Notas de Aula de SMA143 - Introdução à Teoria da Medida

Wagner Nunes
Departamento de Matemática
ICMC – USP

3 de julho de 2015

Sumário

1 Teoria dos Conjuntos **7**

1.1 Notações e Definições Básicas 7
1.2 Álgebra e σ-Álgebras 12
1.3 Axioma da Escolha e Produto Cartesiano Infinito 17
1.4 Conjuntos Enumeráveis e Não Enumeráveis 18
1.5 Relações de Equivalência 26
1.6 Conjuntos Parcialmente e Totalmente Ordenados 29
1.7 Boa Ordenação e Enumerabilidade 31

2 Os Números Reais **35**

2.1 Aximas para os Números Reais 35
2.2 Números Naturais e Racionais 38
2.3 Números Reais Estendidos 43
2.4 Sequências de Números Reais 44
2.5 Conjuntos Abertos, Fechados em $\mathbb{R}$ 49
2.6 Funções Contínuas 65
2.7 Conjunto de Borel 72

3 Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ **77**

3.1 Introdução 77
3.2 Medida Exterior em $\mathbb{R}$ 78
3.3 Conjuntos Mensuráveis e a Medida de Lebesgue 87
3.4 Conjunto Não Lebesgue Mensurável 103
3.5 Funções Mensuráveis 109
3.6 Terceiro Princípio de Littlewood 128

4 A Integral de Lebesgue **133**

4.1 A Integral de Riemann 133
4.2 Integral de Lebesgue de uma Função Limitada 137
4.3 A Integral de Lebesgue de uma Função Não Negativa 166
4.4 A Integral Geral de Lebesgue 186
4.5 Convergência em Medida 198

5 Diferenciação e Integração **205**
5.1 Diferenciação de Funções Monótonas 206
5.2 Funções de Variação Limitada 223
5.3 Diferenciação da Integral de Lebesgue 229
5.4 Funções Absolutamente Contínuas 239
5.5 Funções Convexas 250

6 Os Espaços L^p **263**
6.1 Os Espaço Vetorial Real Normado L^p 263
6.2 Desigualdade de Hölder e Minkowski 272
6.3 Convergência e Completitude no Espaço Vvetorial Real Normado L^p . . 283
6.4 Funcionais Lineares Limitados em L^p 293

Introdução

Estas notas foram escritas para a disciplinas de Introdução à Teoria da Medida ministrada no IMCM-USPe foram baseadas no livro [HLR].

Alguns tópicos e exemplos foram retirados do livro [RB].

Os capítulos 1. e 2. tratam de elementos básicos que foram estudados nas disciplinas de Elementos de Matemática e Análise.

No capítulo 3. introduximos a medida de Lebesgue na reta e suas aplicações.

A integral de Lebesgue é estuda no capítulo 4. , onde encontramos a comparação da mesma com a integral de Riemann, assim como o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, o Lema de Fatou, o Teorema da Convergência Monótona e aplicações.

No capítulo 5., encontramos algumas aplicações do resultados obtidos nos capítulos anteriores obtendo-se, entre outros, o Lema de Vitali, as funções de variação limitada, diferenciação de uma integral de Lebesgue, que depende de um parâmetro, a continuidade absoluta, as funções convexas e aplicações destas.

No capítulo 6., tratamos dos espaços L^p, a deigualdade de Hölder, entre outros, e suas propriedades.

Capítulo 1

Teoria dos Conjuntos

1.1 Notações e Definições Básicas

Temos as seguinte notações e definições que serão utilizadas ao longo destas notas:

- $A, B, C, \cdots$: denotarão conjuntos.
- $\emptyset$: denotará o conjunto vazio.
- Se X é um conjunto, denotaremos por $\mathscr{P}(X)$, o conjunto formado por todos os subconjuntos de X, ou seja,

$$\mathscr{P}(X) \doteq \{A\,;\, A \subseteq X\}.$$

- $a, b, c, \cdots$: denotarão os elementos de um conjunto;
- $\setminus$: denotará a diferença entre conjuntos, isto é, se $A, B \subseteq X$, teremos:

$$A \setminus B \doteq \{a \in A\,;\, a \notin B\}.$$

  Notação do Royden para diferença de conjuntos: $A \sim B$;

- Se $A \subseteq X$, denotaremos por A^c o conjunto

$$A^c \doteq \{x \in X;\, x \notin A\}$$

  denominado conjunto complementar do conjunto A em X;

  Notação do Royden para diferença de conjuntos: $\tilde{A}$;

- Se A e B são conjuntos, a reunião dos conjuntos A e B, que denotaremos por $A \cup B$, será o conjunto

$$A \cup B \doteq \{x\,;\, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

- Se A e B são subconjuntos do conjunto X, a interseção dos conjuntos A e B, que denotaremos por $A \cap B$, será o conjunto
$$A \cap B \doteq \{x\,;\, x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

- Se A e B são subconjuntos de X, escreveremos $A \subseteq B$, se para cada $a \in A$, temos que $a \in B$, neste caso diremos que o conjunto A está contido no conjunto B.

- Sejam A e B subsconjuntos de X, denotaremos por $A \triangle B$ o conjunto
$$A \triangle B \doteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,,$$
que será denominado diferença simétrica dos conjuntos A e B .

- Diremos que os conjuntos A e B são disjuntos se
$$A \cap B = \emptyset\,.$$

- Se $A_i \subseteq X$, para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos a reunião enumerável dos conjuntos A_i, para $i \in \mathbb{N}$, que será indicada por $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, como sendo o conjunto
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \doteq \{x \in X\,;\, x \in A_i \text{ para algum } i \in \mathbb{N}\}\,.$$

- Se $A_i \subseteq X$, para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos a interseção enumerável dos conjuntos A_i, para $i \in \mathbb{N}$, denotada por $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, como sendo o conjunto
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \doteq \{x \in X : x \in A_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}.$$

- Diremos que uma coleção $\mathscr{C}$ formado por conjuntos é, dois a dois disjunta, se quaisquer dois conjuntos da coleção são disjuntos;

- Seja Λ é um conjunto não vazio e, para cada $\lambda \in \Lambda$, consideremos $A_\lambda \subseteq X$. Definimos a reunião dos conjuntos A_λ, para $\lambda \in \Lambda$, denotada por $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ como sendo
$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \doteq \{x \in X\,;\, x \in A_\lambda \text{ para algum } \lambda \in \Lambda\}\,;$$

- Sja e Λ é um conjunto não vazio e, para cada $\lambda \in \Lambda$, consideremos $A_\lambda \subseteq X$. Definimos a interseção dos conjuntos A_λ, para $\lambda \in \Lambda$, denotada por $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A$ como sendo
$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A \doteq \{x \in X\,;\, x \in A \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\}\,;$$

- $\mathbb{N}$: denotará o conjunto formado pelos números naturais, isto é,

$$\mathbb{N} \doteq \{1\,,2\,,\cdots\}\,.$$

- $\mathbb{Z}$: denotará o conjunto formado pelos números inteiros, isto é,

$$\mathbb{Z} \doteq \{\cdots\,,-1\,,0\,,1,\cdots\}\,.$$

- $\mathbb{Q}$: denotará o conjunto formado pelos números racionais, isto é,

$$\mathbb{Q} \doteq \left\{\frac{p}{q}\,;\,p\,,q \in \mathbb{Z} \text{ com } \; q \neq 0\right\}\,,$$

  ou ainda , os números que possuem representação decimal finita, infinita e periódica;

- $\mathbb{I}$: denotará o conjunto formado pelos números irracionais, isto é, números que possuem representação infinita e não periódica;

- $\mathbb{R}$: denotará o conjunto formado pelos números reias, isto é, os números que possuem representação decimal finita, infinita e periódica ou infinita e não periódica, ou ainda,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\,.$$

- Se X, Y são conjuntos não vazios, definimos o produto do conjunto X pelo conjunto Y, denotado por $X \times Y$, como sendo o conjunto

$$X \times Y \doteq \{(x\,,y)\,;\,x \in X \text{ e } y \in Y\}\,.$$

- Se $n \in \mathbb{N}$ e X é um conjunto não vazio, o produto di conjunto X por ele mesmo n-vezes, será denotado por X^n , ou seja,

$$X^n \doteq \underbrace{X \times \cdots X}_{n\text{-fatores}}\,.$$

- $f : X \to Y$: denotará uma função definida no conjunto X (denominado domínio da função f), cujo contradomínio é o conjunto Y;

- Se $f : X \to Y$ é uma função, o conjunto imagem da funçaõ f, que denotaremos por $f(X)$, é definido como sendo

$$f(X) \doteq \{f(x) \in Y;\, x \in X\} \subseteq Y\,.$$

- Se $f : X \to Y$ é uma função, o gráfico da função f, que indicaremos por $G(f)$, será

$$G(f) \doteq \{(x\,,f(x))\,;\,x \in X\} \subseteq X \times Y\,.$$

- Se $f : X \to Y$ é uma função e $A \subseteq Y$ então o conjunto $f^{-1}(A) \doteq \{x \in X : f(x) \in A\}$ será denominado de imagem inversa do conjunto A pela função f;

- Sejam $f : X \to Y$ uma função e $A \subseteq X$. Definimos a função restrição da função f ao conjunto A, que será indicada por $f_{|_A}$, como sendo a função $f_{|A} : A \to Y$, que será dada por
$$f_{|_A}(x) \doteq f(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in A\,.$$

- Se $A \subseteq X$, denotaremos por $\mathcal{X}_A : X \to Y$ a função
$$\mathcal{X}_A(x) \doteq \begin{cases} 1\,, & \text{para} \quad x \in A \\ 0\,, & \text{para} \quad x \notin A \end{cases}\,,$$
denominada função característica do conjunto A.

- Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são funções definimos a função $g \circ f : X \to Z$ definida por
$$(g \circ f)(x) \doteq g(f(x))\,, \quad \text{para cada} \quad x \in X\,,$$
denominada **função composta da função g com a função f**.

- Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ são funções tais que
$$g(f(x)) = x\,, \quad \text{para cada} \quad x \in X \quad \text{e} \quad f(g(y)) = y\,, \quad \text{para cada} \quad y \in Y\,,$$
diremos que a função f (ou a função g) é uma **função inversível**.

  Neste caso a função g, será a única com as propriedades acima, e será denominada função inversa associada a função f e denotada por f^{-1};

- a função $f : X \to Y$ será dita **injetora** se para $x, y \in X$, com $x \neq y$, temos que $f(x) \neq f(y)$;

- a função $f : X \to Y$ será dita **sobrejetora**, se para
$$f(X) = Y\,.$$

- a função f será dita **bijetora**, se for injetora e sobrejetora;

- Uma função $f : \mathbb{N} \to X$ será denominada **sequência em X** e indicada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou simplesmente (x_n));

  Notação do Royden para sequência: $\langle x_i \rangle_{i=1}^{\infty}$;

Com as notações e/ou definições acima temos as seguinte propriedades:

Proposição 1.1.1 *Sejam* X, Y *conjuntos não vazios,* A, B, C *subconjuntos de* X, $f : X \to Y$ *função.*

Então valem:

$$A \cup B = B \cup A \quad e \quad A \cap B = B \cap A; \tag{1.1}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad e \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \tag{1.2}$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad e \quad (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C); \tag{1.3}$$

mais geralmente temos:

$$B \cap \left[\bigcup_{A \in \mathscr{C}} A\right] = \bigcup_{A \in \mathscr{C}} (B \cap A) \quad e \quad B \cup \left[\bigcap_{A \in \mathscr{C}} A\right] = \bigcap_{A \in \mathscr{C}} (B \cup A); \tag{1.4}$$

$$A \cup \emptyset = A \quad e \quad A \cap \emptyset = \emptyset; \tag{1.5}$$

$$A \cup X = X \quad e \quad A \cap X = A, \tag{1.6}$$

$$A \cap B \subseteq A, B \quad e \quad A, B \subseteq A \cup B. \tag{1.7}$$

$$A \cap B = A \quad \text{se, e somente se,} \quad A \subseteq B. \tag{1.8}$$

$$A \cup B = A \quad \text{se, e somente se,} \quad B \subseteq A; \tag{1.9}$$

$$\emptyset^c = X \quad e \quad X^c = \emptyset; \tag{1.10}$$

$$(A^c)^c = A, \quad A \cup A^c = X \quad e \quad A \cap A^c = \emptyset; \tag{1.11}$$

$$\text{se} \quad A \subseteq B, \quad \text{então} \quad B^c \subseteq A^c; \tag{1.12}$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad e \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c; \tag{1.13}$$

mais geralmente temos: se Λ *é um conjunto não vazio e para cada* $\lambda \in \Lambda$, $A_\lambda \subseteq X$, *então*

$$\left[\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A\right]^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A^c \quad e \quad \left[\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A\right]^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A^c; \tag{1.14}$$

$$B \setminus A = B \cap A^c; \tag{1.15}$$

a diferença simétrica dos conjuntos A *e* B *é uma reunião disjunta dos conjuntos* A *e* B*, isto é,* $A \cup B = A \triangle B$*, onde* $A \triangle B$ *é uma reunião de dois conjuntos disjuntos*; (1.16)

se Λ *é um conjunto não vazio e para cada* $\lambda \in \Lambda$ *temos que* $A_\lambda \subseteq X$*, teremos:*

$$f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda) \quad e \quad f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda); \tag{1.17}$$

se Γ *é um conjunto não vazio e para cada* $\gamma \in \Gamma$ *temos que* $B_\gamma \subseteq Y$*, teremos:*

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma) \quad e \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma); \tag{1.18}$$

se $A \subseteq X$ *e* $B \subseteq Y$*, teremos:*

$$f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c \;, f\left(f^{-1}(B)\right) \subseteq B \quad e \quad A \subseteq f^{-1}\left(f(A)\right) ; \tag{1.19}$$

Demonstração:

Muitas das propriedades acima são conhecidas como Leis de De Morgan e suas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor.

□

1.2 Álgebra e σ-Álgebras

Começaremos esta seção introduzindo a:

Definição 1.2.1 *Seja* X *um conjunto.*

Diremos que uma coleção $\mathscr{A}$*, formada por subconjuntos de* X*, é uma* **álgebra (ou álgebra de Boolean) em** X*, se os elementos de* $\mathscr{A}$ *satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *se* $A, B \in \mathscr{A}$*, então* **A1**

$$A \cup B \in \mathscr{A} ;$$

2. *Se* $A \in \mathscr{A}$*, então* **A2**

$$A^c \in \mathscr{A} .$$

3. **A3**

$$\emptyset \in \mathscr{A} .$$

Observação 1.2.1

1. *Observemos que se*

$$\mathscr{A} \doteq \mathscr{P}(X) ,$$

então $\mathscr{A}$ *será uma álgebra em* X*.*

A verificação deste fato é imediata.

2. *Se* $\mathscr{A}$ *é uma álgebra em* X *então, segue das leis de De Morgan, que:*

   (a) se $A, B \in \mathscr{C}$*, teremos* **A4**

$$A \cap B \in \mathscr{A} .$$

De fato, pois

$$A \cap B \overset{(1.13) \text{ da Proposição } 1.1.1}{=} (A \cup B)^c \overset{\text{por } 1. \text{ e } 2 \text{ da Definição } 1.2.1}{\in} \mathscr{A}\,.$$

Além disso, é fácil ver que 1. e 2. são equivalentes a 2. e 2a. .

3. *Se $\mathscr{A}$ é uma álgebra em X e $A_1, \cdots A_n \in \mathscr{A}$ então, tomando a união dois a dois, segue, de 1., que*
$$(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \in \mathscr{A}$$
e assim, de 2a., teremos também que
$$(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \in \mathscr{A}\,.$$

Temos a:

Proposição 1.2.1 *Sejam X um conjunto e $\mathscr{C}$ um conjunto formado por subconjuntos de X.*

Então existe uma álgebra $\mathscr{A}$, formada por elementos de X, que contém os elementos de $\mathscr{C}$, que é a menor com esta propriedade, isto é, se $\mathscr{B}$ é uma álgebra formada por elementos de X, que contém os elementos de $\mathscr{C}$, então teremos

$$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}\,.$$

Demonstração:

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto formado por todas as álgebras de X que contém os elementos de $\mathscr{C}$.

Observemos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $\mathscr{P}(X)$ é uma álgebra em X, que contém $\mathscr{C}$, isto é,

$$\mathscr{P}(X) \subseteq \mathcal{F}\,.$$

Seja

$$\mathscr{A} \doteq \bigcap_{\mathscr{B} \in \mathcal{F}} \mathscr{B}\,.$$

Notemos que:

1. se $A\,, B \in \mathscr{A}$, então $A\,, B \in \mathscr{B}$, para cada $\mathscr{B} \in \mathcal{F}$.

   Como $\mathscr{B}$ é uma álgebra em X, segue que
   $$A \cup B \in \mathscr{B}\,,$$
   para cada $\mathscr{B} \in \mathcal{F}$, ou seja,
   $$A \cup B \in \mathscr{A}\,,$$
   ou seja, vale 1. da Definição 1.2.1 .

2. Se $A \in \mathscr{A}$, teremos que $A \in \mathscr{B}$, para cada $\mathscr{B} \in \mathcal{F}$.

   Como $\mathscr{B}$ é uma álgebra em X, segue que
$$A^c \in \mathscr{B},$$
   para cada $\mathscr{B} \in \mathcal{F}$, ou seja,
$$A^c \in \mathscr{A},$$
   ou seja, vale 2. da Definição 1.2.1

3. Finalmente, notemos que, para cada $\mathscr{B} \in \mathcal{F}$, como $\mathscr{B}$ é uma álgebra em X, teremos
$$\emptyset \in \mathscr{B}$$
   logo
$$\emptyset \in \mathscr{A} = \bigcap_{\mathscr{B} \in \mathcal{F}} \mathscr{B},$$

isto é, a coleção $\mathscr{A}$ é uma álgebra em X.

Temos que $\mathscr{A}$ contém os elementos de $\mathscr{C}$, pois cada elemento $\mathscr{B} \in \mathcal{F}$, tem essa propriedade, ou seja
$$\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}.$$

Finalmente se $\mathscr{B}$ é uma álgebra em X de modo que
$$\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A},$$
então $\mathscr{B} \in \mathcal{F}$ e, da definição de $\mathscr{A}$, segue que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, ou seja,
$$\mathscr{B} = \mathscr{A},$$
isto é, $\mathscr{A}$ é a menor álgebra de X que contém os elementos de $\mathscr{C}$, a finalizando a demonstração.

□

Umm outro resultado interessante é dado pela:

Proposição 1.2.2 *Sejam X um conjunto, $\mathscr{C}$ uma álgebra em X e $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, uma sequência formada por elementos de $\mathscr{C}$.*

Então existe uma sequência $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$, formada por elementos de $\mathscr{C}$, tal que
$$\text{se} \quad n \neq m, \quad \text{teremos:} \quad B_n \cap B_m = \emptyset \quad \text{e} \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$
ou seja, a coleção $\{B_j\,;\, j \in \mathbb{N}\}$ é, dois a dois, disjunta e
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Demonstração:

Com isto podemos supor que $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência formada por elementos distintos de $\mathscr{C}$.

Definamos

$$B_1 \doteq A_1\,, \tag{1.20}$$

e para $n \geq 2$, conisderemos: $$B_n \doteq A_n \setminus [A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}]. \tag{1.21}$$

Como $A_i \in \mathscr{C}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} B_n &\overset{(1.20)}{=} A_n \cap [A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}]^c \\ &\overset{(1.14)}{=} A_n \cap [{A_1}^c \cap \cdots \cap {A_{n-1}}^c] \overset{\text{do item 3. da Observação 1.2.1}}{\in} \mathscr{C}. \end{aligned}$$

Notemos que, para $n\,, m \in \mathbb{N}$, com s $n \neq m$ segue que

$$B_n \cap B_m = \emptyset\,.$$

De fato, para cada $i \in \mathbb{N}$ temos que

$$B_i \subseteq A_i\,.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $m < n$.

Como

$$B_m \subseteq A_m\,, \quad \text{teremos} \quad B_m \cap {A_m}^c = \emptyset \tag{1.22}$$

logo

$$\begin{aligned} B_m \cap B_n &\subseteq A_m \cap B_n \\ &\overset{(1.20)}{=} A_m \cap \{A_n \setminus [A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}]\} \\ &\overset{m<n}{=} A_m \cap [{A_1}^c \cap \cdots \cap \underbrace{{A_m}^c} \cap \cdots \cap {A_{n-1}}^c] \\ &\overset{(1.22)}{=} \emptyset, \end{aligned}$$

mostrando que a afirmação acima é verdadeira.

Afirmamos que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\,.$$

De fato, como $B_i \subseteq A_i$, para cadad $i \in \mathbb{N}$, segue que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\,.$$

Por outro lado, se $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, consideremos $n_o \in \mathbb{N}$, o menor $i \in \mathbb{N}$, tal que $x \in A_i$, isto é,

$$n_o \doteq \min\{i \in \mathbb{N}; x \in A_i\},$$

que existe pois $\{i \in \mathbb{N} : x \in A_i\} \subseteq \mathbb{N}$, que é limitado inferiormente.

Observemos que, da deinição de $n_o \in \mathbb{N}$, teremos que $x \in A_{n_o}$, mas $x \notin A_i$, para cada $i < n_o$.

Em particular, segue que $x \in B_{n_o}$, pois

$$B_{n_o} \overset{(1.21)}{=} A_{n_o} \setminus [A_1 \cup \cdots \cup A_{n_o - 1}] .$$

Assim teremos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j ,$$

completando a demonstração.

□

Podemos agora introduzir a:

Definição 1.2.2 *Seja X um conjunto.*

Diremos que uma coleção $\mathscr{A}$, formada por subconjuntos de X, é uma **σ-álgebra (ou corpo de Borel) em X**, *se os elementos de $\mathscr{A}$ satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *se $A_i \in \mathscr{A}$ para $i \in \mathbb{N}$, deveremos ter:* **SA1**

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A} ; \qquad (1.23)$$

2. *Se $A \in \mathscr{A}$, deveremos ter:* **SA2**

$$A^c \in \mathscr{A} ; \qquad (1.24)$$

3. **SA3**

$$\emptyset \in \mathscr{A} . \qquad (1.25)$$

Observação 1.2.2

1. *Notemos que*

$$\mathscr{A} \doteq \mathscr{P}(X) ,$$

é uma σ-álgebra em X.

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

2. *Se* $\mathscr{A}$ *é uma* σ*-álgebra em* X *então, segue das leis de De Morgan, que:*

   (a) *Se* $A_i \in \mathscr{A}$ *para* $i \in \mathbb{N}$, *deveremos ter* **SA4**

   $$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}\,. \tag{1.26}$$

   A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

   (b) *Além disso, na Definição 1.2.2 e no item acima, pode-se mostrar que 1. e 2. são equivalentes a 2. e 2a. .*

Temos um resultado análogo ao da pPoposição 1.2.1, para σ-álgebras, mais precisamente:

Proposição 1.2.3 *Sejam* X *um conjunto e* $\mathscr{C}$ *uma coleção formada por subconjuntos de* X.

Então existe uma σ*-álgebra* $\mathscr{A}$, *formada por elementos de* X, *que contém os elementos de* $\mathscr{C}$, *que é a menor com esta propriedade, isto é, se* $\mathscr{B}$ *é uma* σ*-álgebra, formada por elementos de* X, *que contém os elementos de* $\mathscr{C}$, *deveremos ter*

$$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}\,.$$

Demonstração:

A demonstração é semelhante a da Proposição 1.2.1 e os detalhes serão deixados como exercício para o leitor.

□

1.3 Axioma da Escolha e Produto Cartesiano Infinito

Temos o seguinte:

Axioma 1.3.1 *(<u>**Axioma da Escolha**</u>) Seja* $\mathscr{C}$ *um conjunto formado por subconjuntos não vazios.*

Então existe uma função $F : \mathscr{C} \to \bigcup_{A \in \mathscr{C}} A$, *tal que para cada* $A \in \mathscr{C}$, *a função* F *associa um único elemento do conjunto* A, *isto é,*

$$F(A) \in A\,.$$

Observação 1.3.1 *A função* F *obtida pelo axioma da escolha será denominada* <u>**função escolha**</u>.

Temos também a:

Definição 1.3.1 *Sejam* Λ *um conjunto não vazio e* $\mathscr{C} \doteq \{X_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$, *onde* X_λ *é um conjunto, para cada* $\lambda \in \Lambda$.

Definimos o **produto cartesiano (ou produto direto)** *dos elementos de* $\mathscr{C}$, *denotado por* $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, *como sendo o conjunto formado pelos elementos da forma* $\{x_\lambda\}$, *para* $\lambda \in \Lambda$.

Se

$$z = \{x_\lambda\} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\,,$$

então o elmento x_λ, *de* z, *será denominado* **λ-ésima coor denada de z**.

Observação 1.3.2

1. *Na Definição 1.3.1 acima, é fácil ver que, se para algum* $\lambda_o \in \Lambda$ *tivermos*

$$X_{\lambda_o} = \emptyset\,, \quad \textit{teremos} \quad \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \emptyset\,.$$

2. *NA situação acima, pode-se mostrar que o axioma da escolha é equivalente a sentença: se* $X_\lambda \neq \emptyset$, *para todo* $\lambda \in \Lambda$, *então deveremos ter*

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset\,.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

1.4 Conjuntos Enumeráveis e Não Enumeráveis

Definição 1.4.1 *Sejam* A *e* B *dois conjuntos.*

Se existir uma função $f : A \to B$ *bijetora, diremos que o conjunto* **A têm a mesma cardinalidade do conjunto B** *e, neste caso escreveremos*

$$A \sim B\,,$$

e será dito que o conjunto A *é equivalente ao conjunto* B.

Neste caso escreveremos

$$\#(A) = \#(B)\,.$$

Com isto temos a:

Proposição 1.4.1 *A relação* $\sim$ *é uma* **relação de equivalência**, *isto é, satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) *é reflexiva, ou seja,*

$$A \sim A\,;$$

(2) *é simétrica, isto é,*

$$\textit{se} \quad A \sim B\,, \qquad \textit{então teremos} \quad B \sim A\,;$$

(3) *é transitiva, ou seja,*

$$\textit{se} \quad A \sim B \quad \textit{e} \quad B \sim C\,, \qquad \textit{então teremos} \quad A \sim C\,.$$

Demonstração:

A demonstração é simples e será deixada como exercício para o leitor.

□

Podemos agora introduzir a:

Definição 1.4.2 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos o conjunto J_n, como sendo*

$$J_n \doteq \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\} \subseteq \mathbb{N}\,.$$

Seja A um subconjunto qualquer. Diremos que:

1. *o conjunto A é* **finito** *se $A \sim J_{n_o}$, para algum $n_o \in \mathbb{N}$.*

   O conjunto vazio é, por definição, finito;

2. *o conjunto A é* **infinito***, se não for finito;*

3. *o conjunto A é* **enumerável** *se*

$$A \sim \mathbb{N}\,;$$

4. *A é* **não enumerável***, se A não for finito e também não for enumerável;*

5. *o conjunto A é* **no máximo enumerável***, se for finito ou enumerável.*

Observação 1.4.1

1. *Notemos que, dois conjuntos finitos A e B, tem a propriedade $A \sim B$ se, e somente se, os conjunto A e B têm o mesmo número de elementos.*

   De fato, pois se $A \sim B$ segue que existe uma aplicação bijetora $f : A \to B$.

   Se o conjunto A tem N_o elementos, como função f é bijetora segue que o conjunto b tmabém terá N_o elementos (pois a cada elemento do conjuto A corresponde um único elemento do conjunto B e reciprocamente, a cada elemento do conjuto B corresponde um único elemento do conjunto A).

   Por outro lado, se os conjunto A e B têm $N_o \in N$ elementos, podemos reescrever-los da seguinte forma:

$$A = \{a_1\,, a_2\,, \cdots\, a_{N_o}\} \quad \textit{e} \quad B = \{b_1\,, b_2\,, \cdots\, b_{N_o}\}\,.$$

Logo a função $f : A \to B$, *dada por*

$$f(a_i) \doteq b_i \,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdot\,,N_o\}\,,$$

será uma função bijetora, logo $A \sim B$.

2. *Para conjuntos infinitos a idéia de ter o mesmo número de elementos tornar-se-á vaga, ou seja, não precisa.*

   Neste contexto a idéia de construir uma correspondência bijetora entre os dois conjuntos deixa a situação um pouco mais clara, como veremos a seguir.

Exemplo 1.4.1 *O conjunto dos inteiros* $\mathbb{Z}$ *é enumerável.*

Resolução:

Consideremos a seguinte função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$:

$\mathbb{N}:$	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\cdots$
$\mathbb{Z}:$	0	1	-1	2	-2	3	-3	$\cdots$

Uma fórmula explícita para a função f é dada por:

$$f(n) \doteq \begin{cases} \dfrac{n}{2}\,, & \text{para } n \text{ é par;} \\ -\dfrac{n-1}{2}\,, & \text{para } n \text{ é ímpar} \end{cases}\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Observemos que a função f é bijetora.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ que, pelo item 3. da Definição 1.4.2, é o mesmo que dizer que o conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Observação 1.4.2

1. *Um conjunto finito* **não** *pode ser equivalente a um subconjunto próprio seu, isto é, se o conjunot* A *é finito, não existe* $B \subseteq A$, $B \neq A$, *de modo que* $B \sim A$.

   De fato, pois se o conjunto A *é finito e* $B \subseteq A$, *então o conjuhto* B *será finito.*

   Logo, do item 1. da Observação 1.4.1, segue que o conjunto B *não pode ser equivalente ao conjunto* A, *ou seja, não pode ter o mesmo número de elementos do conjunto* A.

   Portanto o conjunto B *deverá ter um número menor de elementos do que o conjunto* A, *ou ainda*

$$\#(B) < \#(A)\,.$$

2. *Porém isto pode acontecer se o conjunto A é infinito, como mostra o Exemplo 1.4.1 acima, a saber, o conjunto $\mathbb{N}$ é um subconjunto próprio de $\mathbb{Z}$ e tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{Z}$.*

3. *Na verdade poderíamos trocar o item 2. da Definição 1.4.2 por: um conjunto A é infinito se for equivalente a um subconjunto próprio seu.*

   A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Com isto temos a:

Teorema 1.4.1 *Seja A um conjunto enumerável e $E \subseteq A$ infinito. Então o conjunto E é enumerável.*

Demonstração:
o item 3. da Definição 1.4.2 temos que $A \sim \mathbb{N}$, ou seja, existe uma função $f : \mathbb{N} \to A$ bijetora. ou ainda,

$$A = f(\mathbb{N}) = \{f(1), f(2), \cdots\},$$

ou seja, podemos considerar o conjunto como sendo uma sequência $(x_n)_{N\in\mathbb{N}}$, onde

$$x_n \doteq f(n), \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Construamos uma seqüência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, da sequência $(x_n)_{N\in\mathbb{N}}$, da seguinte forma:

(i) Seja $n_1 \in \mathbb{N}$, o menor número natural, tal que

$$x_{n_1} \in E,$$

que existe, pois $E \subseteq A$ é infinito.

(ii) Como o conjunto E é infinito, podemos encontrar $n_2 \in \mathbb{N}$, como sendo menor natural tal que

$$x_{n_2} \in E \setminus \{x_{n_1}\},$$

que existe pois $E \subseteq A$ e o conjunto $E \setminus \{x_{n_1}\} \neq \emptyset$, pois ele é infinito.

Notemos que, de (i), temos que

$$n_2 > n_1.$$

(iii) Tendo escolhido

$$n_1, n_2, \cdots, n_{k-1} \subseteq \mathbb{N},$$

podemos escolher $n_k \in \mathbb{N}$, o menor natural, tal que

$$x_{n_k} \in E \setminus \{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_{k-1}}\},$$

que existe pois $E \subseteq A$ e o conjunto $E \setminus \{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_{k-1}}\} \neq \emptyset$, pois ele é infinito.

Notemos que,

$$n_k > n_{k-1}.$$

Desta forma, podemos considerar a função $f : \mathbb{N} \to E$ dada por:

$$f(k) \doteq x_{n_k}\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Com isto, por construção, temos que função f será bijetora, ou seja $E \sim \mathbb{N}$, completando a demosntração.

$\square$

Observação 1.4.3 *A grosso modo, o resultado acima nos diz que os conjuntos enumeráveis representam o menor dos conjuntos que são infinito.*

Mais rigorosamente, nenhum conjunto infinito, **não** *enumerável, pode ser subconjunto de um conjunto enumerável.*

De fato, pois se fosse, do Teorema 1.4.1 acima, ele deveria ser enumerável o que seria um absurdo.

Podemos agora enunciar e demonstrar o:

Teorema 1.4.2 *Seja* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de conjuntos enumeráveis. Defina*

$$S \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\,.$$

Então o conjunto S *é enumerável.*

Demonstração:

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto E_n, é enumerável.

Logo, pela demonstração do Teorema 1.4.1 acima, podemos arranjá-lo como uma seqüência

$$(x_{nk})_{k\in\mathbb{N}}\,.$$

Considermos a "matriz infinita":

$$\begin{array}{ccccc}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots \\
x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

onde os elementos do conjunto E_n comparecem na n-ésima linha da "matriz infinita" acima.

Notemos que essa "matriz infinita" contém todos os elementos do conjunto S.

Observeos também que os elementos dessa "matriz infinita" podem ser arranjados da seguinte forma:

$$x_{11}\,, x_{21}, x_{12}\,, x_{31}\,, x_{22}\,, x_{13}\,, x_{41}\,, x_{32}\,, x_{23}\,, x_{14}\,, \cdots$$

isto é, vamos tomando os elementos "andando" pela diagonal da "matriz infinita", de baixo para cima e da esquerda para à direita.

Se dois elementos de dois conjuntos E_n são comuns, isto é, aparecem duas vezes, ou mais, na "matriz infinita"acima, então o eliminamos na lista acima à partir da segunda aparição.

Deste modo existe um subconjunto $T \subseteq \mathbb{N}$ tal que $S \sim T$, o mostra que o conjunto S é no máximo enumerável.

Mas

$$E_1 \subseteq S$$

e E_1 é infinito (pois é enumerável), segue que o conjunto S é infinito, ou seja, ele será enumerável, completando a demonstração.

□

Como conseqüência temos o:

Corolário 1.4.1 *Sejam A enumerável e para cada $\alpha \in A$, suponhamos que o conjunto B_α é no máximo enumerável.*

Definamos

$$T \doteq \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \,.$$

Então o conjunto T é no máximo enumerável.

Demonstração:

Como o conjunto A é enumerável, segue do Teorema (1.4.2) que o conjunto T, isto é, a reunião acima, é uma reunião enumerável de conjuntos no máximo enumeráveis, logo será, no máximo, enumerável, completando a demonstração.

□

Corolário 1.4.2 *Sejam A um conjunto enumerável, $n \in \mathbb{N}$ fixado e consideremos o conjunto B_n, formado pelas n-uplas, de elementos de A, ou seja,*

$$B_n \doteq \{(a_1\,, a_2\,, \cdots\,, a_n)\,;\, a_k \in A\,, \quad \textit{para cada} \quad k \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}$$

Então o conjunto B_n é enumerável.

Demonstração:

Observemos que os elementos

$$a_1, a_2, \cdots\,, a_n$$

não precisam ser, necessariamente, distintos.

A prova será feita por indição sobre n:

Para $n = 1$: observemos que

$$B_1 = A$$

que é enumerável.

Suponhamos que o conjunto B_{n-1} é enumerável para $n \in \{2, 3, \cdots\}$ e mostremos que o conjunto B_n será enumerável.

Observemos que

$$\begin{aligned} B_n &= \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \,;\, a_k \in A\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \{1, 2, \cdots, n\} \\ &= \{(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}) \,;\, a_k \in A\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \{1, 2, \cdots, n-1\} \times A\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$B_n = \{(b, a) \,;\, b \in B_{n-1} texte \ a \in A\}.$$

Para cada $b \in B_{n-1}$, temos que o conjunto dos pares ordenados (b, a) com $a \in A$ é um conjunto enumerável, pois o conjunto A é enumerável.

Logo o conjunto B_n é a união enumerável de conjuntos enumeráveis, isto é,

$$B_n = \bigcup_{b \in B_{n-1}} \bigcup_{a \in A} \{(b, a)\}.$$

Portanto, do Teorema 1.4.2, segue que o conjunto B_n é enumerável, completando a demonstração.

□

Observação 1.4.4

Em particular, o resultado acima nos diz que produto cartesiano de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável, pois

$$B_n = \overbrace{A \times A \times \cdots \times A}^{n-vezes}.$$

Como conseqüência temos o:

Corolário 1.4.3 *O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável.*

Demonstração:

Observemos que todo número racional pode ser colocado na forma $\frac{a}{b}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in Z^*$, ou seja, pode ser identificado com o conjunto

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*.$$

Como so conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}^*$ são enumeráveis segue, do Corolário 1.4.2, que $\mathbb{Q}$ é enumerável, completando a demonstração.

□

Observação 1.4.5

1. *Consideremos o conjunto formado pelos números complexos $z \in \mathbb{C}$, tal que existem $a_o, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$, não todos nulos, tal que*

$$a_o z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

   Tal conjunto será dito **conjunto dos números algébricos**.

   Afirmamos que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

   A verificação deste fato será deixada como exercício para os leitores.

2. *Vale observar que nem todo conjunto infinito é, necessariamente, enumerável, como mostra o próximo resultado.*

Teorema 1.4.3 *Seja A o conjunto formado pelas seqüências, cujos entradas são formadas pelos dígitos 0 e 1, dispostos de modo aleatório.*

Então o conjunto A é não enumerável.

Demonstração:

Seja E um subconjunto enumerável do conjunto A que, como vimos na demonstração do Teorema 1.4.1, podemos supor ser a seqüência, ou seja,

$$E = (s_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

ou ainda, uma seqüência onde cada termo da mesma será uma seqüência.

Consideremos a seguinte seqüência s que pertence ao conjunto A:

Se o n-ésimo dígito da seqüência s_n, é igual a 1, definimos o n-ésimos termo da seqüência s com sendo 0 e vice-versa.

Observação 1.4.6 *Para ilustrar, suponhamos que o primeiro termo da seqüência é s_1 que é 0.*

Neste caso, definiremos o primeiro termo da seqüência s como sendo 1; e que segundo termo da seqüência é s_2 que é 1, logo definiremos o segundo termo da seqüência s como sendo 0 e assim por diante.

Deste modo a seqüência s, difere de todos os elementos do conjunto E em, no mínimo, uma posição.

Logo $s \notin E$ e $s \in A$.

Assim o conjunto E é um subconjunto próprio de A, ou seja, todo subconjunto enumerável do conjunto A é um subconjunto próprio do conjunto A.

Portanto o conjunto A é não enumerável.

De fato, caso contrário, se o conjunto A fosse enumerável, ele seria um subconjunto próprio conjunto A, o que seria um absurdo, completando a demonstração.

□

Observação 1.4.7

1. *A idéia da demonstração acima é devido a Cantor, denominada* **processo de diagonalização de Cantor**.

2. *Os leitores familiarizados com representação binária de números reais (isto é, na base* 2*, em vez da base* 10*) observaram que o Teorema 1.4.3 acima implica que o conjunto dos números reais é* **não enumerável**.

3. *Notemos que, dados* A *e* B *conjuntos não vazios, se existir uma aplicação injetora* $f : A \to B$*, então a cardinalidade do conjunto* A *será menor ou igual que a cardinalidade do conjunto* B*, isto é,*
$$\#(A) \leq \#(B) .$$
Observemos que nesta situação $A \sim f(A)$*, ou seja,*
$$\#(A) = \#(f(A)) .$$
Se, neste caso, não existir uma função $f : A \to B$ *sobrejetora, então teremos* $f(A) \not\sim B$*, isto é, neste caso*
$$\#(A) < \#(B) .$$
Por outro lado, se existir uma aplicação $f : A \to B$ *que é sobrejetora, então a cardinalidade do conjunto* A *será maior que a cardinalidade do conjunto* B*, isto é,*
$$\#(A) \geq \#(B) .$$
Neste caso teremos $B \sim f(A)$*, ou seja,*
$$\#(B) = \#(f(A)) .$$
Nesta situação, se não existir uma função $f : A \to B$ *que é injetora, então teremos* $A \not\sim B$*, isto é,*
$$\#(A) > \#(B) .$$

1.5 Relações de Equivalência

Iniciaremos esta seção com a:

Definição 1.5.1 *Seja* X *um conjunto não vazio.*

Diremos que uma relação $\equiv$*, no conjunto* X*, é uma* **relação de equivalência em** X*, se as seguinte propriedades se verificam:*

1. $\equiv$ *é reflexiva, ou seja,*

$$x \equiv x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in X;$$

2. $\equiv$ *é simétrica, ou seja, se* $x\,, y \in X$ *satsifzem*

$$\textit{se} \quad x \equiv y\,, \quad \textit{então teremos} \quad y \equiv x\,;$$

3. $\equiv$ *é transitiva, isto é, se* $x\,, y\,, z \in X$ *satsifzem*

$$x \equiv y \quad e \quad y \equiv z\,, \quad \textit{então teremos} \quad x \equiv z\,.$$

Observação 1.5.1

1. *Suponhamos que* $\equiv$ *é uma relação de equivalência no conjunto* X.

   Para cada $x \in X$ *definimos o conjunto* E_x*, como sendo*

$$E_x \doteq \{y \in X\,;\, y \equiv x\}\,, \tag{1.27}$$

   que será denomindado **classe de equivalência associada a** x*, relativamente a relação de equivalência* $\equiv$.

2. *Observemos que se* $x \in X$*, então* $x \in E_x$*, ou seja,*

$$X = \bigcup_{x \in X} E_x\,.$$

3. *Notemos que,* $y \equiv x$ *então, de* (1.27)*, segue que*

$$y \in E_x\,.$$

4. *Observemos também que* $z \in E_y$ *e* $y \equiv x$*, então*

$$z \overset{z \in E_y \ e\ (1.27)}{\equiv} y \equiv x\,, \quad \textit{assim, de (1.27), teremos:} \quad z \in E_x\,,$$

   ou seja,

$$E_y \subseteq E_x\,, \quad \textit{ou ainda,} \quad E_y = E_x\,.$$

5. *Por outro lado, se* $x\,, y \in X$ *são tais que* $y \not\equiv x$*, então*

$$E_y \cap E_x = \emptyset\,.$$

6. *Logo, dos itens 4. e 5., segue que*

$$E_y \cap E_x = \begin{cases} \emptyset\,, & se \quad y \not\equiv x \\ E_x\,, & se \quad y \equiv x \end{cases} .$$

Portanto podemos escrever o conjunto X *como uma reunião disjunta das classes de equivalência determinadas pela relação de equivalênica* $\equiv$.

7. *Definiremos* **espaço quociente de X, pela relação de equivalência** $\equiv$, *que será denotado por* $X/_{\equiv}$, *como sendo, o conjunto*

$$X/_{\equiv} \doteq \{E_x\,;\, x \in X\}\,,$$

ou seja,

$$X/_{\equiv} = \bigcup_{x \in X} E_x\,.$$

8. *Notemos que, do 6 acima, podemos escrever* $X/_{\equiv}$ *como uma reunião disjunta de classes de equivalência.*

9. *A aplicação* $\varphi : X \to X/_{\equiv}$, *dada por*

$$\varphi(x) \doteq E_x\,, \quad para\ cada \quad x \in X \tag{1.28}$$

será denominada **projeção natural de X em** $X/_{\equiv}$.

10. *Suponhamos que* $+ : X \times X \to X$, *seja uma operação binária em* X, *que tem a seguinte propriedade:*

$$se \quad x \equiv x' \quad e \quad y \equiv y'\,, \quad tenhamos: \quad x + y \equiv x' + y'\,.$$

Neste caso diremos que a operação binária $+$ *é* **compatível com a relação de equivalência** $\equiv$.

11. *Se a operação binária* $+ : X \times X \to X$ *é compatível com a relação de equivalência* $\equiv$ *em* X, *então podemos definir uma operação binária* $+_{\equiv} : X/_{\equiv} \times X/_{\equiv} \to X/_{\equiv}$, *da seguinte forma:*

$$E_x +_{\equiv} E_y \doteq E_{x+y}\,, \quad para\ cada \quad E_x, E_y \in X/_{\equiv}\,.$$

Como a operação binária $+ : X \times X \to X$ *é compatível com a relação de equivalência* $\equiv$ *em* X, *a definição acima está correta.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

1.6 Conjuntos Parcialmente e Totalmente Ordenados

Começaremos pelas:

Definição 1.6.1 *Seja* X *um conjunto.*

Diremos que a relação $\mathcal{R}$ *em* X *é* **anti-simétrica**, *se* $x, y \in X$ *satsifazem*

$$x \,\mathcal{R}\, y \quad e \quad y \,\mathcal{R}\, x , \quad \textit{deveremos ter} \quad x = y . \tag{1.29}$$

e

Definição 1.6.2 *Seja* X *um conjunto.*

Diremos que a relação $\prec$ *em* X *é uma* **relação de ordem parcial em** X, *se*

1. *se* $x, y \in X$ *satisfazem* $\boxed{\textbf{O1}}$

$$x \prec y \quad e \quad y \prec z , \quad \textit{implicar que} \quad x \prec z ; \tag{1.30}$$

2. *se* $x, y, z \in X$ *satisfazem* $\boxed{\textbf{O2}}$

$$x \prec y \quad e \quad y \prec x , \quad \textit{implicar em:} \quad x = y , \tag{1.31}$$

isto é, a relação $\prec$ *é anti-simétrica.*

Com isot temos o:

Exemplo 1.6.1 *A relação* $\leq$ *é uma relação de ordem em* $\mathbb{R}$, *assim como a relação* $\subseteq$ *é uma relação de ordem em* $\mathscr{P}(X)$.

Resolução:

Deixaremos a verificação dos fatos acima como exercício para o leitor.

$\square$

Podemos agora introduzir a:

Definição 1.6.3 *Seja* X *um conjunto e* $\prec$ *uma relação de ordem parcial em* X.

Diremos que a relação $\prec$ *é uma* **relação de ordem total em** X, *se vale a seguinte propriedade:*

1. *dados* $x, y \in X$, *deveremos ter:*

$$x \prec y \quad \textit{ou}\; y \prec x . \tag{1.32}$$

Neste caso diremos que o conjunto X *é* **totalmente ordenado**, *relativamente a relação de ordem total* $\prec$.

Com isto temos o:

Exemplo 1.6.2 *A relação $\leq$ é uma relação de ordem total em $\mathbb{R}$, assim como a relação $\subseteq$ é uma relação de ordem parcial, mas* **não** *total, em $\mathscr{P}(X)$.*

Resolução:

Deixaremos a verificação dos fatos acima como exercício para o leitor.

□

Com isto podemos introduzir a:

Definição 1.6.4 *Sejam X um conjunto, $\prec$ uma relação de ordem parcial em X e $E \subseteq X$ não vazio.*

Dados $a, b \in X$, diremos que **a é menor ou igual que b ou b é maior ou igual que a**, *se*

$$a \prec b \,.$$

Diremos que $a \in E$ é o **menor elemento de E**, *denotado por $\min(E)$, se $x \in E$ com $x \neq a$, temos que*

$$a \prec x \,.$$

De modo semelhante, diremos que $b \in E$ é o **maior elemento de E**, *denotado por $\max(E)$, se $x \in E$ com $x \neq b$, temos que*

$$x \prec b \,.$$

Diremos que $a \in E$ é um **elemento minimal de E**, *se não existe $x \in E$ tal que $x \prec a$.*

Diremos que $b \in E$ é um **elemento maximal de E**, *se não existe $x \in E$, tal que*

$$b \prec x \,.$$

Observação 1.6.1

1. *Na Definição 1.6.4 acima, notemos que se $a \in E$ é o menor elemento do conjunto E, então a será um elemento minimal de E.*

   De modo análogo, notemos que se $b \in E$ é o maior elemento de E, então b será um elemento maximal de E.

   Em geral, **não** *valem as recíprocas das afirmações acima, ou seja, existem situações em que um conjunto tem um elemento minimal que não é o menor elemento do conjunto e, de modo análogo, para o caso maximal e maior elemento.*

   Deixaremos como exercício para o leitor a construção de exemplos para as situações acima.

2. *A Definição 1.6.2, de ordem parcial, não pede nada sobre a possibilidade ou necessidade de termos $x \prec x$ para $x \in X$, isto é, que a propriedade reflexiva se verifique.*

3. *Se a relação de ordem parcial $\prec$, satisfaz a propriedade reflexiva, diremos que a relção de ordem $\prec$ é uma* **relação de ordem parcial reflexiva em** X.

4. *Se a propriedade reflexiva* **não** *é verificada diremos que a relação $\prec$ é uma* **relação de ordem parcial estrita em** X.

Para ilustar temos o:

Exemplo 1.6.3 *A relação $<$ em $\mathbb{R}$ é uma relação de ordem parcial estrita em $\mathbb{R}$.*

Resolução:
Deixaremos a verificação dos fatos acima como exercício para o leitor.

□

Podemos agora enunciar o:

Teorema 1.6.1 *(***Princípio Maximal de Hausdorff***) Sejam X um conjunto e $\prec$ uma relação de ordem parcial em X.*

Então existe um subconjunto $S \subseteq X$ que é totalmente ordenado e maximal com respeito a essa propriedade, isto é, se existir $T \subseteq X$ que é totalmente ordenado, satisfazendo $S \subseteq T$, deveremos ter

$$T = S .$$

Demonstração:
Deixaremos a demonstração deste resultado como exercício para o leitor.

□

1.7 Boa Ordenação e Enumerabilidade

Começaremos pela:

Definição 1.7.1 *Seja X um conjunto não vazio.*

Uma relação $\prec$ de ordem total e estrita em X, será denominda **boa ordenação no conjunto** X *ou que o conjunto X é* **bem ordenado, relativamente à** $\prec$, *se todo $E \subseteq X$, não vazio, possui menor elemento em E, ou seja, existe $e_{\min} \in E$ tal que*

$$e_{\min} \leq e , \quad \text{para cada} \quad e \in E .$$

Com isto temos o:

Exemplo 1.7.1 *O conjunto $\mathbb{N}$ é bem ordenado relativamente à relação a ordem total estrita $<$.*

Por outro lado, $\mathbb{R}$ **não** *é bem ordenado relativamente à relação a ordem total estrita $<$.*

Resolução:

Deixaremos a demosntração da primeira afirmação como exercício para o leitor.

Para a segunda afirmação, se considerarmos, por exemplo, o conjunto

$$E \doteq (0, \infty)\,,$$

segue que este não possui menor elemento em E.

$\square$

Com isto temos o seguinte axioma:

Axioma 1.7.1 *(**Princípio da Boa Ordenação**) Se X é um conjunto não vazio, então existe uma relação de ordem total e estrita em X que o torne bem ordenado.*

Observação 1.7.1 *Pode-se mostra que o Princípio da Boa Ordenação é equivalente ao Axioma da Escolha.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Para finalizar temos a:

Proposição 1.7.1 *Existe um conjunto não enumerável X, que é bem ordenado relativamente a relação de ordem total e estrita $\prec$, que satisfaz as seguintes condições:*

1. *existe um maior elemento de X, que indicaremos por x_{max}, isto é,*

$$x \leq x_{max}\,, \quad \textit{para todo} \quad x \in X\,;$$

2. *Se $x \in X$ é tal que $x \neq x_{max}$, então o conjunto*

$$\{y \in X\,;\, y \prec x\}$$

é um conjunto não enumerável.

Demonstração:

Seja Y um subconjunto não enumerável qualquer.

Para ilustrar, podemos considerar o conjunto dado pelo Teorema 1.4.3.

Pelo Princípio da Ordenação (ou seja, o Axioma 1.7.1), existe uma ordem total e estrita em Y, que será denotada por $\prec$.

Caso o conjunto Y não tenha um maior elemento, consideraremos $\alpha \notin Y$ e substituimos o conjunto Y pelo conjunto $Y \cup \{\alpha\}$ e estendemos a relaçção de ordem total estrita $\prec$, para o conjunto $Y \cup \{\alpha\}$, da seguinte forma:

$$y < \alpha, \quad \text{para todo} \quad y \in Y.$$

Deste o modo o conjunto $Y \cup \{\alpha\}$ terá maior elemento, a saber, α.

Observemos que o conjunto $\mathscr{A}$, formado pelos $y \in Y$, para os quais o conjunto $\{x \in Y : x \prec y\}$ é não enumerável, é não vazio, pois o conjunto Y (ou seja, $Y \cup \{\alpha\}$) tem maior elemento, isto é,

$$\alpha \in \mathscr{A} .$$

Logo, existe x_{max}, o menor elemento de $\mathscr{A}$.

Consideremos

$$X \doteq \{x \in X \,;\; x \prec x_{max} \quad \text{ou} \quad x = x_{max}\} .$$

O conjunto X, munido da relação de ordem total e estrita $\prec$, satisfaz as propriedades 1. e 2., concluindo a demonstração.

$\square$

Capítulo 2

Os Números Reais

Nesta capítulo introduzimos toda a axiomática associada ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e dos números reais estendidos, o conceito de conjunto abertos e fechados em $\mathbb{R}$, de continuidade de funções a valores reais, de uma variável real, os conjunto de Borel (ou borelianos) e propriedades de cada um destes tópicos.

2.1 Aximas para os Números Reais

Axioma 2.1.1 *(Aximas de Corpo:) Existem duas operações binárias*

$$+\,,\ \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$$

que satisfazem:

1. **Comutativa da adição:** $x + y = y + x$, *para todo* $x\,, y \in \mathbb{R}$;
2. **Associativa da adição:** $x + (y + z) = (x + y) + z$, *para todo* $x\,, y\,, z \in \mathbb{R}$;
3. **Elemento neutro da adição:** *existe* $0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $x + 0 = x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$;
4. **Elemento oposto da adição:** *dado* $x \in \mathbb{R}$, *existe* $w \in \mathbb{R}$ *tal que* $x + w = 0$;
5. **Comutativa da multipicação:** $x \cdot y = y \cdot x$, *para todo* $x\,, y \in \mathbb{R}$;
6. **Associativa da multiplicação:** $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, *para todo* $x\,, y\,, z \in \mathbb{R}$;
7. **Elemento neutro da multiplicação:** *existe* $1 \in \mathbb{R}$ *tal que* $1 \cdot x = x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$;
8. **Elemento inverso da multiplicação :** *dado* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ *existe* $u \in \mathbb{R}$ *tal que* $x \cdot u = 1$;
9. **Distributiva da multiplicação pela adição:** $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, *para todo* $x\,, y\,, z \in \mathbb{R}$.

Observação 2.1.1

1. *Um conjunto não vazio* X *munido de duas operações binárias*

$$+\ ,\ \cdot : X \times X \to X\,,$$

   que satisfaz as nove condições acima será denominado **corpo relativamente às operações + e ·**.

2. *Pode-se mostrar que* $0 \in \mathbb{R}$ *é o único elemento de* $\mathbb{R}$*, que satisfaz a propriedade 3. .*

3. *Pode-se mostrar que* $w \in \mathbb{R}$ *é o único elemento de* $\mathbb{R}$*, que satisfaz a propriedade 4., e será denotado por* $-x$*.*

4. *Pode-se mostrar que* $1 \in \mathbb{R}$ *é o único elmento de* $\mathbb{R}$*, que satisfaz a propriedade 7. .*

5. *Pode-se mostrar que* $u \in \mathbb{R}$ *é o único elemento de* $\mathbb{R}$*,, que satisfaz a propriedade 8., que será denotado por* x^{-1}*.*

6. *Dados* $x\,,y \in \mathbb{R}$ *definimos*

$$x - y \doteq x + (-y)\,.$$

Axioma 2.1.2 *(***Aximas de Ordem:***) Existe um subconjunto* $\mathcal{P}$*, do conjunto* $\mathbb{R}$*, que será denominado* **conjunto dos números reais positivos***, cujos elementos satisfazem as seguintes propriedades:*

B1. *se* $x\,,y \in \mathcal{P}$*, teremos* $x + y \in \mathcal{P}$*;*

B2. *se* $x\,,y \in \mathcal{P}$*, teremos* $x \cdot y \in \mathcal{P}$*;*

B3. *se* $x \in \mathcal{P}$*, teremos* $-x \notin \mathcal{P}$*;*

B4. *se* $x \in \mathbb{R}$*, teremos,* $x = 0$*, ou* $x \in \mathcal{P}$*, ou* $-x \in \mathcal{P}$*.*

Observação 2.1.2

1. *Um conjunto não vazio* X*, munido de duas operações binárias + e ·, satisfazendo os Axiomas de Corpo 2.1.1 e os Axiomas de Ordem 2.1.2, será denominado* **corpo ordenado***.*

2. *Se um corpo* $(X\,,+\,,\cdot)$ *é um corpo ordenado, podemos definir uma ordem parcial, que indicaremos por* $<$*, em* X*, da seguinte forma por: dados* $x\,,y \in X$*, escreveremos:*

$$x < y \quad \text{se, e somente se,} \quad y - x \in \mathcal{P}\,.$$

Deste modo podemos definir uma ordem total em X*, indicada por* $\leq$*, da seguinte forma: dados* $X, y \in X$*, escreveremos:*

$$x \leq y \quad \textit{se, e somente se,} \quad x < y \quad \textit{ou} \quad x = y\,.$$

Deixaremos como exercício para o leitor mostra que $\leq$ *é uma ordem total estrita em* X*, ou seja, que* $X, +, \cdot, \leq)$ *é um corpo ordenado.*

Para o próximo axioma precisaremos da:

Definição 2.1.1 *Seja* $S \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio.*
Diremos que $b \in \mathbb{R}$ *é um* **limitante superior do conjunto** S*, se*

$$s \leq b\,, \quad \textit{para todo} \quad s \in S\,.$$

Notação do Royden: escreveremos

$$S \leq b\,.$$

Neste caso diremos que o conjunto S *é* **limitado superiormente em** $\mathbb{R}$ *.*
De modo semehlante, diremos que $a \in \mathbb{R}$ *é um* **limitante inferior de** S *se*

$$a \leq s\,, \quad \textit{para todo} \quad s \in S\,.$$

Notação do Royden: escreveremos

$$a \leq S\,.$$

Neste caso diremos que o conjunto S *é* **limitado inferiormente em** $\mathbb{R}$*.*
Diremos que o conjunto S *é* **limitado***, se ele for limitado superiormente e inferiormente.*

Com isto temos a:

Definição 2.1.2 *Seja* $S \subseteq \mathbb{R}$ *um subconjunto limitado superiormente em* $\mathbb{R}$*.*
Diremos que $c \in \mathbb{R}$ *é o* **supremo do conjunto** S *se:*

1. c *é um limitante superior do conjunto* S*;*

2. c *é o menor dos limitantes superiores do conjunto* S*.*

Neste caso denotaremos c*, por* $\sup(S)$*.*

De modo semelhante temos a:

Definição 2.1.3 *Seja* $S \subseteq \mathbb{R}$ *limitado inferiormente em* $\mathbb{R}$*.*
Diremos que $d \in \mathbb{R}$ *é o* **ínfimo do conjunto** S *se:*

1. *c é um limitante inferior do conjunto S;*

2. *c é o mario dos limitantes inferiores do conjunto S.*

Neste caso denotaremos d, por $\inf(S)$.

Com isto temos o:

Axioma 2.1.3 (**Axioma de Completitude**) *Todo subconjunto S de $\mathbb{R}$, que é limitado superiormente terá supremo em $\mathbb{R}$.*

Observação 2.1.3 *Como consequência segue que todo subconjunto S de $\mathbb{R}$, que é limitado inferiormente terá ínfimo.*
A verificação deste fato será deixada como exercício par o leitor.

Para finalizar temos a:

Proposição 2.1.1 *Sejam L e U dois subconjuntos, não vazios, de $\mathbb{R}$ tais que*

$$\mathbb{R} = L \cup U$$

e para cada $l \in L$ e $u \in U$, temos que

$$l \leq u .$$

Então ou L tem maior elemento, isto é, existe $\max(L)$, ou U tem menor elemento, isto é, existe $\min(U)$.

Demonstração:
Deixaremos a demonstração deste resultado como exercício para o leitor

$\square$

2.2 Números Naturais e Racionais

Começaremos esta seção pelo:

Teorema 2.2.1 (**Princípio da Definição Recursiva**) *Sejam X um conjunto não vazio, $f : X \to X$ uma função e $a \in X$ fixado.*
Então existe uma única sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, tal que

$$x_1 = a \quad e \quad x_{i+1} = f(x_i) , \quad para\ cada \quad i \in \{1 , 2 , 3 , \cdots\} .$$

Demonstração:
Para mostrar a existência de tal sequência basta definirmos:

$$x_1 \doteq a , \quad x_2 \doteq f(x_1) = f(a) , \quad x_3 = f(x_2) = f(f(a)) , \cdots$$

A demonstração da unicidade será deixada como exercício para o leitor.

