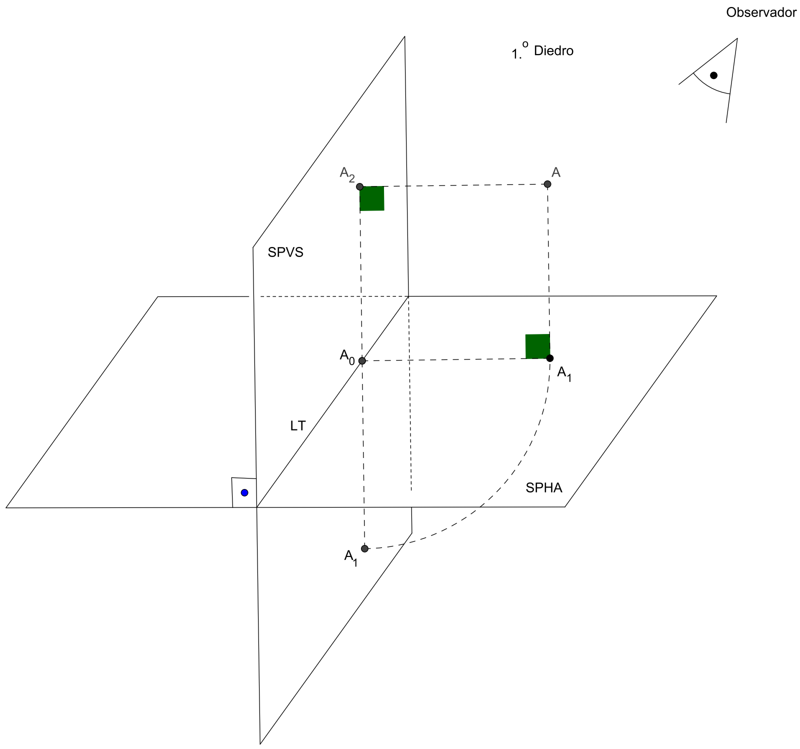
Como o ponto $\underline{\mathrm{A}}$ *pertence ao* 1.º *diedro (relativamente aos planos* $\underline{\mathrm{PH}}$ *e* $\underline{\mathrm{PV}}$*) temos que o ponto* $\underline{\mathrm{A}_1}$ *pertencerá ao semi-plano* $\underline{\mathrm{SPHA}}$ *e o ponto* $\underline{\mathrm{A}_2}$ *pertencerá ao semi-plano* $\underline{\mathrm{SPVS}}$ *(veja a figura abaixo).*



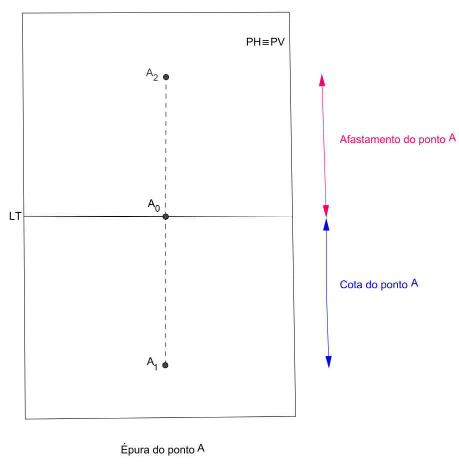
A seguir vamos rotocionar o plano $\underline{\mathrm{PH}}$ *de um ângulo de* $\frac{\pi}{2}$, *em torno da reta* $\underline{\mathrm{LT}}$, *no sentido horário.*

A esse processo daremos o nome de <u>**rebater o plano** PH**, sobre o plano** PV</u>.

Logo a projeção ortogonal do ponto $\underline{\mathrm{A}}$, *ou seja, o ponto* $\underline{\mathrm{A}_1}$, *sobre o semi-plano* $\underline{\mathrm{SPHA}}$, *efetuará uma rotação, no sentido horário, de um ângulo de* $\frac{\pi}{2}$, *em torno da reta* $\underline{\mathrm{LT}}$ *e nos fornecerá um ponto, que denotaremos por* $\underline{\mathrm{A}_1'}$, *pertencente ao semi-plano* $\underline{\mathrm{SPVI}}$, *que continuaremos indicando por* $\underline{\mathrm{A}_1}$ *(veja a figura abaixo).*



Como observador está colocado no 1.º *diedro (relativamente aos planos* PH *e* PV*), ele irá ver o plano* PH *coincidir com o plano* PV *e estará de frente para ambos, ou seja, ele verá um único plano (a saber,* PH $\equiv$ PV *- veja a figura abaixo).*



A esta representação do ponto A *daremos o nome de* **representação do ponto A em épura** *(veja a figura acima).*

3. *A seguir consideraremos outras situações, a saber, quando o ponto* A *pertence aos outros três diedros (relativamente aos planos* PH *e* PV*).*

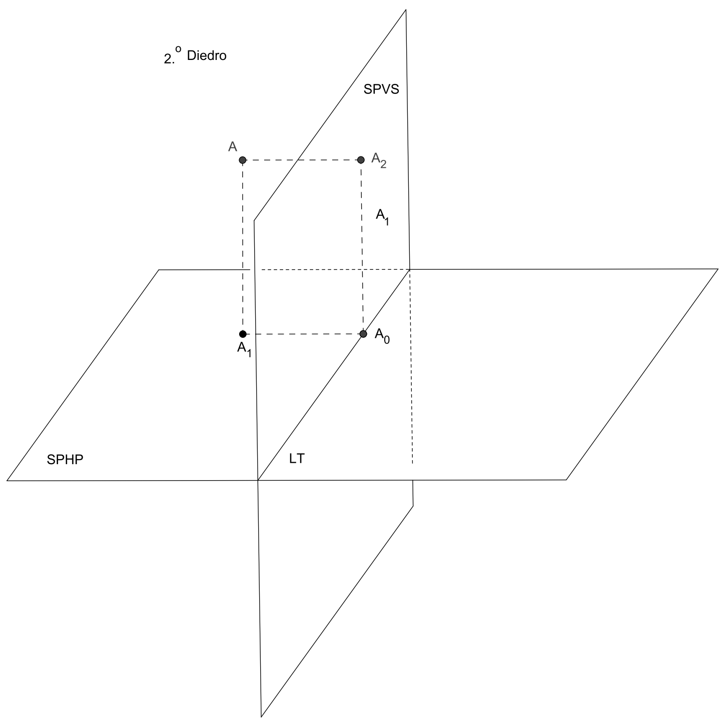
   O que faremos a seguir, é análogo do que feito no caso do ponto A *pertencer ao* 1.º *diedro.*

Suponhamos que o ponto $\underline{A}$ *pertença ao:*

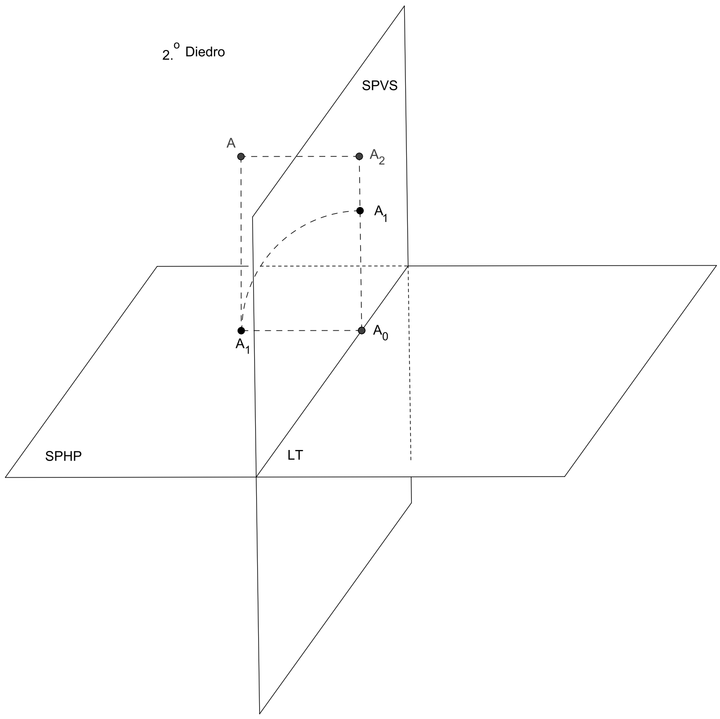
(a) **$\underline{2.^{\circ}}$ diedro (relativamente aos planos $\underline{PH}$ e $\underline{PV}$) :**

Encontremos os pontos $\underline{A_1}$ *e* $\underline{A_2}$*, projeções horizontais e verticais do ponto* $\underline{A}$*(ou seja, suas projeções ortogonais nos planos* $\underline{PH}$ *e* $\underline{PV}$*, respectivamente).*

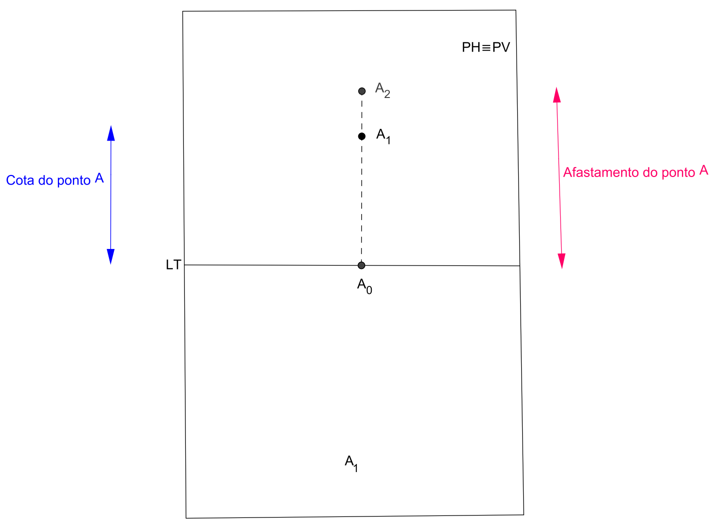
Como o ponto $\underline{A}$ *pertence ao* $2.^{\circ}$ *diedro (relativamente aos planos* $\underline{PH}$ *e* $\underline{PV}$*) , temos que a sua projeção ortogonal no plano* $\underline{PH}$ *(isto é, o ponto* $\underline{A_1}$*) deverá pertencer ao semi-plano* $\underline{SPHP}$ *e sua outra projeção ortogonal no plano* $\underline{PV}$ *(isto é, o ponto* $\underline{A_2}$*) pertencerá ao semi-plano* $\underline{SPVS}$ *(veja a figura abaixo).*



A seguir vamos rotocionar, no sentido horário, o plano $\underline{PH}$ *de um ângulo de* $\dfrac{\pi}{2}$*, em torno da reta* $\underline{LT}$*, isto é, vamos rebater o plano* $\underline{PH}$ *sobre o plano* $\underline{PV}$*. Logo o ponto* $\underline{A_1}$ *(projeção ortogonal do ponto* $\underline{A}$ *sobre o plano* $\underline{PH}$*), que pertence ao semi-plano* $\underline{SPHP}$*, efetuará uma rotação, no sentido horário, de um ângulo de* $\dfrac{\pi}{2}$*, em torno da reta* $\underline{LT}$ *e nos fornecerá um ponto, que denotaremos por* $\underline{A_1'}$*, pertencente ao semi-plano* $\underline{SPVS}$ *que continuaremos indicando por* $\underline{A_1}$ *(veja a figura abaixo).*



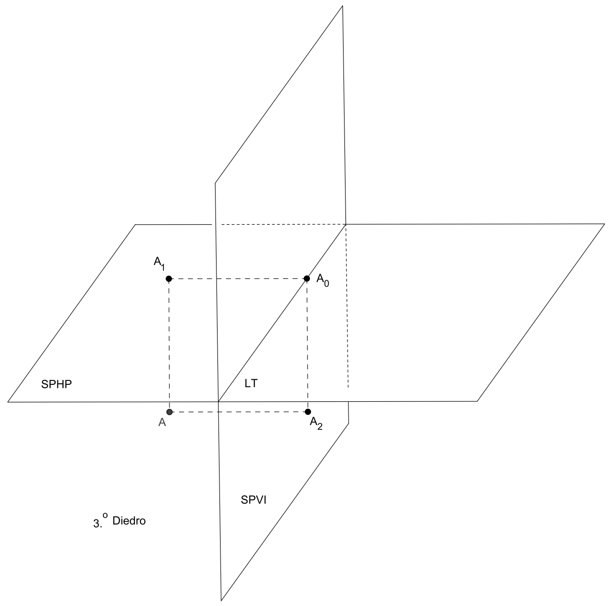
Como observador está colocado no 1.º *diedro (relativamente aos planos* PH *e* PV*) , ele verá o plano* PH *coincidir com o plano* PV *e estará de frente para ambos, ou seja, ele verá um único plano (a saber,* PH $\equiv$ PV *- veja a figura abaixo).*



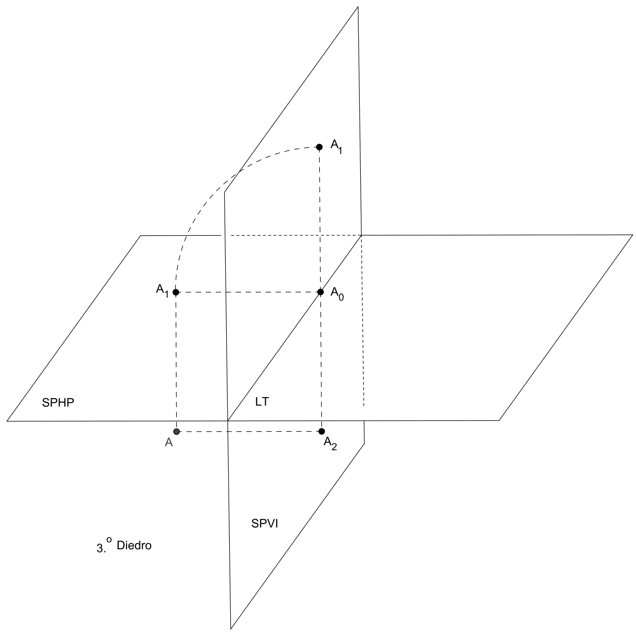
Épura do ponto A

(b) **3.º diedro (relativamente aos planos PH e PV) :**

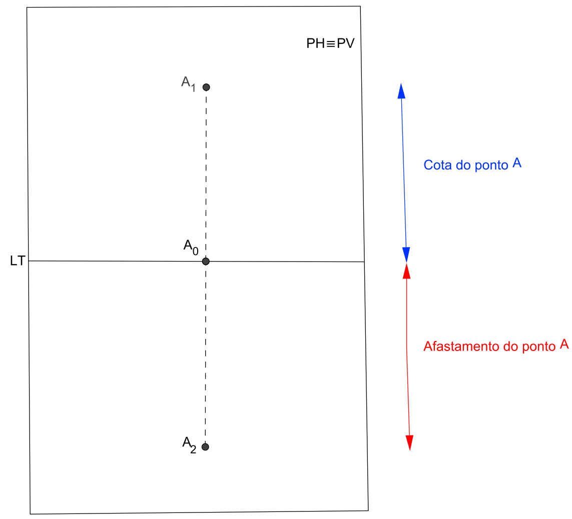
Encontremos os pontos A_1 *e* A_2*, as projeções horizontais e verticais do ponto* A *(ou seja, suas projeções ortogonais nos planos* PH *e* PV*), respectivamente. Como o ponto* A *pertence ao* 3.º *diedro PHPV, temos que a sua projeção* *ortogonal no plano* $\underline{\mathrm{PH}}$ *(isto é, o ponto* $\underline{\mathrm{A}_1}$*) pertencerá ao semi-plano* $\underline{\mathrm{SPHP}}$ *e sua projeção orotogonal no plano* $\underline{\mathrm{PV}}$ *(isto é, o ponto* $\underline{\mathrm{A}_2}$*) pertencerá ao semi-plano* $\underline{\mathrm{SPVI}}$ *(veja a figura abaixo).*



A seguir vamos rotocionar, no sentido horário, o plano $\underline{\mathrm{PH}}$ *de um ângulo de* $\dfrac{\pi}{2}$*, em torno da reta* $\underline{\mathrm{LT}}$*, isto é, vamos rebater o plano* $\underline{\mathrm{PH}}$ *sobre o plano* $\underline{\mathrm{PV}}$*. Logo o ponto* $\underline{\mathrm{A}_1}$ *(projeção ortogonal do ponto* $\underline{\mathrm{A}}$ *sobre o plano* $\underline{\mathrm{PH}}$*), que pertence ao semi-plano* $\underline{\mathrm{SPHP}}$*, efetuará uma rotação, no sentido horário, de um ângulo de* $\dfrac{\pi}{2}$*, em torno da reta* $\underline{\mathrm{LT}}$ *e nos fornecerá um ponto, que chamaremos de* $\underline{\mathrm{A}_1'}$*, pertencente ao semi-plano* $\underline{\mathrm{SPVS}}$*, que continuaremos indicando por* $\underline{\mathrm{A}_1}$ *(veja a figura abaixo).*



Como observador está colocado no 1.º *diedro ele verá o plano* PH *coincidindo com o plano* PV *e estará de frente para ambos, ou seja, ele verá um único plano (a saber,* $\mathrm{PH} \equiv \mathrm{PV}$*) (figura abaixo).*

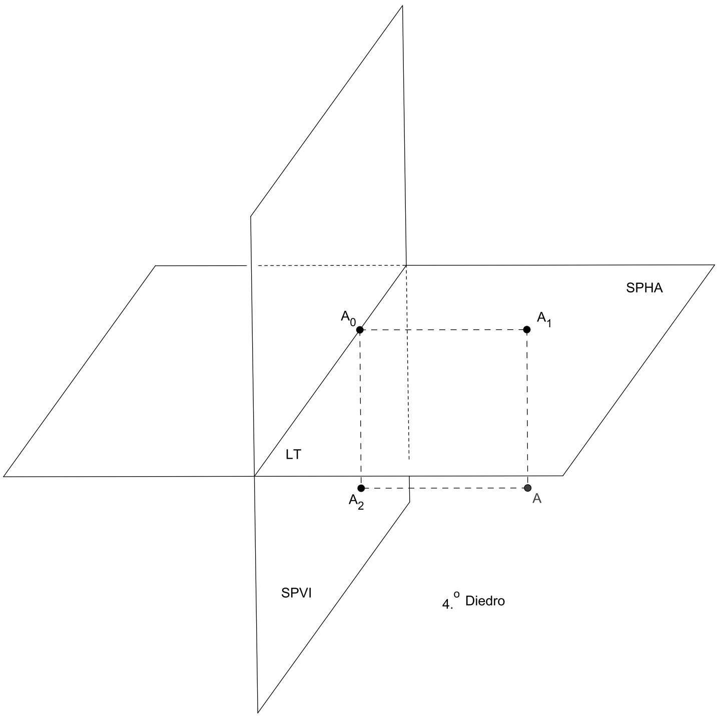


Épura do ponto A

(c) **4.º diedro (relativamente aos planos PH e PV) :**

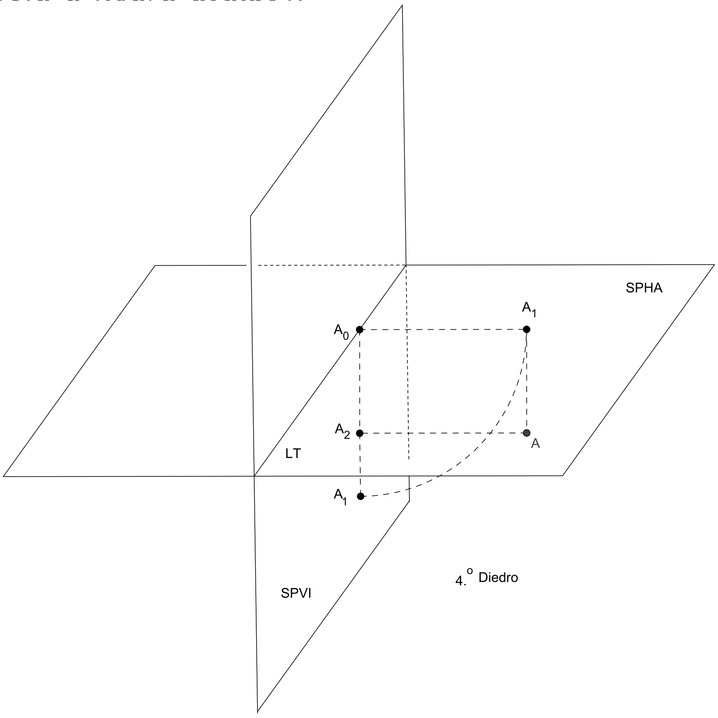
Encontremos os pontos $\underline{A_1}$ *e* $\underline{A_2}$ *suas projeções horizontais e verticais (ou seja, suas projeções ortogonais do ponto* $\underline{A}$*, nos planos* $\underline{\mathrm{PH}}$ *e* $\underline{\mathrm{PV}}$*), respectivamente.*

Como o ponto $\underline{A}$ *pertence ao* 4.º *diedro (relativamente aos planos* $\underline{\mathrm{PH}}$ *e* $\underline{\mathrm{PV}}$*) , temos que a sua projeção ortogonal no plano* $\underline{\mathrm{PH}}$ *(isto é, o ponto* $\underline{A_1}$*) pertencerá ao semi-plano* $\underline{\mathrm{SPHA}}$ *e sua projeção ortogonal no plano* $\underline{\mathrm{PV}}$ *(isto é, o ponto* $\underline{A_2}$*) pertencerá ao semi-plano* $\underline{\mathrm{SPVI}}$ *(veja a figura abaixo).*

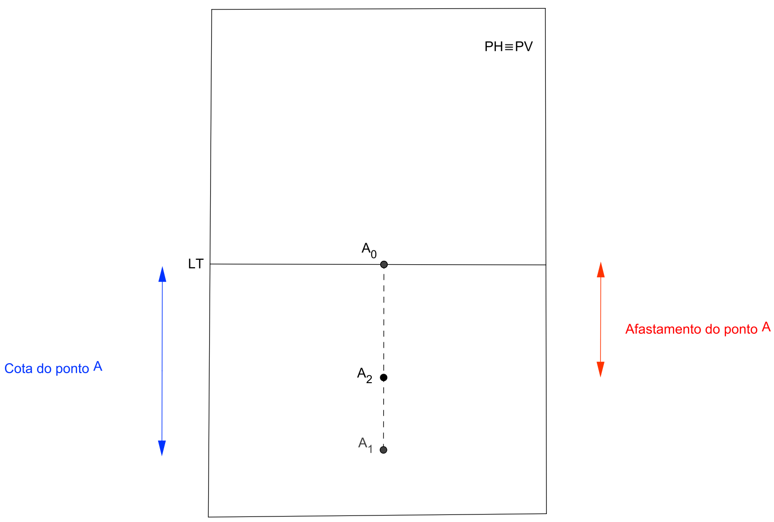


A seguir rotocionamos, no sentido horário o plano $\underline{\text{PH}}$*, de um ângulo de* $\frac{\pi}{2}$*, em torno da reta* $\underline{\text{LT}}$*, isto é, vamos rebater o plano* $\underline{\text{PH}}$ *sobre o plano* $\underline{\text{PV}}$*.*

Logo o ponto $\underline{A_1}$ *(a projeção ortogonal do ponto* $\underline{A}$ *sobre o plano* $\underline{\text{PH}}$*), que pertence ao semi-plano* $\underline{\text{SPHA}}$*, efetuará uma rotação, no sentido horário, de um ângulo de* $\frac{\pi}{2}$*, em torno da reta* $\underline{\text{LT}}$*, e nos fornecerá um ponto, que chamaremos de* $\underline{A_1'}$*, pertencente ao semi-plano* $\underline{\text{SPVI}}$*, que continuaremos indicando por* $\underline{A_1}$ *(veja a figura abaixo).*



Como observador está colocado no 1.º *diedro ele irá ver o plano* PH *coincidindo com o plano* PV *e estará de frente para ambos, ou seja, ele verá um único plano (a saber,* $\text{PH} \equiv \text{PV}$*) (figura abaixo).*

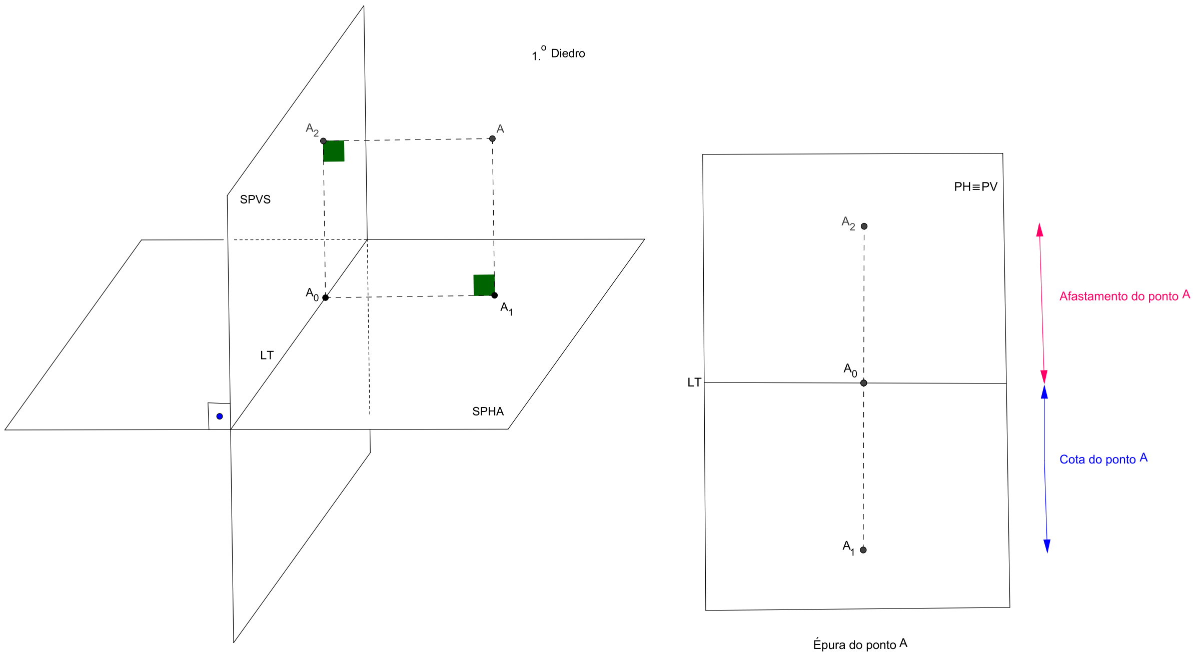


Épura do ponto A

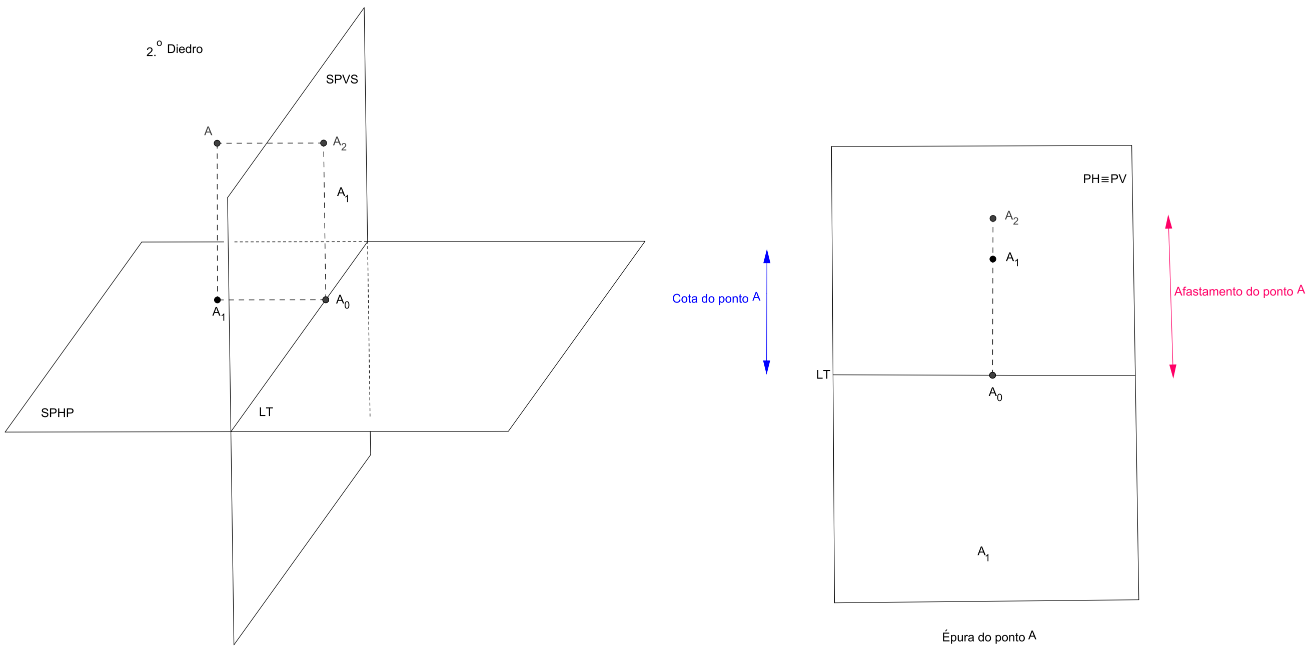
Com isto podemos representar em épura qualquer ponto do espaço.

Observação 5.0.2 *Observemos que:*

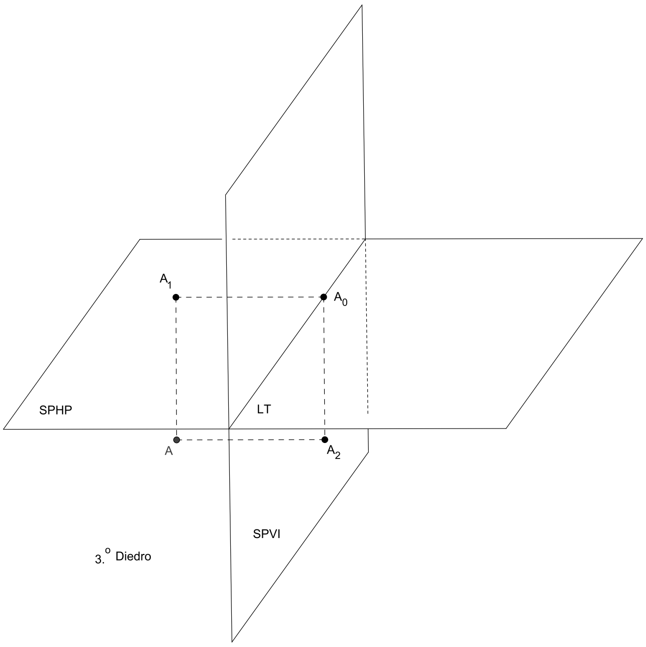
1. *Se o ponto* $\underline{A}$ *está no* 1.º *diedro (relativamente aos planos* $\underline{PH}$ *e* $\underline{PV}$*) então, para sua representação em épura, teremos que o ponto* $\underline{A_1}$ *estará* **abaixo da linha de terra** $\underline{LT}$ *e o ponto* $\underline{A_2}$ *estará* **acima da linha de terra** $\underline{LT}$ *(vejam as figuras abaixo).*

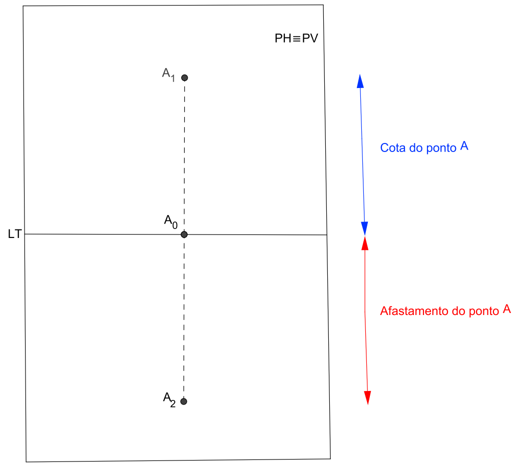


2. *Se o ponto* $\underline{A}$ *está no* 2.º *diedro (relativamente aos planos* $\underline{PH}$ *e* $\underline{PV}$*) então, para sua representação em épura, teremos que os pontos* $\underline{A_1}$ *e* $\underline{A_2}$ *estarão ambos* **acima da linha de terra** $\underline{LT}$ *(vejam as figuras abaixo).*



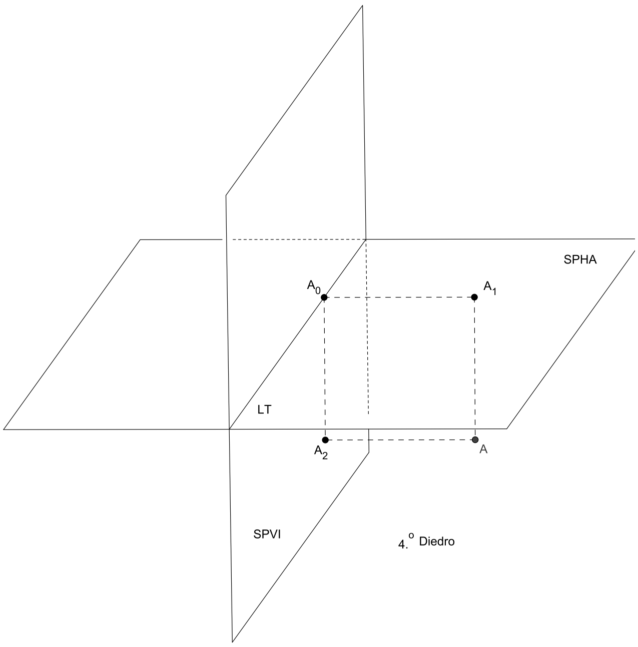
3. *Se o ponto A está no 3.º diedro (relativamente aos planos PH e PV) então, para sua representação em épura, teremos que o ponto A_1 estará* **acima da linha de terra LT** *e o ponto estará A_2* **abaixo da linha de terra LT** *(vejam as figuras abaixo).*

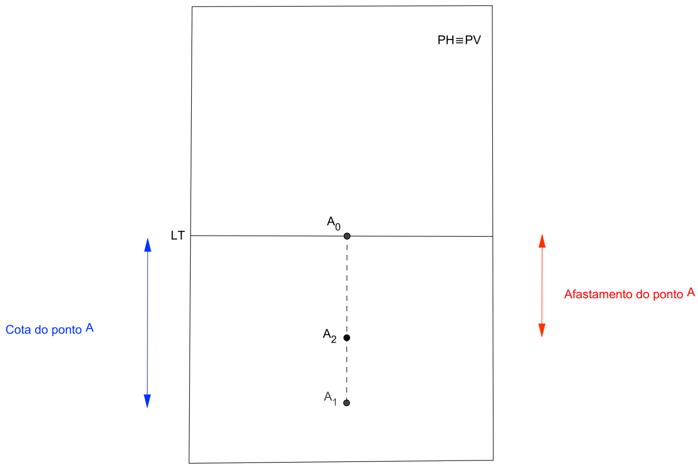




Épura do ponto A

4. *Finalmente, se o ponto A está no 4.º diedro (relativamente aos planos PH e PV) então, parasua representação em épura, teremos que os pontos A_1 e A_2 estarão ambos* **abaixo da linha de terra LT** *(vejam as figuras abaixo).*





Épura do ponto A

Utilizaremos a seguinte notação ao longo destas notas:

Observação 5.0.3

1. *Os pontos do espaço serão indicados por letras maiúsculas:*

$$A, B, C, \cdots .$$

   Suas projeções serão denotadas por:

   (a) *Projeção ortogonal no plano horizontal (isto é, no plano* $\underline{\text{PH}}$*):*

$$A_1, B_1, C_1, \cdots .$$

   (b) *Projeção ortogonal no plano vertical (isto é, no plano* $\underline{\text{PV}}$*) :*

$$A_2, B_2, C_2, \cdots .$$

2. *As retas do espaço serão indicadas por letras minúculas:*

$$a, b, c, \cdots .$$

   Suas projeções serão denotadas por:

   (a) *Projeção ortogonal no plano horizontal (isto é, no plano* $\underline{\text{PH}}$*):*

$$a_1, b_1, c_1, \cdots .$$

   (b) *Projeção ortogonal no plano vertical (isto é, no plano* $\underline{\text{PV}}$*):*

$$a_2, b_2, c_2, \cdots .$$

3. *Os planos do espaço serão indicadas por letras gregas minúsculas:*

$$\alpha, \beta, \gamma, \cdots .$$

   Seus **traços com os planos** $\underline{\text{PH}}$ **e** $\underline{\text{PV}}$ *(isto é, as intersecções dos mesmos com os planos* $\underline{\text{PH}}$ *e* $\underline{\text{PV}}$*) serão denotadas por:*

   (a) *Traço com o plano horizontal (isto é, com o plano* $\underline{\text{PH}}$*):*

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \cdots .$$

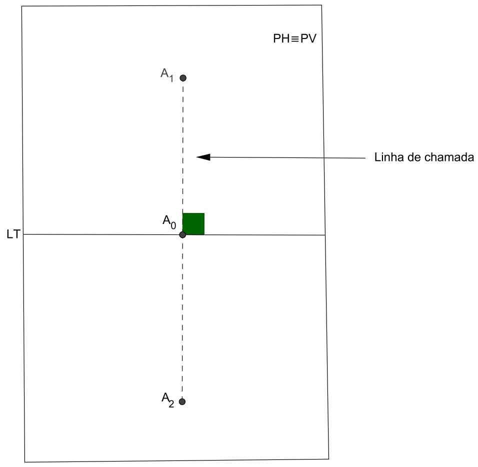
   (b) *Traço com o plano vertical (isto é, com o plano* $\underline{\text{PV}}$*):*

$$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \cdots .$$

4. *Notemos que após o rebatimento do plano* $\underline{\text{PH}}$ *sobre o plano* $\underline{\text{PV}}$ *(em torno da reta* $\underline{\text{LT}}$*) os pontos*

$$A_o, A_1, A_2$$

   pertencerão a uma mesma reta que será perpendicular à reta $\underline{\text{LT}}$ *(veja a figura abaixo).*



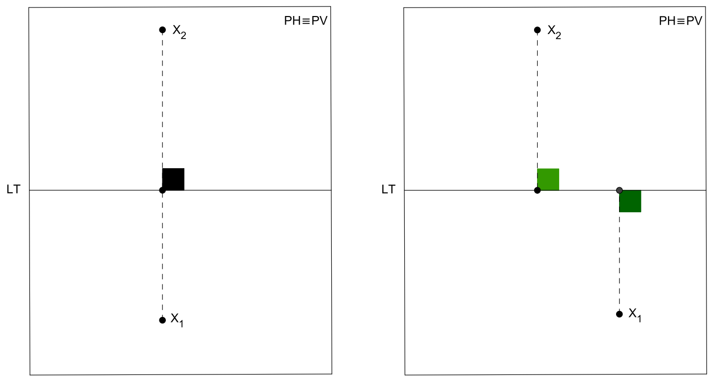
Épura do ponto A

A esta reta daremos o nome de **linha de chamada do ponto A** *e será indicada por* LC*, ou ainca,* LC_A*, quando queremos nos referir à linha de chamada relativa ao ponto* A *(veja a figura acima).*

Em particular, o ponto A_o *será a interseção da linha de chamada do ponto* A *com a linha de terra* LT*, isto é,*

$$A_o \in LC \cap LT\,.$$

5. *Vale observar que para um ponto* X *ser dado ou obtido em épura é* **necessário e suficiente** *que os pontos* X_1 *e* X_2 *(suas projeções ortogonais nos planos* PH *e* PV*) estejam em uma mesma reta perpendicular à linha de terra* LT*, ou seja, sobre uma linha de chamada (veja a figura abaixo).*



É um ponto do espaço em épura

Não é um ponto do espaço em épura

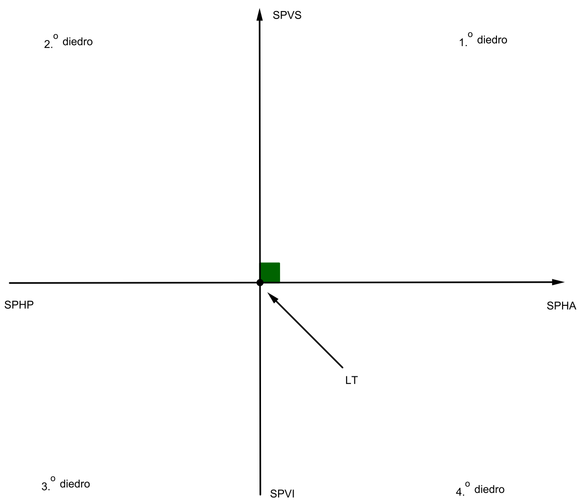
5.1 Exercícios

Nos exercícios abaixo estamos supondo que estejam fixados dois planos ortogonais no espaço,que serão denotados por PH e PV.