$\square$

Observação 2.2.1

1. *Notemos que, aplicando-se o Teorema 2.2.1 acima à função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*
$$f(x) \doteq x + 1\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} \quad \textit{e} \quad a \doteq 1\,,$$
segue que existe uma única sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *de modo que*
$$\begin{aligned} x_1 &= 1\,,\\ x_2 &= f(1) = 2 = 1 + 1 = x_1 + 1\,,\\ x_3 &= f(2) = 3 = 2 + 1 = x_2 + 1\,,\\ &\ \vdots\,,\\ x_n &= f(n) = n + 1 = x_{n-1} + 1\,,\\ &\ \vdots\,, \end{aligned}$$
ou seja, existe uma única função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *tal que*
$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + 1\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$
Para ver isto basta considerarmos
$$\varphi \doteq f \circ g\,,$$
onde a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é dada por*
$$g(n) \doteq x_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

2. *A aplicação* φ, *dada por* (2.1), *é estritamente crescente.*
Devemos mostrar que para $p\,, q \in \mathbb{N}$, *satisfazendo*
$$p < q\,, \quad \textit{deveremos ter} \quad \varphi(p) < \varphi(q)\,. \tag{2.2}$$
Para isto notemos que, do fato que $p < q$, *podemso encontrar* $n \in \mathbb{N}$, *tal que*
$$q = p + n\,.$$
Assim, (2.2) *será equivalente a*
$$\varphi(p) < \varphi(p+n)\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.3}$$
Para mostrar esta identidade, utilizaremos indução sobre n:

(a) notemos que para $n = 1$ *a afirmação* (2.4) *valerá, pois*

$$\begin{aligned} \varphi(q) &= \varphi(p+1) \\ &\overset{(2.1)}{=} \varphi(p) + 1 \\ &> \varphi(p)\,. \end{aligned}$$

(b) se a afirmação (2.3) *ocorre para* $n = k$*, mostremos quu ela ocorrerá para* $n = k + 1$.

Para tanto, notemos que se (2.3) *ocorre para* $n = k$*, temos que*

$$\varphi(p+k) > \varphi(p)\,. \tag{2.4}$$

Logo

$$\begin{aligned} \varphi[p+(k+1)] &= \varphi[(p+k)+1] \\ &\overset{(2.1)}{=} = \varphi(p+k) + 1 \\ &\overset{(2.4)}{>} \varphi(p) + 1 \\ &> \varphi(p)\,, \end{aligned}$$

mostrando que (2.3) *ocorreá para* $n = k + 1$*, completando a demonstração.*

Portanto a função φ *é estritamente crescente.*

Em particular, a função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *é injetora.*

3. *Também por indução, podemos provar que*

$$\varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q) \quad e \quad \varphi(p \cdot q) = \varphi(p) \cdot \varphi(q)\,, \quad para \quad p, q \in \mathbb{N}\,. \tag{2.5}$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

4. *Logo, de 1., 2. e 3. segue que a aplicação* $\varphi : \mathbb{N}$ to$\mathbb{R}$*, dada por* (2.1)*, será injetora, preserva a ordem* $<$*, a adição e a multiplicação de* $\mathbb{N}$.

Assim nós podemos identificar o conjunto $\mathbb{N}$ *com o subconjunto* $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}$.

5. *Tomando a diferença de elementos de* $\mathbb{N}$*, obteremos os elementos do conjunto* $\mathbb{Z}$ *e tomando-se o quociente de elementos, não nulos, de* $\mathbb{Z}$*, obteremos os elementos do conjunto* $\mathbb{Q}$.

Lembre-se que a aplicação φ *preserva as operaçoes* $+$ *e* $\cdot$ *de* $\mathbb{N}$.

Logo podemos resumir as considerações acima na:

Proposição 2.2.1 *Todo corpo ordenado contém os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.*
Mais precisamente, contém um subconjunto que é isomorfo a cada um destes.

Um outro resultado importante é dado pelo:

Teorema 2.2.2 *(**Axioma de Archimedes**) Dado $x \in \mathbb{R}$, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$x < n. \tag{2.6}$$

Demonstração:
Consideremos

$$S \doteq \{k \in \mathbb{N};\, k \leq x\}. \tag{2.7}$$

Como o conjunto S é limitado superiormente (pois x é um limitante superior do conjunto S) segue que, do axioma 2.1.3, que existe $\sup(S) \in \mathbb{R}$.

Como $\sup(S)$ é o menor limitante superior do conjunto S, segue que $\sup(S) - \frac{1}{2}$ não poderá ser limitante superior do conjunto S, isto é, existe $k \in S$ tal que

$$\sup(S) - \frac{1}{2} < k. \tag{2.8}$$

Assim

$$\begin{aligned} k + 1 &\overset{(2.8)}{>} \left[\sup(S) - \frac{1}{2}\right] + 1 \\ &= \sup(S) + \frac{1}{2} \\ &> \sup(S), \end{aligned}$$

logo, da definção de supremo, teremos: $\quad (k+1) \notin S.$

Notemos que

$$k + 1 \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad (k+1) \notin S.$$

Portanto, deveremos ter

$$x < k + 1 \doteq n,$$

como queríamos demonstrar.

□

Como consequência temos o:

Corolário 2.2.1 *Se $x, y \in \mathbb{R}$ são tais que $x < y$, então podemos encontrar $r \in \mathbb{Q}$, de modol que*

$$x < r < y. \tag{2.9}$$

Demonstração:

Suponhamos, primeiramente, que

$$0 \leq x\,.$$

Como $x < y$, pelo Axioma de Archimedes (isto é, o Teorema 2.2.2), podemos encontar $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$
\begin{aligned}
& (y-x)^{-1} < q \\
\text{ou, equivalentemente:} \quad & \frac{1}{q} < y - x\,, \\
\text{ou ainda,} \quad & x - y < -\frac{1}{q}\,. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Consideremos

$$
\begin{aligned}
S &\overset{\boxed{\mathrm{I}}}{\doteq} \left\{ n \in \mathbb{N}\,;\ y \leq \frac{n}{q} \right\} \\
&= \{ n \in \mathbb{N}\,;\ y \cdot q \leq n \} \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

que é um conjunto não vazio (pelo Axioma de Archimedes, isto é, o Teorema 2.2.2, aplicado a $x \doteq y \cdot q$), está contido em $\mathbb{N}$ e tem portanto tem um menor elemento, que denotaremos por

$$p \doteq \min(S)\,. \qquad (2.12)$$

Então, como

$$p = \min(S) = \sup(S)\,,$$

segue que

$$
\begin{aligned}
& p - 1 < y \cdot q \leq p\,, \\
\text{e como } q \in \mathbb{N}, \text{ é o mesmo que:} \quad & \frac{(p-1)}{q} < y \leq \frac{p}{q}\,. \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

Notemos que:

$$
\begin{aligned}
x &= y - (y - x) \\
&= y + (x - y) \\
&\overset{(2.13)\text{ e }(2.10)}{<} \frac{p}{q} - \frac{1}{q} \\
&= \frac{p-1}{q} \overset{(2.13)}{<} y\,,
\end{aligned}
$$

$$\text{ou seja,} \quad x < \frac{p-1}{q} < y\,. \qquad (2.14)$$

Considerando-se
$$r \doteq \frac{p-1}{q} \in \mathbb{Q},$$
de (2.14) segue que (2.9).

Se $x < 0$, pelo Axioma de Archimedes (isto é, o Teorema 2.2.2), podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$, tal que
$$-x < n, \quad \text{ou seja,} \quad 0 < x + n.$$

Logo, pela primeira parte da demonstração, segue que existe $r' \in \mathbb{Q}$ tal que
$$n + x < r' < n + y,$$
assim
$$r \doteq r' - n \in \mathbb{Q}$$
satisfaz (2.9), completando a demonstração.

□

2.3 Números Reais Estendidos

Observação 2.3.1

1. *Como veremos mais adiante será importante estendermos o conjunto dos números reais, adicionando-se o símbolos $+\infty$ e $-\infty$.*

   Tal conjunto será denotado por $\mathbb{R}^*$, ou seja,
   $$\mathbb{R}^* \doteq \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$
   e será denominado **conjunto dos números reais estendidos**.

2. *Podemos estender a ordem $<$ de $\mathbb{R}$, ao conjunto $\mathbb{R}^*$, da seguinte forma:*
   $$-\infty < x < +\infty, \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. *Podemos estender as operações binárias $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{R}$, ao conjunto $\mathbb{R}^*$, da seguinte forma:*
   $$\begin{aligned}
   & x + \infty \doteq +\infty, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}, \\
   & x - \infty \doteq -\infty, \quad \textit{para} \quad x \in \mathbb{R}, \\
   & x \cdot \infty \doteq \infty, \quad \textit{para} \quad x > 0, \\
   & x \cdot \infty \doteq -\infty, \quad \textit{para} \quad x < 0, \\
   & \infty + \infty \doteq \infty, \\
   & -\infty - \infty \doteq -\infty, \\
   & \infty \cdot \infty \doteq \infty, \\
   & \infty \cdot (-\infty) = (-\infty).\infty \doteq -\infty, \\
   & (-\infty) \cdot (-\infty) \doteq \infty,
   \end{aligned} \tag{2.15}$$

4. *As expresssões*
$$\infty - \infty\,, \quad -\infty + \infty \quad e \quad 0 \cdot \infty$$
não estão definidas.

   No livro Royden temos, por definição, que
$$0 \cdot (+\infty) = 0 \cdot (-\infty) = 0\,.$$

5. *Observemos que se $S \subseteq \mathbb{R}^*$, então sempre existirão*
$$\sup(S) \quad e \quad \inf(S)$$
e, além disso, podemos ter
$$-\infty = \inf(S) \quad e \quad \sup(S) = \infty.$$
Por convenção
$$\sup(\emptyset) \doteq -\infty\,.$$

2.4 Sequências de Números Reais

Começaremos pela:

Definição 2.4.1 *Diremos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ é* **convergente em $\mathbb{R}$**, *, se existe $l \in \mathbb{R}$, de modo que, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontra $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, de modo que para*
$$n \geq N_o\,, \quad \textit{teremos} \quad |x_n - l| < \varepsilon\,. \tag{2.16}$$

Observação 2.4.1

1. *Pode-se mostra que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ é convergente em $\mathbb{R}$, então o número real l será o único com a propriedade acima.*

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Neste caso, o número real l, será dito dito* **limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$** *e denotado por*
$$\lim x_n\,, \quad ou \quad \lim_{n\to\infty} x_n\,, \quad ou\ ainda \quad x_n \to l\,.$$

3. *Logo, da Definição 2.4.1, segue que*
$$l = \lim_{n\to\infty} x_n\,,$$
se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, no máximo, um número finito de termos da sequência não são maiores que $l - \varepsilon$ e menores que $l + \varepsilon$, ou seja, não pertencem ao intervalo
$$(l - \varepsilon\,, l + \varepsilon)\,.$$

4. *Também , da Definição 2.4.1, segue que se*

$$l = \lim_{n \to \infty} x_n ,$$

então dado $\varepsilon > 0$ um número infinito de termos da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pertencem ao intervalo

$$(l - \varepsilon , l + \varepsilon) .$$

5. *Notemos que **não** vale a recíproca da afirmação acima.*

   *Para ilustra isto podemos considerar, por exemplo, a sequência $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ que **não** é convergente em $\mathbb{R}$, mas tem a propriedade acima.*

Temos também a:

Definição 2.4.2 *Dada a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, diremos que $l \in \mathbb{R}$ é um* **ponto de acumulação da sequência** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *se dado $\varepsilon > 0$, existem infinitos termos distintos da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que são maiores que $l - \varepsilon$ e menores que $l + \varepsilon$, ou seja, existem infinitos $n \in \mathrm{N}$ tais que*

$$x_n \in (l - \varepsilon , l + \varepsilon) .$$

E a:

Definição 2.4.3 *Diremos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ é uma* **sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$** *, se dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ de modo que para*

$$n , m \geq N_o , \qquad \textit{teremos} \quad |x_n - x_m| < \varepsilon . \tag{2.17}$$

Com isto temos o:

Teorema 2.4.1 *(***Ciritério de Cauchy para Sequências***) Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ é convergente em $\mathbb{R}$ se, e somente se, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

Deixaremos a demonstração deste resultado como exercício para o leitor.

□

Observação 2.4.2

1. *Podemos estender a Definição 2.4.1 para o caso*

$$l = \infty ,$$

da seguinte forma: diremos que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty ,$$

se dado $k \in N$, *podemos encontrar* $N_o = N_o(k) \in \mathbb{N}$ *,tal que para*

$$n \geq N_o , \quad \textit{teremos} \quad x_n > k . \tag{2.18}$$

2. *De modo semelhante estender a Definição 2.4.1 para o caso*

$$l = -\infty ,$$

da seguinte forma: diremos que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty ,$$

se dado $k \in N$, *podemos encontrar* $N_o = N_o(k) \in \mathbb{N}$, *tal que para*

$$n \geq N_o , \quad \textit{teremos} \quad x_n < -k . \tag{2.19}$$

3. *Com isto podemos estender a Definição 2.4.1 de convergência de uma sequência para incluir os itens 1. e 2. acima.*

   Estes seriam os casos de convergência de uma sequência em $\mathbb{R}^*$.

4. *Podemos estender a Definição 2.4.2, da seguinte forma: diremos que*

$$l \doteq +\infty$$

é um **ponto de acumulação da sequência** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *se dado* $K \in \mathbb{N}$, *existem infinitos termos distintos da sequência maiores que* K, *ou seja, existem infinitos* $n \in N$ *tais que*

$$x_n > K .$$

.

5. *Podemos estender a Definição 2.4.2, da seguinte forma: diremos que*

$$l \doteq -\infty$$

é um **ponto de acumulação da sequência** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *se dado* $K \in \mathbb{N}$, *existem infinitos termos distintos da sequência menores que* $_K$, *ou seja, existem infinitos* $n \in N$ *tais que*

$$x_n < -K .$$

.

6. *Diremos que uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{R}^*$*) é* **crescente**, *se*

$$x_n \leq x_{n+1}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

7. *De modo semelhante, diremos que uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{R}^*$*) é* **decrescente**, *se*

$$x_n \geq x_{n+1}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

8. *Se a sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{R}^*$*) for crescente ou decrescente, diremos que ela é uma sequência* **monótona**.

9. *Se* $l \doteq \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *e a sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{R}^*$*) for crescente escreveremos*

$$x_n \uparrow l\,.$$

Por outro lado, se a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{R}^*$*) for decrescente, escreveremos*

$$x_n \downarrow l\,.$$

Podemos agora introduzir a:

Definição 2.4.4 *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{R}^*$*).*

Definimos o **limite superior da sequência** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *denotado por*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \quad \textit{ou} \quad \limsup_{n\to\infty} x_n\,,$$

como sendo:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \doteq \inf_{n\in\mathbb{N}} \left[\sup_{k\geq n} x_k\right]. \tag{2.20}$$

De modo semelhante, definimos o **limite inferior da sequência** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *denotado por*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \quad \textit{ou} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n\,,$$

como sendo:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \doteq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\inf_{k\geq n} x_k\right]. \tag{2.21}$$

Com isto temos a:

Proposição 2.4.1 *Sejam* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequências de* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{R}^*$*).*

Então:

1. *teremos*
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = l \in \mathbb{R}$$
se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$*, tal que*
$$\textit{se} \quad n \geq N_o\,, \qquad \textit{teremos} \quad x_n < l + \varepsilon\,,$$
e dado $N \in \mathbb{N}$*, podemos encontrar* $K_o = K_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$*, com* $K_o \geq N$*, de modo que*
$$l - \varepsilon < x_{K_o}\,.$$

2. *teremos*
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \infty \in \mathbb{R}$$
se, e somente se, dado $K > 0$ *e* $N \in \mathbb{N}$*, podemos encontrar* $m \in \mathbb{N}$*, com* $m \geq N$*, de modo que*
$$x_m > K\,.$$

3. *temos:*
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (-x_n) = -\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\,.$$

4. *temos:*
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n\,.$$

5.
$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}^*$$
se, e somente se,
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = l\,.$$

6.
$$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n &\leq \underline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n)\\ &\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n)\\ &\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n\,.\end{aligned}$$

Demonstração:

Deixaremos as demonstrações das afirmações acima como exercício para o leitor.

□

Observação 2.4.3 *Temos uma caracterização análoga a dada nos item 1. e 2. acima para o caso do limite inferior, que deixaremos a cargo do leitor a sua elaboração e demonstração.*

2.5 Conjuntos Abertos, Fechados em $\mathbb{R}$

Definição 2.5.1 *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$.

Definimos o **intervalo aberto** $(a\,,b)$ *como sendo o seguinte subconjunto de* $\mathbb{R}$*:*

$$(a\,,b) \doteq \{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x < b\}.$$

Definimos o **intervalo aberto** $(a\,,\infty)$*, como sendo o seguinte subconjunto de* $\mathbb{R}$*:*

$$(a\,,\infty) \doteq \{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x\}.$$

Definimos o **intervalo aberto** $(-\infty\,,b)$*, como sendo o seguinte subconjunto de* $\mathbb{R}$*:*

$$(-\infty\,,b) \doteq \{x \in \mathbb{R}\,;\ x < b\}.$$

Definimos o **intervalo aberto** $(-\infty\,,\infty)$*, como sendo o seguinte subconjunto de* $\mathbb{R}$*:*

$$(-\infty\,,\infty) \doteq \mathbb{R}\,.$$

Definimos o **intervalo fechado** $[a\,,b]$*, como sendo o seguinte subconjunto de* $\mathbb{R}$*:*

$$[a\,,b] \doteq \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \le x \le b\}.$$

Definimos o **intervalo fechado** $[a\,,\infty)$*, como sendo o seguinte subconjunto de* $\mathbb{R}$*:*

$$[a\,,\infty) \doteq \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \le x\}.$$

Definimos o **intervalo fechado** $(-\infty\,,b]$*, como sendo o seguinte subconjunto de* $\mathbb{R}$*:*

$$(-\infty\,,b] \doteq \{x \in \mathbb{R}\,;\ x \le b\}.$$

Definimos o **intervalo semi-aberto** $(a\,,b]$ *, como sendo o seguinte subconjunto de* $\mathbb{R}$*:*

$$(a\,,b] \doteq \{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x \le b\}.$$

Definimos o **intervalo semi-aberto** $[a, b)$*, como sendo o seguinte subconjunto de* $\mathbb{R}$*:*

$$[a\,,b) \doteq \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \le x < b\}.$$

Com isto podemos introduzir a:

Definição 2.5.2 *Seja* $O \neq \emptyset$ *um subconjunto de* $\mathbb{R}$.

Diremos que o conjunto O *é* **aberto em $\mathbb{R}$***, se para cada* $x \in O$*, podemos encontrar* $\delta > 0$*, tal que se* $y \in \mathbb{R}$*, satisfaz*

$$|y - x| < \delta$$

deveremos ter $y \in O$.

O conjunto $\emptyset$ *será, por definição,* **aberto em $\mathbb{R}$**.

Observação 2.5.1

1. *Como consequência das Definições 2.5.1 e 2.5.2, segue que* $O \subseteq \mathbb{R}$ *é um subconjunto aberto em* $\mathbb{R}$*, se cada ponto* $x \in O$*, possui um intervalo aberto, que indicaremos por* I_x*, tal que*
$$x \in I_x \subseteq O\,.$$
Na verdade temos que
$$I_x \doteq (x-\delta\,, x+\delta)$$
para algum $\delta > 0$*.*

2. *Em particular, todo intervalo aberto é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}$*.*
A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

3. *o conjunto* $\mathbb{R}$ *também é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}$*.*

Temos a:

Proposição 2.5.1 *A intersecção de dois subconjuntos abertos de* $\mathbb{R}$ *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}$*.*

Demonstração:
Sejam $O_1\,, O_2$ dois subsconjuntos abertos de $\mathbb{R}$.
Se
$$O_1 \cap O_2 = \emptyset$$
nada temos a fazer pois, pela Definição 2.5.2, este será um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.
Por outro lado se
$$O_1 \cap O_2 \neq \emptyset\,,$$
consideremos
$$x \in O_1 \cap O_2\,.$$
Como $x \in O_1$ e O_1 é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $y \in \mathbb{R}$ satisfaz
$$|y-x| < \delta_1\,, \quad \text{deveremos ter} \quad y \in O_1\,. \tag{2.22}$$
De modo semelhante, como $x \in O_2$ e O_2 é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $y \in \mathbb{R}$ satisfaz
$$|y-x| < \delta_2\,, \quad \text{deveremos ter} \quad y \in O_2\,. \tag{2.23}$$
Seja
$$\delta \doteq \min\{\delta,\delta_2\} > 0\,. \tag{2.24}$$

Logo se $y \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$|y - x| < \delta \overset{(2.24)}{\leq} \begin{cases} \delta_1 & \text{então, de (2.22), segue que} \quad y \in O_1\,, \\ \delta_2 & \text{então, de (2.23), segue que} \quad y \in O_2\,. \end{cases},$$

mostrando que $y \in O_1 \cap O_2$, ou seja, $O_1 \cap O_2$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

□

Como consequência temos o:

Corolário 2.5.1 *A intersecção* **finita** *de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$, é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

Segue da Proposição 2.5.1 acima, tomando-se dois a dois conjuntos, ou melhor, utilizando-se de indução sobre o número de conjuntos.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

□

Observação 2.5.2 *O Corolário 2.5.1 acima pode, em geral, ser falso se trocarmos a palavra* **finito** *por* **qualquer**.

Um exemplo que ilustra isso é o seguinte: para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos

$$O_n \doteq \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que o conjunto O_n é subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ (veja o item 2. da Observação 2.5.1).

Porém

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = \{0\}$$

que **não** *é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.*

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição 2.5.2 *A reunião qualquer de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$, é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

Seja Λ um conjunto e suponhamos que, para cada $\lambda \in \Lambda$, o conjunto O_λ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Mostremos que

$$U \doteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Se $U = \emptyset$ nada temos a fazer pois, pela Definição 2.5.2, este será um subconjunto aberto em $\mathbb{R}$.

Caso contrário, ou seja, se $U \neq \emptyset$, para $x \in U$, segue que existe $\lambda_O \in \Lambda$, tal que

$$x \in O_{\lambda_o} .$$

Como o conjunto O_{λ_o} é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, existe $\delta > 0$, tal que se $y \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$|y - x| < \delta , \quad \text{deveremos ter} \quad y \in O_{\lambda_o} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = U , \tag{2.25}$$

mostrando que o conjunto U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, completando a demonstração.

□

Da Proposição 2.5.2 acima segue que a reunião qualquer de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ será um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

O resultado a seguir nos fornece uma recíproca, mais forte, dessa afirmação.

Proposição 2.5.3 *Todo subconjunto aberto, não vazio, de $\mathbb{R}$ é a reunião finita ou, no máximo, enumerável de intervalos abertos disjuntos.*

Demonstração:

Seja O um subconjunto aberto, não vazio, de $\mathbb{R}$.

Como o conjunto O é aberto em $\mathbb{R}$, para cada $x \in O$, existem $y , z \in O$ tais que

$$(z , x) , (x , y) \subseteq O . \tag{2.26}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Sejam

$$b \doteq \sup \underbrace{\{y \in O ; (x , y) \subseteq O\}}_{\doteq U} \quad \text{e} \quad a \doteq \inf \underbrace{\{z \in O ; (z , x) \subseteq O\}}_{\doteq L} . \tag{2.27}$$

Notemos que existem o supremo e o ínfimo do conjunto U em $\mathbb{R}^*$.

Notemos que

$$a < x < b ,$$

assim

$$I_x \doteq (a , b)$$

é um intervalo aberto contendo o ponto x.

Por outro lado, notemos que

$$I_x = (a , b) \subseteq O , \tag{2.28}$$

De fato, pois se $w \in I_x$, poderemos ter as seguintes situações:

$$\text{se} \quad w = x\,, \quad \text{segue que} \quad w = x \in O\,;$$
$$\text{se} \quad x < w < b\,, \tag{2.29}$$
$$\text{se} \quad a < w < x\,. \tag{2.30}$$

Mostraremos que se (2.29) ocorrer deveremos ter $w \in O$.
O caso que (2.30) é semelhante e será deixado como exercício para o leitor.
Como $b = \sup(U)$, segue que existe $y \in O$, tal que

$$x \overset{(2.29)}{<} w < y \quad \text{e} \quad (x\,,y) \subseteq O\,.$$

e assim

$$w \in (x\,,y) \subseteq O\,,$$

mostrando que

$$(a\,,b) \subseteq O\,.$$

Afirmamos que

$$b \notin O\,. \tag{2.31}$$

Suponhamos, por absurdo, se $b \in O$.
Então, como o conjunto O é aberto em $\mathbb{R}$, existirá $\varepsilon > 0$ tal que

$$(b - \varepsilon\,, b + \varepsilon) \subseteq O\,,$$

em particular,

$$(x\,, b + \varepsilon) \subseteq O\,,$$

contrariando o fato que $b = \sup(U)$.
De modo semelhante pode-se mostrar que

$$a \notin O\,. \tag{2.32}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.
Consideremos a coleção formada por todos os intervalos abertos

$$\{I_x\,;\, x \in O\}\,.$$

Observemos que se $x \in O$, então $x \in I_x$ e $I_x \subseteq O$.
Logo temos que

$$O = \bigcup_{x \in O} I_x\,. \tag{2.33}$$

Sejam $(a\,,b)$ e $(c\,,d)$ dois intervalos da coleção acima, que tenham um ponto em comum.

Assim, deveremos ter
$$c < b \quad \text{e} \quad a < d \,.$$

Como em (2.31), temos que
$$c \notin O \,,$$
ou seja,
$$c \notin (a\,,b) \overset{(2.28)}{\subseteq} O \,.$$

Portanto deveremos ter
$$c \leq a \,.$$

De modo semelhante, de (2.32), temos que $a \notin O$ e isto implicará que
$$a \notin (a\,,b)$$
e assim deveremos ter
$$a \leq c \,, \quad \text{ou seja,} \quad c = a \,.$$

De modo análogo, mostra-se que
$$b = d \,.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Portanto deveremos ter:
$$(c\,,d) = (a\,,b) \,.$$

Conclusão: dois intervalos da coleção
$$\{I_x\,;\, x \in O\}$$
ou são disjuntos ou coincidem.

Portanto podemos escrever o conjunto aberto O, como uma reunião disjunta de intervalos abertos I_x, para $x \in O' \subseteq O$.

Se o conjunto O' for finito nada temos a fazer.

Se o conjunto O' é não finito, observemos que cada intervalo I_x, com $x \in O'$, contém, como consequência do Axioma de Archimedes (ou seja, o Corolário 2.2.1), um número racional, ou seja, para $x \in O'$ temos
$$I_x \mapsto \mathbb{Q} \,.$$

Como o conjunto O pode ser escrito como uma reunião disjunta de intervalos disjuntos I_x, segue que podemos encontrar uma correspondência injetora entre os intervalos abertos disjuntos I_x, com um subconjunto, não finito, de $\mathbb{Q}$, ou seja, um conjunto enumerável, e portanto (do Teorema 1.4.1) uma reunião será enumerável, completando a demonstração.

□

Temos também o:

Proposição 2.5.4 (Teorema de Lindelöf) *Sejam Λ um conjunto não vazio e conisderemos o conjunto*

$$\mathscr{C} \doteq \{O_\lambda\,;\, O_\lambda \subseteq \mathbb{R} \text{ aberto, para cada } \lambda \in \Lambda\}.$$

Então existe uma subcoleção enumerável $\{O_i\,;\, i \in \mathbb{N}\}$ da coleção $\mathscr{C}$, tal que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda.$$

Demonstração:

Notemos que, se $O_\lambda = \emptyset$ para todo $\lambda \in \Lambda$, nada temos a fazer.

Consideremos agora o caso que $O_\lambda \neq \emptyset$, para algum $\lambda \in \Lambda$.

Seja

$$U \doteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

e $x \in U$.

Então, exite $\lambda_o \in \Lambda$, tal que $x \in O_{\lambda_o}$.

Como o conjunto O_{λ_o} é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, existe um intervalo aberto, que indicaremos por I_x, de $\mathbb{R}$ tal que

$$x \in I_x \subseteq O_{\lambda_o}\,.$$

Do Corolário 2.2.1, segue que podemos encontrar um intervalo aberto J_x de $\mathbb{R}$, com extremos racionais, tal que

$$x \in J_x \subseteq I_x \subseteq O_{\lambda_o}\,.$$

Como a coleção formada pelos intervalos abertos com extremos racionais é um conjunto enumerável (pois é uma reunição enumerável), segue que a coleção $\{J_x\,;\, x \in U\}$ será enumerável e

$$U = \bigcup_{x \in U} J_x\,.$$

Para cada $x \in U$, escolha o conjunto O_λ que contenha o conjunto J_x, que denotaremos por O_i, assim teremos

$$U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} O_i\,.$$

Logo esta subcoleção $\{O_i\,;\, i \in \mathbb{N}\}$ de $\mathscr{C}$ tem as propriedades requeridas, completando a demonstração.

□

A seguir introduziremos a:

Definição 2.5.3 *Seja $E \subseteq \mathbb{R}$ e $x_o \in \mathbb{R}$.*

Diremos que o ponto x_o é um **ponto aderente do conjunto E em $\mathbb{R}$**, *se dado $\delta > 0$, podemos encontrar $y \in E$, tal que*

$$|y - x_o| < \delta\,.$$

Observação 2.5.3

1. *Pode-se mostrar que* $x_o \in \mathbb{R}$ *é ponto aderente do conjunto* E *em* $\mathbb{R}$ *se, e somente, se cada intervalo aberto de* $\mathbb{R}$*, que contenha o ponto* x_o*, também contém, pelo menos, um ponto do conjunto* E*.*

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. *Se* $x_o \in E$*, então segue que o ponto* x_o *será ponto aderente do conjunto* E *em* $\mathbb{R}$*.*

Com isto podemos introduzir a:

Definição 2.5.4 *Seja* $E \subseteq \mathbb{R}$*.*

Definimos o **fecho do conjunto E em $\mathbb{R}$***, denotado por* $\overline{E}$*, como sendo o conjunto formado por todos os pontos aderentes do conjunto* E *em* $\mathbb{R}$*.*

Com isto temos a:

Proposição 2.5.5 *Sejam* $A, B \subseteq \mathbb{R}$*.*

Temos:

1. $A \subseteq \overline{A}$*;*

2. *se* $A \subseteq B$*, então*
$$\overline{A} \subseteq \overline{B};$$

3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$*.*

4. $\overline{E}$ *é o menor subconjunto fechado de* $\mathbb{R}$*, que contém o conjunto* E*.*

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades 1., 2. e 4..

Para mostrar a propriedade 3., observemos que como
$$A \subseteq A \cup B,$$
logo de 2., segue que
$$\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

De modo análogo temos que
$$\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B},$$
ou seja,
$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

Para mostrar a outra inclusão, notemos que se $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$, segue que
$$x \notin \overline{A} \quad \text{e} \quad x \notin \overline{B}.$$

Como $x \notin \overline{A}$, da Definição 2.5.3, segue que podemos encontrar $\delta_1 > 0$, tal que

$$\text{não existe} \quad y \in A\,, \quad \text{tal que} \quad |y - x| < \delta_1 \tag{2.34}$$

e, de modo semelhante, como $x \notin \overline{B}$, podemos encontrar $\delta_2 > 0$, tal que

$$\text{não existe} \quad y \in B\,, \quad \text{tal que} \quad |y - x| < \delta_2\,. \tag{2.35}$$

Conisdertemos

$$\delta \doteq \min\{\delta_1\,, \delta_2\} > 0\,.$$

Logo, como $\delta \leq \delta_1\,, \delta_2$, de (2.34) e (2.35), segue que

$$\text{não existe} \quad y \in A \cup B\,, \quad \text{tal que} \quad |y - x| < \delta$$

que, pela Definição 2.5.3, é equivalente a dizer que

$$x \notin \overline{A \cup B}\,,$$

mostrando que

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}\,,$$

completando a demonstração.

$\square$

Podemos agora introduzir a seguinte definição:

Definição 2.5.5 *Diremos que* $F \subseteq \mathbb{R}$ *é um* **conjunto fechado em** $\mathbb{R}$ *se*

$$F = \overline{F}\,.$$

Observação 2.5.4

1. *Se* $F \subseteq \mathbb{R}$ *temos, do item 1. da Proposição 2.5.5 acima, segue que*

$$F \subseteq \overline{F}\,.$$

   Logo um condição **necessária e suficiente** *para que* $F \subseteq \mathbb{R}$ *seja fechado em* $\mathbb{R}$*, será*

$$\overline{F} \subseteq F\,,$$

   isto é, que, pela Definição 2.5.4, é o mesmo que dizer que o conjunto F *contém todos os seus pontos aderentes.*

2. *Notemos que o conjunto vazio* $\emptyset$ *e* $\mathbb{R}$ *são subconjunto fechados de* $\mathbb{R}$.

   A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

3. *Temos também que os intervalos*

$$[a\,,b]\,,\quad [a\,,\infty) \quad e \quad (-\infty\,,b]$$

são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$.

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Temos agora a:

Proposição 2.5.6 *Seja* $E \subseteq \mathbb{R}$.
Então $\overline{E}$ *é um subconjunto fechado de* $\mathbb{R}$, *isto é,*

$$\overline{\overline{E}} = \overline{E}\,.$$

Demonstração:
Notemos que, do item 1. da Proposição 2.5.5 acima, segue que

$$\overline{E} \subseteq \overline{\overline{E}}\,.$$

Logo, para completar a demonstração, basta mostrar a outra inclusão.
Para tando, seja $x \in \overline{\overline{E}}$, isto é, x é um ponto aderente do conjunto $\overline{E}$.
Da Definição 2.5.3, segue que dado $\delta > 0$, podemos encontrar

$$y \in \overline{E}\,, \quad \text{tal que} \quad |y - x| < \frac{\delta}{2}\,. \tag{2.36}$$

Como $y \in \overline{E}$, novamente da Definição 2.5.3, podemos encontrar

$$z \in E\,, \quad \text{tal que} \quad |z - y| < \frac{\delta}{2}\,. \tag{2.37}$$

Logo, de (2.36) e (2.37), segue que existe $z \in E$ tal que

$$\begin{aligned} |z - x| &= |(z - y) + (y - x)| \\ &\overset{\text{des. triangular}}{\leq} |z - y| + |y - x| \\ &\overset{(2.36)\text{ e }(2.37)}{<} \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \\ &= \delta\,, \end{aligned} \tag{2.38}$$

que, pela Definição 2.5.3, podemos concluir que $x \in \overline{E}$, mostrando que

$$\overline{\overline{E}} \subseteq \overline{E}\,,$$

completando a demonstração.

□

Temos também a:

Proposição 2.5.7 *Se os conjuntos F_1, F_2 são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$, então o conjunto $F_1 \cup F_2$ também será um subconjuto fechado de $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

Observemos que, do item 3. da Proposição 2.5.5, segue que

$$\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2} \overset{\text{Def. } 2.5.5]}{=} F_1 \cup F_2 ,$$

mostrando, pela Definição 2.5.5, que $F_1 \cup F_2$ é um subconjuto fechado de $\mathbb{R}$, completando a demonstração.

□

Observação 2.5.5 *Como consequência da Proposição 2.5.7 acima, podemos mostrar que a reunião* **finita** *de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$, será um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.*

Porém a reunião de uma coleção **qualquer** *de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$ pode* **não** *ser é um subconjuto fechado de $\mathbb{R}$.*

Deixaremos a cargo do leitor a verificação da primeira afirmação e a construção de um exemplo que mostre que a segunda afirmação é verdadeira.

Para a intersecção temos a:

Proposição 2.5.8 *A intersecção de uma coleção qualquer de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$, será um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

Consideremos

$$\mathscr{C} \doteq \{F \,;\, \text{o conjunto } F \text{ é um subconjunto fechado em } \mathbb{R}\} .$$

Mostremos que o conjunto

$$\bigcap_{F \in \mathscr{C}} F$$

é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.

Se um dos elementos de $\mathscr{C}$ é o conjunto vazio, então

$$\bigcap_{F \in \mathscr{C}} F = \emptyset ,$$

que, pelo item 2. da Observação 2.5.4, é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.

Portanto podemos supor que nenhum elemento de $\mathscr{C}$ é o conjunto vazio.

Consideremos, $x \in \overline{\bigcap_{F \in \mathscr{C}} F}$, isto é, o ponto x é ponto aderente do conjunto $\bigcap_{F \in \mathscr{C}} F$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar

$$y \in \mathscr{C} , \quad \text{tal que} \quad |y - x| < \varepsilon .$$

Notemos que $y \in F$, para cada $F \in \mathscr{C}$ e $|y - x| < \delta$, ou seja, o ponto x é ponto aderente do conjunto F, ou ainda, $x \in \overline{F}$, para cada $F \in \mathscr{C}$.

Como o conjunto F é um subconjunto fechado em $\mathbb{R}$, segue que, para cada $F \in \mathscr{C}$, teremos:

$$x \in \overline{F} = F, \quad \text{ou seja,} \quad x \in \bigcap_{F \in \mathscr{C}} F,$$

mostrando que

$$\overline{\bigcap_{F \in \mathscr{C}} F} \subseteq \bigcap_{F \in \mathscr{C}} F \overset{\text{item 1. da Observação 2.5.4}}{\subseteq} \overline{\bigcap_{F \in \mathscr{C}} F},$$

isto é,

$$\overline{\bigcap_{F \in \mathscr{C}} F} = \bigcap_{F \in \mathscr{C}} F,$$

que, pela Proposição 2.5.6, implica que o conjunto $\bigcap_{F \in \mathscr{C}} F$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$, como queríamos demonstrar.

□

Temos também a:

Proposição 2.5.9 *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. O conjunto A é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ se, e somente se, o conjunto A^c é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

Se $A = \emptyset$, segue que $A^c = \mathbb{R}$ e assim, da Definição 2.5.2, do item 3. da Observação 2.5.1 e do item 2. da Observação 2.5.4 segue A e ^{c} serão subconjuntos abertos e fechados em $\mathbb{R}$.

Suponhamos que o conjunto $A \neq \emptyset$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Logo para cada $x \in A$, podemos encontrar $\delta_x > 0$, de modo se $y \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$|y - x| < \delta_x, \quad \text{deveremos ter} \quad y \in A.$$

Notemos que, o ponto x **<u>não</u>** pode ser ponto aderente de A^c, pois não existe $z \in A^c$, tal que

$$|z - x| < \delta_x.$$

Portanto o conjunto A^c contém todos os seus pontos de aderência, ou seja, o conjunto A^c será um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.

Por outro lado, se o conjunto A^c é um subconjunto fechado em $\mathbb{R}$ e $x \in A$, então o ponto x **<u>não</u>** pode ser ponto aderente do conjunto A^c em $\mathbb{R}$.

De fato, suponhamos por absurdo, que $x \in A$ é ponto aderente do conjunto A^c, isto é, $x \in \overline{A^c}$.

Como o conjunto A^c é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$, segue $\overline{A^c} = A^c$ e portanto

$$x \in \overline{A^c} \cap A = A^c \cap A = \emptyset,$$

o que seria um absurdo.

Como $x \in A$ não é ponto aderente do conjunto A^c, segue que existe $\delta > 0$, tal que não existe $z \in A^c$ satisfazendo

$$|z - x| < \delta\,,$$

ou seja, se

$$y \in \mathbb{R} \quad \text{satisfaz} \quad |y - x| < \delta\,,$$

deveremos ter $y \in A$, mostrando que o conjunto A é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, completando a demonstração.

□

Observação 2.5.6 *O resultado acima é equivalente a: o conjunto F é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ se, e somente se, o conjunto F^c é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.*

A demonstração deste será deixada como exercício para o leitor.

Para o próximo resultado precisaremos da:

Definição 2.5.6 *Sejam Λ um conjunto não vazio e $B \subseteq \mathbb{R}$.*

Diremos que uma coleção $\{O_\lambda\,;\, \lambda \in \Lambda\}$, formada por subconjuntos de $\mathbb{R}$, é uma **cobertura do conjunto B** *se*

$$B \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda\,.$$

Neste caso diremos que a coleção $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ **cobre o conjunto B**.

Na situação acima, se $\Omega \subseteq \Lambda$ e a coleção $\{O_\omega\,;\, \omega \in \Omega\}$ ainda cobre o conjunto B, diremos que a cobertura $\{O_\omega\,;\, \omega \in \Omega\}$ é uma **subcobertura da cobertura $\{O_\lambda\,;\, \lambda \in \Lambda\}$ do conjunto B**.

Se a coleção $\{O_\lambda\,;\, \lambda \in \Lambda\}$ é uma cobertura do conjunto B e, para cada $\lambda \in \Lambda$, o conjunto O_λ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, diremos que a coleção $\{O_\lambda\,;\, \lambda \in \Lambda\}$ é uma **cobertura aberta do conjunto B**.

Se a coleção $\{O_\lambda\,;\, \lambda \in \Lambda\}$ é uma cobertura do conjunto B e, para cada $\lambda \in \Lambda$, o conjunto O_λ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$, diremos que a coleção $\{O_\lambda\,;\, \lambda \in \Lambda\}$ é uma **cobertura fechada do conjunto B**.

Se a coleção $\{O_\lambda\,;\, \lambda \in \Lambda\}$ é uma cobertura do conjunto B e o conjunto Λ é um conjunto finito, diremos que a coleção $\{O_\lambda\,;\, \lambda \in \Lambda\}$ é uma **cobertura finita do con-—bf junto B**.

Com isto temos o:

Teorema 2.5.1 *(**Teorema de Heine-Borel**) Seja F um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}$.*

Se a coleção $\mathscr{C} \doteq \{O_\lambda \, ; \, \lambda \in \Lambda\}$ *é uma cobertura aberta do conjunto* F*, então existe uma subcobertura finita da cobertura* $\{O_\lambda \, ; \, \lambda \in \Lambda\}$ *que ainda cobre o conjunto* F*, mais precisamente, existem*

$$O_1 \, , O_2 \, , \cdots \, , O_n \in \{O_\lambda \, ; \, \lambda \in \Lambda\} \, ,$$

tais que

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_i \, .$$

Demonstração:

Notemos que se o conjunto F é o conjunto vazio nada temos a fazer.

Logo, podemos supor que

$$F \neq \emptyset \, .$$

Suponhamos, primeiramente, que o conjunto F é um intervalo fechado $[a \, , b]$ com $a \, , b \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$F = [a \, , b] \, .$$

Seja

$$\begin{aligned} E \doteq \{x \in \mathbb{R} \, ; \, x \leq b \text{ e o conjunto } [a \, , x] \\ \text{pode ser coberto por um número finito de elementos de } \mathscr{C}\} \, . \end{aligned} \tag{2.39}$$

Notemos que o conjunto E é não vazio, pois $a \in E$ e é limitado superiormente por b.

Logo existe

$$c \doteq \sup(E) \in \mathbb{R} \, . \tag{2.40}$$

Observemos que

$$c = \sup(E) \leq b \, , \quad \text{assim} \quad c \in [a \, , b] \, .$$

Como

$$F = [a \, , b] \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \, ,$$

podemos encontrar $\lambda_o \in \Lambda$ tal que

$$c \in O_{\lambda_o} \, .$$

Como o conjunto O_{λ_o} é um subconjunto aberto em $\mathbb{R}$, podemos encontrar $\varepsilon_o > 0$, de modo que

$$(c - \varepsilon \, , c + \varepsilon) \subseteq O_{\lambda_o} \, . \tag{2.41}$$

Observemos que o número real $c - \varepsilon$ **<u>não</u>** pode ser um limitante superior do conjunto E, pois

$$c - \varepsilon < c = \sup(E) \, .$$

Logo, podemos encontrar $x \in E$ tal que

$$c - \varepsilon < x \leq c \, ,$$

que, de (2.41), implicará em

$$(x\,, c+\varepsilon) \subseteq (c-\varepsilon\,, c+\varepsilon) \overset{(2.41)}{\subseteq} O_{\lambda_o}\,. \tag{2.42}$$

Como $x \in E$, da definição do conjunto E (ver (2.39)), segue que existe uma coleção finita, que denotaremos por

$$\{O_1\,, O_2\,, \cdots\,, O_k\} \subseteq \mathscr{C}\,,$$

tal que

$$[a\,, x] \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} O_j\,, \tag{2.43}$$

que, juntamente com (2.41), implicará que

$$[a\,, c+\varepsilon) = [a\,, x) \cup (x\,, c+\varepsilon) \overset{(2.43)\text{ e }(2.42)}{\subseteq} \bigcup_{j=1}^{k} O_j \cup O_{\lambda_o}\,. \tag{2.44}$$

Portanto para

$$y \in [c\,, c+\varepsilon)\,, \quad \text{com} \quad y \leq b \quad \text{deveremos ter} \quad y \in E\,, \tag{2.45}$$

pois, neste caso, teremos que

$$[a\,, y] \subseteq [c\,, c+\varepsilon)\,,$$

por (2.44), será coberto por um número finito de elementos de $\mathscr{C}$.

Observemos que se

$$z \in [c\,, c+\varepsilon)\,, \quad \text{com} \quad z > c\,, \quad \text{segue que} \quad z \notin E\,. \tag{2.46}$$

De fato, caso contrário, se $z \in E$, como $z > c$, teríamos

$$z > c = \sup(E)\,,$$

o que seria um absurdo.

Portanto, de (2.45) e (2.46), segue que

$$c = b\,.$$

Assim, de (2.44), segue que $b \in E$, mostrando que o intervalo $[a\,, b]$ pode ser coberto por um número finito de elementos de $\mathscr{C}$.

Se o conjunto F for um subconjunto fechado e limitado qualquer de $\mathbb{R}$ e $\mathscr{C} \doteq \{O_\lambda\,;\,, \lambda \in \Lambda\}$ é uma cobertura aberta do conjunto F, como o conjunto F é limitado em $\mathbb{R}$, podemos encontrar $a\,, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$F \subseteq [a\,, b]\,.$$

Consideremos a coleção

$$\mathscr{C}^* \doteq \{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \cup F^c\,.$$

Como o conjunto F é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ segue, da Proposição 2.5.9, que o conjunto F^c será um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Logo a coleção $\mathscr{C}^*$ será uma cobertura aberta de $[a\,,b]$ (na verdade a coleção $\mathscr{C}^*$ será uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$ e, em perticular, de $[a\,,b]$).

Logo, pela primeira parte da demonstração, segue que existem $\{O_1\,,O_2\,,\cdots\,,O_k\} \subseteq \mathscr{C}^*$ subecobertura finita da cobertura $\mathscr{C}^*$ que ainda cobre $[a\,,b]$.

Se

$$F^c = O_{j_o}\,, \quad \text{para algum} \quad j_o \in \{1\,,2\,,,\cdots\,,k\},$$

segue que a coleção $\{O_1\,,O_2\,,\cdots\,,O_{i_o-1}\,,O_{i_o+1}\,,O_k\}$ será uma subecobertura finita da cobertura $\mathscr{C}$ que ainda cobre o conjunto F.

Se

$$F^c \notin \{O_1\,,O_2\,,\cdots\,,O_k\}\,,$$

então esta coleção será uma subcobertura finita da cobertura $\mathscr{C}$ que ainda cobre o conjunto F, completando a demonstração.

□

Definição 2.5.7 *Um $A \subseteq \mathbb{R}$ que têm a propriedade que, toda cobertura aberta do conjunto A, possui uma subcobertura finita que ainda cobre o conjunto A, será denominado* **subconjunto compacto de $\mathbb{R}$**.

Para finalizar, como consequência do Teorema de Heine-Borel (isto é, o Teorema (2.5.1)), temos a,

Proposição 2.5.10 *Sejam Λ um conjunto não vazio, e para cada $\lambda \in \Lambda$, suponhamos que o cojunto F_λ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$. Definamos*

$$\mathscr{C} \doteq \{F_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}\,.$$

Se qualquer intersecção finita de elementos de $\mathscr{C}$ é não vazia e um dos conjuntos da coleção $\mathscr{C}$ é limitado em $\mathbb{R}$ então

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset\,.$$

Demonstração:

Deixaremos a demonstração como exercício para o leitor.

□

2.6 Funções a Valores Reais Contínuas de uma Variável Real

Começaremos com a:

Definição 2.6.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função,* $x_o \in E$ *e* $A \subseteq E$.

Diremos que a função f *é* **contínua em** x_o, *se dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $\delta = \delta(\varepsilon, x_o) > 0$ *tal que, para* $x \in E$,

$$\textit{satisfazendo} \quad |x - x_o| < \delta, \quad \textit{deveremos ter} \quad |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon. \tag{2.47}$$

Diremos que a função f *é* **contínua no conjunto** A, *se ela for uma função contínua em cada ponto* $x \in A$.

Observação 2.6.1 *Na situação da Definição 2.6.1 acima, se a função* f *for contínua no conjunto* E *diremos, apenas, que ela é uma função contínua.*

Para o próximo resultado será interessante introduzir a:

Definição 2.6.2 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Diremos que a função f *é* **limitada no conjunto** E, *se o conjunto* $f(E)$ *for um subconjunto limitado em* $\mathbb{R}$, *ou seja, existe* $M \geq 0$, *tal que*

$$|f(x)| \leq M, \quad \textit{para todo} \quad x \in E. \tag{2.48}$$

Com isto temos a:

Proposição 2.6.1 *Sejam* F *um subconjunto não vazio, fechado e limitado de* $\mathbb{R}$ *e* $f : F \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* F.

Então a função f *é limitada no conjunto* F.

Além disso

$$\max[f(F)] = \sup[f(F)] \quad \textit{e} \quad \min[f(F)] = \inf[f(F)], \tag{2.49}$$

mais precisamente, podemos encontrar $x_o, x_1 \in F$ *tais que*

$$f(x_o) \leq f(x) \leq f(x_1), \quad \textit{para todo} \quad x \in F. \tag{2.50}$$

Demonstração:

Mostremos, primeiramente, que a função f é limitada no conjunto F.

Como a função f é contínua no conjunto F, dado $\varepsilon = 1 > 0$, para cada $x \in F$, podemos encontrar $\delta_x > 0$ tal que, para $x \in F$, satisfazenod

$$|y - x| < \delta_x, \quad \text{deveremos ter} \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon = 1.$$

Como,

$$|f(y)| - |f(x)| \leq |f(y) - f(x)| < 1\,,$$
$$\text{teremos,} \quad |f(y)| \leq |f(x)| + 1\,, \tag{2.51}$$

para cada $y \in (x - \delta_x\,, x + \delta_x)$.

Logo, para cada $x \in F$, se considerarmos os intervalos abertos

$$I_x \doteq (x - \delta_x\,, x + \delta_x)\,,$$

se $y \in I_x \cap F$, de (2.51), segue que

$$|f(y)| \leq |f(x)| + 1\,, \tag{2.52}$$

mostrando que a função f é limitada no conjunto $I_x \cap F$, para cada $x \in F$.

Mas a coleção

$$\{I_x\,;\, x \in F\}$$

é uma cobertura aberta do conjunto F, que é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.

Logo do Teorema de Heine-Borel (ou seja, o Teorema 2.5.1), segue que existe uma subecobertura, que indicaremos por

$$\{I_{x_1}\,, I_{x_2}\,, \cdots\,, I_{x_n}\}\,,$$

da cobertura aberta $\{I_x\,;\, x \in F\}$, que ainda cobre o conjunto F, ou seja

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_{x_i}\,. \tag{2.53}$$

Seja

$$L \doteq 1 + \max\{|f(x_1)|\,, |f(x_2)|\,, \cdots\,, |f(x_n)|\}\,. \tag{2.54}$$

Observemos que se $y \in F$, de (2.53), segue que

$$y \in I_{x_k} \cap F\,, \quad \text{para algum} \quad k \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\,.$$

Logo, de (2.52), segue que

$$\begin{aligned} |f(y)| &\leq |f(x_k)| + 1 \\ &\overset{(2.54)}{\leq} L\,, \end{aligned}$$

mostrando que o conjunto $f(F)$ é um conjunto limitado em $\mathbb{R}$, isto é, a função f é limitada em F.

Como o conjunto $f(M)$ é limitado em $\mathbb{R}$ segue que existem

$$M \doteq \sup[f(F)] \quad \text{e} \quad m \doteq \inf[f(F)]\,.$$

Mostraremos que

$$\max[f(F)] = M\,.$$

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que

$$\min[f(F)] = m\,.$$

Como a função f é limitada em F, segue que $m \in \mathbb{R}$ e nosso objetivo será mostrar que existe

$$x_1 \in F\,, \quad \text{de modo que} f(x_1) = M\,.$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$f(x) < M = \sup[f(F)]\,, \quad \text{para todo} \quad x \in F\,.$$

Logo existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$f(x) \leq M - \varepsilon < M\,, \quad \text{para todo} \quad x \in F\,. \tag{2.55}$$

Da continuidade da função f no ponto x, podemos encontrar $\delta_x > 0$, de modo que se

$$I_x \doteq (x - \delta_x\,, x + \delta_x)\,,$$

$$\begin{aligned}
&\text{para} \quad y \in I_x \cap F\,, \quad \text{teremos} \quad |f(y) - f(x)|\varepsilon\,,\\
\text{ou seja,} \quad & -\varepsilon < f(y) - f(x) < \varepsilon\,,\\
\text{em particular,} \quad & 2\,f(y) - f(x) = f(y) + [f(y) - f(x)] \qquad (2.56)\\
& \overset{(2.55)\text{ e }(2.56)}{<} (M - \varepsilon) + \varepsilon\\
& = M\,,\\
\text{ou seja,} \quad & \text{para} \quad x \in I_x \cap F\,, \quad \text{teremos} \quad f(y) < \frac{1}{2}[f(x) + M]\,. \qquad (2.57)
\end{aligned}$$

Como a coleçaõ $\{I_x\,;\, x \in F\}$ é uma cobertura aberta do conjunto F, que é limitado e fechado, do Teorema de Heine-Borel (ou seja, o Teorema 2.5.1), podemos encontrar uma subcobertura, que indicaremos por

$$\{I_{x_1}\,, I_{x_2}\,, \cdots\,, I_{x_m}\}\,,$$

da cobertura aberta $\{I_x\,;,\; x \in F\}$ que ainda cobre o conjunto F, ou seja,

$$F \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} I_{x_j}\,. \tag{2.58}$$

Consideremos

$$K \doteq \max\{f(x_1)\,, f(x_2)\,, \cdots f(x_n)\} \overset{(2.55)}{<} M\,. \tag{2.59}$$

Observemos que, se $y \in F$, de (2.58), podemos encontrar $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$, de modo que

$$y \in I_{x_k} \cap F.$$

Logo, de (2.57), segue que

$$\begin{aligned} f(y) &\overset{(2.57)}{<} \frac{1}{2}\,[f(x_k) + M] \\ &\overset{(2.59)}{\leq} \frac{1}{2}\,(K + M)\,, \end{aligned}$$

para todo $y \in F$.

Portanto o número real $\frac{1}{2}\,(K + M)$ será um limitante superior do conjunto $f(E)$.

Por outro lado, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,(K + M) &\overset{(2.59)}{<} \frac{1}{2}(M + M) \\ &= M\,, \end{aligned}$$

ou seja, o número real $\frac{1}{2}\,(K+M)$ é um limitante superior do conjunto $f(E)$ que é menor que $M = \sup[f(F)]$, o que seria um absurdo.

Portanto

$$\sup[f(F)] = M = \max[f(F)]\,,$$

ou seja, podemos encontrar $x_1 \in F$ tal que

$$f(x_1) = \max[f(F)] = M = \sup[f(F)]\,,$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Observação 2.6.2 *O resultado acima pode ser reescrito na seguinte forma: toda função $f : F \to \mathbb{R}$ que é contínua em F, onde o conjunto F é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, tem máximo e mínimo globais em F.*

Temos também a:

Proposição 2.6.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.*

A função f será contínua em $\mathbb{R}$ se, e somente se, imagem inversa de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ serão subconjuntos abertos em $\mathbb{R}$, mais precisamente, se o conjuto O é um subconjunto aberto em $\mathbb{R}$, então o conjunto

$$f^{-1}(O) \doteq \{x \in \mathbb{R}\,;\, f(x) \in O\} \tag{2.60}$$

será um subconjunto aberto em $\mathbb{R}$.

Demonstração:

Suponhamos que o conjunto $f^{-1}(O)$ é um subconjunto aberto em $\mathbb{R}$, sempre que o conjunto O for subconjunto aberto em $\mathbb{R}$.

Mostremos que a função f será contínua em cada ponto $x_o \in \mathbb{R}$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, temos que o intervalo aberto

$$O \doteq (f(x_o) - \varepsilon\,, f(x_o) + \varepsilon) \tag{2.61}$$

é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Logo, por hipótese, o conjunto $f^{-1}(O)$ deverá ser um subconjunto aberto em $\mathbb{R}$.

Notemos que

$$x_o \in f^{-1}(O)\,, \quad \text{pois} \quad f(x_o) \in O = (f(x_o) - \varepsilon\,, f(x_o) + \varepsilon)\,.$$

Assim, deverá existir $\delta > 0$, tal que o intervalo aberto

$$I_{x_o} \doteq (x_o - \delta\,, x_o + \delta) \subseteq f^{-1}(O)\,. \tag{2.62}$$

Logo, se $y \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$|y - x_o| < \delta\,, \quad \text{ou seja,} \quad y \in I_{x_o}\,, \tag{2.63}$$

de (2.60), teremos que

$$f(y) \overset{(2.63),(2.62) \text{ e } (2.60)}{\in} O = (f(x_o) - \varepsilon\,, f(x_o) + \varepsilon)\,,$$

ou ainda,

$$|f(y) - f(x_o)| < \varepsilon\,,$$

mostrando que a função f é contínua em $x_o \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, suponhamos que a função f é contínua em $\mathbb{R}$ e que o conjunto O é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Mostremos que o conjunto $f^{-1}(O)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Notemos que se $f^{-1}(O) = \emptyset$, pela Definição 2.5.2, segue que este será um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Por outro lado, se $f^{-1}(O) \neq \emptyset$, segue que existe $x_o \in f^{-1}(O)$, isto é,

$$f(x_o) \in O\,.$$

Como o conjunto O é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que

$$(f(x_o) - \varepsilon\,, f(x_o) + \varepsilon) \subseteq O\,.$$

Da continuidade da função f em x_o, segue que podemos encontrar $\delta_o > 0$, tal que se

$$|y - x_o| < \delta_o\,, \quad \text{teremos} \quad |f(y) - f(x_o)| < \varepsilon\,,$$

que é equivalente a dizer que se

$$y \in I_{x_o} \doteq (x_o - \delta, x_o + \delta)$$

deveremos ter

$$f(y) \in (f(x_o) - \varepsilon, f(x_o) + \varepsilon) \subseteq O\,.$$

Logo, de (2.60), segue que

$$I_{x_o} \subseteq f^{-1}(O)\,,$$

mostrando que o conjunto $f^{-1}(O)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, completando a demonstração.

$\square$

Temos agora a:

Definição 2.6.3 *Sejam* E *um subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}$ *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Diremos que a função f *é* **uniformemente contínua no conjunto** E*, se dado* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que para todo* $x, y \in E$ *que satisfazem*

$$|y - x| < \delta\,, \qquad \textit{deveremos ter} \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon\,. \tag{2.64}$$

Com isto temos a:

Proposição 2.6.3 *Se o conjunto* F *é um subconjunto limitado e fechado de* $\mathbb{R}$ *e* $f : F \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* F*, então a função* f *será uniformemente contínua no conjunto* F*.*

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$ e $x \in F$, da continuidade da função f em x, segue que podemos encontrar $\delta_x = \delta(x, \varepsilon) > 0$, tal que, para $x, y \in F$, satisfazendo

$$\text{se} \quad |y - x| < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.65}$$

Para cada $x \in F$, onsideremos o intervalo aberto

$$I_x \doteq \left(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2} \right)\,. \tag{2.66}$$

Logo a coleção $\{I_x\,;\, x \in F\}$ será uma cobertura aberta do conjunto F, que é limitado e fechado em $\mathbb{R}$.

Logo pelo Teorema de Heine-Borel (ou seja, o Teorema 2.5.1), podemos encontrr uma subcobertura finita, que indicaremos por

$$\{I_{x_1}, I_{x_2}, \cdots, I_{x_n}\}\,,$$

da cobertura aberta $\{I_x\,;\, x \in F\}$, que ainda cobre o conjunto F, ou seja,

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_{x_i}\,. \tag{2.67}$$

Consideremos

$$\delta \doteq \frac{1}{2} \min\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \cdots, \delta_{x_n}\} > 0. \tag{2.68}$$

Observemos que, se $y, z \in F$, satisfazem

$$|y - z| < \delta, \tag{2.69}$$

de (2.67), podemos encontrar $k \in \{1, \cdots, n\}$ tal que

$$y \in I_{x_k}, \quad \text{que, de (2.66), é o mesmo que,} \quad |y - x_k| < \frac{\delta_k}{2}. \tag{2.70}$$

Assim, teremos que:

$$\begin{aligned} |z - x_k| &= |z - y + y - x_k| \\ &\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |z - y| + |y - x_k| \\ &\overset{(2.69) \text{ e } (2.70)}{<} \delta + \frac{\delta_{x_k}}{2} \\ &\overset{(2.68)}{\leq} \frac{\delta_{x_k}}{2} + \frac{\delta_{x_k}}{2} = \delta_k. \end{aligned}$$

Logo, de (2.65), segue que

$$|f(y) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.71}$$

e

$$|f(z) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.72}$$

ou ainda, se $y, z \in F$ satisfazem

$$|y - z| < \delta,$$

teremos:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(y)| &= |f(z) - f(x_k) + f(x_k) - f(y)| \\ &\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |f(z) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(y)| \\ &\overset{(2.71) \text{ e } (2.72)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que a função f é uniformemente contínua em F, como queríamos demonstrar. □

Observação 2.6.3 *O resultado acima pode ser reescrito na seguinte forma: toda função $f : F \to \mathbb{R}$ que é contínua no conjunto F, onde o conjunto F é subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, é uniformemente contínua no conjunt F.*

Para finalizar esta seção, temos as:

Definição 2.6.4 *Sejam* E *um subconjunto de* $\mathbb{R}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, $f_n : E \to \mathbb{R}$ *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *funções definidas em* E, *a valores reais.*

Diremos que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é* **pontulamente convergente para a função f, em** E, *se para cada* $x \in E$ *fixado, a sequëncia de números reais* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente para* $f(x)$ *em* $\mathbb{R}$.

Neste caso escrevermos

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad em \quad E\,.$$

Observação 2.6.4 *Notemos que, na situação da Definição 2.6.4 acima,* $f_n \xrightarrow{p} f$ *em* E *se, e somente se, para cada* $x \in E$ *fixado, dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrr* $N_o = N_o(x\,,\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *tal que se*

$$n \geq N_o\,, \quad teremos \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,. \tag{2.73}$$

Um outro modo de convergência é dado pela:

Definição 2.6.5 *Na situação da Definição 2.6.4 acima, diremos que a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é* **uniformente convergente em para a função f, em** E, *se dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que se*

$$n \geq N_o\,, \quad temos\ que \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad para\ todo \quad x \in E\,. \tag{2.74}$$

Neste caso escrevermos

$$f_n \xrightarrow{u} f \quad em \quad E\,.$$

.

Observação 2.6.5 *É fácil ver que se* $f_n \xrightarrow{u} f$ *em* E, *então* $f_n \xrightarrow{p} f$ *em* E.

Não *vale a recíproda afirmação acima, isto é, existem sequência de funções que convergem pontulamente mas* **não** *convergem uniformemente.*

Deixaremos como exercício para o leitor a construção de um exemplo para esta última situação.

2.7 Conjunto de Borel

Começaremos pela:

Definição 2.7.1 *A menor* σ*-álgebra que contém todos os intervalos abertos* $(a\,,b)$ *de* $\mathbb{R}$, *será denominada* **σ-álgebra de Borel** *e será indicada por* $\mathscr{B}$.

Um conjunto pertencente a σ*-álgebra de Borel será denominado* **boreliano**.

Observação 2.7.1

1. *Da Proposição 1.2.3, existe e é única a σ-álgebra de Borel.*

2. *Observemos que também, da Proposição 1.2.3, existe uma, única, menor σ-álgebra, que indicaremos por $\mathscr{C}$, que contém todos os intervalos fechados e limitados $[a\,,b]$ de $\mathbb{R}$.*

   Afirmamos que a σ-álgebra $\mathscr{C}$, coincide com a σ-álgebra de Borel, isto é, com $\mathscr{B}$.

   De fato, se $[a\,,b]$ é um intervalo fechado, podemos escrevê-lo como:

$$[a\,,b] = \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(a - \frac{1}{n}\,, b + \frac{1}{n}\right)}_{\in \mathscr{B}}}_{\text{do item 2. da Observação 1.2.2} \atop \in \quad \mathscr{B}},$$

   assim, da definição da σ-álgebra de Borel, segue que $[a\,,b] \in \mathscr{B}$, ou seja,

$$\mathscr{C} \subseteq \mathscr{B}\,. \tag{2.75}$$

   Por outro lado, $(a\,,b)$ é um intervalo aberto, podemos descrevê-lo como:

$$(a\,,b) = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[a + \frac{1}{n}\,, b - \frac{1}{n}\right]}_{\in \mathscr{C}}}_{\text{do item 1. da Definição 1.2.2} \atop \in \quad \mathscr{C}},$$

   assim, da definição de σ-álgebra, segue que $(a\,,b) \in \mathscr{C}$, ou seja,

$$\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}\,, \quad \text{que juntamente com (2.75), implicará que,} \quad \mathscr{B} = \mathscr{C}$$

3. *Seja $\mathscr{D}$ a menor σ-álgebra que contém os intervalos semi-abertos $(a\,,b]$ de $\mathbb{R}$.*

   Observemos que se $(a\,,b] \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo semi-aberto, podemos escrevê-lo como:

$$(a\,,b] = \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(a\,, b + \frac{1}{n}\right)}_{\in \mathscr{B}}}_{\text{do item 2. da Observação 1.2.2} \atop \in \quad \mathscr{B}} \quad ,$$

   assim, da definição da σ-álgebra de Borel, segue que $[a\,,b] \in \mathscr{B}$, ou seja,

$$\mathscr{D} \subseteq \mathscr{B}\,. \tag{2.76}$$

Notemos também que o intervalo aberto $(a\,,b) \subseteq \mathbb{R}$*, podemos descrevê-lo como:*

$$(a\,,b) = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(a\,,b-\frac{1}{n}\right]}_{\in\mathscr{D}}}_{\text{do item 1. da Definição 1.2.2}} \overset{}{\in} \mathscr{D}\,,$$

assim, da definição de σ*-álgebra, segue que* $(a\,,b)\in\mathscr{C}$*, ou seja,*

$$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{D}\,,\quad \text{que juntamente com (2.76), implicará que,}\quad \mathscr{B}=\mathscr{D}$$

4. *O mesmo ocorrerá se considerarmos a menor* σ*-álgebra que contém os intervalos semi-abertos* $[a\,,b)$ *de* $\mathbb{R}$*.*

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

5. *Seja* $\mathscr{E}$ *a menor* σ*-álgebraque contém os intervalos abertos* $(a\,,\infty)$ *de* $\mathbb{R}$*.*

   Observemos que se $(a\,,\infty)\subseteq\mathbb{R}$*, podemos escrevê-lo como:*

$$(a\,,\infty) = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty}\underbrace{(a\,,n)}_{\in\mathscr{B}}}_{\text{do item 1. da Definição 1.2.2}} \in \mathscr{B}$$

   assim, da definição da σ*-álgebra de Borel, segue que* $(a\,,\infty)\in\mathscr{B}$*, ou seja,*

$$\mathscr{E}\subseteq\mathscr{B}\,. \tag{2.77}$$

   Por outro lado, notemos que

$$[b\,,\infty) = \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(b-\frac{1}{n}\,,\infty\right)}_{\in\mathscr{E}}}_{\text{do item 2. da Observação 1.2.2}} \in \mathscr{E}\,.$$

   Em particular, teremos

$$(-\infty\,,b) = [b\,,\infty)^c \overset{\text{do item 2. da Definição 1.2.2}}{\in} \mathscr{E}\,.$$

   Logo o intervalo aberto $(a\,,b)\subseteq\mathbb{R}$*, pode ser escrito da seguinte forma:*

$$(a\,,b) = \underbrace{(a\,,\infty)}_{\in\mathscr{E}} \cap \underbrace{(-\infty\,,b)}_{\in\mathscr{E}}\,.$$

   assim, da definição de σ*-álgebra, segue que* $(a\,,b)\in\mathscr{C}$*, ou seja,*

$$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{E}\,,\quad \text{que juntamente com (2.77), implicará que,}\quad \mathscr{B}=\mathscr{E}\,.$$

6. *O mesmo ocorrerá se considerarmos a menor σ-álgebra que contém os intervalos:*

   - $[a\,,\infty)$ *de* $\mathbb{R}$
   - $(-\infty\,,b)$ *de* $\mathbb{R}$
   - $(-\infty\,,b]$ *de* $\mathbb{R}$.

   A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Baseado nas propriedades acima introduzimos a:

Definição 2.7.2 *Um subconjunto de $\mathbb{R}$ que pode ser obtido como reunião enumerável de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$ será denominado* **conjunto do tipo $\mathcal{F}_\sigma$**.

Um subconjunto de $\mathbb{R}$ que pode ser obtido como interseção enumerável de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ será denominado **conjunto do tipo $\mathcal{G}_\delta$**.

Com isot temos o:

Exemplo 2.7.1 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$.*

Então o intervalor aberto $(a\,,b)$ é um conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ e o intervalo fechado $[a\,,b]$ é um conjunto $\mathcal{G}_\delta$.

Resolução:

De fato, notemos que:

$$(a\,,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a + \frac{1}{n}\,, b - \frac{1}{n}\right]\,,$$

ou seja, $(a\,,b)$ é um conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ e

$$[a\,,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}\,, b + \frac{1}{n}\right)\,,$$

ou seja, $[a\,,b]$ é um conjunto $\mathcal{G}_\delta$, completando a resolução.

$\square$

Observação 2.7.2

1. *Afirmamos que todo conjunto fechado de $\mathbb{R}$ é um conjunto $\mathcal{F}_\sigma$.*

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Em particular, como cada ponto é um conjunto fechado em $\mathbb{R}$, segue, do item 1. acima, que todo subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ é um conjunto $\mathcal{F}_\sigma$.*

3. *Notemos que a reunião enumerável de conjuntos* $\mathcal{F}_\sigma$ *será um conjunto* $\mathcal{F}_\sigma$.

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

4. *Da Proposição 2.5.3 edo Exemplo 2.7.1 acima , segue que todo subconjunto aberto de* $\mathbb{R}$ *é um* $\mathcal{F}_\sigma$.

5. *Observemos também que o complementar de um conjunto* $\mathcal{F}_\sigma$ *será um conjunto* $\mathcal{G}_\delta$ *e vice-versa.*

6. *Da Proposição 2.5.3, segue que os conjuntos que são* $\mathcal{F}_\sigma$ *ou* $\mathcal{G}_\delta$ *são Borelianos.*

7. *Podemos considerar também um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *que é do tipo* $(\mathcal{F}_\sigma)_\delta$, *isto é, um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *que é a intersecção enumerável de conjuntos que são* $\mathcal{F}_\sigma$, *que chamaremos de* **conjunto do tipo** $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$.

   De modo semelhante podemos definir um subconjunto de $\mathbb{R}$ *que é um* **conjunto do tipo** $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$**, ou** $\mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma}$**, etc.** .

   Assim podemos construir duas sequências de tipos de subconjuntos de $\mathbb{R}$, *a saber do tipo:*

$$\mathcal{F}_\sigma\,, \mathcal{F}_{\sigma\delta}\,, \mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma}, \cdots \quad e \quad \mathcal{G}_\delta\,, \mathcal{G}_{\delta\sigma}\,, \mathcal{G}_{\delta\sigma\delta}, \cdots$$

   que serão todos elementos da σ*-álgebra de Borel.*

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

8. *Vale observar que existem conjunto borelianos que* **não** *são de nenhum dos tipos acima.*

   Deixaremos como exercício para o leitor encontra um exemplo que isto ocorra.

Capítulo 3

Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$

3.1 Introdução

Nosso objetivo principal neste capítulo é obter uma maneira de estender o comprimento $l(I)$ (ou a medida) de um intervalo I de $\mathbb{R}$ (por exemplo, se $I = [a\,,b]$, ou seja, um intervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}$, teremos $l([a\,,b]) = b - a$) a subconjuntos borelianos, ou seja, estender a função

$$l : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^*\,,$$

onde

$$\mathcal{F} \doteq \{I\,;\, I \text{ é um intervalo de } \mathbb{R}\}\,,$$

ao conjunto $\mathscr{B}$, isto é, a $\sigma-$álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.

Em princípio, gostaríamos de saber encontrar a "medida" de um subconjunto de $\mathbb{R}$ que é, por exemplo, uma reunião enumerável disjunta de intervalos abertos de $\mathbb{R}$.

Um modo de fazer isto seria considerar a σ-álgebra

$$\mathscr{P}(\mathbb{R}) \doteq \{A : A \subseteq \mathbb{R}\}$$

o conjunto das partes de $\mathbb{R}$, e obter uma função

$$m : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*\,,$$

de tal modo que:

1. Se $E \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$ temos que
$$m(E) \in [0\,, +\infty]\,;$$
2. Se I é um intervalo limitado de $\mathbb{R}$ então
$$m(I) = l(I)\,;$$
3. Se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um sequência de subconjuntos disjuntos em $\mathscr{P}(\mathbb{R})$, então
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)\,;$$

4. Finalmente, que a função m seja invariante por translações, isto é, se $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ e $y \in \mathbb{R}$, definindo-se

$$E + y \doteq \{e + y\,;\, e \in E\} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})\,,$$

deveremos ter

$$m(E + y) = m(E)\,.$$

Como veremos mais adiante, na seção 3.4., será **impossível** construir uma tal função. Na verdade **não** se conhece uma função

$$m : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$$

que satisfaça as propriedades 1., 2. e 3. .

Devido a isto deveremos abrir mão de algo, a saber, diminuir o domínio da função m, s de modo que as propriedades 1., 2., 3. e 4. sejam válidas neste "novo" domínio.

Como veremos mais adiante, a σ-álgebra $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ será substituida por uma σ-álgebra menor e neste caso a função

$$m : \sigma\text{-álgebra menor} \to [0, +\infty]$$

que irá satisfazer 2., 3. e 4 e, além disso, será uma dita **medida enumeravelmente aditiva**.

Este será nosso objetivo nas próximas seções.

3.2 Medida Exterior em $\mathbb{R}$

No que se segue vamos supor que

$$l : \underbrace{\{I : I \text{ é intervalo aberto de } \mathbb{R}\}}_{\doteq \mathcal{F}} \to [0, +\infty]$$

é a função que nos fornece o comprimento de um intevalo aberto $I \in \mathcal{F}$.

Vale observar que se I é um intervalo limitado de $\mathbb{R}$, teremos

$$l(I) = l(\bar{I}).$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Se $A \subseteq \mathbb{R}$, consideremos uma coleção enumerável de intervalos abertos de $\mathbb{R}$, que inidcaremos por $\{I_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$, que cobrem o conjunto A, isto é,

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\,.$$

Para cada coleção do tipo acima, consideremos a soma dos comprimentos dos intervalos abertos que compõe a coleção que cobre o conjutno A, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \in [0\,,+\infty]\,.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$l(I_n) \geq 0\,,$$

assim está soma está bem definida, indepentemente da ordem com que as parcelas foram somadas.

Com isto temos a:

Definição 3.2.1 *Na situação acima, definimos a* **medida exterior do conjunto** $A \subseteq \mathbb{R}$, *denotada por* $m^*(A)$, *como sendo o ínfimo das somas acima, tomado sobre todas as possíveis coberturas por intervalos abertos do conjunto* A, *isto é,*

$$m^*(A) \doteq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)\,;\, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\,,\ \textit{onde}\ I_n \subseteq \mathcal{F}\,,\ \textit{para cada}\ n \in \mathbb{N}\right\}. \tag{3.1}$$

Em particular, temos que a aplicação

$$m^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0\,,+\infty]$$

está bem definida.

Com isto temos a:

Proposição 3.2.1 *Na situação da Definição 3.2.1 acima,*

1. *temos que*
$$m^*(\emptyset) = 0\,; \tag{3.2}$$

2. *se* $a \in \mathbb{R}$, *então*
$$m^*(\{a\}) = 0\,; \tag{3.3}$$

3. *se* $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, *então*
$$m^*(A) \leq m^*(B)\,; \tag{3.4}$$

4. *se* I *é um intervalo de* $\mathbb{R}$, *então*
$$m^*(I) = l(I)\,. \tag{3.5}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades 1., 2. e 3. .

Mostremos a propriedade 4. .

Vamos supor, primeiramente, que I é um intervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}$, isto é,

$$I \doteq [a\,,b]\,.$$

Dado $\varepsilon > 0$, temos que

$$I = [a\,,b] \subseteq (a-\varepsilon, b+\varepsilon)\,.$$

Logo, da Definição 3.2.1, segue que

$$\begin{aligned} m^*([a\,,b]) &\overset{(3.1)}{\leq} l((a-\varepsilon\,,b+\varepsilon)) \\ &= (b+\varepsilon)-(a-\varepsilon) \\ &= b-a+2\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Logo, para $\varepsilon > 0$ temos que

$$m^*([a\,,b]) \leq b-a+2\varepsilon\,,$$

mostrando que

$$m^*([a\,,b]) \leq b-a = l([a\,,b])\,. \tag{3.6}$$

Como a funçaõ m^* é definida como o ínfimo de uma soma (ver (3.1)), para mostrar a outra desigualdade, basta encontrar uma coleção de intervalos abertos de $\mathbb{R}$, que indicaremos por

$$\{I_n\,;\,n \in \mathbb{N}\},$$

que cubra o intervalo $I = [a\,,b]$, de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \geq b-a\,. \tag{3.7}$$

Para isto, observemos que, do Teorema de Heine-Borel (isto é, o Teorema 2.5.1, toda coleção de intervalos abertos $\{I_n\,;\,n \in \mathbb{N}\}$ que cubra o intervalo fechado e limitado $I = [a\,,b]$, admite subcobertuta finita, isto é, existem

$$I_{i_1}\,, I_{i_2}\,,\cdots\,, I_{i_k} \in \{I_n\,;\,n \in \mathbb{N}\},$$

tais que

$$I = [a\,,b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_{i_j}\,.$$

Do fato que

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \geq \sum_{j=1}^{k} l(I_{i_j}),$$

segue que basta provar (3.7) para uma subcoleção finita que cubra o intervalo fechado e limitado $I = [a, b]$, ou seja, para

$$I = [a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_{i_j},$$

devemos mostrar que

$$\sum_{j=1}^{k} l(I_{i_j}) \geq b - a. \tag{3.8}$$

Notemos que, para $a \in \bigcup_{j=1}^{k} I_{i_j}$, podemos encontrar, pelo menos, um $i_{j_o} \in \{1, \cdots k\}$ tal que

$$a \in I_{i_{j_o}}.$$

Suponhamos que

$$I_{i_{j_o}} = (a_1, b_1).$$

Logo, temos que

$$a_1 < a < b_1.$$

Observemos que se

$$b \leq b_1,$$

teremos que

$$\begin{aligned} b - a &\leq b_1 - a \\ &\overset{a_1 < a}{<} b_1 - a_1 \\ &= l([a_1, b_1]) \\ &= l(I_{i_{j_o}}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} l(I_{i_j}), \end{aligned}$$

mostrando que (3.8) ocorre.

Por outro lado, se

$$b_1 < b,$$

então como

$$b_1 \in [a, b] \quad \text{e} \quad b_1 \notin (a_1, b_1),$$

segue que existe um intervalo na coleção $\{I_n\,;\,n\in\mathbb{N}\}$, que denotaremos por

$$I_{i_{j_1}} = (a_2\,,b_2)\,,$$

tal que

$$b_1 \in I_{i_{j_1}} = (a_2\,,b_2)\,,$$

isto é:

$$a_2 < b_1 < b_2.$$

Novamente, se

$$b \leq b_2\,,$$

segue que

$$\begin{aligned}
b - a &\leq b_2 - a \\
&\overset{a_1<a}{<} b_2 - a_1 \\
&\leq b_2 - a_1 + \underbrace{(b_1 - a_2)}_{\geq 0} \\
&= (b_2 - a_2) + (b_1 - a_1) \\
&= l([a_1\,,b_2]) + l([a_1\,,b_1]) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} l(I_{i_j}),
\end{aligned}$$

mostrando que (3.8) ocorre.

Se

$$b_2 < b\,,$$

podemos repetir o processa acima.

Em geral, repetindo o processa acima um número finito de vezes (pois a coleção $\{I_n\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ é finita), obteremos uma coleção finita de intervalos abertos da coleção $\{I_n\,;\,n\in\mathbb{N}\}$, que indicaremos por

$$(a_1\,,b_1)\,,(a_2\,,b_2)\cdots,(a_k\,,b_k)\,,$$

de modo que

$$a_i < b_{i-1} < b_i\,,\quad \text{para cada}\quad i\in\{1\,,2\,,\cdots,k\},\quad \text{onde}\quad b_o \doteq a\,. \tag{3.9}$$

Deste modo teremos

$$b \in (a_k\,,b_k)\,,\quad \text{isto é,}\quad a_k < b < b_k\,.$$

Assim, segue que:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} l(I_j) &\geq \sum_{i=k}^{n} l((a_i, b_i))\\ &= (b_k - a_k) + (b_{k-1} - a_{k-1}) + \cdots + (b_2 - a_2) + (b_1 - a_1)\\ &= b_k - \underbrace{(a_k - b_{k-1})}_{\leq 0} - \underbrace{(a_{k-1} + b_{k-2})}_{\leq 0} - \cdots - \underbrace{(a_2 - b_1)}_{\leq 0} - a_1\\ &> b_k - a_1,\end{aligned}$$

pois, por (3.9), temos que

$$a_i < b_{i_{i-1}}\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1\,, 2\,, \cdots k\}\,.$$

Como

$$b < b_k \quad \text{e} \quad a_1 < a\,, \quad \text{segue que} \quad b_k - a_1 > b - a\,,$$

logo

$$\sum_{j=1}^{n} l(I_j) \geq b - a\,,$$

mostrando que

$$m^*([b\,, a]) \geq b - a = l([a\,, b])\,. \tag{3.10}$$

Portanto de (3.6) e (3.10), segue que

$$m^*([b\,, a]) = b - a = l([a\,, b])\,.$$

Consideremos agora o caso em que o conjunto I é um intervalo limitado (não fechado) em $\mathbb{R}$.

Afirmamos: dado $\varepsilon > 0$, existe um intervalo limitado e fechado

$$J \subseteq I\,,$$

tal que

$$l(I) - \varepsilon < l(J)\,.$$

Deixaremos a demonstração da afirmação acima como exercício para o leitor.

Vale observar que temos somente uma das seguintes três possibilidades, a saber:

$$I = (a\,, b]\,, \quad I = [a\,, b) \quad \text{ou} \quad I = (a\,, b)\,.$$

.

Logo, da primeira parte (o caso em que I é um intervalo fechado e limitado) e da propriedade 3., teremos:

$$\begin{aligned}
l(I) - \varepsilon &< l(J) \\
&\overset{J \text{ é um intervalo fechado e limitado}}{=} m^*(J) \\
&\overset{J\subseteq I \text{ e a propriedade } 3.}{\leq} m^*(I) \\
&\overset{I\subseteq \bar{I} \text{ e a propriedade } 3.}{\leq} m^*\left(\bar{I}\right) \\
&\overset{\bar{I} \text{ é um intervalo fechado e limitado de } \mathbb{R}}{=} l\left(\bar{I}\right) \\
&= b - a \\
&= l(I),
\end{aligned}$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ temos que

$$l(I) - \varepsilon < m^*(I) \leq l(I)\,,$$

mostrando que

$$m^*(I) = l(I).$$

Finalmente, se o conjunto I é um intervalo não limitado, teremos

$$l(I) = +\infty\,.$$

Então, dado $k \geq 0$, podemos encontrar um intervalo limitado $J \subseteq I$ tal que

$$l(J) = k\,.$$

Logo, pela propriedade 3., temos que

$$\begin{aligned}
m^*(I) &\geq m^*(J) \\
&\overset{J \text{ é um intervalo limitado de } \mathbb{R}}{=} l(J) \\
&= k\,,
\end{aligned}$$

ou seja, para todo $k \geq 0$ temos

$$m^*(I) \geq k\,, \quad \text{isto é,} \quad m^*(I) = +\infty = l(I)\,,$$

completando a demonstração do item 4. .

□

A seguir temos a:

Proposição 3.2.2 *Seja* $\{A_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ *uma coleção enumerável de subconjuntos de* $\mathbb{R}$.

Então

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n). \tag{3.11}$$

Demonstração:

Se existir $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$m^*(A_{n_o}) = +\infty\,,$$

então a desigualdade (3.11) acima tornar-se-á uma igualdade, no caso

$$+\infty = +\infty\,,$$

já que do item 3. da Proposição 3.2.1, temos que

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\overset{A_{n_o}\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}{\geq} m(A_{n_o}) \\ &= +\infty\,. \end{aligned}$$

Logo podemos supor que

$$0 \leq m^*(A_n) < \infty\,, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, da Definição (3.2.1) de $m^*(A_n)$ (ou seja, do fato deser um ínifmo), segue que existe uma coleção enumerável de intervalos abertos, que indicaremos por

$$\{I_{n\,i}\,;\, i \in \mathbb{N}\}\,,$$

tal que

$$A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n\,i} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{n\,i}) \leq m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\,. \tag{3.12}$$

Observemos que a coleção $\{I_{n\,i}\,;\, n\,, i \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção enumerável de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ que cobre o conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Assim, da Definição (3.2.1), teremos:

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\leq \sum_{i,n=1}^{\infty} l(I_{n\,i}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} l(I_{n,i}) \\ &\overset{(3.12)}{<} \sum_{n=1}^{\infty}\left[m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon\,, \end{aligned}$$

para cada $\varepsilon > 0$, ou seja,

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n),$$

completando a demonstração.

□

Como consequência temos os:

Corolário 3.2.1 *Seja* A *um subconjunto enumerável de* $\mathbb{R}$.
Então

$$m^*(A) = 0\,.$$

Em particular,

$$m^*(\mathbb{N}) = m^*(\mathbb{Z}) = m^*(\mathbb{Q}) = 0\,.$$

Demonstração:
De fato, se

$$A \doteq \{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}\,, \tag{3.13}$$

então, da Proposição 3.2.2 acima, segue que

$$\begin{aligned} m^*(A) &\overset{(3.13)}{=} m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\}\right) \\ &\overset{(3.11)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{m^*\left(\{a_n\}\right)}_{\text{do item 2. da Proposição 3.2.1} \atop = 0} = 0\,, \end{aligned}$$

completando a demonstração.

□

Temos também o:

Corolário 3.2.2 *O intervalo fechado* $[0\,,1] \subseteq \mathbb{R}$ *é não enumerável.*

Demonstração:
Sabemos que

$$l([0\,,1]) = 1 > 0\,. \tag{3.14}$$

Suponhamos, por absurdo, que o intervalo fechado e limitado $[0\,,1] \subseteq \mathbb{R}$ seja enumerável.

Logo, do Corolário 3.2.1 acima, teríamos que

$$l([0\,,1]) \overset{\text{item 4. da Proposição 3.2.1}}{=} m^*([0\,,1]) \overset{\text{Corolário 3.2.1}}{=} 0,$$

o que contraria (3.14), completando a demonstração.

□

Para finalizar temos o seguinte resultado, cuja demonstração será deixada como exercício para o leitor (Exercícios 5, 6, 7 e 8, da página 56, do Livro o Royden [HLR]):

Proposição 3.2.3 *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}$. *Então*

1. *Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um subconjunto aberto $O \subseteq \mathbb{R}$, tal que*
$$A \subseteq O \quad e \quad m^*(O) - \varepsilon \le m^*(A)\,. \tag{3.15}$$
2. *podemos encontrar um conjunto $G \subseteq \mathbb{R}$, do tipo $\mathscr{G}_\delta$, tal que*
$$A \subseteq G \quad e \quad m^*(G) = m^*(A). \tag{3.16}$$
3. *a função m^* é invariante por translação.*
4. *Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é tal que $m^*(A) = 0$ e $B \subseteq \mathbb{R}$, então*
$$m^*(A \cup B) = m^*(B)\,. \tag{3.17}$$
5. *Seja $A = [0\,,1] \cap \mathbb{Q}$ e $\{I_i\,;\ para\ i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}\}$ é uma coleção finita de intervalos abertos que cobre o conjunto A. Então*
$$\sum_{i=1}^{n} l(I_i) \ge 1\,. \tag{3.18}$$

3.3 Conjuntos Mensuráveis e a Medida de Lebesgue

Embora a medida exterior tenha a vantage de estar definida para todo subcojunto de $\mathbb{R}$, ela (como vimo no Exercício 2, da página 53 do Livro o Royden [HLR]) não é enumeravelmente aditiva, ou seja, é, em geral, é enumeravelmente sub-aditiva, isto é, se $\{E_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}$ temos, em geral, que
$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n). \tag{3.19}$$

Ela tornar-se-á enumeravelmente aditiva (ou seja, valerá a igualdade na deisgualdade acima) se restringirmos os conjuntos para os quais calcularemos a "medida".

Tal restrição foi introduzida por Carathéodory e é dada pela:

Definição 3.3.1 *Diremos que $E \subseteq \mathbb{R}$, é um* **conjunto Lebesgue mensurável**, *se para cada $A \subseteq \mathbb{R}$ temos a seguinte identidade:*
$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(\underbrace{A \cap E^c}_{A \setminus E})\,. \tag{3.20}$$

Denotaremos a coleção formada por todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são Lebesgue mensuráveis por $\mathscr{M}$.

Observação 3.3.1

1. *Notemos que*

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*\left([A \cap E] \cup [A \cap E^c]\right) \\ &\overset{\text{Corolário 3.2.1}}{\leq} m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c). \end{aligned}$$

   Logo, segue que o conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ *é Lebesgue mensurável se, e somente se,*

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \tag{3.21}$$

   para todo $A \subseteq \mathbb{R}$*, ou seja,* (3.20) *será equivalente a* (3.21)*.*

2. *Podemos trocar* $E \subseteq \mathbb{R}$ *por* $E^c \subseteq \mathbb{R}$ *na identidade* (3.20)*, que a mesma não se altera, ou seja, o conjunto* $E \subseteq \mathbb{R}$ *tem a propriedade 3.20 se, e somente se, o conjunto* $E^c \subseteq \mathbb{R}$ *tem a propriedade 3.20.*

A seguir apresentaremos algumas propriedades importantes dos conjuntos Lebesgue mensuráveis.

Começaremos pelo:

Lema 3.3.1 *Seja* $E \subseteq \mathbb{R}$*, tal que*

$$m^*(E) = 0. \tag{3.22}$$

Então o conjunto E *é Lebesgue mensurável.*

Demonstração:

De fato, para cada $A \subseteq \mathbb{R}$, como

$$A \cap E \subseteq E,$$

teremos

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E) &\overset{\text{item 3 da Proposição 3.2.1}}{\leq} m^*(E) \\ &\overset{(3.22)}{=} 0, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \qquad m^*(A \cap E) = 0. \tag{3.23}$$

Por outro lado, temos que

$$A \cap E^c \subseteq A,$$

assim

$$\begin{aligned} m^*(A) &\overset{\text{item 3 da Proposição 3.2.1}}{\geq} m^*(A \cap E^c) \\ &\overset{(3.23)}{=} m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap E), \end{aligned}$$

isto é, o conjunto E tem a propriedade (3.21) para todo $A \subseteq \mathbb{R}$, mostrando, pela Definição 3.3.1, que o conjunto E é Lebesgue mensurável.

□

Temos também o:

Lema 3.3.2 *Sejam* $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$ *dois conjuntos Lebesgue mensuráveis.*
Então o conjunto $E_1 \cup E_2$ *será Lebesgue mensurável.*

Demonstração:
De fato, para cada $A \subseteq \mathbb{R}$, como o conjunto $E_2 \subseteq \mathbb{R}$ é Lebesgue mensurável (utilizando $A \cap E_1$, no lugar de A, na Definição 3.3.1) segue que

$$m^*(A \cap E_1{}^c) = m^*[(A \cap E_1{}^c) \cap E_2] + m^*[(A \cap E_1{}^c) \cap E_2^c]. \tag{3.24}$$

Mas

$$\begin{aligned} A \cap (E_1 \cup E_2) &= [A \cap E_1] \cup [A \cap E_2] \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} [A \cap E_1] \cup [A \cap E_2 \cap E_1{}^c], \end{aligned} \tag{3.25}$$

que implicará em

$$m^*[A \cap (E_1 \cup E_2)] \overset{\text{item 3. da Proposição 3.2.1}}{\leq} m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap E_1^c). \tag{3.26}$$

Logo

$$\begin{aligned} m^*[A \cap (E_1 \cup E_2)] + m^*[A \cap [E_1 \cup E_2]^c] &= m^*[A \cap (E_1 \cup E_2)] + m^*[A \cap E_1^c \cap E_2^c] \\ &\overset{(3.26)}{\leq} m^*(A \cap E_1) + \underbrace{m^*[(A \cap E_1{}^c) \cap E_2] + m^*[(A \cap E_1{}^c) \cap E_2^c]}_{\overset{(??)}{=} m^*(A \cap E_1{}^c)} \\ &= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1{}^c) \\ &\overset{E_1 \text{ é Lebesgue mensurável}]}{=} m^*(A), \end{aligned}$$

isto é, vale a (3.21) para $E = E_1 \cup E_2$, ou seja, $E_1 \cup E_2 \subseteq \mathbb{R}$ é Lebesgue mensurável, como queríamos demonstrar.

□

Com o Lema 3.3.2 acima e do item 2. da Observação 3.3.1, segue o:

Lema 3.3.3 *A coleção* $\mathscr{M}$, *introduzida na Definição 3.3.1, é uma álgebra em* $\mathbb{R}$.

Temos também o:

Lema 3.3.4 *Sejam* $E_1, E_2, \cdots E_n \subseteq \mathbb{R}$ *uma coleção finita de subconjuntos disjuntos e Lebesgue mensuráveis e* $A \subseteq \mathbb{R}$ *qualquer.*
Então

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n m^*(A \cap E_i). \tag{3.27}$$

Demonstração:

A prova será feita por indução sobre n.

Se $n = 1$, temos que a identidade (3.27) vale trivialmente.

Suponhamos que a identidade (3.27) seja válida para uma coleção de $n-1$ subconjuntos E_i's Lebesgues mensuráveis, isto é,

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i). \tag{3.28}$$

Como os conjuntos da coleção $\{E_i : i = 1, \cdots, n\}$ são disjuntos, temos que

$$E_n{}^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\,, \tag{3.29}$$

assim

$$\left[A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] \cap E_n \overset{\cup_{i=1}^{n} E_i}{=} A \cap E_n \tag{3.30}$$

$$\left[A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] \cap E_n{}^c \overset{(3.29)}{=} A \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\,. \tag{3.31}$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que o conjunto E_n é Lebesgue mesurável, da Definição 3.3.1, com

$$\mathcal{A} \doteq A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\,, \tag{3.32}$$

segue que

$$\begin{aligned}
m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) &\overset{E_n \text{ é Lebesgue mensurável}}{=} m^*(\mathcal{A} \cap E_n) + m^*(\mathcal{A} \cap E_n{}^c) \\
&\overset{(3.32)}{=} m^*\left(\left[A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] \cap E_n\right) + m^*\left(\left[A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] \cap E_n{}^c\right) \\
&\overset{(3.30) \text{ e } (3.31)}{=} m^*(A \cap E_n) + m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) \\
&\overset{(3.28)}{=} m^*(A \cap E_n) + \sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i),
\end{aligned}$$

completando a demonstração.

□

Podemos agora enunciar e provar o:

Teorema 3.3.1 *A coleção $\mathscr{M}$, introduzida na Definição 3.3.1, é uma σ-álgebra em $\mathbb{R}$.*

Além disso, todo conjunto de medida exterior zero é Lebesgue mensurável.

Demonstração:

No Lema (3.3.3) mostramos que a coleção $\mathscr{M}$ é uma álgebra em $\mathbb{R}$.

Logo resta-nos mostrar que a reunião enumerável de subsconjuntos de $\mathscr{M}$ é um elemento de $\mathscr{M}$, ou seja, que reunião enumerável de conjuntos Lebesgue mensuráveis é um conjunto Lebesgue mensurável.

Sejam $\{E_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ uma coleção de subconjuntos Lebesgue mesuráveis.

Mostremos que o conjunto

$$E \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \tag{3.33}$$

é um conjunto Lebesgue mensurável.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que o conjunto E é a reunião disjunta de subconjuntos Lebesgue mesuráveis, isto é, a coleção

$$\{E_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$$

é uma coleção de subconjuntos disjuntos e Lebesgue mesuráveis.

De fato, da Proposição 1.2.2, temos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

onde a coleção $\{B_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é dois a dois disjuntos.

Além disso, da demonstração da Proposição 1.2.2 (veja (1.20) e (1.21)), temos que

$$B_1 \doteq \underbrace{E_1}_{\in \mathscr{M}}$$

e para $n \geq 2$, teremos

$$\begin{aligned} B_n &\doteq E_n \setminus [E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1}] \\ &= \underbrace{E_n}_{\in \mathscr{M}} \cap \underbrace{[E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1}]^c}_{\in \mathscr{M}} \in \mathscr{M}\,, \end{aligned}$$

pois $\mathscr{M}$ é uma álgebra em $\mathbb{R}$

Logo

$$B_n \in \mathscr{M}\,, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$F_n \doteq \bigcup_{i=1}^{n} E_i \subseteq E\,. \tag{3.34}$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $F_n \in \mathscr{M}$ (pois $\mathscr{M}$ é uma álgebra em $\mathbb{R}$).
Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}
E^c &\overset{(3.33)}{=} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} {E_n}^c \\
&\subseteq \bigcap_{i=n+1}^{\infty} {E_n}^c \\
&\overset{E_i \cap E_j = \emptyset,\ \text{para } i \neq j}{=} \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c \\
&\overset{(3.34)}{=} {F_n}^c .
\end{aligned}$$

Como $F_N \in \mathscr{M}$, teremos:

$$\begin{aligned}
m^*(A) &= m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap {F_n}^c) \\
&\overset{E^c \subseteq {F_n}^c \text{ e o item 3. da Proposição 3.2.1}}{\geq} m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap E^c) . \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto F_n é a reunião disjunta de um número finito de elementos Lebesgue mensuráveis, do Lema 3.3.4, segue que:

$$\begin{aligned}
m^*(A \cap F_n) &\overset{(3.34)}{=} m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \\
&\overset{E_i \cap E_j = \emptyset,\ \text{para } i \neq j \text{ e o Lema 3.3.4}}{=} \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) . \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
m^*(A) &\overset{(3.35)}{\geq} m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap E^c) \\
&\overset{(3.36)}{=} \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E^c) . \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Como o lado esquerdo da desigualdade (3.37) acima não depende de $n \in \mathbb{N}$, passando o limite em (3.37), quando $n \to \infty$, obteremos:

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E^c) . \qquad (3.38)$$

Observemos que, da Proposição 3.2.2, segue que

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E) &\overset{(3.33)}{=} m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \\ &= m^*\left[\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap E_i)\right] \\ &\overset{(3.11)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i)\,, \end{aligned} \tag{3.39}$$

que juntamente com (3.12) implicarão

$$m^*(A) \overset{(3.38)\text{ e }(3.39)}{\geq} m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)\,.$$

Logo, do item 1. da Observação 3.3.1, segue que o conjunto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ é um conjunto Lebesgue mensurável.

A última afirmação segue do Lema 3.3.1, completando a demonstração.

□

Temos também o:

Lema 3.3.5 *Seja* $a \in \mathbb{R}$.

Então o intervalo $(a\,,\infty) \subseteq \mathbb{R}$ *é Lebesgue mensurável, ou seja,*

$$(a\,,\infty) \in \mathscr{M}\,. \tag{3.40}$$

Demonstração:

De fato, para cada $A \subseteq \mathbb{R}$, do item 1. da Observação 3.3.1, basta mostrar que

$$m^*(A) \geq m^*[A \cap (a\,,\infty)] + m^*[A \cap (a\,,\infty)^c]\,. \tag{3.41}$$

Se considerarmos

$$A_1 \doteq A \cap (a\,,\infty)\,, \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned} A_2 &\doteq A \cap (-\infty\,,a] \\ &= A \cap [(-\infty\,,a)]^c\,, \end{aligned} \tag{3.43}$$

mostrar a desigualdade (3.41) será equivalente a mostrar

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A)\,. \tag{3.44}$$

Notemos que, se

$$m^*(A) = \infty\,,$$

segue que (3.41) valerá trivialmente.

Por outro lado, se

$$m^*(A) < \infty\,,$$

da Definição 3.2.1 de m^* segue que, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar uma coleção enumerável, que indicaremos por

$$\{I_n\,;\,n \in \mathbb{N}\},$$

de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ que cobrem o conjunto A, ou seja,

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n\,, \tag{3.45}$$

tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \leq m^*(A) + \varepsilon\,. \tag{3.46}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos:

$$I'_n \doteq I_n \cap (a\,,\infty)\,, \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned} I''_n &\doteq I_n \cap (-\infty\,,a] \\ &= I_n \cap (a\,,\infty)^c\,. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, os conjuntos I'_n e I''_n serão intervalos de $\mathbb{R}$ ou o subconjunto vazio, logo conjunto Lebesgue mensuráveis.

Além disso, de (3.47) e (3.48), teremos:

$$\begin{aligned} l(I_n) &\overset{I_n = I'_n \cup I''_n \text{ e } I'_n \cap I''_n = \emptyset}{=} l(I'_n) + l(I''_n) \\ &\overset{\text{do item 4. da Proposição 3.2.1}}{=} m^*(I'_n) + m^*(I''_n) \end{aligned} \tag{3.49}$$

Como

$$\begin{aligned} A_1 &\overset{(3.42)}{=} A \cap (a\,,\infty) \\ &\overset{(3.45)}{\subseteq} \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right] \cap (a\,,\infty) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{I_n \cap (a\,,\infty)\} \\ &\overset{(3.47)}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} I'_n\,, \end{aligned} \tag{3.50}$$

segue que

$$\begin{aligned} m^*(A_1) &\overset{(3.50) \text{ e o item 3. da Proposição 3.2.1}}{\leq} m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I'_n\right) \\ &\overset{\text{Proposiçao 3.2.2}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I'_n)\,. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Como

$$
\begin{aligned}
A_2 &\overset{(3.43)}{=} A \cap (\infty\,,a] \\
&\overset{(3.45)}{\subseteq} \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right] \cap (-\infty\,,a] \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{I_n \cap (-\infty\,,a]\} \\
&\overset{(3.48)}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n'',
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

segue que

$$
\begin{aligned}
m^*(A_2) &\overset{\text{do item 3. da Proposição 3.2.1}}{\leq} m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n''\right) \\
&\overset{\text{Proposição 3.2.2}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n'').
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

Logo de (3.51) e (3.53) segue

$$
\begin{aligned}
m^*(A_1) + m^*(A_2) &\overset{(3.51)\text{ e }(3.53)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n') + \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n'') \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [m^*(I_n') + m^*(I_n'')] \\
&\overset{(3.49)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \\
&\overset{(3.46)}{\leq} m^*(A) + \varepsilon\,,
\end{aligned}
$$

para cada $\varepsilon > 0$, mostrando que a identidade (3.44) ocorre, ou seja, o conjunto $(a\,,\infty)$ é um conjunto Lebesgue mensurável, completando a demonstração.

□

Como consequência temos o:

Teorema 3.3.2 *Todo conjunto de Borel (introduzido na Definição 2.7.1) é Lebesgue mensurável.*

Em particular, temos que todo subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ e todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ será Lebesgue mensurável, isto é,

$$
\mathscr{B} \subseteq \mathscr{M}\,.
$$

Demonstração:

Como $\mathscr{M}$ é uma σ-álgebra e, do Lema 3.3.5 acima, temos que $(a, \infty) \in \mathscr{M}$ então teremos que

$$(-\infty, a] = (a, \infty)^c \in \mathscr{M} \,. \tag{3.54}$$

Logo, de (3.54), teremos:

$$(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(-\infty, b - \frac{1}{n}\right]}_{\overset{(3.54)}{\in} \mathscr{M}} \in \mathscr{M} \,, \tag{3.55}$$

$$(a, b) = \underbrace{(-\infty, b)}_{\overset{(3.55)}{\in} \mathscr{M}} \cap \underbrace{(a, \infty)}_{\overset{(3.40)}{\in} \mathscr{M}} \in \mathscr{M} \,.$$

Logo podemos concluir que todo intervalo aberto de $\mathbb{R}$ é Lebesgue mensurável, isto é, pertencerá a $\mathscr{M}$.

Da Proposição 2.5.3, temos que cada subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ é reunião enumerável de intervalos abertos de $\mathbb{R}$.

Logo também será Lebesgue mensurável, isto é, pertencerá a $\mathscr{M}$.

Com isto temos que todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ será Lebesgue mensurável, pois seu complementar é um subconjunto aberto em $\mathbb{R}$.

Logo $\mathscr{M}$ é uma σ-álgebra que contém todos os intervalos aberto de $\mathbb{R}$ logo, da Definição da σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}$ (isto é, a Definição 2.7.1) deveremos ter

$$\mathscr{B} \subseteq \mathscr{M} \,,$$

completando a demonstração.

□

Observação 3.3.2 *Poderíamos ter feito uma demonstração mais direta do Teorema 3.3.2 acima, utilizando o fato que $\mathscr{M}$ é uma σ-álgebra em $\mathbb{R}$, o Lema 3.3.5 acima e a Observação 2.7.1.*

Podemos agora introduzir a:

Definição 3.3.2 *Seja $E \in \mathscr{M}$.*

Definimos a **medida de Lebesgue do conjunto E**, *indicada por $m(E)$, como sendo*

$$m(E) \doteq m^*(E) \,. \tag{3.56}$$

Observação 3.3.3 *A Definição 3.3.2 acima nos diz que*

$$m \doteq m^*_{|_{\mathscr{M}}} \,, \tag{3.57}$$

ou seja, a função m é a restrição da medida exterior m^*, aos conjuntos Lebesgue mensuráveis.

Em particular, a medida de Lebesgue é invariante por translações.

A medida de Lebesgue tem as seguintes duas propriedades importantes:

Proposição 3.3.1 *Seja* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de conjuntos Lebesgue mensuráveis. Então vale*

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n). \tag{3.58}$$

Se a coleção $\{E_n\,;\, n\in\mathbb{N}\}$ *de conjuntos Lebesgue mensuráveis é disjunta, então a desigualdade acima tornar-se-á um igualdade, isto é,*

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n). \tag{3.59}$$

Demonstração:

A desigualdade (3.58) segue do fato que a medida de Lebesgue m, é a restrição da medida exterior m^* à σ-álgebra $\mathscr{M}$ e da Proposição 3.2.2.

Mostremos a identidade (3.59).

Observemos que para uma coleção finita $\{E_n\,;\, n\in\mathbb{N}\}$ de conjuntos Lebesgue mensuráveis cujos elementos são, dois a dois, disjuntos, do Lema 3.3.4, com $A \doteq \mathbb{R}$, como $\bigcup_{i=1}^{n} E_n \in \mathscr{M}$, teremos:

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_n\right) &\overset{(3.59)}{=} m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_n\right) \\ &\overset{(3.27) \text{ com } A=\mathbb{R}}{=} \sum_{i=1}^{n} m^*(E_n) \\ &\overset{(3.59)}{=} \sum_{i=1}^{n} m(E_n)\,, \end{aligned} \tag{3.60}$$

ou seja, a medida m é finitamente aditiva em $\mathscr{M}$.

Se a coleção $\{E_n\,;\, n\in\mathbb{N}\}$ formada por conjuntos Lebesgue mensuráveis é disjunta e infinita então temos que

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\,.$$

Logo, do item 3. da Proposição 3.2.1, segue que

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &\geq m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \\ &\overset{(3.60)}{=} \sum_{i=1}^{n} m(E_n)\,. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Como o lado esquerdo da desigualdade (3.61) acima não depende de n teremos, passando o limite em (3.61), quando $n \to \infty$, obteremos

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_n)\,.$$

Desta desigualdade e da desigualdade (3.58), segue a igualdade (3.59), como queríamos demonstrar.

$\square$

Para o próximo resultado precisaremos do:

Lema 3.3.6 *Sejam* $E\,, F \in \mathscr{M}$.

1. *Se* $E \subseteq F$, *então*
$$m(E) \leq m(F)\,; \tag{3.62}$$
2. *Se* $E \subseteq F$ *e* $m(E) < \infty$, *então*
$$m(F \setminus E) = m(F) - m(E)\,. \tag{3.63}$$

Demonstração:

O item 1. acima, segue de (3.56) e do item 3. da Proposição 3.2.1.

Para o item 1. temos que

$$F = \underbrace{E}_{\doteq A_1} \cup \underbrace{(F \setminus E)}_{\doteq A_2} \quad \text{e} \quad E \cap (F \setminus E) = \emptyset. \tag{3.64}$$

Como $A_1\,, A_2 \in \mathscr{M}$ e são disjuntos, teremos

$$\begin{aligned} m(F) &\overset{(3.64)}{=} m(A_1 \cup A_2) \\ &\overset{A_1 \cap A_2 = \emptyset\,, A_1\,, a_2 \in \mathscr{M} \text{ e a Proposição } 3.58}{=} m(A_1) + m(A_2) \\ &\overset{(3.64)}{=} m(E) + m(F \setminus E)\,. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Como $m(E) < \infty$, isto implicará em

$$m(F \setminus E) = m(F) - m(E)\,,$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Podemos agora enunciar e demonstrar a:

Proposição 3.3.2

1. *Seja* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a uma sequência de conjuntos Lebesgue mensuráveis crescente, isto é,*

$$E_n \subseteq E_{n+1}\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.66}$$

   Então

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)\,. \tag{3.67}$$

2. *Seja* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seja uma sequência de conjuntos Lebesgue mensuráveis, decrescente, isto é,*

$$F_{n+1} \subseteq F_n\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{3.68}$$

   de modo que

$$m(F_1) < \infty\,. \tag{3.69}$$

   Então

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \lim_{n\to\infty} m(F_n). \tag{3.70}$$

Demonstração:

Do item 1.:

Observemos que se

$$m(E_{n_o}) = \infty\,, \quad \text{para algum} \quad n_o \in \mathbb{N}\,, \tag{3.71}$$

como

$$E_{n_o} \subseteq E_k\,, \quad \text{para todo} \quad k \geq n_o \quad \text{e} \quad E_{n_o} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\,,$$

do item 1. do Lema 3.3.6, segue que

$$\infty \overset{(3.71)}{=} m(E_{n_o}) \leq m(E_k) \geq \quad \text{e} \quad \infty \overset{(3.71)}{=} m(E_{n_o}) \leq m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right),$$

ou seja,

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \infty = \lim_{n\to\infty} m(E_n)\,,$$

ou seja, a identidade (3.67) ocorrerá trivialmente.

Podemos agora supor que

$$m(E_n) < \infty\,, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.72}$$

Sejam

$$\begin{aligned} A_1 &\doteq E_1\,, \\ A_{n+1} &\doteq E_{n+1} \setminus E_n \\ &= E_{n+1} \cap {E_n}^c\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $E_n \in \mathscr{M}$, e $\mathscr{M}$ é σ-álgebra, segue que $A_n \in \mathscr{M}$.

Por outro lado, como a sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, segue que a sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é formada por conjuntos que são, dois a dois, disjuntos.

Além disso, teremos:

$$E_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{e} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,. \tag{3.74}$$

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Logo

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &\overset{(3.74)}{=} m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &\overset{\text{Proposição 3.3.1 aplicada a família } \{A_n\,;n\in\mathbb{N}\}\text{, que é disjunta}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(A_i)\,. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, como temos (3.72), do item 2. do Lema 3.3.6, segue que

$$\begin{aligned} m(A_{n+1}) &\overset{(3.73)}{=} m\left(E_{n+1}\right) \setminus E_n) \\ &\overset{(3.63)}{=} m(E_{n+1}) - m(E_n)\,. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Logo a somas parcial de ordem n, da série do lado direito de (3.75), será dada por:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} m(A_i) &= m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) + \cdots + m(A_n) \\ &\overset{(3.76)}{=} m(\underbrace{A_1}_{=E_1}) + [m(E_2) - m(E_1)] + [m(E_3) - m(E_2)] + \cdots + [m(E_n) - m(E_{n-1})] \\ &= m(E_n)\,. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Logo, de (3.75) e (3.77), teremos

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &\overset{(3.77)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \\ &\overset{(3.77)}{=} \lim_{n\to\infty} m(E_n)\,, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Do item 2.:

Como sequência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente segue que

$$F_{n+1} \subseteq F_n\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, do item 1. do Lema 3.3.6, segue que

$$m(F_{n+1}) \leq m(F_n) \leq m(F_!)\,. \tag{3.78}$$

Logo de (3.78) e do fato que

$$m(F_1) < \infty\,,$$

segue que

$$m(F_n) < \infty \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.79}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$E_n \doteq F_1 \setminus F_n\,. \tag{3.80}$$

Como a sequência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é formada por conjuntos Lebesgue mensuráveis segue que a sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será formada por conjuntos Lebesgue mensuráveis (pois $\mathscr{M}$ é σ-álgebra).

Além disso, a a sequência de conjuntos $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, segue que a sequência de conjutos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescente.

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Logo, do item 1., segue que

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &\overset{(3.67)}{=} \lim_{n\to\infty} m(E_n) \\ &\overset{\text{item 2. do Lema 3.3.6, aplicado a (3.80)}}{=} \lim_{n\to\infty} [m(F_1) - m(F_n)] \\ &= m(F_1) - \lim_{n\to\infty} m(F_n). \end{aligned} \tag{3.81}$$

Como

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n &\overset{(3.80)}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} [F_1 \setminus F_n] \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} [F_1 \cap {F_n}^c] \\ &= F_1 \cap [\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c}_{\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right]^c}] \\ &= F_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\,. \end{aligned}$$

Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathscr{M}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F_1$ e $m(F_1) < \infty$, teremos

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \overset{(3.62)}{\leq} M(F_1) < \infty\,.$$

Logo do item 2. do Lema 3.3.6), segue que

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m(F_1) - m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right). \tag{3.82}$$

Logo comparando (3.81) e (3.82), segue que

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \lim_{n\to\infty} m(F_n)\,,$$

obtendo a identidade (3.70) e completando a demonstração.

□

Para finalizar esta seçõ temos o resultado a seguir, cuja demonstração será deixada como exercício para o leitor (trata-se Exercício 13, página 62, do livro do Royden [HLR]):

Proposição 3.3.3 *(***Primeiro Princípio de Littlewood***) Seja $E \subseteq \mathbb{R}$. São equivalentes:*

1. *o conjunto E é um conjunto Lebesgue mensurável;*
2. *dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto aberto $O \subseteq \mathbb{R}$, tal que*
$$E \subseteq O \quad e \quad m^*(O \setminus E) < \varepsilon\,; \tag{3.83}$$
3. *dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto fechado $F \subseteq \mathbb{R}$, tal que*
$$F \subseteq E \quad e \quad m^*(E \setminus F) < \varepsilon; \tag{3.84}$$
4. *existe um $\mathscr{G}_\delta$ conjunto $G \subseteq \mathbb{R}$, tal que*
$$E \subseteq G \quad e \quad m^*(G \setminus E) = 0\,; \tag{3.85}$$
5. *existe um $\mathscr{F}_\sigma$ conjunto $F \subseteq \mathbb{R}$ tal que*
$$F \subseteq E \quad e \quad m^*(E \setminus F) = 0\,. \tag{3.86}$$
6. *Se*
$$m^*(E) < \infty\,, \tag{3.87}$$
então os itens acima são equivalente a: dado $\varepsilon > 0$, existe uma coleção finita de intervalos abertos, que denotaremos por $\mathcal{U}$, tal que
$$m^*[(\mathcal{U} \setminus E) \cup (E \setminus \mathcal{U})] < \varepsilon\,. \tag{3.88}$$

3.4 Conjunto Não Lebesgue Mensurável

Nesta seção exibiremos um subconjunto de $\mathbb{R}$ que <u>não</u> é Lebesgue mensurável.

Para tanto introduziremos a:

Definição 3.4.1 *Sejam,* $x\,,y \in [0\,,1)$.

Definimos a **adição, módulo 1, de** x **e** y, *indicada por* $x \overset{\circ}{+} y$, *como sendo*

$$x \overset{\circ}{+} y \doteq \begin{cases} x+y\,, & se \quad x+y<1\,, \\ x+y-1\,, & se \quad x+y \geq 1 \end{cases}. \tag{3.89}$$

Observação 3.4.1

1. *Se associarmos a cada* $x \in [0\,,1)$, *o ângulo* $2\pi x$, *então a operação* $\overset{\circ}{+}$ *corre-ponderá a adição de âgulos.*

2. *A operação* $\overset{\circ}{+}$ *é comutativa, associativa, levando um par de número reais que pertencem* $[0\,,1) \times [0\,,1)$, *em* $[0\,,1)$, *ou seja,*

$$\overset{\circ}{+} : [0\,,1) \times [0\,,1) \to [0\,,1)\,.$$

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação destes fatos.

Com isto podemos introduzir a:

Definição 3.4.2 *Se* $y_o \in [0,1)$ *e* $E \subseteq [0,1)$, *podemos definir a* **translação, módulo 1, do conjunto** E**, por** y_o, *indicada por* $E \overset{\circ}{+} y_o$, *como sendo o subconjunto de* $[0\,,1)$ *dado por:*

$$E \overset{\circ}{+} y_o \doteq \{z \in [0\,,1)\,;\, z = x \overset{\circ}{+} y_o \text{ para algum } x \in E\}. \tag{3.90}$$

Observação 3.4.2 *Se considerarmos a adição módulo* 1 *como a adição de ângulos, então a translação módulo* 1 *de um conjunto* E *por* $y_o \in [0\,,1)$, *será a rotação do conjunto* E, *de um ângulo* $2\pi y_o$.

Com isto temos o:

Lema 3.4.1 *Sejam* $E \subseteq [0,1)$ *um conjunto Lebesgue mensurável e* $y_o \in [0,1)$.

Então o conjunto $E \overset{\circ}{+} y$ *é um conjunto Lebesgue mensurável e*

$$m(E \overset{\circ}{+} y_o) = m(E)\,. \tag{3.91}$$

Demonstração:

Consideremos os conjuntos:

$$E_1 \doteq E \cap [0\,,1-y_o) \quad \text{e} \quad E_2 \doteq E \cap [1-y_o\,,1)\,. \tag{3.92}$$

Notemos que os conjunto E_1 e E_2 são disjuntos e Lebesgue mensuráveis, cuja reunião é o conjunto E.

Logo, da Proposição 3.3.1, segue que

$$m(E) \overset{(3.59)}{=} m(E_1) + m(E_2)\,. \tag{3.93}$$

Para cada $x \in E_1$, temos que

$$x < 1 - y_o\,, \quad \text{ou seja,} \quad x + y_o < 1\,.$$

Assim

$$E_1 \overset{\circ}{+} y_o \overset{(3.90) \text{ e, de } (3.89), \text{ temos } x \overset{\circ}{+} y_o = x + y_o}{=} E_1 + y_o\,. \tag{3.94}$$

Logo o conjunto $E_1 \overset{\circ}{+} y_o$ é Lebesgue mensurável e, como a medida de Lebesgue é invariante por translações (veja a Observação 3.3.3), segue que

$$\begin{aligned} m\left(E_1 \overset{\circ}{+} y_o\right) &\overset{(3.94)}{=} m(E_1 + y_o) \\ &\overset{\text{Observação 3.3.3}}{=} m(E_1)\,. \end{aligned} \tag{3.95}$$

Por outro lado, para cada $x \in E_2 \subseteq [0\,,1)$, temos que

$$x + y_o \geq 1\,.$$

Assim

$$E_2 \overset{\circ}{+} y_o \overset{(3.90) \text{ e, de } (3.89), \text{ temos } x \overset{\circ}{+} y_o = x + y_o - 1}{=} E_2 + (y_o - 1)\,. \tag{3.96}$$

Logo o conjunto $E_2 \overset{\circ}{+} y_o$ será Lebesgue mensurável e, como a medida de Lebesgue é invariante por translações (veja a Observação 3.3.3), segue que

$$\begin{aligned} m\left(E_2 \overset{\circ}{+} y_o\right) &\overset{(3.96)}{=} m[E_2 + (y_o - 1)] \\ &\overset{\text{Observação 3.3.3}}{=} m(E_2). \end{aligned} \tag{3.97}$$

Afirmamos que

$$E \overset{\circ}{+} y_o = \left[E_1 \overset{\circ}{+} y_o\right] \cup \left[E_2 \overset{\circ}{+} y_o\right]\,, \tag{3.98}$$

$$\left(E_1 \overset{\circ}{+} y_o\right) \cap \left(E_2 \overset{\circ}{+} y_o\right) = \emptyset\,. \tag{3.99}$$

A verificação deste fato será deixadas como exercício para o leitor.