Exercício 5.1.1 *Em cada um dos itens abaixo, marcar a épura dos pontos localizados no:*

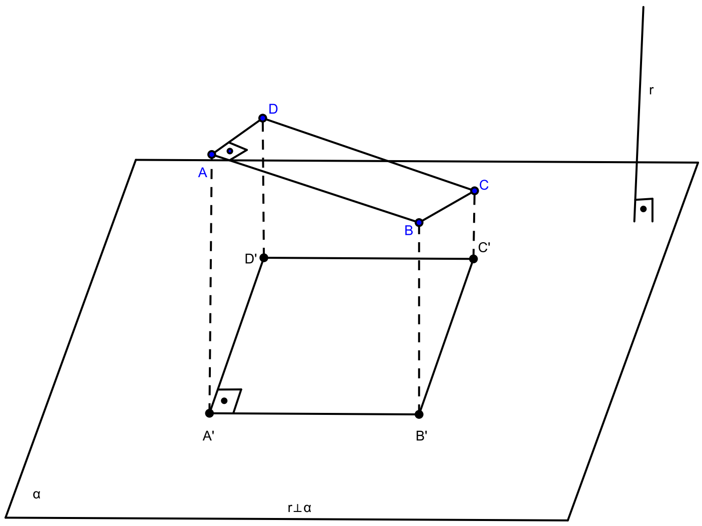
Exercício 5.1.2 *Consideremos os sistema de coordenadas ortogonal dado abaixo.*

Encontrar o sinal, positivo ou negativo, dos afastamentos e das cotas dos pontos localizados em cada um dos itens do Exercício anterior.



Exercício 5.1.3 *Suponhamos que o retângulo $\underline{A'B'C'D'}$, dado na figua abaixo, é a projeção ortogonal de um quadrado $\underline{ABCD}$ do espaço.*

Encontrar, geometricamente, o comprimento da diagonal do quadrado $\underline{ABCD}$.



Resolução:

Suponhamos que o retângulo $\underline{A'B'C'D'}$ está contido no plano $\underline{\alpha}$, plano da projeção ortogonal (veja a figura acima).

Sabemos, por hipótese, que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ do quadrado $ABCD$ são ortogonais, assim como os lados $\overline{A'B'}$ e $\overline{A'D'}$ do retângulo $\underline{A'B'C'D'}$ tambem são ortogonais.

Logo as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD}$ serão perpendiculares (isto é, vale (i) do Corolário (4.1.1)) e suas projeções ortogonais $\overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{A'D'}$ também serão perpendiculares (isto é, vale (iii) do Corolário (4.1.1)).

Então, do Corolário (4.1.1), deverá valer (ii), ou seja:

$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'} \quad \text{ou} \quad \overline{AD} \parallel \overline{A'D'}.$$

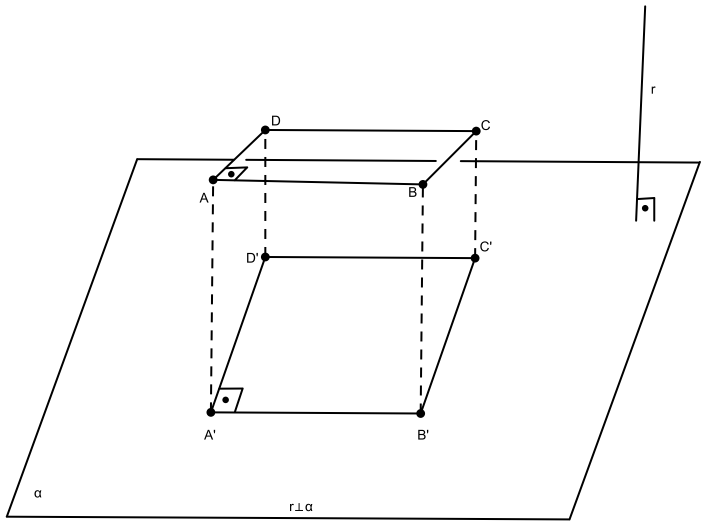
Consideraremos o caso em que

$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}.$$

O outro caso é semelhante e será deixado como exercício para o leitor.

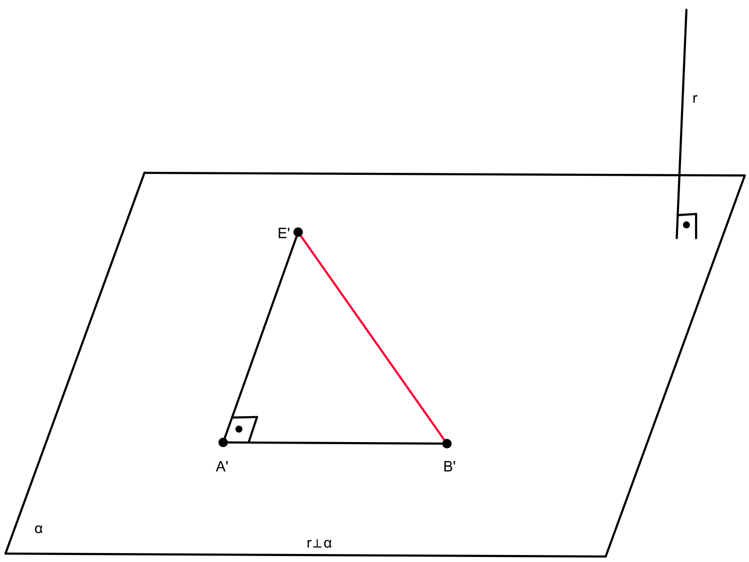
Como a projeção é ortogonal e $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, segue que (veja a figura abaixo):

$$A'B' = AB.$$



Logo tendo-se o comprimento do lado $\overline{AB}$ do quadrado $\underline{ABCD}$ em $\underline{V.G.}$ (isto é, $\underline{A'B'}$), podemos obter um ponto, que chamaremos de $\underline{E'}$, pertencente ao plano $\underline{\alpha}$, de modo que (veja a figura abaixo):

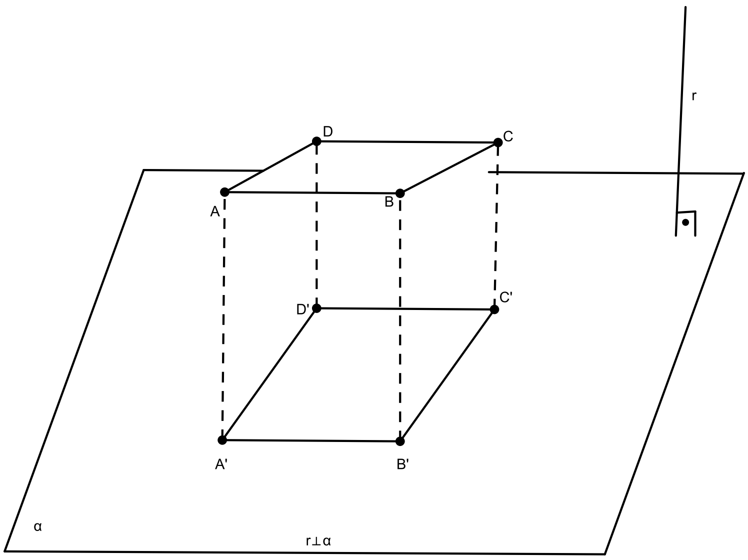
$$\overline{A'E'} \perp \overline{A'B'} \quad \text{e} \quad A'E' = A'B'.$$



Logo o comprimento da diagonal do quadrado $\underline{ABCD}$ será igual a $\underline{A'E'}$ (veja a figura acima).

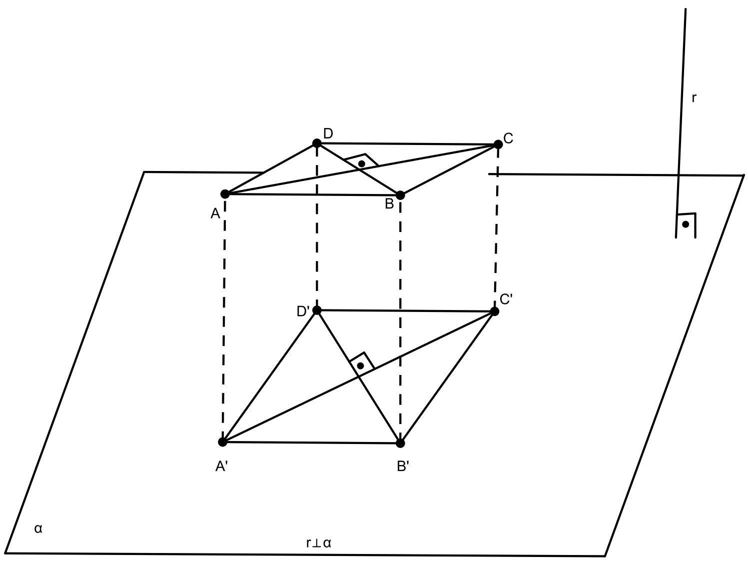
Exercício 5.1.4 *Suponhamos que o losango $\underline{A'B'C'D'}$, dado na figua abaixo, é a projeção ortogonal de um quadrado $\underline{ABCD}$ do espaço.*

Encontrar, geometricamente, o comprimento de um dos lados do quadrado $\underline{ABCD}$.



Resolução:

Sabemos que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, as diagonais do losango, (veja a figura abaixo) são ortogonais, assim como os segmentos $\overline{A'C'}$ e $\overline{B'D'}$ são ortogonais, pois são as digonais de um quadrado (veja a figura abaixo).



Assim as retas $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ são perpendiculares (isto é, vale (i) do Corolário (4.1.1)) e suas projeções ortogonais $\overleftrightarrow{A'C'}$, $\overleftrightarrow{B'D'}$ também são perpendiculares (isto é, vale (iii) do Corolário (4.1.1)).

Então, do Corolário (4.1.1), deverá valer (ii), ou seja:

$$\overline{AC} \parallel \overline{A'C'} \quad \text{ou} \quad \overline{BD} \parallel \overline{B'D'}.$$

Consideraremos o caso em que

$$\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}.$$

O outro caso é semelhante e será deixado como exercício para o leitor.

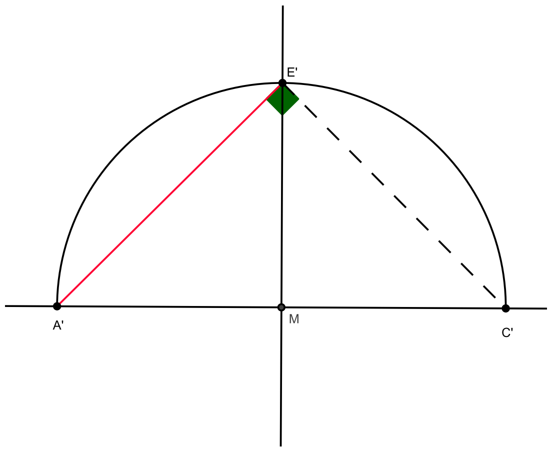
Como a projeção é ortogonal e $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$ segue que (veja a figura acima)

$$A'C' = AC.$$

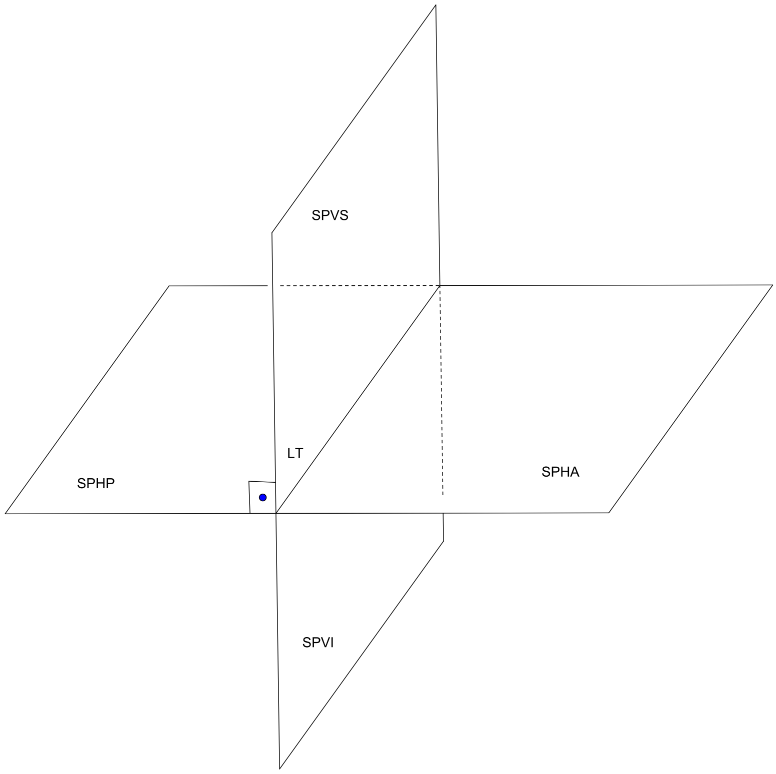
Tendo-se o comprimento da diagonal do quadrado $\underline{ABCD}$, podemos obter o comprimento do lado do mesmo, encontrando-se o ponto médio, que chamaremos de $\underline{M}$, do segmento $\overline{A'C'}$ e traçando-se uma semi-circunferência, que denotaremos por $\underline{\mathcal{C}}$, de centro no ponto $\underline{M}$ e raio igual a $\dfrac{A'C'}{2}$.

A mediatriz do segmento $\overline{A'C'}$ encontrará a semi-circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ em um ponto, que chamaremos de $\underline{E'}$.

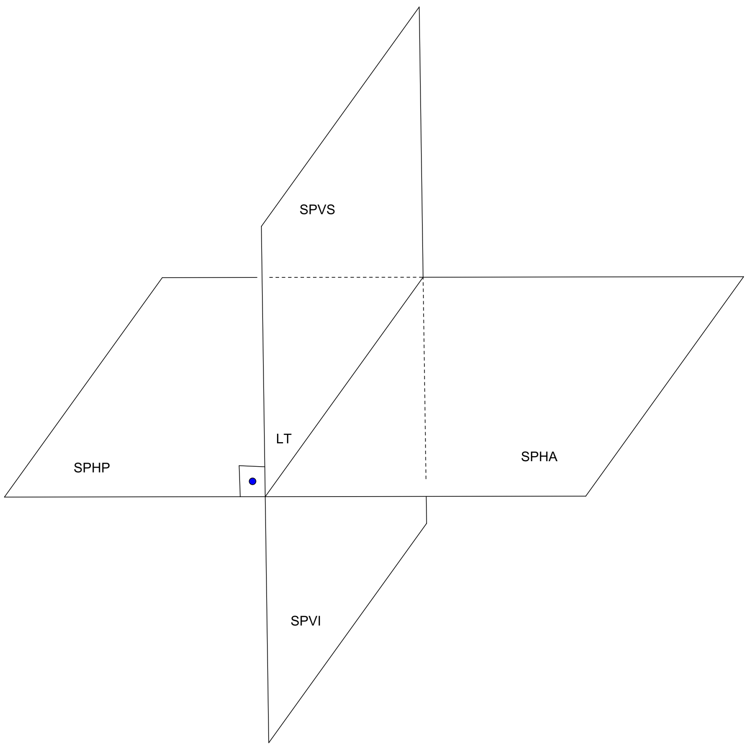
Com isto temos que o lado do quadrado $\underline{ABCD}$ terá comprimento igual a $\underline{A'E'}$ (veja a figura abaixo).



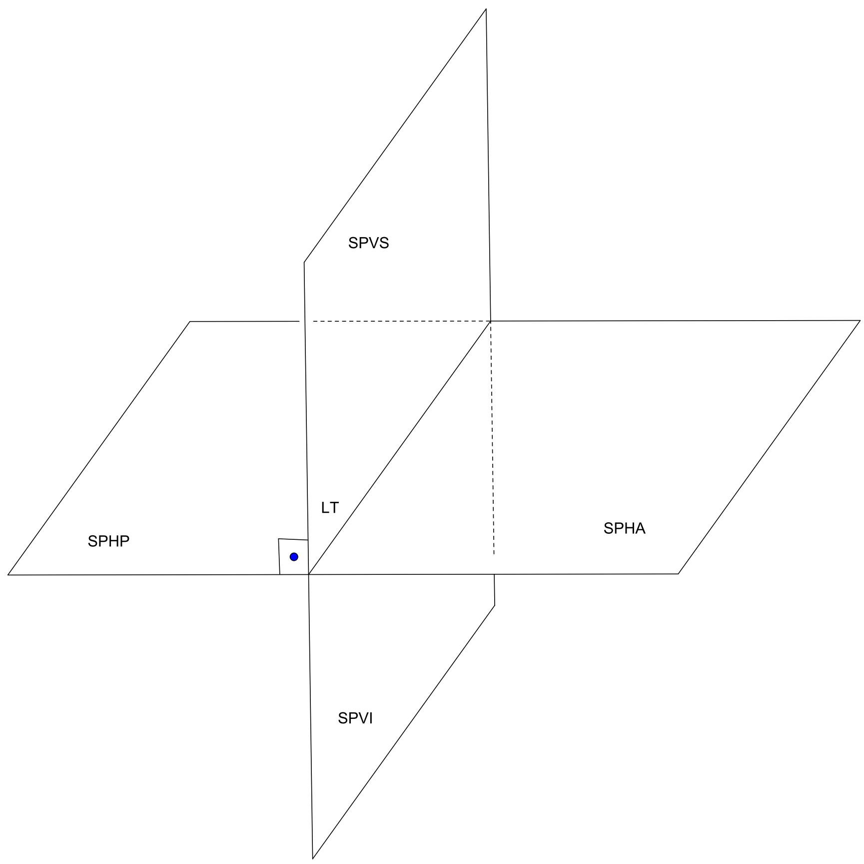
Exercício 5.1.5 *Representar, geometricamente na figura abaixo, os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$ do semi-plano $\underline{SPHA}$, sabendo-se que o afastamento do ponto $\underline{A}$ é igual a* $3\,\mathrm{cm}$*, o afastamento do ponto $\underline{B}$ é igual a* $5\,\mathrm{cm}$ *e o comprimento do segmento $\overline{AB}$ é igual* $6\,\mathrm{cm}$ *(isto é,* $AB = 6\,\mathrm{cm}$*).*



Exercício 5.1.6 *Representar, geometricamente na figura abaixo, um triângulo equilátero que um tem lado de comprimento igual a* 5 cm, *está contido em* $\underline{\mathrm{PH}}$, *tem um vértice em* $\underline{\mathrm{LT}}$ *e o lado oposto a este vértice é perpendicular à* $\underline{\mathrm{LT}}$ *e está situado á direita deste vértice.*



Exercício 5.1.7 *Representar, geometricamente na figura abaixo, um cubo que tem aresta de comprimento igual a* 5 cm*, duas arestas em* PV *e as outras duas arestas em* PH.



Capítulo 6

O Estudo da Reta - Épura de uma Reta

Neste capítulo estudaremos a representação de uma reta do espaço em épura e algumas de suas propriedades.

6.1 Determinação de uma reta

Em Geometria de Posição dizemos que uma reta está **determinada em posição** quando os elementos dados permitem encontrar uma única reta que tenha os elementos dados, ou seja, a reta existirá e será única com os elementos dados.

Em Geometria Descritiva dizemos que uma reta está **determinada geometricamente** quando os elementos, dados geometricamente em épura, permitem encontrar, geometricamente, uma única reta no espaço que tenha os elementos dados, ou seja, sua posição relativa em épura.

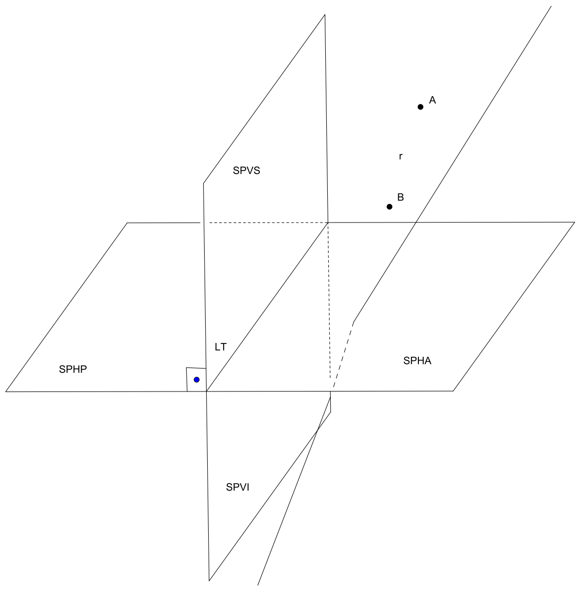
Nas próximas seções estaremos intereressado em determinar geometricamente uma reta em épura.

6.2 Reta conhecendo-se dois pontos distintos da mesma

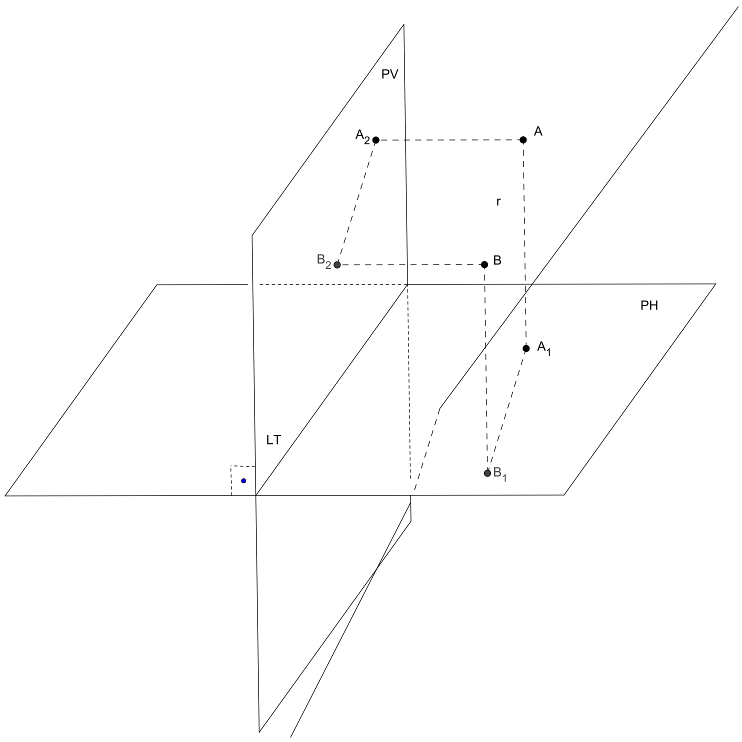
Sabemos que, em Geometria de Posição, uma reta fica determinada se forem conhecidos dois pontos distintos da mesma.

Neste caso, em épura, será necessário que tenhamos as projeções ortogonais destes pontos distintos no planos PH e PV.

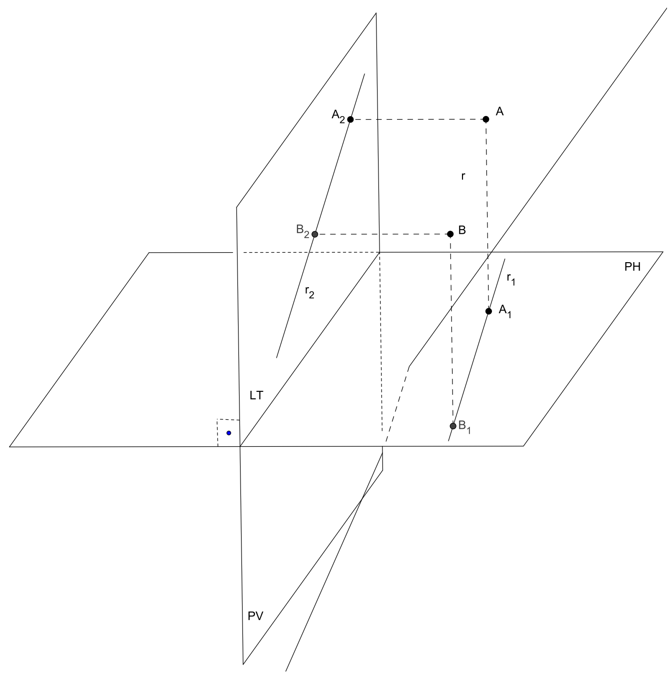
Suponhamos que os pontos distintos A e B pertençam à reta r (veja a figura abaixo).



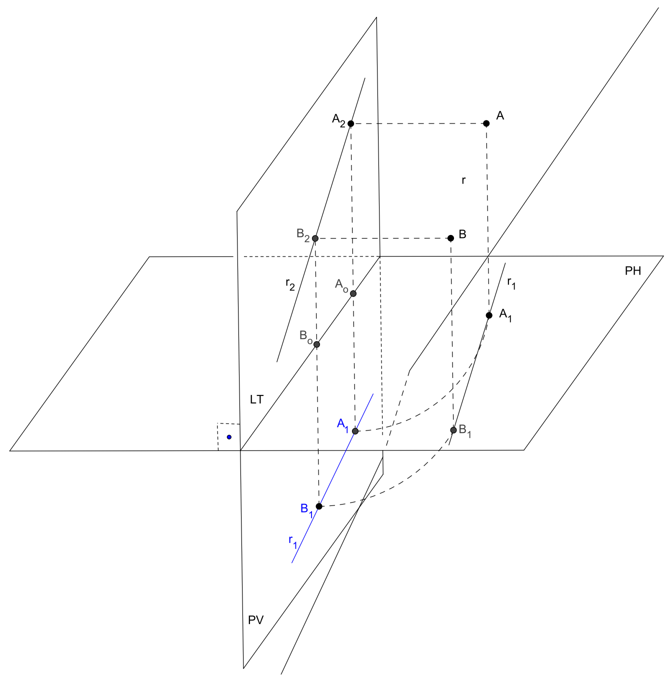
Logo podemos obter as projeções ortogonais, que denotaremos por $\underline{A_1}$, $\underline{A_2}$ e $\underline{B_1}$, $\underline{B_2}$ dos pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$, nos planos $\underline{PH}$ e $\underline{PV}$, respectivamente (veja a figura abaixo).



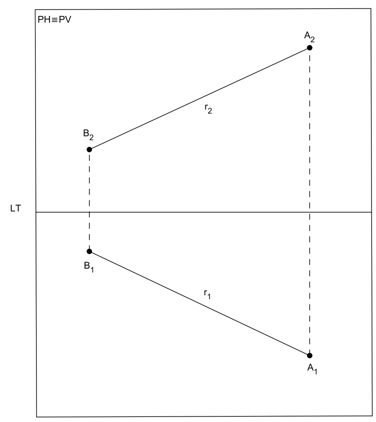
Com isto obtemos as retas, que denotaremos por $\underline{r_1}$ e $\underline{r_2}$, que contém os pontos $\underline{A_1}$ e $\underline{B_1}$, que contém os pontos $\underline{A_2}$ e $\underline{B_2}$, contidas nos planos $\underline{PH}$ e $\underline{PV}$, respectivamente, que serão as projeções ortogonais da reta $\underline{r}$, que contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$, nos planos $\underline{PH}$ e $\underline{PV}$, respectivamente (veja a figura abaixo).



Rebatendo o plano PH sobre o plano PV (em torno da reta LT, no sentido horário) obtemos a representação em épura da reta r (veja a figura abaxio).



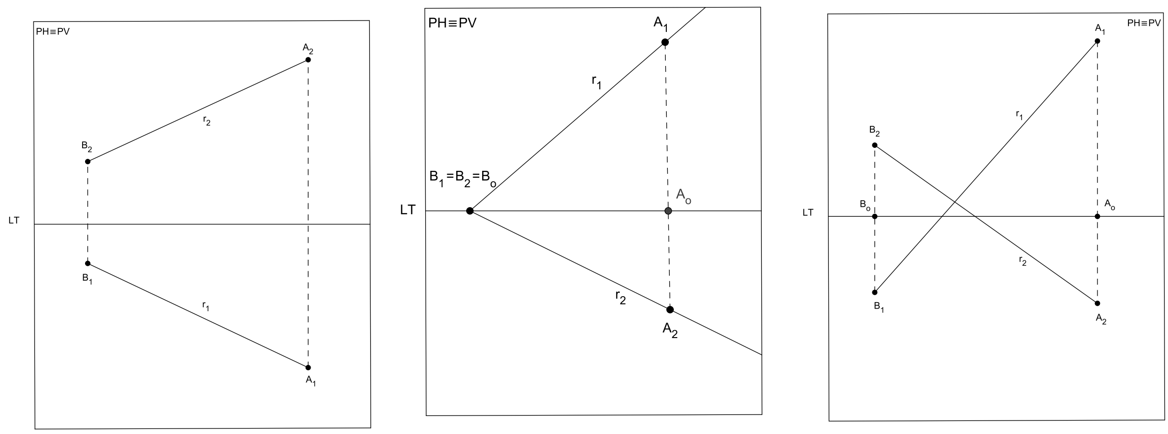
Com isto obtemos a representação geométrica da reta r em épura exibida na figura abaixo:



Observação 6.2.1

1. *Lembremos que com a representação em épura da figura acima existe uma única reta* r *no espaço cuja representação em épura é dada por essa figura.*

2. *Podemos ter várias situações interessantes, entre as quais destacamos as seguintes:*



3. *Nas figuras acima temos as seguintes situações:*

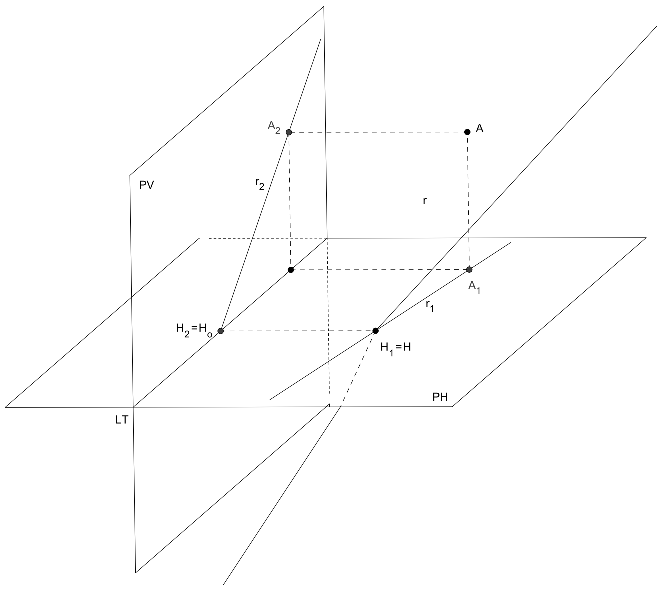
   (a) *No caso da figura à esquerda, temos que os pontos* A *e* B *pertencem ao* 1.º *diedro (relativamente aos planos* PH *e* PV*) .*

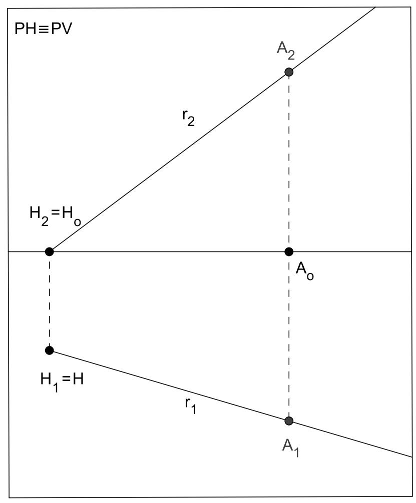
   (b) *No caso da figura do centro, o ponto* A *pertence ao* 3.º *diedro (relativamente aos planos* PH *e* PV*) e o ponto* B *pertence a linha de terra* LT.

   (c) *No caso da figura à direita, o ponto* A *pertence ao* 3.º *diedro (relativamente aos planos* PH *e* PV*) e o ponto* B *pertence ao* 1.º *diedro (relativamente aos planos* PH *e* PV*) .*

Outros exemplos serão considerados na próxima seção.

4. *Se uma reta r intercepta o plano PH em ponto, que denotaremos por H, teremos, nas figuras abaixo, à esquerda a situação no espaço e à direita a situação em épura.*





Logo para sabermos, em épura, se uma reta r intercepta o plano PH, basta verificar se a reta r_2, intercepta a linha de terra LT, ou seja, se (veja figura à direita acima)

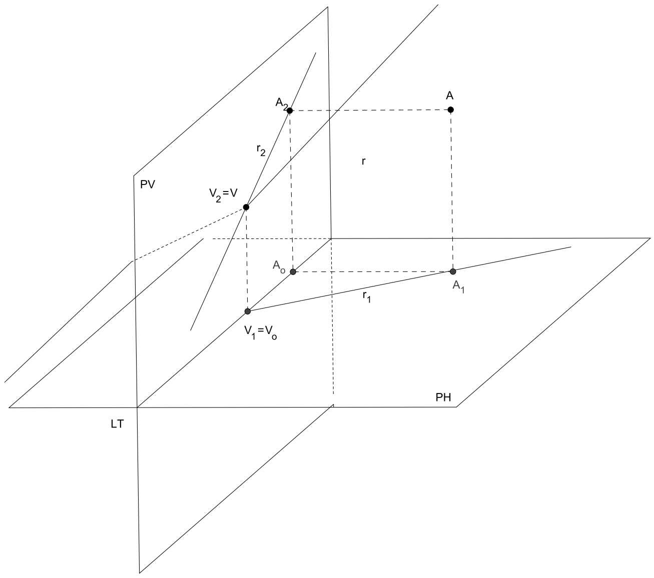
$$r_2 \cap LT \neq \emptyset\,.$$

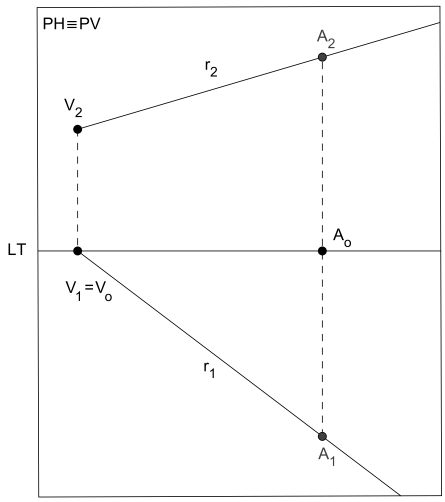
Para obtermos, em épura, a projeção ortogonal do ponto H no plano PH (isto é, o ponto H_1), basta encontrarmos a interseção da reta perpendicular a LT, pelo ponto $H_2 = H_o$, com a reta r_1 (veja figura à direita acima).

Neste caso o ponto de interseção da reta r com plano PH será o ponto $H = (H_1\,, H_2)$, onde

$$H_1 = H \quad e \quad H_2 = H_o\,.$$

5. *Se uma reta r intercepta o plano PV em um ponto, que denotaremos por V, teremos, nas figuras abaixo, à esquerda a situação no espaço e à direita a situação em épura.*





Logo para sabermos, em épura, se uma reta $\underline{r}$ *intercepta o plano* $\underline{PV}$*, basta verificarmos se a reta* $\underline{r_1}$ *intercepta a linha de terra* $\underline{LT}$*, ou seja, (aveja a figura à direita acima) se*

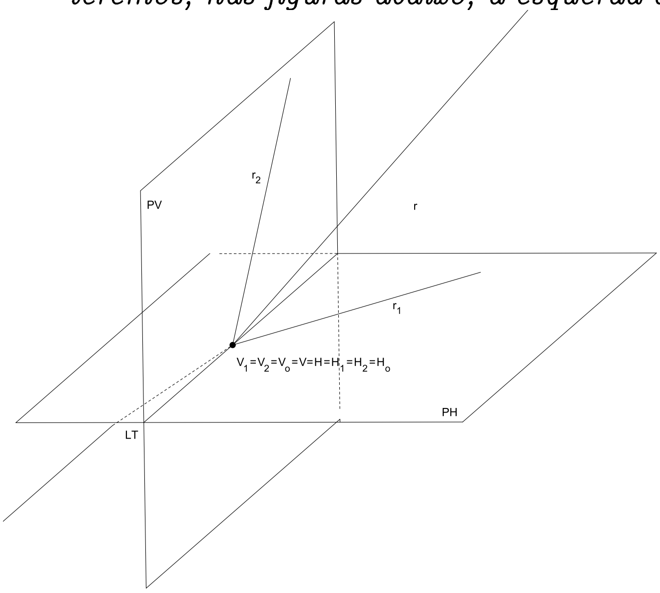
$$r_1 \cap LT \neq \emptyset\,.$$

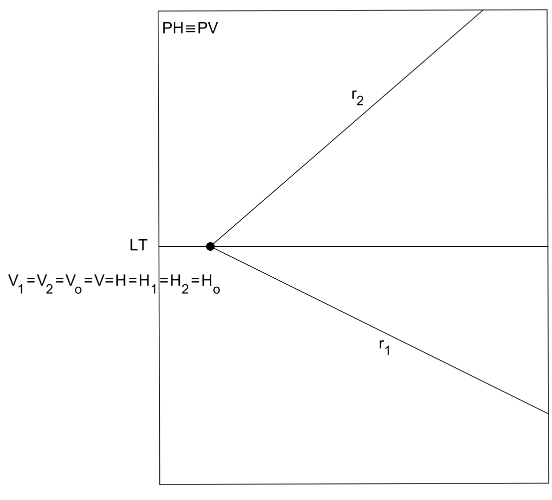
Para obtermos, em épura, a projeção ortogonal do ponto $\underline{V}$ *no plano* $\underline{PV}$ *(isto é, o ponto* $\underline{V_2}$*), basta encontrarmos a interseção da reta perpendicular a* $\underline{LT}$*, pelo ponto* $\underline{V_1 = V_o}$*, com a reta* $\underline{r_2}$ *(veja figura à direita acima).*

Neste caso o ponto de interseção da reta $\underline{r}$ *com plano* $\underline{PV}$ *será o ponto* $\underline{V = (V_1, V_2)}$*, onde*

$$V_2 = V \quad e \quad V_1 = V_o.$$

6. *Se uma reta* $\underline{r}$ *intercepta a linha de terra* $\underline{LT}$ *em um ponto, que indicaremos por* $\underline{V}$*, teremos, nas figuras abaixo, à esquerda a situação no espaço e à direita a situação*





Logo para sabermos, em épura, se uma reta $\underline{r}$ *intercepta a linha de terra* $\underline{LT}$*, basta verificar se as retas* $\underline{r_1}$ *e* $\underline{r_2}$*, interceptam a linha de terra* $\underline{LT}$ *em um mesmo ponto,ou seja, (vejas as figuras acima)*

$$r_1 \cap r_2 \cap LT \neq \emptyset .$$

Neste caso o ponto de interseção da reta $\underline{r}$ *com a linha de terra* $\underline{LT}$*, será o ponto* $\underline{V = (V_1, V_2)}$ *onde (veja a figuras acima)*

$$V_1 = V_2 = V_o = V = H = H_1 = H_2 = H_o .$$

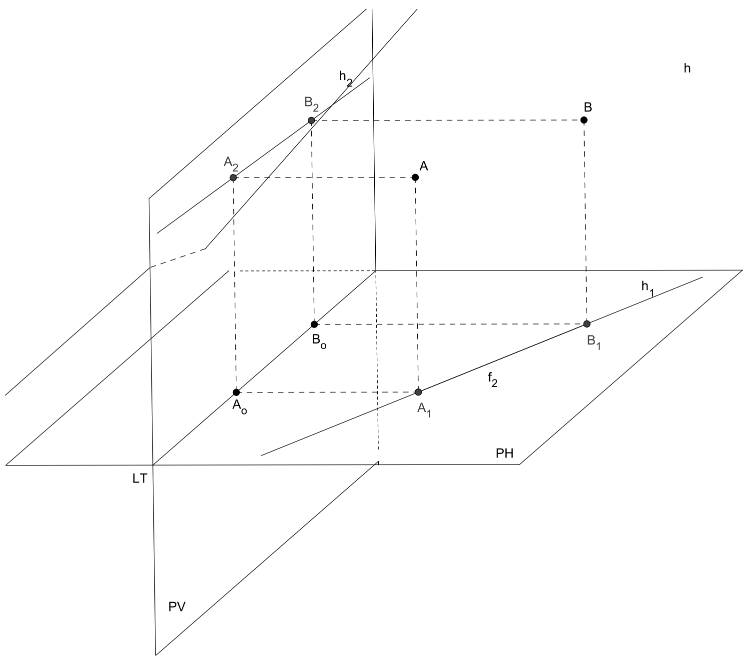
6.3 Exemplos Importantes de Retas - Retas Notáveis

A seguir exibiremos alguns exemplos importantes de retas no espaço e suas respectivas representações em épura.