Portanto, da Proposição 3.3.1, segue que

$$\begin{aligned} m\left[E \overset{\circ}{+} y_o\right] &\overset{(3.59)}{=} m\left[E_1 \overset{\circ}{+} y_o\right] + m\left[E_2 \overset{\circ}{+} y_o\right] \\ &\overset{(3.95) \text{ e } (3.97)}{=} m(E_1) + m(E_2) \\ &\overset{E=E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2 = \emptyset \text{ e } (3.59)}{=} m(E)\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (3.91), completando a demonstração.

□

Com isto temos podemos introduzir a:

Definição 3.4.3 *Sejam* $x\,, y \in [0\,,1)$.

Diremos que <u>x **é equiavelente à** y</u>, *denotando por* $x \sim y$, *se*

$$(x - y) \in \mathbb{Q}\,.$$

Observação 3.4.3

1. *A relação* $\sim$ *é uma relação de equivalência em* $[0\,,1)$.

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. *Denotemos a* <u>**classe de equivalência**</u> *de* $a \in [0\,,1)$, *por* $[x]$, *ou seja,*

$$[a] \doteq \{x \in [0\,,1)\,;\, x - a \in \mathbb{Q}\}\,.$$

3. *Logo podemos considerar o* <u>**espaço quociente**</u>, *indicado por* $[0\,,1)/\sim$, *formado por todas as classes de equivalência da relação* $\sim$, *a saber:*

$$[0\,,1)/\sim \doteq \{[a]\,;\, a \in [0\,,1)\}\,.$$

4. *O conjunto* $[0\,,1)/\sim$, *ficará , dividido em classes de equivalência onde dois elementos estarão na mesma classe se eles diferem por um racional e estarão em classes diferentes se eles diferem de um número irraional.*

   De fato, se

$$\begin{aligned} & x\,, y \in [a]\,, \\ \textit{se, e somente se:}\quad & x - a\,, y - a \in \mathbb{Q}\,, \\ \textit{ou, seja:}\quad & x - y = \underbrace{(x-a)}_{\in\mathbb{Q}} - \underbrace{(y-a)}_{\in\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}\,. \end{aligned}$$

   Por outro lado,

$$\begin{aligned} & x \in [a] \neq [b] \ni y\,, \\ \textit{se, e somente se:}\quad & x - a\,, y - b \in \mathbb{Q}\,,\ \textit{mas}\ \ a - b \notin \mathbb{Q}\,, \\ \textit{ou, seja:}\quad & x - y = \underbrace{(x-a)}_{\in\mathbb{Q}} - \underbrace{(y-b)}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{(a-b)}_{\in\mathbb{I}} \in \mathbb{I}\,. \end{aligned}$$

5. *Como o conjunto* $[0\,,1)$ *é a reunião de todas as classes de equivalência pela relação* $\sim$*, isto é,*
$$[0\,,1) = \bigcup_{a\in[0\,,1)} [a]\,,$$
do Axioma da Escolha (ou seja, o Axioma 1.3.1), existe um subconjunto
$$P \subseteq [0\,,1)/\sim\,, \tag{3.100}$$
que contém, exatamente, um elemento de cada uma das classes de equivalência de $[0\,,1)/\sim$*.*

6. *Seja* $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$*, uma enumeração dos números racionais que pertecem ao intevalo* $[0\,,1)$*, com* $r_o \doteq 0$*.*

   Para cada $i \in \mathbb{N}$*, definamos*
$$P_i \doteq P \overset{\circ}{+} r_i\,. \tag{3.101}$$
   Com isto, temos que
$$P_o = P\,.$$

7. *Notemos que, se* $x \in P_i \cap P_j$*, então*
$$p_i \overset{\circ}{+} r_i = x = p_j \overset{\circ}{+} r_j\,, \quad \textit{para} \quad p_i, p_j \in P\,.$$
   Observemos que:

   (a) uma possibilidade seria:
$$p_i + r_i\,,\ p_j + r_j < 1\,,$$
   ou seja
$$x = p_i \overset{\circ}{+} r_i \overset{(3.89)}{=} p_i + r_i$$
   e
$$x = p_j \overset{\circ}{+} r_j \overset{(3.89)}{=} p_j + r_j\,, \quad \textit{para} \quad p_i\,, p_j \in P\,. \tag{3.102}$$
   Neste caso, segue que:
$$\begin{aligned} p_i - p_j &\overset{(3.102)}{=} (x - r_i) - (x - r_j) \\ &= \underbrace{r_j}_{\in\mathbb{Q}} - \underbrace{r_j}_{\in\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}\,, \end{aligned}$$
$$\textit{ou seja,} \qquad p_i \sim p_j\,.$$

(b) *outra possibilidade seria:*

$$p_i + r_i > 1 \quad e \quad p_j + r_j < 1\,,$$

isto é,

$$\begin{aligned} x &= p_i \overset{\circ}{+} r_i \overset{(3.89)}{=} p_i + r_i - 1 \\ &e \\ x &= p_j \overset{\circ}{+} \underbrace{r_j}_{\in\mathbb{Q}} \overset{(3.89)}{=} p_j + r_j\,, \quad para \quad p_i\,, p_j \in P\,. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Neste caso, segue que:

$$\begin{aligned} p_i - p_j &\overset{(3.103)}{=} (x - r_i + 1) - (x - r_j) \\ &= \underbrace{r_j}_{\in\mathbb{Q}} - \underbrace{r_i}_{\in\mathbb{Q}} + 1 \in \mathbb{Q}\,, \end{aligned}$$
$$logo \quad p_i \sim p_j\,.$$

(c) *outra possibilidade, semelhante a do item 7b. acima, seria:*

$$p_i + r_i < 1 \quad e \quad p_j + r_j > 1\,,$$

ou seja, isto é,

$$\begin{aligned} x &= p_i \overset{\circ}{+} r_i \overset{(3.89)}{=} p_i + r_i \\ &e \\ x &= p_j \overset{\circ}{+} \underbrace{r_j}_{\in\mathbb{Q}} \overset{(3.89)}{=} p_j + r_j - 1\,, \quad para \quad p_i\,, p_j \in P\,. \end{aligned} \tag{3.104}$$

Neste caso, segue que:

$$\begin{aligned} p_i - p_j &\overset{(3.103)}{=} (x - r_i) - (x - r_j - 1) \\ &= \underbrace{r_j}_{\in\mathbb{Q}} - \underbrace{r_i}_{\in\mathbb{Q}} - 1 \in \mathbb{Q}\,, \end{aligned}$$
$$logo \quad p_i \sim p_j\,.$$

(d) *finalmente, a última possibilidade seria:*

$$p_i + r_i\,, \; p_j + r_j > 1\,,$$

isto é,

$$\begin{aligned} x &= p_i \overset{\circ}{+} r_i = p_i + r_i - 1 \\ &e \\ x &= p_j \overset{\circ}{+} r_j = p_j + r_j - 1 \quad para \quad p_i\,, p_j \in P\,. \end{aligned} \tag{3.105}$$

Neste caso, segue que:

$$\begin{aligned} p_i - p_j &\overset{(3.105)}{=} (x - r_i - 1) - (x - r_j - 1) \\ &= \underbrace{r_j}_{\in \mathbb{Q}} - \underbrace{r_i}_{\in \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}, \\ \textit{logo} \quad & p_i \sim p_j . \end{aligned}$$

Como o conjunto P *contém um único elemento de cada classe de equivalência deveremos, em todas as 4 possibilidades acima deveremos ter*

$$i = j .$$

Portanto

$$P_i \cap P_j = \emptyset, \quad \textit{se} \quad i \neq j,$$

ou ainda, a sequência $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *é uma sequência de conjuntos, dois as dois disjuntos.*

8. *Por outro lado, temos que* $x \in [0, 1)$ *pertence a alguma classe de equivalência de* $[0, 1)/\sim$*, logo ele será equivalente a algum (eventualemnte, vários) elementos do conjunto* P*, ou seja existe* $y \in [0, 1)$ *tal que*

$$x \in [y] .$$

Logo, se $x \in [0, 1)$*, ele irá diferir de algum elemento de* P*, por um racional* r_i*, ou seja, existe* $i_o \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$x \in P_{i_o} .$$

Portanto

$$[0, 1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i .$$

9. **Se o conjunto P fosse um conjunto Lebesgue mensurável** *então, do Lema 3.4.1, para cada* $i \in \mathbb{N}$*, o conjunto* P_i*, que é uma translação módulo* 1 *do conjunto* P *(veja (3.101)), também seria um conjunto Lebesgue mensurável.*

Além disso, também do Lema 3.4.1, também teríamos:

$$m(P_i) = m(P), \quad \textit{para cada} \quad i \in \mathbb{N}. \tag{3.106}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} m([0, 1)) &\overset{[0,1)=\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \ \textit{e} \ P_i \cap P_j = \emptyset, \ \textit{para} \ i \neq j \ \textit{e a Proposição 3.3.1 (ou ainda, (3.59))}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} m(P_i) \\ &\overset{(3.106)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} m(P) . \end{aligned} \tag{3.107}$$

Notemos que o lado direito da identidade (3.107)*acima será igula a:*

$$\begin{cases} 0\,, & se\ m(P) = 0\,, \\ \infty\,, & se\ m(P) > 0 \end{cases},$$

mas isto é um absurdo, pois o lado esquerdo da identidade (3.107) *é*

$$m([0\,,1)) = l([0\,,1)) = 1\,.$$

Portanto o conjunto P **não é Lebesgue mensurável**.

10. *Notemos que, na construção acima, não fizemos uso de nenhuma propriedade intrínsica da medida de Lebesgue, a não ser a da invariança por translações e da enumerabilidade aditiva, ou seja, podemos utilizar as mesma idéias para demonstrar o:*

Teorema 3.4.1 *Na situação da Observação* (3.4.3) *acima, se uma função* m, *definida numa* σ*-álgebra formada por subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *que contém o conjunto* P *definido na Observação* (3.4.3) *acima, é invariante por translações e é enumeravelmente aditiva então*

$$m([0\,,1)) = \begin{cases} 0 \\ ou \\ \infty \end{cases}.$$

3.5 Funções Mensuráveis

Nosso objetivo é introduzir a noção de uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ ser uma **função Lebesgue mensurável**.

Ante de introduzir tal definição, temos a:

Proposição 3.5.1 *Sejam* $D \in \mathscr{M}$ *e* $f : D \to \mathbb{R}^*$ *uma função.*

São equivalentes:

1. *Para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$, *o conjunto*

$$\{x \in D\,;\, f(x) > \alpha\} \in \mathscr{M}\,,$$

ou seja, é um conjunto Lebesgue mensurável.

2. *Para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$, *o conjunto*

$$\{x \in D\,;\, f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{M}\,,$$

ou seja, é um conjunto Lebesgue mensurável.

3. *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto*

$$\{x \in D\,;\, f(x) < \alpha\} \in \mathscr{M}\,,$$

ou seja, é um conjunto Lebesgue mensurável.

4. *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto*

$$\{x \in D\,;\, f(x) \leq \alpha\} \in \mathscr{M}\,,$$

ou seja, é um conjunto Lebesgue mensurável.

5. *Além disso, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, se quaisquer um dos quatro itens acima ocorrer temos que, o conjunto*

$$\{x \in D\,;\, f(x) = \alpha\} \in \mathscr{M}\,,$$

ou seja, é um conjunto Lebesgue mensurável.

Demonstração:

Mostremos que 1. implicará em 4:

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$\{x \in D\,;\, f(x) \leq \alpha\} = \underbrace{\{x \in D\,;\, f(x) > \alpha\}}_{\overset{\text{de } 1.}{\in} \mathscr{M}}{}^{c} \in \mathscr{M}\,,$$

ou seja, 4. ocorrerá.

De modo semelhante, podemos mostrar que 4. implicará em 1., que 2. implicará em 3. e que 3. implicará em 2..

Deixaremos a elaboração destes casos como exercício para o leitor.

Mostremos que 1. implicará em 2.:

Observemos que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\{x \in D : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{x \in D\,;\, f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\}}_{\overset{\text{de } 1.}{\in} \mathscr{M}} \in \mathscr{M},$$

ou seja, 2. ocorrerá.

Mostremos que 2. implicará 1.:

Observemos que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\{x \in D : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{x \in D\,;\, f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n}\right\}}_{\overset{\text{de } 2.}{\in} \mathscr{M},} \in \mathscr{M},$$

ou seja, 1. ocorrerá.

Com isto mostramos que 1. ocorrerá, se, e somente se, 2. ocorrer, se e somente se, 3. ocorrer, se, e somente se, 4. ocorrer.

Supondo que 1., 2., 3. ou 4. ocorra, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\{x \in D\,;\, f(x) = \alpha\} = \underbrace{\{x \in D\,;\, f(x) \geq \alpha\}}_{\overset{\text{de } 2.}{\in} \mathscr{M}} \cap \underbrace{\{x \in D\,;\, f(x) \leq \alpha\}}_{\overset{\text{de } 4.}{\in} \mathscr{M}} \in \mathscr{M}\,,$$

isto é, 5. ocorrerá, completando a demonstração.

□

Com isto podemos introduzir a:

Definição 3.5.1 *Diremos que uma função $f : D \to \mathbb{R}^*$ é uma* **função Lebesgue mensurável**, *se $D \in \mathscr{M}$ e se a função f satisfaz uma das quatro primeiras propriedades da Proposição 3.5.1 acima (a saber, 1., 2., 3. ou 4.).*

Observação 3.5.1

1. *Observemos que, do item 1. da Proposição 3.5.1 acima, a função $f : D \to \mathbb{R}^*$ será Lebesgue mensurável se, e somente se, para cada $D \in \mathscr{M}$ e para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ teremos*
$$f^{-1}(\,(\alpha\,,\infty]\,) \in \mathscr{M}\,. \tag{3.108}$$
De fato, pois
$$f^{-1}(\,(\alpha\,,\infty]\,) = \{x \in D\,;\, f(x) > \alpha\}\,.$$

2. *De modo semelhante, dos itens 2., 3. ou 4., da Proposição 3.5.1 acima, respectivamente, temos que a função $f : D \to \mathbb{R}^*$ será Lebesgue mensurável se, e somente se, para cada $D \in \mathscr{M}$ e para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ temos uma das seguites situações:*

   (a) *no caso de 2., teremos*
$$f^{-1}(\,[\alpha\,,\infty]\,) \in \mathscr{M}\,. \tag{3.109}$$
   De fato, pois
$$f^{-1}([\alpha\,,\infty)) = \{x \in D\,;\, f(x) \geq \alpha\}\,.$$

   (b) *no caso de 3., teremos*
$$f^{-1}(\,[-\infty\,,\alpha)\,) \in \mathscr{M}\,. \tag{3.110}$$
   De fato, pois
$$f^{-1}(\,[-\infty\,,\alpha)\,) = \{x \in D\,;\, f(x) < \alpha\}\,.$$

(c) no caso de 4., teremos

$$f^{-1}([-\infty, \alpha]) \in \mathscr{M}. \tag{3.111}$$

De fato, pois

$$f^{-1}([-\infty, \alpha]) = \{x \in D; f(x) \leq \alpha\}.$$

3. *Se* $f : E \to \mathbb{R}^*$ *é uma função Lebesgue mensurável e* $F \subseteq E$ *é um conjunto Lebesgue mensurável, então a restrição da função* f *ao conjunto* F*, também será uma função Lebesgue mensurável, isto é, a função* $f_{|_F} : F \to \mathbb{R}^*$ *será uma função Lebesgue mensurável.*

   Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Consideremos os seguintes exemplos:

Exemplo 3.5.1 *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função constante em* $\mathbb{R}$*.*
Então a função f *é Lebesgue mensurável.*

Resolução:
De fato, se

$$f(x) \doteq C, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.112}$$

e $\alpha \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset,, & \text{se} \quad \alpha \geq C \\ \mathbb{R}, & \text{se} \quad \alpha < C \end{cases}$$

e estes conjuntos, isto é, o conjunto $\emptyset$ e o conjunto $\mathbb{R}$, são Lebesgue mensuráveis.

□

Temos o seguinte importante:

Exemplo 3.5.2 *Seja* $E \in \mathscr{M}$*.*
Então a **função característica do conjunto** E *, indicada por* $\mathcal{X}_E$*, onde a função* $\mathcal{X}_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$\mathcal{X}_E(x) \doteq \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in E \\ 0, & \text{se} \quad x \notin E \end{cases}, \tag{3.113}$$

é uma função Lebesgue mensurável.

Resolução:
De fato, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, temos as seguinte possibilidades:

$$\{x \in \mathbb{R}; \mathcal{X}_E(x) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se} \quad \alpha \geq 1, \\ E, & \text{se} \quad \alpha \in [0, 1), \\ \mathbb{R}, & \text{se} \quad \alpha \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

e todos estes conjuntos, isto é, os conjuntos $\emptyset$, E, $\mathbb{R}$, são Lebesgue mensuráveis.
Outro caso importante é dado pelo:

Exemplo 3.5.3 *Se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, então ela será uma função Lebesgue mensurável.*

Resolução:

De fato, para $\alpha \in \mathbb{R}$ temos, pelo item 2. da Observação 2.5.1, que o conjunto (α, ∞) será um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Logo, da Proposição 2.6.2, segue que o conjunto

$$f^{-1}((\alpha, \infty))$$

será um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Portanto, pela Proposiçao 2.5.3, este conjunto poderá ser escrito como reunião enumerável de intervalos abertos de $\mathbb{R}$, que, por sua vez, são conjuntos Lebesgue mensuráveis (pois são boreleanos).

Portanto

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \mathscr{M},$$

mostrando, pela Definição 3.5.1, que a função f é Lebesgue mensurável.

□

Observação 3.5.2 *Podemos substituir o conjunto $\mathbb{R}$, do domínio da função f, do Exemplo 3.5.3 acima, por um conjunto $E \in \mathscr{M}$, que o resultado continuará válido, ou seja, se $E \in \mathscr{M}$ e a função $f : E \to \mathbb{R}$ é contínua em E, então a função f será Lebesgue mensurável.*

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Um outro caso importante é dado pelo:

Exemplo 3.5.4 *Se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função monótona em $\mathbb{R}$, então ela será uma função Lebesgue mensurável.*

Resolução:

Mostraremos que se a função f é monótona crescente em $\mathbb{R}$, então ela será uma função Lebesgue mensurável.

O caso que a função f é monótona decrescente em $\mathbb{R}$ será deixado como exercício para o leitor.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, como a função f é monótona crescente, afirmamos que:

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) > \alpha\}$$
$$= \begin{cases} \qquad \emptyset, \\ \text{ou} \\ \qquad (a, \infty), \\ \text{ou} \\ \qquad [a, \infty). \end{cases}$$

De fato, notemos que se

$$f^{-1}((\alpha,\infty)) = \emptyset \in \mathscr{M}.$$

Por outro lado, se

$$f^{-1}((\alpha,\infty)) \neq \emptyset,$$

segue que existe

$$x \in f^{-1}((\alpha,\infty))$$

Notemos que se

$$y \geq x,$$

como a função f é monótona crescente em $\mathbb{R}$, segue que

$$f(y) \geq f(x) > \alpha,$$

mostrando que

$$y \in f^{-1}((\alpha,\infty)), \quad \text{ou seja,} \quad [x,\infty) \subseteq f^{-1}((\alpha,\infty)),$$

isto é, o conjunto $f^{-1}((\alpha,\infty))$ só poderá ser de um dos dois tipos acima, a saber,

$$f^{-1}((\alpha,\infty)) = (a,\infty) \overset{\text{Teorema 3.3.2}}{\in} \mathscr{M} \quad \text{ou} \quad f^{-1}((\alpha,\infty)) = [a,\infty) \overset{\text{Teorema 3.3.2}}{\in} \mathscr{M}.$$

Em qualquer dos casos acima temos $f^{-1}((\alpha,\infty)) \in \mathscr{M}$ que, pela Definição 3.5.1, implcará que a função f será Lebesgue mensurável, completando a resolução.

□

Valem as operações básicas com funções Lebesgue mensuráveis, mais precisamente, temos a:

Proposição 3.5.2 *Sejam* $E \in \mathscr{M}$*,* $f, g : E \to \mathbb{R}$ *funções Lebesgue mensuráveis e* $c \in \mathbb{R}$*.*

Então as funções

$$c \cdot f,\ f+g,\ f-g,\ f^2,\ f \cdot g \quad e \quad |f|$$

são funções Lebesgue mensuráveis.

Demonstração:

Mostremos que a função $c \cdot f$ é Lesbesgue mensurável:

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, notemos que:

i. Se

$$c = 0, \quad \text{segue que} \quad c \cdot f \equiv 0$$

e, do Exemplo 3.5.1, segue que a função constante (em particular, identicamente nula) será uma função Lebesgue mensurável.

ii. Se
$$c > 0\,,$$
então teremos que
$$\{x \in E\,;\,(c \cdot f)(x) < \alpha\} \overset{c>0}{=} \left\{x \in E \quad f(x) < \frac{\alpha}{c}\right\} \in \mathscr{M},$$
pois a função f é uma função Lebesgue mensurável.

iii. Se
$$c < 0\,,$$
teremos
$$\{x \in E\,;\,(c \cdot f)(x) < \alpha\} \overset{c<0}{=} \left\{x \in E\,;\, f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\} \in \mathscr{M}\,,$$
pois a função f é uma função Lebesgue mensurável.

Logo, em qualquer um dos três casos acima, teremos que a função $c \cdot f$ é uma função Lebesgue mensurável.

Mostremos que a função $f + g$ é Lesbesgue mensurável:

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, se $x \in E$ satisfaz
$$f(x) + g(x) < \alpha\,,$$
$$\text{segue que:} \qquad f(x) < \alpha - g(x)\,.$$

Logo, do Corolário 2.2.1 (que é consequência do axioma de Archimedes, a saber, o Teorema 2.2.2), existirá $r_x \in \mathbb{Q}$ tal que
$$f(x) < r_x < \alpha - g(x)\,.$$

Assim
$$\{x \in E\,;\,(f+g)(x) < \alpha\} = \bigcup_{r_x \in \mathbb{Q}} \{\{x \in E\,;\, f(x) < r_x\} \cap \{x \in E\,;\, g(x) < \alpha - r_x\}\}\,. \tag{3.114}$$

Como
$$\{r_x\,;\, x \in E\} \subseteq \mathbb{Q}$$
e o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumeravel, segue que o conjunto $\{r_x\,;\, x \in E\}$ também será enumerável.

Para cada $x \in E$, como as funções f e g são Lebesgue mensuráveis, segue que
$$\{x \in E\,;\, f(x) < r_x\} \in \mathscr{M} \quad \text{e} \quad \{x \in E\,;\, g(x) < \alpha - r_x\} \in \mathscr{M}\,.$$

Como o conjunto $\{r_x\,;\, x \in E\}$ é enumerável, teremos:
$$\bigcup_{r_x \in \mathbb{Q}} \left\{ \underbrace{\underbrace{\{x \in E : f(x) < r_x\}}_{\in \mathscr{M}} \cap \underbrace{\{x \in E : g(x) < \alpha - r_x\}}_{\in \mathscr{M}}}_{\in \mathscr{M}} \right\} \in \mathscr{M}\,. \tag{3.115}$$

Logo, de (3.114) e (3.115), segue que

$$\{x \in E : (f+g)(x) < \alpha\} \in \mathscr{M}\,,$$

ou seja, a função $f+g$ é uma função Lebesgue mensurável.

Mostremos que a função $f-g$ é Lesbesgue mensurável:

Observemos que

$$f - g = f + (-1)\cdot g\,. \tag{3.116}$$

Como a função g é uma função Lebesgue mensurável segue, do primeiro caso mostrado acima, que a função $(-1)\cdot g$ será uma função Lebesgue mensurável.

Logo, do segundo caso mostrado acima, segue que função do lado direito da identidade (3.116) será uma função Lebesgue mensurável, isto é, a função $f-g$ é uma função Lebesgue mensurável.

Mostremos que a função f^2 é Lesbesgue mensurável:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Temos as seguinte duas possibilidades:

i. se
$$\alpha < 0\,,$$
segue que
$$\left\{x \in E\,;\, f^2(x) < \alpha\right\} = \emptyset \in \mathscr{M}\,.$$

ii. por outro lado, se
$$\alpha \geq 0\,,$$
segue que
$$f^2(x) < \alpha \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) < -\sqrt{\alpha} \quad \text{ou} \quad f(x) > \sqrt{\alpha}\,. \tag{3.117}$$
Logo
$$\left\{x \in E\,;\, f^2(x) < \alpha\right\} \overset{(3.117)}{=} \underbrace{\left\{x \in E\,;\, f(x) < \sqrt{\alpha}\right\}}_{\in \mathscr{M}} \cup \underbrace{\left\{x \in E\,;\, f(x) > -\sqrt{\alpha}\right\}}_{\in \mathscr{M}} \in \mathscr{M}\,,$$
pois a função f é Lebesgue mensurável,

Portanto, dos dois itens acima, segue que a função f^2 é uma função Lebesgue mensurável.

Mostremos que a função $f \cdot g$ é Lesbesgue mensurável:

Observemos que

$$f\cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]\,. \tag{3.118}$$

Dos casos mostrados acima, segue que a função do lado direito da identidade (3.118) acima, é uma função Lebesgue mensurável, ou seja, a função $f\cdot g$ é uma função Lebesgue mensurável.

Mostremos que a função $|f|$ é Lesbesgue mensurável:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Temos duas possibilidades:

i. se
$$\alpha < 0\,,$$
segue que
$$\{x \in E\,;\ \underbrace{|f|(x)}_{=|f(x)|\geq 0} < \alpha\} = \emptyset \in \mathscr{M}\,.$$

ii. por outro lado, se
$$\alpha \geq 0\,,$$
teremos
$$|f(x)| < \alpha \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) < \alpha \quad \text{ou} \quad f(x) > -\alpha\,. \tag{3.119}$$

Logo
$$\{x \in E\,;\ |f|(x) < \alpha\} = \{x \in E\,;\ |f(x)| < \alpha\}$$
$$\stackrel{(3.119)}{=} \underbrace{\{x \in E\,;\ f(x) < \alpha\}}_{\in \mathscr{M}} \cup \underbrace{\{x \in E\,;\ f(x) > -\alpha\}}_{\in \mathscr{M}} \in \mathscr{M}\,,$$
pois a função f é Lebesgue mensurável.

Portanto a função $|f|$ é uma função Lebesgue mensurável, completando a demonstração.

□

Observação 3.5.3 *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $c \in \mathbb{R}$ *e suponhamos satisfeitas as condições da Proposição 3.5.2 acima.*

Então da Proposição 3.5.2 acima e do Exemplo 3.5.1, segue que as funções
$$f + c \quad e \quad f^n\,,$$
são funções Lebesgue mensuráveis.

Como consequência temos o importante:

Corolário 3.5.1 *Sejam* $A\,, E \subseteq \mathbb{R}$ *conjuntos Lebesgue mensuráveis com* $A \subseteq E$ *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função Lebesgue mensurável.*

Então a função $f_{|_A} : A \to \mathbb{R}$ *é Lebesgue mensurável.*

Demonstração:

Observemos que

$$f_{|_A} = f \cdot \mathcal{X}_A\,. \tag{3.120}$$

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

Como $A \in \mathscr{M}$ segue, do Exemplo 3.5.2, que a função $\mathcal{X}_A$ é Lebesgue mensurável.

Assim, deste fato e da Proposição 3.5.2, segue que a função $f \cdot \mathcal{X}_A$ é Lebesgue mensurável logo, de (3.120), segue que a função $f_{|_A}$ é uma função Lebsegue mensurável, completando a demonstração.

□

Introduziremos agora a:

Definição 3.5.2 *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}^*$ uma função.*

Definimos a **função parte positiva da função** f*, indicada por* f^+*, como sendo a função* $f^+ : A \to \mathbb{R}^*$*, dada por*

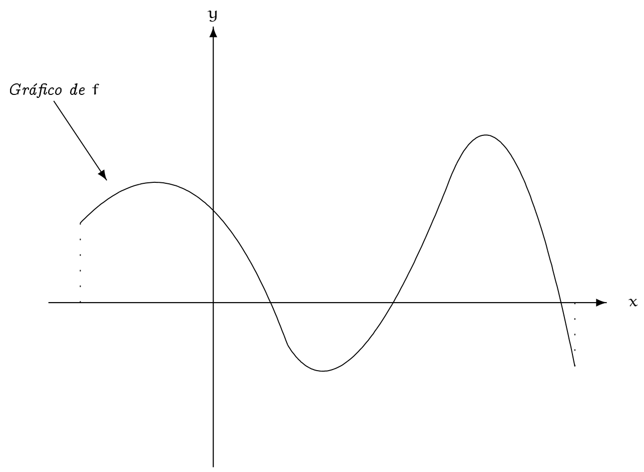
$$f^+(x) \doteq \max\{f(x)\,, 0\}, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,. \tag{3.121}$$

De modo semelahnte, definiremos a **função parte negativa da função** f*, indicada por* f^-*, como sendo a função* $f^- : A \to \mathbb{R}^*$*, dada por*

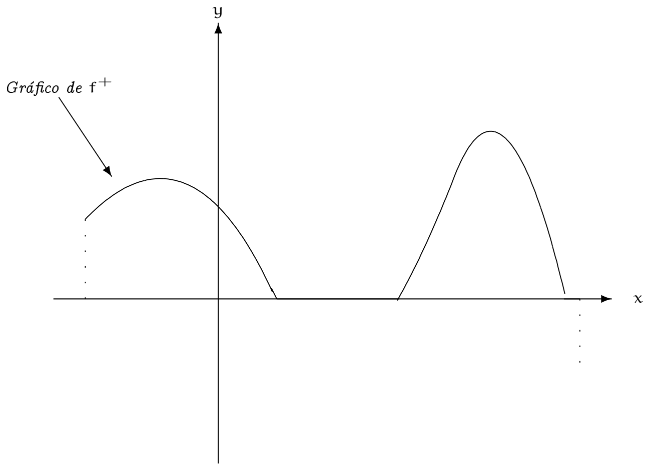
$$f^-(x) \doteq \max\{-f(x)\,, 0\}, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,. \tag{3.122}$$

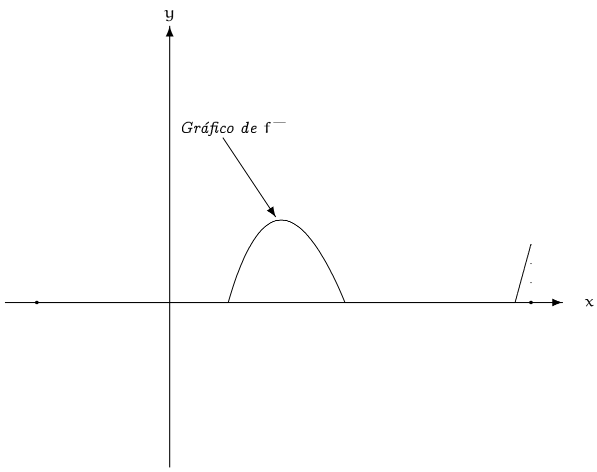
Observação 3.5.4

1. *Suponhamos que a representação geométrica do gráfico da função* f *é dada pela figura abaixo:*



Então as representações geométricas dos gráficos das funções f^+ *e* f^- *serão dadas pelas seguintes figuras abaixo:*





2. *É fácil ver que*

$$f^+(x)\,,\ f^-(x) \geq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,. \tag{3.123}$$

3. *Notemos também que:*

$$f = f^+ - f^- \quad e \quad |f| = f^+ + f^-. \tag{3.124}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor verificar.

4. *Somando-se ou subtraindo-se as duas identidades (3.124) acima, obteremos*

$$f^+ = \frac{1}{2}\,(|f| + f) \quad e \quad f^- = \frac{1}{2}\,(|f| - f)\,. \tag{3.125}$$

Com isto temos a:

Proposição 3.5.3 *Sejam $E \in \mathscr{M}$ e $f : E \to \mathbb{R}^*$ uma função.*

Então a função f é Lebesgue mensurável se, e somente se, as funções f^+ e f^- são Lebesgue mensuráveis.

Demonstração:

A demonstração segue das identidades em (3.125) acima e da Proposição (3.5.2). Deixaremos os detalhes da elaboração da mesma como exercício para o leitor.

□

Um outro rsultado importante é dado pela:

Proposição 3.5.4 *Sejam E um subconjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções Lebesgue mensuráveis definidas em E e tomando valores em $\mathbb{R}$.*

Para $k \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos as funções $f_o, F_o, f, F, f^*, F^* : E \to \mathbb{R}^*$, dadas por:

$$f_o(x) \doteq \min_{i\in\{1,2,\cdots,k\}} f_i(x)\,, \tag{3.126}$$

$$F_o(x) \doteq \max_{i\in\{1,2,\cdots,k\}} f_i(x) \tag{3.127}$$

$$f(x) \doteq \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\,, \tag{3.128}$$

$$F(x) \doteq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \tag{3.129}$$

$$f^*(x) \doteq \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\,, \tag{3.130}$$

$$F^*(x) \doteq \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\,, \tag{3.131}$$

para cada $x \in E$.

Então as funções f_o, F_o, f, F, f^*, F^* são Lebesgue mensuráveis.

Demonstração:

1. Mostremos que função f_o é Lebesgue mensurável:

   Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, notemos que

   $$\{x \in E\,;\, f_o(x) > \alpha\} \stackrel{(3.126)}{=} \left\{x \in E\,;\, \min_{i\in\{1,2,\cdots,k\}} f_i(x) > \alpha\right\}$$
   $$= \bigcap_{i=1}^{k} \underbrace{\{x \in E\,;\, f_i(x) > \alpha\}}_{\in\mathscr{M}} \in \mathscr{M}$$

   pois, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, a função f_i é Lebesgue mensurável.

   Logo, a função f_o será uma função Lebesgue mensurável.

2. Mostremos que função F_o é Lebesgue mensurável:

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, notemos que:

$$\{x \in E\,;\, F_o(x) > \alpha\} \overset{(3.127)}{=} \left\{x \in E\,;\, \max_{i \in \{1,2,\cdots,k\}} f_i(x) > \alpha\right\}$$
$$= \bigcup_{i=1}^{k} \underbrace{\{x \in E\,;\, f_i(x) > \alpha\}}_{\in \mathscr{M}} \in \mathscr{M}\,,$$

pois, para cada $i \in \{1,2,\cdots,k\}$, a função f_i é Lebesgue mensurável.

Logo, a função F_o será uma função Lebesgue mensurável.

3. Mostremos que função f é Lebesgue mensurável:

   Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, notemos que:

$$\{x \in E\,;\, f(x) > \alpha\} \overset{(3.128)}{=} \left\{x \in E\,;\, \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > \alpha\right\}$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in E\,;\, f_n(x) > \alpha\}}_{\in \mathscr{M}} \in \mathscr{M},$$

   pois, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n é Lebesgue mensurável.

   Portanto, a função f será uma função Lebesgue mensurável.

4. Mostremos que função F é Lebesgue mensurável:

   Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, notemos que:

$$\{x \in E\,;\, F(x) > \alpha\} \overset{(3.129)}{=} \left\{x \in E\,;\, \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > \alpha\right\}$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in E\,;\, f_n(x) > \alpha\}}_{\in \mathscr{M}} \in \mathscr{M},$$

   pois, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n é Lebesgue mensurável.

   Portanto, a função F será uma função Lebesgue mensurável.

5. Mostremos que função f^* é Lebesgue mensurável:

   Consideremos a sequência de funções $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $g_n : E \longrightarrow \mathbb{R}^*$ é dada por

$$g_n(x) \doteq \inf_{m \geq n} f_m(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,. \tag{3.132}$$

   Do item 3. acima temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que a função g_n é uma função Lebesgue mensurável.

   Mas

$$f^*(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \inf_{m \geq n} f_n(x) \right\}, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,.$$

   Logo, do item 4. acima, segue que a função f^* é uma função Lebesgue mensurável.

6. Mostremos que função F^* é Lebesgue mensurável:

   Consideremos a sequência $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $G_n : E \to \mathbb{R}^*$ é dada por
   $$G_n(x) \doteq \sup_{m\geq n} f_m(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,.$$
   Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, do item 4. acima, segue que a função G_n é uma função Lebesgue mensurável.

   Mas
   $$F^*(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sup_{m\geq n} f_n(x) \right\}, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,.$$
   Logo, do item 3. acima, segue que a função F^* é uma função Lebesgue mensurável, completando a demonstração.

□

Como consequência da Proposição 3.5.4 acima, temos o:

Corolário 3.5.2 *Sejam E um subconjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções Lebesgue mensuráveis, definidas em E e tomando valores em $\mathbb{R}$, e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função.*

Suponhamos que
$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \text{em} \quad E\,. \tag{3.133}$$
Então a função f será uma função Lebesgue mensurável.

Demonstração:

Notemos que, para cada $x \in E$, teremos:
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{\text{item 5. da Proposição 2.4.1}}{=} \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\,. \tag{3.134}$$
Logo, de da Proposição 3.5.4 acima (veja (3.131)) segue que a função f será Lebesgue mensurável em E, completando a demonstração.

□

Observação 3.5.5 *O resultado acima podem ser estendido, trocando-se o contra-domínio $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^*$.*

Para maiores detalhes veja [RB], páginas 11 e 12.

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Podemos agora introduzir a:

Definição 3.5.3 *Diremos que uma propriedade $\mathcal{P}$ ocorre* **quase toda parte (ou quase sempre)** *, (em inglês,* **almost everywhere***), indicando por* **q.t.p.** *(ou* **q.s.** *e, em inglês,* **a.e.***), se a propriedade $\mathcal{P}$* **não** *ocorre em um conjunto Lebesgue mensurável, cuja medida de Lebesgue é zero, ou seja, a propriedade $\mathcal{P}$ ocorre em $\mathcal{E} \in \mathscr{M}$ e*

$$m(\mathcal{E}^c) = 0 .$$

Observação 3.5.6 *A seguir exibiremos algumas situações em que a Definição 3.5.3 acima, será útil:*

1. *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f, g : A \to \mathbb{R}^*$ duas funções.*

   Diremos que
$$f = g , \qquad q.t.p. \text{ em } A$$
   se, e somente se, o conjunto
$$\{x \in A ; f(x) \neq g(x)\} \in \mathscr{M}$$
   e além disso temos que
$$m(\{x \in A ; f(x) \neq g(x)\}) = 0 .$$

2. *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f, f_n : A \to \mathbb{R}^*$ funções, para $n \in \mathbb{N}$.*

   Temos que
$$f_n \to f , \qquad q.t.p. \text{ em } A$$
   se, e somente se, o conjunto
$$\{x \in A ; f_n(x) \not\to f(x)\} \in \mathscr{M}$$
   e além disso, temos que:
$$m(\{x \in A ; f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0 .$$

Com isto temos a:

Proposição 3.5.5 *Sejam E um conjunto Lebesgue mensurável e $f, g : E \to \mathbb{R}^*$ duas funções, tais que a função f é uma função Lebesgue mensurável e*

$$g = f , \qquad q.t.p. \text{ em } \quad E . \tag{3.135}$$

Então a função g também é uma função Lebesgue mensurável.

Demonstração:

Pela Definição 3.5.3, temos que o conjunto

$$A \doteq \{x \in A : f(x) \neq g(x)\} \in \mathscr{M} \quad \text{e} \quad m(A) = 0\,. \tag{3.136}$$

Assim

$$f = g\,, \quad \text{em} \quad E \setminus A\,. \tag{3.137}$$

Como $A\,, E \in \mathscr{M}$, do Corolário 3.5.2, segue que a função $f_{|_{E\setminus A}}$ é uma função Lebesgue mensurável, ou seja, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$\{x \in E \setminus A\,;\, f(x) > \alpha\} \in \mathscr{M}\,. \tag{3.138}$$

Logo, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, teremos

$$\begin{aligned}
\{x \in E\,;\, g(x) > \alpha\} &\overset{E = E\setminus A \cup A}{=} \underbrace{\{x \in E \setminus A\,;\, g(x) > \alpha\}}_{g(x) = f(x),\ x \in E\setminus A} \cup \{x \in A\,;\, g(x) > \alpha\} \\
&\overset{g \overset{(3.137)}{=} f \text{ em } E\setminus A}{=} \{x \in E \setminus A\,;\, f(x) > \alpha\} \cup \{x \in A\,;\, g(x) > \alpha\} \\
&= \underbrace{\{x \in E \setminus A\,;\, f(x) > \alpha\}}_{\overset{(3.138)}{\in} \mathscr{M}} \cup \{x \in A\,;\, g(x) > \alpha\}\,.
\end{aligned} \tag{3.139}$$

Como

$$\{x \in A\,;\, g(x) > \alpha\} \subseteq A\,,$$

do item 2. da Proposição (3.2.1), segue que

$$\begin{aligned}
0 &\leq m^*(\{x \in A\,;\, g(x) > \alpha\}) \\
&\leq m^*(A) \\
&\overset{A \overset{(3.136)}{\in} \mathscr{M}}{=} m(A) \\
&\overset{(3.136)}{=} 0\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$m^*(\{x \in A\,;\, g(x) > \alpha\}) = 0\,.$$

Logo, do lema (3.3.1), segue que

$$\{x \in A\,;\, g(x) > \alpha\} \in \mathscr{M}$$

e assim, (3.139) implicará que a função g será uma função Lebesgue mensurável, como queríamos demonstrar.

$\square$

Como consequência da Proposição 3.5.5 acima temos o seguinte importante:

Exemplo 3.5.5 *Consideremos a função* $g : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$g(x) \doteq \begin{cases} 1\,, & para \quad x \in \mathbb{Q} \cap [a\,,b]\,, \\ 0\,, & para \quad x \in \mathbb{I} \cap [a\,,b]\,. \end{cases} \tag{3.140}$$

Mostre que a função g *é Lebesgue mensurável em* $[a\,,b]$.

Resolução:

Consideremos a função $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ a função, dada por

$$f(x) \doteq 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{3.141}$$

Sabemos que a função f é Lebesgue mensurável.

Notemos também que, de (3.140) e (3.141), temos que:

$$\begin{aligned} & \{x \in [a\,,b]\,;\, g(x) \neq f(x)\} = \mathbb{Q} \cap [a\,,b]\,, \\ & \mathbb{Q} \cap [a\,,b] \overset{\text{Corolário 3.2.1 e o Lema 3.3.1}}{\in} \mathscr{M} \\ \text{e} \quad & m\,(\mathbb{Q} \cap [a\,,b]) \overset{\text{Corolário 3.2.1 e o Lema 3.3.1}}{=} 0\,, \\ \text{ou seja,} \quad & g = f\,, \quad \text{q.t.p em} \quad [a\,,b]\,. \end{aligned}$$

Logo, da Proposição 3.5.5 segue que a função g é Lebesgue mensurável em $[a\,,b]$.

□

Como consequência temos o:

Corolário 3.5.3 *Sejam* $E \in \mathscr{M}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções Lebesgue mensuráveis, definidas em* E, *tais que*

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \qquad q.t.p. \;\; em \quad E\,, \tag{3.142}$$

onde $f : E \to \mathbb{R}^*$ *é uma função.*

Então a função f *é Lebesgue mensurável em* E.

Demonstração:

Como

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \qquad \text{q.t.p. em} \quad E\,,$$

existe $F \in \mathscr{M}$, tal que

$$f_n(x) \to f(x)\,, \quad \text{para} \quad x \in E \setminus F \quad \text{e} \quad m(F) = 0\,. \tag{3.143}$$

Logo

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \qquad \text{em} \quad E \setminus F$$

e, do Corolário 3.5.2, segue que a função $f_{|_{E\setminus F}}$ é Lebesgue mensurável em $E \setminus F$.

Como

$$f_{|_{E\setminus F}} = f\,, \quad \text{q.t.p. em} \quad E\,,$$

pois $m(F) \overset{(3.143)}{=} 0$, da Proposição 3.5.5 acima, segue que a função f é Lebesgue mensurável em E, completando a demonstração.

$\square$

Para o próximo conceito a ser introduzido precisaremos da:

Definição 3.5.4 *Dados $a\,,b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, diremos que uma coleção finita de pontos*

$$\mathcal{P} \doteq \{x_i\ ; i \in \{0\,,1\,,\cdots\,,n\}\}$$

contida no intervalo $[a\,,b]$, é uma **partição do intervalo $[a\,,b]$** *se*

$$x_o = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{3.144}$$

Podemos agora introduzir a:

Definição 3.5.5 *Uma função $\varphi : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ será dita* **função degrau (ou escada)**, *se existir uma partição do intervalo $[a\,,b]$, que denotaremos por*

$$\mathcal{P} \doteq \{x_i\,;\, i \in \{0\,,1\,,\cdots\,,n\}\}\,,$$

e uma coleção de n números reais

$$\{c_i\,;\, i \in \{0\,,1\,,\cdots\,,n-1\}\},\,,$$

de modo que

$$\varphi(x) = c_i\,, \tag{3.145}$$

para $x \in [x_i\,,x_{i-1}]$, para algum $i \in \{0\,,1\,,\cdots\,,n-1\}$

Observação 3.5.7 *Grosseiramente falando, uma função $\varphi : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ será uma função degrau (ou escada) se, e somente se, ela é constante por partes, em cada subintervalo definido por uma partição do intervalo $[a\,,b]$.*

Com isto temos a:

Proposição 3.5.6 *(***Segundo Princípio de Littlewood***) Seja $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}^*$ função Lebesgue mensurável, tal que os conjunto*

$$\{x \in E\,;\, f(x) = \infty\}\,,\ \{x \in E\,;\, f(x) = -\infty\} \in \mathscr{M} \tag{3.146}$$

e têm medida de Lebesgue igual a zero, isto é:

$$m(\{x \in [a\,,b]\,;\, f(x) = \infty\}) = m(\{x \in [a\,,b]\,;\, f(x) = -\infty\}) = 0\,. \tag{3.147}$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar uma função degrau (ou escada) $\varphi : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ e uma função $h : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a\,,b]$, de modo que

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad e \quad |f(x) - h(x)| < \varepsilon\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A \subseteq [a\,,b]\,, \tag{3.148}$$

onde

$$A \in \mathscr{M} \qquad e \qquad m([a\,,b] \setminus A) < \varepsilon\,,$$

isto é,

$$m(\{|f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon\})\,,\ m(\{|f(x) - h(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon. \tag{3.149}$$

Além disso, se

$$m \leq f(x) \leq M\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,, \tag{3.150}$$

poderemos escolher a função φ e a funçaõ h, de modo que satisfaçam a esta condição, isto é,

$$m \leq \varphi(x)\,,\ h(x) \leq M\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{3.151}$$

Demonstração:

A demonstração desta propriedade será deixada como exercício para o leitor (ver o Exercício 23, da página 70 de [HLR]).

□

Para finalizar esta seção temos a:

Definição 3.5.6 *Seja E um subconjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}$.*

Diremos que uma função $\varphi : E \to \mathbb{R}$ é uma **função simples**, *se ela é uma função Lebesgue mensurável e ela assumir somente um número finito de valores.*

Observação 3.5.8

1. *Notemos que, uma função $\varphi : E \to \mathbb{R}$ é uma função simples e assume os valores*

$$a_1\,, a_2\,, \cdots\,, a_n \in \mathbb{R}$$

se, e somente se, podemos escrevê-la na seguinte forma:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathcal{X}_{A_i}\,. \tag{3.152}$$

onde, para cada $i \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}$, temos que

$$A_i \in \mathscr{M}\,.$$

Notemos que, basta tomar

$$A_i \doteq \varphi^{-1}(\{a_i\})\,,$$

para cada $i \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}$.

Deixaremos os detalhes da verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. *Observemos que a soma, o produto e a diferença de funções simples é uma função simples.*

   Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

3. *Vale observar que uma função simples* $\varphi : E \to \mathbb{R}$*, pode ter muitas (infinitas) representações do tipo* (3.152) *acima.*

   Porém se pedirmos que a coleção formada pelo valores assumidos pela função φ*, ou seja, o conjunto*
   $$\{a_i ; i \in \{1, 2, \cdots, n\}\},$$
   seja formada somente por valores distintos e não nulos e definirmos os conjuntos
   $$A_i \doteq \{x \in E ; \varphi(x) = a_i\}, \tag{3.153}$$
   para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$*, então estes conjuntos serão, dois a dois, disjuntos (pois* $a_i \neq a_j$*, se* $i \neq j$*) e, neste caso, a representação* (3.152) *será única.*

   Para maiores detalhes, veja página 27 de [RB].

   Deixaremos como exercício para o leitor a verificação destes fatos.

   Tal representação da função simples $\varphi : E \to \mathbb{R}$ *será dita* **representação canônica**.

3.6 Terceiro Princípio de Littlewood

Até o momento nos deparamos com dois princípios de Littlewood, a saber, o primeiro, seria o fornecido pela Proposição 3.3.3 (que, a grosso modo, nos diz que todo conjunto Lebesgue mensurável possui, tão perto dele quanto se queira, um reunião finita de intervalos), o segundo, o fornecido pela Proposição 3.5.6 (que, a grosso modo, nos diz que toda função Lebesgue mensurável possui, tão perto dele quanto se queira, uma função contínua - uma outra versão a dada pelo Exercício 31, página 72 de [HLR]) e terceiro princípio, dado pelo Exercício 15, página 90 de [HLR] (que, a grosso modo, nos diz que toda sequência de funções mensuráveis que é convergente possui, tão perto dele quanto se queira, uma sequência de funções que é uniformente convergente) .

O resultado a seguir nos fornece uma versão do terceiro princípio de Littlewood.

Uma versão mais forte deste resultado é dada pelo Teorema de Egoroff, que pode ser encontrada no Exercício 30, página 72 de [HLR].

Proposição 3.6.1 *(***Terceiro Princípio de Littlewood***) Sejam* E *um conjunto Lebesgue mensurável tal que*
$$m(E) < \infty$$
e uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, definidas em* E*, tomando valores em* $\mathbb{R}$*.*

Seja $f : E \to \mathbb{R}^*$ *uma função Lebesgue mensurável, tal que*

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \textit{em} \quad E. \tag{3.154}$$

Então, dado $\varepsilon > 0$ *e* $\delta > 0$*, podemos encontrar um conjunto* $A_\delta \subseteq E$*, que é Lebesgue mensurável, com*

$$m(A_\delta) < \delta\,,$$

e podemos encontrar $N_\delta \in \mathbb{N}$*, tal que se* $n \geq N_\delta$ *temos que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \textit{para todo} \quad x \in E \setminus A_\delta\,. \tag{3.155}$$

Demonstração:

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n é Lebesgue mensurável em E e

$$f_n \to f\,, \quad \text{em} \quad E\,,$$

do Corolário 3.5.2, segue que a função f é Lebesgue mensurável em E.

Em particular, a função

$$|f_n - f|\,,$$

será é Lebesgue mensurável em E.

Dado $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, para cada $n\,, N \in \mathbb{N}$, definamos

$$G_n \doteq \{x \in E\,; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\,, \tag{3.156}$$

$$E_N \doteq \bigcup_{n=N}^{\infty} G_n \overset{\text{Exercício}}{=} \{x \in E\,; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon, \quad \text{para algum} \quad n \geq N\}. \tag{3.157}$$

Observemos que para cada $n\,, N \in \mathbb{N}$ temos que

$$G_n\,, E_N \in \mathscr{M} \quad \text{e} \quad E_N \subseteq E\,. \tag{3.158}$$

Como, por hipótese, $m(E) < \infty$, do Lema 3.3.6, segue que

$$m(E_N) \overset{(3.62)}{\leq} m(E) < \infty\,. \tag{3.159}$$

Observemos que, para cada $N \in \mathbb{N}$, de (3.156), segue que

$$E_{N+1} \subseteq E_N\,. \tag{3.160}$$

Por outro lado, como

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \text{em} \quad E\,,$$

para cada $x \in E$, deverá existir $N_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \notin E_{N_o}\,,$$

ou seja,

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} E_N = \emptyset . \tag{3.161}$$

Portanto de (3.159), (3.160), (3.161) e do item 2. da Proposição 3.3.2, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} m(E_N) &\overset{(3.70)}{=} m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} E_N\right)\\ &\overset{(3.161)}{=} m(\emptyset)\\ &= 0 .\end{aligned}$$

Logo, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$m(E_{N_o}) < \delta \tag{3.162}$$

que, de (3.157), é o mesmo que

$$m\left(\{x \in E\,;\, |f_n(x) - f(x) \geq \varepsilon\,, \quad \text{para algum} \quad n \geq N_o\}\right) < \delta. \tag{3.163}$$

Consideremos

$$A \doteq E_{N_o}. \tag{3.164}$$

Notemos que o conjunto A é o conjunto que têm as propriedades requeridas para conclusão do resultado.

De fato, satisfaz (3.162), e

$$E \setminus A \overset{(3.164)\text{ e }(3.163)}{=} \{x \in E\,;\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,, \text{ para todo } n \geq N_o\},$$

completando a demonstração.

□

Para finalizar temos a seguinte versão alternativa da Proposição 3.6.1 acima:

Proposição 3.6.2 *Sejam E um conjunto Lebesgue mensurável, tal que*

$$m(E) < \infty$$

e uma sequência de funções reais $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas em E, tomando valores em $\mathbb{R}^*$, $f : E \to \mathbb{R}^*$ um função, de modo que

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \qquad q.t.p. \ \ em \quad E\,. \tag{3.165}$$

Então, dado $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, podemos encontrar um conjunto $A \subseteq E$, que é Lebesgue mensurável, com

$$m(A) < \delta$$

e podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo que, para $n \geq N_o$, teremos

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,, \quad para\ todo \quad x \in E \setminus A\,. \tag{3.166}$$

Demonstração:

A demonstração é semelhante a da Proposição 3.6.1 acima e sua redação será deixada como exercício para o leitor.

□

Capítulo 4

A Integral de Lebesgue

4.1 A Integral de Riemann

Começaremos relembrando a definição da integral de Riemann.

Definição 4.1.1 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada em* $[a, b]$.

Consideremos

$$\mathcal{P} \doteq \{a = \xi_o, \xi_1, \cdots, \xi_n = b\}$$

uma partição do intervalo $[a, b]$.

Com isto podemos considerar as seguintes somas (finitas):

$$s(\mathcal{P}) \doteq \sum_{i=1}^{n} m_i\,(\underbrace{\xi_i - \xi_{i-1}}_{=l([\xi_{i-1}, \xi_i])}), \tag{4.1}$$

$$S(\mathcal{P}) \doteq \sum_{i=1}^{n} M_i\,(\overbrace{\xi_i - \xi_{i-1}})\tag{4.2}$$

onde

$$m_i \doteq \inf_{x \in [\xi_{i-1}, \xi_i]} f(x) \quad e \quad M_i \doteq \sup_{x \in [\xi_{i-1}, \xi_i]} f(x), \tag{4.3}$$

que são denominadas **soma inferior e superior, respectivamente, de Riemann** *da função* f*, associada a partição* $\mathcal{P}$.

Observação 4.1.1 1. *Observemos que:*

$$s(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P}), \tag{4.4}$$

para cada partição $\mathcal{P}$ *do intervalo* $[a, b]$ *considerada.*

2. *Na verdade temos:*

$$s(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P}'), \tag{4.5}$$

onde $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{P}'$ *são partições do intervalo* $[a, b]$.

A demonstração deste fato pode ser encontrada no livro [R].

Veja a 1.a desigualdade da demonstração do Teorema 6.4, da página 124, de [R].

Com temos a:

Definição 4.1.2 *Nas condições da Definição 4.1.1 acima, definiremos a* **integral inferior de Riemann**, *da função* f *no intervalo* $[a\,,b]$, *indicada por* $\mathcal{R}\left(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right)$, *como sendo:*

$$\mathcal{R}\left(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right) \doteq \sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P})\,, \tag{4.6}$$

onde o ínfimo acima é tomado sobre todas as partições $\mathcal{P}$, *do intervalo* $[a\,,b]$.

De modo semelhante, definimos a **integral superior de Riemann** *da função* f *no intervalo* $[a\,,b]$, *indicada por* $\mathcal{R}\left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right)$, *como sendo:*

$$\mathcal{R}\left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right) \doteq \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P})\,, \tag{4.7}$$

onde o ínfimo acima é tomado sobre todas as partições $\mathcal{P}$ *do intervalo* $[a\,,b]$.

Observação 4.1.2 *Segue, do item 2. da Observação 4.1.1, que*

$$\mathcal{R}\left(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right) \leq \mathcal{R}\left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right). \tag{4.8}$$

Com isto podemos introduzir a:

Definição 4.1.3 *Nas condições da Definição 4.1.2 acima, se*

$$\mathcal{R}\left(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right) = \mathcal{R}\left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right), \tag{4.9}$$

diremos que a função f *é* **Riemann integrável** *em* $[a\,,b]$ *e neste caso o valor comum em (4.9) será denominado de* **integral de Riemann** *da função* f *no intervalo* $[a\,,b]$ *e indicada por* $\mathcal{R}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$.

Temos o importante:

Exemplo 4.1.1 *Seja* $g : [a\,, b] \to \mathbb{R}$ *a função, dada por*

$$g(x) \doteq \begin{cases} 1\,, & \textit{para} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [a\,, b]\,, \\ 0\,, & \textit{para} \quad x \in \mathbb{I} \cap [a\,, b]\,. \end{cases} \tag{4.10}$$

Mostre que a função $\underline{g}$ ***não*** *é Riemann integrável em* $[a\,, b]$

Resolução:

Notemos que, para cada partição

$$\mathcal{P} \doteq \{a = \xi_o\,, \xi_1\,, \cdots\,, \xi_n = b\}$$

do intervalo $[a\,, b]$, segue que

$$m_i \doteq \inf_{x \in [\xi_{i-1}\,, \xi_i]} g(x) \overset{(4.10) \text{ e } \mathbb{Q} \cap [\xi_{i-1}\,, \xi_i] \neq \emptyset}{=} 0\,, \tag{4.11}$$

$$M_i \doteq \sup_{x \in [\xi_{i-1}\,, \xi_i]} g(x) \overset{(4.10) \text{ e } \mathbb{I} \cap [\xi_{i-1}\,, \xi_i] \neq \emptyset}{=} 1\,. \tag{4.12}$$

Com isto, teremos

$$s(\mathcal{P}) \overset{(4.1)}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i\,(\xi_i - \xi_{i-1}) \overset{(4.11)}{=} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_{i-1}) = 0\,, \tag{4.13}$$

$$S(\mathcal{P}) \overset{(4.1)}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i\,(\xi_i - \xi_{i-1}) \overset{(4.12)}{=} \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (\xi_i - \xi_{i-1}) = b - a\,, \tag{4.14}$$

e assim

$$\mathcal{R}\left(\underline{\int_a^b} g(x)\,dx\right) \overset{(4.6)}{=} \sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P}) \overset{(4.13)}{=} 0\,, \tag{4.15}$$

$$\mathcal{R}\left(\overline{\int_a^b} g(x)\,dx\right) \overset{(4.7)}{=} \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}) \overset{(4.14)}{=} b - a\,, \tag{4.16}$$

mostrando que a função $\underline{g}$ não é Riemann integrável em $[a\,,b]$.

$\square$

Observação 4.1.3

1. *Toda função degrau (ou escada), definida em um intervalo fechado e limitado, é uma função Riemann integrável nesse intervalo.*

   Mais precisamente, se $\psi : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função degrau (ou escada), então existe uma partição*
   $$\mathcal{P} \doteq \{a = x_o, x_1, \cdots, x_n = b\}$$
   do intervalo $[a\,,b]$ *e constantes*
   $$c_i \in \mathbb{R}\,, \quad \textit{para} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}\,,$$
   tais que
   $$\psi(x) = c_i\,, \tag{4.17}$$
   para $x \in (x_{i-1}\,,x_i)$, *para algum* $i \in \{1\,,2\,,,\cdots,n\}$.

   Podemos obter a partição acima de modo que os intervalos $(x_{i-1}\,,x_i)$, *para* $i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$, *sejam, dois a dois disjuntos.*

   Neste caso, podemos mostrar que
   $$\mathcal{R}\left(\int_a^b \psi(x)\,dx\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(x_i - x_{i-1})\,. \tag{4.18}$$

   Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

2. *Observemos que se* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função limitada e* $\psi : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função degrau (ou escada) tal que*
   $$f(x) \leq \psi(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,, \tag{4.19}$$
   então, segue que:
   $$\mathcal{R}\left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right) = \inf_{f \leq \psi}\left\{\mathcal{R}\left(\int_a^b \psi(x)\,dx\right)\right\}, \tag{4.20}$$
   onde o ínfimo em (4.20) acima, é tomado sobre todas as funções simples ψ, *definidas em* $[a\,,b]$, *tais que*
   $$f \leq \psi\,, \quad \textit{em} \quad [a\,,b]\,.$$

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

3. *De modo semelhante se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função limitada e* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função degrau (ou escada) tal que*

$$\varphi(x) \leq f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b], \tag{4.21}$$

então, segue que:

$$\mathcal{R}\left(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right) = \sup_{\varphi \leq f}\left\{\mathcal{R}\left(\int_a^b \varphi(x)\,dx\right)\right\}, \tag{4.22}$$

onde o supremo (4.22) *acima, é tomado sobre todas as funções simples* ϕ, *definidas em* $[a, b]$, *tais que*

$$\varphi \leq f, \quad \textit{em} \quad [a, b].$$

A verificação deste fato também será deixada como exercício para o leitor.

4.2 A Integral de Lebesgue de uma Função Limitada em um Conjunto de Medida Finita

Observação 4.2.1 *Vimos no Exemplo 4.1.1 que, a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} 1, & \textit{para} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [a, b], \\ 0, & \textit{para} \quad x \in \mathbb{I} \cap [a, b] \end{cases}$$

não *é Riemann integrável em* $[a, b]$, *pois*

$$\mathcal{R}\left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right) \overset{(4.15)}{=} b - a \quad \textit{e} \quad \mathcal{R}\left(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right) \overset{(4.16)}{=} 0.$$

Notemos que, como o conjunto $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ *é enumerável segue, do Corolário 3.2.1, do Lema 3.3.1, que*

$$\mathbb{Q} \cap [a, b] \in \mathscr{M} \quad \textit{e} \quad m(\mathbb{Q} \cap [a, b]) = 0.$$

Assim temos que

$$f = 0, \quad \textit{q.t.p. em} \quad [a, b]$$

e portanto seria "natural" que integral da função $\underline{f}$, *em* $[a, b]$, *além de existir, fosse igual a zero.*

Conclusão: precisamos de um "novo" conceito de integração, que estenda o conceito da integral de Riemann em um intervalo $[a, b]$, *que nos tenha a propriedade acima.*

Isto é o que faremos neste capítulo, a saber, introduzir a Integral de Lebesgue.

Observação 4.2.2 *Observemos que, do item 3. da Observação 3.5.8, segue que se* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é função simples, então ela possui uma (única) representação canônica, isto é, pode ser escrita (de modo único) como*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathcal{X}_{A_i} \,, \tag{4.23}$$

onde, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$*, temos que*

$$A_i \doteq \{x \in E\,;\, \varphi(x) = a_i\} \tag{4.24}$$

e, para $i\,,j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$*, satisfazendo*

$$i \neq j\,,$$

teremos:

$$a_i \neq 0\,, \quad a_i \neq a_j \tag{4.25}$$

e

$$A_i \cap A_j = \emptyset\,, \quad . \tag{4.26}$$

Podemos agora introduzir a:

Definição 4.2.1 *Suponhamos que a função simples* $\underline{\varphi}$*, dada por (4.23), seja igual a zero, fora de um conjunto Lebesgue mensurável, cuja medida é finita, isto é,*

$$\{x \in \mathbb{R}\,;\, \varphi(x) \neq 0\} \in \mathscr{M}\,, \tag{4.27}$$

e

$$m\,(\,\{x \in \mathbb{R}\,;\, \varphi(x) \neq 0\}\,) < \infty)\,. \tag{4.28}$$

Neste caso, definimos a **<u>integral de Lebesgue, da função φ, em $\mathbb{R}$</u>***, que indicaremos por* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi \, dm$*, como sendo*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi \, dm \doteq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m(A_i)\,. \tag{4.29}$$

Se $E \in \mathscr{M}$*, definiremos a* **<u>integral de Lebesgue da função φ, no conjunto E</u>***, que denotaremos por* $\displaystyle\int_{E} \varphi \, dm$ *,como sendo:*

$$\int_{E} \varphi \, dm = \int_{\mathbb{R}} \varphi \cdot \mathcal{X}_E \, dm\,. \tag{4.30}$$

Observação 4.2.3

1. *Utilizaremos também a seguinte notação para a integral de Lebesgue da função φ, em $\mathbb{R}$ ou em $E \in \mathscr{M}$:*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi \quad \textit{ou} \quad \int_{E} \varphi\,, \tag{4.31}$$

respectivamente.

2. *Se a função função simples φ, for constante em $E \in \mathscr{M}$, isto é,*

$$\varphi(x) = c\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in E\,, \tag{4.32}$$

então, da Definição 4.2.1 acima, segue que

$$\int_{E} \varphi = c \cdot m(E)\,. \tag{4.33}$$

Em particular, se $E \in \mathscr{M}$, teremos

$$\int_{E} 1 = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_E = m(E)\,, \tag{4.34}$$

bastando considerar a função simples

$$\varphi \doteq \mathcal{X}_E\,.$$

3. *O valor da integral de Lebesgue da função φ **não** depende da representação que consideramos, isto é, se considermos*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{k} b_j\, \mathcal{X}_{B_j}\,, \tag{4.35}$$

onde, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, temos que

$$b_j \in \mathbb{R} \quad \textit{e} \quad B_j \in \mathscr{M}\,,$$

(não necessariamente a representação canônica), então teremos que

$$\sum_{j=1}^{k} b_j \cdot m(B_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m(A_i)\,. \tag{4.36}$$

O resultado a seguir mostra parte da afirmação do item 3. da Observação 4.2.3 acima, a saber:

Lema 4.2.1 *Para cada* $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$*, consideremos* $b_j \in \mathbb{R}$*,* $E_j \in \mathscr{M}$*, de modo que*

$$m(E_j) < \infty,$$

para $j, k \in \{1, 2, \cdots, m\}$*, com* $i \neq j$*, satisfazendo*

$$E_j \cap E_k = \emptyset$$

e a função simples $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{k} b_j \, \mathcal{X}_{E_j}. \tag{4.37}$$

Então

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi = \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot m(E_j). \tag{4.38}$$

Demonstração:

Para cada $a \in \mathbb{R}$ fixado, consideremos o conjunto

$$A_a \doteq \{x \in \mathbb{R}; \, \varphi(x) = a\}. \tag{4.39}$$

Como a função φ, só assume os valores $b_j \in \mathbb{R}$, para $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, segue que

$$A_a = \begin{cases} \emptyset \\ \displaystyle\bigcup_{j \in \{1, 2, \cdots, k;\, b_j = a\}} E_j, \end{cases}$$

ou seja, só existe um número finito destes conjuntos (não vazios) do tipo (4.39), que denotaremos por

$$A_i, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}. \tag{4.40}$$

Logo, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, o conjunto A_i é formado pela reunião finita de E_j'.

Lembremos que, para cada $j, k \in \{1, 2, \cdots, m\}$, satisfazendo $j \neq k$, temos que

$$E_j \cap E_k = \emptyset,$$

logo teremos que a função φ será constante no conjunto A_i e seu valor, será denotado por a_i, isto é,

$$\varphi(x) = -a_i, \quad \text{para cada} \quad x \in A_i.$$

Deste modo, pela construção acima, a representação canônica da função φ, será dada por

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathcal{X}_{A_i}. \tag{4.41}$$

Notemos que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, temos que

$$a_i \cdot m(A_i) \overset{\text{construção acima}}{=} \sum_{j \in \{1, 2, \cdots, k;\, b_j = a_i\}} b_j \cdot m(E_j)\,. \tag{4.42}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi &\overset{(4.41)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m(A_i) \\ &\overset{(4.42)}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \in \{1, 2, \cdots, k;\, b_j = a_i\}} b_j \cdot m(E_j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot m(E_j)\,, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Temos também a:

Proposição 4.2.1 *Sejam $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções simples, que são iguais a zero fora de um conjunto Lebesgue mensurável, de medida finita e $a \in \mathbb{R}$.*

1. *Temos que:*
$$\int_{\mathbb{R}} (a\,\varphi) = a \int_{\mathbb{R}} \varphi\,. \tag{4.43}$$

2. *Temos também que:*
$$\int_{\mathbb{R}} (\varphi + \psi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi + \int_{\mathbb{R}} \psi\,; \tag{4.44}$$

3. *Se*
$$\varphi \leq \psi\,, \quad \textit{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}\,, \tag{4.45}$$
segue que:
$$\int_{\mathbb{R}} \varphi \leq \int_{\mathbb{R}} \psi\,; \tag{4.46}$$

4. *valem os análogos dos itens acima trocando-se o conjuto $\mathbb{R}$ pelo conjunto E.*

5. *Se $E, F \in \mathscr{M}$ como $F \subseteq E$, então teremos*
$$\int_{F} \varphi \leq \int_{E} \varphi\,. \tag{4.47}$$

Demonstração:

De 1.:

Notemos que, para

$$a = 0\,,$$

temos que $a\varphi \equiv 0$, logo a igualdade (4.43) vale trivialmente.

Para

$$a \neq 0$$

se

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathcal{X}_{A_i} \tag{4.48}$$

é a representação canônica da função simples $\underline{\varphi}$, então

$$a\,\varphi = \sum_{i=1}^{n} (a a_i)\, \mathcal{X}_{A_i} \tag{4.49}$$

será a representação canônica da função simples $a\varphi$.

Deixaremos verificação deste fato como exercício para o leitor.

Logo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (a\,\varphi) &\overset{\text{Definição 4.2.1 e (4.49)}}{=} \sum_{i=1}^{n} (a\,a_i)\cdot m(A_i)\\ &\overset{\text{soma finita}}{=} a\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m(A_i)\right)\\ &\overset{\text{Definição 4.2.1 e (4.48)}}{=} a\int_{\mathbb{R}} \varphi\,,\end{aligned} \tag{4.50}$$

mostrando a validade de (4.43)..

De 2.:

Sejam

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathcal{X}_{A_i} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{j=1}^{m} b_j\, \mathcal{X}_{B_j}$$

as representações canônicas das funções simples $\underline{\varphi}$ e $\underline{\psi}$.

Sejam A_o e B_o os conjuntos (mensuráveis), onde as funções simples $\underline{\varphi}$ e $\underline{\psi}$ são nulas, respectivamente, e definamos

$$a_o \doteq 0 \quad \text{e} \quad b_o \doteq 0. \tag{4.51}$$

Então temos as seguinte representações (não necessariamente a canônica) das funções simples φ, ψ e $\varphi+\psi$:

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i\, \mathcal{X}_{A_i\cap B_j}\,, \tag{4.52}$$

$$\psi = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} b_j\, \mathcal{X}_{A_i\cap B_j}\,, \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}\varphi+\psi &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} (a_i+b_j)\, \mathcal{X}_{A_i\cap B_j}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} (a_i+b_j)\, \mathcal{X}_{E_{ij}}\,,\end{aligned} \tag{4.54}$$

onde, para cada $i\in\{0,1,\cdots,n\}$ e $j\in\{0,1,\cdots,m\}$, definimos

$$E_{ij} \doteq A_i\cap B_j\,. \tag{4.55}$$

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Notemos que a família

$$\{E_{ij}\,;\, i\in\{0,1,\cdots,n\},\, j\in\{0,1,\cdots m\}\}$$

é formada por conjuntos Lebesgue mensuráveis que, por construção, são dois a dois disjuntos .

Logo, do Lema 4.2.1 acima, segue que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi \overset{\text{Definição 4.2.1 e (4.52)}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\cdot m(A_i\cap B_j)\,, \tag{4.56}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi \overset{\text{Definição 4.2.1 e (4.53)}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j\cdot m(A_i\cap B_j)\,, \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \varphi+\psi &\overset{\text{Definição 4.2.1 e (4.54)}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i+b_j)\cdot m(E_{ij})\\ &\overset{(4.55)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i+b_j)\cdot m(A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\cdot m(A_i\cap B_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j\cdot m(A_i\cap B_j)\\ &\overset{(4.56)\text{ e }(4.57)}{=} \int_{\mathbb{R}}\varphi + \int_{\mathbb{R}}\psi\,,\end{aligned}$$

obtendo a igualdade (4.44), como queríamos mostrar.

De 3.:

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \psi - \int_{\mathbb{R}} \varphi &= \int_{\mathbb{R}} \psi + (-1) \int_{\mathbb{R}} \varphi \\
&\overset{\text{do item 1.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \psi + \int_{\mathbb{R}} (-1)\, \varphi) \\
&\overset{\text{do item 2.}}{=} \int_{\mathbb{R}} (\psi - \varphi)\,. \qquad (4.58)
\end{aligned}$$

Logo, de (4.58), mostrar o item 3., é equivalente a mostrar que se uma função simples η é não negativa, q.t.p. em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\eta \geq 0\,, \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}\,, \qquad (4.59)$$

então deveremos ter

$$\int_{\mathbb{R}} \eta \geq 0\,.$$

Suponhamos que a função η é uma função simples que satisfaz

$$\eta \geq 0\,, \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}\,,$$

ou seja, podemos encontrar $B \in \mathscr{M}$, de modo que

$$\eta \geq 0\,, \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \setminus B\,, \qquad (4.60)$$

onde $B \in \mathscr{M}$ e

$$m(B) = 0\,. \qquad (4.61)$$

Logo se

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathcal{X}_{A_i}\,,$$

é a forma canônica da função simples η, como

$$\eta \geq 0\,, \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \setminus B\,,$$

necessariamente deveremos ter

$$a_i \geq 0\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}\,,$$

exceto para um número finito de a_i's e, para estes índices, os correspondentes conjuntos A_i's deverão ter medida igual a zero.

De fato, pois se para algum $i_o \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}$ tivermos

$$\begin{aligned}
& a_{i_o} < 0\,, \\
\text{de (4.60), segue que} \quad & A_{i_o} \subseteq B \\
\text{e, de (4.61), teremos} \quad & m(A_{i_o}) = 0\,.
\end{aligned}$$

Logo podemos considerar somente os índices $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, tais que o conjunto A_i não tem medida igual zero ou, equivalentemente, os índices $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, de modo que os números reais a_i são não negativos, que continuaremos indicando por $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Deste modo, teremoq ue

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathcal{X}_{A_i} \tag{4.62}$$

e, como

$$\eta \geq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R},$$

necessariamente deveremos ter

$$a_i \geq 0, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Assim

$$\int_{\mathbb{R}} \eta \overset{\text{Definição 4.2.1 e (4.62)}}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_i}_{\geq 0} \cdot \underbrace{m(A_i)}_{\geq 0} \geq 0,$$

como queríamos mostrar.

De 5.:

Observemos que, da Definição 4.2.1, temos que (veja (4.30))

$$\int_F \varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi \cdot \mathcal{X}_F \quad \text{e} \quad \int_E \varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi \cdot \mathcal{X}_E . \tag{4.63}$$

Notemos que

$$\varphi \cdot \mathcal{X}_F \overset{F \subseteq E}{\leq} \varphi \cdot \mathcal{X}_E . \tag{4.64}$$

Logo, do item 3., segue que

$$\begin{aligned} \int_F \varphi &\overset{(4.63)}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi \cdot \mathcal{X}_F \\ &\overset{(4.64) \text{ e } (4.46)}{\leq} \int_{\mathbb{R}} \varphi \cdot \mathcal{X}_E \\ &\overset{(4.63)}{=} \int_E \varphi, \end{aligned}$$

completando a demonstração.

□

Observação 4.2.4

1. *Segue, dos itens 1. e 2. da Proposição 4.2.1 acima, que se uma função simples $\underline{\varphi}$ possui uma representação (não necessariamente canônica) da forma*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathcal{X}_{E_i}, \tag{4.65}$$

então

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi \overset{(4.65)}{=} \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} a_i \,\mathcal{X}_{E_i}$$

$$\overset{\text{itens 1. e 2. da Proposição 4.2.1}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{E_i}$$

$$\overset{\text{item 2. da Observação 4.2.3 (ou ainda, (4.34))}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m(E_i)\,,$$

ou seja, podemos estender o Lema 4.2.1, para o caso em a família de conjuntos Lebesgue mensuráveis

$$\{E_i\,;\, i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\}$$

não *seja, necessariamente, formada por conjuntos, dois a dois disjuntos.*

2. *Sejam* $E \in \mathscr{M}$, *tal que*

$$m(E) < \infty$$

e $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função limitada em* E.

Consideremos os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{A} \doteq \{\varphi : E \to \mathbb{R}\,;\, \varphi \text{ função simples, tal que: } \varphi(x) \leq f(x)\,, \text{ para } x \in E\} \tag{4.66}$$

e

$$\mathcal{B} \doteq \{\psi : E \to \mathbb{R}\,;\, \psi \text{ função simples, tal que: } f(x) \leq \psi(x)\,, \text{ para } x \in E\}. \tag{4.67}$$

Como a função f *é limitada em* E *e*

$$m(E) < \infty\,,$$

segue que podemos considerar os seguintes números reais:

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{A}} \left\{ \int_E \varphi \right\} \tag{4.68}$$

e

$$\inf_{\psi \in \mathcal{B}} \left\{ \int_E \psi \right\}. \tag{4.69}$$

De fato, como a função f *é limitada em* E, *podemos encontttar* $m\,,M \geq 0$ *tais*

$$-\,m \leq f(x) \leq M\,, \quad \text{para} \quad x \in E\,. \tag{4.70}$$

Logo, se $\varphi \in \mathcal{A}$, *como*

$$\varphi \overset{(4.66) \text{ e } (4.70)}{\leq} M\,\mathcal{X}_E\,, \quad \text{em} \quad E\,,$$

dos itens 3. e 1. da Proposição 4.2.1 acima, que

$$\begin{aligned}\int_E \varphi &\leq \int_E M\,\mathcal{X}_E \\ &\overset{(4.43)}{=} M \int_E \mathcal{X}_E \\ &= M \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_E \\ &\overset{(4.34)}{=} M \cdot m(E)\,,\end{aligned}$$

logo existe (4.68).

Por outro lado, se $\psi \in \mathcal{B}$, *como*

$$\psi \overset{(4.67)\ e\ (4.70)}{\geq} -m\,\mathcal{X}_E\,, \quad em \quad E\,,$$

dos itens 3. e 1. da Proposição 4.2.1 acima, que

$$\begin{aligned}\int_E \psi &\geq \int_E (-m)\,\mathcal{X}_E \\ &\overset{(4.43)}{=} -m \int_E \mathcal{X}_E \\ &= -m \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_E \\ &\overset{(4.34)}{=} -m \cdot m(E)\,,\end{aligned}$$

logo existe (4.69), *ou seja, existem o supremo e o ínfimo em* (4.68) *e* (4.69), *respectivamente.*

3. *Por simplicidade, muitas vezes escreveremos:*

$$\sup_{\varphi \leq f} \left\{ \int_E \varphi \right\} \doteq \sup_{\varphi \in \mathcal{A}} \left\{ \int_E \varphi \right\} \tag{4.71}$$

e

$$\inf_{f \leq \psi} \left\{ \int_E \psi \right\} \doteq \inf_{\psi \in \mathcal{B}} \left\{ \int_E \psi \right\}. \tag{4.72}$$

4. *Observemos que se* $\phi \in \mathcal{A}$ *e* $\psi \in \mathcal{B}$, *segue que*

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)\,, \quad para\ cada \quad x \in E\,. \tag{4.73}$$

Logo, de (4.73) *e do item 3. da Proposição 4.2.1 acima, teremos:*

$$\int_E \varphi \leq \int_E \psi\,. \tag{4.74}$$

Com isto, podemos mostrar que:

$$\sup_{\varphi \leq f} \left\{ \int_E \varphi \right\} \leq \inf_{f \leq \psi} \left\{ \int_E \psi \right\} . \tag{4.75}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

5. *Pergunta-se: quando os dois números (4.68) e (4.69) são iguais?*

Para responder a essa pergunta temos a:

Proposição 4.2.2 *Sejam* $E \in \mathscr{M}$, *tal que*

$$m(E) < \infty$$

e $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função limitada em* E.

Então

$$\sup_{\varphi \leq f} \left\{ \int_E \varphi \right\} = \inf_{f \leq \psi} \left\{ \int_E \psi \right\} \tag{4.76}$$

se, e somente se, a função f *for uma função Lebesgue mensurável em* E.

Demonstração:

Como a função f é limitada em E, podemos encontrar $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)| < M , \quad \text{para} \quad x \in E ,$$

$$\text{ou ainda,} \qquad -M < f(x) \leq M , \quad \text{para} \quad x \in E . \tag{4.77}$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, dividindo-se o intervalo $[-M , M]$ em $2n$ subintervelos de mesmo comprimento iguais a $\dfrac{M}{n}$, obteremos, para cada $k \in [-n+1 , n] \cap \mathbb{N}$, subintervalos do tipo

$$\left(\frac{(k-1)\,M}{n} , \frac{k\,M}{n} \right]$$

e, com isto, teremos que

$$(-M , M] = \bigcup_{k=-n+1}^{n} \left(\frac{(k-1)\,M}{n} , \frac{k\,M}{n} \right] \tag{4.78}$$

Suponhamos que a função f é uma função Lebesgue mensurável em E.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $k \in [-n+1 , n] \cap \mathbb{N}$, consideremos o conjunto

$$E_{kn} \doteq \left\{ x \in E ; \frac{(k-1)\,M}{n} < f(x) \leq \frac{k\,M}{n} \right\} . \tag{4.79}$$

Como a função f é uma função Lebesgue mensurável em E, segue que

$$E_{kn} \in \mathscr{M} ,$$

para cada $k \in \mathbb{N} \cap [-n+1\,,n]$.

Observemos também que se

$$k \neq k'\,, \quad \text{com} \quad k\,,k' \in [-n+1\,,n] \cap \mathbb{N}\,,$$

supondo que $k < k'$, teremos

$$\begin{aligned}\frac{(k-1)\,M}{n} &< \frac{k\,M}{n}\\ &\overset{k \leq k'-1}{\leq} \frac{(k'-1)\,M}{n}\\ &< \frac{k'\,M}{n}\,,\end{aligned}$$

que, de (4.79), implicará que

$$E_{k\,n} \cap E_{k'\,n} = \emptyset\,. \tag{4.80}$$

Além disso, de (4.78) e (4.79), segue que

$$E = \bigcup_{k=-n+1}^{n} E_{k\,n}\,. \tag{4.81}$$

Logo, da Proposição 3.3.1, teremos:

$$\begin{aligned}m(E) &= m\left(\bigcup_{k=-n+1}^{n} E_{k\,n}\right)\\ &\overset{(3.59)}{=} \sum_{k=-n+1}^{n} m(E_{k\,n})\,.\end{aligned} \tag{4.82}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos as funções simples $\phi_n\,, \varphi_n : E \to \mathbb{R}$, dadas por

$$\psi_n(x) \doteq \frac{M}{n} \sum_{k=-n+1}^{n} k\,\mathcal{X}_{E_{k\,n}}(x) \tag{4.83}$$

e

$$\varphi_n(x) \doteq \frac{M}{n} \sum_{k=-n+1}^{n} (k-1)\,\mathcal{X}_{E_{k\,n}}(x) \tag{4.84}$$

para cada $x \in E$.

Da constução dos conjuntos $E_{k\,n}$, para $k \in [-n+1\,,n] \cap \mathbb{N}$ (ou seja, de (4.80) e (4.81)), as funções ϕ_n e φ_n estão nas respectivas formas canônicas.

Notemos que, para cada $x \in E$, teremos:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) &\overset{(4.84)}{=} \frac{M}{n} \sum_{k=-n+1}^{n} (k-1)\, \mathcal{X}_{E_{k\,n}}(x) \\
&= \sum_{k=-n+1}^{n} \underbrace{\frac{M}{n}(k-1)\, \mathcal{X}_{E_{k\,n}}(x)}_{\overset{(4.79)}{\leq} f(x)} \\
&\overset{E_{k\,n} \text{ são disjuntos, para cada } k \in [-n+1\,, n] \cap \mathbb{N}}{\leq} f(x) \\
\psi_n(x) &\overset{(4.83)}{=} \frac{M}{n} \sum_{k=-n+1}^{n} k\, \mathcal{X}_{E_{k\,n}}(x) \\
&= \sum_{k=-n+1}^{n} \underbrace{\frac{M}{n} k\, \mathcal{X}_{E_{k\,n}}(x)}_{\overset{(4.79)}{\geq} f(x)} \\
&\overset{E_{k\,n} \text{ são disjuntos, para cada } k \in [-n+1\,, n] \cap \mathbb{N}}{\geq} f(x)\,. \qquad (4.85)
\end{aligned}$$

Assim teremos:

$$\begin{aligned}
\sup_{\varphi \leq f} \left\{ \int_E \varphi \right\} &\geq \int_E \varphi_n \\
&\overset{(4.84) \text{ e } (4.29)}{=} \frac{M}{n} \sum_{k=-n+1}^{n} k \cdot m(E_{k\,n}) \qquad (4.86)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\inf_{f \leq \psi} \left\{ \int_E \psi \right\} &\leq \int_E \psi_n \\
&\overset{(4.83) \text{ e } (4.29)}{=} \frac{M}{n} \sum_{k=-n+1}^{n} (k-1) \cdot m(E_{k\,n})\,. \qquad (4.87)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
0 &\leq \inf_{f \leq \psi} \left\{ \int_E \psi \right\} - \sup_{\varphi \leq f} \left\{ \int_E \varphi \right\} \\
&\overset{(4.87) \text{ e } (4.86)}{\leq} \frac{M}{n} \sum_{k=-n+1}^{n} (k-1) \cdot m(E_{k\,n}) - \frac{M}{n} \sum_{k=-n+1}^{n} k \cdot m(E_{k\,n}) \\
&= \frac{M}{n} \sum_{k=-n+1}^{n} m(E_{k\,n}) \\
&\overset{(4.82)}{=} \frac{M}{n} m(E)\,,
\end{aligned}$$

isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$\underbrace{\inf_{f \leq \psi} \left\{ \int_E \psi \right\} - \sup_{\varphi \leq f} \left\{ \int_E \varphi \right\}}_{\doteq \boxed{\mathbf{I}}} \leq \frac{M}{n} \underbrace{m(E)}_{<\infty} . \tag{4.88}$$

Como o termo $\boxed{\mathbf{I}}$ acima, <u>**não**</u> depende de $n \in \mathbb{N}$, fazendo $n \to +\infty$ em (4.88), obteremos:

$$\inf_{f \leq \psi} \left\{ \int_E \psi \right\} - \sup_{\varphi \leq f} \left\{ \int_E \varphi \right\} \leq 0 ,$$

ou seja,
$$\inf_{f \leq \psi} \left\{ \int_E \psi \right\} \leq \sup_{\varphi \leq f} \left\{ \int_E \varphi \right\} . \tag{4.89}$$

Como sempre vale (4.75), de (4.89), segue que

$$\sup_{\varphi \leq f} \left\{ \int_E \varphi \right\} = \inf_{f \leq \psi} \left\{ \int_E \psi \right\} ,$$

como queríamos mostrar.

Suponhamos agora que vale a igualdade

$$\sup_{\varphi \leq f} \left\{ \int_E \varphi \right\} = \inf_{f \leq \psi} \left\{ \int_E \psi \right\} .$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar funções simples $\varphi_n , \psi_n : E \to \mathbb{R}$, de modo que

$$\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x) , \quad \text{para cada} \quad x \in E \tag{4.90}$$

e

$$\int_E (\psi_n - \varphi_n) = \int_E \psi_n - \int_E \varphi_n < \frac{1}{n} . \tag{4.91}$$

Consideremos as funções $\varphi^* , \psi^* : E \to \mathbb{R}$, dadas por

$$\varphi^*(x) \doteq \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(x) \quad \text{e} \quad \psi^*(x) \doteq \inf_{n \in \mathbb{N}} \psi_n(x) , \quad \text{para cada} \quad x \in E . \tag{4.92}$$

Com isto, de (4.90) e (4.92), temos que

$$\varphi^*(x) \leq f(x) \leq \psi^*(x) , \quad \text{para cada} \quad x \in E . \tag{4.93}$$

Além disso, como as funções (simples) φ_n e ψ_n são Lebesgue mensuráveis em E, da Proposição (3.5.4), segue que as funções φ^* e ψ^* serão Lebesgue mensuráveis em E.

Afirmamos que:

$$f = \varphi^* = \psi^* , \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R} .$$

De fato, consideremos

$$\Delta \doteq \{x \in E\,;\ \varphi^*(x) < \psi^*(x)\} \tag{4.94}$$

e para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$\Delta_k \doteq \left\{x \in E\,;\ \varphi^*(x) < \psi^*(x) - \frac{1}{k}\right\}. \tag{4.95}$$

Logo, de (4.94) e (4.95), segue que

$$\Delta = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k\,. \tag{4.96}$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, de (4.92), temos que

$$\varphi_n(x) \leq \varphi^*(x) \quad \text{e} \quad \psi^*(x) \leq \psi_n(x)\,, \tag{4.97}$$

para cada $x \in E$.

Com isto, para cada $n \in \mathbb{N}$, de (4.95) e (4.97), teremos:

$$\Delta_k \subseteq \left\{x \in E\,;\ \varphi_n(x) < \psi_n(x) - \frac{1}{k}\right\}, \tag{4.98}$$

logo, do item 1. do Lema 3.3.6, segue que

$$m(\Delta_k) \leq m\left(\left\{x \in E\,;\ \varphi_n(x) < \psi_n(x) - \frac{1}{k}\right\}\right). \tag{4.99}$$

Afirmamos que:

$$m\left(\left\{x \in E\,;\ \varphi_n(x) < \psi_n(x) - \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \frac{k}{n}. \tag{4.100}$$

De fato, suponhamos, por absurdo, que isto não ocorra, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{k}{n} &< m\left(\left\{x \in E\,;\ \varphi_n(x) < \psi_n(x) - \frac{1}{k}\right\}\right) \\ &= m\Bigg(\underbrace{\left\{x \in E\,;\ \frac{1}{k} < \psi_n(x) - \varphi_n(x)\right\}}_{\doteq F \in \mathscr{M}}\Bigg). \end{aligned} \tag{4.101}$$

Como

$$F \subseteq E\,,$$

dos itens 5. e 3. da Proposição 4.2.1, segue que

$$\begin{aligned}
\int_E (\psi_n - \varphi_n) &\overset{(4.47)}{\geq} \int_F (\psi_n - \varphi_n) \\
&\overset{\psi_n - \varphi_n > \frac{1}{k}, \text{ em } F \text{ e } (4.46)}{\geq} \int_F \frac{1}{k} \\
&\overset{\text{item 2. da Observação 4.2.3}}{=} \frac{1}{k} \cdot m(F) \\
&\overset{(4.101)}{>} \frac{1}{k} k n \\
&= \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

contrariando (4.91).

Portanto (4.100) deverá ocorrer.

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, de (4.99) e (4.100), teremos

$$m(\Delta_k) \leq \frac{k}{n}. \tag{4.102}$$

Como o lado esquerdo de (4.102) **não** depende de $n \in \mathbb{N}$, fazendo $n \to +\infty$ em (4.102), seguee que

$$m(\Delta_k) = 0, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Mas

$$\Delta \overset{(4.96)}{=} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k \quad \text{e} \quad m(\Delta_k) = 0, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Logo, da Proposição 3.3.1, segue que

$$\begin{aligned}
m(\Delta) &= m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k\right) \\
&\overset{(3.58)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{m(\Delta_k)}_{=0} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

que, por (4.94) e (4.93), implicarão que

$$\varphi^* = \psi^*, \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}$$

que, por sua vez, por (4.93), implicará em

$$f = \varphi^* = \psi^*, \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}.$$

Logo, a Proposição 3.5.5, garante que a função f é uma função Lebesgue mensurável em E, completando a demonstração.

□

Com isto podemos introduzir a:

Definição 4.2.2 *Sejam* $E \in \mathscr{M}$ *tal que*

$$m(E) < \infty$$

e $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função limitada e mensurável em* E.

Definiremos a **integral de Lebesgue da função** f**, em** E, *indicada por* $\int_E f$, *como sendo:*

$$\int_E f \doteq \inf_{f \leq \psi} \left(\int_E \psi \right) \tag{4.103}$$

$$= \sup_{\varphi \leq f} \left(\int_E \varphi \right) . \tag{4.104}$$

Observação 4.2.5

1. *Notemos que que, see na Definição 4.2.2 acima, tivermos*

$$E \doteq [a\,, b]\,,$$

então poderemos denotar a integral de Lebesgue da função f *em* $[a\,, b]$ *por* $\int_a^b f$, *isto é:*

$$\int_a^b f \doteq \int_{[a\,,b]} f\,. \tag{4.105}$$

2. *Se a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é limitada, Lebesgue mensurável em* $\mathbb{R}$ *e é igual a zero, fora do conjunto Lebesgue mensurável* $E \subseteq \mathbb{R}$, *com*

$$m(E) < \infty\,,$$

denotaremos a integral de Lebesgue $\int_{\mathbb{R}} f$, *por* $\int_E f$, *ou seja,*

$$\int_E f = \int_{\mathbb{R}} f\,. \tag{4.106}$$

3. *Se* $A\,, E \in \mathscr{M}$, *com* $A \subseteq E$,

$$m(E) < \infty$$

e a função $f : E \to \mathbb{R}$ *é uma função limitada e mensurável em* E, *então definiremos* **integral de Lebesgue da função** f**, em** A, *indicada por* $\int_A f$, *como sendo*

$$\int_A f \doteq \int_E f \cdot \mathcal{X}_A\,. \tag{4.107}$$

O resultado a seguir nos diz que a integral de Lebesgue estende a integral de Riemann para intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$, mais precisamente:

Proposição 4.2.3 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada em* $[a, b]$.

Se a função f *é Riemann integrável em* $[a, b]$, *então ela será Lebesgue mensurável em* $[a, b]$, *em particulara, existirá a integral de Lebesgue da função* f *em* $[a, b]$ *e, além disso, teremos*

$$\mathcal{R}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = \int_{[a,b]} f\,. \tag{4.108}$$

Demonstração:

Consideremos os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{A} \doteq \{\varphi_o : E \to \mathbb{R};\ \varphi_o \text{ é função degrau, com } \varphi_o \leq f\,,\ \text{em } E\}, \tag{4.109}$$

$$\mathcal{B} \doteq \{\psi_o : E \to \mathbb{R};\ \psi_o \text{ é função degrau, com } f \leq \psi_o\,,\ \text{em } E\}, \tag{4.110}$$

$$\mathcal{C} \doteq \{\varphi : E \to \mathbb{R};\ \varphi \text{ é função simples, com } \varphi \leq f\,,\ \text{em } E\}, \tag{4.111}$$

e

$$\mathcal{D} \doteq \{\psi : E \to \mathbb{R};\ \psi \text{ é função simples, como } f \leq \psi\,,\ \text{em } E\}. \tag{4.112}$$

Das Definições 3.5.5 e 3.5.6, segue que toda função degrau é uma função simples, ou seja,

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}\,. \tag{4.113}$$

Logo, do item 3. da Observação 4.1.3, segue que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\left(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right) &\overset{(4.22)}{=} \sup_{\varphi_o \in \mathcal{A}} \left(\int_a^b \varphi_o(x)\,dx\right) \\
&\overset{\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}}{\leq} \sup_{\varphi \in \mathcal{C}} \left(\int_{[a,b]} \varphi\right) \\
&\overset{(4.75)}{\leq} \inf_{\psi \in \mathcal{D}} \left(\int_{[a,b]} \psi\right) \\
&\overset{\mathcal{B}\subseteq\mathcal{D}}{\leq} \inf_{\psi_o \in \mathcal{B}} \left(\int_a^b \psi_o(x)\,dx\right) \\
&= \mathcal{R}\left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right)\,.
\end{aligned} \tag{4.114}$$

Logo, se a função f é Riemann integrável em $[a, b]$, teremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\left(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right) &= \mathcal{R}\left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right) \\
&= \mathcal{R}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\,,
\end{aligned}$$

e assim, de (4.114), segue que

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{C}}\left(\int_a^b \varphi\right) = \inf_{\psi\in\mathcal{D}}\left(\int_a^b \psi\right),$$

que, pela Proposição 4.2.2, implicará que a função f é Lebesgue mensurável em $[a\,,b]$, em particular, existe a integral de Lebesgue da função f em $[a\,,b]$, e

$$\mathcal{R}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = \int_{[a\,,b]} f\,,$$

completando a demonstração.

$\square$

Observação 4.2.6 *Resumindo, a Proposição 4.2.3 acima nos diz que toda função Riemann integrável em* $[a\,,b]$ *será Lebesgue integrável em* $[a\,,b]$.

Não *vale a recíproca, ou seja, existe funções limitadas que são Lebesgue integráveis que* **não** *são Riemann integráveis.*

De fato, como vimos no Exemplo 4.1.1, a função $g:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ *a função, dada por*

$$g(x) \doteq \begin{cases} 1\,, & \textit{para} \quad x\in\mathbb{Q}\cap[a\,,b]\,,\\ 0\,, & \textit{para} \quad x\in\mathbb{I}\cap[a\,,b]\,.\end{cases}$$

não *é Riemann integrável em* $[a\,,b]$, *mas o Exemplo 3.5.5, juntamente com a Proposição 4.2.2, garantem que ela é Lebesgue integrável em* $[a\,,b]$.

Temos as seguintes propriedades básicas, para a integral de Lebesgue:

Proposição 4.2.4 *Sejam* $a\in\mathbb{R}$, $f\,,g:E\to\mathbb{R}$ *duas funções limitadas e Lebesgue mensuráveis em* E, *com*

$$m(E)<\infty\,.$$

1. *temos que:*
$$\int_E (a\,f) = a\int_E f\,; \tag{4.115}$$
2. *temos também que:*
$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g\,; \tag{4.116}$$
3. *se*
$$f=g\,, \quad \textit{q.t.p. em} \quad E\,, \tag{4.117}$$
então
$$\int_E f = \int_E g\,; \tag{4.118}$$

4. *se*
$$f \leq g\,, \quad \textit{q.t.p. em} \quad E\,, \tag{4.119}$$
então
$$\int_E f \leq \int_E g\,; \tag{4.120}$$
Em particular,
$$\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|\,; \tag{4.121}$$

5. *se* $m\,,M \in \mathbb{R}$*, são tais que*
$$m \leq f(x) \leq M\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in E\,, \tag{4.122}$$
então
$$m \cdot m(E) \leq \int_E f \leq M \cdot m(E)\,; \tag{4.123}$$

6. *se* $A\,,B \subseteq E$ *são dois subconjuntos Lebesgue mensuráveis e disjuntos, então*
$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f\,. \tag{4.124}$$

Demonstração:

Como os conjunto A e B são conjuntos Lebesgue mesnsuráveis, as funçãoes f e g são funções Lebesgue mensuráveis, da Proposição 3.5.2 e da Observação 3.5.4, segue que as funções
$$a\,f\,, \quad f+g\,, \quad |f|\,, \quad f \cdot \mathcal{X}_A \quad \text{e} \quad f \cdot \mathcal{X}_B$$
serão Lebesgue mensuráveis.

Além disso, como
$$m(E) < \infty\,,$$
da Proposição 4.2.2, segue que existirão as respectivas integrais de Lebesgue, nos respectivos conjuntos.

Com isto nosso trabalho será tratar das identidades ou desigualdades envolvidas em cada um dos itens acima.

Demonstração do item 1.:

Se
$$a = 0\,,$$
nada temos a fazer pois os dois lados da identidade (4.115) serão iguais a zero.

Se
$$a \neq 0\,,$$
segue que a função $\psi : E \to \mathbb{R}$ é uma função simples se, e somente se, a função $a\,\psi : E \to \mathbb{R}$ é uma função simples.

A verificação destes fatos é simples e será deixada como exercício para o leitor. Notemos também que, para $a > 0$, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &\doteq \{\Psi : E \to \mathbb{R};\, \Psi \text{ é função simples, tal que } a\, f \leq \Psi\} \\
&\overset{\Psi = a\,\psi}{=} \{a\,\psi : E \to \mathbb{R};\, \psi \text{ é função simples, tal que } a\, f \leq a\,\psi\} \qquad (4.125)\\
&\overset{a>0}{=} \{\psi : E \to \mathbb{R};\, \psi \text{ é função simples, tal que } f \leq \psi\}\,. \qquad (4.126)
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $a\,0$, teremos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &\doteq \{\Psi : E \to \mathbb{R};\, \Psi \text{ é função simples, tal que } a\, f \leq \Psi\} \\
&\overset{\Psi = a\,\psi}{=} \{a\,\psi : E \to \mathbb{R};\, \psi \text{ é função simples, tal que } a\, f \leq a\,\psi\} \qquad (4.127)\\
&\overset{a\leq 0}{=} \{\varphi : E \to \mathbb{R};\, \varphi \text{ é função simples, tal que } f \geq \varphi\}\,. \qquad (4.128)
\end{aligned}$$

Podemos ter as seguintes duas possibilidades:

i. Se

$$a > 0\,,$$

teremos:

$$\begin{aligned}
\int_E (a\, f) &\overset{\text{Definição 4.2.2}}{=} \inf_{(a\, f) \leq \Psi} \left(\int_E \Psi \right) \\
&\overset{(4.125)}{=} \inf_{a\, f \leq a\psi} \left(\int_E (a\,\psi) \right) \\
&\overset{(4.126)}{=} \inf_{f \leq \psi} \left(\int_E (a\,\psi) \right) \\
&\overset{\text{item 1. da Proposição 4.2.1}}{=} \inf_{f \leq \psi} \left\{ a \int_E \psi \right\} \\
&\overset{a>0}{=} a \inf_{f \leq \psi} \left(\int_E \psi \right) \\
&\overset{\text{Definição 4.2.2}}{=} a \int_E f\,.
\end{aligned}$$

ii. Se

$$a < 0\,,$$

teremos

$$\begin{aligned}
\int_E (a\, f) &\overset{\text{Definição } 4.2.2}{=} \inf_{(a\, f)\leq \Psi} \left(\int_E \Psi \right) \\
&\overset{(4.127)}{=} \inf_{a\, f \leq a \psi} \left(\int_E (a\, \psi) \right) \\
&\overset{(4.128)}{=} \inf_{f \geq \varphi} \left(\int_E (a\, \varphi) \right) \\
&\overset{\text{item } 1. \text{ da Proposição } 4.2.1}{=} \inf_{f \geq \varphi} \left\{ a \int_E \varphi \right\} \\
&\overset{a\leq 0}{=} a \sup_{f \geq \varphi} \left(\int_E \varphi \right) \\
&\overset{\text{Definição } 4.2.2}{=} a \int_E f\,.
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração do item 1. .

Demonstração do item 2.:

Observemos que se $\psi_1, \psi_2 : E \to \mathbb{R}$ são funções simples, tais que

$$f(x) \leq \psi_1(x) \quad \text{e} \quad g(x) \leq \psi_2(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E \tag{4.129}$$

então a função $\psi_1 + \psi_2 : E \to \mathbb{R}$ será uma função simples e, além disso,

$$(f+g)(x) \leq (\psi_1 + \psi_2)(x), \quad x \in E. \tag{4.130}$$

Consideremos os conjuntos:

$$\mathcal{A} \doteq \{\varphi_1 : E \to \mathbb{R};\, \varphi_1 \text{ é função simples, tal que } \varphi_1 \leq f\}, \tag{4.131}$$
$$\mathcal{B} \doteq \{\psi_1 : E \to \mathbb{R};\, \psi_1 \text{ é função simples, tal que } f \leq \psi_1\}, \tag{4.132}$$
$$\mathcal{C} \doteq \{\varphi_2 : E \to \mathbb{R};\, \varphi_2 \text{ é função simples, tal que } \varphi_2 \leq g\}, \tag{4.133}$$
$$\mathcal{D} \doteq \{\psi_2 : E \to \mathbb{R};\, \psi_2 \text{ é função simples, tal que } g \leq \psi_2\}, \tag{4.134}$$
$$\mathcal{E} \doteq \{\Phi : E \to \mathbb{R};\, \Phi \text{ é função simples, tal que } \Phi \leq (f+g)\}, \tag{4.135}$$

e

$$\mathcal{F} \doteq \{\Psi : E \to \mathbb{R};\, \Psi \text{ é função simples, tal que } (f+g) \leq \Psi\}. \tag{4.136}$$

Observemos que

$$\text{se} \quad \varphi_1 \in \mathcal{A} \quad \text{e} \quad \varphi_2 \in \mathcal{C}\,, \quad \text{então} \quad (\varphi_1 + \varphi_2) \in \mathcal{E}\,,$$

ou seja,

$$\mathcal{A} + \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}\,. \tag{4.137}$$

De modo análogo,

$$\text{se} \quad \psi_1 \in \mathcal{B} \quad \text{e} \quad \psi_2 \in \mathcal{D}\,, \quad \text{então} \quad (\psi_1 + \psi_2) \in \mathcal{F}\,,$$

ou seja,

$$\mathcal{B} + \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}\,. \tag{4.138}$$

Para cada $\psi_1 \in \mathcal{B}$ e $\psi_2 \in \mathcal{D}$, teremos

$$\begin{aligned}
\int_E (f+g) &\overset{\text{Definição 4.2.2 e (4.134)}}{=} \inf_{\Psi \in \mathcal{F}} \left(\int_E \Psi \right) \\
&\overset{(4.138)}{\leq} \int_E (\psi_1 + \psi_2) \\
&\overset{\text{itens 4. e 2. da Proposição 4.2.1}}{=} \int_E \psi_1 + \int_E \psi_2\,.
\end{aligned} \tag{4.139}$$

Como o lado esquerdo da desigualdade (4.139) **<u>não</u>** depende das funções $\psi_1 \in \mathcal{B}$ e $\psi_2 \in \mathcal{D}$, tomando-se, em cada uma das parcelas do lado direito, o ínfimo sobre os conjuntos $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente, obteremos:

$$\begin{aligned}
\int_E (f+g) &\leq \inf_{\psi_1 \in \mathcal{B}} \left(\int_E \psi_1 \right) + \inf_{\psi_2 \in \mathcal{D}} \left(\int_E \psi_2 \right) \\
&\overset{\text{Definição 4.2.2, (4.132) e (4.132)}}{=} \int_E f + \int_E g\,.
\end{aligned} \tag{4.140}$$

Por outro lado, para cada $\phi_1 \in \mathcal{A}$ e $\phi_2 \in \mathcal{C}$, teremos:

$$\begin{aligned}
\int_E (f+g) &\geq \sup_{\Phi \in \mathcal{E}} \left(\int_E \Phi \right) \\
&\overset{(4.137)}{\geq} \int_E (\phi_1 + \phi_2) \\
&\overset{\text{itens 4. e 2. da Proposição 4.2.1}}{=} \int_E \phi_1 + \int_E \phi_2\,.
\end{aligned} \tag{4.141}$$

Como o lado esquerdo da desigualdade (4.141) **<u>não</u>** depende das funções $\phi_1 \in \mathcal{A}$ e $\phi_2 \in \mathcal{C}$, tomando-se, em cada parcela do lado direito, o supremo sobre os conjunto $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente, obteremos:

$$\begin{aligned}
\int_E (f+g) &\geq \sup_{\phi_1 \in \mathcal{A}} \left(\int_E \phi_1 \right) + \sup_{\phi_2 \in \mathcal{C}} \left(\int_E \phi_2 \right) \\
&\overset{\text{Definição 4.2.2, (4.131) e (4.133)}}{=} \int_E f + \int_E g\,.
\end{aligned} \tag{4.142}$$

Logo, de (4.140) e (4.142) segue que

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g,$$

completando a demonstração do item 2. .

<u>Demonstração do item 3.:</u>

Observemos que

$$\int_E f = \int_E g\,,$$

se, e somente se,
$$\int_E f - \int_E g = 0\,. \tag{4.143}$$

Notemos que, dos itens 1. e 2. acima, temos que

$$\begin{aligned}\int_E f - \int_E g &= \int_E f + (-1)\int_E g \\ &\overset{(4.115)}{=} \int_E f + \int_E [(-1)\,g] \\ &\overset{(4.116)}{=} \int_E [f + (-1)\,g] \\ &=. \int_E f - g\,. \end{aligned} \tag{4.144}$$

Logo, para concluirmos a demonstração do item 3., (tomando-se $h \doteq f - g$, em E). basta mostrarmos que:

$$\text{se}\quad h = 0\,,\quad \text{q.t.p. em}\quad E\,,\quad \text{então teremos}\quad \int_E h = 0\,. \tag{4.145}$$

Notemos que, se

$$h = 0\,,\quad \text{q.t.p. em}\quad E\,,$$

e a função $\psi : E \to \mathbb{R}$ é uma função simples tal que

$$h \leq \psi\,,$$

deveremos ter

$$\psi \geq 0\,,\quad \text{q.t.p. em}\quad E\,. \tag{4.146}$$

Logo, dos itens 3. e 4. da Proposição 4.2.1, segue que

$$\begin{aligned}\int_E \psi &\overset{(4.46)}{\geq} \int 0 \\ &\overset{(4.43)\ \text{com}\ a=0}{=} 0\,. \end{aligned} \tag{4.147}$$

Logo, tomando-se o ínfimo sobre o conjunto

$$\mathcal{G} \doteq \{\psi : E \to \mathbb{R}\,;\ \psi \text{ é função simples, tal que } h \leq \psi\}\,, \tag{4.148}$$

obteremos

$$\begin{aligned}\int_E h &\overset{\text{Definição 4.2.2, (4.148)}}{=} \inf_{h \leq \psi}\left(\int_E \psi\right) \\ &\overset{(4.147)}{\geq} 0\,. \end{aligned} \tag{4.149}$$

De modo análogo, se $\varphi : E \to \mathbb{R}$ é uma função simples, é tal que

$$\varphi \leq h \quad \text{em} \quad E\,,$$

deveremos ter

$$\varphi \leq 0\,, \quad \text{q.t.p. em} \quad E\,. \tag{4.150}$$

Logo, dos itens 3. e 4. da Proposição 4.2.1, segue que

$$\int_E \varphi \overset{(4.46)}{\leq} \int 0 \overset{(4.43) \text{ com } a=0}{=} 0\,. \tag{4.151}$$

Logo, tomando-se o supremo sobre o conjunto

$$\mathcal{H} \doteq \{\varphi : E \to \mathbb{R};\ \varphi \text{ é função simples, tal que } h \geq \varphi\}\,, \tag{4.152}$$

obteremos

$$\int_E h \overset{\text{Definição 4.2.2, (4.152)}}{=} \sup_{h \geq \varphi} \left(\int_E \varphi \right) \overset{(4.151)}{\leq} 0\,. \tag{4.153}$$

Logo de (4.149) e (6.153), segue que

$$\int_E h = 0\,,$$

completando a demonstração de 3. .

Demostração do item 4.:

Fazenod uma adaptação apropriada da demonstração do item 3. acima podemos demonstrar a desigualdade (4.120) do item 4. .

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

Para mostrar a desigualdade (4.121), observamos que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,. \tag{4.154}$$

Logo, de (4.120) do item 4., segue que

$$\underbrace{\int_E (-|f|)}_{\overset{\text{do item 1.}}{=} -\int_E |f|} \leq \int_E f \leq \int_E |f|\,,$$

$$\text{ou seja,} \qquad -\int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|\,,$$

$$\text{mostrando que} \qquad \left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|\,,$$

completando a demonstração do item 4. .

Demostração do item 5.:

Observemos que, de (4.122), segue que

$$m \cdot \mathcal{X}_E(x) \leq f(x) \leq M \cdot \mathcal{X}_E(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,. \tag{4.155}$$

Logo do item 4. acima (ou ainda, de (4.120)), segue que

$$\int_E (m \cdot \mathcal{X}_E) \leq \int_E f \leq \int_E (M \cdot \mathcal{X}_E)\,. \tag{4.156}$$

Logo, do item 2. da Observação 4.2.3, teremos

$$\int_E (m \cdot \mathcal{X}_E) \overset{(4.33)}{=} m \cdot m(E) \quad \text{e} \quad \int_E (m \cdot \mathcal{X}_E) \overset{(4.33)}{=} M \cdot m(E)\,. \tag{4.157}$$

Logo, de (4.156) e (4.157), segue que

$$m \cdot m(E) \leq \int_E f \leq M \cdot m(E),$$

completando a demonstração do item 5. .

Demosntração do item 6.:

Como

$$A\,, B \subseteq E$$

são conjuntos disjuntos teremos

$$\mathcal{X}_{A \cup B} = \mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B\,. \tag{4.158}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Além disso como os conjunto A e B são Lebesgue mensuráveis, do item 2., segue que,

$$\begin{aligned}
\int_{A \cup B} f &\overset{(4.107)}{=} \int_E f \cdot (\mathcal{X}_{A \cup B}) \\
&\overset{(4.158)}{=} \int_E f \cdot (\mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B) \\
&\overset{(4.116)}{=} \int_E f \cdot \mathcal{X}_A + \int_E f \cdot \mathcal{X}_B \\
&\overset{(4.107)}{=} \int_A f + \int_B f\,,
\end{aligned}$$

completando a demonstração do item 6. e do resultado.

□

Como consequência do item 5. da Proposição 4.2.4 acima, temos o:

Corolário 4.2.1 *Seja $f : E \to \mathbb{R}$ uma função limitada e Lebesgue mensurável em E, tal que*

$$m(E) = 0\,. \tag{4.159}$$

Então teremos

$$\int_E f = 0\,. \tag{4.160}$$

Demonstração:

Basta tomar

$$m(E) = 0$$

na desigualdade (4.123), que obteremos a identidade (4.160) acima.

□

Podemos agora demonstrar o:

Teorema 4.2.1 *(**Teorema da Convergência Limitada**) Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções reais Lebesgue mensuráveis, definidas em $E \in \mathscr{M}$, com*

$$m(E) < \infty$$

e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função.

Suponhamos que existe $M \in \mathbb{R}$, de modo que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenhamos

$$|f_n(x)| \leq M\,, \quad \textit{para} \quad x \in E \tag{4.161}$$

e

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \textit{em} \quad E\,. \tag{4.162}$$

Então

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right) = \int_E f\,,$$

$$\textit{isto é,} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right) = \int_E \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)\,. \tag{4.163}$$

Demonstração:

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n é Lebesgue mensurável em E e

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \text{em} \quad E\,,$$

do Corolário 3.5.2, segue que a função f é Lebesgue mensurável em E.

Dado,

$$\varepsilon > 0 \quad \text{e} \quad \delta \doteq \frac{\varepsilon}{4\,M} > 0\,, \tag{4.164}$$

da Proposição 3.6.1 (ou seja, do 3.o Princípio de Littlewood), podemos encontrar

$$A \in \mathscr{M}\,, \quad \text{como} \quad A \subseteq E\,,$$

tal que

$$m(A) < \delta \overset{(4.164)}{=} \frac{\varepsilon}{4\,M} \tag{4.165}$$

e $N \in \mathbb{N}$, de modo que,

$$\text{se} \quad n \geq N\,, \quad \text{teremos:} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\,m(E)}\,, \quad \text{para} \quad x \in E \setminus A\,. \tag{4.166}$$

Notemos que, fazendo $n \to \infty$ em (4.161), obteremos

$$|f(x)| \leq M\,, \quad \text{para} \quad x \in E\,, \tag{4.167}$$

ou seja, a função f é Lebesgue mensurável e limitada em E.

Portanto, da Proposição 4.2.2, temos que existe a integral de Lebesgue da função f em E.

Além disso, se $n \geq N$, teremos:

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f - \int_E f_n\right| &\overset{\text{itens 1. e 2. da Proposição 4.2.4}}{=} \left|\int_E (f - f_n)\right| \\
&\overset{\text{item 4. da Proposição 4.2.4}}{\leq} \int_E |f - f_n| \\
&\overset{E = (E\setminus A) \cup A \text{ e o item 6. da Proposição 4.2.4}}{\leq} \int_{E\setminus A} \underbrace{|f - f_n|}_{\overset{(4.166)}{<} \frac{\varepsilon}{2\,m(E)}} + \int_A \underbrace{|f - f_n|}_{\leq |f| + |f_n|} \\
&\overset{\text{item 4. da Proposição 4.2.4}}{<} \int_{E\setminus A} \frac{\varepsilon}{2\,m(E)} + \left[\int_A \underbrace{|f|}_{\overset{(4.167)}{\leq} M} + \int_A \underbrace{|f_n|}_{\overset{(4.161)}{\leq} M}\right] \\
&\overset{\text{item 4. da Proposição 4.2.4}}{\leq} \int_{E\setminus A} \frac{\varepsilon}{2\,m(E)} + \int_A 2\,M \\
&\overset{\text{item 1. da Proposição 4.2.4}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2\,m(E)} \int_{E\setminus A} + 2\,M \int_A \\
&\overset{\text{item 2. da Observação 4.2.3}}{=} \frac{\varepsilon}{2\,m(E)} \underbrace{m(E\setminus A)}_{\overset{(E\setminus A)\subseteq E \text{ e o item 1. do Lema 3.3.6}}{\leq} m(E)} + 2\,M\, \underbrace{m(A)}_{\overset{(4.165)}{<} \frac{\varepsilon}{4\,M}} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

mostrando que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f\,,$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 4.2.7

1. *A demonstração do Teorema 4.2.1 acima, nos dá a importânica do terceiro princípio de Littlewood.*

2. *Podemos substituir as hipóteses (4.161) e (4.162), ou seja,*

$$|f(x)| \leq M\,, \quad \textit{para} \quad x \in E \quad \textit{e} \quad f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \textit{em} \quad E$$

por

$$|f(x)| \leq M\,, \quad \textit{q.t.p. em} \quad E \tag{4.168}$$

$$\textit{e} \quad f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \textit{q.t.p. em} \quad E\,, \tag{4.169}$$

que a conclusão do resultado continuará válida.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

3. *Se nas hopótses do Teorema 4.2.1 tivéssemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n Riemann integrável em $[a\,,b]$ e*

$$f_n \xrightarrow{u} f\,, \quad \textit{em} \quad [a\,,b]\,,$$

a conclusão do respectivo resultado é um rsultado da disciplina Análise I.

4.3 A Integral de Lebesgue de uma Função Não Negativa

Começaremos com a:

Definição 4.3.1 *Sejam $E \in \mathscr{M}$ (não necessariamente com medida finita), $f : E \to \mathbb{R}^*$ uma função Lebesgue mensurável e não negativa em E, isto é,*

$$f(x) \geq 0\,, \quad \textit{para} \quad x \in E$$

(não necessariamente limitada).

Denotaremos pelo símbolo $\displaystyle\int_E f$ ao

$$\int_E f \doteq \sup_{h \in \mathcal{A}} \left(\int_E h \right) \in [0\,,\infty]\,, \tag{4.170}$$

onde

$$\mathcal{A} \doteq \{h : E \to \mathbb{R}\,;\, h \leq f\,, h \textit{ limitada, Lebesgue mensurável em } E \\ \textit{com } m\left(\{x \in E\,;\, h(x) \neq 0\}\right) < \infty\}\,. \tag{4.171}$$

Observação 4.3.1

1. *Observemos que como*

$$m(\{x \in E\,;\, h(x) \neq 0\}) < \infty$$

e a função $\underline{h}$ *é Lebesgue mensurável e limitada no conjunto* E*, segue que a integral de Lebesgue*

$$\int_E h$$

existirá, isto é, pertencerá a

$$[0, \infty)\,.$$

Portanto $\int_E f$*, dado por (4.170), está dem definido, isto é, pertence a* $[0\,,\infty]$.

2. *Se* $E\,,F \in \mathscr{M}$ *são conjuntos tais que*

$$F \subseteq E\,,$$

e a função $f : E \to \mathbb{R}^*$ *é uma função Lebesgue mensurável e não negativa em* E*, então o símbolo* $\int_F f$ *denotará:*

$$\int_F f \doteq \int_E f \cdot \mathcal{X}_F\,. \tag{4.172}$$

Com isto temos a:

Proposição 4.3.1 *Suponhamos que* $a > 0$*,* $E \in \mathscr{M}$*,* $f\,,g : E \to \mathbb{R}^*$ *funções Lebesgue mensuráveis e não negativas em* E.