Tais retas serão denominadas **Retas Notáveis da Geometria Descritiva**.

6.3.1 Reta Horizontal ou de Nível

Definição 6.3.1 *Uma reta do espaço será dita* **reta horizontal (ou de nível)** *se ela for paralela ao plano* $\underline{PH}$*, mas não for uma reta ortogonal ou paralela ao plano* $\underline{PV}$ *(veja a figura abaixo).*



Observação 6.3.1

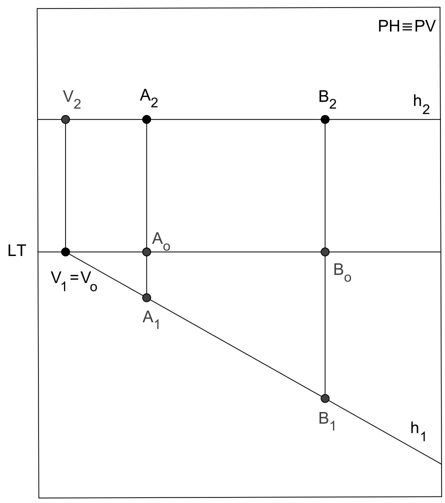
1. *Observemos que se a reta* $\underline{h}$ *é uma reta horizontal, então sua projeção ortogonal no plano* $\underline{PV}$ *será uma reta (pois a reta* $\underline{h}$ *não é ortogonal ao plano* $\underline{PV}$*) que será paralela à linha de terra (pois ela é paralela a* $\underline{PH}$*) e sua projeção ortogonal no plano* $\underline{PH}$ *não será nem paralela, nem perpendicular a linha de terra (veja a figura acima), ou seja,*
$$h_2 \parallel LT, \quad h_1 \nparallel LT \quad e \quad h_1 \not\perp LT.$$
Reciprocamente, se uma reta $\underline{h}$ *é tal que sua projeção ortogonal no plano* $\underline{PV}$ *é paralela a linha de terra e sua projeção ortogonal no plano* $\underline{PH}$ *não é nem paralela, nem perpendicular a linha de terra então a reta* $\underline{h}$ *será uma reta horizontal.*

   Com isto podemos concluir que:

   uma reta $\underline{h}$ *no espaço é uma reta horizontal*

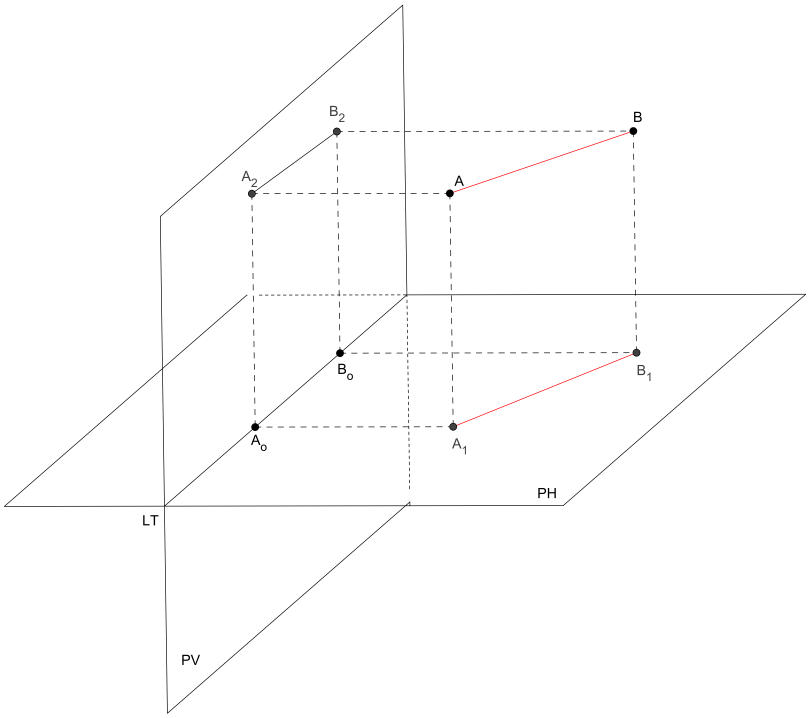
   se, e somente se,
$$h_2 \parallel LT, \quad h_1 \nparallel LT \quad e \quad h_1 \not\perp LT.$$

2. *Segue do item 1. acima que a representação, em épura, de uma reta horizontal* $\underline{h}$ *será dada pela figura abaixo e reciprocamente, uma reta no espaço que, em épura, tem a representação dada pela figura abaixo será uma reta horizontal no espaço.*

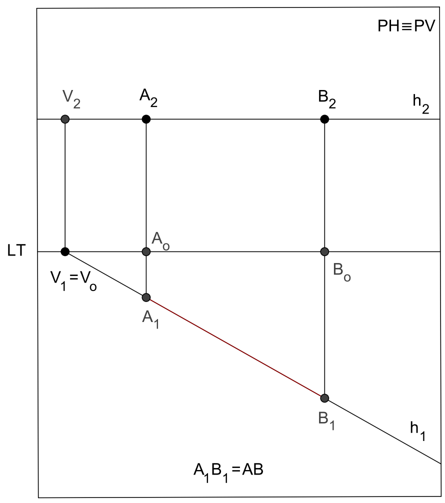


3. *Como conseqüência temos:*

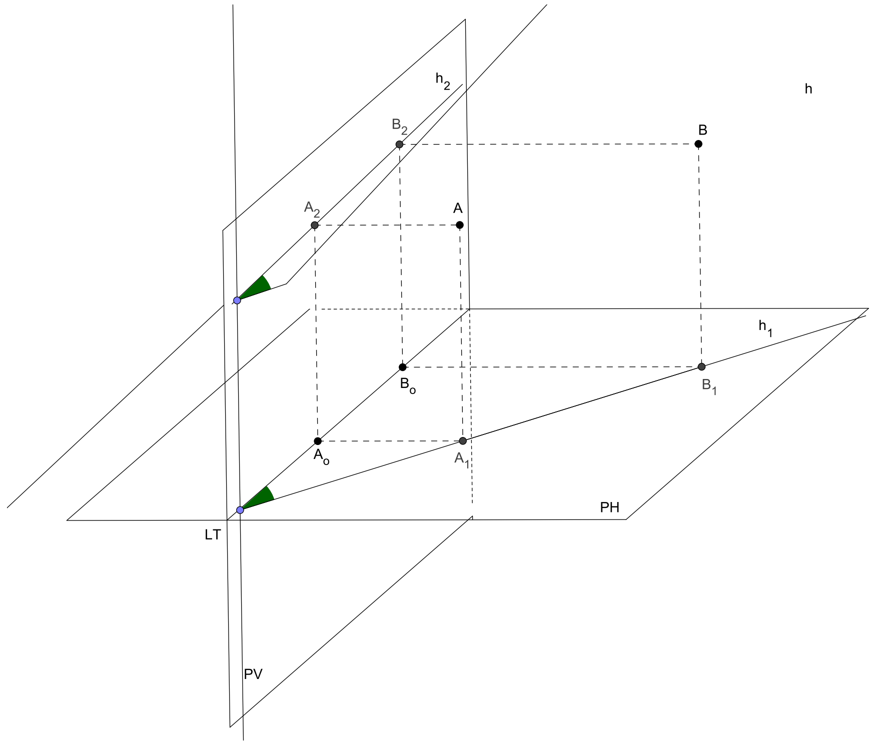
   (a) *Se dois pontos, qip* $\underline{A}$ $\underline{B}$*, pertencem a uma reta horizontal* $\underline{h}$*, então o segmento* $\overline{A_1B_1}$ *estará em V.G. com o segmento* $\overline{AB}$*, ou seja,*
$$A_1B_1 = AB$$
   pois $\overline{AB} \parallel PH$ *(veja a figura abaixo).*



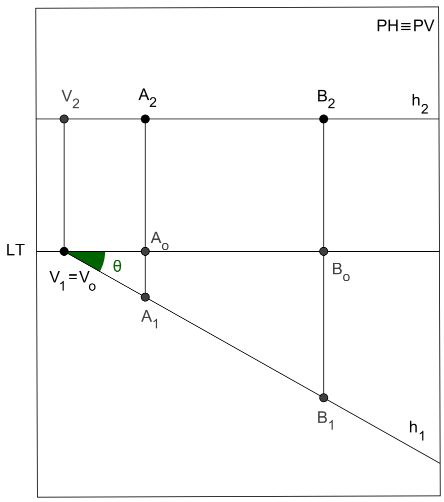
Logo para conhecermos o comprimento de um segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ que está contido em uma reta horizontal, dada em épura, basta encontrarmos o comprimento do segmento $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}$, ou seja, de sua projeção ortogonal no plano $\underline{\mathrm{PH}}$ (veja a figura abaixo).



(b) *Notemos que se denotarmos por $\theta \in \mathbb{R}$, o ângulo que a reta horizontal $\underline{\mathrm{h}}$ forma com o plano $\underline{\mathrm{PV}}$, então este será igual ao ângulo que a sua projeção ortogonal da reta $\underline{\mathrm{h}}$ no plano $\underline{\mathrm{PH}}$ forma com a linha de terra $\underline{\mathrm{LT}}$, isto é, que a reta $\underline{\mathrm{h}_1}$ forma com a reta $\underline{\mathrm{LT}}$ (veja figura abaixo).*



Logo para conhecermos a medida do ângulo $\underline{\theta}$, que uma reta horizontal $\underline{h}$ faz com o plano $\underline{PV}$, basta encontrarmos ângulo que a reta $\underline{h_1}$ faz com $\underline{LT}$, ou seja, que sua projeção ortogonal no plano $\underline{PH}$ faz com a linha de terra $\underline{LT}$ (veja a figura abaixo).

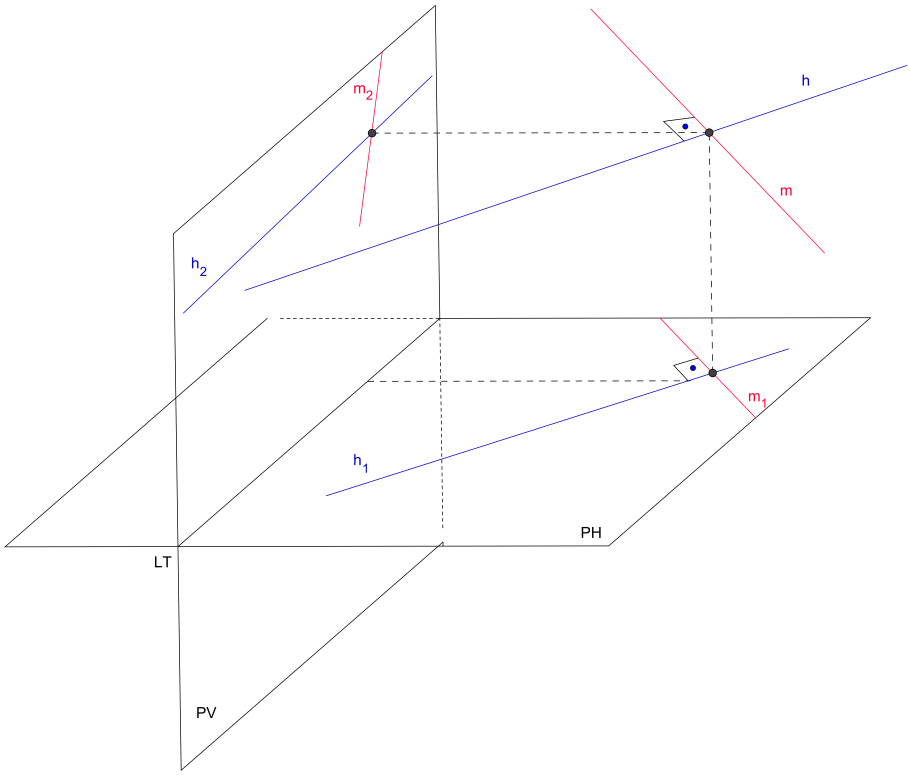


(c) *Se denotarmos por $\underline{m}$, uma reta que não é perpendicular ao plano $\underline{PH}$ e for ortogonal a uma reta horizontal $\underline{h}$ então, do Corolário (4.1.1), segue que as projeções ortogonais das retas $\underline{m}$ e $\underline{h}$ no plano $\underline{PH}$, serão perpendiculares, isto é,*

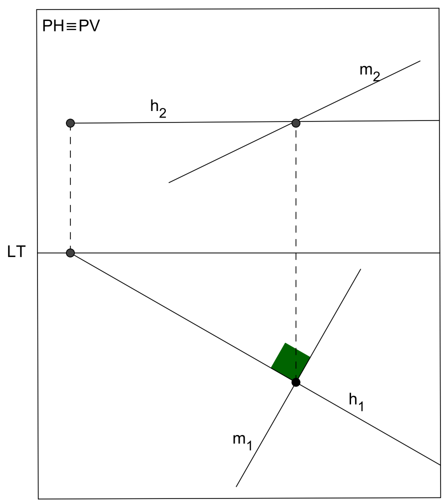
$$m_1 \perp h_1 \, ,$$

mas as projeções ortogonais das retas $\underline{m}$ *e* $\underline{h}$ *no plano* $\underline{PV}$ *não serão, necessariamente, perpendiculares (veja a figura abaixo), isto é,*

$$m_2 \not\perp h_2 .$$

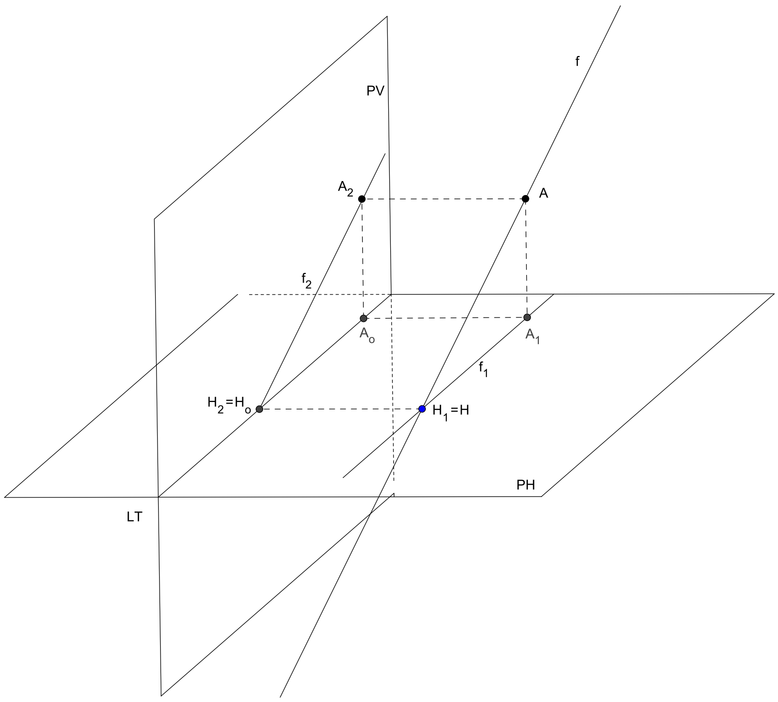


Logo para verificarmos se uma reta $\underline{m}$*, em épura, é ortogonal a uma reta horizontal* $\underline{h}$*, pelo Corolário (4.1.1), é necessário e suficiente, que verifiquemos se as retas* $\underline{m_1}$ *e* $\underline{h_1}$ *são perpendiculares (veja a figura abaixo).*



6.3.2 Reta Frontal ou de Frente

Definição 6.3.2 *Uma reta* f *do espaço será dita* **reta frontal (ou de frente)** *se ela for paralela ao plano* PV*, mas não for uma reta ortogonal ou paralela ao plano* PH *(veja a figura abaixo).*



Observação 6.3.2

1. *Observemos que se denotarmos por* f *é uma reta frontal, então sua projeção ortogonal no plano* PH *será uma reta (pois a reta* f *não é ortogonal ao plano* PH*) paralela a linha de terra (pois ela é paralela ao plano* PV*) e sua projeção ortogonal no plano* PV*, não será enm paralela, nem perpendicular a linha de terra (veja a figura acima), ou seja,*

$$h_1 \parallel LT\,, \quad h_2 \not\parallel LT \quad e \quad h_2 \not\perp LT\,.$$

Reciprocamente, se uma reta f *do espaço é tal que sua projeção ortogonal no plano* PH *é paralela a linha de terra e sua projeção ortogonal no plano* PV *não é paralela a linha de terra, então ela será uma reta frontal.*

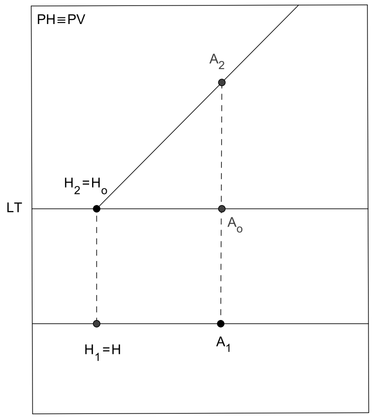
Com isto podemos concluir que:

uma reta f *no espaço é uma reta frontal*

se, e somente se,

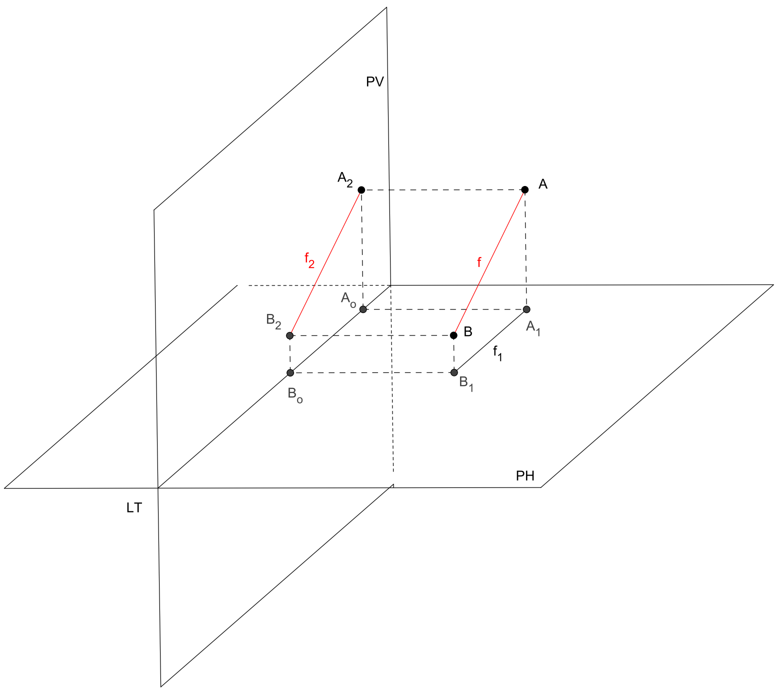
$$h_1 \parallel LT\,, \quad h_2 \not\parallel LT \quad e \quad h_2 \not\perp LT\,.$$

2. *Segue do item 1. acima que a representação, em épura, de uma reta frontal* $\underline{f}$ *será dada pela figura abaixo e reciprocamente, uma reta no espaço que, em épura, tem a representação dada pela figura abaixo será uma reta frontal no espaço.*

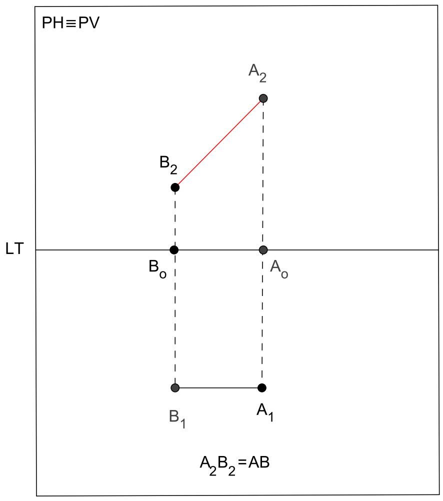


3. *Como conseqüência temos:*

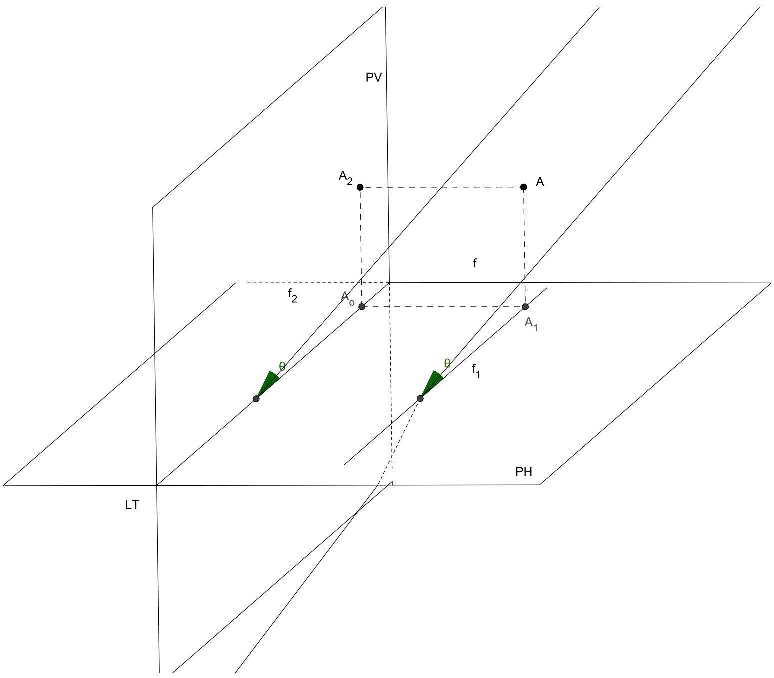
   (a) *Se denotarmos por* $\underline{A}$ *e* B*, dois pontos de uma reta fronal* $\underline{f}$*, então o segmento* $\overline{A_2B_2}$ *estará em* <u>*V.G.*</u> *com o segmento* $\overline{AB}$*, ou seja,*
   $$A_2B_2 = AB\,,$$
   pois $\overline{AB}$ *é paralelo* PV *(veja figura abaixo).*



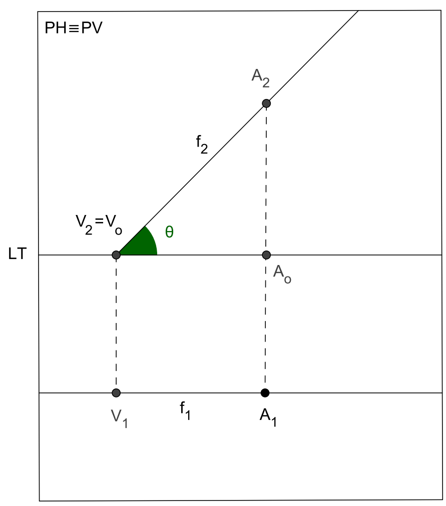
Logo para conhecermos o comprimento de um segmento $\overline{AB}$*, que está contido em uma reta frontal, dada em épura, basta encontrarmos o comprimento do segmento* $\overline{A_2B_2}$*, ou seja, sua projeção ortogonal no plano* $\underline{PV}$ *(veja a figura abaixo).*



(b) Notemos que ângulo $\theta \in \mathbb{R}$, *que a reta frontal* $\underline{f}$ *forma com o plano* $\underline{PH}$, *será igual ao ângulo que a sua projeção ortogonal no plano* $\underline{PV}$, *forma com a linha de terra* $\underline{LT}$, *isto é, que a reta* $\underline{h_2}$ *forma com a reta* $\underline{LT}$ *(veja afigura abaixo).*



Logo para conhecermos a medida do ângulo $\underline{\theta}$, *que uma reta frontal* $\underline{f}$ *faz com o plano* $\underline{PH}$, *bastará encontrarmos ângulo que a reta* $\underline{f_2}$ *faz com a linha de terra* $\underline{LT}$ *(veja a figura abaixo).*

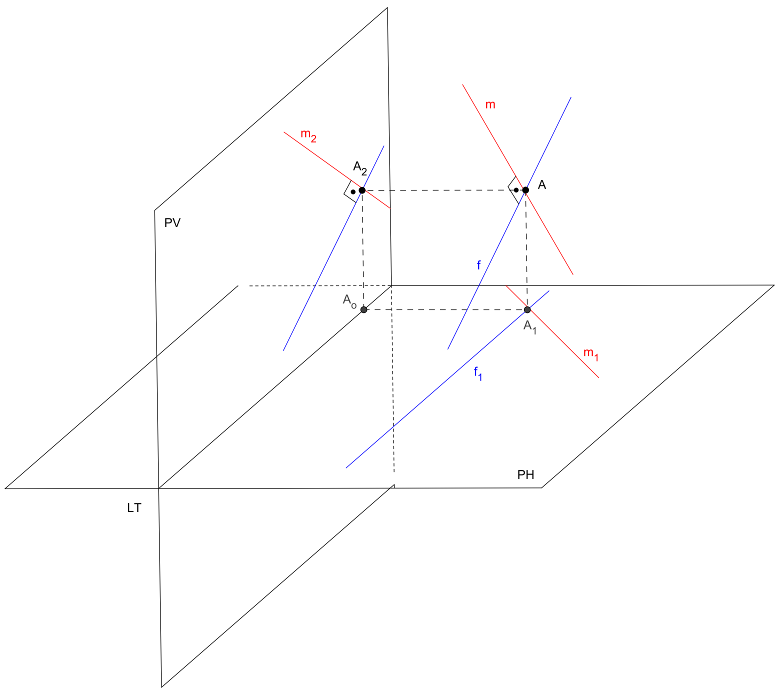


(c) *Se uma reta* m *(não perpendicular ao plano* PV*) for uma reta ortogonal a uma reta frontal* f *então, pelo Corolário (4.1.1), segue que as projeções ortogonais das retas* m *e* f*, no plano* PV*, serão perpendiculares,isto é,*

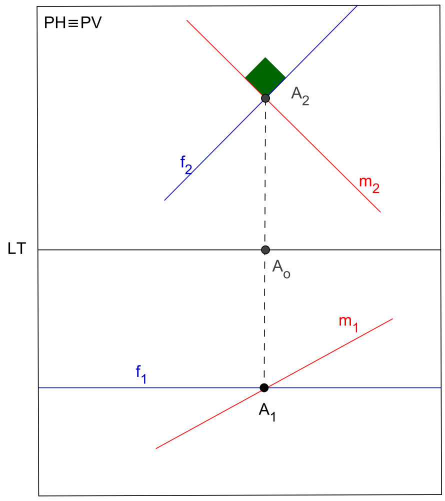
$$m_2 \perp h_2\,,$$

mas as projeções ortogonais das retas m *e* h *no plano* PH *não serão, necessariamente, perpendiculares (veja a figura abaixo), isto é,*

$$m_1 \not\perp h_1\,.$$

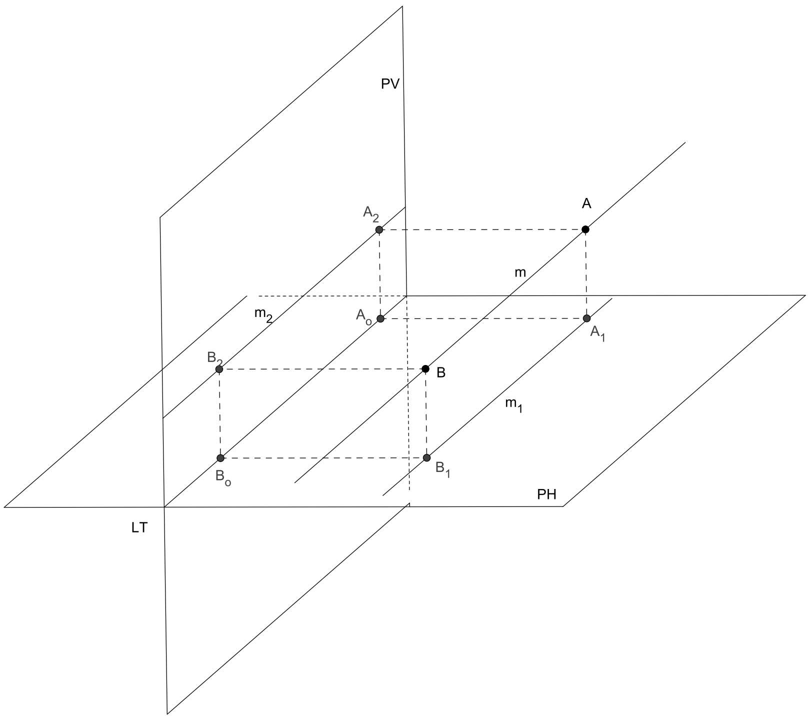


Logo para verificarmos se uma reta $\underline{m}$*, em épura, é ortogonal uma reta frontal* $\underline{f}$*, pelo Corolário (4.1.1), é necessário e suficiente, que verifiquemos se as retas* $\underline{m_2}$ *e* $\underline{h_2}$ *são perpendiculares (veja a figura abaixo).*



6.3.3 Reta Fronto-Horizontal ou Paralela a LT

Definição 6.3.3 *Uma reta* $\underline{m}$ *do espaço será dita* <u>reta fronto-horizontal (ou paralela a LT)</u> *se ela for paralela a linha de terra* $\underline{LT}$ *(veja a figura abaixo).*



Observação 6.3.3

1. *Observemos que se* $\underline{m}$ *é uma reta fronto-horizontal, então suas projeções ortogonais no plano* $\underline{PH}$ *e no plano* PV*, serão duas retas paralelas a linha de terra* $\underline{LT}$ *(veja a figura acima), ou seja,*

$$m_1\,,m_2 \parallel LT\,.$$

Reciprocamente, se uma reta $\underline{m}$ *do espaço é tal que, suas projeções ortogonais no plano* $\underline{PH}$ *e no plano* $\underline{PV}$ *são retas paralelas a linha de terra, então ela será uma reta fronto-horizontal.*

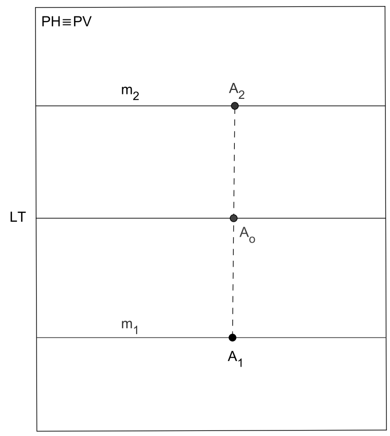
Com isto podemos concluir que:

uma reta $\underline{m}$ *no espaço é uma reta fronto-horizontal*

se, e somente se,

$$m_1, m_2 \parallel LT\,.$$

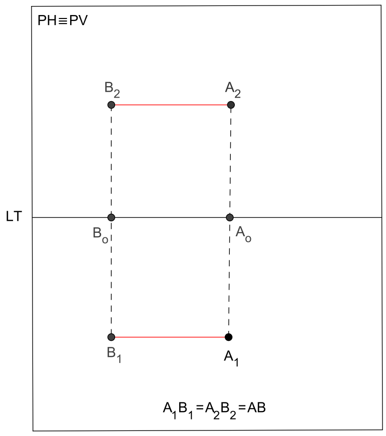
2. *Segue do item 1. acima que, a representação de uma reta fronto-horizontal* $\underline{m}$*, em épura, será dada pela figura abaixo e reciprocamente, uma reta no espaço que, em épura, tem a representação dada pela figura abaixo será uma reta fronto-horizontal no espaço.*



3. *Se um segmento* $\overline{AB}$ *está contido em uma reta fronto-horizontal* $\underline{m}$*, então os comprimentos das projeções ortogonais nos planos* $\underline{PH}$ *e* $\underline{PV}$ *estarão em* $\underline{\text{V.G.}}$*, isto é,*

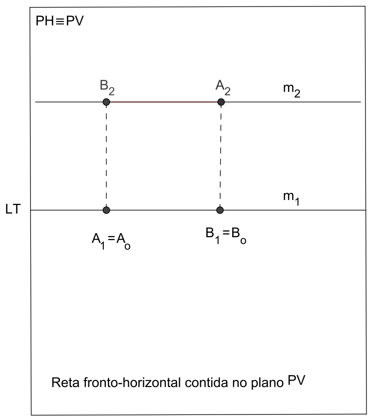
$$A_1B_1 = AB = A_2B_2\,,$$

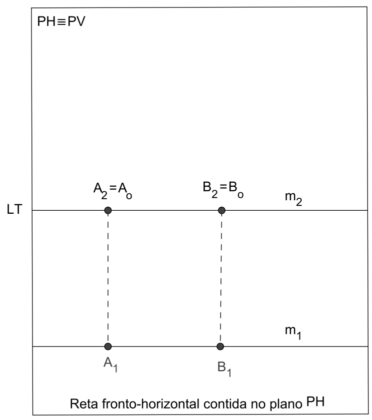
(veja a figura abaixo) pois o segmento de reta $\overline{AB}$ *será paralelo aos planos* $\underline{PH}$ *e* $\underline{PV}$*.*

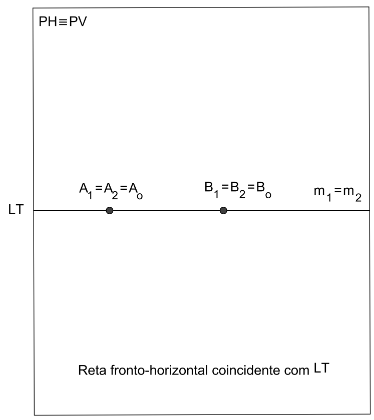


4. *O ângulo que uma reta fronto-horizontal* m *forma com o plano* PH*, ou com o plano* PV*, será igual a zero, pois ela é paralela a linha de terra* LT*, logo será uma reta paralela aos planos* PH *e* PV *(ver a figura da Definição* (6.3.3) *acima).*

5. *Além da situação da figura acima, podemos ter as seguinte situações, em épura, para uma reta fronto-horizontal* m*:*





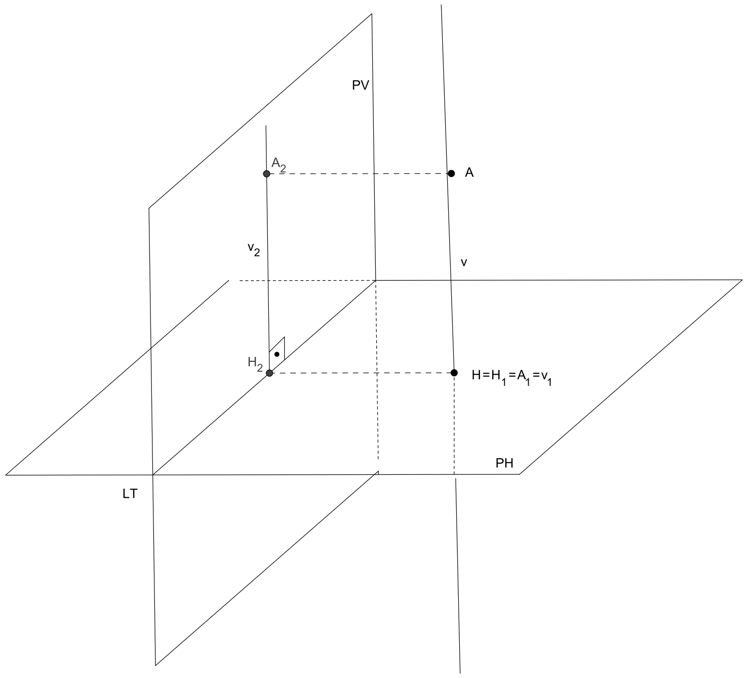


6.3.4 Reta Vertical

Definição 6.3.4 *Uma reta* v *do espaço será dita* reta vertical *se ela for perpendicular ao plano* PH *(veja a figura abaixo).*

Observação 6.3.4

1. *Observemos que se* v *denota uma reta vertical, então sua projeção ortogonal no plano* PH *será um ponto, que indicaremos por* H *e, no plano* PV*, será uma reta*



perpendicular a linha de terra $\underline{LT}$ *(veja a figura acima), ou seja,*

$$v_1 = \{H\} \quad e \quad v_2 \perp LT\,.$$

Reciprocamente, se uma reta $\underline{v}$ *do espaço é tal, suas projeções ortogonais no plano* $\underline{PH}$ *é um ponto e, no plano* $\underline{PV}$*, é uma reta perpendicular a linha de terra* $\underline{LT}$*, então ela será uma reta vertical.*

Com isto podemos concluir que:

uma reta $\underline{v}$ *no espaço é uma reta vertical*

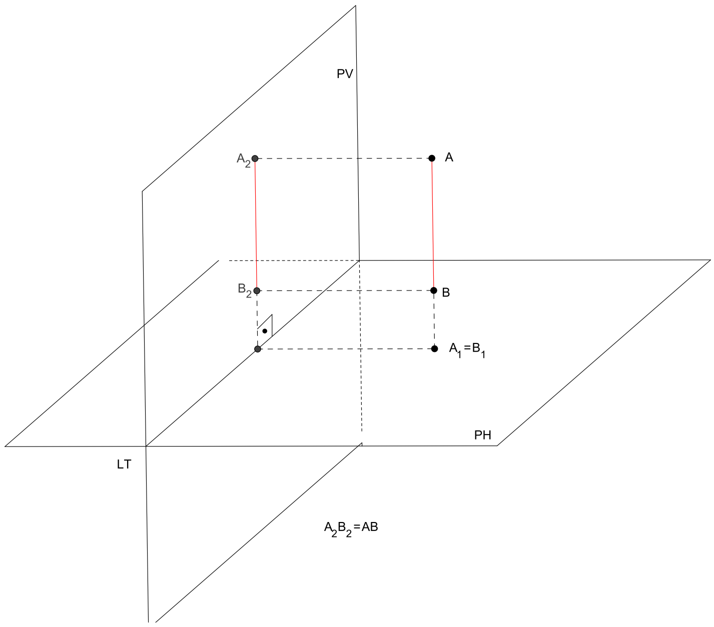
se, e somente se,

$$v_1 = \{H\} \quad e \quad v_2 \perp LT\,.$$

2. *Se um segmento* $\overline{AB}$ *está contido em uma reta vertical* $\underline{v}$*, então o comprimento de sua projeção ortogonal no plano* $\underline{PV}$ *estará em* $\underline{V.G.}$*, isto é,*

$$AB = A_2B_2\,,$$

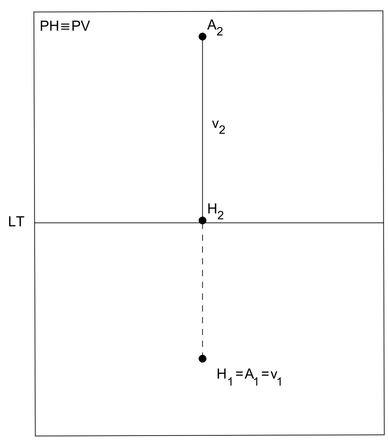
pois $v \perp PH$ *(veja afigura abaixo).*