1. *vale a seguinte identidade:*

$$\int_E (a\,f) = a \int_E f\,; \tag{4.173}$$

2. *vale a seguinte identidade:*

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g\,; \tag{4.174}$$

3. *se*

$$m(E) = 0\,, \quad \textit{teremos} \quad \int_E f = 0\,. \tag{4.175}$$

4. *se* $A, B \in \mathscr{M}$ *são conjuntos tais que*

$$E = A \cup B \quad e \quad A \cap B = \emptyset\,, \tag{4.176}$$

então teremos:

$$\int_E f = \int_A f + \int_B f\,; \tag{4.177}$$

5. *se*

$$f = g\,, \ q.t.p \text{ em } E, \text{ então teremos: } \int_E f = \int_E g\,. \tag{4.178}$$

Em particular, se

$$f = 0\,, \ q.t.p. \text{ em } E, \text{ teremos: } \int_E f = 0\,. \tag{4.179}$$

6. *se*

$$f \leq g\,, \ q.t.p \text{ em } E, \text{ teremos: } \int_E f \leq \int_E g\,. \tag{4.180}$$

Demonstração:

Do item 1.:

Consideremos os seguinte conjuntos:

$$\mathcal{A} \doteq \{h : E \to \mathbb{R}\,;\ h \leq f\,, \text{ para } h : E \to \mathbb{R} \text{ função limitada, Lebesgue mensurável em } E\,,$$
$$\text{com } m\,(\{x \in E\,; h(x) \neq 0\}) < \infty\} \tag{4.181}$$
$$\mathcal{B} \doteq \{j : E \to \mathbb{R}\,;\ j \leq a\,f\,, \text{ para } j : E \to \mathbb{R} \text{ função limitada, Lebesgue mensurável em } E\,,$$
$$\text{com } m\,(\{x \in E\,; j(x) \neq 0\}) < \infty\}\,. \tag{4.182}$$

Como $a > 0$, segue que

$$\mathcal{B} = a\,\mathcal{A}\,. \tag{4.183}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, da Definição 4.3.1, temos:

$$\begin{aligned}
\int_E (a\,f) &\overset{(4.170)}{=} \sup_{j \in \mathcal{B}} \int_E j \\
&\overset{(4.182)}{=} \sup_{h \in \mathcal{A}} \int_E (a\,h) \\
&\overset{\text{item 1. da Proposição 4.2.4}}{=} \sup_{h \in \mathcal{A}} \left(a \int_E h \right) \\
&\overset{a>0}{=} a \sup_{h \in \mathcal{A}} \int_E h \\
&\overset{(4.170)}{=} a \int_E f\,,
\end{aligned}$$

completando a demonstração do item 1. .

Do item 2.:

Consideremos seguintes conjuntos:

$$\mathcal{A} \doteq \{h : E \to \mathbb{R}\,;\ h \leq f\,,\quad \text{para } h : E \to \mathbb{R} \text{ função limitada, Lebesgue mensurável em } E\,,\ \text{com } m(\{x \in E; h(x) \neq 0\}) < \infty\}, \tag{4.184}$$

$$\mathcal{B} \doteq \{j : E \to \mathbb{R}\ ;\ j \leq g\,,\ \text{para } j : E \to \mathbb{R} \text{ função limitada, Lebesgue mensurável em } E\,,\ \text{com } m(\{x \in E; j(x) \neq 0\}) < \infty\} \tag{4.185}$$

$$\mathcal{C} \doteq \{i : E \to \mathbb{R}\,;\ i \leq (f+g)\,,\quad \text{para } i : E \to \mathbb{R} \text{ função limitada, Lebesgue mensurável em } E\,,\ \text{com } m(\{x \in E; i(x) \neq 0\}) < \infty\}. \tag{4.186}$$

Então

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}. \tag{4.187}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Além disso, para $h \in \mathcal{A}$ e $j \in \mathcal{B}$, teremos:

$$\begin{aligned}
\int_E h + \int_E j &\overset{\text{item 2. da Proposição 4.2.4}}{=} \int_E (h+j) \\
&\leq \sup_{h \in \mathcal{A} \text{ e } j \in \mathcal{B}} \left[\int_E (h+j)\right] \\
&\overset{h+j \overset{(4.187)}{\in} \mathcal{C}}{\leq} \sup_{i \in \mathcal{C}} \left(\int_E i\right) \\
&\overset{(4.170)}{=} \int_E (f+g)\,.
\end{aligned} \tag{4.188}$$

Como o lado direito de (4.188) não depende de $h \in \mathcal{A}$ e de $j \in \mathcal{B}$, tomando-se o supremo em cada uma das parcelas do lado esquerdo, com $h \in \mathcal{A}$ e $j \in \mathcal{B}$, respectivamente, obteremos:

$$\int_E f + \int_E g \leq \int_E (f+g)\,. \tag{4.189}$$

Por outro lado, para $i \in \mathcal{C}$, consideremos as funções $h\,, j : E \to \mathbb{R}$, dadas por:

$$h(x) \doteq \min\{f(x)\,, i(x)\} \tag{4.190}$$

e

$$j(x) \doteq i(x) - h(x)\,,\quad \text{para cada}\quad x \in E\,. \tag{4.191}$$

Para cada $x \in E$, teremos:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq h(x) \\
&\overset{(4.190)}{\leq} i(x)\,, \qquad (4.192)\\
h(x) &\overset{(4.190)}{\leq} f(x)\,, \qquad (4.193)\\
0 &\leq j(x) \\
&\overset{(4.191)}{=} i(x) - h(x) \\
&\overset{h(x)\geq 0}{\leq} i(x)\,, \qquad (4.194)\\
j(x) &\overset{(4.186)}{\leq} [f(x) + g(x)] - h(x) \\
&\overset{h(x) \overset{(4.190)}{\leq} f(x)}{\leq} g(x)\,. \qquad (4.195)
\end{aligned}
$$

Além disso, as funções h e j são limitadas em E (pois as funções f e i são limitadas em E), são Lebesgue mensuráveis (pois as funções f e i são Lebesgue mensuráveis, logo podemos aplicar a Proposição 3.5.4) e, devido a (4.192) e (4.194), se anulam onde a função i se anula, ou seja, como $i \in \mathcal{C}$, segue que se anulam fora de um conjunto de medida finita, assim, de (4.184) e (4.185), segue que

$$
h \in \mathcal{A} \quad \text{e} \quad j \in \mathcal{B}\,. \qquad (4.196)
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\int_E i &\overset{i \overset{(4.191)}{=} h+j}{=} \int_E (h+j) \\
&\overset{\text{item 2. da Proposição 4.2.4}}{=} \int_E h + \int_E j \\
&\leq \sup_{h\in\mathcal{A}} \left(\int_E h\right) + \sup_{j\in\mathcal{B}} \left(\int_E j\right) \\
&\overset{(4.170)}{=} \int_E f + \int_E g\,. \qquad (4.197)
\end{aligned}
$$

Como o lado direito de (4.197) não depende de $i \in \mathcal{C}$, tomando-se o supremo do lado esquerdo, sobre todos os $i \in \mathcal{C}$, obteremos

$$
\int_E (f+g) \leq \int_E f + \int_E g\,. \qquad (4.198)
$$

Logo, de (4.189) e (4.198), segue que

$$
\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g\,,
$$

completando a demonstração do item 2. .

Do item 3.:

Como

$$m(E) = 0,$$

segue

$$\int_E f \overset{(4.170)}{=} \sup_{h \in \mathcal{A}} \int_E h \overset{\text{Corolário } 4.2.1}{=} = 0,$$

completando a demonstração do item 3. .

Do item 4.:

Consideremos os seguites conjuntos:

$$\mathcal{A} \doteq \{i : A \to \mathbb{R} ; i \leq f, \text{ para } i : E \to \mathbb{R} \text{ função limitada, Lebesgue mensurável em } E, \\ \text{com } m(\{x \in A ; i(x) \neq 0\}) < \infty\}, \tag{4.199}$$

$$\mathcal{B} \doteq \{j : B \to \mathbb{R} ; j \leq f, \text{ para } j : E \to \mathbb{R} \text{ função limitada, Lebesgue mensurável em } E, \\ \text{com } m(\{x \in B ; j(x) \neq 0\}) < \infty\}, \tag{4.200}$$

$$\mathcal{C} \doteq \{h : E \to \mathbb{R} ; h \leq f, \text{ para } h : E \to \mathbb{R} \text{ função limitada, Lebesgue mensurável em } E, \\ \text{com } m(\{x \in E ; h(x) \neq 0\}) < \infty\}. \tag{4.201}$$

Para cada $i \in \mathcal{A}$ e $j \in \mathcal{B}$ como, por hipótese, temos que

$$E = A \cup B \quad \text{e} \quad A \cap B = \emptyset, \tag{4.202}$$

segue que a função $h : E \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) \doteq \begin{cases} i(x), & \text{para} \quad x \in A, \\ j(x), & \text{para} \quad x \in B \end{cases}, \tag{4.203}$$

está bem definida e $h \in \mathcal{C}$.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Portanto

$$\int_A i + \int_B j \overset{(4.203)}{=} \int_A h + \int_B h \overset{\text{item 6. da Proposição 4.2.4}}{=} \int_{A \cup B} h \overset{(4.202)}{=} \int_E h, \tag{4.204}$$

Loog, tomando-se o supremo, da lado direito de (4.204), sobre todas as $h \in \mathcal{C}$, obteremos

$$\begin{aligned} \int_A i + \int_B j &\leq \sup_{h \in \mathcal{C}} \int_E h \\ &\overset{(4.170)}{=} \int_E f \,. \end{aligned} \tag{4.205}$$

Como o lado direito da desigualdade (4.205) acima não depende de $i \in \mathcal{A}$ e $j \in \mathcal{B}$, tomando o supremo em cada uma das parcelas do lado esquerdo, sobre todas as $i \in \mathcal{A}$ e $j \in \mathcal{B}$, respectivamente, obteremos

$$\sup_{i \in \mathcal{A}} \left(\int_A i \right) + \sup_{j \in \mathcal{B}} \left(\int_B j \right) \leq \int_E f \,,$$

que, de (4.170), implicará em:

$$\int_A f + \int_B f \leq \int_E f \,. \tag{4.206}$$

Por outro lado, para $h \in \mathcal{C}$, consideremos as funções $i\,, j : E \to \mathbb{R}$, dadas por:

$$i \doteq h_{|_A} \quad \text{e} \quad j \doteq h_{|_B} \,. \tag{4.207}$$

Como $A\,, B \in \mathscr{M}$ e a $h \in \mathcal{C}$, de (4.207) e do Corolário 3.5.2 segue que

$$i \in \mathcal{A} \quad \text{e} \quad j \in \mathcal{B} \,.$$

Com isto teremos:

$$\begin{aligned} \int_E h &= \int_{A \cup B} h \\ &\overset{\text{item 6. da Proposição 4.2.4}}{=} \int_A h + \int_B h \\ &\overset{(4.207)}{=} \int_A i + \int_B j \,. \end{aligned} \tag{4.208}$$

Logo tomando-se o supremo, do lado direito de (4.208), sobre todas as $i \in \mathcal{A}$ e $j \in \mathcal{B}$, obteremos:

$$\begin{aligned} \int_E h &\leq \sup_{i \in \mathcal{A}} \left(\int_A i \right) + \sup_{j \in \mathcal{B}} \left(\int_B j \right) \\ &\overset{(4.170)}{=} \int_A f + \int_B f. \end{aligned} \tag{4.209}$$

Como o lado direito da desigualdade (4.209) acima não depende de $h \in \mathcal{C}$, tomando o supremodo lado esquerdo, sobre todas $h \in \mathcal{C}$, obteremos

$$\begin{aligned}\int_E f &\overset{(4.170)}{=} \sup_{h \in \mathcal{C}} \left(\int_E h \right) \\ &\overset{(4.209)}{\leq} \int_A f + \int_B f,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_E f \leq \int_A f + \int_B f. \tag{4.210}$$

Portanto, de (4.206) e (4.210), segue que

$$\int_E f = \int_A f + \int_B f,$$

completando a demonstração do item 4. .

<u>Do item 5.:</u>

Consideremos o conjunto

$$F \doteq \{x \in E\,;\, f(x) \neq g(x)\}. \tag{4.211}$$

Como

$$f = g\,, \quad \text{q.t.p. em } E\,,$$

segue que

$$F \in \mathscr{M} \quad \text{e} \quad m(F) = 0. \tag{4.212}$$

Logo, das propriedades 3. e 4. acima, segue que:

$$\begin{aligned}\int_E f - \int_E g &\overset{\text{do item 4.}}{=} \left[\int_{E \setminus F} f + \int_F f \right] - \left[\int_{E \setminus F} g + \int_F g \right] \\ &\overset{\text{do item 3., pois } m(F)=0]}{=} \int_{E \setminus F} f - \int_{E \setminus F} g \\ &\overset{\text{do item 2., pois: } f(x)-g(x)=0 \text{ em } E \setminus F]}{=} \int_{E \setminus F} (f - g). \end{aligned} \tag{4.213}$$

Logo, de (4.213), mostrar a propriedade 5. é equivalente a mostrar que se

$$u = 0\,, \quad \text{q.t.p. em } E\,, \tag{4.214}$$

onde o conjunto E é Lebesgue mensurável, então teremos

$$\int_E u = 0. \tag{4.215}$$

Para mostrar (4.124), consideremos o conjunto

$$G \doteq \{x \in E\,;\, u(x) \neq 0\}. \tag{4.216}$$

Notemos que, como a função u é Lebesgue mensurável segue, de (4.214), que

$$G \in \mathscr{M} \quad \text{e} \quad m(G) = 0\,. \tag{4.217}$$

Consideremos o conjunto:

$$\mathcal{A} \doteq \{h : E \to \mathbb{R}\,;\, h \leq u\,,\ \text{para } h : E \to \mathbb{R} \text{ função limitada, Lebesgue mensurável em } E \text{ e } m\left(\{x \in E\,;\, h(x) \neq 0\}\right) < \infty\}\,. \tag{4.218}$$

Notemos que, para $h \in \mathcal{A}$ como, de (4.216), temos

$$u = 0\,, \quad \text{em } E \setminus G\,.$$

Logo teremos

$$h = 0\,, \quad \text{em } E \setminus G\,,$$
$$\text{ou seja,} \quad h = 0\,, \quad \text{q.t.p em } E\,.$$

Logo, do item 4. da Proposição 4.2.4, segue que

$$\int_E h = 0\,. \tag{4.219}$$

Portanto

$$\int_E u \overset{(4.170)}{=} \sup_{h \in \mathcal{A}} \left(\int_E h \right) \overset{(4.219)}{=} 0\,,$$

completando a demonstração do item 5. .

Do item 6.:

Consideremos o conjunto

$$F \doteq \{x \in E\,;\, f(x) > g(x)\}\,. \tag{4.220}$$

Notemos que, como as funções f e g são Lebesgue mensurável, de (4.180), segue que

$$F \in \mathscr{M} \quad \text{e} \quad m(F) = 0\,. \tag{4.221}$$

Notemos também que

$$\int_E g - \int_E f \overset{\text{do item 4.}}{=} \left[\int_F g + \int_{F \setminus E} g \right] - \left[\int_F f + \int_{F \setminus E} f \right]\,. \tag{4.222}$$

Como

$$m(F) = 0\,,$$

do item 3., segue que

$$\int_F g = \int_F f = 0\,. \tag{4.223}$$

Logo das identidades (4.222) e (4.223), teremos:

$$\int_E g - \int_E f = \int_{F\setminus E} g - \int_{F\setminus E} f. \tag{4.224}$$

De (4.220), temos que

$$f \leq g\,, \quad \text{em } E \setminus F\,.$$

Logo, de (4.220) e da identidade (4.224) acima, segue que bastará mostrarmos a propridade 6. para o caso e

$$f \leq g\,, \quad \text{em } E\,. \tag{4.225}$$

Para mostrarmos este caso, consideremos os conjuntos:

$$\mathcal{A} \doteq \{h : A \to \mathbb{R}\,;\, h \leq f\,,\ \text{para } h : E \to \mathbb{R} \text{ função limitada, Lebesgue mensurável em } E$$
$$\text{e } m\,(\{x \in E\,;\, h(x) \neq 0\}\,) < \infty\}\,, \tag{4.226}$$
$$\mathcal{B} \doteq \{i : B \to \mathbb{R}\,;\, i \leq g\,,\ \text{para } i : E \to \mathbb{R} \text{ função limitada, Lebesgue mensurável em } E$$
$$\text{e } m\,(\{x \in E\,;\, i(x) \neq 0\}\,) < \infty\} \tag{4.227}$$

Notemos que, como

$$f(x) \leq g(x)\,, \quad \text{para} \quad x \in E\,,$$

se $h \in \mathcal{A}$, segue que $h \in \mathcal{B}$, isto é,

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\,. \tag{4.228}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_E f &\overset{(4.170)}{=} \sup_{h\in\mathcal{A}} \left(\int_E h\right) \\ &\overset{(4.228)}{\leq} \sup_{j\in\mathcal{B}} \left(\int_E j\right) \\ &\overset{(4.170)}{=} \int_E g\,, \end{aligned}$$

completando a demonstração do item 6. e do resultado.

□

Observação 4.3.2 *O exercício 3. página 86 de [HLR] nos fornece, em uma certa situação, a recíproca do item 5. da Proposição 4.3.1 acima.*

Mais especificamente: sejam $f, g : E \to \mathbb{R}^*$ funções Lebesgue mensuráveis, não negativas em E, tais que

$$f \leq g\,, \quad \textit{q.t.p. em } E\,. \tag{4.229}$$

Suponhamos que

$$\int_E f = \int_E g\,. \tag{4.230}$$

Então deveremos ter

$$f = g\,, \qquad q.t.p.\ em\ E\,. \tag{4.231}$$

Na verdade, bastará demonstrar que se a função $f : E \to \mathbb{R}$ *é não negativa em* $E \in \mathscr{M}$*, Lebesgue mensurável em* E *e tal que*

$$\int_E f = 0\,, \tag{4.232}$$

então deveremos ter

$$f = 0\,, \qquad q.t.p.\ em\ E\,. \tag{4.233}$$

Podemos agora enunciar e demonstrar o:

Teorema 4.3.1 *(***Lema de Fatou***) Sejam* $E \in \mathscr{M}$ *e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções, não negativas e Lebesgue mensuráveis definidas em* E*, tomando valores em* $\mathbb{R}^*$*, tal que*

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \qquad q.t.p\ em\ E\,, \tag{4.234}$$

onde $f : E \to \mathbb{R}^*$ *é uma função.*

Então a função f *é Lebesgue mensurável em* E *e vale a seguinte desigualdade:*

$$\int_E f \le \liminf_{n\to\infty} \left(\int_E f_n \right)\,, \tag{4.235}$$

$$\text{ou seja,} \qquad \int_E \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \le \liminf_{n\to\infty} \left(\int_E f_n \right)\,. \tag{4.236}$$

Demonstração:

Notemos que, do Corolário 3.5.3, segue que a função f é Lebesgue mensurável em E.

Consideremos o conjunto

$$F \doteq \{x \in E\,;\, f_n(x) \not\to f(x)\}\,. \tag{4.237}$$

Então, de (4.234), segue que

$$F \in \mathscr{M} \quad \text{e} \quad m(F) = 0\,. \tag{4.238}$$

Logo, dos itens 3. e 4. da Proposição 4.3.1 (como em (4.224)), segue que

$$\int_E f = \int_{E\setminus F} f \quad \text{e} \quad \int_E f_n = \int_{E\setminus F} f_n. \tag{4.239}$$

Logo para completar a demonstração do resultado, podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \qquad \text{em} \quad E\,.$$

Para ver isto, basta trocarmos o conjunto E pelo conjunto $E \setminus F$ no que faremos a seguir e utlizarmos a identidade (4.239).

Notemos que, por hipótese, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$f_n(x) \geq 0\,, \quad \text{para} \quad x \in E\,, \tag{4.240}$$

deste modo, teremos

$$f(x) \doteq \lim_{n \to \infty} f_n(x) \geq 0\,, \quad \text{para} \quad x \in E\,. \tag{4.241}$$

Consideremos o conjunto:

$$\mathcal{A} \doteq \{h : E \to \mathbb{R}\,;\, h \leq f\,, \text{ para } h : E \to \mathbb{R} \text{ função limitada, Lebesgue mensurável em } E \\ \text{e } m\left(\{x \in E\,;\, h(x) \neq 0\}\right) < \infty\}\,. \tag{4.242}$$

Para $h \in \mathcal{A}$, consideremos o conjunto

$$G \doteq \{x \in E\,;\, h(x) \neq 0\}\,. \tag{4.243}$$

Com isto temos:

$$G \in \mathscr{M} \quad \text{e} \quad m(G) < \infty\,.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos a função $h_n : E \to \mathbb{R}$, dada por:

$$h_n(x) \doteq \min\{h(x)\,, f_n(x)\}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,. \tag{4.244}$$

Como a função h é limitada e Lebesgue mensuráveis em E, segue que a função h_n será uma função limitada, pois

$$h_n \leq h\,, \quad \text{em } E$$

e, da Proposição 3.5.4, será Lebesgue mensurável em E.

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} & x \in E\,, \quad \text{satisfaz:} \quad 0 \neq h_n(x) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{(4.244)}{=} \min\{h(x)\,, f_n(x)\}\,, \\ \text{implicará que:} \quad & h(x) \neq 0\,, \\ \text{que, de (4.243), é o mesmo que:} \quad & x \in G\,, \end{aligned}$$

ou seja, a função h_n se anula, no completar de um conjunto que tem medida finita (no caso, este conjunto está contido no conjunto G, logo terá medida menor ou igual a medida do conjunto G).

Por outro lado, como

$$\begin{aligned} & h(x) \overset{(4.242)}{\leq} f(x)\,, \\ \text{e} \quad & f_n(x) \to f(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,, \\ \text{segue que:} \quad & h_n(x) \to h(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,. \end{aligned} \tag{4.245}$$

Notemos também que,

$$|h_n(x)| \overset{(4.243)}{\leq} |h(x)| \overset{h\in\mathcal{A}}{\leq} M\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,.$$

Logo, do Teorema da convergência limitada (isto é, do Teorema 4.2.1) aplicado a sequência de funções $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, segue que:

$$\begin{aligned}
\int_E h &= \int_E \left(\lim_{n\to\infty} h_n\right) \\
&\overset{(4.163)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_E h_n \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(\int_E h_n\right) \\
&\overset{h_n \overset{(4.244)}{\leq} f_n}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \left(\int_E f_n\right) .
\end{aligned} \tag{4.246}$$

Como o lado direito da desigualdade (4.246) acima não depende de $h \in \mathcal{A}$, tomando-se o supremo do lado esquerdo, sobre todas as $h \in \mathcal{A}$, obteremos

$$\begin{aligned}
\int_E f &\overset{(4.170)}{=} \sup_{h\in\mathcal{A}} \left(\int_E h\right) \\
&\overset{(4.246)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Como consequência deste temos o:

Teorema 4.3.2 *(***Teorema da Convergência Monótona***) Sejam $E \in \mathscr{M}$, $f : E \to \mathbb{R}^*$ uma função e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona crescente de funções, não negativas e Lebesgue mensuráveis em E tal que*

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \textit{em } E\,. \tag{4.247}$$

Então a função f é Lesbesgue mensurável em E e vale a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
&\int_E f = \lim_{n\to\infty} \left(\int_E f_n\right) , \\
\textit{ou seja,} \quad &\int_E \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_E f_n\right) .
\end{aligned} \tag{4.248}$$

Demonstração:

Notemos que, do Corolário 3.5.2, segue que a função f é Lebesgue mensurável em E.

Logo, do Lema de Fatou (isto é, do Teorema 4.3.1), segue que:

$$\int_E f \leq \liminf_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right). \tag{4.249}$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, como

$$f_n \leq f_{n+1} \quad \text{e} \quad f_n \xrightarrow{p} f, \quad \text{em } E,$$

segue que

$$f_n(x) \leq f(x), \quad \text{para cada} \quad x \in E. \tag{4.250}$$

Logo, do item 6. da Proposição 4.3.1, segue que

$$\int_E f_n \leq \int_E f,$$

$$\text{implicando em:} \qquad \limsup_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right) \leq \int_E f \overset{(4.249)}{\leq} \liminf_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right). \tag{4.251}$$

Portanto teremos

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right) = \liminf_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right),$$

que, do item 5. da Proposição 2.4.1, segue que existirá o limite $\lim_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right)$ e, de (4.251), teremos

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right)$$

completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o um resultado análogo ao Teorema 4.3.2 para série de funções, mais precisamente, temos:

Corolário 4.3.1 *Sejam $E \in \mathscr{M}$, $f : E \to \mathbb{R}^*$ uma função e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções, não negativas e Lebesgue mensuráveis em E, tal que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge pontualmente para a função f em E, isto é,*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in E. \tag{4.252}$$

Então a função f é Lebesgue mensurável em E e vale a seguinte identidade:

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_E f_n\right),$$

$$\textit{ou seja,} \qquad \int_E\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_E f_n\right). \tag{4.253}$$

Demonstração:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $S_n : E \to \mathbb{R}$, dada por:

$$S_n(x) \doteq \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,, \quad \text{parea cada} \quad x \in E\,. \tag{4.254}$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$f_n(x) \geq 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in E\,,$$

segue que a sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será uma sequência monótona crescente de funções, não negativas e Lebesgue mensuráveis em E, tal que

$$S_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \text{em } E\,. \tag{4.255}$$

Logo, do Teorema da convergência monótona (isto é, do Teorema 4.3.2) segue que

$$\begin{aligned}
\int_E f &\overset{(4.252)}{=} \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \\
&= \int_E \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k\right) \\
&\overset{(4.254)}{=} \int_E \left(\lim_{n\to\infty} S_n\right) \\
&\overset{(4.248)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\int_E S_n\right) \\
&\overset{(4.254)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_E \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f_k}_{\text{soma finita}}\right) \\
&\overset{\text{item 2. da Proposição 4.3.1}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_E f_k\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n\,,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Observação 4.3.3

1. *No Teorema da convergência monótona (isto é, o Teorema 4.3.2), podemos substituir a hípótese (4.247), ou seja,*

$$f_n \xrightarrow{p} f\,, \quad \textit{em } E$$

por

$$f_n \to f\,, \quad q.t.p. \;\; em \; E\,. \tag{4.256}$$

que as conclusões dos respectivos resultados continuarão válidas.

2. *No Corolário 4.3.1, podemos subsituir a hipótese (4.252), ou seja,*

$$S_n \xrightarrow{p} f\,, \quad em \; E$$

por

$$S_n \to f\,, \quad q.t.p. \;\; em \; E\,. \tag{4.257}$$

que as conclusões dos respectivos resultados continuarão válidas.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Temos também a:

Proposição 4.3.2 *Sejam $E \in \mathscr{M}$, $f : E \to \mathbb{R}^*$ uma função não negativa, Lebesgue mensurável em E e $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência disjunta de conjuntos Lebesgue mensuráveis em E, tal que*

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\,. \tag{4.258}$$

Então

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,,$$

$$ou\ seja, \quad \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,. \tag{4.259}$$

Demonstração:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : E \to \mathbb{R}$, dada por

$$f_n \doteq f \cdot \mathcal{X}_n\,. \tag{4.260}$$

Observemos que, de (4.260), segue que a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é formada por funções não negativas, Lebesgue mensuráveis em E e além disso temos

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,, \quad \text{em} \quad E\,. \tag{4.261}$$

De fato, como

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{e} \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad \text{para} \quad i \neq j\,, \tag{4.262}$$

segue que

$$\mathcal{X}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_{E_i} . \tag{4.263}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo em E, temos que:

$$\begin{aligned} f &= f \cdot \mathcal{X}_E \\ &\overset{(4.262)}{=} f \cdot \mathcal{X}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} \\ &\overset{(4.263)}{=} f \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_{E_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (f \cdot \mathcal{X}_{E_i}) \\ &\overset{(4.260)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} f_i . \end{aligned} \tag{4.264}$$

Logo, do Corolário 4.3.1 acima, segue que

$$\begin{aligned} \int_E f &\overset{(4.264)}{=} \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \\ &\overset{(4.253)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \\ &\overset{(4.260)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E f \cdot \mathcal{X}_n \right) \\ &\overset{(4.172)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f , \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Podemos agora introduzir a:

Definição 4.3.2 *Sejam* $E \in \mathcal{M}$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^*$ *uma função não negativa, Lebesgue mensurável em* E.

Diremos que a função f *é* <u>**Lebesgue integrável em** E</u> *se*

$$\int_E f < \infty . \tag{4.265}$$

Com isto temos a:

Proposição 4.3.3 *Sejam* $E \in \mathscr{M}$, $f, g : E \to \mathbb{R}^*$ *funções não negativas, tais que a função* f *é Lebesgue integrável em* E, *a função* g *é Lebesgue mensurável em* E *e*

$$g(x) \leq f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in E. \tag{4.266}$$

Então a função g *é Lebesgue integrável em* E *e, além disso, vale a seguinte identidade*

$$\int_E (f - g) = \int_E f - \int_E g. \tag{4.267}$$

Demonstração:

Notemos que, do item 2. da Proposição 4.3.1, temos:

$$\int_E f = \int_E \left[\underbrace{(f - g)}_{\geq 0} + \underbrace{(g)}_{\geq 0} \right] \overset{\text{item 2. da Proposição (4.3.1)}}{=} \int_E (f - g) + \int_E g. \tag{4.268}$$

Como a parcela do lado esquerdo de (4.268) é finita (pois a função f é Lebesgue integrável em E), segue que as parcelas do lado direito deverão ser finitas.

Em particular, deveremos ter

$$\int_E g < \infty,$$

mostrando que a função g é Lebesgue integrável em E e vale a identidade (4.267), completando a demonstração.

$\square$

Temos também a:

Proposição 4.3.4 *Sejam* $a > 0$, $E \in \mathscr{M}$ *e* $f, g : E \to \mathbb{R}^*$ *funções não negativas e Lebesgue integráveis em* E.

Então as funções

$$a\,f, \quad f + g, \quad f \cdot g, \quad f^+, \quad f^- \quad e \quad |f|, \tag{4.269}$$

são Lebesgue integráveis em E.

Demonstração:

As conclusões acima seguem dos itens 1., 2. da Proposição 4.3.1 juntamente com (3.118), (3.124), (3.125) e a Proposição 4.3.3.

Deixaremos os detalhes da demonstração da mesma como exercício para o leitor.

$\square$

Para finalizar temos a:

Proposição 4.3.5 *Sejam* $E \in \mathscr{M}$, $f : E \to \mathbb{R}^*$ *uma função não negativa e Lebesgue integrável em* E.

Então, dado $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $\delta = \delta(\varepsilon, f) > 0$, *tal que para todo* $A \in \mathscr{M}$ *satisfazendo*

$$A \subseteq E \quad e \quad m(A) < \delta, \tag{4.270}$$

valerá a seguinte desigualdade

$$0 \leq \int_A f < \varepsilon. \tag{4.271}$$

Demonstração:

Suponhamos, primeiramente, o caso que a função f seja limitada em E, isto é, existe $M > 0$ tal que

$$0 \leq f(x) \leq M, \quad \text{para cada} \quad x \in E. \tag{4.272}$$

Consderemos

$$\delta \doteq \frac{\varepsilon}{M} > 0. \tag{4.273}$$

Com isto, notamos que se $A \in \mathscr{M}$ satisfaz (4.270) então, do item 6. da Proposição 4.3.1, segue que:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_A f \\
&\overset{(4.272) \text{ e item } 6. \text{ da Proposição } 4.3.1}{\leq} \int_A M \\
&\overset{\text{item } 1. \text{ da Proposição } 4.3.1}{=} M \int_A 1 \\
&\overset{\text{item } 2. \text{ da Observação } 4.2.3}{=} M \cdot \underbrace{m(A)}_{<\delta} \\
&\overset{(4.270)}{<} M\,\delta \\
&\overset{(4.273)}{=} M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

mostrando a validade da desigualdade (4.271).

Suponhamos agora que a função f não é, necessariamente, limitada em E.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos a função $f_n : E \to \mathbb{R}$, dada por

$$f_n(x) \doteq \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) < n, \\ n, & \text{se } f(x) \geq n \end{cases}. \tag{4.274}$$

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n é limitada, não negativa, Lebesgue mensuráveis em E,

$$f \geq f_n, \quad \text{em } E$$

e

$$f_n \to f\,, \quad \text{pontualmente em } E\,. \tag{4.275}$$

Além disso, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente.

A verificação destes fatos são simples e serão deixadas como exercício para o leitor.

Logo, do Teorema da convergência monótona (isto é, do Teorema 4.3.2), segue que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right) = \int_E f\,,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, se modo que

$$\left|\int_E f - \int_E f_N\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$\text{ou seja,}\quad -\frac{\varepsilon}{2} < \underbrace{\int_E f - \int_E f_N}_{\text{Proposição 4.3.3 } \stackrel{}{=} \int_E (f-f_N)\,,\ \text{pois, } f\geq f_N} < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

em particular, teremos

$$\int_E (f - f_N) < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{4.276}$$

Conisderemos

$$\delta \doteq \frac{\varepsilon}{2\,N}\,. \tag{4.277}$$

Notemos que, se $A \in \mathscr{M}$ satisfaz (4.270), teremos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_A f \\
&= \int_A [(f - f_N) + f_N] \\
&\stackrel{\text{item 1. da Proposição 4.3.1}}{=} \int_A (f - f_N) + \int_A \underbrace{f_N}_{\stackrel{(4.274)}{\leq} N} \\
&\stackrel{\text{item 6. da Proposição 4.3.1}}{\leq} \int_A (f - f_N) + \int_A N \\
&\stackrel{\text{item 1. da Proposição 4.3.1}}{=} \int_A (f - f_N) + N\int_A 1 \\
&\stackrel{\text{item 2. da Observação 4.2.3}}{=} \underbrace{\int_A (f - f_N)}_{\stackrel{A\subseteq E \text{ e } f-f_N\geq 0}{\leq} \int_E (f-f_N) \stackrel{(4.276)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} + N\cdot \underbrace{m(A)}_{\stackrel{(4.270)}{<} \delta} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + N\,\delta \\
&\stackrel{(4.277)}{=} \frac{\varepsilon}{2} + N\,\frac{\varepsilon}{2\,N} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

mostrando a validade da desigualdade (4.271), completando a demonstração.

□

4.4 A Integral Geral de Lebesgue

Podemos agora introduzir a:

Definição 4.4.1 *Sejam* $E \in \mathscr{M}$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^*$ *uma função Lebesgue mensurável (não necessariamente não negativa).*

Diremos que a função f *é* **Lebesgue integrável em** E *se as funções, não negativas,*

$$f^+, f^- : E \to \mathbb{R}^*$$

(introduzidas na Definição 3.5.2) são Lebesgue integráveis em E*, ou seja,*

$$0 \leq \int_E f^+, \int_E f^- < \infty. \tag{4.278}$$

Neste caso, definiremos a **integral de Lebesgue da função** f **em** E*, que indicada por* $\int_E f$*, como sendo*

$$\int_E f \doteq \int_E f^+ - \int_E f^-. \tag{4.279}$$

Observação 4.4.1

1. *Logo se* $E \in \mathscr{M}$*, da Definição 4.4.1, uma função* $f : E \to \mathbb{R}^*$ *será Lebesgue integrável em* E *se, e somente se,*

$$0 \leq \int_E f^+, \int_E f^- < \infty. \tag{4.280}$$

2. *Como*

$$|f| \overset{(3.124)}{=} f_+ + f_-,$$

segue que uma função $f : E \to \mathbb{R}^*$ *será Lebesgue integrável em* E *se, e somente se, a função* $|f| : E \to [0, \infty]$ *for Lebesgue integrável em* E.

Além disso, teremos

$$\int_E |f| \doteq \int_E f^+ + \int_E f^-. \tag{4.281}$$

Em particular, de (4.279) e (4.281), segue que

$$\int_E f \leq \int_E |f|. \tag{4.282}$$

3. *Notemos que se as funções* $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}$ *são não negativas e Lebesgue integráveis em* E *e satisfazem*

$$f = f_1 - f_2, \tag{4.283}$$

como (veja o item 3. da Observação 3.5.4, ou ainda, (3.124))

$$f = f^+ - f^-,$$

segue que

$$\begin{aligned} f^+ - f^- &= f = f_1 - f_2, \\ \text{ou seja,} \qquad f^+ + f_2 &= f^- + f_1 \geq 0, \end{aligned} \tag{4.284}$$

Logo, do item 2. da Proposição 4.3.1, segue que

$$\begin{aligned} \int_E f^+ + \int_E f_2 &\overset{(4.174)}{=} \int_E (f^+ + f_2) \\ &\overset{(4.181)}{=} \int_E (f^- + f_1) \\ &\overset{(4.174)}{=} \int_E f^- + \int_E f_1 . \end{aligned} \tag{4.285}$$

Como

$$0 \leq \int_E f^-, \int_E f_2 < \infty,$$

segue que, de (4.285), que:

$$\underbrace{\int_E f^+ - \int_E f^-}_{\overset{(4.279)}{=} \int_E f} = \int_E f_1 - \int_E f_2,$$

ou seja,

$$\int_E f = \int_E f_1 - \int_E f_2, \tag{4.286}$$

isto é, mostrando que a integral de Lebesgue $\int_E f$ **independe** *da decomposição da funçao* f *que se considere, como diferença de duas funções não negativas, Lebesgue mensuráveis em* E*, que têm integrais de Lebesgue em* E *finitas.*

Com isto temos a:

Proposição 4.4.1 *Sejam* $c \in \mathbb{R}$, $E \in \mathscr{M}$ *e* $f, g : E \to \mathbb{R}^*$ *funções Lebesgue integráveis em* E.

Então

1. *a função* $c \cdot f : E \to \mathbb{R}^*$ *é uma função Lebesgue integrável em* E *e, além disso, teremos:*
$$\int_E (c \cdot f) = c \cdot \int_E f \,. \tag{4.287}$$
2. *a função* $(f + g) : E \to \mathbb{R}^*$ *é uma função Lebesgue integrável em* E *e além disso, teremos*
$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g \,. \tag{4.288}$$
3. *Se* $A \subseteq E$ *e* $A \in \mathscr{M}$*, então a função* $f_{|_A} : A \to \mathbb{R}^*$ *será um função Lebesgue integrável em* A*.*
4. *Se*
$$f \leq g \,, \quad \textit{q.t.p. em } E \,, \tag{4.289}$$
então teremos
$$\int_E f \leq \int_E g \,. \tag{4.290}$$
5. *Se* $A, B \subseteq E$ *são tais que* $A, B \in \mathscr{M}$ *com* $A \cap B = \emptyset$*, então*
$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f \,. \tag{4.291}$$
6. *Se*
$$f = g \,, \quad \textit{q.t.p. em } E \,, \tag{4.292}$$
então teremos
$$\int_E f = \int_E g \,. \tag{4.293}$$

Demonstração:

Do item 1.:

Como a função f é Lebesgue integrável em E, da Definição 4.4.1, temos que as funções f^+ e f^- são Lebesgue integráveis em E, ou seja,
$$0 \leq \int_E f^+ \,, \int_E f^- < \infty \,. \tag{4.294}$$
Observemos que se $c = 0$, teremos que
$$c \cdot f = 0 \,, \quad \text{em } E \,,$$
logo a função $c \cdot f$ será Lebesgue intergrável em E e, além disso, teremos:
$$\int_E (0 \cdot f) = 0 = 0 \cdot \int_E f \,,$$
mostrando que a identidade (4.287) é válida para $c = 0$.

Por outro lado, se $c \neq 0$, notamos que:

$$\text{para } c > 0, \text{ segue que: } \quad (c \cdot f)^+ = c \cdot f^+ \quad \text{e} \quad (c \cdot f^-) = c \cdot f^- , \tag{4.295}$$
$$\text{para } c < 0, \text{ segue que: } \quad (c \cdot f)^+ = -c \cdot f^- \quad \text{e} \quad (c \cdot f^-) = -c \cdot f^+ . \tag{4.296}$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Logo, se $c > 0$, teremos:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_E (c \cdot f)^+ &\overset{(4.295)}{=} \int_E c \cdot f^+ \\ &\overset{\text{item 1 da Proposição (4.3.1)}}{=} c \cdot \int_E f^+ \\ &\overset{(4.294) \text{ e } c>0}{<} \infty , \end{aligned} \tag{4.297}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_E (c \cdot f)^- &\overset{(4.295)}{=} \int_E c \cdot f^- \\ &\overset{\text{item 1. da Proposição (4.3.1)}}{=} c \cdot \int_E f^- \\ &\overset{(4.294) \text{ e } c>0}{<} \infty . \end{aligned} \tag{4.298}$$

Logo, para $c > 0$, de (4.297), (4.298) e da Definição 4.4.1, segue que a função $c \cdot f$ será Lebesgue integrável em E.

Notemos também que, para $c > 0$, do item 3. da Observação 3.5.4, segue que:

$$\begin{aligned} c \cdot f &\overset{(3.124)}{=} (c \cdot f)^+ - (c \cdot f)^- \\ &\overset{(4.295)}{=} c\, f^+ - c\, f^- . \end{aligned} \tag{4.299}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_E (c \cdot f) &\overset{(4.279)}{=} \int_E (c \cdot f)^+ - \int_E (c \cdot f)^- \\ &\overset{(4.295)}{=} \int_E c \cdot f^+ - \int_E c \cdot f^- \\ &\overset{\text{item 1. da Proposição (4.3.1)}}{=} c \cdot \int_E f^+ - c \cdot \int_E f^- \\ &= c \cdot \left[\int_E f^+ - \int_E f^- \right] \\ &\overset{(4.279)}{=} c \int_E f , \end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (4.287) para o caso que $c > 0$.

Por outro lado, para $c < 0$, teremos:

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_E (c \cdot f)^+ &\overset{(4.296)}{=} \int_E [-c \cdot f^-] \\
&\overset{\text{item 1 da Proposição (4.3.1)}}{=} -c \cdot \int_E f^- \\
&\overset{(4.294) \text{ e } c<0}{<} \infty\,, \qquad (4.300) \\
0 \leq \int_E (c \cdot f)^- &\overset{(4.296)}{=} \int_E [-c \cdot f^+] \\
&\overset{\text{item 1. da Proposição (4.3.1)}}{=} -c \cdot \int_E f^+ \\
&\overset{(4.294) \text{ e } c<0}{<} \infty\,. \qquad (4.301)
\end{aligned}
$$

Logo, para $c < 0$, de (4.300), (4.301) e da Definição 4.4.1, segue que a função $c \cdot f$ será Lebesgue integrável em E.

Notemos também que, para $c < 0$, do item 3. da Observação 3.5.4, segue que:

$$
\begin{aligned}
c \cdot f &\overset{(3.124)}{=} (c \cdot f)^+ - (c \cdot f)^- \\
&\overset{(4.296)}{=} -c \cdot f^- + c \cdot f^+\,. \qquad (4.302)
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\int_E (c \cdot f) &\overset{(4.279)}{=} \int_E (c \cdot f)^+ - \int_E (c \cdot f)^- \\
&\overset{(4.296)}{=} \int_E [-c \cdot f^-] - \int_E [-c \cdot f^+] \\
&\overset{\text{item 1. da Proposição (4.3.1)}}{=} -c \cdot \int_E f^- + c \cdot \int_E f^+ \\
&= c \cdot \left[\int_E f^+ - \int_E f^- \right] \\
&\overset{(4.279)}{=} c \int_E f\,,
\end{aligned}
$$

mostrando a validade da identidade (4.287) para o caso que $c < 0$ e completando a demonstração do item 1. .

<u>Do item 2.:</u>

Como as funções f e g são funções Lebesgue integráveis em E segue que as funções f^+, f^-, f^+ e g^- serão funções Lebesgue integráveis em E, ou seja,

$$
0 \leq \int_E f^+\,, \int_E g^+ < \infty\,, \qquad (4.303)
$$

$$
0 \leq \int_E f^-\,, \int_E g^- < \infty\,. \qquad (4.304)
$$

Notemos que

$$\begin{aligned} f+g &\overset{(3.124)}{=} (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) \\ &= (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)\,. \end{aligned} \tag{4.305}$$

Logo, de (4.303) e (4.304), segue que

$$0 \le \int_E (f^+ + g^+) \overset{\text{item 2. da Proposição (4.3.1)}}{=} \int_E f^+ + \int_E g^+ \overset{(4.303)}{<} \infty\,, \tag{4.306}$$

$$0 \le \int_E (f^- + g^-) \overset{\text{item 2. da Proposição (4.3.1)}}{=} \int_E f^- + \int_E g^- \overset{(4.304)}{<} \infty\,. \tag{4.307}$$

Logo, de (4.305), (4.306), (4.307) e da Definição 4.4.1, segue que a função $f+g$ será Lebesgue integrável em E.

Além disso, teremos:

$$\begin{aligned} \int_E (f+g) &\overset{(4.279)}{=} \int_E (f+g)^+ - \int_E (f+g)^- \\ &\overset{(4.305)}{=} \int_E (f^+ + g^+) - \int_E (f^- + g^-) \\ &\overset{\text{item 2 da Proppsiçaõ 4.3.1}}{=} \left[\int_E f^+ + \int_E g^+\right] - \left[\int_E f^- + \int_E g^-\right] \\ &= \left[\int_E f^+ - \int_E f^-\right] + \left[\int_E g^+ - \int_E g^-\right] \\ &\overset{(4.279)}{=} \int_E f + \int_E g\,, \end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (4.288) e completando a prova do item 2. .

<u>Do item 3.:</u>

Lembremos que (veja (3.120))

$$f_{|_A} = f \cdot \mathcal{X}_A\,, \tag{4.308}$$

assim teremos:

$$f_{|_A}{}^+ = f^+ \cdot \mathcal{X}_A \quad \text{e} \quad f_{|_A}{}^- = f^- \cdot \mathcal{X}_A\,. \tag{4.309}$$

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

Como a função f é Lebesgue integrável em E segue, da Definição 4.4.1, que as funções f^+ e f^- são Lebesgue integráveis em E.

Como $A \in \mathscr{M}$, segue que a função $\mathcal{X}_A$ será Lebesgue mensurável e temos também

$$f^+ \cdot \mathcal{X}_A \le f \quad \text{e} \quad f^- \cdot \mathcal{X}_A \le f\,,$$

que, da Proposição 4.3.3, implicará que as funções

$$f^+ \cdot \mathcal{X}_A \quad \text{e} \quad f^- \cdot \mathcal{X}_A$$

serão Lebesgue integráveis em E e assim, de (4.309) e da Definição 4.4.1, segue que a função $f_{|_A}$ será Lebesgue integrável em E, completando a prova de 3. .

Do item 4.:

Observemos que

$$\begin{aligned} & f \leq g\,, \quad \text{q.t.p. em } E \\ \text{se, e somente se:} \quad & 0 \leq g - f\,, \quad \text{q.t.p. em } E\,. \end{aligned} \tag{4.310}$$

Assim a função $g-f$ será uma função Lebesgue integrável em E e não negativa, q.t.p em E.

Logo, do item 6. da Proposição, segue que

$$\begin{aligned} 0 & \overset{(4.180)}{\leq} \int_E (g-f) \\ & \overset{\text{item 2. acima}}{=} \int_E g - \int_E f, \end{aligned}$$

ou seja, vale 4.290, completando a prova do item 4. .

Do item 5.:

Observemos que do item do item 3. acima segue que a função $f_{|_{A\cup B}}$ é Lebesgue integrável em E.

Além disso, temos:

$$\begin{aligned} \int_{A\cup B} f & \overset{(4.172)}{=} \int_E f \cdot \mathcal{X}_{A\cup B} \\ & \overset{\mathcal{X}_{A\cup B} \overset{A\cap B=\emptyset}{=} \mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B}{=} \int_E f \cdot [\mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B] \\ & \overset{\text{item 2. acima]}}{=} \int_E f \cdot \mathcal{X}_A + \int_E f \cdot \mathcal{X}_B = \int_A f + \int_B f, \end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (4.291) e completando a prova do item 5. .

Do item 6.:

Como

$$f = g\,, \quad \text{q.t.p. em } E\,,$$

segue que

$$f^+ = g^+ \quad \text{e} \quad f^- = g^- \quad \text{q.t.p. em } E\,. \tag{4.311}$$

Como a função f é Lebesgue integrável em E segue, da Definição 4.4.1, que

$$0 \leq \int_E f^+, \int_E f^- < \infty\,. \tag{4.312}$$

Logo, do item 5. da Proposição 4.3.1, segue que

$$0 \leq \int_E g^+ \overset{(4.178)}{=} \int_E f^+ \overset{(4.312)}{<} \infty\,,$$
$$0 \leq \int_E g^- \overset{(4.178)}{=} \int_E f^- \overset{(4.312)}{<} \infty\,.$$

Logo, da Definição 4.4.1, teremos que a função g será Lebesgue integrável em E. Portanto, da Definição 4.4.1, segue que

$$\begin{aligned}\int_E f &\overset{(4.279)}{=} \int_E f^+ - \int_E f^- \\ &\overset{\text{item 5. da Proposição 4.3.1}}{=} \int_E g^+ - \int_E g^- \\ &\overset{(4.279)}{=} \int_E g\,,\end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (4.293), completando a demonstração do item 6. e do resultado.

□

Observação 4.4.2 *Notemos se* $f, g : E \to \mathbb{R}^*$ *são funções Lebesgue integráveis em* E*, então a função* $f + g$ *pode* **não** *estar definida em todo o conjunto* E*.*

De fato, pois pode existir $x_o \in E$ *tal que*

$$f(x_o) = +\infty \quad e \quad g(x_o) = -\infty\,, \tag{4.313}$$

ou vice-versa e, neste caso, não faz sentido

$$f(x_o) + g(x_o)\,.$$

Por outro lado, nbservemos que considerendo-se o conjunto:

$$F_{+-} \doteq \{x \in E\,;\, f(x) = +\infty \;\; e \;\; g(x) = -\infty\}$$

segue que

$$m(F_{+-}) = 0\,. \tag{4.314}$$

De modo análogo, conisderando-se o conjunto

$$F_{-+} \doteq \{x \in E : f(x) = -\infty \;\; e \;\; g(x) = +\infty\}\,,$$

segue que

$$m(F_{-+}) = 0\,. \tag{4.315}$$

Mostraremos (4.314) *e deixaremos como exercício para o leitor a verificção de* (4.315)*.*

Suponhamos, por absurdo, que

$$m(F_{+-}) > 0\,. \tag{4.316}$$

Consideremos a função $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}^*$, *dada por:*

$$\tilde{f}(x) \doteq \begin{cases} \infty\,, & \textit{para} \quad x \in F_{+-}\,, \\ 0\,, & \textit{para} \quad x \in E \setminus F_{+-} \end{cases}\,. \tag{4.317}$$

Como $m(F_{+-}) > 0$, *segue que*

$$\int_E \tilde{f} = \int_{F_{+-}} \tilde{f} \overset{\textit{Exercício}}{=} \infty\,. \tag{4.318}$$

Por outro lado, temos que

$$0 \le \tilde{f} \le f^+\,, \quad \textit{em } E\,. \tag{4.319}$$

Assim, do item 5. da Proposição 4.3.1, segue que

$$\infty = \int_E \tilde{f} \le \int_E f^+,$$

o que seria um absurdo, pois a função f *é Lebesgue integrável em* E *o que implicará, pela Definição 4.4.1, em particular, que*

$$\int_F f^+ < \infty\,.$$

Portanto deveremos ter

$$m(F_{+-}) = 0\,,$$

como afirmamos.

Logo, do item 6. da Proposição 4.4.1. acima, segue que o valor de

$$\int_E (f+g) \in \mathbb{R}$$

<u>não</u> *se alterará se mudarmos os valores das funções* f *e* g *no conjunto* $F_{+-} \cup F_{-+}$, *considerando, por exemplo,*

$$f = g = 1\,, \quad \textit{em } F_{+-} \cup F_{-+}\,.$$

Temos agora o importante resultado:

Teorema 4.4.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Sejam* $E \in \mathscr{M}$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, consideremos* $f, g, f_n : E \to \mathbb{R}^*$*, funções Lebesgue mensuráveis em* E*, tais que a função* g *é Lebesgue integrável em* E*,*

$$|f_n(x)| \leq g(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in E \tag{4.320}$$

$$f_n \to f\,, \quad \textit{q.t.p. em } E\,. \tag{4.321}$$

Então as funções f *e* f_n *são Lebsegue integráveis em* E *e*

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right),$$

$$\textit{isto é,} \qquad \int_E \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right). \tag{4.322}$$

Demonstração:

Do item 3. da Observação 3.5.4, segue que

$$|f_n| \overset{(3.124)}{=} f_n^+ + f_n^- \tag{4.323}$$

Logo, de (4.323) e (4.320), segue que

$$0 \leq f_n^+\,,\ f_n^- \leq g\,, \quad \text{em} \quad E\,. \tag{4.324}$$

Logo, do item 6. da Proposição 4.3.1, teremos:

$$0 \leq \int_E f_n^+\,,\ \int_E f_n^- \overset{(4.180)}{\leq} \int_E g < \infty\,,$$

ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n é uma função Lebesgue integrável em E.

Por outro lado, como

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad, \text{q.t.p em } E\,, \tag{4.325}$$

$$\text{e} \qquad |f_n| \leq g\,, \quad \text{em } E\text{, para cada } n \in \mathbb{N}\,, \tag{4.326}$$

$$\text{segue que:} \quad |f| \leq g\,, \quad \text{q.t.p em } E\,, \tag{4.327}$$

$$\text{ou seja,} \quad -g \leq f \leq g\,, \quad \text{q.t.p em } E\,. \tag{4.328}$$

Logo, de (4.326) (como em (4.324), com f no lugar da função f_n), segue que a função f será Lebesgue integrável em E.

Notemos também que, para cada $n \in \mathbb{N}$, de (4.326), teremos:

$$-g \overset{\boxed{\text{I}}}{\leq} f_n \overset{\boxed{\text{II}}}{\leq} g\,, \quad \text{em} \quad E\,, \tag{4.329}$$

$$\text{logo, de } \boxed{\text{II}}\text{, teremos:} \quad 0 \leq g - f_n\,, \quad \text{em } E\,, \tag{4.330}$$

$$\text{e também temos:} \quad g - f_n \to g - f\,, \quad \text{q.t.p. em } E\,. \tag{4.331}$$

Logo, do Lema de Fatou (isto é, do Teorema 4.3.1), segue que

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int_E \overbrace{(g-f)}^{\overset{(4.328)}{\geq}\ 0}}_{=\int_E g-\int_E f} &\overset{(4.239)\text{ e }(4.235)}{\leq} \liminf_{n\to\infty}\left[\int_E (g-f_n)\right] \\
&= \int_E g + \liminf_{n\to\infty}\left[\int_E -f_n\right] \\
&\overset{(4.287)\text{ com } c=-1}{=} \int_E g + \liminf_{n\to\infty}\left[-\int_E f_n\right] \\
&\overset{\text{item 3. da Proposição (2.4.1)}}{=} \int_E g - \limsup_{n\to\infty}\int_E f_n\,,
\end{aligned}$$

ou seja,
$$\int_E f \geq \limsup_{n\to\infty}\int_E f_n\,. \tag{4.332}$$

De modo semelhante, de $\boxed{\text{I}}$, temos que

$$0 \leq g+f_n\,, \quad \text{em } E \tag{4.333}$$
$$\text{e} \quad g+f_n \to g+f\,, \quad \text{q.t.p. em } E\,. \tag{4.334}$$

Logo, do Lema de Fatou (isto é, do Teorema 4.3.1), segue que

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int_E \overbrace{(g+f)}^{\overset{(4.333)}{\geq}\ 0}}_{=\int_E g+\int_E f} &\overset{(4.239)\text{ e }(4.235)}{\leq} \liminf_{n\to\infty}\left[\int_E (g+f_n)\right] \\
&= \int_E g + \liminf_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right),
\end{aligned}$$

ou seja,
$$\int_E f \leq \liminf_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right). \tag{4.335}$$

Logo, de (4.332) e (4.335) segue que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right) &\overset{(4.332)}{\leq} \int_E f \\
&\overset{(4.335)}{\leq} \liminf_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right) \\
&\overset{\text{item 4. da Proposiçao 2.4.1}}{\leq} \limsup_{n\to\infty}\int_E f_n,
\end{aligned}$$

ou seja,
$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n = \int_E f = \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n\,,$$

mostrando, pelo item 5. da Proposição 2.4.1, a validade dade identidade (4.322), completando a demonstração.

□

Observação 4.4.3 *Nas hipótese do Teorema da convergência dominada de Lebesgue (isto é, do Teorema 4.4.1), todos os termos da seguência de funções* (f_n) *deve ser majorado, em módulo, por uma função Lebesgue integrável* g *fixada.*

Porém na demonstração **não** *foi utilizado tudo isto.*

Na verdade se substituirmos, de modo apropriado, a função g*, da desigualdade (4.320), por uma sequência* (g_n) *podemos obter a seguinte extensão do Teorema da convergência dominada de Lebesgue (isto é, o Teorema 4.4.1), que será enunciado a seguir e cuja demonstração será deixada como exercício para o leitor:*

Teorema 4.4.2 *Sejam* $E \in \mathscr{M}$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, consideremos* $g_n, g : E \to \mathbb{R}^*$*, funções Lebesgue integráveis em* E*, tais que*

$$g_n \to g\,, \qquad q.t.p.\ \ em\ E\,, \tag{4.336}$$

e satisfazendo

$$\int_E g = \lim_{n\to\infty}\left(\int_E g_n\right)\,. \tag{4.337}$$

Além disso se, para cada $n \in \mathbb{N}$ *temos que as funções* $f_n, f : E \to \mathbb{R}^*$ *satisfzam, para cada* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$|f_n| \leq g_n\,, \qquad em\ E \tag{4.338}$$

$$e \qquad f_n \to f\,, \qquad q.t.p.\ \ em\ E \tag{4.339}$$

então, para cada $n \in \mathbb{N}$*, as funções* f *e* f_n *são Lebesgue integráveis em* E *e vale a seguinte identidade:*

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n. \tag{4.340}$$

$$ou\ seja, \qquad \int_E\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_E f_n\right)\,. \tag{4.341}$$

Observação 4.4.4

1. *Na situação acima, se* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma a seguência de funções Lebesgue mensuráveis em* E*, tal que*

$$f_n \to f\,, \qquad q.t.p.\ \ em\ E\,,$$

então, do Lema de Fatou (isto é, do Teorema 4.3.1), do Teorema da convergência monótona (isto é, do Teorema 4.3.2) e do Teorema da convergência dominada de Lebesgue (isto é, do Teorema 4.4.1) garantem que, **sob certas condições***, podemos caracterizar o valor da integral de Lebesgue* $\displaystyle\int_E f$*, em termos do limite das integrais de Lebesgue* $\displaystyle\int_E f_n$*.*

2. *O Lema de Fatou (isto é, do Teorema 4.3.1) tem as hipótese mais fracas.*

   Neste caso, precisamos somente que as funções f_n *sejam não negativas em* E*, o que é menos do que ser Lebesgue integrável em* E*, como pede o Teorema da convergência dominada de Lebesgue (isto é, do Teorema 4.4.1).*

   Por outro lado, sua conclusão é a mais fraca de todas, e nos diz que

$$\int_E f \leq \liminf \left(\int_E f_n \right) .$$

3. *O Teorema da convergência dominada de Lebesgue (isto é, do Teorema 4.4.1), pede que as funções* f_n *sejam limitadas, por cima e por baixo, por uma função* g*, que é Lebesgue integrável em* E *fixada.*

   Porém sua conclusão nos garante a igualdade

$$\int_E f = \lim \left(\int_E f_n \right) .$$

4. *O Teorema da convergência monónotona (isto é, do Teorema 4.3.2) é algo intermediário entre os dois resultados acima.*

   Ele pede que sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seja monótona crescente, formada por funções não negativas em* E *e limitada superiormente, pelo seu próprio limite, ou seja, a função* f.

   Notemos que, se a função f *é uma função Lebesgue integrável em* E*, este será um caso especial do Teorema da convergência dominada de Lebesgue (isto é, do Teorema 4.4.1).*

5. *A vantagem do Lema de Fatou (isto é, do Teorema 4.3.1) e do Teorema da convergência monónotona (isto é, do Teorema 4.3.2) é que podem ser aplicados mesmo que a função* f **não** *seja Lebesgue integrável em* E *e poderá ser um bom modo de mostrar que a função* f *é Lebesgue integrável em* E.