3. *Notemos que o ângulo que uma reta vertical* $\underline{v}$ *forma com o plano* $\underline{\mathrm{PH}}$, *será igual ao ângulo que a projeção ortogonal no plano* $\underline{\mathrm{PV}}$ *da reta* $\underline{v}$ *(isto é, que a reta* $\underline{v_2}$*) faz com o a linha de terra* $\underline{\mathrm{LT}}$, *ou seja,* $\dfrac{\pi}{2}$ *(veja a figura da Definição (6.3.4) acima).*

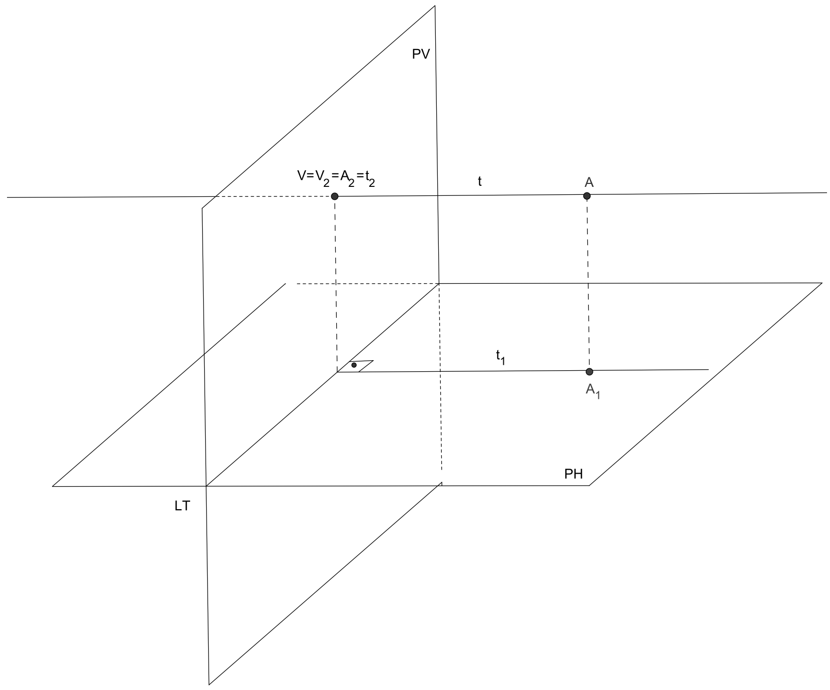
   De modo análogo, o ângulo que uma reta vertical $\underline{v}$ *forma com o plano* $\underline{\mathrm{PV}}$, *será igual zero, pois ela é perpendicular ao plano* $\underline{\mathrm{PH}}$, *logo será uma reta paralela a* $\underline{\mathrm{PV}}$ *(veja figura da Definição (6.3.4) acima).*

4. *Das observações acima segue que, uma reta vertical* $\underline{v}$, *em épura, pode ser representada na figura abaixo e, reciprocamente, uma reta no espaço que tem sua representação em épura dada pela figura abaixo, será um reta vertical.*



6.3.5 Reta de Topo

Definição 6.3.5 *Uma reta* t *do espaço será dita* **reta de topo** *se ela for perpendicular ao plano* PV *(veja a figura abaixo).*



Observação 6.3.5

1. *Observemos que se* t *denota uma reta de topo, então sua projeção ortogonal no plano* PV *será um ponto, que indicaremos por* V *e, no plano* PH, *será uma reta perpendicular a linha de terra* LT *(veja a figura acima), ou seja,*

$$\nu_2 = \{V\} \quad e \quad \nu_1 \perp LT\,.$$

Reciprocamente, se uma reta t *é tal qua, suas projeções ortogonais no plano* PV *é um ponto e, no plano* PH, *é uma reta perpendicular a linha de terra* LT, *então ela será uma reta de topo.*

Com isto podemos concluir que:

uma reta t *no espaço é uma reta de topo*

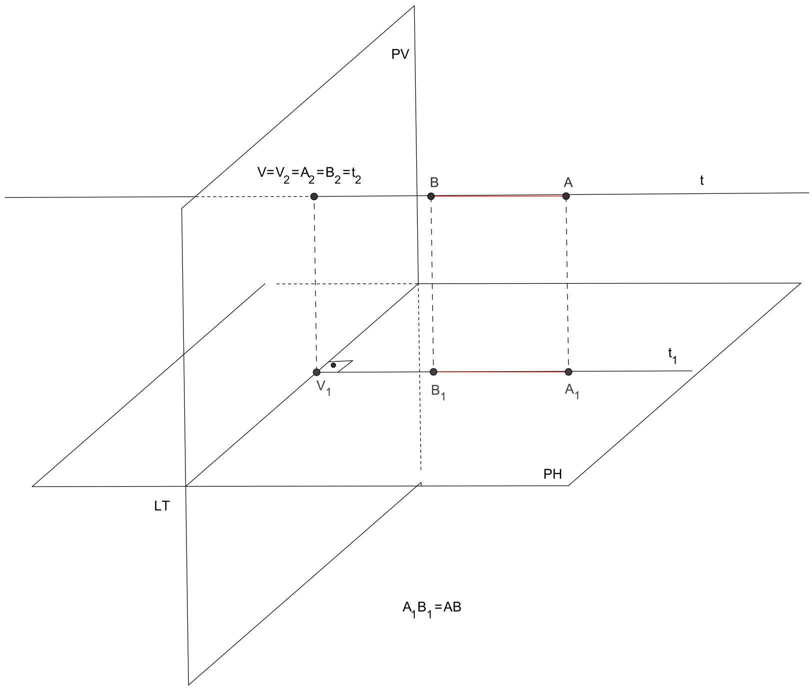
se, e somente se,

$$\nu_2 = \{V\} \quad e \quad \nu_1 \perp LT\,.$$

2. *Se um segmento* $\overline{AB}$ *está contido em uma reta de topo* t, *então o comprimento da sua projeção ortogonal no plano* PH *estará em* V.G., *isto é,*

$$AB = A_1B_1$$

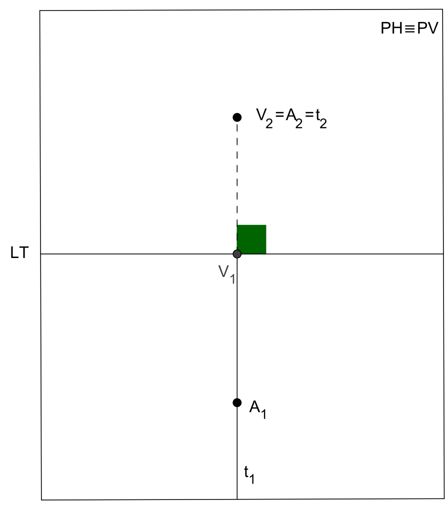
pois $t \perp PV$ *(veja a figura abaixo).*



3. *Notemos que ângulo que uma reta de topo* t *forma com o plano* PV *será igual ao ângulo que a projeção ortogonal no plano* PH *da reta* t *(isto é, que a reta* t_1*) faz com o a linha de terra* LT*, ou seja,* $\dfrac{\pi}{2}$ *(veja a figura da Definição* (6.3.5) *acima).*

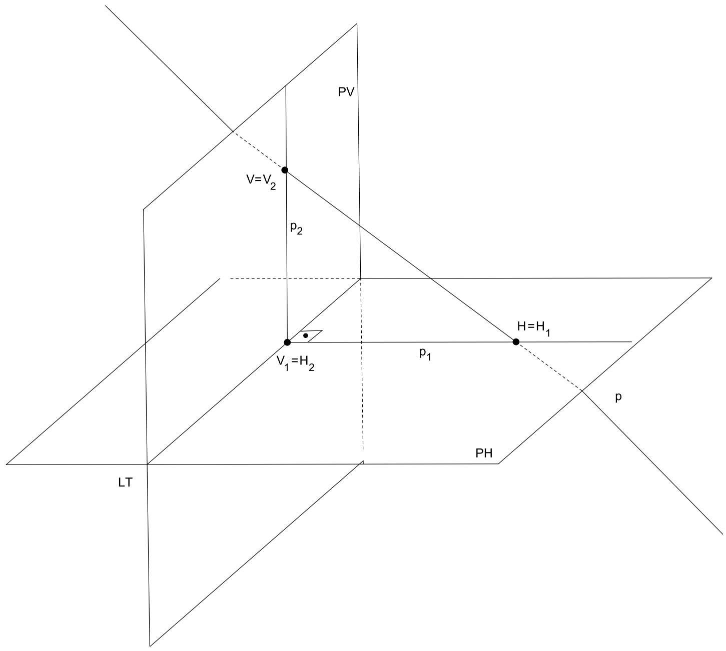
   De modo análogo, o ângulo que uma reta de topo t *forma com o plano* PH*, será igual a zero, pois ela é perpendicular ao plano* PV*, logo será uma reta paralela a* PH *(veja a figura da Definição* (6.3.5) *acima).*

4. *Das observações acima segue que uma reta de topo* t*, em épura, pode ser representada pela figura abaixo e reciprocamente uma reta no espaço que tem sua representação em épura dada pela figura abaixo será um reta de topo.*



6.3.6 Reta de Perfil

Definição 6.3.6 *Uma reta* $\underline{p}$ *do espaço será dita* **reta de perfil** *se ela for ortogonal a linha de terra* $\underline{LT}$ *(veja a figura abaixo).*



Observação 6.3.6

1. *Observemos que se* $\underline{p}$ *denota uma reta de perfil, então suas projeções ortogonal no plano* $\underline{PV}$ *e no plano* $\underline{PV}$*, serão retas perpendiculares a linha de terra* $\underline{LT}$*, ou seja, (veja a figura acima)*

$$p_1, p_2 \perp LT.$$

Reciprocamente, se uma reta $\underline{p}$ *é tal que, suas projeções ortogonais suas projeções ortogonal no plano* $\underline{PV}$ *e no plano* $\underline{PV}$*, são retas perpendiculares a linha de terra* $\underline{LT}$ *então ela será uma reta de perfil.*

Com isto podemos concluir que:

uma reta $\underline{p}$ *no espaço é uma reta de perfil*

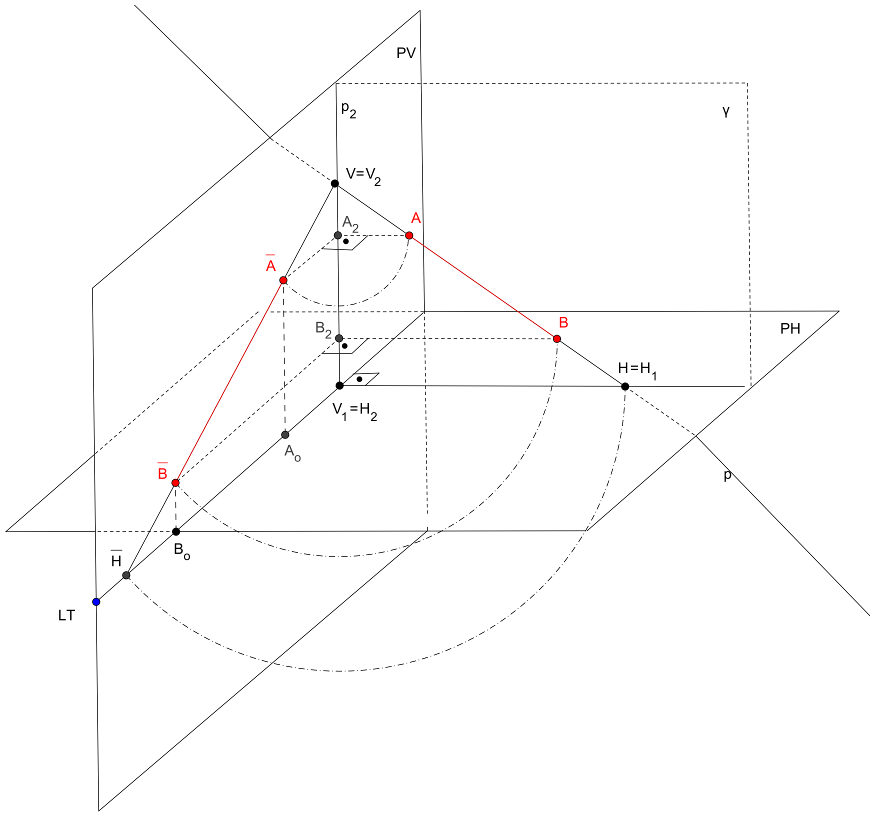
se, e somente se,

$$p_1 = p_2 \perp LT.$$

2. *Se um segmento* $\overline{AB}$ *está contido em uma reta de perfil* $\underline{p}$*, então o comprimento do rebatimento deste segmento, que está contido no plano* $\underline{\gamma}$*, que contém a reta* $\underline{p}$ *e é perpendicular ao plano* $\underline{PH}$*, estará em* $\underline{V.G.}$ *no plano* $\underline{PV}$*, ou seja,*

$$\bar{A}\bar{B} = AB,$$

onde os pontos $\bar{A}$ *e* $\bar{B}$ *são dados pela figura abaixo.*

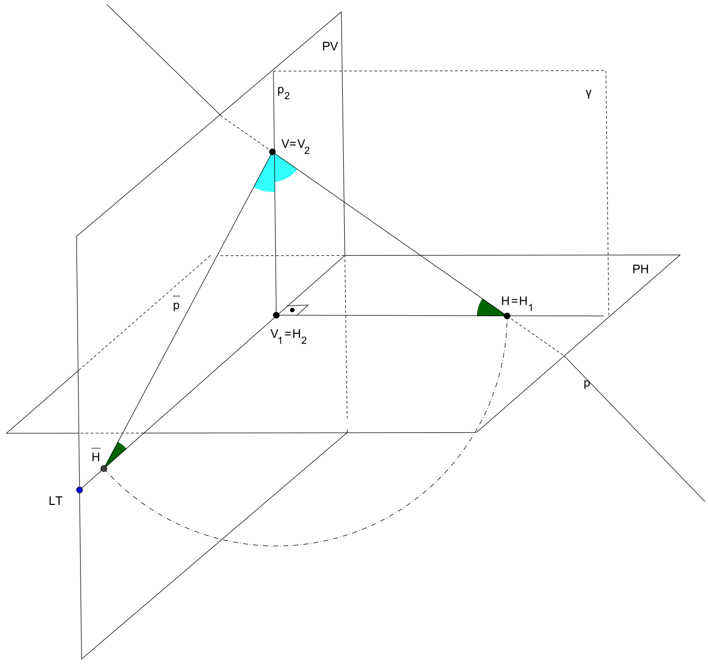


3. *Observemos que o plano* $\underline{\gamma}$, *dado pelo item 2. acima, será ortogonal ao plano* $\underline{\mathrm{PV}}$ *(e ao ao plano* $\underline{\mathrm{PH}}$*), assim o que fizemos no item 2. acima, foi rotacionar o segmento* $\overline{\mathrm{AB}}$ *(ou ainda, o plano* $\underline{\gamma}$*) de um ângulo* $\dfrac{\pi}{2}$, *relativamente ao plano* $\underline{\gamma}$, *em torno da reta* $\underline{p_2}$ *(que é a projeção ortogonal da reta* $\underline{p}$ *no plano* $\underline{\mathrm{PV}}$*).*

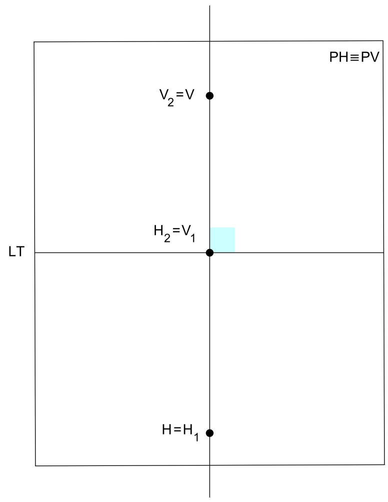
   O ponto $\bar{\mathrm{A}}$ *(respectivamente, o ponto* $\bar{\mathrm{B}}$*) obtido como no item 2. acima, será denominado* **rebatimento do ponto** $\underline{\mathrm{A}}$ **(ou do ponto** $\underline{\mathrm{B}}$**, respectivamente) no plano** $\underline{\mathrm{PV}}$.

4. *Notemos que o ângulo que uma reta de perfil* $\underline{p}$ *forma com o plano* $\underline{\mathrm{PH}}$, *será igual ao ângulo que a reta* $\underline{\bar{p}}$ *(que contém os pontos* $\bar{\mathrm{A}}$ *e* $\bar{\mathrm{B}}$, *isto é, do rebatimento da reta* $\underline{p}$ *em* PV*) faz com a linha de terra* $\underline{\mathrm{LT}}$ *(veja a figura abaixo).*

   De modo análogo, o ângulo que uma reta de perfil $\underline{p}$ *forma com o plano* $\underline{\mathrm{PV}}$ *é igual ao ângulo que a reta* $\underline{\bar{p}}$ *faz com a reta* $\underline{p_2}$ *(veja a figura abaixo).*



5. *Das observações acima segue que, uma reta de perfil* $\underline{\mathrm{p}}$, *em épura, pode ser representada por:*



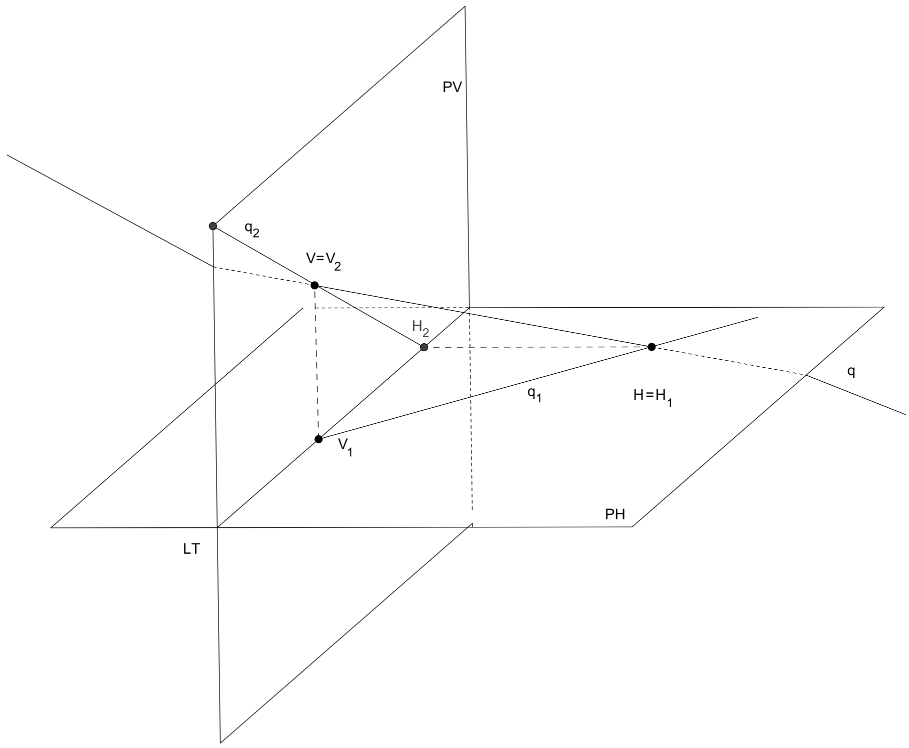
6. *Observemos que uma reta de perfil* $\underline{\mathrm{p}}$, *terá sua épura bem determinada, a saber, as reta* $\underline{\mathrm{p}_1}$ *e* $\underline{\mathrm{p}_2}$ *deverão ser perpendiculares à linha de terra* $\underline{\mathrm{LT}}$ *(veja a figura acima).*

   Porém se sabemos que as projeções ortogonais $\underline{\mathrm{p}_1}$ *e* $\underline{\mathrm{p}_2}$ *de uma reta* $\underline{\mathrm{p}}$ *do espaço são perpendiculares à linha de terra, isto* **não** *determinará uma* **única** *reta de perfil* $\underline{\mathrm{p}}$*!*

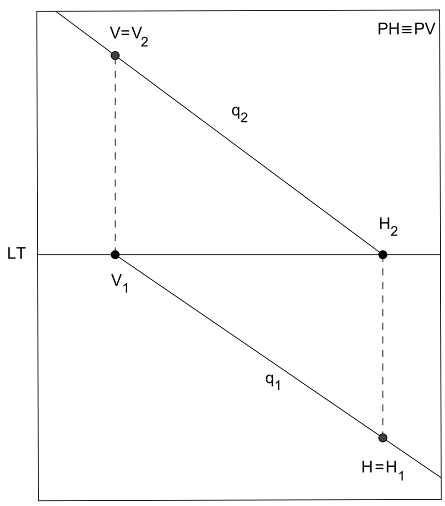
   Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

6.3.7 Reta Qualquer

Definição 6.3.7 *Uma reta* $\underline{\mathrm{q}}$ *do espaço será dita* **reta qualquer** *se ela não for uma reta paralela, nem for uma reta ortogonal aos planos* $\underline{\mathrm{PH}}$ *e* $\underline{\mathrm{PV}}$ *e também não é uma reta ortogonal a linha de terra* $\underline{\mathrm{LT}}$ *(veja a figura abaixo).*



Observação 6.3.7 *Logo se encontrarmos dois pontos, que indicaremos por* $\underline{\mathrm{H}}$ *e* $\underline{\mathrm{V}}$*, que uma reta qualquer* $\underline{\mathrm{q}}$*, intercepta os planos* $\underline{\mathrm{PH}}$ *e* $\underline{\mathrm{PV}}$*, respectivamente (veja a figura acima) então, em épura, teremos:*



Reciprocamente, se conhecermos os pontos $\underline{\mathrm{H}}$ *e* $\underline{\mathrm{V}}$*, em épura, como na figura acima, então podemos concluir que a reta* $\underline{\mathrm{q}}$ *é uma reta qualquer.*

6.4 Pertinência de um Ponto a uma Reta

O objetivo do que virá a seguir é estudar questões geométricas do ponto de vista das épuras dos elementos envolvidos.

Observação 6.4.1

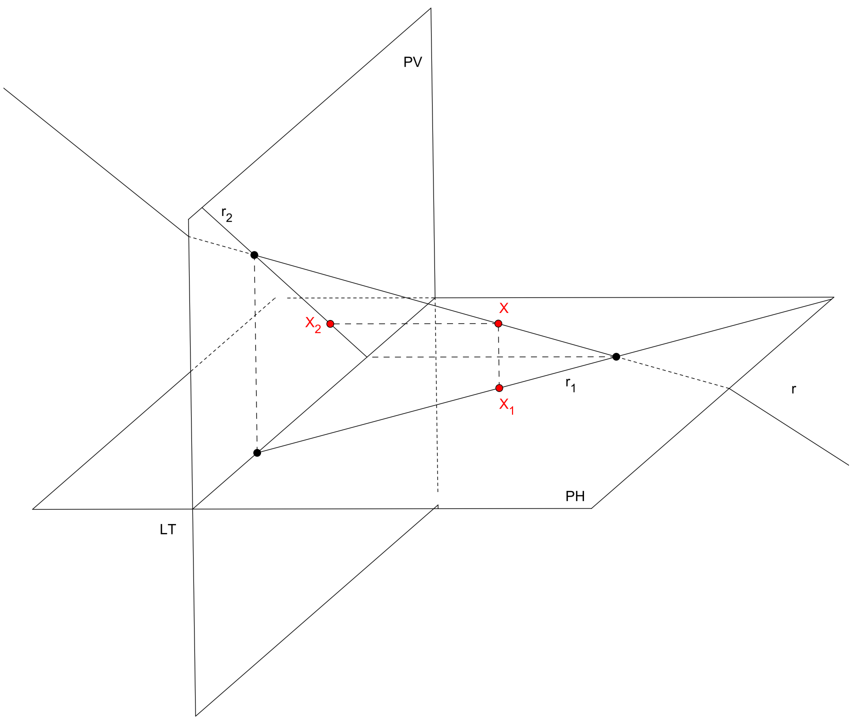
1. *Nosso primeiro problema será dado, em épura, um ponto* $\underline{X}$ *e uma reta* $\underline{r}$ *do espaço, decidir se o ponto* $\underline{X}$ *pertence ou não à reta* $\underline{r}$*, ou seja, dadas as projeções ortogonais do ponto* $\underline{X}$ *(isto é,* $X_1 \in PH$ *e* $X_2 \in PV$*) e da reta* $\underline{r}$ *(isto é,* $r_1 \subseteq PH$ *e* $r_2 \subseteq PV$*) decidir se o ponto* $\underline{X}$ *pertence ou não à reta* $\underline{r}$*, do ponto de vista, das épuras envolvidas.*

2. *Observemos que se um ponto* $\underline{X}$*, pertence a uma reta* $\underline{r}$*, então suas projeções ortogonais nos planos* $\underline{PH}$ *e* $\underline{PV}$*, devem pertecer às respectivas projeções ortogonais da reta* $\underline{r}$ *sobre os planos* $\underline{PH}$ *e* $\underline{PV}$*, ou seja,*

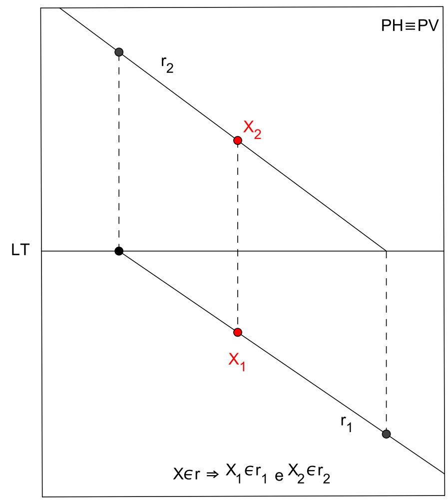
$$X \in r, \quad \textit{então}, \quad X_1 \in r_1 \quad \textit{e} \quad X_2 \in r_2 . \tag{6.1}$$

   Além disso, os pontos $\underline{X_1}$*,* $\underline{X_2}$ *deverão pertencer a uma mesma linha de chamada (para que definam um ponto do espaço).*

   As figuras abaixo ilustram a situação:



Logo, em épura, teremos:

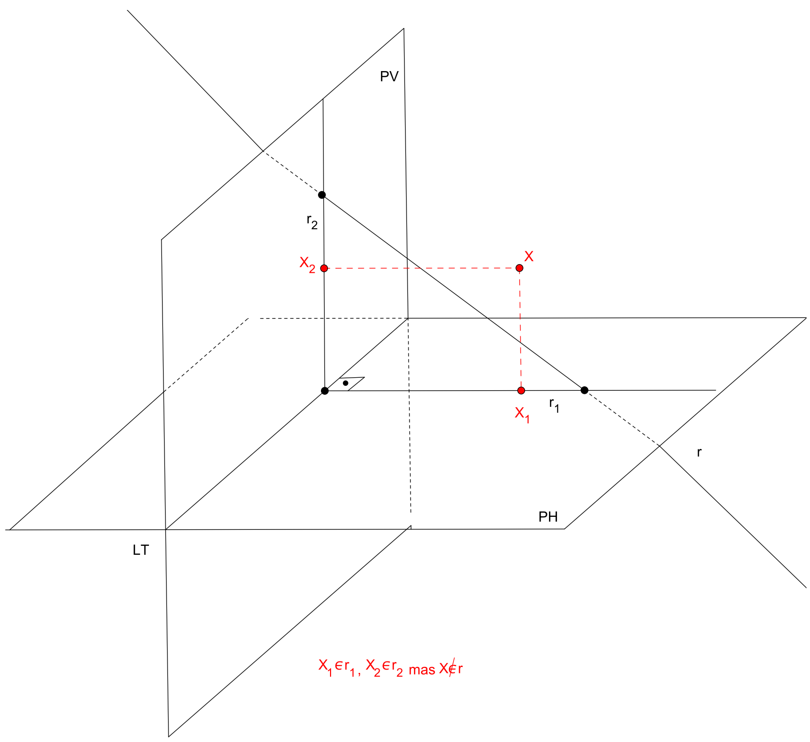


3. *Existe um caso, em que a recíproca da afirmação* (6.1) *acima* **não é válida**, *a saber, o caso em que a reta* r *é uma reta de perfil.*

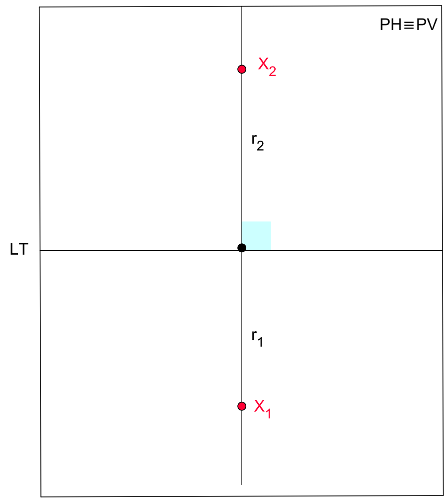
   Neste caso, pode ocorrer de

$$X_1 \in r_1\,, \quad X_2 \in r_2 \qquad \textit{mas} \quad X \notin r\,.$$

   A figura abaixo ilustra a situação:

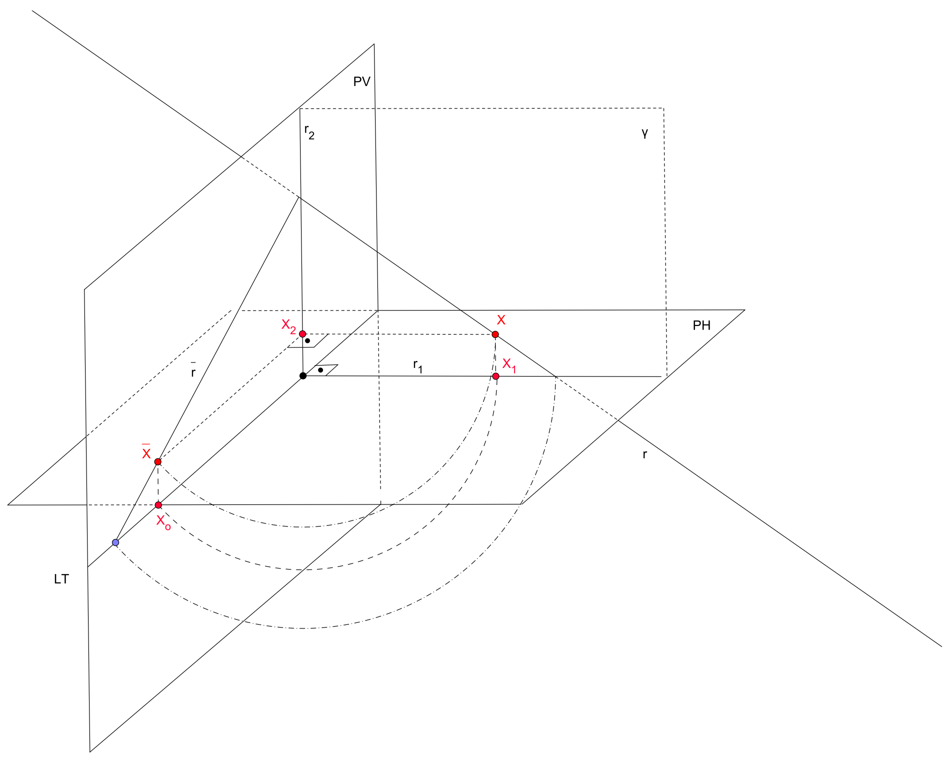


Neste caso, em épura teremos:

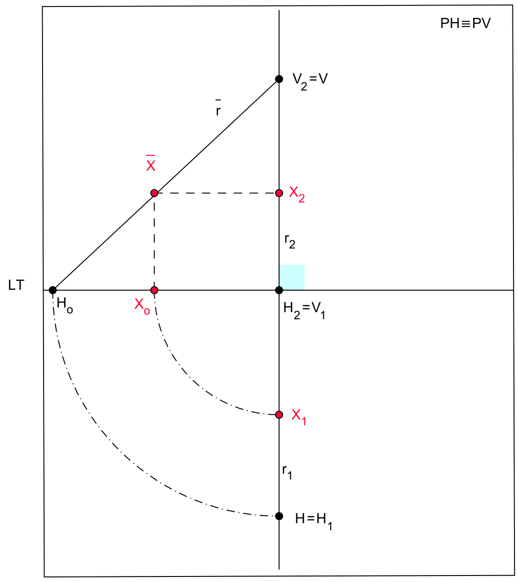


Ou seja, neste caso, só estudando as épuras do ponto X e da reta r **não** *conseguiremos saber se o ponto X pertencerá ou não à reta r.*

Para esta situação, (isto é, para sabermos se um ponto X pertencerá ou não a uma reta r que é uma reta de perfil) precisaremos estudar os rebatimentos do ponto X e da reta r, no plano PV (veja a figura abaixo).



Neste caso, em épura, teremos:



$X\epsilon r \Leftrightarrow \bar{X}\epsilon\bar{r}$

Logo, para o caso de uma reta perfil $\underline{r}$*, um ponto* $\underline{X}$ *do espaço pertencerá a mesma se, e somente se,*

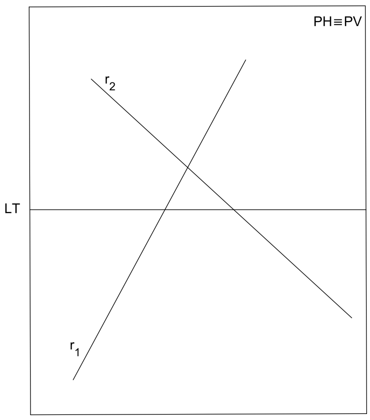
$$X_1 \in r_1\,, \quad X_2 \in r_2$$

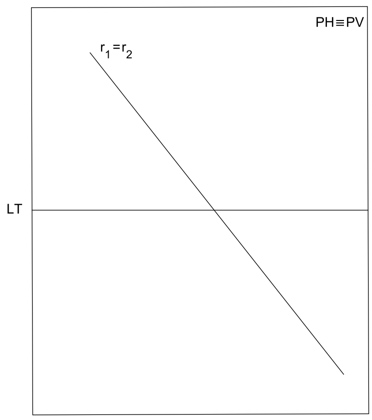
e o rebatimento do ponto $\underline{X}$ *no plano* $\underline{PV}$ *(ou seja,* $\overline{X}$*) pertença ao rebatimento da reta* $\underline{r}$ *no plano* $\underline{PV}$ *(isto é,* $\overline{r}$*), ou seja:*

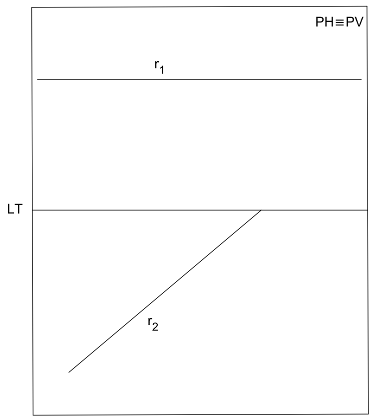
$$X \in r \quad \textit{se, e somente, se} \quad X_1 \in r_1\,, \quad X_2 \in r_2 \quad \textit{e} \quad \overline{X} \in \overline{r}\,.$$

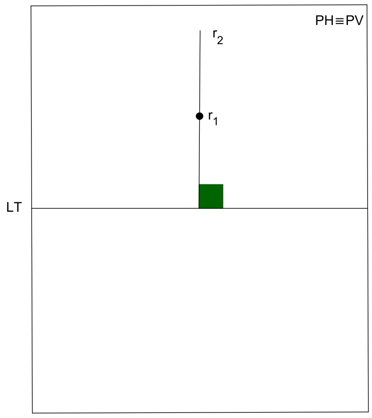
Consideremos os exercícios resolvidos:

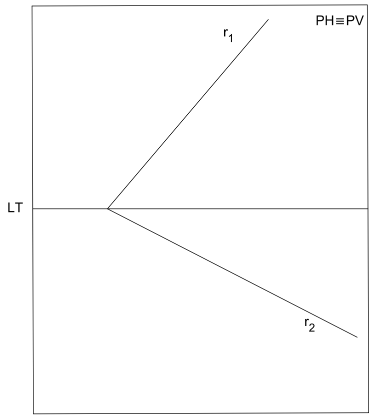
Exercício 6.4.1 *Obter, geometricamente, os traços (isto é, a interseção) da reta* $\underline{r}$ *com os planos* $\underline{PH}$ *e* $\underline{PV}$*, nos seguintes casos:*

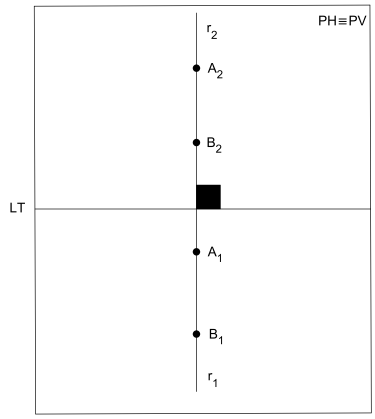












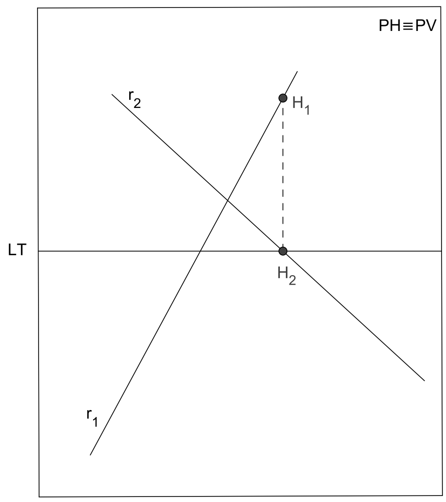
Resolução:

No caso 1.ª figura, temos que a reta r é uma reta qualquer e assim para encontrarmos seu traço com o plano PH, começaremos por encontrar o ponto de interseção da reta r_2 com a linha de terra LT, que chamaremos de H_2.

Depois, notamos que a reta perpendicular à LT, que contém o ponto H_2, encontrará a reta r_1 em um ponto, que chamaremos de H_1.

Logo, o traço da reta r com plano PH será o ponto (veja a figura abaixo)

$$H \doteq (H_1\,, H_2)\,.$$

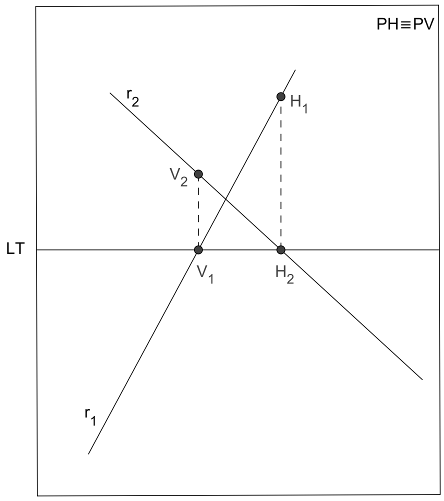


Para encontrarmos seu traço da reta r, com o plano PV, começaremos por encontrar o ponto de interseção da reta r_1 com a linha de terra LT, que chamaremos de V_1.

Com isto, notamos que a reta perpendicular à reta LT, contendo o ponto V_1, encontrará a reta r_2 em um ponto, que denotaremos por V_2.

Logo, o traço da reta r, com plano PV, será o ponto (veja a figura abaixo)

$$V \doteq (V_1\,, V_2)\,.$$

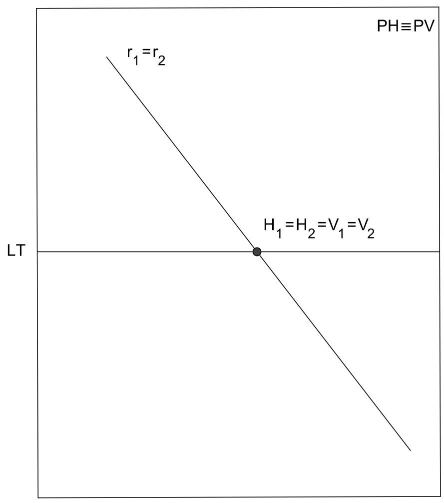


Na 2.ª figura, temos que a reta r tembém é uma reta qualquer, que intercepta a linha de terra LT, pois as retas r_1 e r_2 interceptam LT em um mesmo ponto.

Assim para encontrarmos o traço da reta r, com o plano PH e com o plano PV, basta encontrarmos o ponto de interseção da reta r_2, ou da reta r_1, com a linha de terra LT.

Logo, o traço da reta r, com plano PH e com o plano PV, será o ponto (veja a figura abaixo)

$$H = H_1 = H_2 = V_1 = V_2 = V, \quad \text{ou seja,} \quad H = V.$$

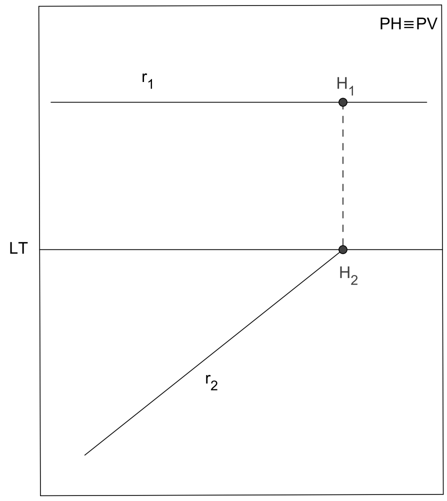


Na 3.ª figura, temos que a reta r é uma reta frontal, e assim, a reta r não intercepta o plano PV, pois ela é paralela ao plano PV e, no caso, não está contida no mesmo.

Por outro lado, para encontrarmos o traço da reta r, com plano PH, basta encontrarmos um ponto, que chamaremos de H_2, onde a reta r_2 interceptará com a reta LT e encontrarmos o ponto, que denotaremos por H_1, de interseção da reta perpendicular à reta LT, que contém o ponto H_2, com a reta r_1 (veja a figura abaixo).

Com isto o traço da reta r, com o plano PH será o ponto

$$H \doteq (H_1, H_2).$$



N 4.ª figura, temos que a reta r é uma reta vertical, e assim, a reta r não intercepta o plano PV, pois ela é perpendicular ao plano PH, logo será paralela ao plano PV e, no caso, não está contida no mesmo.

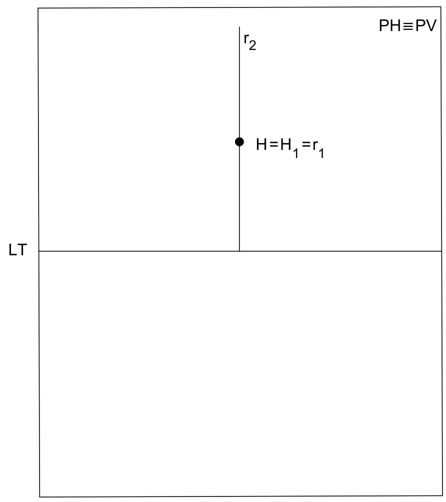
Por outro lado, para encontrarmos o traço da reta r, com plano PH, basta encontrarmos o ponto, que denotaremos por H_1, onde a reta r_1 interceptará o plano PH, ou seja, (veja a figura abaixo)

$$H_1 = r_1\,, \quad \text{e assim teremos} \quad H = H_1\,.$$

Com isto o traço da reta r, com o plano PH, será o ponto $H = H_1$.

Em particular, teremos

$$H_2 \in r_2 \cap LT\,.$$

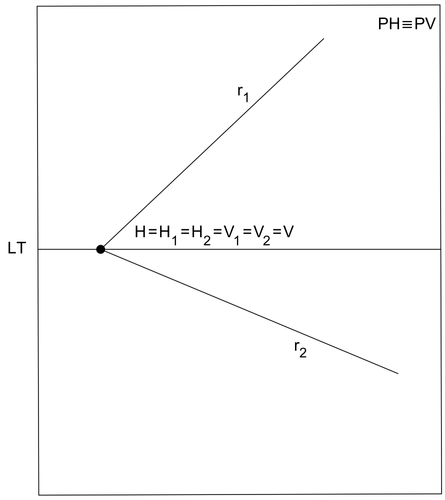


Na 5.ª figura, temos que a reta r é uma reta qualquer, que intercepta a linha de terra LT, pois as retas r_1 e r_2 interceptam LT em um mesmo ponto.

Assim para encontrarmos o traço da reta r, com o plano PH e com PV, bastará encontrarmos o ponto de interseção da reta r_2, ou da reta r_1, com a linha de terra LT.

Logo, o traço da reta $\underline{r}$ com plano $\underline{PH}$ e com o plano $\underline{PV}$, será o ponto (veja a figura abaixo)

$$H = H_1 = H_2 = V_1 = V_2 = V\,, \quad \text{ou seja,} \quad H = V\,.$$



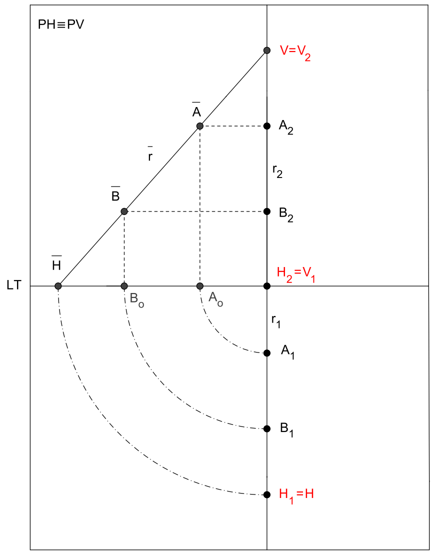
Na 6.ª figura temos que a reta $\underline{r}$ é uma reta de perfil.

Logo, para encontrarmos os pontos em que a mesma intercepta os planos $\underline{PH}$ e $\underline{PV}$, precisaremos, antes de mais nada, encontrar o rebatimento, que denotaremos por $\overline{r}$, da reta $\underline{r}$ no plano $\underline{PV}$ (veja a figura abaixo).

A interseção da reta $\overline{r}$ com a reta $\underline{r_2}$, nos fornecerá o traço da reta $\underline{r}$ com plano $\underline{PV}$, ou seja, $V \doteq V_2$ será o ponto de interseção da reta $\underline{r_2}$ com a linha de terra $\underline{LT}$ e $V_1 \in LT \cap r_2$ (veja a figura abaixo).

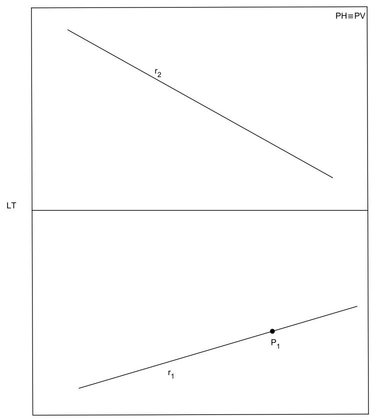
Denotemos por $\overline{H}$, o ponto de interseção da reta $\overline{r}$ com a linha de terra $\underline{LT}$ (veja a figura abaixo).

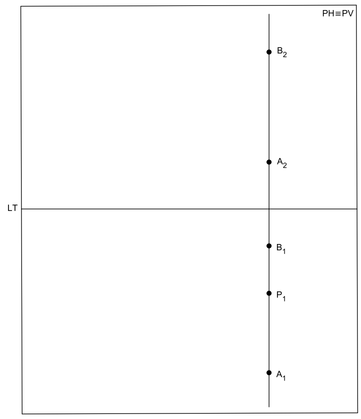
O ponto $\underline{H = H_1}$, pertencente à reta $\underline{r_1}$, cujo rebatimento é o ponto $\overline{H}$, será o traço da reta $\underline{r}$ com o plano $\underline{PH}$ e o ponto $\underline{H_2}$ estará na interseção da reta $\underline{r_1}$ com a linha de terra $\underline{LT}$, em particular, teremos $V_1 = H_2$ (veja a figura abaixo).



Exercício 6.4.2 *Cada uma das figuras abaixo nos fornece uma reta* $\underline{r}$*, em épura, e a projeção ortogonal no plano* $\underline{PH}$ *(ou seja* $\underline{P_1}$*) de um ponto* $\underline{P}$*, que pertence à reta* $\underline{r}$*.*

Obter, geometricamente, a projeção ortogonal no plano $\underline{PV}$ *(ou seja,* P_2*) do ponto* $\underline{P}$*, em cada um dos itens abaixo.*

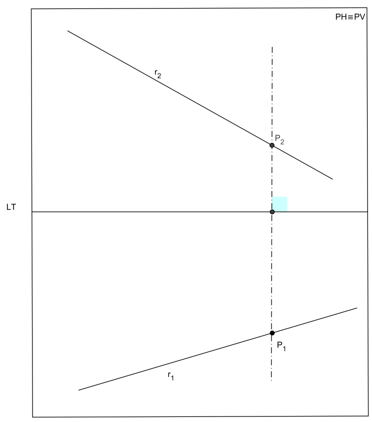




Resolução:

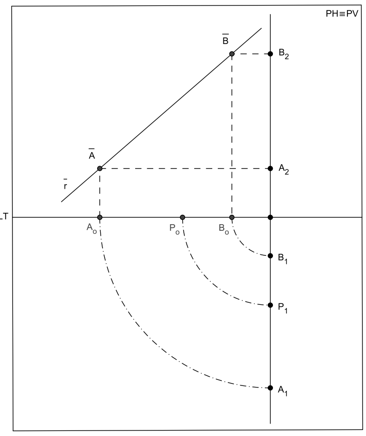
Para a figura à esquerda, a reta $\underline{r}$ é uma reta qualquer.

Neste caso basta encontrarmos o ponto $\underline{P_2}$, obtido da interseção da reta perpendicular à linha de terra $\underline{LT}$, que contém o ponto $\underline{P_1}$, com a reta $\underline{r_2}$ (veja a figura abaixo).



Para a figura à direita, a reta $\underline{r}$ é uma reta de perfil.

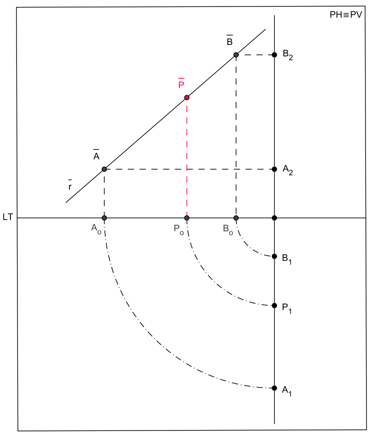
Neste caso, precisamos fazer o rebatimento da reta $\underline{r_1}$ (isto é, dos pontos $\underline{A_1}$ e $\underline{B_1}$) no plano $\underline{PV}$ (veja a figura abaixo).



Assim o ponto

$$P = (P_1\,,P_2)\,,\qquad \text{pertencerá a reta } \underline{r} \text{ se, e somente se,}\qquad \overline{P} \in \overline{r}\,.$$

Para encontrar o ponto $\overline{P}$, basta determinarmos a interseção da reta perpendicular a linha de terra $\underline{LT}$, que contém o ponto $\underline{P_o}$, com a reta $\overline{r}$ (veja a figura abaixo).



Deste modo a projeção ortogonal $\underline{P_2}$ do ponto $P \in r$, no plano $\underline{PV}$, será obtida da interseção da reta perpendicular a reta $\underline{r_2}$, que contém o ponto $\overline{P}$, com a reta $\underline{r_2}$ (veja a figura abaixo).

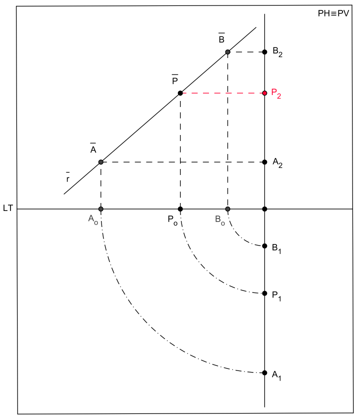
6.5 Posição Relativa de Duas Retas

Observação 6.5.1

1. *Observemos que se um ponto* $\underline{X}$ *pertence a uma reta* $\underline{r}$ *e a uma reta* $\underline{s}$*, então as projeções ortogonais do ponto* $\underline{X}$*, nos planos* $\underline{PH}$ *e* $\underline{PV}$ *(isto é,* $X_1 \in PH$ *e* $X_2 \in PV$*) devem pertencer as correspondentes projeções ortogonais das retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$*, nos planos* $\underline{PH}$ *e* $\underline{PV}$ *(isto é,* $r_1, s_1 \subseteq PH$ *e* $r_2, s_2 \subseteq PV$*), ou seja:*

$$X \in r \cap S\,,\quad \textit{então}\quad X_1 \in r_1 \cap s_1 \quad e \quad X_2 \in r_2 \cap s_2\,. \tag{6.2}$$

2. *Se as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ ***não*** *são retas de perfil, a recíproca de (6.2) é válida.*



3. *Se uma das retas for uma reta de perfil, poderemos ter uma situação do tipo da Observação (6.4.1) item 3. e assim* **não** *determinaríamos se as retas são ou não concorrentes.*

   Deixaremos como exercício para o leitor, encontrar duas retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, sendo uma delas uma reta de perfil, que **não** *são concorrentes mas*

$$X_i \in r_i \cap s_i\,, \quad \textit{para} \quad i \in \{1\,,2\}\,.$$

Com isto temos as seguintes situações para as posições relativas de duas retas dadas em épura:

6.5.1 Retas Concorrentes

Lembremos que:

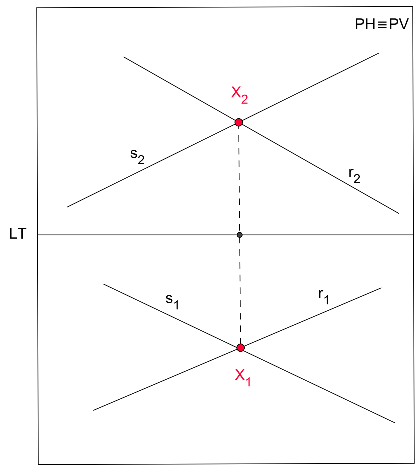
Definição 6.5.1 *Duas retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são* **concorrentes** *se elas possuem um único ponto $\underline{X}$ na interseção das memas.*

Observação 6.5.2 *Suponhamos que as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são dadas em épura.*
Podemos ter as seguintes situações:

1. *Uma situação em que as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são retas quaisquer, teríamos a seguinte situação geométrica:*

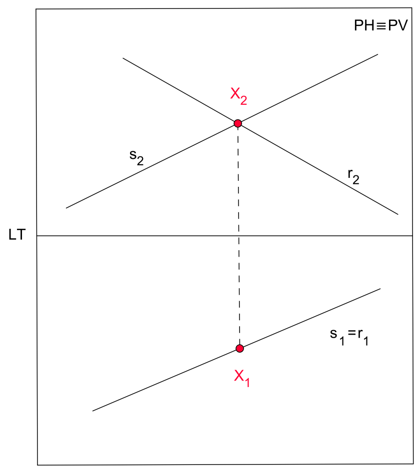
   Neste caso temos (veja a figura abaixo):

$$X \in r \cap S \quad \textit{se, e somente se,} \quad X_1 \in r_1 \cap s_1 \quad \textit{e} \quad X_2 \in r_2 \cap s_2\,. \tag{6.3}$$

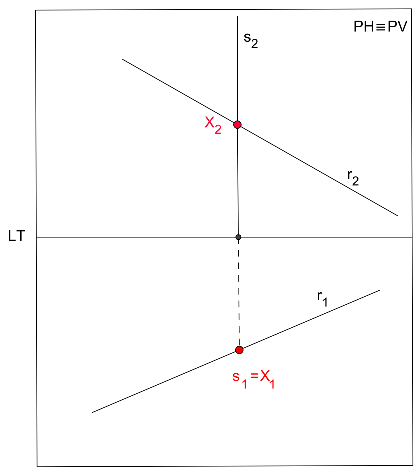


2. *Se as retas* r *e* s *estão contidas num plano ortogonal ao plano* PH *então vale (6.3).*

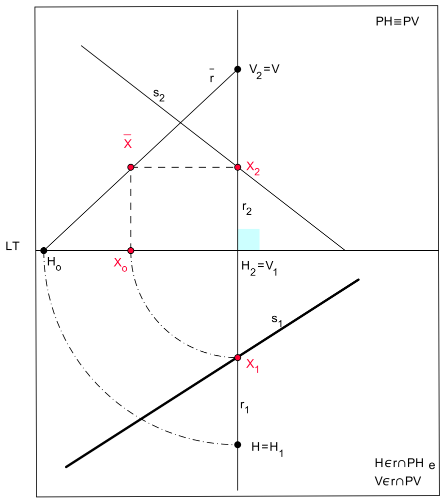
   Observemos que neste caso as projeções ortogonais das retas r *e* s*, no plano* PH*, serão coincidentes, isto é,* $\underline{r_1 = s_1}$ *(veja a figura abaixo).*



3. *Se a reta* r *é uma* reta qualquer *e a reta* s *é uma* reta vertical*, então valerá (6.3) (veja a figura abaixo).*



4. *Se a reta* $\underline{s}$ *é uma* <u>*reta qualquer*</u> *e a reta* $\underline{r}$ *é uma* <u>*reta de perfil*</u>*, teremos a seguinte situação geométrica:*



Logo, neste caso,

$$r \cap s = \{X\} \quad \textit{se, e somente se,} \quad X_1 \in r_1 \cap s_1\,, \quad X_2 \in r_2 \cap s_2 \quad e \quad \overline{X} \in \overline{r}.$$

5. **<u>Conclusão:</u>** *se as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ **<u>não</u>** *são retas de perfil, então*

$$r \cap s = \{X\}$$

se, e somente se, existem únicos pontos

$$X_1 \in r_1 \cap s_1 \quad e \quad X_2 \in r_2 \cap s_2\,,$$

que pertencem a uma mesma linha de chamada.

6. *Se somente uma das retas for uma reta de perfil, temos uma caracterização semelhante a dada pelo item 4. acima.*

7. *Se as duas retas são retas de perfil, teremos que fazer uma análise semelhante a que foi feita no item 4. acima, as quais deixaremos como exercício para o leitor, ou seja, precisaremos estudar o comportamento dos seus rebatimentos no plano* <u>*PV*</u>.

6.5.2 Retas Paralelas

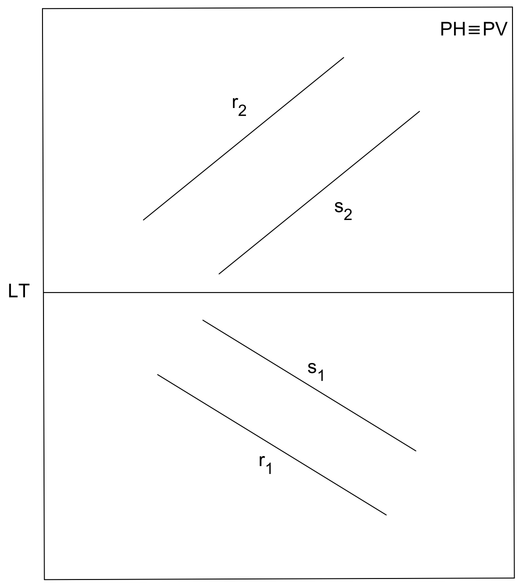
Lembremos que:

Definição 6.5.2 *Duas retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *são* **<u>paralelas</u>** *se elas têm a mesma direção e não possuem nenhum ponto em comum.*

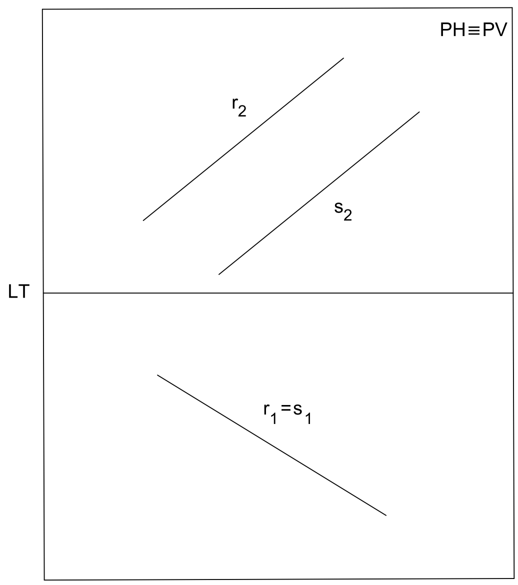
Observação 6.5.3

1. *Se as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *são dadas em épura então, em geral, temos que se elas são paralelas então uma das situações abaixo poderá ocorrer:*

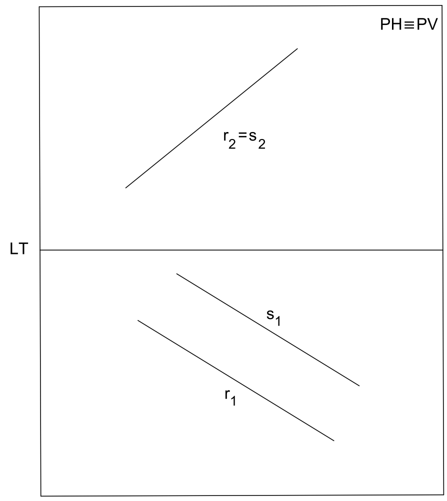
   (a) $r_1 \parallel s_1$ *e* $r_2 \parallel s_2$ *(veja a figura abaixo);*



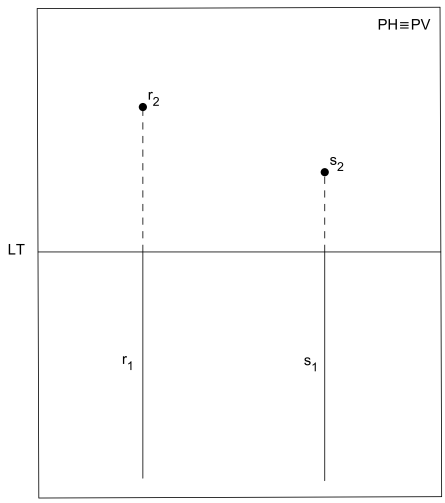
   (b) $r_1 = s_1$ *e* $r_2 \parallel s_2$ *(veja a figura abaixo);*



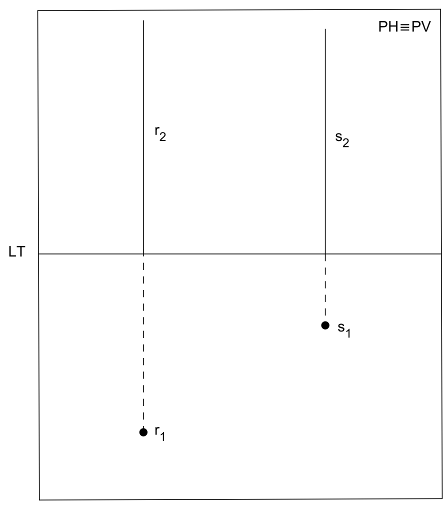
(c) $r_1 \parallel s_1$ *e* $r_2 = s_2$ *(veja figura abaixo);*



(d) $r_1 \parallel s_1$, $r_2 = \{X_2\}$ *e* $s_2 = \{Y_2\}$ *(veja a figura abaixo).*



(e) $r_1 = \{X_1\}$, $s_1 = \{Y_1\}$ *e* $r_2 \parallel s_2$ *(veja a figura abaixo).*



2. *Com isto podemos concluir que se as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *são paralelas, então deveremos ter que as projeções ortogonais de mesmo índice (istoé, nos planos* $\underline{PH}$ *e* $\underline{PV}$*) deverão ser paralelas, coincidentes ou pontuais.*

3. *Se as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ **não** *são* *retas de perfil* *valerá a recíproca, isto é,*

$$r \parallel s \quad \textit{se, e somente se,} \quad r_1 \parallel s_1 \quad e \quad r_2 \parallel s_2\,,$$

onde, no lado direito, podem ocorrer situações do tipo

$$r_1 = s_1 \quad \textit{ou} \quad r_2 = s_2\,.$$

4. **Não** *vale a recíproca desse resultado para retas de perfil!*

   Deixaremos a cargo do leitor encontrar um exemplo com retas de perfil, que tenham as propriedades acima (isto é, $r_1 \parallel s_1$ *e* $r_2 \parallel s_2$*) mas* **não** *são retas paralelas.*

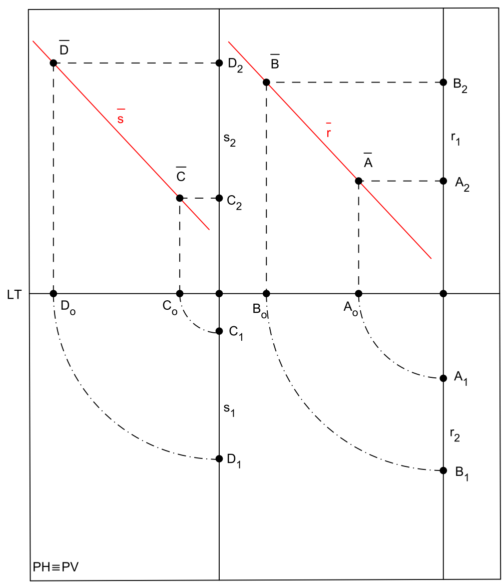
5. *Observemos que se uma reta* $\underline{r}$ *é uma reta de perfil e a reta* $\underline{s}$ *é paralela à reta* $\underline{r}$*, então a reta* $\underline{s}$ **deverá** *ser uma reta de perfil.*

   Deixaremos a cargo do leitor a prova desta propriedade.

6. *Do item 4. acima, se as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *são* *retas de perfil**, então*

$$r \parallel s \quad \textit{se, e somente se,} \quad \bar{r} \parallel \bar{s}\,.$$

Para vermos que isto é realmente verdade, basta olharmos os rebatimentos das retas $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *no plano* $\underline{PV}$*, isto é, as retas* $\underline{\bar{r}}$ *e* $\underline{\bar{s}}$ *(veja a figura abaixo).*



6.5.3 Retas Reversas

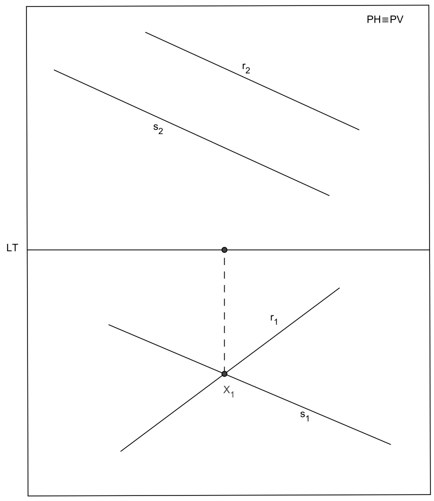
Lembremos que:

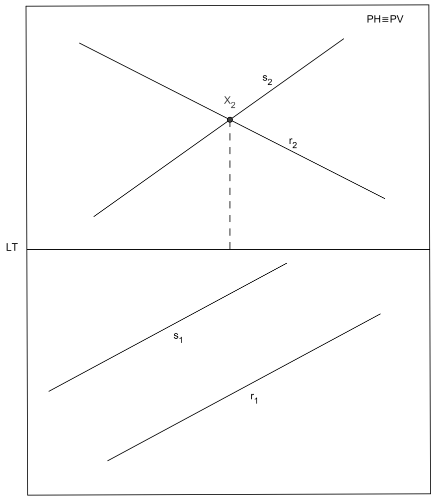
Definição 6.5.3 *Duas retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *são ditas* **reversas** *se elas não têm a mesma direção e não possuem nenhum ponto em comum.*

Observação 6.5.4

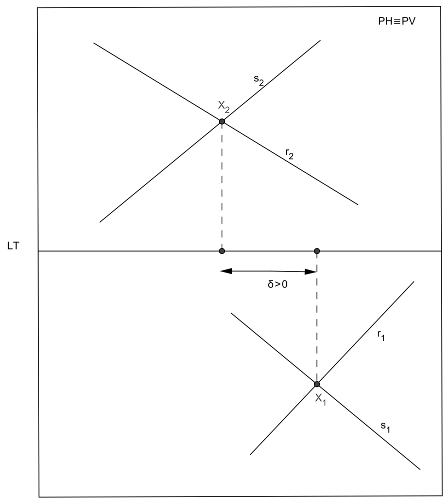
1. *Se as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *são dadas em épura então, em geral, temos que se elas são reversas então uma das situações abaixo poderá ocorrer:*

   (a) $r_1 \cap s_1 = \{X_1\}$ *e* $r_2 \parallel s_2$, $r_2 \neq s_2$ *ou* $r_1 \parallel s_1$, $r_1 \neq s_1$ *e* $r_2 \cap s_2 = \{X_2\}$ *(veja a figura abaixo).*





   (b) $r_1 \cap s_1 = \{X_1\}$, $r_2 \cap s_2 = \{X_2\}$ *e* X_1, X_2 *não estão na mesma linha de chamada (veja a figura abaixo).*

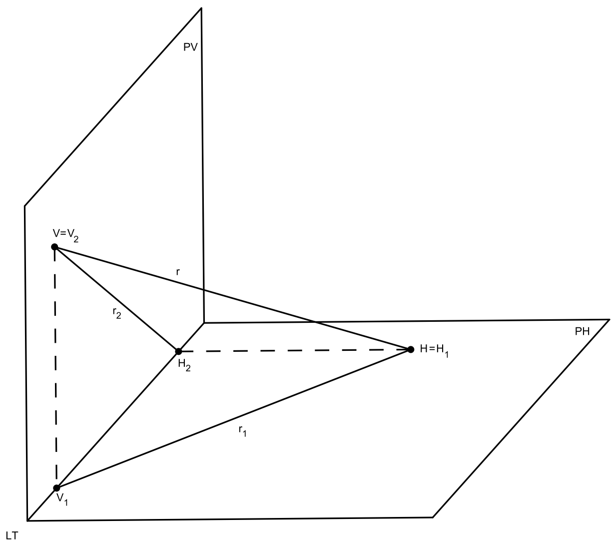


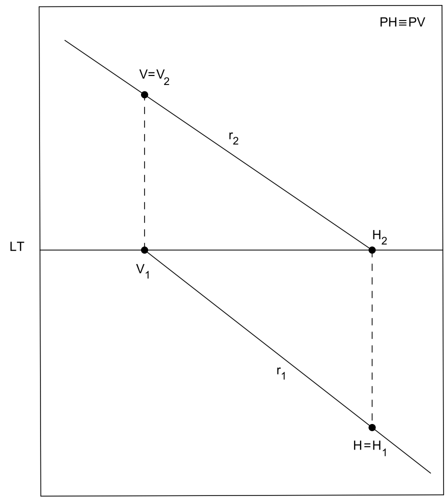
2. *No item (b) acima, temos que*

$$\delta = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad \textit{as retas } \underline{r} \textit{ e } \underline{s} \textit{ são concorrentes.}$$

6.6 Traços de Retas nos Planos de Projeção PH e PV

Definição 6.6.1 *As interseções de uma reta* r *com os planos de projeção* PH *ou* PV*, serão denominados de* **traços da reta** r *(caso existam), isto é, são os pontos, que indicaremos por* H *e* V*, onde a reta* r *interceptará os planos* PH *e* PV *(vejam as figuras abaixo).*





Observação 6.6.1 *Em geral temos a seguinte situação:*

Se o ponto, que indicaremos por H*, está no traço da reta* r *com o plano* PH*, então a projeção ortogonal, que indicaremos por* H_1*, do ponto* H*, no plano* PH*, tem que pertencer a projeção ortogonal, que chamaremos de* r_1*, da reta* r*, no plano* PH*,*

Além disso, a projeção ortogonal, que indicaremos por H_2*, do ponto* H*, no plano* PV*, deverá pertencer a interseção da projeção ortogonal, que chamaremos de* r_2*, da reta* r*, no plano* PV*, com linha de terra* LT *(veja a figura acima).*

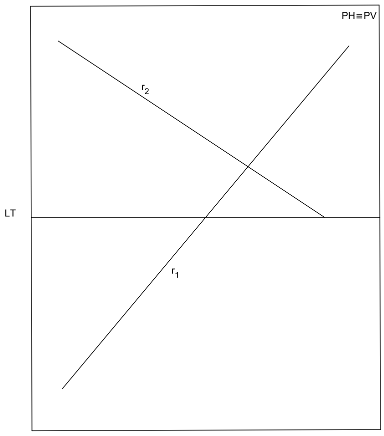
Além disso, os pontos H_1 *e* H_2 *devarão estar na mesma linha de chamada* LC*.*

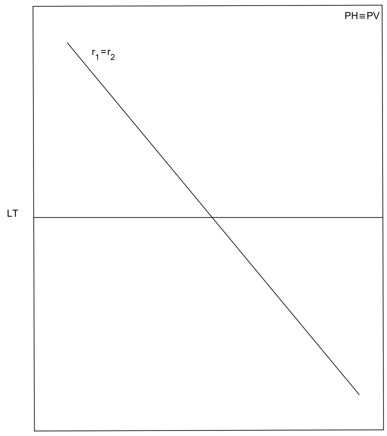
De modo semelhante, se o ponto, que indicaremos por V*, está no traço da reta* r*, com o plano* PV *então a projeção ortogonal, que indicaremos por* V_2*, do ponto* V*, no plano* PV*, tem que pertencer a projeção ortogonal, que chamaremos de* r_2*, da reta* r*, no plano* PV*, e a projeção ortogonal* V_1*, do ponto* V*, no plano* PH*, deverá pertencer a interseção da projeção, que indicaremos por* r_1*, da reta* r*, no plano* PH*, com linha de terra* LT *(veja a figura acima).*

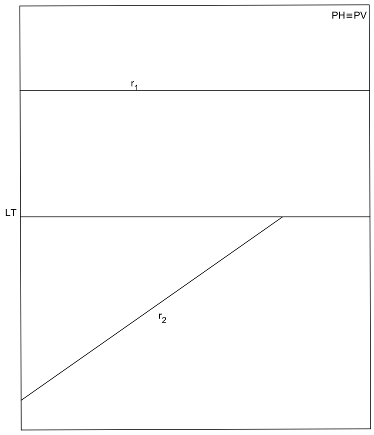
Além disso, os pontos V_1 *e* V_2 *devarão estar na mesma linha de chamada* LC*.*

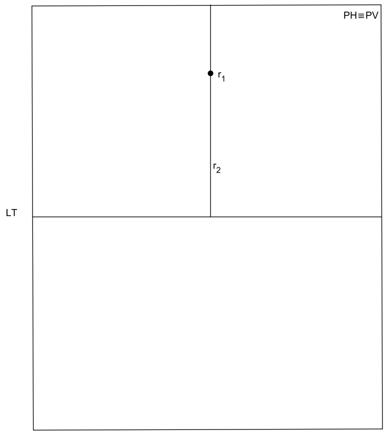
Temos os seguintes exercícios resolvidos:

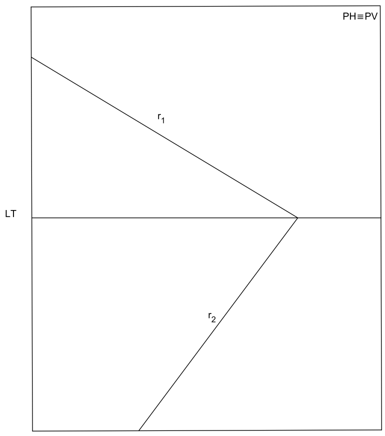
Exercício 6.6.1 *Dadas, em épura, as projeções ortogonais, que indicaremos por* r_1 *e* r_2*, da reta* r*, nos planos* PH *e* PV*, respectivamente, determinar, geometricamente, os traços da reta* r *com os planos* PH *e* PV *nos seguinte casos:*

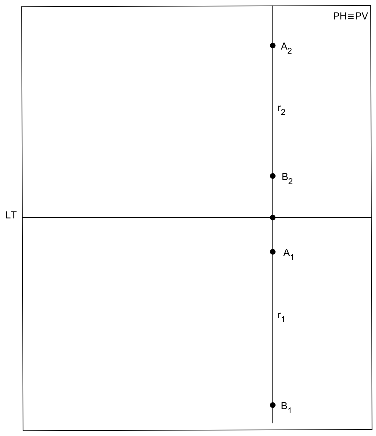












Resolução:

Na 1.a linha à esquerda, basta encontrar o ponto

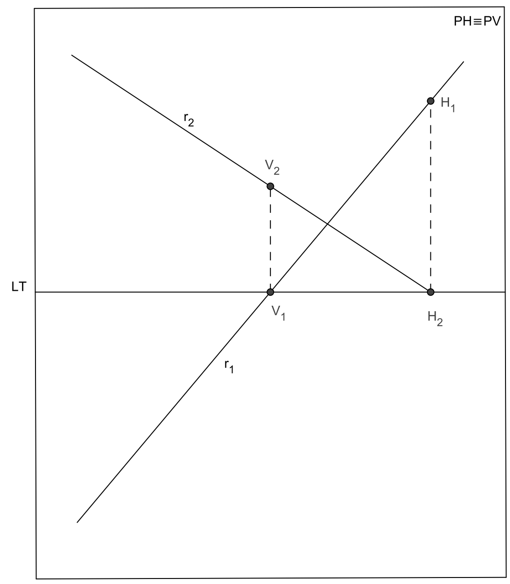
$$\{H_2\} = r_2 \cap LT$$

e por este ponto, traçar uma reta perpendicular à reta $\underline{LT}$, que encontrará a reta $\underline{r_1}$, no ponto $\underline{H_1}$, e assim, obtemos o ponto $\underline{H}$, o traço da reta $\underline{r}$ com o plano $\underline{PH}$ (veja a figura abaixo).

Para encontrar o traço da reta $\underline{r}$ com o plano $\underline{PV}$, encontremos o ponto

$$\{V_1\} = r_1 \cap LT$$

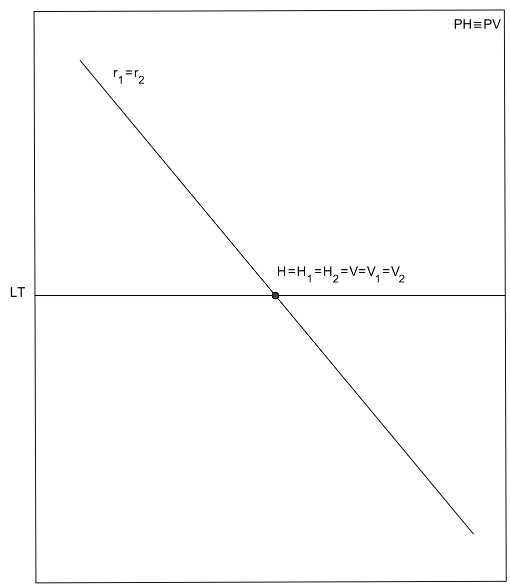
e por este tracemos a reta perpendicular à reta $\underline{LT}$, que encontrará a reta $\underline{r_2}$ no ponto $\underline{V_2}$, e assim, obtemos o ponto $\underline{V}$, o traço da reta $\underline{r}$ com o plano $\underline{PV}$ (veja a figura abaixo).



Na 1.a linha à direita, temos que a reta $\underline{r}$ é concorrente com a linha de terra $\underline{LT}$.

Logo basta encontrar o ponto de interseção da reta $\underline{r}$ com a linha de terra $\underline{LT}$, que este será o traço da reta $\underline{r}$ com os planos $\underline{PH}$ e $\underline{PV}$ (veja a figura abaixo), isto é,

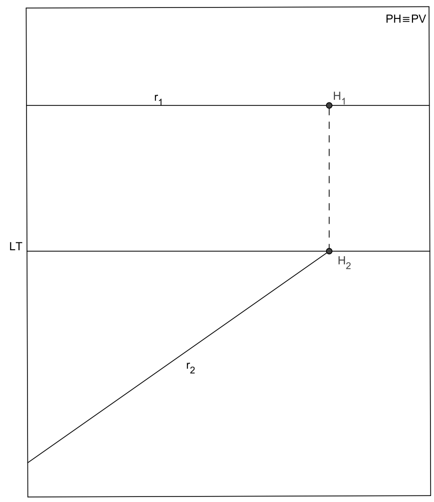
$$\{H = H_1 = H_2\} = r_1 \cap LT = r_2 \cap LT = \{V_1 = V_2 = V\}.$$



Na 2.a linha à esquerda, temos que a reta $\underline{r}$ é paralela, não contida, ao plano $\underline{PV}$, pois $r_1 \parallel LT$, ou seja, é uma reta frontal.