6. *O Lema de Fatou (isto é, do Teorema 4.3.1) e o Teorema da convergência monónotona (isto é, do Teorema 4.3.2) estão bem próximos, no sentido que cada um deles pode ser obtido do outro usando somente o fatos básicos relacionados com a integral ser não negativa e linear.*

4.5 Convergência em Medida

Observação 4.5.1 *Sejam* $E \in \mathscr{M}$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, consideremos* $f_n : E \to \mathbb{R}^*$ *uma função Lebesgue mensurável (e não negativas) em* E*, satisfazendo*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_E |f_n| \right) = 0 . \tag{4.342}$$

1. *O que podemos dizer sobre a convergência da sequência de funções* (f_n)*? será que*

$$f_n \to 0\,, \qquad \textit{em } E\ ?$$

   Infelizmente isto **não é verdade** *em geral.*

   Notemos que isto não vale nem mesmo para a integral de Riemann.

   Deixaremos como exercício para o leitor a construção de um exemplo que mostra a situação descrita acima.

2. *O que podemos afirmar é que se* (4.342) *ocorre, para cada* $\eta > 0$*, teremos*

$$m\,(\{x \in E\,;\, |f_n(x)| > \eta\}\,) \to 0\,, \quad \textit{quando} \quad n \to \infty\,. \tag{4.343}$$

   A verificação deste fato será será deixada como exercício para o leitor.

   Isto nos leva a introduzir a:

Definição 4.5.1 *Sejam* $E \in \mathscr{M}$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, conisderemos* $f_n\,, f : E \to \mathbb{R}^*$ *funções Lebesgue mensuráveis em* E*..*

Diremos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é* **convergente em medida, para a função** f**, em** E *se dado* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$*, tal que*

$$\textit{para cada} \quad n \geq N, \quad \textit{teremos:} \quad m\,(\{x \in E\,;\, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\,) < \varepsilon\,. \tag{4.344}$$

Para ilustra temos o:

Exemplo 4.5.1 *Consideremos*

$$E \doteq [0\,,1]$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$*, definamos a função* $f_n : E \to \mathbb{R}$*, da seguinte forma:*

Seja m *o maior inteiro, não negativo, tal que podemos encontrar*

$$k \in [0\,, 2^m)\,, \tag{4.345}$$

tal que

$$n = k + 2^m\,. \tag{4.346}$$

Definamos

$$f_n(x) \doteq \begin{cases} 1\,, & \textit{para} \quad x \in [k\,2^{-m}\,, (k+1)\,2^{-m}]\,, \\ 0\,, & \textit{para} \quad x \in [0\,,1] \setminus [k\,2^{-m}\,, (k+1)\,2^{-m}] \end{cases}\,. \tag{4.347}$$

Então, dado $\varepsilon > 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, teremos*

$$m(\{x \in [0\,,1] : |f_n(x)| > \varepsilon\}\,) \leq \frac{2}{n}. \tag{4.348}$$

Resolução:

Observemos que

$$\begin{aligned} n &\overset{(4.345)}{=} k + 2^m \\ &\overset{(4.345)}{<} 2^m + 2^m \\ &= 2^{m+1}, \\ \text{ou seja,} \quad & n - 2^{m+1} < 0. \\ \text{Somando-se } n\text{, teremos:} \quad & 2n - 2^{m+1} < n, \end{aligned} \tag{4.349}$$

assim:

$$\begin{aligned} 2k &\overset{(4.345)}{=} 2\,(n - 2^m) \\ &= 2n - 2^{m+1} \\ &\overset{(4.349)}{<} n, \\ \text{ou seja,} \quad & 0 < n - 2k. \\ \text{Somando-se } n\text{, obteremos,} \quad & n < 2\,(n-k), \\ \text{ou ainda,} \quad & \frac{1}{n-k} < \frac{2}{n}. \end{aligned} \tag{4.350}$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, de (4.347), segue que:

$$\begin{aligned} & f_n(x) \neq 0, \\ \text{se, e somente se,} \quad & x \in [k\,2^{-m}, (k+1)\,2^{-m}]. \end{aligned} \tag{4.351}$$

Logo

$$\{x \in [0,1]\,;\, |f_n(x)| > \varepsilon\} \subseteq [k\,2^{-m}, (k+1)\,2^{-m}].$$

Portanto

$$\begin{aligned} m(\{x \in [0,1]\,;\, |f_n(x)| > \varepsilon\}) &\leq m([k\,2^{-m}, (k+1)\,2^{-m}]) \\ & l([k\,2^{-m}, (k+1)\,2^{-m}]) \\ &= 2^{-m} \\ &= \frac{1}{n-k} \\ &\overset{(4.238)}{<} \frac{2}{n}. \end{aligned} \tag{4.352}$$

Portando, dado $\vec{R} > 0$, podemos encontrar $N \in N$, de modo que

$$N > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.353}$$

Logo, se

$$n \geq N\,, \tag{4.354}$$

segue, de (4.352), que

$$\begin{aligned} m\left(\{x \in [0\,,1]\,;\, |f_n(x)| > \varepsilon\}\right) &\overset{(4.352)}{<} \frac{2}{n} \\ &\overset{(4.354)}{<} \frac{2}{N} \\ &\overset{(4.353)}{<} \varepsilon\,, \end{aligned}$$

como afirmamos.

Observação 4.5.2

1. *Notemos que, no Exemplo 4.5.1, fazendo:*

   (a) $n = 1$, *de (4.346), deveremos ter:*

   $$m = 0 \quad e \quad k = 0\,.$$

   Logo, de (4.347), segue que

   $$f_1(x) = 1\,, \quad para \quad x \in [0\,,1]\,;$$

   (b) $n = 2$, *de (4.346), deveremos ter:*

   $$m = 1 \quad e \quad k = 0\,.$$

   Logo, de (4.347), segue que:

   $$\begin{aligned} & f_2(x) = 1\,, \quad para \quad x \in \left[0\,,\frac{1}{2}\right] \\ e \quad & f_2(x) = 0\,, \quad para \quad x \in \left(\frac{1}{2}\,,1\right]\,; \end{aligned}$$

   (c) $n = 3$, *de (4.346), deveremos ter:*

   $$m = 1 \quad e \quad k = 1\,.$$

   Logo, de (4.347), segue que

   $$\begin{aligned} & f_3(x) = 1\,, \quad para \quad x \in \left[\frac{1}{2}\,,1\right] \\ e \quad & f_3(x) = 0\,, \quad para \quad x \in \left[0\,,\frac{1}{2}\right)\,; \end{aligned}$$

(d) $n = 4$, *de* (4.346), *deveremos ter:*

$$m = 2 \quad e \quad k = 0 .$$

Logo, de (4.347), *segue que*

$$f_4(x) = 1 , \quad para \quad x \in \left[0 , \frac{1}{4}\right]$$
$$e \qquad f_4(x) = 0 , \quad para \quad x \in \left(\frac{1}{4} , 1\right] ;$$

(e) $n = 5$, *de* (4.346), *deveremos ter:*

$$m = 2 \quad e \quad k = 1 .$$

Logo, de (4.347), *segue que:*

$$f_5(x) = 1 , \quad para \quad x \in \left[\frac{1}{4} , \frac{1}{2}\right]$$
$$e \qquad f_5(x) = 0 , \quad para \quad x \in [0 , 1] \setminus \left[\frac{1}{4} , \frac{1}{2}\right]$$

e assim por diante.

2. *No , no Exemplo 4.5.1 acima , quando* $n \to \infty$, *segue que*

$$f_n \to f \equiv 0$$

em medida em $[0 , 1]$.

Notemos que quando $n \to \infty$, *de* (4.346), *segue que* $m \to \infty$, *logo*

$$\frac{1}{2^{-m}} \to 0 .$$

3. *Notemos que seguência* $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ *será constante e igual a* 1 *em intervalos contidos em* $[0 , 1]$, *para um número infinito de índices* n, *suficientemente grandes.*

Por exemplo, para todo natural do tipo

$$n = 2^m ,$$

teremos, de (4.346), *que*

$$k = 0 .$$

Logo a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **não** *será convergente para a função identicamente nula em* $[0 , 1]$.

Logo, da Definição 4.5.1, podemos concluir que

$$f_n \to f \equiv 0\,, \qquad \textit{em medida em } [0\,,1]\,,$$

mas a sequência numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ***não*** *é convergente para* $f(x) = 0$*, para cada* $x \in [0\,,1]$.

4. *Portanto podemos concluir que, se* $f_n \xrightarrow{p} f$ *em* E*, então*

$$f_n \to f\,, \qquad \textit{em medida em } E\,,$$

mas não vale, em geral, a recíproca da afirmação acima.

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

Porém temos a:

Proposição 4.5.1 *Sejam* $E \in \mathscr{M}$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, consideremos* $f_n, f : E \to \mathbb{R}^*$ *função Lebesgue mensurável em* E.

Suponhamos que

$$f_n \to f\,, \qquad \textit{em medida em } E\,. \tag{4.355}$$

Então existe uma subsequência, que indicaremos por $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*, da sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, tal que*

$$f_{n_k} \to f\,, \qquad \textit{q.t.p. em } E\,. \tag{4.356}$$

Demonstração:

Como

$$f_n \to f\,, \qquad \text{em medida em } E\,,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $N = N(k) \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq N$, teremos:

$$m\left(\left\{x \in E\,;\, |f_n(x) - f(x)| \geq 2^{-k}\right\}\right) < 2^{-k}\,. \tag{4.357}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, consderemos o conjunto

$$E_m \doteq \{x \in E\,;\, |f_{n_m}(x) - f(x)| \geq 2^{-m}\,,\ \text{para algum} \ \ n_m \in \mathbb{N}\}\,. \tag{4.358}$$

Observemos que, para $k \in \mathbb{N}$, se

$$x \notin \bigcup_{m=k}^{\infty} E_m\,,$$

então, de (4.358), deveremos ter

$$|f_{n_m}(x) - f(x)| < 2^{-m}\,, \qquad \text{para todo} \quad m \geq k\,.$$

Neste caso, segue que

$$f_{n_m}(x) \to f(x)\,,$$

ou seja,

$$f_{n_m}(x) \to f(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \notin A \doteq \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=k}^{\infty} E_k\right).$$

Mas, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\begin{aligned}
m(A) &\overset{A\subseteq\bigcup_{m=k}^{\infty} E_m}{\leq} m\left(\bigcup_{m=k}^{\infty} E_m\right)\\
&\overset{(3.58)}{\leq} \sum_{m=k}^{\infty} m(E_m)\\
&\overset{(4.357)}{\leq} \sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{l+k}}\\
&= \frac{1}{2^k}\cdot 2\\
&= \frac{1}{2^{k-1}}\,. \qquad (4.359)
\end{aligned}$$

Como o lado esquerdo da desigualdade (4.359) acima, não depende de k, fazendo

$$k \to \infty\,, \quad \text{teremos:} \quad m(A) = 0\,,$$

mostrando que

$$f_{n_m} \to f\,, \quad \text{em } E \setminus A\,, \quad \text{com} \quad m(A) = 0\,,$$

ou seja,

$$f_{n_m} \to f\,, \quad \text{q.t.p. em } E\,,$$

como queríamos demonstrar.

□

Deixaremos como exercício para o leitor a (veja o Exercício 21 da página 92 de [HLR]) o seguinte resultado:

Proposição 4.5.2 *O Lema de Fatou (isto é, do Teorema 4.3.1), o Teorema da convergência monótona (isto é, do Teorema 4.3.2) e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue (isto é, do Teorema 4.4.1), permanecem válidos se subtituirmos a hipótese*

$$\text{"}f_n \to f\,, \quad \textit{q.t.p. em } E\text{"}\,, \quad (\textit{isto é}, (4.234), (4.256) \textit{ e } (4.321), \textit{respectivamente})$$

pela hipótese

$$\text{"}f_n \to f\,, \textit{ em medida em } E\text{"}\,.$$

Capítulo 5

Diferenciação e Integração

Neste capítulo veremos em que sentido a operação diferenciação é o inverso da operação de integração.

Em particular atentaremos para questões relacionadas com:

1. sobre que condições poderemos garantir que

$$\int_{[a\,,b]} f' = f(b) - f(a) \; ? \tag{5.1}$$

2. ou ainda, que

$$\left[\frac{d}{dx}\int_{[a,x]} f\right](x_o) = f(x_o)\,, \quad \text{para} \quad x_o \in [a\,,b] \; ? \tag{5.2}$$

Observação 5.0.3

1. *Do ponto de vista da integral de Riemann sabemos que uma condição suficiente para a validade relações* (5.1) *e* (5.2) *acima, é que a função* f *seja contínua em* $[a\,,b]$.

2. *Mostraremos, em situações mais gerais, que identidade* (5.2) *ocorre, quase sempre.*

   Neste sentido, a diferenciação é a transformação inversa da integração, no sentido de Lebesgue.

3. *A primeira questão, isto é,* (5.1)*, é mais delicada e, mesmo utilizando a integral de Lebesgue, ela será verdadeira para uma certa classe de funções que caracterizaremos mais adiante.*

5.1 Diferenciação de Funções Monótonas

Começaremos pela:

Definição 5.1.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\mathscr{G}$ *uma coleção formada por intervalos limitados de* $\mathbb{R}$.

Diremos que a coleção $\mathscr{G}$ *é uma* **cobertura de** E**, no sentido de Vitali** *se, dado* $\varepsilon > 0$*, para cada* $x \in E$*, podemos encontrar um intervalo pertencente a* $\mathscr{G}$*, que indicaremos por* $I_x \in \mathscr{G}$*, de modo que*

$$x \in I_x \quad e \quad l(I_x) < \varepsilon\,. \tag{5.3}$$

Com isto temos o:

Lema 5.1.1 (Lema de Vitali) *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$*, tal que*

$$m^*(E) < \infty \tag{5.4}$$

e $\mathscr{G}$ *uma cobertura de* E*, no sentido de Vitali.*

Então dado $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar uma subcoleção finita e disjunta, que indicaremos por*

$$\{I_1\,, \cdots, I_N\} \subseteq \mathscr{G}\,, \tag{5.5}$$

tal que

$$m^*\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \varepsilon\,. \tag{5.6}$$

Demonstração:

Podemos supor, sem perda de generalidade, que os intervalos da coleção $\mathscr{G}$ são intervalos fechados.

De fato pois, caso contrário, trocamos os intervalos de $\mathscr{G}$ que não forem necessariamente fechados pelo seus respectivos fechos.

Observamos que os pontos extremos dos intervalos fechados

$$\overline{I_1}\,, \cdots, \overline{I_N}$$

teêm medida de Lebesgue zero, logo não alterarão o valor do esquerdo da desigualdade (5.6).

Notemos que, dado $\delta > 0$, do item 1. da Proposição 3.2.3, segue que podemos encontrar um subconjunto aberto O de $\mathbb{R}$, que satisfaz

$$E \subseteq O \quad e \quad m^*(O) \leq m^*(E) + \delta\,. \tag{5.7}$$

De (5.4) e (5.7), segue que

$$m(O) \overset{O \in \mathscr{M}}{=} m^*(O) < \infty\,. \tag{5.8}$$

Como a coleção $\mathscr{G}$ é uma cobertura de E, no sentido de Vitali, da Definição 5.1.1, dado $\xi > 0$, para cada $x \in E \subseteq O$, podemos encontrar $I_x \in \mathscr{G}$, de modo que

$$x \in I_x \quad \text{e} \quad l(I_x) < \xi . \tag{5.9}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que se

$$I_x \in \mathscr{G}, \quad \text{teremos:} \quad I_x \subseteq O . \tag{5.10}$$

Para msotramos isto basta, se necessário, diminuir $\xi > 0$ consderado acima e utilizar o fato que $x \in E \subseteq O$ e o conjuto O é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Em particular, como $I_x \in \mathscr{G}$ segue, de (5.10) e dos itens 3. e 4. da Proposição 3.2.1, que

$$\begin{aligned} l(I_x) &\overset{(3.5)}{=} m^*(I_x) \\ &\overset{(3.4)}{\leq} m^*(O) \\ &\overset{O \in \mathscr{M}}{=} m(O) . \end{aligned} \tag{5.11}$$

Consideremos a seguinte seguência $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, formada por intervalos disjuntos de $\mathscr{G}$, escolhidos da seguinte forma:

Consideremos

$$I_1 \in \mathscr{G},$$

qualquer.

Notemos que se

$$E \subseteq I_1 ,$$

terminamos a demonstração, pois

$$m^*(\overbrace{E \setminus I_1}^{=\emptyset}) = 0 < \varepsilon ,$$

mostrando (5.6), com a subcoleção finita (5.5) formada por um único elelmento, a saber

$$\{I_1\} .$$

Caso contrário, ou seja, se

$$E \setminus I_1 \neq \emptyset ,$$

podemose encontrar

$$x \in E \setminus I_1 . \tag{5.12}$$

Logo, existirá $I_x \in \mathscr{G}$, com medida arbitrariamente pequena (veja (5.9)), tal que $x \in I_x$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$I_1 \cap I_x = \emptyset\,. \tag{5.13}$$

De fato pois , como $x \notin I_1$ e I_1 é um intervalo fechado de $\mathbb{R}$, podemos considerar

$$\xi \doteq \frac{d(x\,,I_1)}{2} > 0$$

e assim, de (5.9), teremos (5.13).

Consideremos

$$I_2 \doteq I_x\,. \tag{5.14}$$

Suponhamos que os intervalos

$$I_1\,,I_2\,,\cdots\,,I_n$$

tenham sido escolhidos, para $n \in \{2\,,3\,,\cdots\}$, ou seja, a coleção

$$\{I_j\,;\,j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$$

é formada por elementos de $\mathscr{G}$ que são dois a dois disjuntos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos:

$$k_n \doteq \sup\left\{l(I_x)\,;\,\underbrace{I_x \in \mathscr{G}\,,\ \text{tal que}\ I_x \cap I_i = \emptyset\,,\ \ \text{para cada}\ \ i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}}_{\doteq\mathscr{A}}\right\}. \tag{5.15}$$

Notemos que, para cada $I_x \in \mathscr{G}$, de (5.10), segue que

$$I_x \subseteq O\,,\quad \text{implicando em}\quad l(I_x) \leq m(O)\,.$$

Logo

$$k_n \leq m(O) \overset{(5.8)}{<} \infty\,. \tag{5.16}$$

Se

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i\,,$$

segue que

$$m^*\left(\underbrace{E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n}_{=\emptyset}\right) = 0 < \varepsilon\,,$$

(5.6) ocorrerá.

Caso contrário, construiremos

$$I_{n+1} \in \mathscr{G}\,,$$

da seguinte forma:

Como
$$E \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i \, ,$$
podemos encontrar
$$x_o \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} I_i \, .$$

Como a coleção $\mathscr{G}$ é cobertura de Vitali do conjunto E, segue que, existe $I_{x_o} \in \mathscr{G}$, com medida arbitrariamente pequena (veja (5.9)).

Podemos supor, sem perda de generalidade,
$$I_{x_o} \cap I_i = \emptyset \, , \quad \text{par cada} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\} \, . \tag{5.17}$$

De fato pois , como $x_o \notin \bigcup_{i=1}^{n} I_1$ e, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, I_i é um intervalo fechado de $\mathbb{R}$, podemos considerar
$$\xi \doteq \min\left\{\frac{d(x_o\,,I_i)}{2}\,;\,,i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\right\} > 0$$
e assim, de (5.9), teremos (5.17).

Logo, de (5.15), teremos:
$$I_{x_o} \in \mathscr{A} \, , \qquad \text{em particular,} \quad \mathscr{A} \neq \emptyset \, .$$

Da definição de supremo aplicada a (5.15), segue que podemos encontrar $I_{n+1} \in \mathscr{G}$, tal que
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,k_n &= k_n - \underbrace{\frac{1}{2}\,k_n}_{>0} \\ &< l(I_{n+1}) \\ &\leq k_n \end{aligned} \tag{5.18}$$
$$\text{e} \qquad I_{n+1} \cap I_i = \emptyset \, , \quad \text{para cada} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\} \, . \tag{5.19}$$

Assim construímos uma seguência $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, formada por intervalos disjuntos de elementos de $\mathscr{G}$.

Notemos que, do fato que
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subseteq O \, , \tag{5.20}$$

segue, da Proposição (3.3.1), que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \\ &\overset{I_k \cap I_m = \emptyset,\ \text{para}\ k\neq m\ \text{e}\ (3.59)}{=} m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \\ &\overset{(5.20)}{\leq} m(O) \overset{(5.8)}{<} \infty. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Em particula,r a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)$ será convergente em $\mathbb{R}$, ou seja, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} l(I_n) < \frac{\varepsilon}{5}. \tag{5.22}$$

Consideremos o conjunto

$$A \doteq E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n. \tag{5.23}$$

Para finalizarmos mostrarmos que

$$m^*(A) < \varepsilon,$$

ou seja, vale a desigualdade (5.6).

Para isto notemos que se $x \in A$, como $\bigcup_{n=1}^{N} I_n$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ que não contém x, pois

$$x \in A \overset{(5.23)}{=} E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n,$$

segue que

$$a \doteq d\left(x, \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) > 0. \tag{5.24}$$

Por outro lado, como a coleção $\mathscr{G}$ é uma cobertura do conjunto E, no sentido de Vitali, podemos encontrar $I_x \in \mathscr{G}$, de modo que

$$x \in I_x \quad \text{e} \quad l(I_x) < \frac{a}{2}. \tag{5.25}$$

Assim, de (5.24) e (5.25), segue que o intervalo fechado I_x não interceptará nenhum dos intervalos fechados

$$I_1, \cdots, I_N,$$

ou seja,

$$I_x \cap I_i = \emptyset, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, N\}. \tag{5.26}$$

Por outro lado, notemos que se, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$I_x \cap I_i = \emptyset \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\},$$

da definição de supremo aplicada a (5.15), segue que

$$l(I_x) \leq k_n \overset{(5.18)}{<} 2\, l(I_{n+1}) . \tag{5.27}$$

Como a série númérica $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)$ é convergente em $\mathbb{R}$ (veja (5.21)), do critério da divergência para séries numéricas, segue que

$$\lim_{n \to \infty} l(I_n) = 0 . \tag{5.28}$$

Portanto afirmamos que o intervalo fechado I_x deverá interceptar, pelo menos, um intervalo I_{n_o}, para algum $n_o \in \mathbb{N}$.

De fato, caso contrário, se

$$I_x \cap I_n = \emptyset , \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} ,$$

de (5.27) e (5.28), teremos

$$l(I_x) \overset{(5.27)}{\leq} 2\, l(I_{n+1}) \overset{(5.28)}{\to} 0,$$

o que implicaria que

$$l(I_x) = 0 ,$$

o que seria um absurdo, pois I_x é um intervalo fechado de $\mathbb{R}$.

Consideremos $n_x \in \mathbb{N}$, o menor natural (que existe), tal que

$$I_x \cap I_{n_x} \neq \emptyset . \tag{5.29}$$

Em particular, segue que

$$I_x \cap I_i = \emptyset , \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n_x - 1\}. \tag{5.30}$$

Logo, de (5.26) e (5.29), segue que

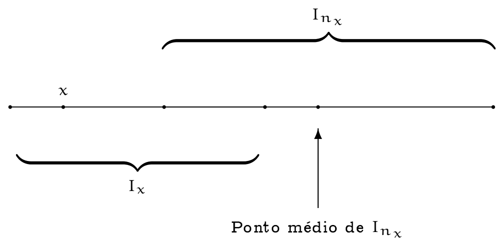
$$n_x > N .$$

Além disso, de (5.27), teremos

$$\begin{aligned} l(I_x) &\leq k_{n_x - 1} \\ &\overset{(5.27)}{\leq} 2\, l(I_{n_x}) . \end{aligned} \tag{5.31}$$

Como $x \in I_x$ e o intervalo fechado I_x tem ponto em comum com o intervalo fechado I_{n_x}, segue que a distância do ponto x ao ponto médio do intervalo fecahdo I_{n_x} é, no máximo, (veja figura abaixo)

$$l(I_x) + \frac{1}{2}\, l(I_{n_x}) . \tag{5.32}$$



Notemos também que

$$\begin{aligned} l(I_x) + \frac{1}{2}\, l(I_{n_x}) &\overset{(5.31)}{\leq} 2\, l(I_{n_x}) + \frac{1}{2}\, l(I_{n_x}) \\ &= 5\, \frac{l(I_{n_x})}{2} \,. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Logo o ponto x pertencerá a um intervalo fechado, que indicaremos por J_{n_x}, que terá o mesmo ponto médio do intervalo I_{n_x} e comprimento 5 vezes o do mesmo, ou seja,

$$l\,(J_{n_x}) = 5\, l\,(I_{n_x}) \ . \tag{5.34}$$

.

Logo, como vimos acima, para cada $x \in A$, podemos encontrar $n_x \in \mathbb{N}$, tal que

$$x \in J_{n_x} \,.$$

Como $n_x > N$, de (5.23), segue que

$$A \subseteq \bigcup_{n=N+1}^{\infty} J_n \,. \tag{5.35}$$

Desde modo, de (5.35) e do item 3. da Proposiçao 3.2.1, teremos

$$\begin{aligned} m^*(A) &\overset{(3.4)}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} l(J_n) \\ &\overset{(5.34)}{=} \sum_{n=N+1}^{\infty} 5\, l(I_n) \\ &= 5 \sum_{n=N+1}^{\infty} l(I_n) \\ &\overset{(5.22)}{<} 5\, \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon \,, \end{aligned}$$

mostrando a validade da desigualdade (5.6) e completando a demonstração.

□

Observação 5.1.1

1. *Para a próximo conceito que introduziremos a seguir, precisaremos das seguintes noções:*

   Sejam $A \neq \emptyset$, $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ *uma função e* $x_o \in \overset{o}{A}$, *isto é,* x_o *é ponto interior do conjunto* A.

   Definimos os seguinte limites superiores, inferiores e correspondentes limites superiores e inferiores laterais, da função f *no ponto* x_o*:*

$$\limsup_{x\to x_o} f(x) \doteq \inf_{\delta>0} \sup_{0<|x-x_o|<\delta} f(x)\,, \tag{5.36}$$

$$\liminf_{x\to x_o} f(x) \doteq \sup_{\delta>0} \inf_{0<|x-x_o|<\delta} f(x)\,, \tag{5.37}$$

$$\limsup_{x\to x_o^+} f(x) \doteq \inf_{\delta>0} \sup_{0<x-x_o<\delta} f(x)\,, \tag{5.38}$$

$$\liminf_{x\to x_o^+} f(x) \doteq \sup_{\delta>0} \inf_{0<x-x_o<\delta} f(x)\,, \tag{5.39}$$

$$\limsup_{x\to x_o^-} f(x) \doteq \inf_{\delta>0} \sup_{0<x_o-x<\delta} f(x) \tag{5.40}$$

e

$$\liminf_{x\to x_o^-} f(x) \doteq \sup_{\delta>0} \inf_{0<x_o-x<\delta} f(x)\,. \tag{5.41}$$

2. *Se* $A \doteq [a\,,b]$ *e* $x_o = a$, *definiremos:*

$$\limsup_{x\to a^+} f(x) \doteq \inf_{\delta>0} \sup_{0<x-a<\delta} f(x)\,, \tag{5.42}$$

e

$$\liminf_{x\to a^+} f(x) \doteq \sup_{\delta>0} \inf_{0<x-a<\delta} f(x)\,, \tag{5.43}$$

   e de modo semelhante, se $x_o = b$, *definiremos:*

$$\limsup_{x\to b^-} f(x) \doteq \inf_{\delta>0} \sup_{0<b-x<\delta} f(x)\,, \tag{5.44}$$

e

$$\liminf_{x\to b^-} f(x) \doteq \sup_{\delta>0} \inf_{0<b-x<\delta} f(x)\,. \tag{5.45}$$

3. *O Exercício 47., da página 48 de [HLR], nos fornece algumas propriedades dos limites laterais acima.*

Com isto podemos introduzir a:

Definição 5.1.2 *Sejam* $A \subseteq \mathbb{R}$, *não vazio,* $f : A \to \mathbb{R}$ *função e* x_o *um ponto interior do conjunto* A.

Definimos as seguintes **derivadas laterais superiores e inferiores da função** f **no ponto** x_o, *indicadas e dadas por:*

$$D^+f(x_o) \doteq \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}, \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned} D^-f(x_o) &\doteq \limsup_{h \to 0^-} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \\ &= \limsup_{k \to 0^+} \frac{f(x_o)-f(x_o-k)}{k}, \end{aligned} \tag{5.47}$$

$$D_+f(x_o) \doteq \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}, \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned} D_-f(x_o) &\doteq \liminf_{h \to 0^-} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \\ &= \liminf_{k \to 0^+} \frac{f(x_o)-f(x_o-k)}{k}. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Observação 5.1.2

1. *Os limites laterais acima são denominadas* **derivadas laterais superiores e inferiores da função** f, **à direita e à esquerda no ponto** x_o, **respectivamente**.

2. *Notemos que:*

$$D^+f(x_o) \geq D_+f(x_o) \quad e \quad D^-f(x_o) \geq D_-f(x_o). \tag{5.50}$$

3. *Além disso, se*

$$D^+f(x_o) = D_+f(x_o) = D^-f(x_o) = D_-f(x_o), \tag{5.51}$$

segue que existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = D^+f(x_o) = D_+f(x_o) = D^-f(x_o) = D_-f(x_o), \tag{5.52}$$

e neste caso diremos que a função f *é* **diferenciável no ponto** x_o *e o valor do limite acima será dito* **derivada da função** f, **no ponto** x_o *e indicada por* $f'(x_o)$, *isto é,*

$$f'(x_o) \doteq D^+f(x_o) = D_+f(x_o) = D^-f(x_o) = D_-f(x_o). \tag{5.53}$$

4. *Notemos que, se*

$$D^+f(x_o) = D_+f(x_o), \tag{5.54}$$

diremos que a função f *é* **diferenciável à direita do ponto** x_o *e o valor comum acima será dito* **derivada à direita da função** f **em** x_o *e indicada por* $f_+{}'(x_o)$ *, isto é,*

$$f_+{}'(x_o) \doteq D^+f(x_o) = D_+f(x_o)\,. \tag{5.55}$$

5. *De modo análogo, se*

$$D^-f(x_o) = D_-f(x_o)\,, \tag{5.56}$$

diremos que a função f *é* **diferenciável à esquerda do ponto** x_o *e o valor comum acima será dito* **derivada à esquerda da função** f**, no ponto** x_o *e indicada por* $f_-{}'(x_o)$*, isto é,*

$$f_-{}'(x_o) \doteq D^-f(x_o) = D_-f(x_o)\,. \tag{5.57}$$

Com isto temos o:

Teorema 5.1.1 *Seja* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função monótona crescente em* $[a\,,b]$*.*
Então a função f *é diferenciável q.t.p. em* $[a\,,b]$*.*
Além disso, a função $f\,'$*, que existe em* $[a\,,b]$*, exceto em um conjunto de medida zero contido em* $[a\,,b]$*, será uma função Lebesgue mensurável em* $[a\,,b]$ *e vale a seguinte desigualdade:*

$$\int_{[a\,,b]} f\,' \leq f(b) - f(a)\,. \tag{5.58}$$

Demonstração:
Começaremos mostrando que o conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$, formado pelos pontos de $[a\,,b]$, para os quais duas derivadas laterais, dadas pelas expressões (5.46), (5.47), (5.48) e (5.49), serão diferentes, será um conjunto Lebesgue mensurável e tem medida zero, ou seja, a função f é diferenciável q.t.p. em $[a\,,b]$.
Para isto consideremos

$$E \doteq \{x \in [a\,,b]\,;\, D^+f(x) > D_-f(x)\}\,. \tag{5.59}$$

Notemos que o subconjunto de $[a\,,b]$ formado pelos pontos de $[a\,,b]$, onde as outras derivadas (5.46), (5.47), (5.48) e (5.49) são diferentes, são similares ao conjunto (5.59) e poderão ser tratados de modo análogo.
Deixaremos os detalhes destes casos como exercício para o leitor.
Observemos que se $x \in E$, isto é, se

$$D^+f(x) > D_-f(x)$$

então podemos encontrar

$$u_x\,, v_x \in \mathbb{Q}\,, \quad \text{com} \quad u_x > v_x\,,$$

tais que

$$D^+f(x) > u_x > v_x > D_-f(x)\,. \tag{5.60}$$

Para cada $u\,,v \in \mathbb{Q}$, com $u > v$, consideremos o seguinte conjunto:

$$E_{u,v} \doteq \{x \in [a\,,b]\,;\, D^+f(x) > u > v > D_-f(x)\}\,, \tag{5.61}$$

que, por (5.60), é não vazio.

Notemos que, de (5.60) e (5.61), segue que

$$E = \bigcup_{u\,,v\in\mathbb{Q}} E_{u\,,v}\,. \tag{5.62}$$

Se mostrarmos que

$$m^*(E_{u\,,v}) = 0\,, \quad \text{para todo} \quad u\,,v \in \mathbb{Q}\,, \tag{5.63}$$

teremos:

$$\begin{aligned} m^*(E) &\overset{(5.62)}{=} m^*\left(\bigcup_{u\,,v\in\mathbb{Q}} E_{u\,,v}\right) \\ &\overset{\text{Proposição } 3.2.2}{\leq} \sum_{u\,,v\in\mathbb{Q}} m\,(E_{u\,,v}) \\ &\overset{(5.63)}{=} 0\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja:} \qquad m^*(E) = 0\,.$$

Assim, do Lema 3.3.1, segue que o conjunto E será Lebesgue mensurável e

$$m(E) = 0\,,$$

e completando a 1.a parte da demonstração.

Mostremos que (5.63) ocorre.

Para isto , seja

$$s \doteq m^*(E_{u\,,v}) \overset{E_{u\,,v}\subseteq[a\,,b]}{\leq} \underbrace{m([a\,,b])}_{=b-a} < \infty\,. \tag{5.64}$$

Notemos que, dado $\varepsilon > 0$, do item 1. da Proposição 3.2.3, podemos encontrar um conjunto O, que é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, com

$$E_{u,v} \subseteq O\,,$$

satisfazendo:

$$m^*(O) \leq m^*(E_{u\,,v}) + \varepsilon = s + \varepsilon\,. \tag{5.65}$$

Observemos que, para cada $x \in E_{u,v} \subseteq O$, teremos

$$\begin{aligned} v &\overset{(5.61)}{>} D_{-}f(x) \\ &\overset{(5.49)}{=} \liminf_{k\to 0^+} \frac{f(x)-f(x-k)}{k} \\ &\overset{(5.39)}{=} \inf_{\delta>0} \sup_{0<k<\delta} \frac{f(x)-f(x-k)}{k}\,. \end{aligned}$$

Logo, podemos encontrar $k > 0$, suficientemente pequeno, de modo que

$$I_k \doteq [x-k\,,x] \subseteq O \tag{5.66}$$

e
$$\frac{f(x)-f(x-k)}{k} < v\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [x-k\,,x]\,. \tag{5.67}$$

Em particular, para cada $u\,,v \in \mathbb{Q}$, teremos

$$E_{u,v} = \bigcup_{k>0} I_k\,,$$

ou seja, a família $\mathscr{G} \doteq \{I_k\,;\,k>0\}$ é uma cobertura de Vitali do conjunto $E_{u,v}$.

Para cada $u\,,v \in \mathbb{Q}$, aplicando o Lema de Vitali (isto é, o Lema 5.1.1) à cobertura $\{I_k\,;\,k \in \mathbb{R}\}$ do conjunto $E_{u,v}$, segue que podemos encontrar uma subcoleção finita e disjunta, que indicaremos por

$$\{I_{k_1}\,, I_{k_2}\,, \cdots, I_{k_N}\}\,,$$

da coleção $\{I_k\,;\,k \in \mathbb{R}\}$, tal que

$$m^*\left(E_{u,v} \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_{k_n}\right) < \varepsilon\,. \tag{5.68}$$

Consideremos o conjunto:

$$A \doteq \bigcup_{n=1}^{N} \overset{o}{I}_{k_n} = \bigcup_{n=1}^{N} (x-i_n\,,x)\,. \tag{5.69}$$

Afirmamos que

$$m^*(A) > s-\varepsilon\,. \tag{5.70}$$

De fato suponhamos, por absurdo, que

$$m^*(A) \leq s-\varepsilon\,. \tag{5.71}$$

Com isto teríamos:

$$
\begin{aligned}
m^*(E_{u,v}) &= m^*\left[(E_{u,v} \setminus A) \cup A\right] \\
&\leq m^*(E_{u,v} \setminus A) + m^*(A) \\
&\overset{(5.69)}{=} m^*\left(E_{u,v} \setminus \bigcup_{n=1}^{N} \overset{\circ}{I}_{k_n}\right) + m^*(A) \\
&\overset{(5.68) \text{ e } (5.71)}{<} \varepsilon + (s - \varepsilon) \\
&= s \\
&\overset{(5.64)}{=} m^*(E_{u,v}),
\end{aligned}
$$

ou seja, $$m^*(E_{u,v}) < m^*(E_{u,v}),$$

o que seria um absurdo, logo vale (5.70).

Para cada $n \in \{1, 2, \cdots, N\}$, se

$$x_n \in I_{k_n} = [x - k_n, x],$$

teremos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} [f(x_n) - f(x_n - k_n)] &\overset{(5.67)}{<} \sum_{n=1}^{N} (v\, k_n) \\
&= v \sum_{n=1}^{N} \underbrace{k_n}_{=l(I_{k_n})} \\
&\overset{\bigcup_{n=1}^{N} I_{k_n} = E_{u,v}, \text{ e é disjunta}}{=} v \cdot m\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) \\
&\overset{\bigcup_{n=1}^{N} I_{k_n} = E_{u,v} \subseteq O}{<} v \cdot m(O) \\
&\overset{(5.65)}{<} v \cdot (s + \varepsilon). \qquad (5.72)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, se $x \in E_{u,v}$, segue que:

$$
\begin{aligned}
u &\overset{(5.61)}{<} D^+ f(x) \\
&\overset{(5.46)}{=} \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&\overset{(5.38)}{=} \inf_{\delta > 0} \sup_{0 < h < \delta} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \qquad (5.73)
\end{aligned}
$$

Logo, para $h > 0$, suficientemente pequeno, cada ponto

$$y \in A = \bigcup_{n=1}^{N} \overset{\circ}{I}_{k_n},$$

será o extremo inferior de um intervalo do tipo

$$J_h \doteq (y\,, y+h)\,, \tag{5.74}$$

que está contido em I_{k_n}, para algum $n \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, N\}$, de modo que

$$u < \frac{f(y+h) - f(y)}{h}\,. \tag{5.75}$$

Em particular,

$$A = \bigcup_{h>0} J_h\,,$$

ou seja, a família $\mathscr{F} \doteq \{J_h\,;\, h > 0\}$ será uma cobertura de Vitali do conjunto A.

Logo, aplicando-se novamente o Lema de Vitali (isto é, o Lema 5.1.1) ao conjunto $A = \bigcup\limits_{h>0} J_h$, podemos obter um subcoleção finita e disjunta, que indicaremos pro

$$\{J_1\,, J_2\,, \cdots\,, J_M\}\,,$$

da coleção $\bigcup\limits_{h>0} J_h$, de modo que

$$m^*\left(A \setminus \bigcup_{m=1}^{M} J_m\right) < \varepsilon\,. \tag{5.76}$$

Considerarmos

$$B \doteq \bigcup_{m=1}^{M} J_m\,. \tag{5.77}$$

Afirmamos que,

$$m^*(B) > s - 2\varepsilon\,. \tag{5.78}$$

De fato suponhamos, por absurdo, que

$$m^*(B) \leq s - 2\varepsilon\,. \tag{5.79}$$

Com isto teríamos:

$$\begin{aligned}
m^*(A) &= m^*([A \setminus B] \cup B) \\
&\leq \underbrace{m^*(A \setminus B)}_{\overset{(5.76)}{<}\ \varepsilon} + \underbrace{m^*(B)}_{\overset{(5.79)}{\leq}\ s-2\,\varepsilon} \\
&< \varepsilon + (s - 2\varepsilon) \\
&= s - \varepsilon \\
&\overset{(5.70)}{<} m^*(A)\,,
\end{aligned}$$

ou seja, $$m^*(A) < m^*(A)\,,$$

que é um absurdo, logo vale a desigualdade (5.78).

Observemos que, para cada $m \in \{1, 2, \cdots, M\}$, considerando-se

$$J_m \doteq (y_m, y_m + h_m)\,, \tag{5.80}$$

teremos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=m}^{N} [f(y_m + h_m) - f(y_m)] &\overset{(5.75)}{>} \sum_{m=1}^{M} (u\, h_m) \\
&= u \sum_{m=1}^{M} \underbrace{h_m}_{\overset{(5.80)}{=} l(J_m)} \\
&= u \sum_{m=1}^{M} m(J_m) \\
&\overset{\sum_{m=1}^{M} m(J_m) \geq m^*\left(\bigcup_{m=1}^{M} J_m\right)}{\geq} u \cdot m^* \left(\underbrace{\bigcup_{m=1}^{M} J_m}_{\overset{(5.77)}{=} B} \right) \\
&\overset{(5.78)}{>} u \cdot (s - 2\,\varepsilon)\,.
\end{aligned} \tag{5.81}$$

Observemos que,para cada $m \in \{1, 2, \cdots, M\}$, por construção (veja (5.74)) o intervalo J_m está contido em algum I_{k_n}.

Assim tomando-se a soma sobre todos os m's para os quais $J_m \subseteq I_n$ e utilizando o fato que a função f é monótona crescente, teremos:

$$\sum_{m \in \{1, 2, \cdots, M;\, J_m \subseteq J_{n_m}\}} [f(y_m + h_m) - f(y_m)] \leq f(x_{n_m}) - f(x_{n_m} - k_{n_m}),$$

implicando que

$$\sum_{m=1}^{M} f(y_m + h_m) - f(y_m) \leq \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - f(x_n - k_n)\,. \tag{5.82}$$

Logo, de (5.72) e (5.81), teremos

$$\begin{aligned}
v \cdot (s + \varepsilon) &\overset{(5.72)}{>} \sum_{n=1}^{N} [f(x_n + k_n) - f(x_n)] \\
&\overset{(5.82)}{\geq} \sum_{m=1}^{M} f(y_m + h_m) - f(y_m) \\
&\overset{(5.81)}{>} u \cdot (s - 2\varepsilon)\,.
\end{aligned} \tag{5.83}$$

Como isto (5.83) ocorre, para todo $\varepsilon > 0$, segue que

$$v \cdot s \geq u \cdot s. \tag{5.84}$$

Por outro lado, de (5.62) e (5.64), segue que

$$u > v \quad \text{e} \quad s \geq 0\,. \tag{5.85}$$

Logo, de (5.84) e (5.85), deveremos ter

$$s = 0$$

que, de (5.64), é o memso que

$$m^*(E_{u,v}) = 0\,,$$

mostrando (5.63) e assim, a função f é diferenciável q.t.p. em $[a\,,b]$.

Para mostrarmos a desigualdade (5.58), consideremos o conjunto $E \subseteq [a\,,b]$, formado por todos os pontos onde a função f não é diferenciável em $[a\,,b]$.

Sabemos da 1.a parte da demonstração que

$$E \in \mathscr{M} \quad \text{e} \quad m(E) = 0\,.$$

Conisdremso a funçao $g : [a\,,b] \setminus E \to \mathbb{R}$, dada por:

$$g(x) \doteq \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b] \setminus E\,. \tag{5.86}$$

Notemos que a função g está bem definida e, além disso, teremos:

$$g(x) = f\,'(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b] \setminus E\,. \tag{5.87}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $g_n : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\begin{aligned} g_n(x) &\doteq n \cdot \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] \\ &= \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,, \end{aligned} \tag{5.88}$$

onde estamos considerando

$$f(x) \doteq f(b)\,, \quad \text{para} \quad x \geq b\,. \tag{5.89}$$

Logo, da primeira parte, como a função f é diferenciável em $[a\,,b] \setminus E$, segue que

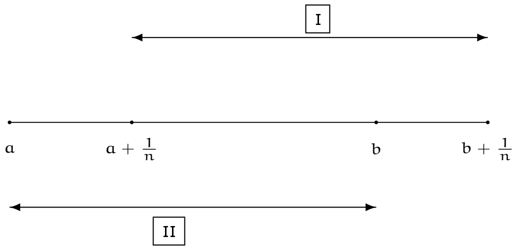
$$g_n \to g\,, \quad \text{q.t.p. em } [a\,,b], \text{ quando } n \to \infty\,. \tag{5.90}$$

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função g_n é função Lebesgue mensurável em $[a\,,b]$ (pois a função f é monótona crescente em $[a\,,b]$, logo .será Lebesgue mensurável em $[a\,,b]$).

Logo, do Corolário 3.5.3, segue que a função g será Lebesgue mensurável em $[a\,,b]$.

Notemos que, a função f sendo monótona crescente em $[a\,,b]$ implicará que, para cada $n \in \mathbb{N}$, de (5.88), segue que:

$$g_n \geq 0\,, \quad \text{em } [a\,,b]\,.$$



Logo, o Lema de Fatou (isto é do Teorema (4.3.1)), teremos:

$$\begin{aligned}
\int_{[a\,,b]} g &\overset{(4.235)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int_{[a\,,b]} g_n \\
&\overset{(5.88)}{=} \liminf_{n\to\infty} \int_{[a\,,b]} n\left[f\left(\cdot+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n})-f(\cdot)\right] \\
&= \liminf_{n\to\infty}\left\{n\left[\underbrace{\int_{[a\,,b]} f\left(\cdot+\frac{1}{n}\right)}_{\doteq\boxed{\mathrm{I}}}-\underbrace{\int_{[a\,,b]} f}_{\doteq\boxed{\mathrm{II}}}\right]\right\} \\
&\overset{\text{figura acima}}{=} \liminf_{n\to\infty}\left\{n\left[\int_{[b\,,b+\frac{1}{n}]} f-\int_{[a\,,a+\frac{1}{n}]} f\right]\right\} \\
&\overset{f \text{ é crescente}}{\leq} \liminf_{n\to\infty}\left\{n\left[\int_{[b\,,b+\frac{1}{n}]} f\left(b+\frac{1}{n}\right)-\int_{[a\,,a+\frac{1}{n}]} f(a)\right]\right\} \\
&= \liminf_{n\to\infty}\left[f\left(b+\frac{1}{n}\right)\cdot n\cdot\underbrace{\int_{[a\,,b]}\mathcal{X}_{[b\,,b+\frac{1}{n}]}}_{m([b\,,b+\frac{1}{n}])=\frac{1}{n}}-f(a)\cdot n\cdot\underbrace{\int_{[a\,,b]}\mathcal{X}_{[a\,,a+\frac{1}{n}]}}_{=m([a\,,a+\frac{1}{n}])=\frac{1}{n}}\right] \\
&= \liminf_{n\to\infty}\left[\underbrace{f\left(b+\frac{1}{n}\right)}_{\overset{(5.89)}{=}f(b)}-f(a)\right] \\
&= f(b)-f(a)\,.
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Logo, de (5.87) e (5.91), termos

$$\int_{[a,b]} f' \overset{g \overset{(5.87)}{=} f \text{ q.t.p. em } [a,b]}{=} \int_{[a,b]} g$$
$$\overset{(5.91)}{\leq} f(b) - f(a), \qquad (5.92)$$

mostrando a validade da desigualdade (5.58) e completando a demonstração.

□

5.2 Funções de Variação Limitada

Da Definição 3.5.2 e dos itens 2. e 3. da Observação (3.5.4), para $r \in \mathbb{R}$, temos que

$$r^+ \doteq \begin{cases} r, & \text{para} \quad r \geq 0, \\ 0, & \text{para} \quad r < 0 \end{cases} \qquad (5.93)$$

$$r^- \doteq \begin{cases} -r, & \text{para} \quad r < 0, \\ 0, & \text{para} \quad r > 0 \end{cases}, \qquad (5.94)$$

$$r^- \doteq |r| - r^+, \qquad (5.95)$$

$$r^+, r^- \geq 0. \qquad (5.96)$$

Observação 5.2.1 *Consideremos a função* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *e*

$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_o, x_1, \cdots, x_k = b\}$$

uma partição do intervalo $[a,b]$.

1. *Com isto podemos definir*

$$p_{\mathcal{P}} \doteq \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+, \qquad (5.97)$$

$$n_{\mathcal{P}} \doteq \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-, \qquad (5.98)$$

$$e \qquad t_{\mathcal{P}} \doteq n_{\mathcal{P}} + p_{\mathcal{P}}$$
$$\overset{(5.97),(5.98) \text{ e } (5.95)}{=} \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})|. \qquad (5.99)$$

Com isto temos que

$$0 \overset{(5.97) \text{ e } (5.98)}{\leq} p_{\mathcal{P}}, n_{\mathcal{P}}$$
$$\leq t_{\mathcal{P}} = p_{\mathcal{P}} + n_{\mathcal{P}}. \qquad (5.100)$$

2. *Podemos mostrar que*
$$f(b) - f(a) = p_{\mathcal{P}} - n_{\mathcal{P}}\,. \tag{5.101}$$
A verificação deste fato será deixada como exercício pra o leitor.

3. *Definamos*
$$P_a^b(f) \doteq \sup_{\mathcal{P}} p_{\mathcal{P}}\,, \tag{5.102}$$
$$N_a^b(f) \doteq \sup_{\mathcal{P}} n_{\mathcal{P}} \tag{5.103}$$
$$e \qquad T_a^b(f) \doteq \sup_{\mathcal{P}} t_{\mathcal{P}}\,, \tag{5.104}$$
onde os supremos são tomados sobre todas as partições $\mathcal{P}$ *do intervalo* $[a\,,b]$.

4. *Observemos que, de* (5.100)*, teremos:*
$$\begin{aligned} 0 &\leq P_a^b(f)\,, N_a^b(f) \\ &\leq T_a^b(f) \\ &\leq P_a^b(f) + N_a^b(f)\,. \end{aligned} \tag{5.105}$$

5. *Em algumas situações* $T_a^b(f)$ *poderá ser denotado por*
$$T_a^b \quad ou \quad T\,,$$
no caso de não queremos enfatizar a dependência em a função f*, ou não queremos enfatizar a dependência em a função* f *e ao intervalo* $[a\,,b]$*, respectivamente.*

De modo análogo podemos considerar
$$P_a^b\,, \qquad ou \qquad P \qquad e \qquad N_a^b \qquad ou \qquad N\,.$$

6. *Se* $c \in [a\,,b]$*, de* (5.96) *e das definições acima, termeos:*
$$0 \leq P_a^c \leq P_a^b\,, \qquad 0 \leq N_a^c \leq N_a^b \qquad e \qquad 0 \leq T_a^c \leq T_a^b\,. \tag{5.106}$$
A verificação deste fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Com isto podemos introduzir a:

Definição 5.2.1 *Na situação acima* P*, dado por* (5.102)*, será denominado* **variação positiva da função** f**, em** $[a\,,b]$.

De modo semelhante N*, dado por* (5.103)*, será denominado* **variação negativa da função** f**, em** $[a\,,b]$ *e* T*, dado por* (5.104)*, será denominado* **variação total da função** f**, em** $[a\,,b]$.

Definição 5.2.2 *Na situação acima, se*

$$0 \leq T < \infty, \tag{5.107}$$

diremos que a função f *é de* **variação limitada, em** $[a\,,b]$.

O conjunto formado por todas as funções de variação limitada definidas em $[a\,,b]$, *será denotado por* $BV([a\,,b]\,;\mathbb{R})$.

Com isto temos o

Lema 5.2.1 *Seja* $f \in BV([a\,,b]\,;\mathbb{R})$.

Então valem as seguintes identidades:

$$T_a^b(f) = P_a^b(f) + N_a^b(f)\,, \tag{5.108}$$

$$f(b) - f(a) = P_a^b(f) - N_a^b(f)\,. \tag{5.109}$$

Demonstração:

Como $f \in BV([a\,,b]\,;\mathbb{R})$ teremos

$$0 \leq T < \infty. \tag{5.110}$$

Seja

$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_o\,, x_1\,, \cdots\,, x_n = b\}$$

uma partição do intervalo $[a\,,b]$.

Então, do item 2. da Observação 5.2.1, segue que

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{P}} &\overset{(5.101)}{=} n_{\mathcal{P}} + f(b) - f(a) \\ &\leq \sup_{\mathscr{P}} n_{\mathcal{P}} + f(b) - f(a) \\ &\overset{(5.103)}{=} N_a^b(f) + f(b) - f(a)\,. \end{aligned} \tag{5.111}$$

Tomando-se o supremo do lado esquerdo de (5.111), sobre todas as partições $\mathcal{P}$ do intervalo $[a\,,b]$, obteremos:

$$P_a^b(f) \leq N_a^b(f) + f(b) - f(a)\,. \tag{5.112}$$

Como

$$N_a^b(f) \overset{(5.105)}{\leq} T_a^b(f) \overset{(5.110)}{<} \infty\,,$$

de (5.112), segue que

$$P_a^b(f) - N_a^b(f) \leq f(b) - f(a)\,. \tag{5.113}$$

De modo semelhante, do item 2. da Observação 5.2.1, segue que

$$\begin{aligned} n_{\mathcal{P}} &\overset{(5.101)}{=} p_{\mathcal{P}} - f(b) + f(a) \\ &\leq \sup_{\mathscr{P}} p_{\mathcal{P}} + f(b) - f(a) \\ &\overset{(5.102)}{=} P_a^b(f) + f(b) - f(a)\,. \end{aligned} \tag{5.114}$$

Tomando-se o supremo do lado esquerdo de (5.114), sobre todas as partições $\mathcal{P}$ do intervalo $[a\,, b]$, obteremos:

$$N_a^b(f) \leq P_a^b(f) - f(b) + f(a)\,. \tag{5.115}$$

Como

$$P_a^b(f) \overset{(5.105)}{\leq} T_a^b(f) \overset{(5.110)}{<} \infty\,,$$

de (5.115), segue que

$$\begin{aligned} & N_a^b(f) - P_a^b(f) \leq f(a) - f(b)\,, \\ \text{ou seja,} \qquad & P_a^b(f) - N_a^b(f) \geq f(b) - f(a)\,. \end{aligned} \tag{5.116}$$

Logo de (5.113) e (5.116), teremos

$$P_a^b(f) - N_a^b(f) = f(b) - f(a),$$

mostrando que a identidade (5.109) ocorre.

Por outro lado, do item 2. da Observação 5.2.1, teremos

$$\begin{aligned} T_a^b(f) &\overset{(5.104)}{\geq} t_{\mathcal{P}} \\ &\overset{(5.100)}{=} p_{\mathcal{P}} + n_{\mathcal{P}} \\ &\overset{(5.101)}{=} p_{\mathcal{P}} + [p_{\mathcal{P}} - (f(b) - f(a))] \\ &= 2\,p_{\mathcal{P}} + -[f(b) - f(a)] \\ &\overset{(5.109)}{=} 2\,p_{\mathcal{P}} - \left(P_a^b(f) - N_a^b(f)\right)\,. \end{aligned} \tag{5.117}$$

Tomando-se o supremo em ambos os lados de (5.117), sobre todas as partições $\mathcal{P}$ do intervalo $[a\,, b]$, obteremos:

$$\begin{aligned} T_a^b(f) &\geq 2\,P_a^b(f) - P_a^b(f) + N_a^b(f) \\ &= P_a^b(f) + N_a^b(f)\,. \end{aligned} \tag{5.118}$$

Mas, do item 4. da Observação 5.2.1, temos que

$$T_a^b(f) \overset{(5.105)}{\leq} P_a^b(f) + N_a^b(f)\,,$$

que, juntamente com (5.118), implicará que

$$T_a^b(f) = P_a^b(f) + N_a^b(f),$$

mostrando que a identidade (5.108) também ocorrerá, completando a demonstração.

$\square$

Para finalizar esta seção temos o:

Teorema 5.2.1 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Temos que $f \in BV([a, b]; \mathbb{R})$ *se, e somente se,*

$$f = g - h, \tag{5.119}$$

onde as funções $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *são funções monótonas crescentes em* $[a, b]$.

Demonstração:

Suponhamos que $f \in BV([a, b]; \mathbb{R})$, ou seja,

$$0 \leq T_a^b(f) < \infty. \tag{5.120}$$

Logo, para cada $x \in [a, b]$, de (5.102), (5.105) e (5.106), segue que

$$\begin{aligned} P_a^x, \ N_a^x &\overset{(5.105)}{\leq} T_a^x \\ &\overset{(5.106)}{\leq} T_a^b \\ &\overset{(5.120)}{<} \infty. \end{aligned} \tag{5.121}$$

Consideremos as funções $g, h_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$, dadas por:

$$g(x) \doteq P_a^x \quad \text{e} \quad h_1(x) \doteq N_a^x, \quad \text{para cada} \quad x \in [a, b]. \tag{5.122}$$

Observemos que, de (5.121), segue que as funçoes g e h_1 bem definidas.

Além disso, se

$$x, y \in [a, b], \quad \text{satisfazem} \quad x \geq y,$$

do item 6. da Observação 5.2.1, segue que

$$\begin{aligned} g(y) &\overset{(5.122)}{=} P_a^y \\ &\overset{(5.106)}{\leq} P_a^x \\ &\overset{(5.122)}{=} g(x) \end{aligned}$$

$$\text{e} \qquad \begin{aligned} h_1(y) &\overset{(5.122)}{=} N_a^y \\ &\overset{(5.106)}{\leq} N_a^x \\ &\overset{(5.122)}{=} h(x), \end{aligned}$$

mostrando que as funções g e h_1 são funções monótonas crescentes em $[a\,,b]$.

Notemos também que, para cada $x \in [a\,,b]$, do Lema (5.2.1) acima (conisderando $b \doteq x$), segue que

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\overset{(5.109)}{=} P_a^x - N_a^x \\ &\overset{(5.122)}{=} g(x) - h_1(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) - h_1(x) + f(a) \\ &= g(x) - [h_1(x) - f(a)]. \end{aligned} \tag{5.123}$$

Consoderemos a função $h : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$h(x) \doteq h(x) - f(a)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{5.124}$$

Como a função h_1 é monótona crescente em $[a\,,b]$, segue que a função h também será monótona crescente em $[a\,,b]$.

Além disso, de eqref5.122 e (5.124), teremos:

$$f(x) = g(x) - h(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,,$$

completando uma parte da demonstração.

Reciprocamente, suponhamos que

$$f = g - h\,, \quad \text{em } [a\,,b]\,, \tag{5.125}$$

onde as funções $g\,,h : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ são funções monótonas crecentes em $[a\,,b]$.

Notemos que, para

$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_o\,, x_1\,, \cdots\,, x_n = b\}$$

partição do intervalo $[a\,,b]$, teremos:

$$\begin{aligned} t_{\mathcal{P}} &\overset{(5.99)}{=} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\overset{(5.125)}{=} \sum_{i=1}^{n} |[g(x_i) - h(x_i)] - [g(x_{i-1}) - h(x_{i-1})]| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |[g(x_i) - g(x_{i-1})] - [h(x_i) - h(x_{i-1})]| \\ &\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |h(x_i) - h(x_{i-1})| \\ &\overset{g\,,h \text{ são crescentes}}{=} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - g(x_{i-1})] + \sum_{i=1}^{n} [h(x_i) - h(x_{i-1})] \\ &\overset{\text{somas telescópicas}}{=} [g(b) - g(a)] + [h(b) - h(a)]\,. \end{aligned} \tag{5.126}$$

Tomando-se o supremo do lado esquerdo de (5.126), sobre todas as partições $\mathscr{P}$ do intervalo $[a\,,b]$ segue que

$$T_a^b(f) \leq [g(b) - g(a)] + [h(b) - h(a)] < \infty\,,$$

mostrando, pel Definição 5.2.2, que $f \in BV([a\,,b])\,;\mathbb{R}$, completando a demonstração.

$\square$

Como consequência temos o:

Corolário 5.2.1 *Seja* $f \in BV([a\,,b]\,;\mathbb{R})$.
Então a função f *é diferenciável, q.t.p. em* $[a\,,b]$.

Demonstração:
Do Teorema 5.2.1 acima temos que

$$f = g - h\,, \tag{5.127}$$

onde as funções $g\,,h : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ são duas funções monótoncrescentes em $[a\,,b]$.

Logo, do Teorema 5.1.1, segue que as funções $g\,,h$ são diferenciáveis, q.t.p. em $[a\,,b]$ e assim, de (5.127), segue que a função f é diferenciável q.t.p. em $[a\,,b]$, como queríamos demonstrar.