Logo, o traço da reta $\underline{r}$ com o plano $\underline{PV}$ é o conjunto vazio.

Para encontrar traço da reta $\underline{r}$, com o plano $\underline{PH}$, basta determinarmos o ponto, que indicaremos por $\underline{H_2}$, de interseção da reta $\underline{r_2}$, com a linha de terra $\underline{LT}$ e traçarmos por este, uma reta perpendicular à linha de terra $\underline{LT}$, que interceptará a reta $\underline{r_1}$, no ponto $\underline{H_1}$, e assim, obtemos o ponto $\underline{H}$, o traço da reta $\underline{r}$ com o plano $\underline{PH}$ (veja a figura abaixo).

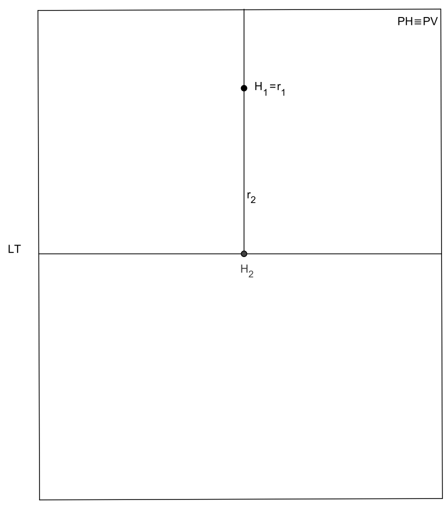


Na 2.a linha à direita, temos que a reta $\underline{r}$ é perpendicular ao plano $\underline{PH}$, pois $r_1 = \{H_1\}$ e $r_2 \perp LT$, ou seja, é uma reta vertical.

Logo, o traço da $\underline{r}$ com o plano $\underline{PV}$ será o conjunto vazio.

Por outro lado, a projeção ortogonal do traço da reta $\underline{r}$, com o plano $\underline{PH}$, será igual a $\{H_1\} = r_1$.

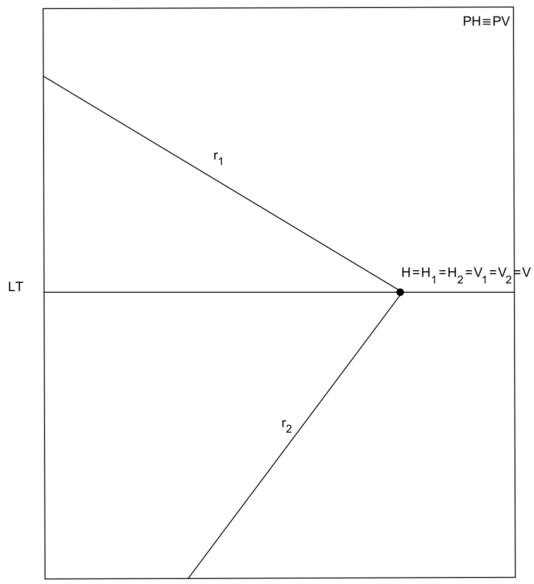
Traçando-se, por este ponto, uma reta perpendicular à linha de terra $\underline{LT}$ (que é a reta $\underline{r_2}$) obteremos, na interseção com a linha de terra $\underline{LT}$, o ponto $\underline{H_2}$, e assim, o ponto $\underline{H}$, o traço da reta $\underline{r}$ com o plano $\underline{PH}$ (veja a figura abaixo).



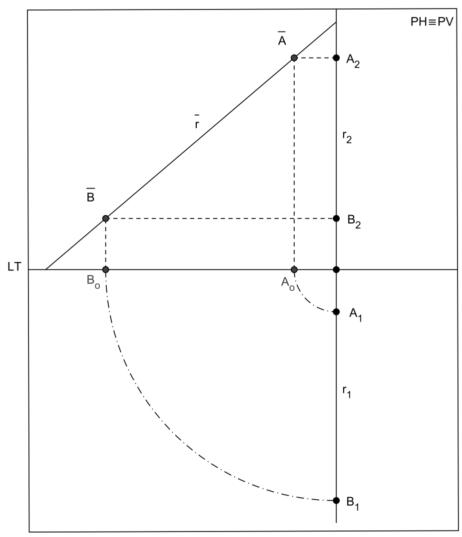
Na 3.a linha à esquerda, temos que a reta r̲ é concorrente com a linha de terra L̲T̲.

Neste caso, basta encontrarmos o ponto de interseção da reta r̲ com a linha de terra L̲T̲ que este será o traço da reta r̲ com os planos P̲H̲ e P̲V̲ (veja a figura abaixo), isto é,

$$\{H = H_1 = H_2\} = r_1 \cap LT = r_2 \cap LT = \{V_1 = V_2 = V\}.$$



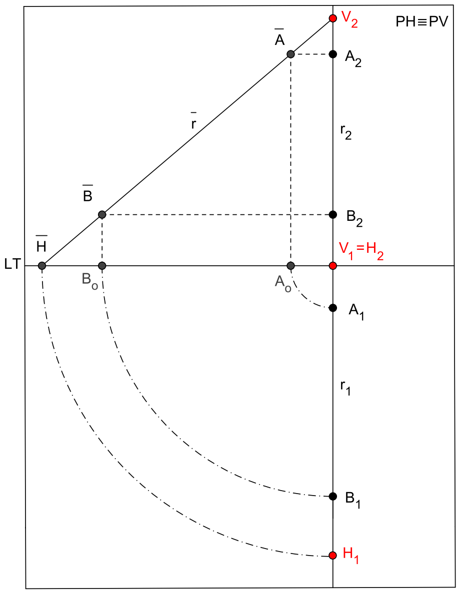
Na 3.a linha à direita, temos que a reta r̲ é uma reta de perfil, logo precisamos estudar seu rebatimento $\overline{r}$ no plano P̲V̲ (veja a figura abaixo).



A interseção da reta $\overline{r}$ com a reta $\underline{r_2}$, nos fornece o ponto $\underline{V_2}$, a saber, a projeção ortogonal, no plano P̲V̲, do ponto V̲, ou seja, do traço da reta r̲ com o plano P̲V̲.

A interseção da reta perpendicular a linha de terra $\underline{LT}$, contendso o ponto $\underline{V_2}$ (isto é, a reta $\underline{r_2}$), com a linha de terra $\underline{LT}$, nos fornece o ponto $\underline{V_1}$, a saber, a projeção ortogonal do ponto $\underline{V}$ no plano $\underline{PH}$.

Com isto obtemos o traço da reta $\underline{r}$ com o plano $\underline{PV}$, isto é, o ponto $V \doteq (V_1 , V_2)$ (veja a figura abaixo).



Para encontrarmos o traço da reta $\underline{r}$ com o plano $\underline{PH}$, começamos localizando o ponto $\overline{H}$, de interseção da reta $\bar{r}$ (rebatimento da reta $\underline{r}$ no plano $\underline{PV}$) com a linha de terra $\underline{LT}$.

Encontramos o ponto $H_1 \in r_1$, de tal modo que seu rebatimento no plano $\underline{PV}$, seja o ponto $\overline{H}$.

Para finalizarmos, a interseção da reta perpendicular a linha de terra $\underline{LT}$, contendo o ponto $\underline{H_1}$ (isto é, a reta $\underline{r_1}$), com a linha de terra $\underline{LT}$ nos fornece o ponto $\underline{H_2}$, a saber, a projeção ortogonal do ponto $\underline{H}$, no plano $\underline{PV}$.

Assim obteremos os traços da $\underline{r}$ com os planos $\underline{PV}$ e $\underline{PH}$, isto é, (veja a figura abaixo)

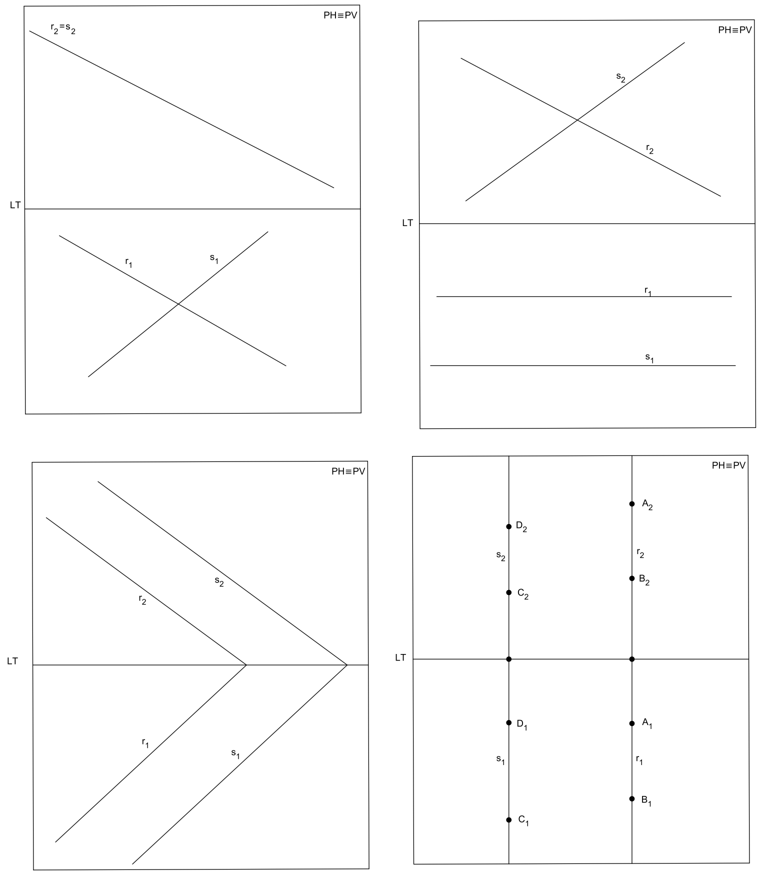
$$V \doteq (V_1 , V_2) \quad \text{e} \quad H \doteq (H_1 , H_2) .$$

6.7 Exercícios

Exercício 6.7.1 *Em cada um dos itens abaixo,*

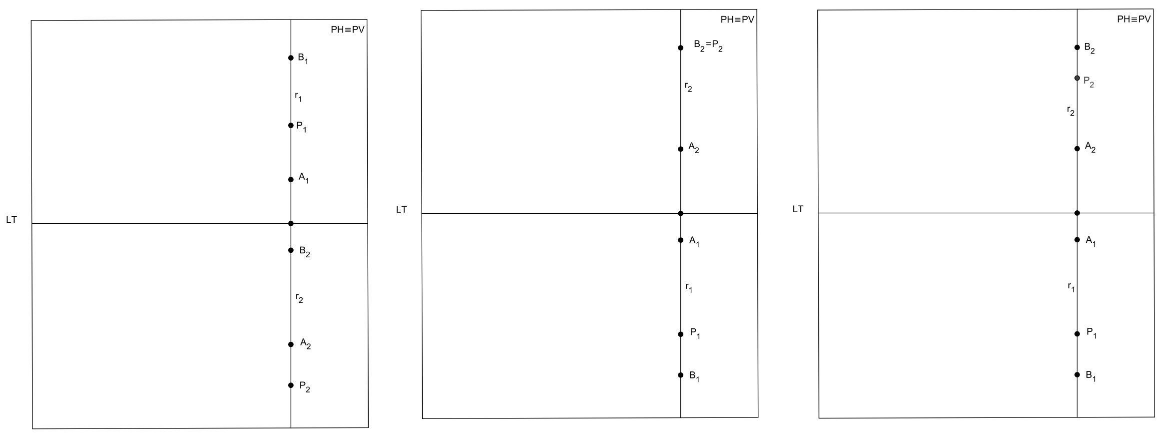
(a) *dizer se as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, dadas em épura, são paralelas, concorrentes ou reversas.*

(b) *encontrar seus traços das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, com os planos $\underline{PH}$, $\underline{PV}$ e a interseção com $\underline{LT}$.*



Exercício 6.7.2 *Determine os traços, nos planos* $\underline{\mathrm{PH}}$, $\underline{\mathrm{PV}}$ *e a interseção com a reta* $\underline{\mathrm{LT}}$, *de cada uma das retas notáveis.*

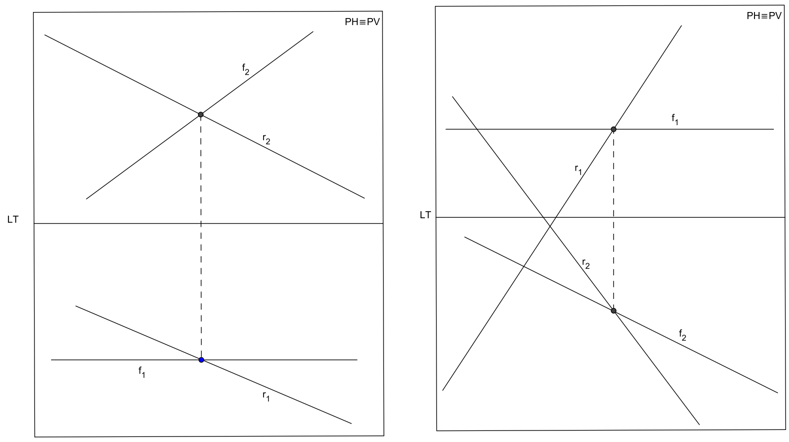
Exercício 6.7.3 *Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o ponto* $\mathrm{P} \doteq (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$, *pertence à reta de perfil* $\underline{\mathrm{r}}$, *dados em épura por:*



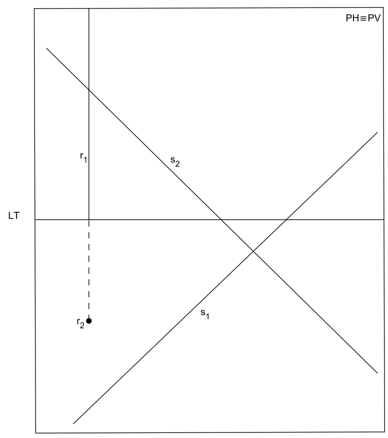
Exercício 6.7.4 *Representar um triângulo $\Delta\mathrm{ABC}$ sabendo-se que:*

1. *o vértice $\underline{\mathrm{A}}$ tem suas projeções ortogonais pertencentes ao 1.o diedro ((relativamente aos planos $\underline{\mathrm{PH}}$ e $\underline{\mathrm{PV}}$));*
2. *o vértice $\underline{\mathrm{C}}$ pertence ao plano $\underline{\mathrm{PV}}$ e está à direita do ponto $\underline{\mathrm{A}}$;*
3. *o lado $\overline{\mathrm{AC}}$ está contido em uma reta horizontal, que faz ângulo de medida $\dfrac{\pi}{6}$ com o plano $\underline{\mathrm{PV}}$;*
4. *o lado $\overline{\mathrm{AB}}$ está contido em uma reta frontal e tem $3\,\mathrm{cm}$ de comprimento;*
5. *o vértice $\underline{\mathrm{B}}$ pertence ao plano $\underline{\mathrm{PH}}$ e está à esquerda do ponto $\underline{\mathrm{A}}$.*

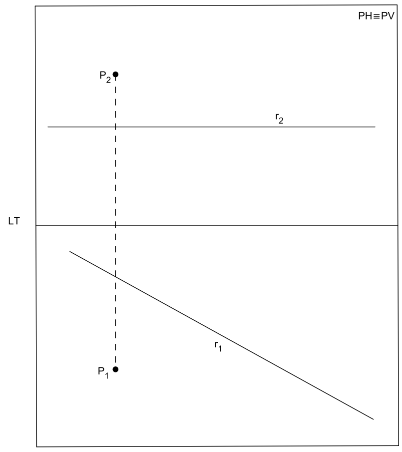
Exercício 6.7.5 *Em cada um dos casos abaixo, obter, em épura, a reta $\underline{\mathrm{s}}$ que é simétrica da reta $\underline{\mathrm{r}}$, em relação à reta frontal $\underline{\mathrm{f}}$, dadas em épura.*

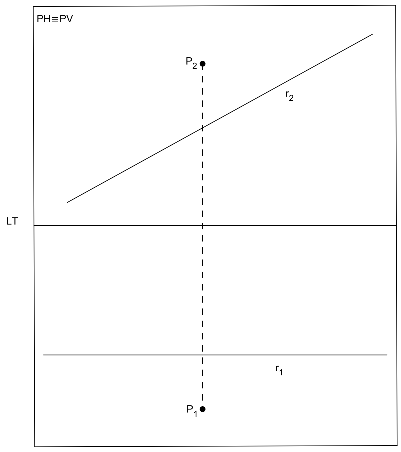


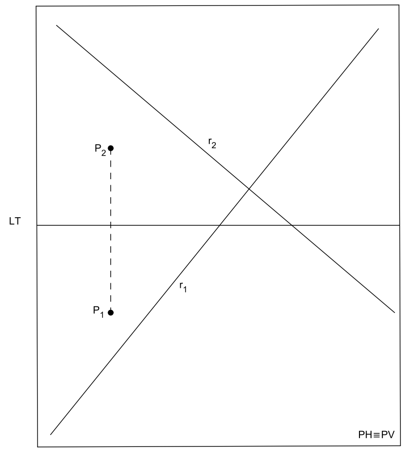
Exercício 6.7.6 *Obter, em épura, a reta perpendicular comum às duas retas reversas $\underline{\mathrm{r}}$ e $\underline{\mathrm{s}}$, dadas em épura abaixo e a distância, em $\underline{\mathrm{V.G.}}$, entre as retas $\underline{\mathrm{r}}$ e $\underline{\mathrm{s}}$.*



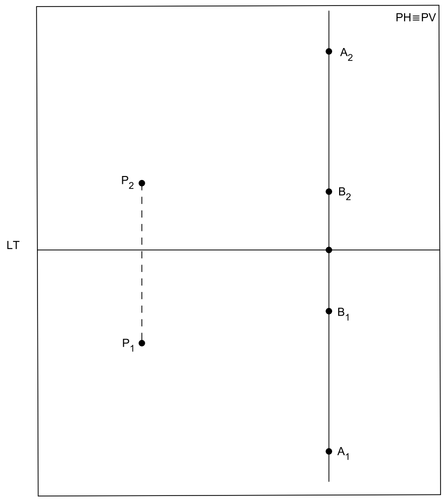
Exercício 6.7.7 *Dados, em épura, o ponto* $\mathrm{P} \doteq (\mathrm{P}_1\,,\mathrm{P}_2)$ *e a reta* $\mathrm{r} \doteq (\mathrm{r}_1\,,\mathrm{r}_2)$, *encontrar, geometricamente, a reta* $\mathrm{t} \doteq (\mathrm{t}_1\,,\mathrm{t}_2)$, *que contém o ponto* $\underline{\mathrm{P}}$ *e é perpendicular à reta* $\underline{\mathrm{r}}$, *em cada uma das figuras abaixo.*

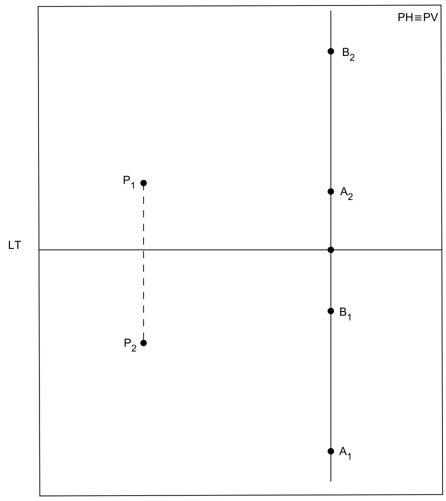




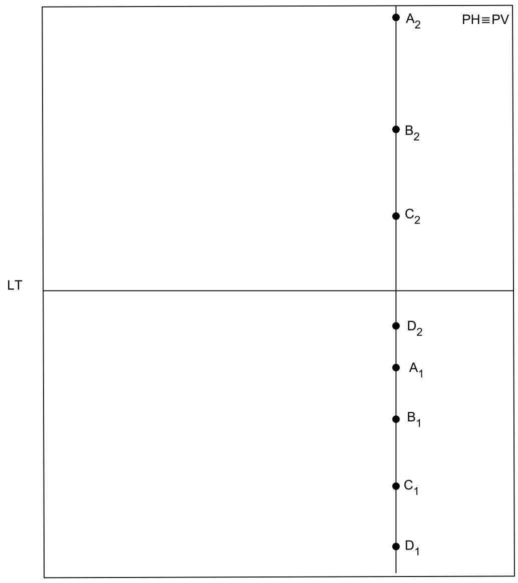


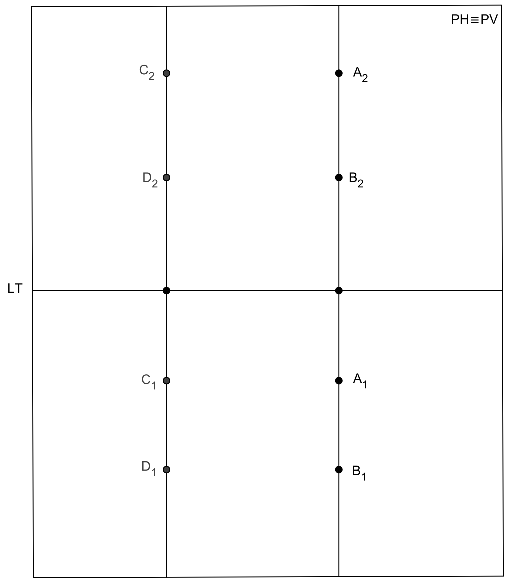
Exercício 6.7.8 *Dados, em épura, o ponto* $\mathrm{P} \doteq (\mathrm{P}_1\,,\mathrm{P}_2)$ *e uma reta de perfil* $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$, *obter uma reta* $\underline{\mathrm{t}}$, *que contenha o ponto* $\underline{\mathrm{P}}$ *e seja paralela a reta* $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$, *em cada um dos casos abaixo:*





Exercício 6.7.9 *Verificar se as retas de perfil* $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ *e* $\overleftrightarrow{\mathrm{CD}}$, *dadas em épura, são coincidentes, paralelas, concorrentes ou reversas, nos seguintes casos:*


PH≡PV
LT
A2
B2
C2
D2
A1
B1
C1
D1


PH≡PV
LT
C2
A2
D2
B2
C1
A1
D1
B1

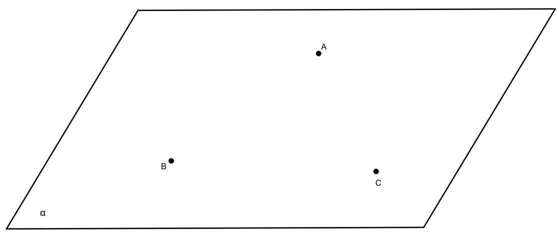
Capítulo 7

Estudo do Plano - Épura de um Plano

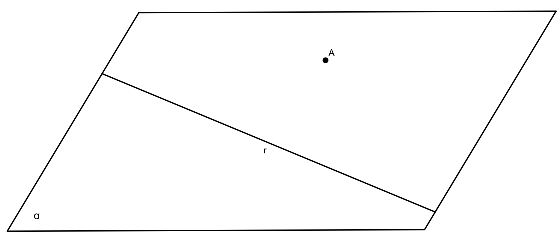
7.1 Descrição de um Plano

Observação 7.1.1 *Em Geometria de Posição, existem quatro modos diferentes de caracterizarmos, geometricamente, um plano, a saber, um plano pode ser dado por:*

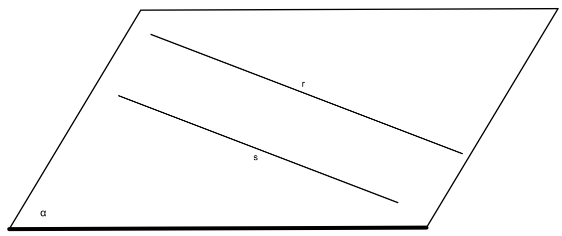
1. *três pontos distintos não colineares (veja a figura abaixo);*



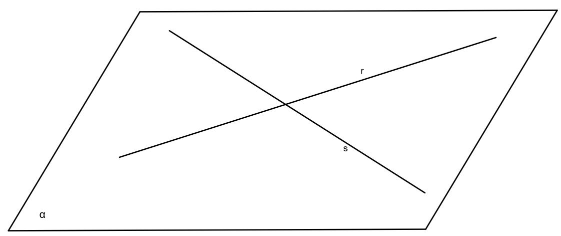
2. *uma reta e um ponto não pertence à esta reta (veja a figura abaixo);*



3. *duas retas paralelas e distintas (veja a figura abaixo);*



4. duas retas concorrentes (veja a figura abaixo).



Observemos que sabemos representar cada uma das situações acima, em épura, e com isto podermos estudar planos, dados em épura, em cada uma das situações apresentadas acima.

7.2 Planos Bissetores

Definição 7.2.1 *Em Geometria de Posição, um plano será dito* **plano bissetor** *se ele divide um diedro $\mathcal{D}$ (relativamente aos planos PH e PV) , em dois outros subdiedros de modo que, as distâncias de cada ponto desse plano aos planos PH e PV sejam iguais (veja a figura abaixo).*

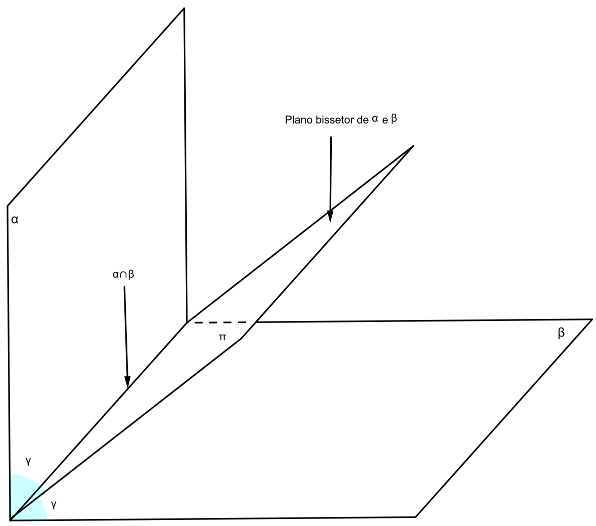


Figura 7.1: Plano bissetor

Observação 7.2.1

1. *Lembremos que um diedro é caracterizado por dois semi-planos cuja interseção é uma reta.*

   Na figura (7.1) *acima, os planos* $\underline{\alpha}$ *e* $\underline{\beta}$ *se interceptam segundo a reta*

   $$\mathrm{i} \doteq \alpha \cap \beta$$

   e o plano $\underline{\pi}$ *representa o plano bissetor de um dos diedros determinados pelos planos* $\underline{\alpha}$ *e* $\underline{\beta}$ *(veja a figura* (7.1) *acima).*

   Vale observar que o ângulo que o plano $\underline{\pi}$ *faz com o plano* $\underline{\alpha}$ *e com o plano* $\underline{\beta}$ *são iguais (na figura* (7.1) *acima, sua medida é* $\underline{\gamma}$*).*

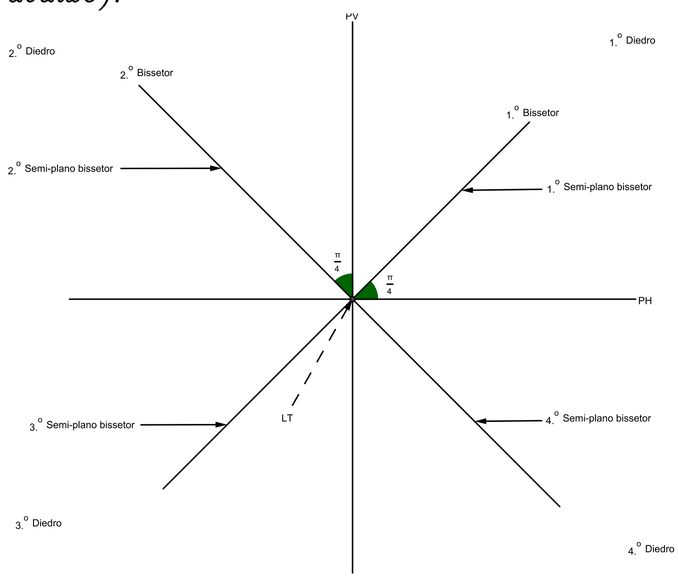
2. *Na Geometria Descritiva um plano bissetor será um plano que contém a linha de terra* $\underline{\mathrm{LT}}$ *e forma ângulo de medida* $\dfrac{\pi}{2}$ *com os planos* $\underline{\mathrm{PH}}$ *e* $\underline{\mathrm{PV}}$.

3. *Logo para cada diedro fixado (relativamente aos planos* $\underline{\mathrm{PH}}$ *e* $\underline{\mathrm{PV}}$*) , existem, exatamente, dois planos bissetores que serão denominados* **Primeiro Bissetor** *e* **Segun- do Bissetor***, que podem ser caracterizados por:*

   (a) **1.º Bissetor:** *é o plano que contém a linha de terra* $\underline{\mathrm{LT}}$ *e forma ângulo de* $\dfrac{\pi}{2}$ *com os planos* $\underline{\mathrm{PH}}$ *e* $\underline{\mathrm{PV}}$ *e está contido no 1.º e 3.º Diedros (veja a figura abaixo - vista frontal).*

   (b) **2.º Bissetor:** *é o plano que contém a linha de terra* $\underline{\mathrm{LT}}$ *e forma ângulo de* $\dfrac{\pi}{2}$ *com os planos* $\underline{\mathrm{PH}}$ *e* $\underline{\mathrm{PV}}$ *e está contido no 2.º e 4.º Diedros (veja a figura abaixo - vista frontal).*

4. *De modo semelhante definimos os semi-planos associados as planos bissetores (veja a figura abaixo).*

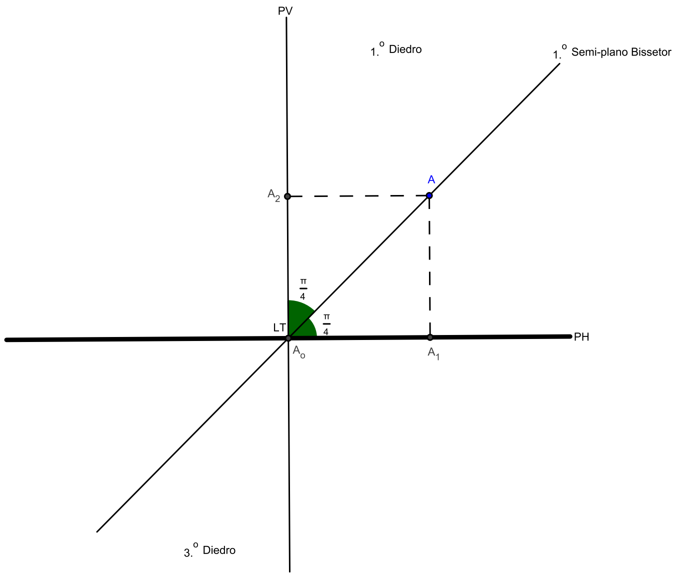


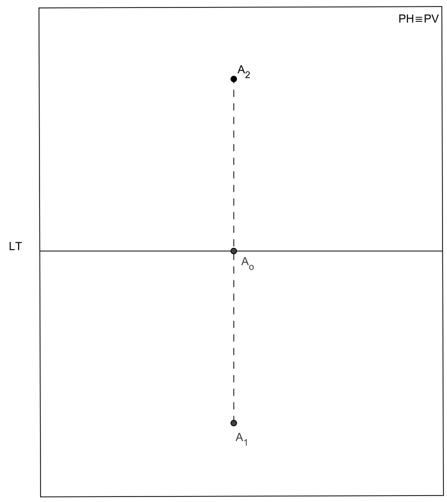
7.2.1 Pertinência de um Ponto aos Planos Bissetores

Observação 7.2.2

1. **Ponto pertencente ao 1.º Bissetor:**

   Denotemos por $\underline{A}$ *um ponto pertencente ao 1.o Bissetor (vejam as figuras abaixo).*





Observemos que os pontos $\underline{A_1}$ *e* $\underline{A_2}$*, serão simétricos em relação a linha de terra* $\underline{LT}$*, mais precisamente, temos que:*

Um ponto $A \in 1.^o$ *Bissetor se, e somente se, os pontos* $\underline{A_1}$ *e* $\underline{A_2}$ *serão simétricos em relação a linha de terra* $\underline{LT}$*.*

$$\text{\textit{Em particular, estão em semi-planos opostos, relativamente à} } \underline{LT}. \tag{7.1}$$

Isto decorre do fato que os triângulos ΔAA_1A_o *e* ΔAA_2A_o *são triângulos congruentes (caso ALA), logo deveremos ter*

$$A_oA_1 = A_oA_2\,. \tag{7.2}$$

Como

$$\overline{A_oA_1}\,, \overline{A_oA_2} \perp LT\,,$$

segue, de (7.2), que (7.1) deverá ocorrer.

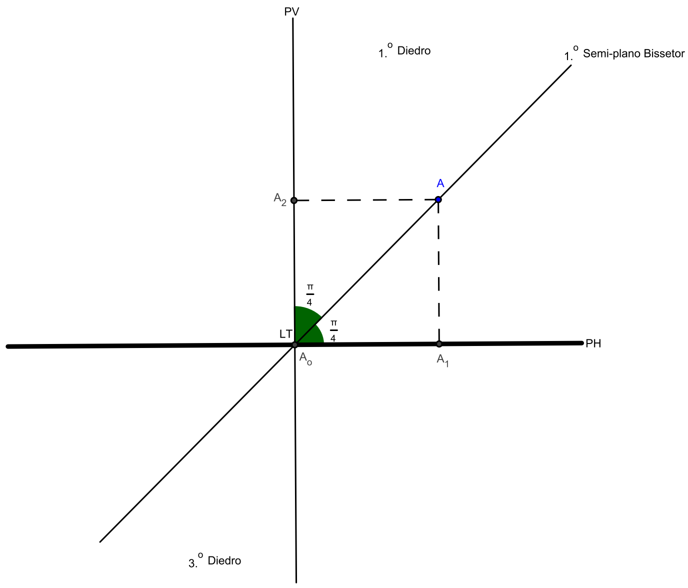
Reciprocamente, se os pontos $\underline{A_1}$ *e* $\underline{A_2}$ *são simétricos, em relação a linha de terra* $\underline{LT}$*, então os triângulos* ΔAA_1A_o *e* ΔAA_2A_o *são triângulos congruentes (caso LL L comum), pois*

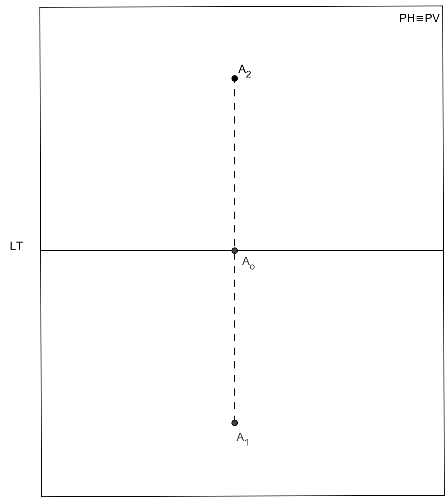
$$AA_2 = A_1A_o \quad e \quad AA_1 = A_2A_o\,.$$

Assim o ponto $\underline{A}$ *deverá pertencer ao plano* $1.^o$ *Bissetor.*

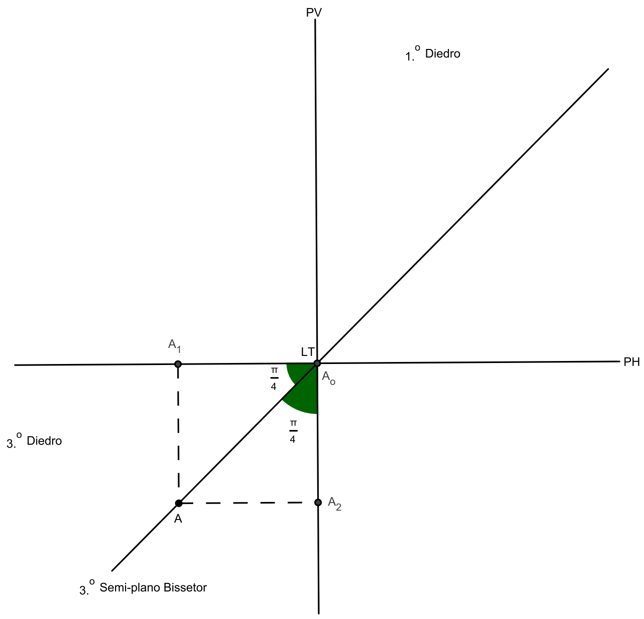
Neste caso, podemos ter as seguintes situações:

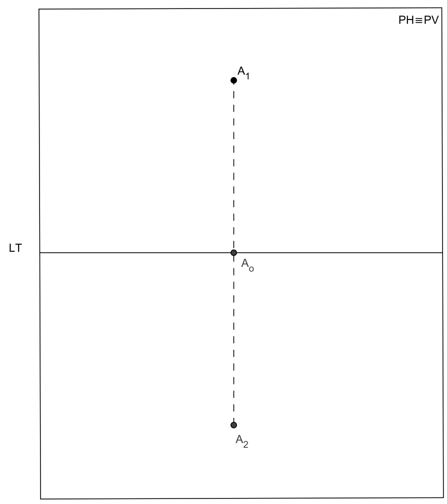
(a) *O ponto* $\underline{A}$ *pertence ao* 1.º *semi-plano bissetor, isto é, ao semi-plano do plano* 1.º *Bissetor que está contido no* 1.º *Diedro (relativamente aos planos* $\underline{PH}$ *e* $\underline{PV}$*) se, e somente se, temos a seguinte situação em épura (veja a figura à direita):*





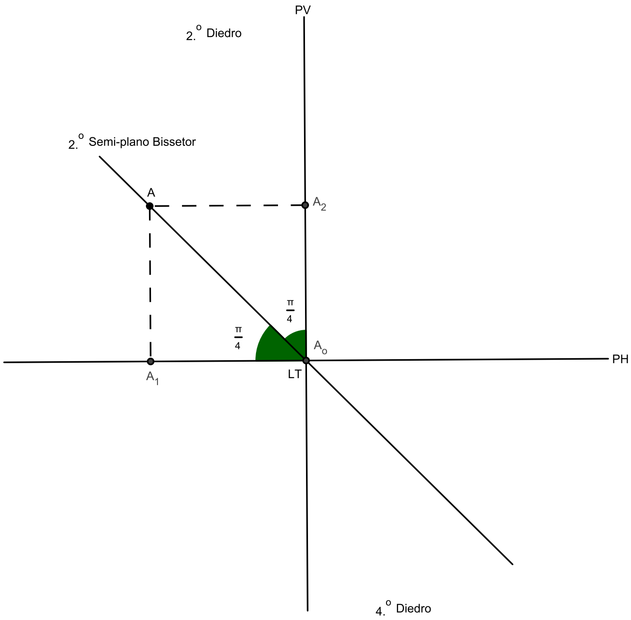
(b) *O ponto* $\underline{A}$ *pertence ao* 3.º *semi-plano bissetor, isto é, ao semi-plano do plano* 1.º *Bissetor que está contido no* 3.º *Diedro (relativamente aos planos* $\underline{PH}$ *e* $\underline{PV}$*) se, e somente se, temos a seguinte situação em épura (veja a figura à direita):*

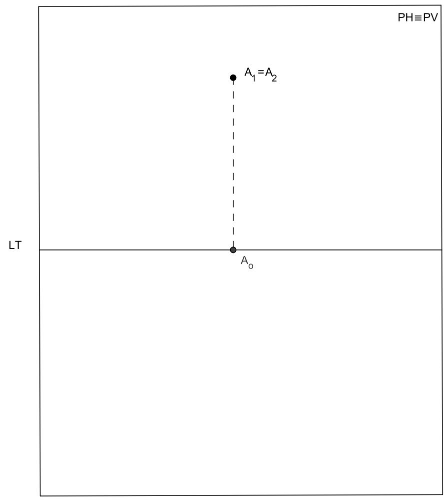




2. **Ponto pertencente ao 2.º Bissetor:**

Denotemos por $\underline{A}$ *um ponto pertencente ao 2.o Bissetor (vejam as figuras abaixo).*





Observemos que os pontos $\underline{A_1}$ *e* $\underline{A_2}$ *são coincidentes, mais precisamente, temos que*

$$A \in 2.^{\text{o}} \quad \textit{Bissetor se, e somente se,} \quad A_1 = A_2\,. \tag{7.3}$$

Isto decorre do fato que os triângulos ΔAA_1A_o *e* ΔAA_2A_o *são triângulos congruentes (caso ALA), logo deveremos ter*

$$A_oA_1 = A_oA_2\,. \tag{7.4}$$

Como

$$\overline{A_oA_1}\,, \overline{A_oA_2} \perp \mathrm{LT}\,,$$

segue, de (7.4), que (7.3) deverá ocorrer.

Reciprocamente, se

$$A_1 = A_2\,,$$

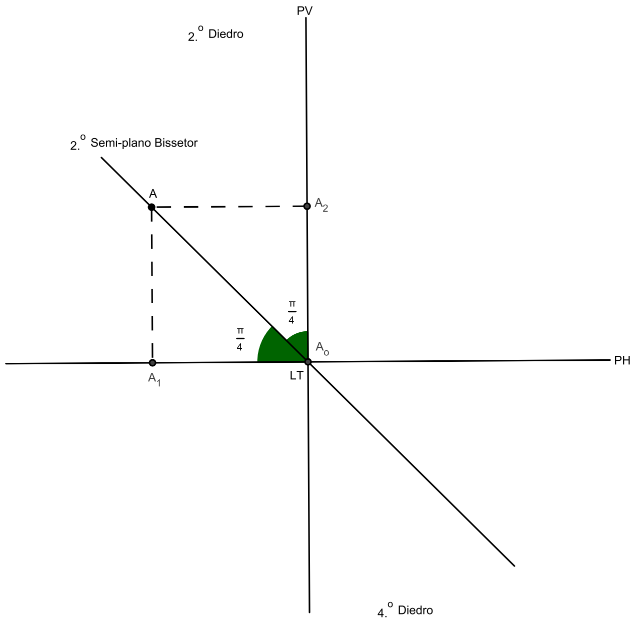
então os triângulos ΔAA_1A_o *e* ΔAA_2A_o *são triângulos congruentes (caso LL L comum), pois*

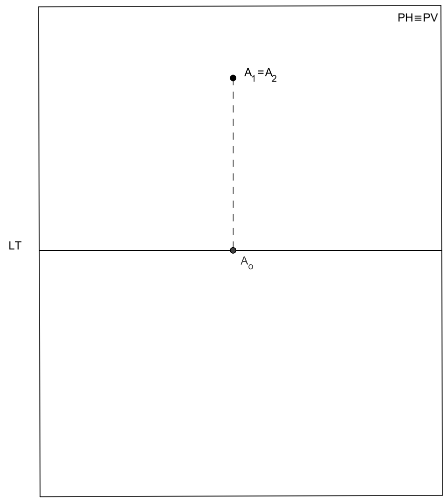
$$AA_2 = A_1A_o \quad \textit{e} \quad AA_1 = A_2A_o\,.$$

Assim o ponto $\underline{A}$ *deverá pertencer ao plano* $2.^{\text{o}}$ *Bissetor.*

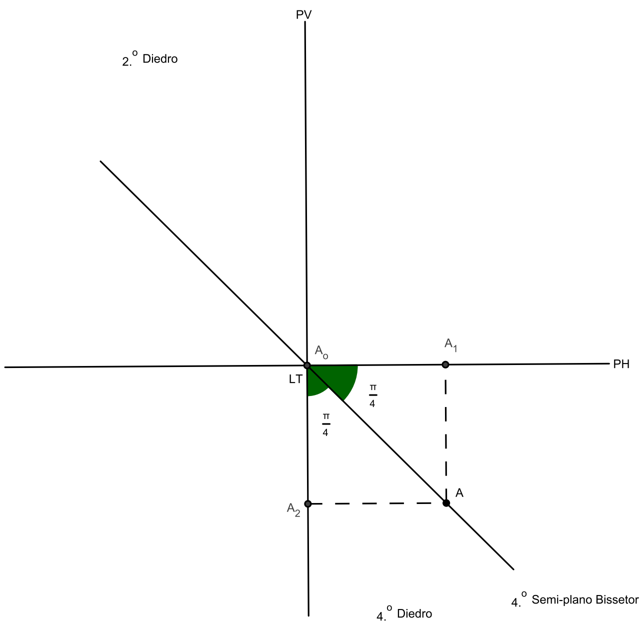
Neste caso, podemos ter as seguintes situações:

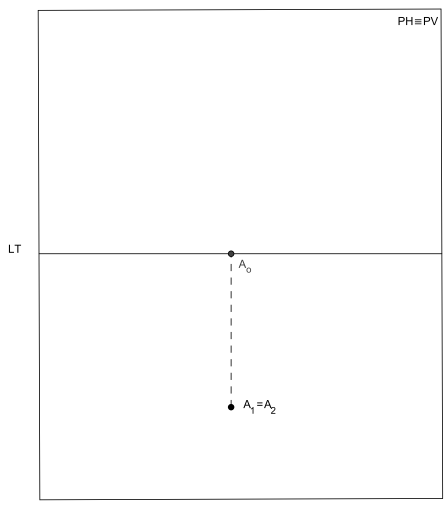
(a) *O ponto* A *pertence ao* 2.º *semi-plano bissetor, isto é, ao semi-plano do plano* 2.º *Bissetor que está contido no* 2.º *Diedro (relativamente aos planos* PH *e* PV*) se, e somente se, temos a seguinte situação em épura (veja a figura à direita):*





(b) *O ponto* A *pertence ao* 4.º *semi-plano bissetor, isto é, ao semi-plano do plano* 2.º *Bissetor que está contido no* 4.º *Diedro (relativamente aos planos* PH *e* PV*) se, e somente se, temos a seguinte situação em épura (veja a figura à direita):*





7.2.2 Traço de Retas nos Planos Bissetores

Dada uma reta $\underline{r}$, baseado nos fatos da subseção anterior, podemos determinar o traço da mesma em cada um planos bissetores.

Podemos ter duas situações, a saber:

1.
$$\begin{cases} X \in r \\ \quad e \\ X \in 1.^o \text{ Bissetor} \end{cases}, \quad \text{então,} \quad \begin{cases} X_1 \in r_1 , \quad X_2 \in r_2 \\ \quad e \\ X_1 , X_2 \text{ são simétricos em relação à LT} \end{cases}.$$

2.
$$\begin{cases} X \in r \\ \quad e \\ X \in 2.^o \text{ Bissetor} \end{cases}, \quad \text{então,} \quad \begin{cases} X_1 \in r_1 , \quad X_2 \in r_2 \\ \quad e \\ X_1 = X_2 \end{cases}.$$

Observação 7.2.3

1. *Se a reta* $\underline{r}$ **não** *for uma reta de perfil, valerão as respectivas recíproca das situações acima, isto é,*

   (a)
$$\begin{cases} X \in r \\ \quad e \\ X \in 1.^o \textit{ Bissetor} \end{cases} \quad \textit{se, e somente se,} \quad \begin{cases} X_1 \in r_1 \\ X_2 \in r_2 \\ \quad e \\ X_1, X_2 \textit{ são simétricos em relação à } \text{LT} \end{cases}.$$

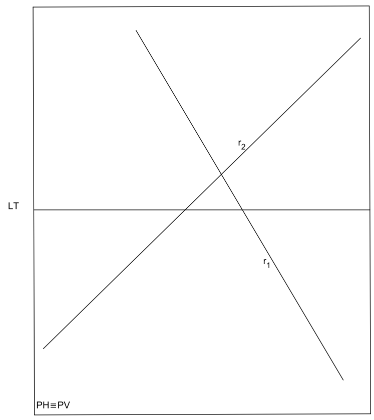
   (b)
$$\begin{cases} X \in r \\ \quad e \\ X \in 2.^o \textit{ Bissetor} \end{cases} \quad \textit{se, e somente se,} \quad \begin{cases} X_1 \in r_1 \quad X_2 \in r_2 \\ \quad e \\ X_1 = X_2 \end{cases}.$$

2. *Se a reta* $\underline{r}$ *for uma reta de perfil, as respectivas recíprocas das situações acima poderão* **não** *ocorrer.*

   Deixaremos a cargo do leitor encontrar exemplos em que as respectivas recíprocas são falsas e encontrar condições necessárias e suficientes para que caracterizemos este caso.

Apliquemos isto ao

Exemplo 7.2.1 *Encontrar os traços da reta* $\underline{r}$*, dada em épura na figura abaixo, com os planos bissetores:*



Resolução:

Observemos que a reta r é uma reta qualquer (logo não é uma reta de perfil).

Logo para obtermos a interseção da reta r com o plano 1.º Bissetor, basta encontrarmos um ponto $X \in r$, tal que

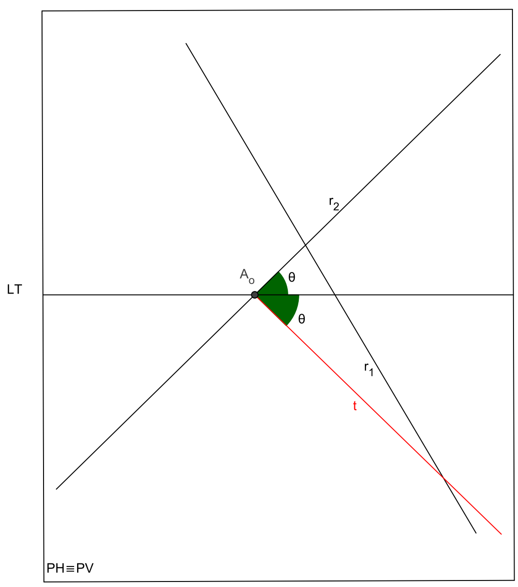
$$X_1 \in r_1 \quad \text{e} \quad X_2 \in r_2\,,$$

são pontos simétricos em relação à LT (notemos que eles, necessariamente, pertencerão a uma mesma linha de chamada).

Para encontrar o ponto $X = (X_1\,, X_2)$ (se existir) encontramos, primeiramente, o ponto $A - o$, de modo que

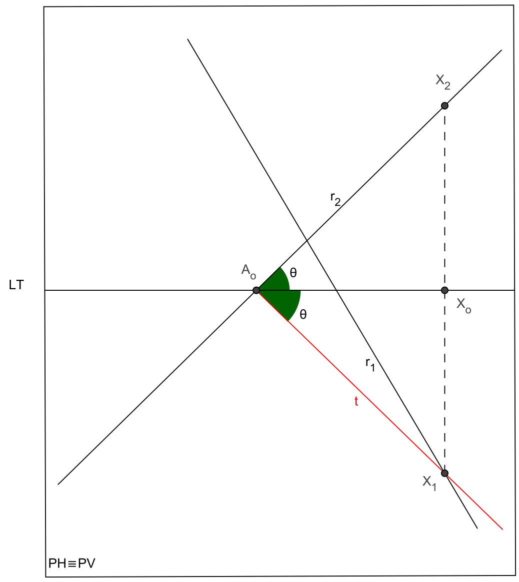
$$A_o \in r_2 \cap LT\,.$$

Tracemos a reta t, simétrica da reta r_2, relativamente à LT, contendo oponto A_o (veja a figura abaixo).



A reta t interceptará a reta r_1 em um ponto, que chamaremos de X_1.

A reta perpendicular à LT, contendo o ponto $\underline{X_1}$, interceptará a reta $\underline{r_2}$ em um ponto, que denotaremos por $\underline{X_2}$ (veja a figura abaixo).



Afirmamos que o ponto

$$X = (X_1\,, X_2)$$

é o traço da reta $\underline{r}$ com o plano 1.º Bissetor.

De fato, como

$$X_j \in r_j\,, \quad j \in \{1\,,2\}, \quad \text{segue que} \quad X \in r$$

e, além disso, $\underline{X_1}$ e $\underline{X_2}$ estão em uma mesma linha de chamada (por construção).

Além disso,

$$X_1X_o = X_2X_o$$

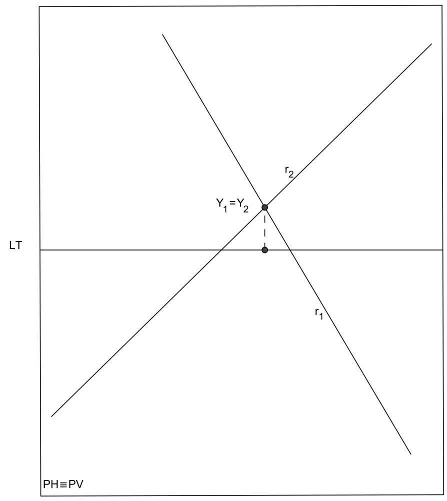
pois a reta $\underline{t}$ é a reta simétrica da reta $\underline{r_2}$, em relação à reta LT.

Logo o ponto $\underline{X_2}$ será o ponto simétrico do ponto $\underline{X_1}$, em relação a LT, ou seja, o ponto $\underline{X}$ pertencerá ao plano 1.º Bissetor.

Para obtermos a interseçao da reta $\underline{r}$ com o plano 2.º Bissetor, basta encontrarmos um ponto

$$Y = (Y_1\,, Y_2) \in r\,, \quad \text{tal que} \quad Y_1 = Y_2\,.$$

Para determiniar o ponto $Y = (Y_1, Y_2)$ (se existir), basta encontramos um ponto de interseção das retas $\underline{r_1}$ e $\underline{r_2}$ (veja a figura abaixo).



7.3 Traço de Planos

Definição 7.3.1 *Na Geometria Descritiva, dado um plano $\underline{\alpha}$, denominaremos a interseção do plano $\underline{\alpha}$ com os planos $\underline{\mathsf{PH}}$ e $\underline{\mathsf{PV}}$ como sendo* **os traços do plano $\underline{\alpha}$** *e serão indicadas por $\underline{\alpha_1}$ e $\underline{\alpha_2}$, respectivamente.*

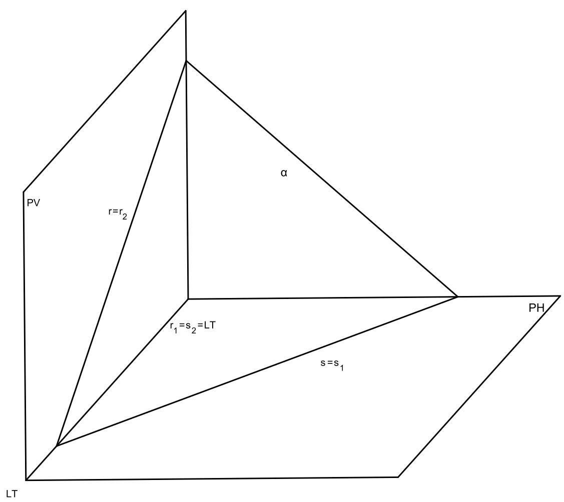
Observação 7.3.1

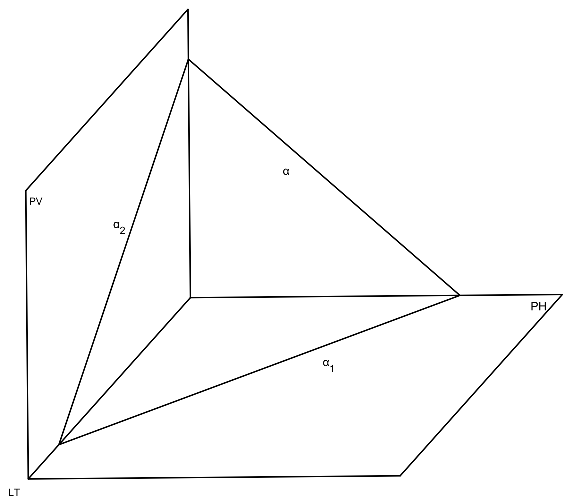
1. *Logo, dado um plano $\underline{\alpha}$, o traço do plano $\underline{\alpha}$ com o plano $\underline{\mathsf{PV}}$ (se não for vazio), será uma reta, que denotaremos por $\underline{r}$, que terá projeção ortogonal horizontal coincidindo com linha de terra $\underline{\mathsf{LT}}$, isto é, (veja a figura abaixo)*

$$r_1 = \mathsf{LT} \quad e \quad r = r_2 .$$

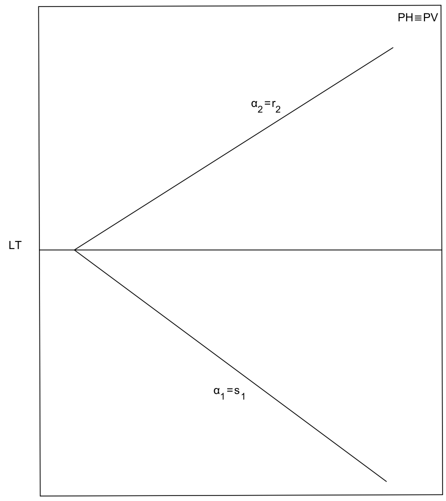
De modo semelhante, o traço do plano $\underline{\alpha}$ com o plano $\underline{\mathsf{PH}}$ (se não for vazio), será uma reta, que chamaremos de $\underline{s}$, que terá projeção ortogonal vertical coincidindo com linha de terra $\underline{\mathsf{LT}}$, isto é, (veja a figura abaixo)

$$s_2 = \mathsf{LT} \quad e \quad s_1 = s .$$





2. *Em épura, teremos que os traços do plano* $\underline{\alpha}$ *serão dados por:*



3. *Em geral, um plano fica completamente determinado se conhecermos seu traços com os planos* <u>PH</u> *e* <u>PV</u>.

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

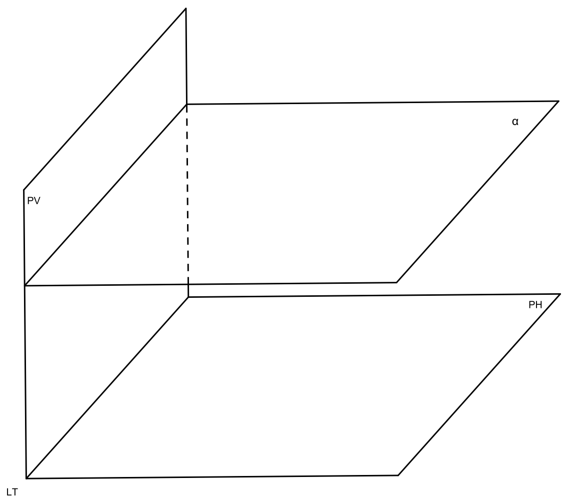
7.4 Planos Notáveis

Assim como no caso das retas no espaço temos alguns planos que desempenham papéis importantes no estudo de problemas da Geometria Descritiva.

A seguir introduziremos estes e daremos algumas propriedades associadas a cada um dos mesmos.

7.4.1 Plano Horizontal ou de Nível

Definição 7.4.1 *Um plano* $\underline{\alpha}$, *que é paralelo ou coincidente com plano* <u>PH</u>, *será denominado* <u>**plano horizontal ou de nível**</u>.

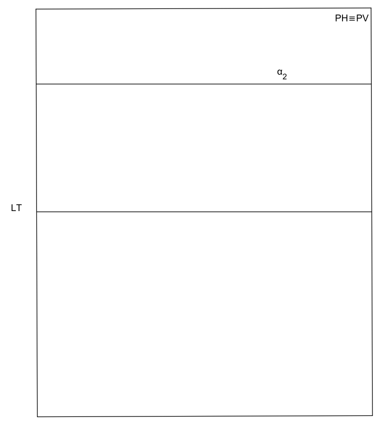


Observação 7.4.1

1. *Se $\underline{\alpha}$ é um plano horizontal, então seu traço com o plano $\underline{\text{PH}}$ será vazio, excetuando-se o caso em que o plano $\underline{\alpha}$ for o plano $\underline{\text{PH}}$.*

2. *Observemos que $\underline{\alpha}$ é um plano horizontal se, e somente se, (veja a figura abaixo)*

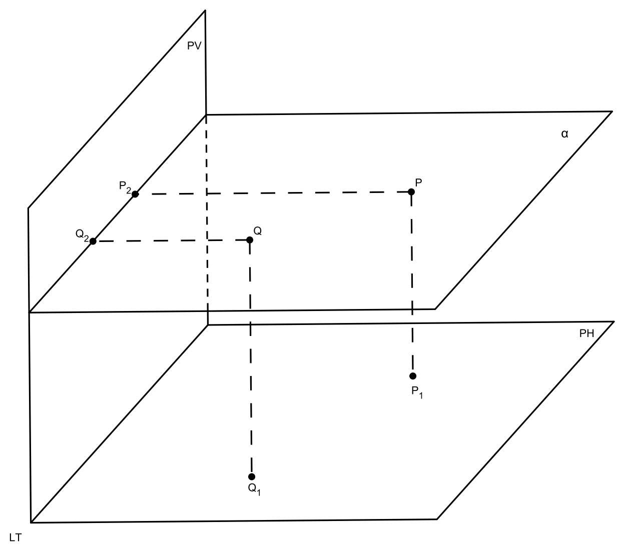
$$\alpha_2 \parallel \text{LT}.$$

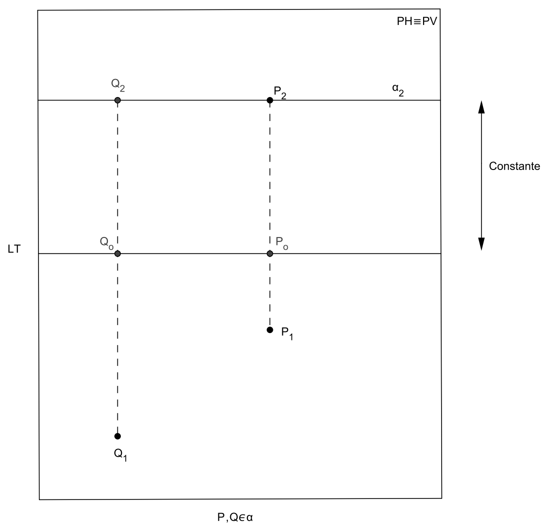


3. *Se $\underline{\alpha}$ é um plano horizontal e*

$$\text{P} \doteq (\text{P}_1, \text{P}_2), \text{Q} \doteq (\text{Q}_1, \text{Q}_2) \in \alpha, \qquad \textit{então} \quad \text{P}_2\text{P}_o = \text{Q}_2\text{Q}_o,$$

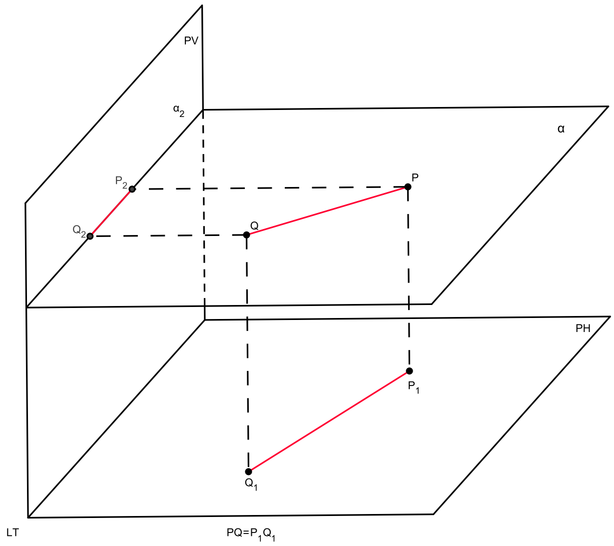
ou seja, todo ponto de um plano horizontal tem cota constante (veja a figura abaixo).

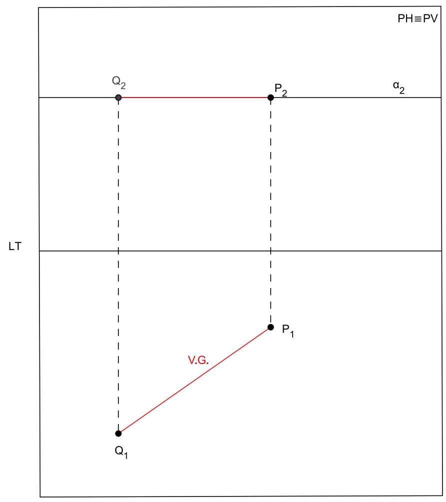




4. *Qualquer região contida num plano horizontal terá sua projeção ortogonal no plano $\underline{\text{PH}}$ em $\underline{\text{V.G.}}$ e sua projeção ortogonal no plano $\underline{\text{PV}}$ estará contida no traço*

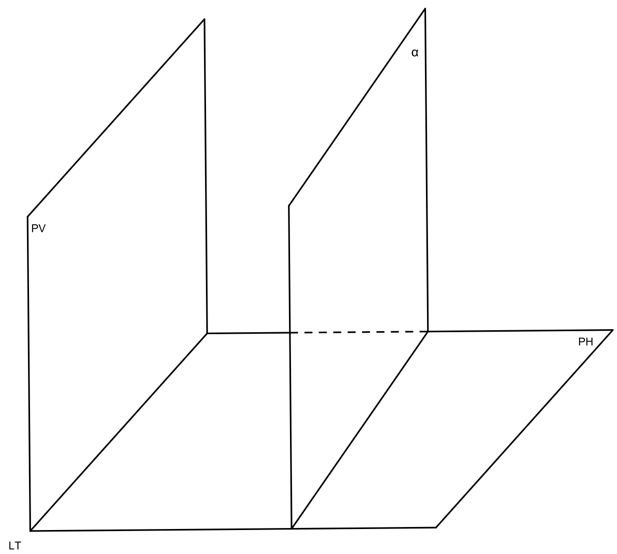
do plano $\underline{\alpha}$*, no plano* $\underline{\mathrm{PV}}$*, isto é, contida na reta* $\underline{\alpha_2}$ *(veja a figura abaixo).*





7.4.2 Plano Frontal ou de Frente

Definição 7.4.2 *Um plano* $\underline{\alpha}$ *que é paralelo ou coincidente com plano* $\underline{\mathrm{PV}}$*, será denominado* **plano frontal ou de frente***.*

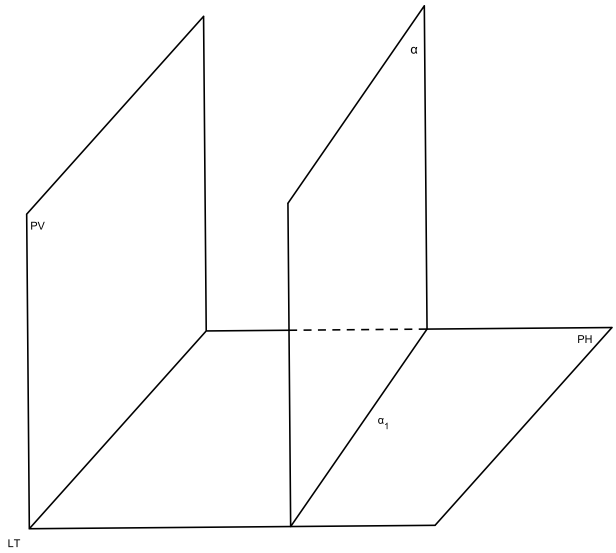


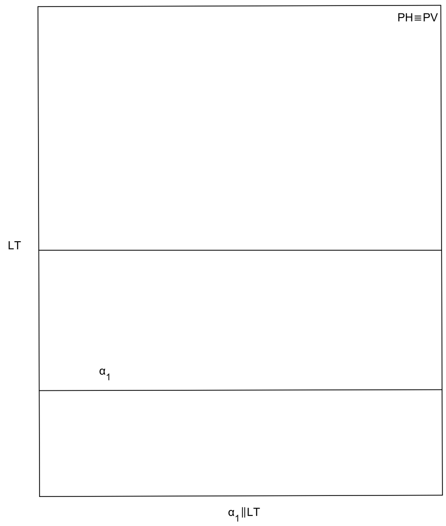
Observação 7.4.2

1. *Se* $\underline{\alpha}$ *é um plano frontal, então seu traço com o plano* $\underline{\mathrm{PV}}$*, será vazio, excetuando-se o caso em que o plano* $\underline{\alpha}$ *for o plano* $\underline{\mathrm{PV}}$*.*

2. *Observemos que* $\underline{\alpha}$ *é um plano frontal se, e somente se, (veja a figura abaixo)*

$$\alpha_1 \parallel \mathrm{LT}\,.$$

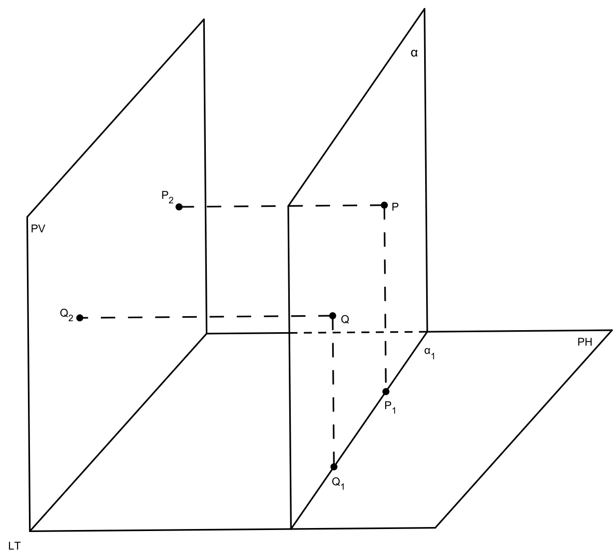


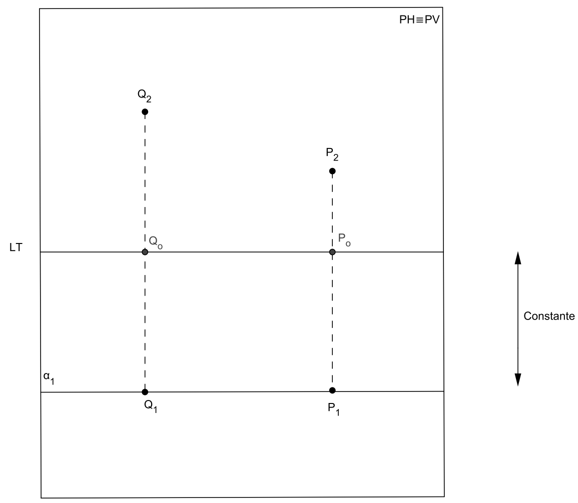


3. *Se* $\underline{\alpha}$ *é um plano frontal e então*

$$P \doteq (P_1\,, P_2)\,, Q \doteq (Q_1\,, Q_2) \in \alpha\,, \quad \textit{então} \quad P_1P_o = Q_1Q_o\,,$$

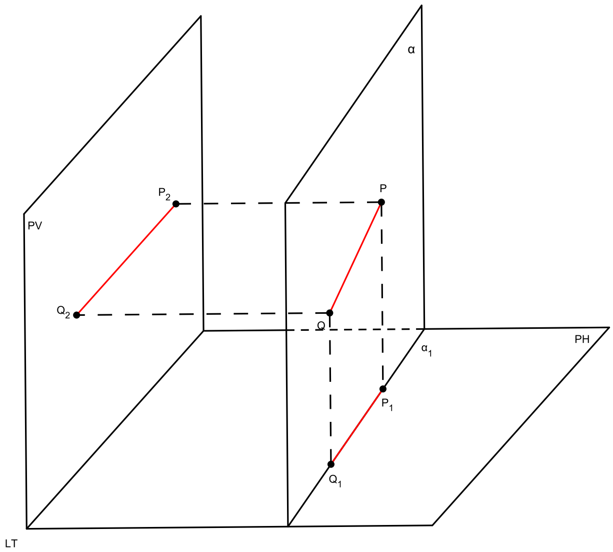
ou seja, todo ponto de um plano frontal tem afastamento constante (veja a figura abaixo).

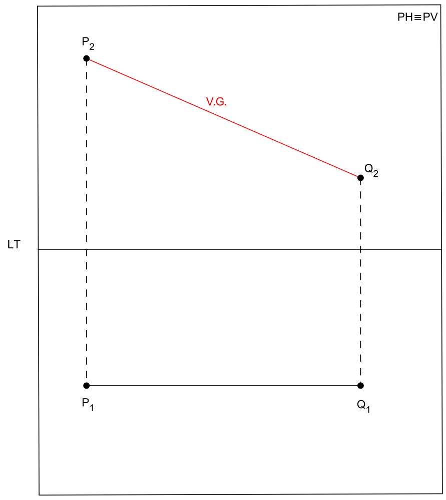




4. *Qualquer região contida num plano frontal terá sua projeção ortogonal no plano* <u>PV</u> *em* <u>V.G.</u> *e sua projeção ortogonal no plano* <u>PH</u> *estará contida no traço do plano*

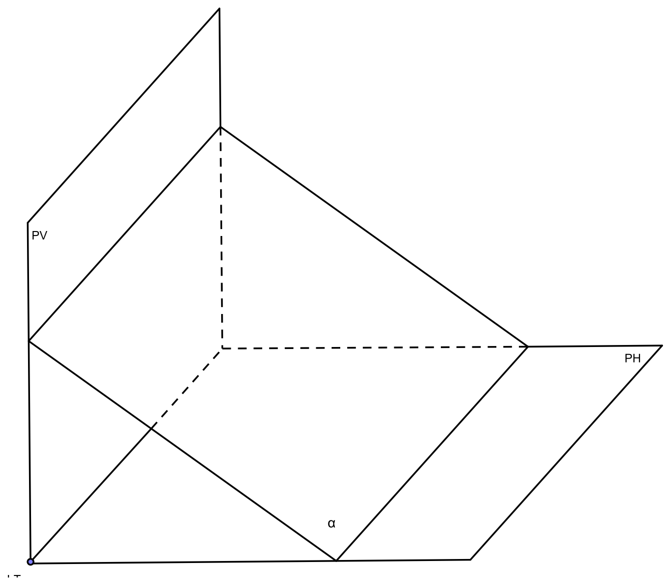
$\underline{\alpha}$ no plano $\underline{\text{PH}}$, isto é, contida na reta $\underline{\alpha_1}$ (veja a figura abaixo).





7.4.3 Plano Fronto-Horizontal ou Paralelo a Linha de Terra

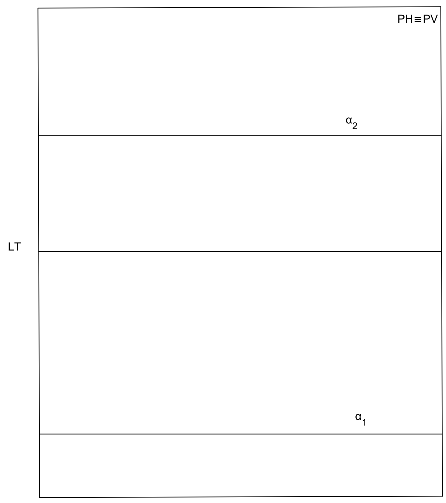
Definição 7.4.3 *Um plano $\underline{\alpha}$ que é paralelo à linha de terra $\underline{\text{LT}}$, será denominado* **<u>plano fronto-horizontal ou paralelo à LT</u>**.



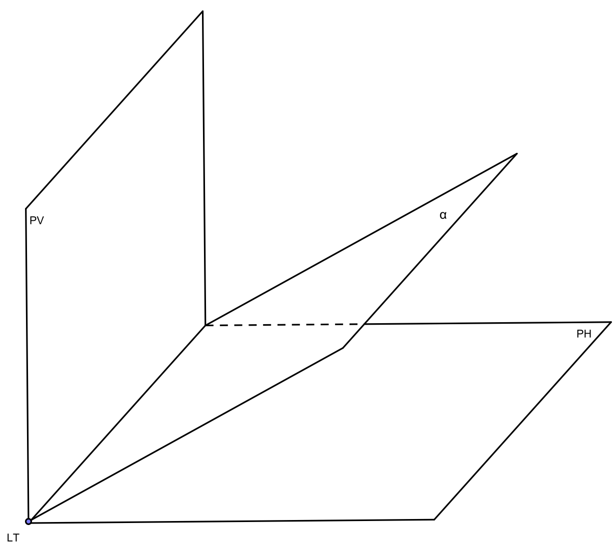
Observação 7.4.3

1. *Observemos que um plano* $\underline{\alpha}$ *é um plano fronto-horizontal se, e somente se, seus traços com os planos* $\underline{\text{PH}}$ *e* $\underline{\text{PV}}$ *são retas paralelas a linha de terra* $\underline{\text{LT}}$, *isto é, (veja a figura abaixo)*

$$\alpha_1\,,\alpha_2 \parallel \text{LT}\,.$$

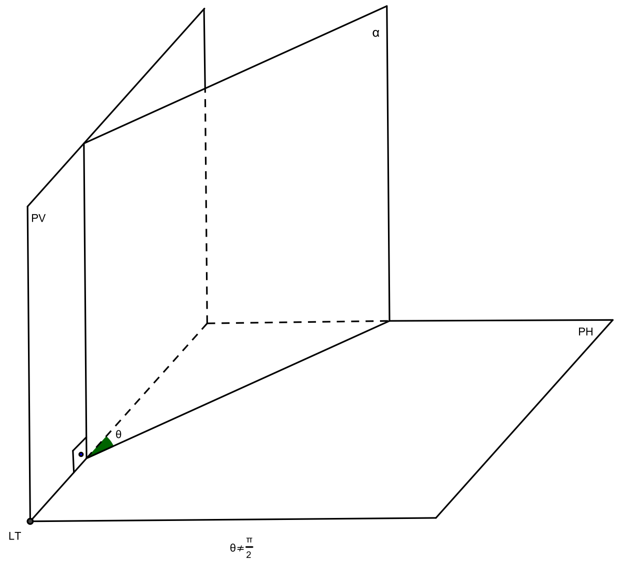


2. *Um plano* $\underline{\alpha}$ *que contém a linha de terra* $\underline{\text{LT}}$ *e não é coincidente com os planos* $\underline{\text{PH}}$ *e* $\underline{\text{PV}}$ *será um plano fronto-horizontal (veja a figura abaixo).*



7.4.4 Plano Vertical

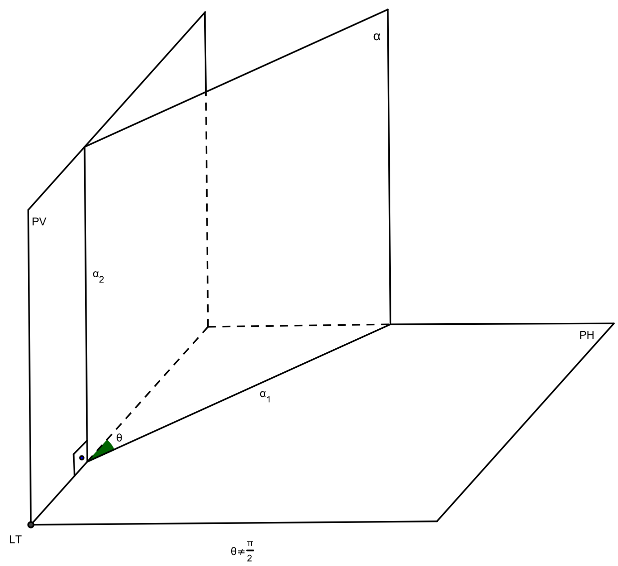
Definição 7.4.4 *Um plano* $\underline{\alpha}$ *que é perpendicular ao plano* <u>PH</u> *e não forma ângulo reto com o plano* <u>PV</u>*, será denominado* **<u>plano vertical</u>**.

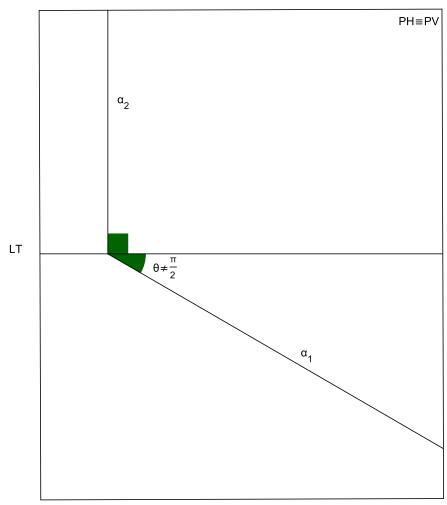


Observação 7.4.4

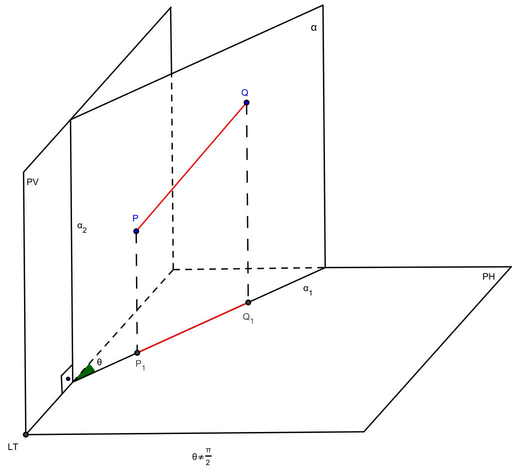
1. *Observemos que um plano* $\underline{\alpha}$ *é um plano vertical se, e somente se, seu traço com o plano* <u>PV</u> *é perpendicular à linha de terra* LT *e seu traço com o plano* <u>PH</u> *não é uma reta perpendicular à linha de terra* <u>LT</u>*, isto é, (veja a figura abaixo)*

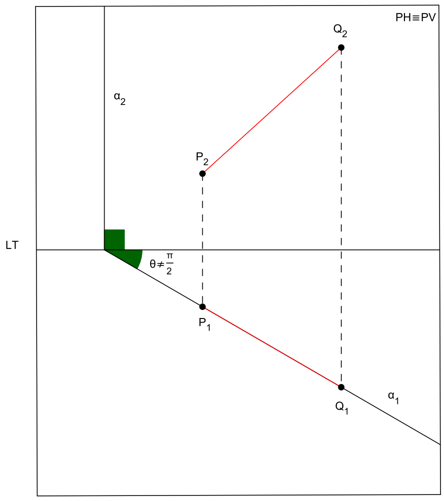
$$\alpha_2 \perp \mathrm{LT} \quad e \quad \alpha_1 \not\perp \mathrm{LT}\,.$$





2. *Se α é um plano vertical, então qualquer região contida no plano α terá sua projeção ortogonal no plano PH contida no traço do plano α no plano PH, isto é, contida na reta α_1 (veja a figura abaixo).*

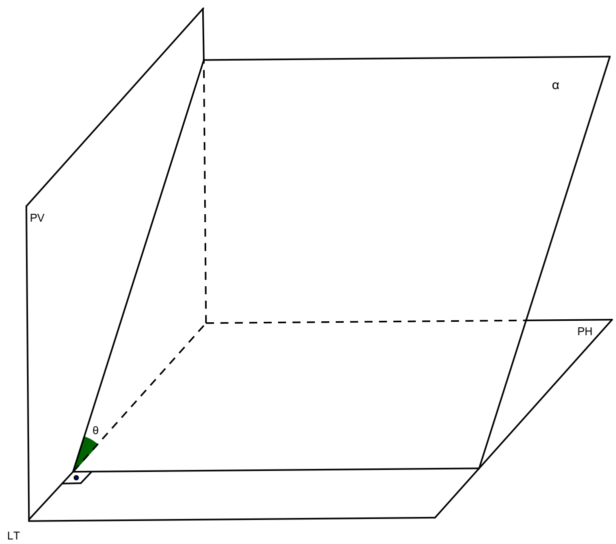




3. *A medida do ângulo, que denotaremos por θ, que o plano vertical α faz com o plano PV, é igual a medida do ângulo que o traço do plano α, com o plano PH, faz com a linha de terra LT, isto é, que a reta α_1 faz com a reta LT (veja a figura acima).*

7.4.5 Plano de Topo

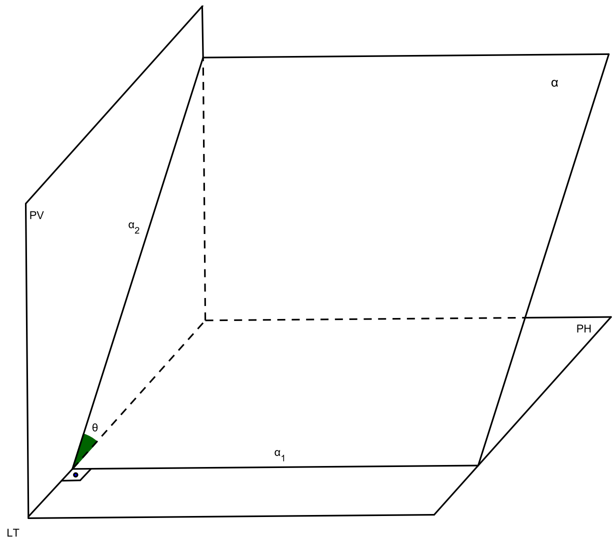
Definição 7.4.5 *Um plano α que é perpendicular ao plano PV e não forma ângulo reto com o plano PH, será denominado* **plano de topo**.

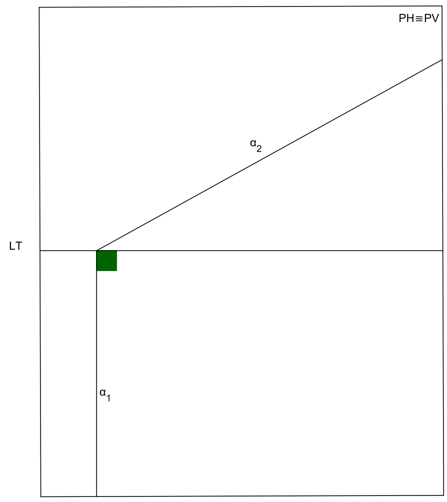


Observação 7.4.5

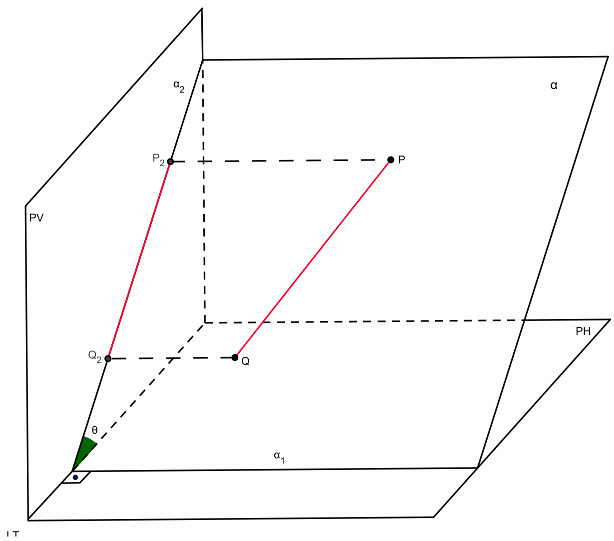
1. *Observemos que um plano* $\underline{\alpha}$ *é um plano de topo se, e somente se, seu traço, com o plano* $\underline{\mathsf{PH}}$*, é perpendicular à linha de terra* $\underline{\mathsf{LT}}$ *e seu traço, com o plano* $\underline{\mathsf{PV}}$*, não é uma reta perpendicular à linha de terra* $\underline{\mathsf{LT}}$ *(veja a figura abaixo), isto é,*

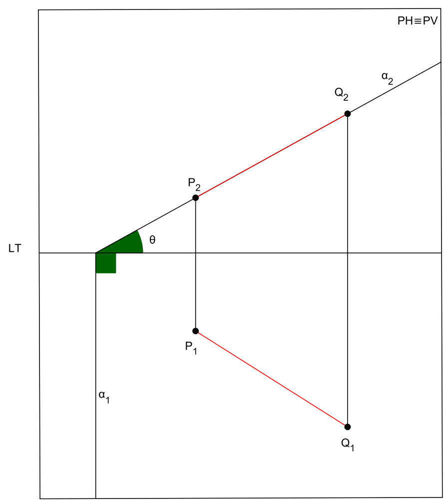
$$\alpha_1 \perp \mathsf{LT} \quad e \quad \alpha_2 \not\perp \mathsf{LT}.$$





2. *Se* $\underline{\alpha}$ *é um plano de topo, então qualquer região contida no plano* $\underline{\alpha}$ *terá sua projeção ortogonal no plano* $\underline{\mathsf{PV}}$*, contida no traço do plano* $\underline{\alpha}$*, no plano* $\underline{\mathsf{PV}}$*, isto é, contida na reta* $\underline{\alpha_2}$ *(veja a figura abaixo).*

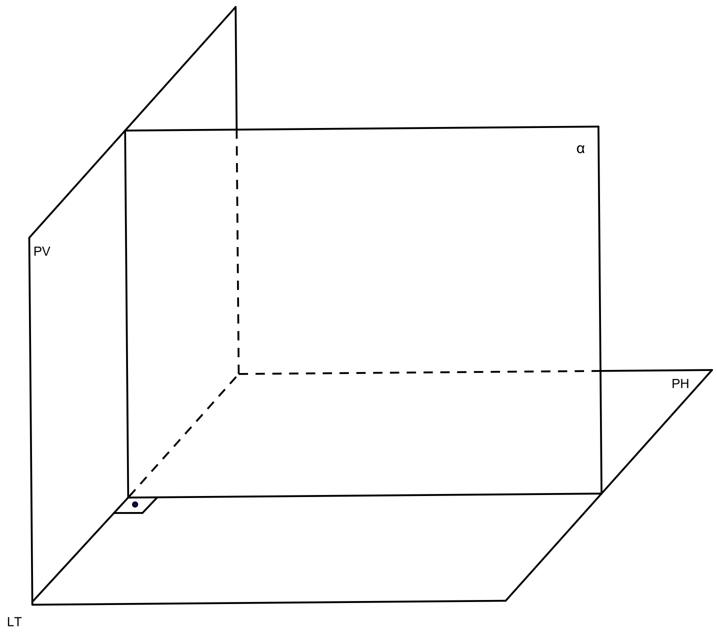




3. *A medida do ângulo, que denotaremos por* $\underline{\theta}$*, que o plano vertical* $\underline{\alpha}$ *faz com o plano* $\underline{\mathsf{PH}}$ *é igual a medida do ângulo que o traço do plano* $\underline{\alpha}$*, com o plano* $\underline{\mathsf{PV}}$*, faz com a linha de terra* $\underline{\mathsf{LT}}$*, isto é, que a reta* $\underline{\alpha_2}$ *faz com a reta* $\underline{\mathsf{LT}}$ *(veja a figura acima).*

7.4.6 Plano de Perfil

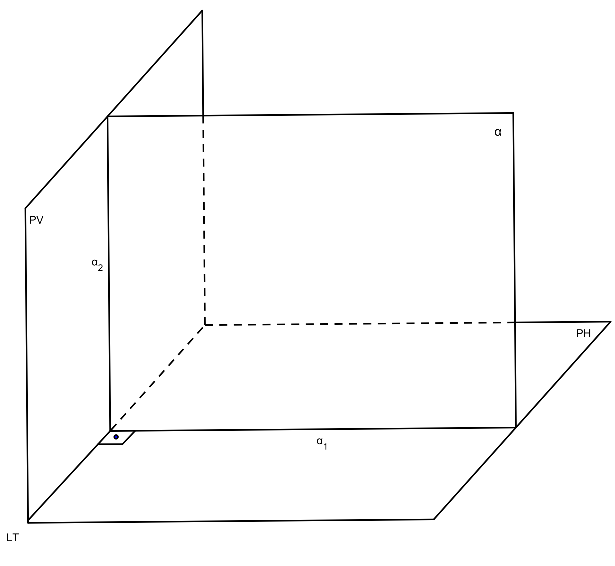
Definição 7.4.6 *Um plano $\underline{\alpha}$ que é perpendicular a linha de terra $\underline{\mathsf{LT}}$ será denominado* **plano de perfil**.

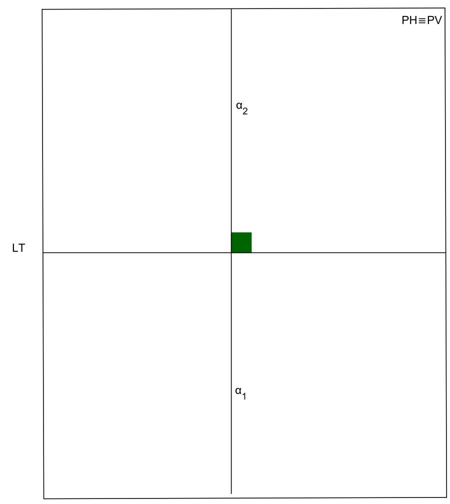


Observação 7.4.6

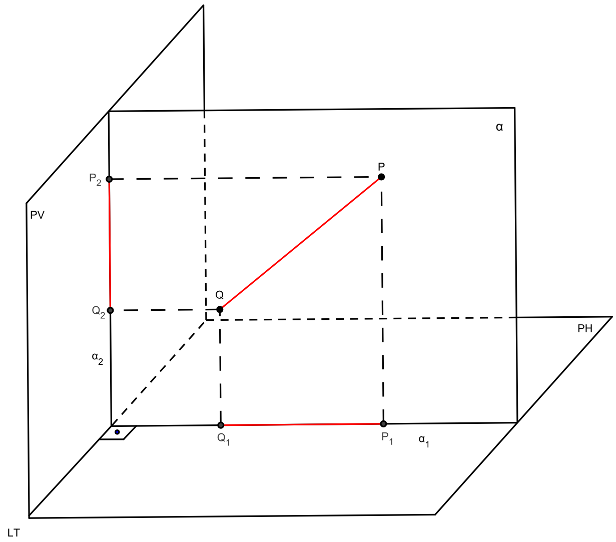
1. *Observemos que um plano $\underline{\alpha}$ é um plano de perfil se, e somente se, seus traços, com o plano $\underline{\mathsf{PH}}$ e com o plano $\underline{\mathsf{PV}}$, são perpendiculares à linha de terra $\underline{\mathsf{LT}}$ (veja a figura abaixo), isto é,*

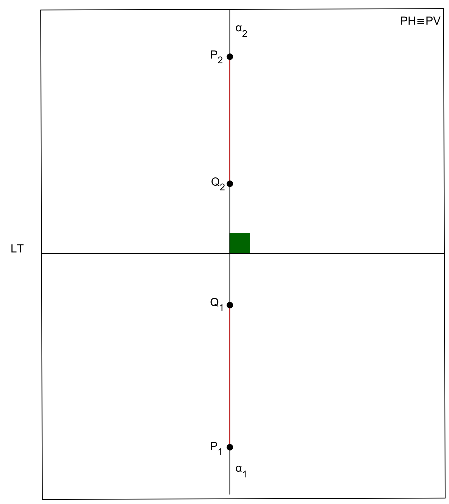
$$\alpha_1 \perp \mathsf{LT} \quad e \quad \alpha_2 \perp \mathsf{LT}.$$





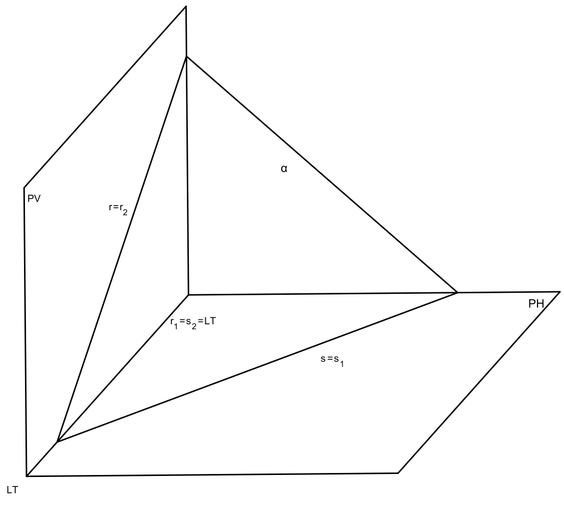
2. *Toda região contida num plano de perfil $\underline{\alpha}$ tem suas projeções ortogonais nos planos PH e PV, contidas nos traços do plano $\underline{\alpha}$ com os planos PH e PV, isto é, contidas nas retas $\underline{\alpha_1}$ e $\underline{\alpha_2}$, respectivamente (veja a figura abaixo).*





7.4.7 Plano Qualquer

Definição 7.4.7 *Um plano $\underline{\alpha}$ que não é de nenhum dos tipos acima será denominado* **plano qualquer**.

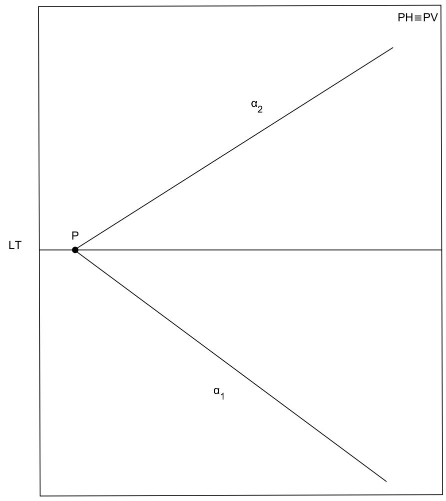


Observação 7.4.7

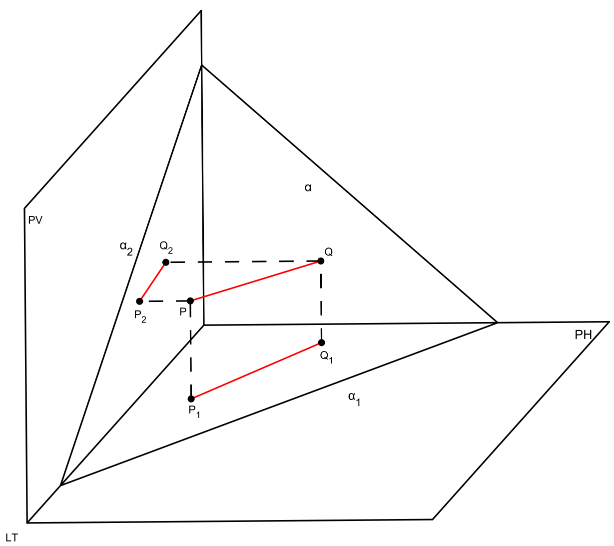
1. *Observemos que um plano $\underline{\alpha}$ é um plano qualquer se, e somente se, seus traços com o plano PH e com o plano PV, são retas concorrentes com a linha de terra*

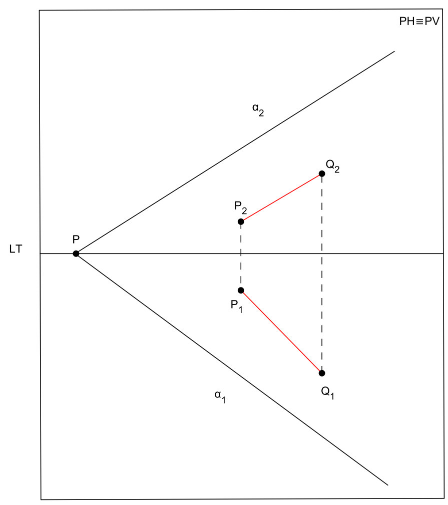
LT e nenhuma delas será perpendicular à linha de terra LT (veja a figura abaixo), isto é,

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \mathrm{LT} = \{P\}, \quad \alpha_1 \not\perp \mathrm{LT} \quad e \quad \alpha_2 \not\perp \mathrm{LT}.$$



2. *Se uma região está contida num plano α que é um plano qualquer, então suas projeções ortogonais nos planos PH e PV, não pertencerão aos traços do plano α com os planos PH e PV, respectivamente (veja a figura abaixo).*





A seguir trataremos de questões relacionadas com elementos do espaço, dados em épura, petencerem ou estarem contidos em um plano, também dado em épura.

Começaremos trantando do problema:

7.5 Reta Contida em um Plano

Lembremos que uma reta $\underline{r}$ estará contida num plano $\underline{\alpha}$ se, e somente se, dois pontos distintos da reta $\underline{r}$ pertencem ao plano $\underline{\alpha}$

Iniciamente, iremos dividir o estudo de saber se uma reta está contida em um plano em duas categorias de planos, por meio da propriedade:

$\underline{(\mathcal{P})}$: Se uma região $\underline{\mathcal{F}}$ está contida no plano $\underline{\alpha}$, então pelo menos umas das projeções ortogonais de $\underline{\mathcal{F}}$, nos planos $\underline{PH}$ ou $\underline{PV}$ (isto é, $\underline{\mathcal{F}_1}$ ou $\underline{\mathcal{F}_2}$), deverá estar contida num dos traços do plano $\underline{\alpha}$ com os planos $\underline{PH}$ ou $\underline{PV}$ (isto é, em $\underline{\alpha_1}$ ou $\underline{\alpha_2}$), respectivamente, ou seja,

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \alpha_1 \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}_2 \subseteq \alpha_1.$$

Exercício 7.5.1 *Planos horizontais, frontais, verticais, de topo, de perfil teêm a propriedade $(\mathcal{P})$, isto é, planos que são ortogonais ao plano $\underline{PH}$ ou ao plano $\underline{PV}$.*

Planos que não são ortogonais ao plano $\underline{PH}$ ou ao plano $\underline{PV}$, **não** *teêm a propriedade $\underline{(\mathcal{P})}$ (por exemplo, planos fronto-horizontais ou planos quaisquer).*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Com isto temos a seguinte classificação dos planos do espaço:

Definição 7.5.1

Grupo S: *todos os planos que satisfazem a propriedade $\underline{\mathcal{P}}$.*

Grupo N: *todos os planos que não satisfazem a propriedade $\underline{\mathcal{P}}$.*

Como consequência imediata da Definição (7.5.1) e do Exercício (7.5.1) acima, temos o:

Exercício 7.5.2 *Planos que são ortogonais ao plano $\underline{PH}$ ou ao plano $\underline{PV}$, pertencem ao Grupo $\underline{S}$.*

Planos fronto-horizontais ou planos quaisquer pertencem ao Grupo $\underline{N}$.

Observação 7.5.1 *Consideremos uma reta $\underline{r}$ e um plano $\underline{\alpha}$.*

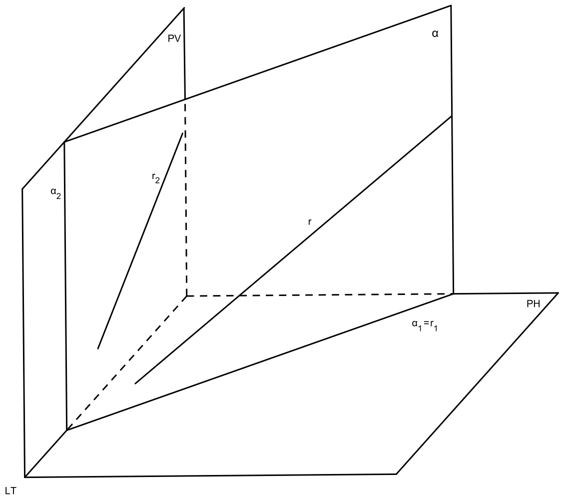
Para saber se reta $\underline{r}$ está contida no plnao $\underline{\alpha}$ dividiremos o problema em dois casos:

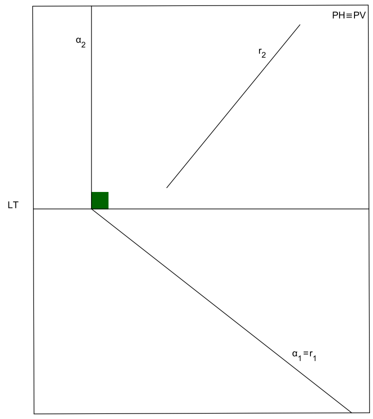
1. **1.o caso:** *o plano $\underline{\alpha}$ é um elemento do Grupo $\underline{S}$.*

   Neste caso, basta verificar se a projeção ortogonal da reta $\underline{r}$, no plano $\underline{PH}$, ou no plano $\underline{PV}$, pertence a um dos traços do $\underline{\alpha}$, no plano $\underline{PH}$, ou no plano $\underline{PV}$, respectivamente, ou seja, é necessário e suficiente que

   $$r_1 \subseteq \alpha_1 \quad ou \quad r_2 \subseteq \alpha_2\,.$$

Na figura abaixo, o plano $\underline{\alpha}$ *é um plano vertical e a reta* $\underline{r}$ *está contida no plano* $\underline{\alpha}$.





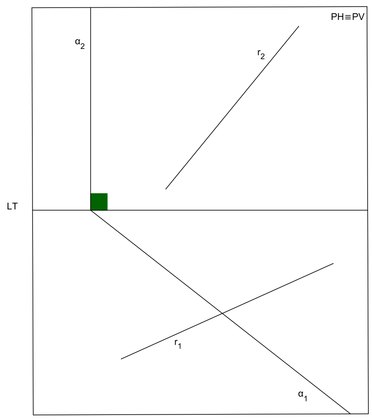
2. **2.o caso:** *o plano* $\underline{\alpha}$ *é um elemento do Grupo* $\underline{\mathrm{N}}$.

   Neste caso, como a $\underline{r}$ *está contida num plano* $\underline{\alpha}$, *segue que a reta* $\underline{r}$ *deverá ser concorrente, paralela ou coincidente, com uma das retas do plano* $\underline{\alpha}$.

   Reciprocamente, se a reta $\underline{r}$ *é concorrente com duas retas que estão contidas no plano* $\underline{\alpha}$, *ou a reta* $\underline{r}$ *é paralela a uma reta contida no plano* $\underline{\alpha}$ *e é concorrente a uma retas que está contida no plano* $\underline{\alpha}$, *então a reta* $\underline{r}$ *estará contida num plano* $\underline{\alpha}$.

Temos o seguinte exemplo importante:

Exercício 7.5.3 *Suponhamos que* $\underline{\alpha}$ *e* $\underline{r}$ *uma reta dados em épura pela figura abaixo.*



Encontrar o ponto $\mathrm{X} \in \mathrm{r} \cap \alpha$, *se existir.*

Resolução:

Observemos que o plano $\underline{\alpha}$ é um plano vertical (ou seja, do Grupo $\underline{\mathrm{S}}$) e a reta $\underline{r}$ não é uma reta de perfil.

Assim temos que

$$X \doteq (X_1\,, X_2) \in r \quad \text{se, e somente se,} \quad X_1 \in r_1 \quad \text{e} \quad X_2 \in r_2 \tag{7.5}$$

e

$$X \in \alpha \quad \text{se, e somente se,} \quad X_1 \in \alpha_1\,. \tag{7.6}$$

Logo, de (7.5) e (7.6), segue que

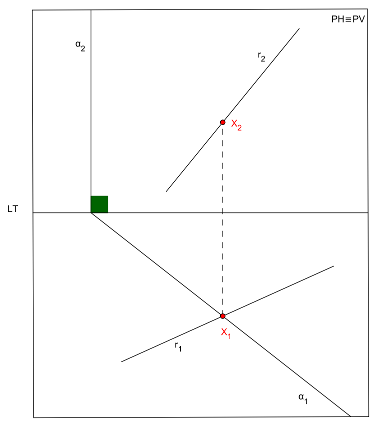
$$X \in r \cap \alpha \quad \text{se, somente se,} \quad X_1 \in r_1 \cap \alpha_1 \quad \text{e} \quad X_2 \in r_2\,,$$

com os pontos $\underline{X_1}$ e $\underline{X_2}$ pertencentes a uma mesma linha de chamada $\underline{LC}$.

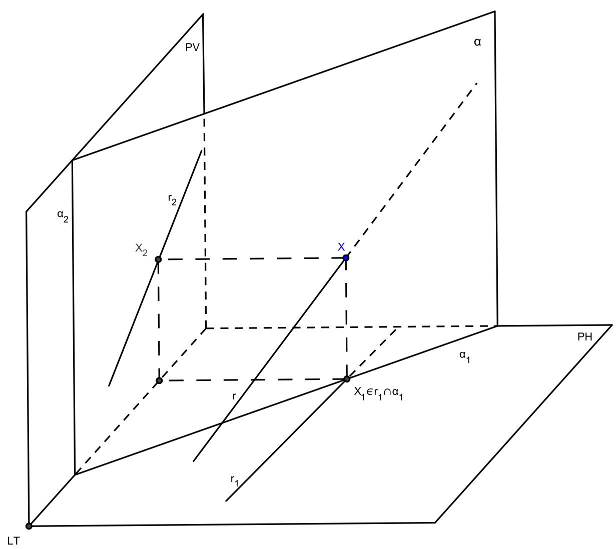
Portanto, basta encontrar a interseção

$$\{X_1\} = r_1 \cap \alpha_1$$

e, por esse ponto, traçar uma reta perpendicular à $\underline{LT}$, que encontrará a reta $\underline{r_2}$ em um ponto, que denotaremos por $\underline{X_2}$ (veja a figura abaixo).

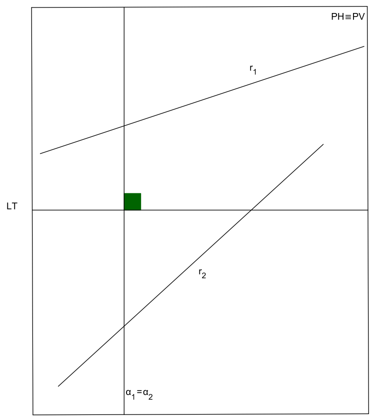


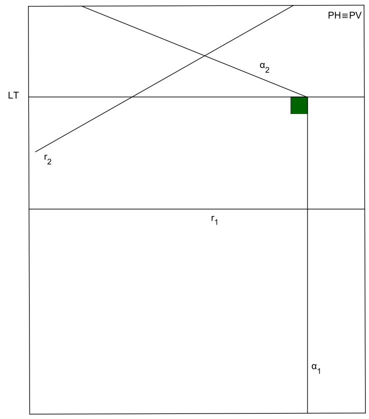
Observação 7.5.2 *No espaço teremos a seguinte configuração geométrica*



Podemos aplicar esta técnica para o seguinte exercício resolvido:

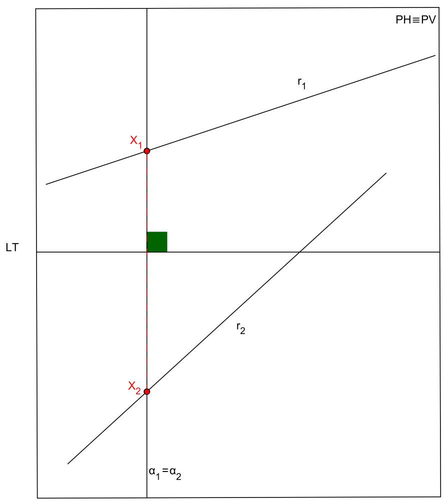
Exercício 7.5.4 *Suponhamos que* $\underline{\alpha}$ *e* $\underline{r}$ *uma reta são dados, em épura, pelas figuras abaixo.*

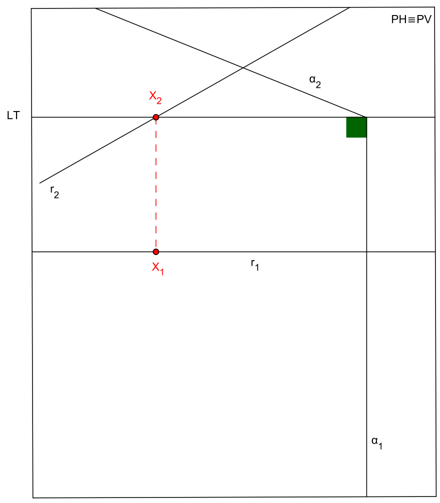




Encontrar, em cada um dos casos, o ponto $X \in r \cap \alpha$.

<u>**Resolução:**</u>

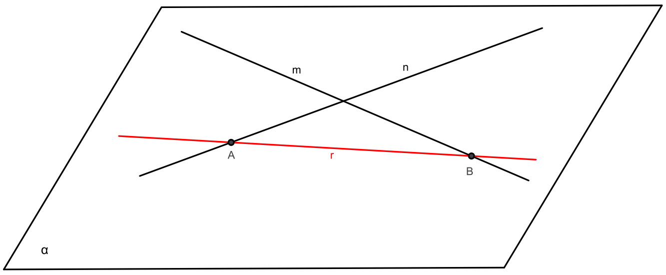




A seguir faremos um estudo detalhado para saber quando um a reta $\underline{r}$ está contida num plano $\underline{\alpha}$ dependendo de como o plano $\underline{\alpha}$ é dado.

Observação 7.5.3

(a) *Suponhamos que o plano* $\underline{\alpha}$ *é dado por duas reta concorrentes, que denotaremos* *por* $\underline{m}$ *e* $\underline{n}$ *(veja a figura abaixo).*



Observemos que

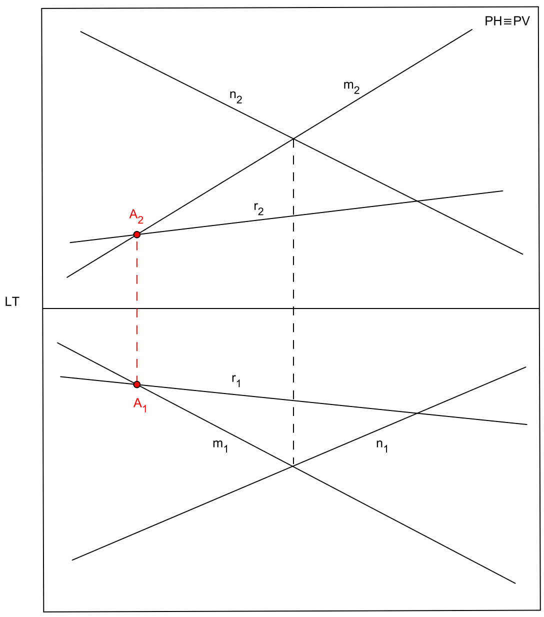
$$A \in r \cap n \quad e \quad B \in r \cap m$$

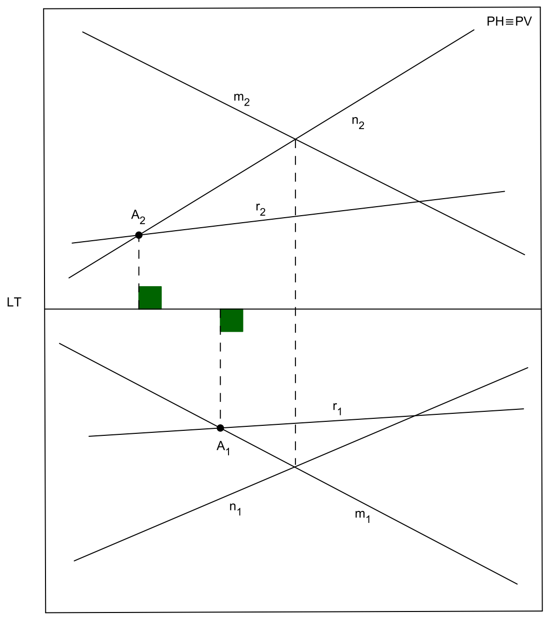
(veja a figura acima) se, e somente se,

$$r \subseteq \alpha\,, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \begin{cases} A \in r \\ A \in n \end{cases}, & \text{então,} \quad \begin{cases} A_i \in r_i \\ A_i \in n_i \end{cases}, \quad \text{para } i \in \{1\,,2\} \\ \\ \begin{cases} B \in r \\ B \in m \end{cases}, & \text{então,} \quad \begin{cases} B_i \in r_i \\ B_i \in m_i \end{cases}, \quad \text{para } i \in \{1\,,2\} \end{cases},$$

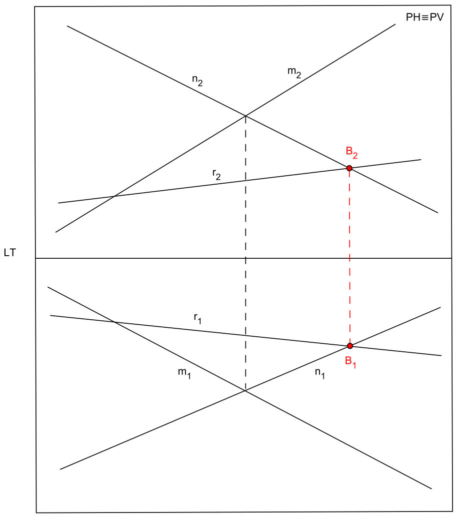
logo, em épura, a reta $\underline{r}$ *estará contida em* $\underline{\alpha}$ *se, e somente se:*

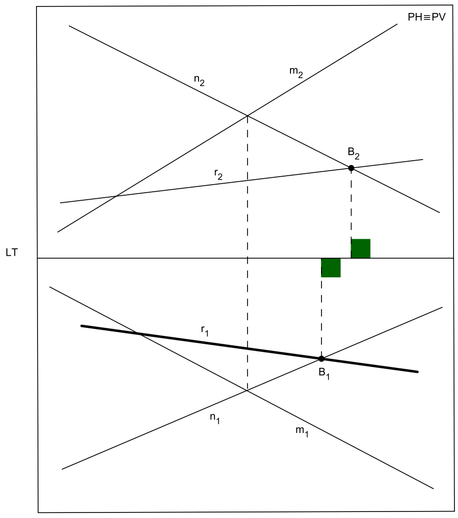
(a_1) *se o ponto* $\underline{A_1}$, *for o ponto de interseção da reta* $\underline{r_1}$ *com a reta* $\underline{m_1}$, *e o ponto* $\underline{A_2}$, *for a interseção da reta* $\underline{r_2}$ *com a reta* $\underline{m_2}$, *então os pontos* $\underline{A_1}$ *e* $\underline{A_2}$ *deverão estar em uma mesma linha de chamada (na figura abaixo à esquerda* $A \in r \cap m$ *e na figura abaixo à direira* $A \notin r \cap m$*).*





(a_2) *de modo semelhante, se o ponto* $\underline{B_1}$ *for o ponto de interseção da reta* $\underline{r_1}$ *com a reta* $\underline{n_1}$*, e o ponto* $\underline{B_2}$ *for a interseção da reta* $\underline{r_2}$ *com a reta* $\underline{n_2}$*, então os pontos* $\underline{B_1}$ *e* $\underline{B_2}$ *deverão estar em uma mesma linha de chamada (na figura abaixo à esquerda* $B \in r \cap n$ *e na figura abaixo à direira* $B \notin r \cap n$*).*





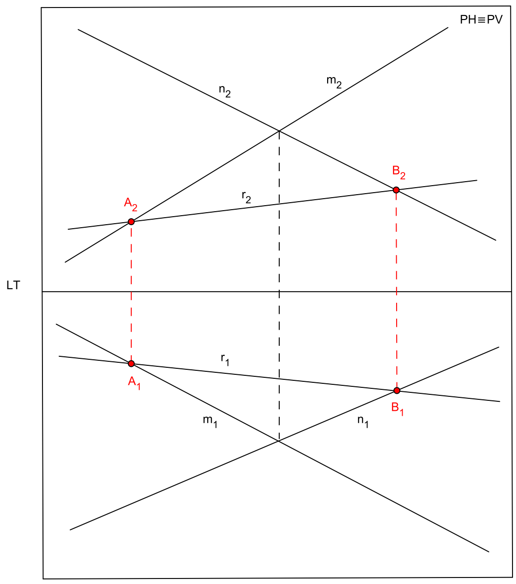
Conclusão: *Logo, uma reta* $\underline{r}$ *estará contida no plano* $\underline{\alpha}$*, que é dado por duas reta* $\underline{m}$ *e* $\underline{n}$ *concorrentes, se, e somente, de* (a_1) *e* (a_2) *acima, que*

$$A_i \in r_i \cap m_i\,, \quad \textit{para} \quad i \in \{1\,,2\}\,,$$

os pontos $\underline{A_1}$ *e* $\underline{A_2}$ *pertecem à uma mesma linha de chamada* $\underline{LC}$*,*

$$B_j \in r_j \cap m_j\,, \quad \textit{para} \quad j \in \{1\,,2\}$$

e os pontos $\underline{B_1}$ *e* $\underline{B_2}$ *pertecem à uma mesma linha de chamada* $\underline{LC}$ *(veja a figura abaixo).*



Índice Remissivo