$\square$

5.3 Diferenciação da Integral de Lebesgue

Nesta seção responderemos a segunda questão colocada no início deste capítulo (veja (5.2)).

Na verdade exibiremso duas versões do Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de Lebesgue, em intervalos fechados e limitados.

Observação 5.3.1 *Observemos que se a funçao* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função Lebesgue integrável em* $[a\,,b]$ *e* $x \in [a\,,b]$, *então a função* f *será uma função Lebesgue integrável em* $[a\,,x]$.

Com isto temos o:

Lema 5.3.1 *Seja* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função Lebesgue integrável em* $[a\,,b]$.
Conisderemos a função $F : [a.b] \to \mathbb{R}$, *dada por:*

$$F(x) \doteq \int_{[a\,,x]} f\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{5.128}$$

Então a função F *será contínua e de variação limitada em* $[a\,,b]$.

Demonstração:

Afirmamos que a função F é contínua em $[a\,,b]$.

Mostraremos que a função F é contínua em $x_o = a$.

Os casos

$$x_o \in (a\,,b)\,, \quad \text{ou} \quad x_o = b\,,$$

são semelhantes ao que faremos e serão deixados como exercício para o leitor.

Dado $\varepsilon > 0$, deveremos encontrar $\delta > 0$, de modo se

$$\text{para} \quad x \in [a\,,b]\,, \quad \text{satisfazendo} \quad 0 < x - \underbrace{a}_{=x_o} < \delta\,,$$

$$\text{deveremos ter:} \quad |F(x) - F(a)| < \varepsilon\,. \tag{5.129}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} F(x) - F(a) &\stackrel{(5.128)}{=} \int_{[a\,,x]} f - \underbrace{\int_{[a\,,a]} f}_{=0} \\ &= \int_{[a\,,x]} f \\ &\stackrel{(4.279)}{=} \int_{[a\,,x]} f^+ - \int_{[a\,,x]} f^-\,. \end{aligned} \tag{5.130}$$

Como, por hipotese, a função f é Lebesgue integrável em $[a\,,b]$, segue que as funções f^+ e f^-, que são não negativas, serão Lebesgue integráveis em $[a\,,b]$, ou seja, (veja (4.278))

$$0 \leq \int_{[a\,,x]} f^+\,, \int_{[a\,,x]} f^- < \infty\,. \tag{5.131}$$

Observemos que, da Proposição 4.3.5, segue que existem

$$\delta_+\,,\ \delta_- > 0\,,$$

de modo que se o conjunto $A \subseteq [a\,,b]$, satisfaz:

$$A \in \mathscr{M} \quad \text{e} \quad m(A) < \delta_+\,,\ \delta_-\,, \tag{5.132}$$

teremos

$$\int_A f^+\,, \int_A f^- < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{5.133}$$

Consideremos

$$\delta \doteq \min\{\delta_+\,, \delta_-\} > 0\,. \tag{5.134}$$

Logo, se $x \in [a\,,b]$ satisfaz

$$0 < x - \underbrace{x_o}_{=a} < \delta\,, \quad \text{ou seja,} \quad m([a\,,x]) < \delta \stackrel{(5.134)}{\leq} \delta_+\,, \delta_-\,, \tag{5.135}$$

teremos:

$$
\begin{aligned}
|F(x) - F(a)| &\overset{(5.130)}{=} \left| \int_{[a,x]} f^+ - \int_{[a,x]} f^- \right| \\
&\leq \int_{[a,x]} f^+ + \int_{[a,x]} f^- \\
&\overset{(5.135) \text{ e } (5.133)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,
\end{aligned}
$$

mostrando que a função F é contínua em $x_o = a$.

Mostremos agora que $F \in BV([a\,,b]\,;\mathbb{R})$.

Para isto seja

$$
\mathcal{P} \doteq \{a = x_o\,, x_1\,, \cdots, x_n = b\}
$$

uma partição do intervalo $[a\,,b]$.

Notemos que, dos itens 5. e 4. da Proposição 4.4.1, segue que:

$$
\begin{aligned}
t_{\mathcal{P}} &\overset{(5.99)}{=} \sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \\
&\overset{(5.130)}{=} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{[a,x_i]} f - \int_{[a,x_{i-1}]} f \right| \\
&\overset{(4.291)}{=} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{[x_{i-1},x_i]} f \right| \\
&\overset{f \leq |f| \text{ e } (4.290)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} |f| \\
&\overset{[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1},x_i], \text{ onde } (x_{i-1},x_i) \cap (x_{j-1},x_j) = \emptyset, \text{ se } i \neq j}{=} \int_{[a,b]} |f|\,.
\end{aligned}
\tag{5.136}
$$

Tomando-se o supremo do lado esquerdo de (5.136), sobre todas as partições $\mathcal{P}$ do intervalo $[a\,,b]$, obteremos:

$$
\begin{aligned}
T_a^b(F) &\overset{(5.104)}{=} \sum_{\mathcal{P}} t_{\mathcal{P}} \\
&\overset{(5.136)}{\leq} \int_{[a,b]} |f| \\
&\overset{(3.124)}{=} \int_{[a,b]} (f_+ + f_-) \\
&\overset{f \text{ é Lebesgue integrável em } [a,b]}{<} \infty\,,
\end{aligned}
$$

ou seja, da Definição 5.2.2 , teremos $F \in BV([a\,,b]\,;\mathbb{R})$, completando a demonstração.

$\square$

Temos também o:

Lema 5.3.2 *Seja* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função Lebesgue integrável em* $[a\,,b]$*, tal que*

$$\int_{[a\,,x]} f = 0\,, \tag{5.137}$$

para cada $x \in [a\,,b]$.

Então deveremos ter

$$f = 0\,, \qquad q.t.p. \ em \ [a\,,b]\,. \tag{5.138}$$

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que

$$f \neq 0\,,$$

em um subconjunto Lesbesgue mensurável $A \subseteq [a\,,b]$, que tem medida positiva, ou seja,

$$m(A) > 0\,.$$

Consideremos o caso em que

$$f(x) > 0\,, \quad \text{em } E \subseteq [a\,,b], \text{ com } m(E) > 0\,. \tag{5.139}$$

O caso em que

$$f(x) < 0\,, \quad \text{em } E \subseteq [a\,,b], \text{ com } m(E) > 0\,,$$

é semelhante ao acima e sua verificação será deixada como exercício para o leitor.

Dado $\varepsilon > 0$, do item 3. da Proposição 3.3.3, segue que podemos encontrar um conjunto

$$F \subseteq E\,, \quad \text{que é um subconjunto fechado em } [a\,,b]\,,$$

tal que

$$\begin{aligned}
& \underbrace{m(E \setminus F)}_{m(F) \leq m(E) \leq b-a < \infty \atop = m(E)-m(F)} < \varepsilon\,, \\
\text{ou seja,} \quad & m(F) + \varepsilon > m(E) > 0, \\
\text{em particular:} \quad & m(F) > 0\,.
\end{aligned} \tag{5.140}$$

Consideremos o conjunto

$$O \doteq (a\,,b) \setminus F\,. \tag{5.141}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{(5.137)}{=} \int_{[a,b]} f \\
&\overset{\text{item 6. da Proposição 4.4.1}}{=} \int_{(a,b)} f \\
&\overset{(a,b)=O\cup F \text{ e } O\cap F=\emptyset \text{ e o item 5. da Proposição 4.4.1}}{=} \int_F f + \int_O f ,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\int_O f &= -\int_F f \\
&\overset{f>0 \text{ em } F\subseteq E \text{ e } m(F)>0}{\neq} 0 .
\end{aligned}
\tag{5.142}
$$

Notemos que, da Proposição 2.5.3, como o conjunto O é aberto, segue que ele será uma reunião de uma coleção enumerável de intervalos abertos disjuntos do tipo (a_n , b_n), para $n \in \mathbb{N}$, ou seja

$$
O = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n , b_n) , \quad \text{onde} \quad (a_i , b_i) \cap (a_j , b_j) = \emptyset , \quad \text{se} \quad i \neq j . \tag{5.143}
$$

Logo, de (5.143) e do item 5. da Proposição 4.4.1, segue que:

$$
\int_O f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(a_i,b_i)} f . \tag{5.144}
$$

De (5.142) e (5.144), segue que

$$
\int_{(a_{n_o},b_{n_o})} f \neq 0, \tag{5.145}
$$

para algum $n_o \in \mathbb{N}$.

Notemos que, do item 5. da Proposição 4.4.1, teremos:

$$
\int_{[a,b_{n_o}]} f = \int_{[a,a_{n_o}]} f + \underbrace{\int_{[a_{n_o},b_{n_o}]} f}_{\overset{(5.145)}{\neq} 0} ,
$$

Com isto nos resta somente duas possibilidades:

$$
\text{ou} \qquad \int_{[a,a_{n_o}]} f \neq 0 , \tag{5.146}
$$

$$
\text{ou} \qquad \int_{[a,b_{n_o}]} f \neq 0 . \tag{5.147}
$$

Ocorrendo qualquer um dos casos (5.146) ou (5.147), deveremos ter

$$
\int_{[a,x]} f \neq 0 ,
$$

para algum $x \in [a\,,b]$, no caso ou $x = a_{n_o}$ ou $x = b_{n_o}$, o que contraria a hipótese (5.137) logo, um absurdo.

Portanto devefremos ter

$$f = 0\,, \quad \text{q.t.p. em } [a\,,b],$$

completando a demonstração.

□

Temos também o:

Lema 5.3.3 *Sejam* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *um função limitada e Lebesgue mensurável em* $[a\,,b]$.

Conisderemos a função $F : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, *dada por:*

$$F(x) \doteq \int_{[a\,,x]} f + C\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,, \tag{5.148}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ *está fixado.*

Então a função F *é diferenciável, q.t.p. em* $[a\,,b]$ *e, além disso, temos*

$$F' = f\,, \quad \textit{q.t.p. em } [a\,,b]\,. \tag{5.149}$$

Demonstração:

Como a função f é limitada e Lebesgue mensurável em $[a\,,b]$ e

$$m([a\,,b]) = b - a < \infty\,,$$

segue que a função f será Lebesgue integrável em $[a\,,b]$.

Logo a função F está bem definida.

Além disso, do Lema 5.3.1, temos que $F \in BV([a\,,b]\,;\,)$ e assim, do Corolário 5.2.1, segue que a função F é diferenciável, q.t.p. em $[a\,,b]$.

Mostremos agora, (5.149).

Para isto, seja $K \in \mathbb{R}$, tal que

$$|f(x)| \leq K\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{5.150}$$

Conisderemos a função $g : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$g(x) \doteq K\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{5.151}$$

Notemos que a função g é Lebesgue integrável em $[a\,,b]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\begin{aligned} f_n(x) &\doteq n \cdot \left[F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right] \\ &= \frac{F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)}{\frac{1}{n}}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \end{aligned} \tag{5.152}$$

Como a função F é diferenciável q.t.p. em $[a\,,b]$ segue, de (5.152) e (5.52), que

$$f_n \to F', \quad \text{q.t.p. em } [a\,,b], \text{ quando } n \to \infty\,. \tag{5.153}$$

Além disso, para cada $x \in [a\,,b]$, , do item 5. da Proposição 4.4.1, temos:

$$\begin{aligned}
f_n(x) &\overset{(5.152)}{=} n \cdot \left[F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F(x)\right] \\
&\overset{(5.148)}{=} \frac{1}{n}\left\{\left[\int_{[a\,,x+\frac{1}{n}]} f + C\right] - \left[\int_{[a\,,x]} f + C\right]\right\} \\
&\overset{(4.291)}{=} n \int_{[x\,,x+\frac{1}{n}]} f\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{assim:} \qquad |f_n(x)| &= \left|n \int_{[x\,,x+\frac{1}{n}]} f\right| \\
&\leq n \int_{[x\,,x+\frac{1}{n}]} \underbrace{|f|}_{\overset{(5.150)}{\leq} K} \\
&\leq n \int_{[x\,,x+\frac{1}{n}]} K \\
&= K\,n\, \underbrace{m\left(\left[x\,, x+\frac{1}{n}\right]\right)}_{=\frac{1}{n}} \\
&= K \\
&\overset{(5.151)}{=} g(x)\,.
\end{aligned}$$

Logo, do Teorema da convergência dominadada de Lebesgue (isto é, do Teorema 4.4.1), segue que, para cada $c \in [a\,,b]$, teremos:

$$\begin{aligned}
\int_{[a\,,c]} F' &\overset{(5.153)}{=} \int_{[a,c]} \lim_{n\to\infty} f_n \\
&\overset{(4.322)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{[a\,,c]} f_n \\
&\overset{(5.152)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{[a\,,c]} \frac{F\left(\cdot + \frac{1}{n}\right) - F(\cdot)}{\frac{1}{n}}\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left[\int_{[a\,,c]} F\left(\cdot+\frac{1}{n}\right)\, dx - \int_{[a\,,c]} F\right]
\end{aligned}$$

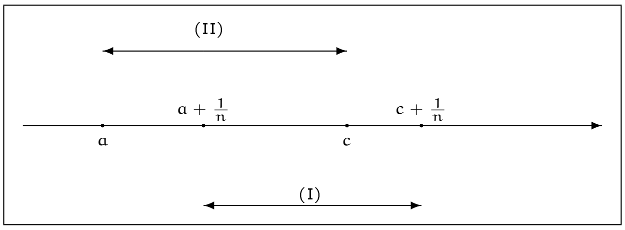
$$= \lim_{n\to\infty} n \left[\underbrace{\int_{[a+\frac{1}{n},c+\frac{1}{n}]} F}_{\doteq \boxed{\mathrm{I}}} - \underbrace{\int_{[a,c]} F}_{\doteq \boxed{\mathrm{II}}} \right]$$

$$\overset{\text{veja } \boxed{\mathrm{I}} \text{ e } \boxed{\mathrm{II}} \text{ na figura abaixo}}{=} \lim_{n\to\infty} n \left[\int_{[c,c+\frac{1}{n}]} F - \int_{[a,a+\frac{1}{n}]} F \right]$$

$$\overset{F \text{ é cont. em } [a,b], \text{ logo Riemann int. em } [a,b]}{=} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\mathcal{R}\left(\int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x)\,dx \right) - \frac{1}{n}\mathcal{R}\left(\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)\,dx \right) \right]$$

$$\overset{\text{do Cálculo 1}}{=} F(c) - \underbrace{F(a)}_{=C}$$

$$\overset{(5.148)}{=} \int_{[a,c]} f\,. \tag{5.154}$$



Portanto, de (5.154), segueque

$$\int_{[a,c]} (F' - f) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad c \in [a,b]\,. \tag{5.155}$$

Logo, de (5.155) e do Lema 5.3.2, segue que

$$F' = f\,, \quad \text{q.t.p. em } [a,b]\,,$$

completando a demonstração.

□

Para finalizar esta seção temos o:

Teorema 5.3.1 *Sejam* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função Lebesgue integrável em* $[a,b]$. *Consideremos a função* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$F(x) \doteq \int_{[a,x]} f + C\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a,b]\,, \tag{5.156}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ *está fixado.*

Então a funçao F *é diferenciável q.t.p. em* $[a\,,b]$ *e, além disso, teremos*

$$F' = f\,, \quad \textit{q.t.p. em } [a\,,b]\,,$$

isto é,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{[a\,,x]} f\right) = f(x)\,, \quad \textit{q.t.p. em } [a\,,b]\,. \tag{5.157}$$

Demonstração:

Lembremos que, de (3.124), temos:

$$f = f^+ - f^-\,.$$

Logo se provarmos o resultado acima para funções Lebesgue integráveis, não negativas, em $[a\,,b]$ ele valerá para as funções f^+ e f^- e portanto para a função f, isto é, podemos supor, sem perda de generalidade que

$$f \geq 0\,, \quad \text{em } [a\,,b]\,. \tag{5.158}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos a função $f_n : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f_n(x) \doteq \begin{cases} f(x)\,, & \text{se} \quad f(x) \leq n\,, \\ n\,, & \text{se} \quad f(x) > n \end{cases}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{5.159}$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que a função f_n será limitada e Lebesgue integrável em $[a\,,b]$.

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$f - f_n \geq 0\,, \quad \text{em } [a\,,b]\,. \tag{5.160}$$

Considerarmos a função $G_n : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\begin{aligned} G_n(x) &\doteq \int_{[a\,,x]} f - f_n \\ &= \underbrace{\int_{[a\,,x]} f}_{\overset{(5.156)}{=} F(x) - C} - \int_{[a\,,x]} f_n \\ &= F(x) - C - \int_{[a\,,x]} f_n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,, \end{aligned} \tag{5.161}$$

que, de (5.160), teremos que função G_n será monótona crescente em $[a\,,b]$.

Em particular, de (5.161), segue que

$$F(x) = G_n(x) + C + \int_{[a\,,x]} f_n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{5.162}$$

Logo, do Teorema 5.1.1, segue que a função G_n será diferenciável q.t.p. em $[a\,,b]$ e, uma vez mais por ser monótona crescente em $[a\,,b]$, teremos

$$G_n{}' \geq 0\,, \qquad \text{q.t.p. em } [a\,,b]\,. \tag{5.163}$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que a função f_n é limitada e Lebesgue mensurável em $[a\,,x]$ (pois é Lebesgue integrável em $[a\,,b]$).

Logo, do Lema 5.3.3, teremos que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{[a\,,x]} f_n\right) = f_n(x)\,, \qquad \text{q.t.p. em } [a\,,b]\,. \tag{5.164}$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned} F'(x) &\overset{(5.162)}{=} \frac{d}{dx}\left[G_n(x) + C + \int_{[a\,,x]} f_n\right] \\ &= G_n(x) + \frac{d}{dx}\left(\int_{[a\,,x]} f_n\right) \\ &\overset{(5.164)}{=} \underbrace{G_n{}'(x)}_{\geq 0} + f_n(x) \\ &\geq f_n(x)\,, \qquad \text{q.t.p. em } [a\,,b]\,. \end{aligned} \tag{5.165}$$

Como o lado esquerdo da desigualdade (5.165) acima não depende de $n \in \mathbb{N}$, passando o limite, quando $n \to \infty$, no lado direito de (5.165), obteremos:

$$F'(x) \geq f(x)\,, \qquad \text{q.t.p. em } [a\,,b]\,, \tag{5.166}$$

que implicará que

$$\begin{aligned} \int_{[a\,,b]} F' &\geq \int_{[a\,,b]} f \\ &\overset{(5.156)}{=} F(b) - C\,. \end{aligned} \tag{5.167}$$

Por outro lado, como

$$f \geq 0\,, \qquad \text{em } [a\,,b]\,,$$

segue que a função F (veja (5.156)) é monótona crescente em $[a\,,b]$.

Logo, do Teorema 5.1.1, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{[a\,,b]} F' &\overset{(5.58)}{\leq} F(b) - \underbrace{F(a)}_{\overset{(5.156)}{=} C} \\ &= F(b) - C \\ &\overset{(5.156)}{=} \int_{[a\,,b]} f\,. \end{aligned} \tag{5.168}$$

Logo de (5.167) e (5.168), segue que:

$$\int_{[a,b]} F' \overset{(5.167)\ \text{e}\ (5.168)}{=} \int_{[a,b]} f,$$

ou seja,

$$\int_{[a,b]} (F' - f) = 0. \tag{5.169}$$

Como, de (5.166), temos que

$$F' - f \geq 0, \quad \text{q.t.p. em } [a,b],$$

segue que

$$F' - f = 0, \quad \text{q.t.p. em } [a,b],$$

ou ainda,

$$F' = f, \quad \text{q.t.p. em } [a,b],$$

como queríamos demonstrar.

□

5.4 Funções Absolutamente Contínuas

Começaremos introduzindo a:

Definição 5.4.1 *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função.*

Diremos que a função f *é* **absolutamente contínua em** $[a,b]$*, se dado* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$*, de modo que, para qualquer coleção finita de intervalos*

$$\{(x_i, x_i'); i \in \{1, 2, \cdots, N\}\} \subseteq [a,b],$$

satisfazendo

$$(x_i, x_i') \cap (x_j, x_j') = \emptyset, \quad \textit{para} \quad i \neq j, \quad \textit{com} \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, N\} \tag{5.170}$$

e

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i' - x_i| < \delta, \tag{5.171}$$

deveremos ter

$$\sum_{i=1}^{N} |f(x_i') - f(x_i)| < \varepsilon. \tag{5.172}$$

Observação 5.4.1 *Observemos que se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *são funções absolutamente contínuas em* $[a,b]$*, então as funções*

$$\lambda \cdot f \quad \textit{e} \quad f + g$$

também serão funções absolutamente contínuas em $[a,b]$*.*

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Temos a

Proposição 5.4.1 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função absolutamente contínua em* $[a, b]$.

Então a função f *é uniformemente contínua em* $[a, b]$*, em particular, contínua em* $[a, b]$.

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, do fato da função f ser absolutamente contínua em $[a, b]$, podemos encontrar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que se

$$\{(x_i, x_i'); i \in \{1, 2, \cdots, N\}\} \subseteq [a, b], \quad \text{para} \quad i \in \{1, 2, \cdots, N\},$$

satisfazendo

$$(x_i, x_i') \cap (x_j, x_j') = \emptyset, \quad \text{para} \quad i \neq j, \quad \text{com} \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, N\}$$

e

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i' - x_i| < \delta, \tag{5.173}$$

deveremos ter

$$\sum_{i=1}^{N} |f(x_i') - f(x_i)| < \varepsilon. \tag{5.174}$$

Sejam $x, y \in [a, b]$, satisfazendo

$$|x - y| < \delta. \tag{5.175}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$x < y.$$

Logo se considerarmos, na situação acima,

$$x_1 \doteq x \quad \text{e} \quad x_1' \doteq y,$$

segue que

$$|x_1' - x_1| = |y - x| \overset{(5.173)}{<} \delta.$$

Logo, de (5.174), segue que

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(x_1') - f(x_1)| \\ &\overset{(5.174)}{<} \varepsilon, \end{aligned} \tag{5.176}$$

mostrando que a função f é uniformemente contínua em $[a, b]$, completando a demonstração.

□

O resultado a seguir nos fornece uma classe de funções que são absolumente cotínuas em $[a, b]$, a saber:

Proposição 5.4.2 *Seja* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, *de modo que existe* $M > 0$, *tal que*

$$|f(y) - f(x)| \leq M\,|y - x|\,, \quad \textit{para cada} \quad x, y \in [a\,,b]\,. \tag{5.177}$$

Então a função f *será absolutamente contínua em* $[a\,,b]$.

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos

$$\delta \doteq \frac{\varepsilon}{M} > 0\,. \tag{5.178}$$

Logo, se

$$\{(x_i\,,x_i')\,;\, i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}\} \subseteq [a\,,b]\,, \quad \text{para} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}\,,$$

satisfazendo

$$(x_i\,,x_i') \cap (x_j\,,x_j') = \emptyset\,, \quad \text{para} \quad i \neq j\,, \quad \text{com} \quad i, j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}$$

e

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i' - x_i| < \delta\,, \tag{5.179}$$

teremos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} |f(x_i') - f(x_i)| &\overset{(5.177)}{\leq} \sum_{i=1}^{N} M\,|x_i' - x_i| \\
&= M \sum_{i=1}^{N} |x_i' - x_i| \\
&\overset{(5.178)}{<} M\,\delta \\
&\overset{(5.179)}{=} M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

mostrando que a função f é absolutamente contínua em $[a\,,b]$, como queríamos demonstrar.

□

Observação 5.4.2 *Uma função que satisfaz a propriedade* (5.177) *é denominada* **função Lipschtiziana em** $[a\,,b]$ *e a constante* M, *em* (5.177), *será denominada* **constante de Lipschtiz**.

Como consequência temos o:

Corolário 5.4.1 *Seja* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *diferenciável em* $[a\,,b]$, *tal que*

$$\sup_{x \in [a\,,b]} |f\,'(x)| < \infty\,. \tag{5.180}$$

Então a função f *será absolutamente contínua em* $[a\,,b]$.

Demonstração:

De fato, dados $x, y \in [a, b]$, $x < y$, do Teorema do valor médio (da disciplina de Cálculo I), segue que podenos encontrar $c_{x,y} \in [x, y]$, de modo que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c_{x,y}) . \tag{5.181}$$

Em particular, teremos:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\overset{(5.181)}{=} |f'(c_{x,y})| \, |y - x| \\ &\leq \underbrace{\sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|}_{\doteq M \overset{(5.180)}{<} \infty} |y - x| \\ &\leq M \, |y - x| . \end{aligned}$$

Logo, da Proposição 5.4.2 acima, segue que a função f será absolutamente contínua em $[a, b]$, completando a demonstração.

□

Uma outra coleção, particularmente importante, de funções absolutamente contínuas em $[a, b]$ é dada pela:

Proposição 5.4.3 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Lebesgue integrável em* $[a, b]$ *e considere* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$F(x) \doteq \int_{[a,x]} f + C , \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b] , \tag{5.182}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ *está fixado.*

Então a função F *é absolutamente contínua em* $[a, b]$.

Demonstração:

Como a função f é Lebesgue integrável em $[a, b]$, segue que a função $|f|$ também será Lebesgue integrável em $[a, b]$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, da Proposição 4.3.5, podemos encontrar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que se $A \subseteq [a, b]$, $A \in \mathscr{M}$ satisfaz

$$m(A) < \delta , \quad \text{então teremos:} \quad \int_A |f| < \varepsilon . \tag{5.183}$$

Logo se a família

$$\{I_i \doteq (x_i, x_i') ; i \in \{1, 2, \cdots, N\} \subseteq [a, b] ,$$

satisfaz

$$(x_i, x_i') \cap (x_j, x_j') = \emptyset , \quad \text{para} \quad i \neq j \quad \text{como} \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, N\}$$

e

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i' - x_i| < \delta \tag{5.184}$$

então tomando-se

$$A \doteq \bigcup_{i=1}^{N} I_i = \bigcup_{i=1}^{N} (x_i\,,x_i')\,, \tag{5.185}$$

teremos

$$\begin{aligned} m(A) &\overset{(5.185)}{=} m\left(\bigcup_{i=1}^{N} I_i\right) \\ &\overset{\text{os conjuntos } I_i \text{ são, dois a dois, disjuntos}}{=} \sum_{i=1}^{N} m\,(I_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{l(I_i)}_{=|x_i'-x_i|} \\ &= \sum_{i=1}^{N} |x_i' - x_i| \overset{(5.184)}{<} \delta\,. \end{aligned} \tag{5.186}$$

Logo, de (5.183), segue que

$$\int_A |f| < \varepsilon\,. \tag{5.187}$$

Logo, das considerações acima e do item 5. da Proposição 4.4.1, teremos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} |F(x_i') - F(x_i)| &\overset{(5.182)}{=} \sum_{i=1}^{N} \left| \left[\int_{[a\,,x_i']} f - C\right] - \left[\int_{[a\,,x_i]} f - C\right] \right| \\ &\overset{(4.291)}{=} \sum_{i=1}^{N} \left| \int_{[x_i\,,x_i']} f \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \int_{I_i} |f| \\ &\overset{\text{os conjuntos } I_i \text{ são, dois a dois, disjuntos e (4.291)}}{=} \int_{\bigcup_{i=1}^{N} I_i} |f| \\ &\overset{(5.185)}{=} \int_A |f| < \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 5.4.1, que a função F é absolutamente contínua em $[a\,,b]$, completando a demonstração.

□

Observação 5.4.3

1. *A Proposição 5.4.2 acima, nos diz que uma integral indefinida de uma função Lebesgue integrável em* $[a\,,b]$, *é uma função absolutamente contínua em* $[a\,,b]$.

2. *Nosso objetivo a seguir será mostrar que vale a recíproca da Proposição 5.4.2 acima, ou seja, que toda função absolutamente contínua em* $[a\,,b]$, *pode ser escrita como uma integral indefinida, de alguma função Lebesgue integrável em* $[a\,,b]$.

Para isto mostrar isto, começaremos pelo:

Lema 5.4.1 *Seja* $f:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ *uma função absolutamente contínua em* $[a\,,b]$. *Então* $f\in BV([a\,,b]\,;\mathbb{R})$.

Demonstração:

De fato, se a função f é função absolutamente contínua em $[a\,,b]$, dado

$$\varepsilon = 1\,,$$

da Definição 5.4.1, podemos encontrar $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, tal que se

$$\{(x_i\,,x_i')\,;\,i\in\{1\,,2\,,\cdots\,,N\}\}\subseteq[a\,,b]\,,$$

satisfazendo

$$(x_i\,,x_i')\cap(x_j\,,x_j')=\emptyset\,,\quad\text{para}\quad i\neq j\,,\quad\text{com}\quad i,j\in\{1\,,2\,,\cdots\,,N\}$$

e

$$\sum_{i=1}^{N}|x_i'-x_i|<\delta\,,\tag{5.188}$$

deveremos ter

$$\sum_{i=1}^{N}|f(x_i')-f(x_i)|<\varepsilon=1\,.\tag{5.189}$$

Dada uma partição, que indicaremos por

$$\mathcal{P}\doteq\{x_o=a\,,x_1\,,\cdots\,,x_M=b\}\,,$$

do intervalo $[a\,,b]$ podemos introduzir, se necessário, um número finito de pontos a esta partição, e denotaremos esta nova partição também por $\mathcal{P}$, de modo que possamos escrever o intervalo $[a\,,b]$ como uma reunião disjunta dos intervalos

$$I_1,\cdots\,,I_K\subseteq[a\,,b]\,,$$

onde

$$m(I_j)<\delta\,,\quad\text{para cada}\quad j\in\{1\,,2\,,\cdots\,,K\}\,,\tag{5.190}$$

onde $K \in \mathbb{N}$ é o maior natural menor que $1 + \dfrac{b-a}{\delta}$, isto é,

$$K \leq 1 + \frac{b-a}{\delta} < K + 1 \,. \tag{5.191}$$

Deste modo teremos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq t_{\mathcal{P}} \\ &\overset{(5.99)}{=} \sum_{i=1}^{K} \underbrace{|f(x_i) - f(x_{i-1})|}_{\leq 1\,,\ \text{por (5.189), pois } m(I_i)<\delta} \\ &\leq K \,. \end{aligned} \tag{5.192}$$

Tomando-se o supremo do lado esquerdo de (5.192), sobre todas as partições do intervalo $[a\,,b]$ (que tem a propriedade acima), segue que

$$0 \leq T_a^b(f) \leq K < \infty \,,$$

mostrando, pela Definição 5.2.2, que a função f é de variação limitada em $[a\,,b]$, completando a demonstração.

□

Como consequência do Lema 5.4.1 acima e do Corolário 5.2.1, segue o:

Corolário 5.4.2 *Seja* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função absolutamente contínua em* $[a\,,b]$.
Então f *é diferenciável q.t.p. em* $[a\,,b]$.

Temos também o:

Lema 5.4.2 *Seja* $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função absolutamente contínua em* $[a\,,b]$ *tal que*

$$f' = 0 \,, \qquad \textit{q.t.p. em } [a\,,b] \,. \tag{5.193}$$

Então a função f *é constante em* $[a\,,b]$.

Demonstração:

Basta mostrar que

$$f(c) = f(a) \,, \qquad \text{para todo} \quad c \in [a\,,b] \,. \tag{5.194}$$

Dado $c \in [a\,,b]$, ,e (5.193), podemos encontrar $E \subseteq [a\,,c]$, com $E \in \mathscr{M}$, com

$$m(E) = c - a \,, \tag{5.195}$$

de modo que se

$$f'(x) = 0 \,, \quad \text{se, e somente se,} \quad x \in E \,. \tag{5.196}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como a função f é função absolutamente contínua em $[a\,,b]$, podemos encontrar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

$$\{(x_i\,,x_i')\,;\,i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}\} \subseteq [a\,,b]\,,$$

satisfazendo

$$(x_i\,,x_i') \cap (x_j\,,x_j') = \emptyset\,, \quad \text{para} \quad i \neq j\,, \quad \text{com} \quad i\,,j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}$$

e

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i' - x_i| < \delta\,, \tag{5.197}$$

deveremos ter

$$\sum_{i=1}^{N} |f(x_i') - f(x_i)| < \varepsilon\,. \tag{5.198}$$

Por outro lado, dado $\eta > 0$, para cada $x \in E$, de (5.196), temos que

$$f\,'(x) = 0\,.$$

Logo, do item 3. da Observação 5.1.2, segue que podemos encontrar $h > 0$, suficientemente pequeno, tal que

$$I_h \doteq [x\,,x+h] \subseteq [a\,,c] \tag{5.199}$$

$$\text{e} \quad \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| < \eta$$

$$\text{ou seja,} \quad |f(x+h) - f(x)| < \eta\,h\,. \tag{5.200}$$

Com isto teremos que a família

$$\{I_h\,;\,h > 0\} \tag{5.201}$$

será uma cobertura de Vitali do conjunto E (que, de (5.195), tem medida de Lebesgue finita).

Logo, do Lema 5.1.1, segue que existe uma coleção finita e disjunta, que indicaremos por

$$\{I_1, \cdots\,, I_N\}\,, \quad \text{onde} \quad I_i \doteq [x_i\,,y_i]\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,N\}\,, \tag{5.202}$$

da coleção (5.201) acima, tal que

$$m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i\right) < \delta\,. \tag{5.203}$$

Podemos renomear x_i's de modo que

$$x_i < x_{i+1}, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, N\}. \tag{5.204}$$

Notemos que, de (5.202) e (5.199), teremos

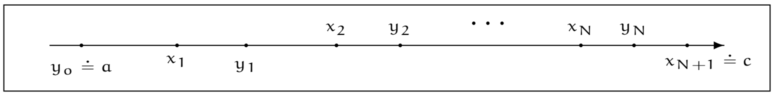
$$|x_i - y_i| < h, \quad \text{para cada} \quad i \in \{0, 1, \cdots, N\}. \tag{5.205}$$

Como os intervalos de (5.202) são, dois a dois, disjuntos, de (5.204), deveremos ter:

$$y_o \doteq a \leq x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < x_N < y_N \leq c \doteq x_{N+1}. \tag{5.206}$$

Logo, de (5.203), segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N} |x_{i+1} - y_i| &\stackrel{\text{figura abaixo}}{=} m\left\{[a, c] \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{N} I_i \cup [y_o, x_1] \cup [y_N, x_{N+1}]\right]\right\} \\
&\stackrel{m([a,c]) \stackrel{(5.195)}{=} m(E)}{=} m\left\{E \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{N} I_i \cup [y_o, x_1] \cup [y_N, x_{N+1}]\right]\right\} \\
&\stackrel{\cup_{i=1}^{N} I_i \subseteq \cup_{i=1}^{N} I_i \cup [y_o, x_1] \cup [y_N, x_{N+1}]}{\leq} m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i\right) \\
&\stackrel{(5.203)}{<} \delta.
\end{aligned} \tag{5.207}$$



Mas

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} |f(y_i) - f(x_i)| &\stackrel{(5.205) \text{ e } (5.200)}{\leq} \sum_{i=1}^{N} \eta\, |y_i - x_i| \\
&= \eta \sum_{i=1}^{N} |y_i - x_i| \\
&\stackrel{\text{os intervalos } I_i \text{ são dois a dois disjuntos e } \cup_{i=1}^{N} I_i \subseteq [a, c]}{<} \eta\, (c - a) \\
&\stackrel{c \in [a, b]}{\leq} \eta(b - a).
\end{aligned} \tag{5.208}$$

Por outro lado, de (5.207) (veja (5.197)) e (5.198), teremos:

$$\sum_{i=0}^{N} |f(x_{i+1}) - f(y_i)| < \varepsilon. \tag{5.209}$$

Logo

$$\begin{aligned}
|f(c) - f(a)| &\overset{\text{de (5.206): } y_o = a \text{ e } x_{N+1} = c}{=} |f(x_{N+1}) - f(y_o)| \\
&\overset{\text{soma telescópica}}{=} \left| \sum_{i=0}^{N} [f(x_{i+1}) - f(y_i)] + \sum_{i=1}^{N} [f(y_i) - f(x_i)] \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{N} |f(x_{i+1}) - f(y_i)| + \sum_{i=1}^{N} |f(y_i) - f(x_i)| \\
&\overset{(5.209) \text{ e } (5.208)}{<} \varepsilon + \eta\,(b - a)\,.
\end{aligned} \tag{5.210}$$

Como $\varepsilon\,, \eta > 0$ são arbitirários, de (5.210), segue que

$$|f(c) - f(a)| = 0\,,$$

ou seja,

$$f(c) = f(a)\,, \quad \text{para cada} \quad c \in [a\,,b]\,,$$

mostrando que a função f é constante em $[a\,,b]$, como queríamos demonstrar.

□

Para o próximo resultado introduziremos a

Definição 5.4.2 *Diremos que uma função* $F : [a\,,b] \to \mathbb{R}$*, diferenciável q.t.p. em* $[a\,,b]$*, é uma* **integral indefinida em** $[a\,,b]$*, se ela puder ser escrita da seguinte forma*

$$F(x) = \int_{[a\,,x]} F' + F(a)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{5.211}$$

Para finalizar a seção temos o:

Teorema 5.4.1 *Sejam* $F : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *uma função.*

A função F *é uma integral indefinida em* $[a\,,b]$ *se, e somente se, a função* F *é absolutamente contínua em* $[a\,,b]$*.*

Demonstração:

Suponhamos que a função F é uma integral indefinida.

Logo, da Proposição 5.4.2, segue que a função F é absolutamente contínua em $[a\,,b]$.

Reciprocamente, suponhamos que a função F é absolutamente contínua em $[a\,,b]$.

Logo, do Lema 5.4.1, segue que $F \in BV([a\,,b]\,;\mathbb{R})$.

Assim, do Teorema 5.2.1, podemos encontrar duas funções, que denotaremos por, $F_1\,,F_2 : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, monótonas crescentes em $[a\,,b]$, tais que

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [a\,,b]\,. \tag{5.212}$$

Notemos que, do fato que $F_1, F_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ serem funções monótonas crescentes em $[a, b]$ segue que

$$F_1'(x), F_2'(x) \geq 0, \quad \text{q.t.p. em } [a, b]. \tag{5.213}$$

Logo, do Teorema 5.1.1, segue que as funções F_1 e F_2 são difereniáveis, q.t.p. em $[a, b]$ e, de (5.212), teremos que a função F será difereniável, q.t.p. em $[a, b]$.

Além disso

$$\begin{aligned} F'(x) &\overset{(5.212)}{=} F_1'(x) + F_2'(x), \quad \text{q.t.p em } [a, b] \\ \text{implicando em: } \quad |F'(x)| &\leq \underbrace{|F_1'(x)|}_{\overset{(5.213)}{=} F_1'(x)} + \underbrace{|F_2'(x)|}_{\overset{(5.213)}{=} F_2'(x)}, \quad \text{q.t.p em } [a, b], \end{aligned} \tag{5.214}$$

que, pelo Teorema 5.1.1, implicará em:

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} |F'| &\overset{(5.214)}{\leq} \int_{[a,b]} (F_1' + F_2') \\ &= \int_{[a,b]} F_1' + \int_{[a,b]} F_2' \\ &\overset{(5.58)}{\leq} [F_1(b) - F_1(a)] + [F_2(b) - F_2(a)] < \infty, \end{aligned} \tag{5.215}$$

mostrando que a função F' é Lebesgue integrável em $[a, b]$.

Consideremos a função $G : [a, b] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$G(x) \doteq \int_{[a,x]} F', \quad x \in [a, b], \tag{5.216}$$

que está bem definida, por (5.215).

Então, da Proposição 5.4.2, segue que a função G é absolutamente contínua em $[a, b]$.

Consideremos agora a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) \doteq F(x) - G(x), \quad \text{para cada} \quad x \in [a, b]. \tag{5.217}$$

Como a função F e função G são absolutamente contínuas em $[a, b]$, temos que a função f será absolutamente contínua em $[a, b]$ logo , do Corolário 5.4.2, segue que, a função f será difererenciável q.t.p. em $[a, b]$.

Além disso, do Teorema 5.3.1, segue que

$$\begin{aligned} f'(x) &\overset{(5.217)}{=} F'(x) - G'(x) \\ &\overset{(5.157)}{=} F'(x) - F'(x) \\ &= 0, \quad \text{q.p.t. em } [a, b]. \end{aligned} \tag{5.218}$$

Portanto, do Lema 5.4.2, segue que a função f deverá ser constante em $[a\,,b]$, isto é, existe $C \in \mathbb{R}$, tal que

$$F(x) - G(x) \overset{(5.217)}{=} f(x) = C\,, \quad \text{para} \quad \in [a\,,b]\,. \tag{5.219}$$

Como,

$$G(a) \overset{(5.216)}{=} 0$$

segue que:

$$C = f(a) = F(a)\,.$$

Assim teremos:

$$\begin{aligned} F(x) &\overset{(5.217)}{=} G(x) - F(a) \\ &\overset{(5.216)}{=} \int_{[a\,,x]} F' + F(a)\,, \end{aligned}$$

mostrando que a funçaõ F é uma integral indefinida, completando a demonstração.

□

Como consequência temos o:

Corolário 5.4.3 *Toda função absolutamente contínua em* $[a\,,b]$ *é a integral indefinida de sua derivada em* $[a\,,b]$.

5.5 Funções Convexas

Começaremos introduzindo a

Definição 5.5.1 *Diremos que a função* $\varphi : (a\,,b) \to \mathbb{R}$ *é uma* **função convexa em** $(a\,,b)$, *se dados*

$$x\,,y \in (a\,,b) \quad e \quad \lambda \in [0\,,1]\,,$$

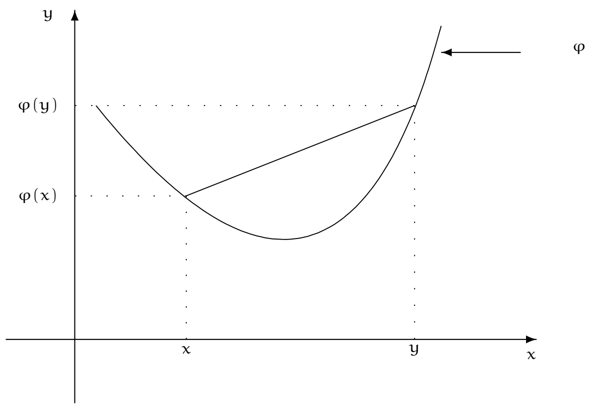
teremos

$$\varphi\,[\lambda\,x + (1-\lambda)\,y] \leq \lambda\,\varphi(x) + (1-\lambda)\,\varphi(y)\,. \tag{5.220}$$

Observação 5.5.1 *Geometricamente, a condição* (5.220) *acima, nos diz que, para cada* $x\,,y \in (a\,,b)$, *o segmento de reta que liga os pontos da representação geométrico do gráfico da função* φ,

$$(x\,,\varphi(x))\,, \quad e \quad (y\,,\varphi(y))$$

fica acima do trecho da representação geométirca do gráfico da função φ, *entre esses mesmos dois pontos (veja figura abaixo).*



Uma propriedade importante de uma função convexa é dada pelo:

Lema 5.5.1 *Seja* $\varphi : (a\,, b) \to \mathbb{R}$ *uma função convexa.*
Se

$$x\,, y\,, x'\,, y' \in (a\,, b)\,, \quad \textit{satisfazem} \quad x \le x' < y', \quad \textit{e} \quad x < y \le y'\,, \tag{5.221}$$

então o segmento de reta determinado pelos pontos

$$(x'\,, \varphi(x')) \ \textit{e} \quad (y'\,, \varphi(y'))$$

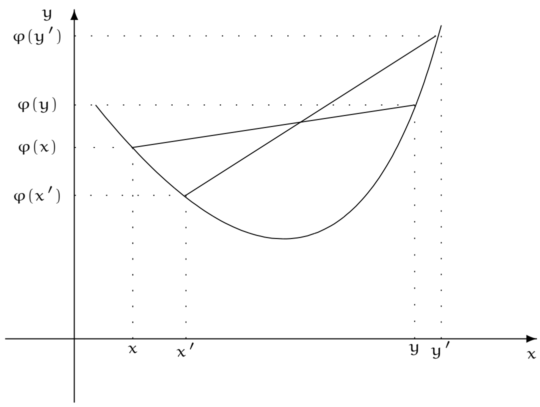
tem inclinação maior que a inclinação do segmento de reta determinado pelos pontos

$$(x\,, \varphi(x)) \ \textit{e} \quad (y\,, \varphi(y))\,,$$

isto é,

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \le \frac{\varphi(y') - \varphi(x')}{y' - x'}\,. \tag{5.222}$$

Geometricamente temos



Demonstração:
Se

$$c\,, d \in (a\,, b)\,, \quad \text{com} \quad c \le d\,,$$

as equações da reta secante ao gráfico da função φ, que contém os pontos $(c\,,\varphi(c))$ e $(d\,,\varphi(d))$, podemos ser dadas por:

$$Y = \frac{\varphi(d)-\varphi(c)}{d-c}(X-c)+\varphi(c) \tag{5.223}$$

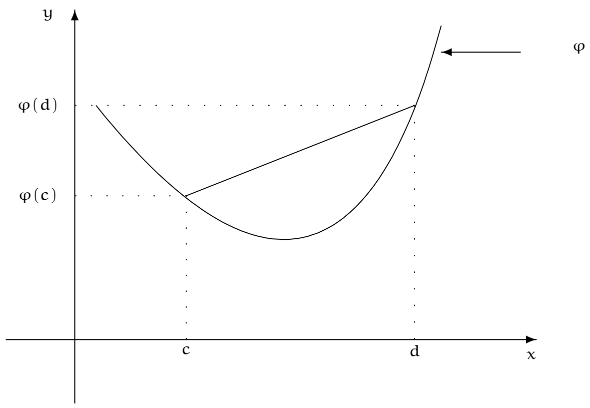
ou

$$Y = \underbrace{\frac{\varphi(c)-\varphi(d)}{c-d}}_{=\frac{\varphi(d)-\varphi(c)}{d-c}}(X-d)+\varphi(d)$$

ou seja,

$$Y = \frac{\varphi(d)-\varphi(c)}{d-c}(X-d)+\varphi(d)\,, \quad \text{para} \quad X \in [c\,,d]\,. \tag{5.224}$$

A representação geométrica da reta acima é dada pela figura abaixo:



Como φ é uma função convexa em $(a\,,b)$, segue que para cada

$$X \in (c\,,d)\,, \tag{5.225}$$

o ponto $(X\,,\varphi(X))$, pertencente ao gráfico da função φ, fica abaixo do correspondente ponto do gráfico da reta secante ao gráfico da função φ, que passa pelos pontos $(c\,,\varphi(c))$ e $(d\,,\varphi(d))$, significa que

$$\begin{aligned} &\varphi(X) \leq \frac{\varphi(d)-\varphi(c)}{d-c}(X-c)+\varphi(c) \\ \text{ou} \quad &\varphi(X) \leq \frac{\varphi(d)-\varphi(c)}{d-c}(X-d)+\varphi(d)\,. \end{aligned} \tag{5.226}$$

De (5.225), segue que

$$0 < X-c \quad \text{e} \quad X-d < 0\,. \tag{5.227}$$

Logo, de (5.227), teremos que (5.226) será equivalente a:

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi(X)-\varphi(c)}{X-c} \leq \frac{\varphi(d)-\varphi(c)}{d-c} \\ \text{ou} \quad &\frac{\varphi(d)-\varphi(c)}{d-c} \leq \frac{\varphi(X)-\varphi(d)}{X-d}\,, \end{aligned}$$

ou seja, para cada $X \in [c\,,d]$, teremos:

$$\frac{\varphi(X)-\varphi(c)}{X-c} \overset{\boxed{\mathrm{I}}}{\leq} \frac{\varphi(d)-\varphi(c)}{d-c} \overset{\boxed{\mathrm{II}}}{\leq} \frac{\varphi(X)-\varphi(d)}{X-d}\,, \tag{5.228}$$

para $c\,,d \in (a\,,b)$ com $c < d$ fixados.

Logo, tomando-se

$$c = x\,, \quad \text{e} \quad X = y\,, \quad \text{em } \boxed{\mathrm{I}} \text{ em } (5.228)\,,$$

obteremos:

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \frac{\varphi(d)-\varphi(x)}{d-x}\,,$$

para

$$y\,,x \in [c\,,d)\,, \quad \text{com} \quad x < y\,, \quad \text{para cada} \quad d \in (a\,,b)\,.$$

Em particular, tomando-se

$$d \doteq y'\,,$$

teremos:

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \frac{\varphi(y')-\varphi(x)}{y'-x}\,, \tag{5.229}$$

para

$$y\,,x \in (x\,,y')\,.$$

Logo, se

$$x' \in [x\,,y')\,,$$

tomando-se

$$c = x\,, \quad X = x' \quad \text{e} \quad d = y' \quad \text{em } \boxed{\mathrm{II}} \text{ em } (5.228)\,,$$

obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(y')-\varphi(x)}{y'-x} &\leq \frac{\varphi(x')-\varphi(y')}{x'-y'} \\ &= \frac{\varphi(y')-\varphi(x')}{y'-x'}\,. \end{aligned} \tag{5.230}$$

Logo de (5.229) e (5.230), segue que

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \frac{\varphi(y')-\varphi(x')}{y'-x'}\,,$$

mostrando a validade da desiguladade (5.222), como queríamos demonstrar.

□

Lembremos que uma função é diferenciável em um ponto se, e somente se, as derivadas laterais pela esquerda e pela direita nesse ponto existem e são iguais.

O resultado a seguir nos diz algo sobre a continuidade e a diferenciabilidade de funções convexas, a saber:

Proposição 5.5.1 *Seja* $\varphi : (a\,,b) \to \mathbb{R}$ *uma função convexa em* $(a\,,b)$.

Então a função φ *será absolutamente contínua em qualquer intervalo fechado contido em* $(a\,,b)$.

Temos também que as deridadas, à direita e à esquerda, da função φ*, existirão em* $(a\,,b)$ *e são iguais, exceto no máximo, em um subconjunto enumerável de* $(a\,,b)$*, isto é, a função* φ *é diferenciável, exceto em um subconjunto enumerável de* $(a\,,b)$.

Além disso, as deridadas, à direita e à esquerda, da função φ*, são funções monótonas crescentes em* $(a\,,b)$ *e satisfazem*

$$\varphi'_-(x) \le \varphi'_+(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a\,,b)\,. \tag{5.231}$$

Demonstração:

Consideremos

$$[c\,,d] \subseteq (a\,,b)\,.$$

Notemos que

$$x\,,c \in [a\,,y] \quad \text{e} \quad d\,,y \in [x\,,b]\,.$$

Para cada

$$x\,,y \in [c\,,d]\,, \quad \text{com} \quad x < y\,,$$

aplicando-se o Lema 5.5.1 acima duas vezes (tomando-se um vez: $x \doteq a$, $y \doteq c$, $y' \doteq y$ e $x' \doteq x$; e na segunda vez: $x \doteq x$, $y \doteq y$, $y' \doteq b$ e $x' \doteq d$, em (5.222)), obteremos:

$$\frac{\varphi(c) - \varphi(a)}{c - a} \le \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \le \frac{\varphi(b) - \varphi(d)}{b - d}.$$

Em particular, temos

$$-\left|\frac{\varphi(c) - \varphi(a)}{c - a}\right| \le \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \le \left|\frac{\varphi(b) - \varphi(d)}{b - d}\right|.$$

que implicará que:

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \le M\,|y - x|\,, \quad \text{para cada} \quad x\,,y \in [c\,,d] \quad \text{com} \quad x < y\,, \tag{5.232}$$

onde

$$M \doteq \max\left\{\left|\frac{\varphi(c) - \varphi(a)}{c - a}\right|, \left|\frac{\varphi(b) - \varphi(d)}{b - d}\right|\right\}. \tag{5.233}$$

Logo, da Proposição 5.4.2, segue que a função φ será absolutamente contínua em $[c\,,d] \subseteq (a\,,b)$, para cada $c\,,d \in (a\,,b)$, com $c < d$, completando a demonstração da primeira parte do resultado.

Para cada $x_o \in (a\,,b)$ fixado e

$$y\,,y' \in (a\,,b)\,, \quad \text{com} \quad x_o < y < y'\,, \tag{5.234}$$

do Lema 5.5.1 acima (tomando-se: $x \doteq x_o$, $y \doteq y$, $y' \doteq y'$ e $x' \doteq x_o$ em (5.222)), segue que

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x_o)}{y-x_o} \leq \frac{\varphi(y')-\varphi(x_o)}{y'-x_o}\,. \tag{5.235}$$

Por outro lado, se

$$y\,,y' \in (a\,,b)\,, \quad \text{com} \quad y < y' < x_o\,, \tag{5.236}$$

do Lema 5.5.1 acima (tomando-se: $x \doteq y$, $y \doteq x_o$, $y' \doteq x_o$ e $x' \doteq y'$ em (5.222)), segue que

$$\underbrace{\frac{\varphi(x_o)-\varphi(y)}{x_o-y}}_{\frac{\varphi(y)-\varphi(x_o)}{y-x_o}} \leq \underbrace{\frac{\varphi(x_o)-\varphi(y')}{x_o-y}}_{=\frac{\varphi(y')-\varphi(x_o)}{y'-x_o}}\,. \tag{5.237}$$

Notemos também que, se

$$y\,,y' \in (a\,,b)\,, \quad \text{com} \quad y < x_o < y'\,, \tag{5.238}$$

do Lema 5.5.1 acima (tomando-se: $x \doteq y$, $y \doteq x_o$, $y' \doteq y'$ e $x' \doteq x_o$ em (5.222)), segue que

$$\underbrace{\frac{\varphi(x_o)-\varphi(y)}{x_o-y}}_{\frac{\varphi(y)-\varphi(x_o)}{y-x_o}} \leq \frac{\varphi(y')-\varphi(x_o)}{y'-x_o}\,. \tag{5.239}$$

Consideremos a função $F:(a\,,b)\setminus\{x_o\}\to\mathbb{R}$, dada por:

$$F(y) \doteq \frac{\varphi(y)-\varphi(x_o)}{y-x_o}\,, \quad \text{para cada} \quad y \in (a\,,b)\,. \tag{5.240}$$

Notemos que se $y\,,y' \in (a\,,b)\setminus\{x_o\}$, com $y < y'$, temos as seguintes possibilidades:

$$\text{ou} \qquad x_o < y < y'\,, \tag{5.241}$$
$$\text{ou} \qquad y < y' < x_o\,, \tag{5.242}$$
$$y < x_o < y'\,, \tag{5.243}$$

Se (5.241) ocorre, teremos:

$$F(y) \stackrel{(5.240)}{=} \frac{\varphi(y)-\varphi(x_o)}{y-x_o} \stackrel{(5.234)\text{ e }(5.235)}{\leq} \tag{5.244}$$
$$= \frac{\varphi(y')-\varphi(x_o)}{y'-x_o} \stackrel{(5.240)}{=} F(y')\,. \tag{5.245}$$

Se (5.242) ocorre, teremos:

$$\begin{aligned} F(y) &\overset{(5.240)}{=} \frac{\varphi(y) - \varphi(x_o)}{y - x_o} \\ &= \frac{\varphi(x_o) - \varphi(y)}{x_o - y} \\ &\overset{(5.236) \text{ e } (5.237)}{\leq} \frac{\varphi(y') - \varphi(x_o)}{y' - x_o} \\ &\overset{(5.240)}{=} F(y'). \end{aligned} \tag{5.246}$$

Se (5.243) ocorre, teremos:

$$\begin{aligned} F(y) &\overset{(5.243)}{=} \frac{\varphi(y) - \varphi(x_o)}{y - x_o} \\ &= \frac{\varphi(x_o) - \varphi(y)}{x_o - y} \\ &\overset{(5.238) \text{ e } (5.239)}{\leq} \frac{\varphi(y') - \varphi(x_o)}{y' - x_o} \\ &\overset{(5.240)}{=} F(y'). \end{aligned} \tag{5.247}$$

De (5.245), (5.246) e (5.247) segue que a função F função monótona crescente em $(a\,,b) \setminus \{x_o\}$.

De modo semelhante, mostra-se que se (5.245) ocorrer teremos

$$F(y) \leq F(y'). \tag{5.248}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, de (5.245), (5.246) e (5.248) segue que a função F será monótona crescente em $(a\,,b) \setminus \{x_o\}$.

Logo, do Teorema 4.29, da págian 95 de [R], segue que existirão e serão finitos, os limite laterais

$$\lim_{y \to x_o^+} F(y) \quad \text{e} \quad \lim_{y \to x_o^-} F(y) \tag{5.249}$$

e serão finitos.

Logo, de (5.240), (5.249) e, da definição de derivadas laterais, segue que a função φ é diferenciável à direita e à esquerda de x_o, ou seja, a função φ será diferenciável, à direita e à esquerda, em cada ponto de $(a\,,b)$.

Fazendo

$$y \to x_o^-$$

no lado esquerdo de (5.239) obteremos:

$$\varphi'_-(x_o) \leq \frac{\varphi(y') - \varphi(x_o)}{y' - x_o}. \tag{5.250}$$

Fazendo

$$y' \to x_o^+ \,,$$

no lado direito de (5.250), obteremos

$$\varphi'_-(x_o) \leq \varphi'_+(x_o), \tag{5.251}$$

isto é, que (5.231) ocorrerá.

Por outro lado, se

$$x_o < y_o \,, \quad x_o < x < y_o \quad \text{e} \quad y_o < y \,,$$

Lema 5.5.1 acima (tomando-se: $x \doteq x_o$, $y \doteq x$, $y' \doteq y$ e $x' \doteq y_o$ em (5.222)), teremos:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_o)}{x - x_o} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(y_o)}{y - y_o} \,. \tag{5.252}$$

Tomando-se o limite quando

$$x \to x_o^+$$

do lado esquerdo de (5.252), teremos.

$$\varphi'_+(x_o) \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(y_o)}{y - y_o} \,. \tag{5.253}$$

Por fim, tomando-se o limite

$$y \to y_o^+$$

em (5.253), obteremos:

$$\varphi_+{}'(x_o) \leq \varphi_+{}'(y_o) \,,$$

ou seja,

$$\text{a função } \varphi'_+ \text{ é um função monótona crescente em } (a\,,b)\,. \tag{5.254}$$

De modo semelhante, podemos mostrar que

$$\text{a função } \varphi'_- \text{ é monótona crescente em } (a\,,b). \tag{5.255}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Notemos também que, se

$$x_o < y_o \,, \quad x_o < x < y' < y_o \,, \tag{5.256}$$

Lema 5.5.1 acima (tomando-se: $x \doteq x_o$, $y \doteq x$, $y' \doteq y_o$ e $x' \doteq y'$ em (5.222)), teremos:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_o)}{x - x_o} \leq \underbrace{\frac{\varphi(y_o) - \varphi(y')}{y_o - y'}}_{= \frac{\varphi(y') - \varphi(y_o)}{y' - y_o}} \,. \tag{5.257}$$

Além disso, fazendo $x \to x_o^+$ e $y' \to y_o^-$ em (5.257), segue que

$$\begin{aligned} \varphi'_+(x_o) &\leq \varphi'_-(y_o) \\ &\overset{(5.251)}{\leq} \varphi'_+(y_o)\,. \end{aligned} \tag{5.258}$$

Notemos que, podemos obter uma desigualdade semelhante à (5.258) para o caso que

$$y_o < x_o\,.$$

Para tanto, basta trocar x_o por y_o em (5.256).

Logo, se a função φ'_+ (ou a função φ'_-) for contínua em $x_o \in (a\,,b)$, fazendo $y_o \to x_o^+$ na desigualdade (5.257), segue que

$$\varphi'_+(x_o) \leq \varphi'_-(x_o) \leq \varphi'_+(x_o)\,,$$

$$\text{ou seja,}\qquad \varphi'_+(x_o) = \varphi'_-(x_o)\,,$$

isto é, as derivadas laterais da função φ serão iguais no ponto x_o, ou seja, a função φ será diferenciável no ponto x_o.

Portando, nos pontos de $(a\,,b)$ onde uma das funções derivadas laterias

$$\varphi'_+ \text{ ou } \varphi'_- \text{ for contínua, a função } \varphi \text{ será diferenciável.} \tag{5.259}$$

Do Teorema 4.30, da página 96 de [R], sabemos que toda função monótona em $(a\,,b)$ é descontínua, no máximo, em um subconjunto enumerável de $(a\,,b)$.

Lembremos que, de (5.254) e (5.255) temos que as funções φ'_+ e φ'_- são monótonas em $(a\,,b)$ logo, do resultado citado acima, segue que deverão ser contínuas, exceto no máximo, em um subconjunto enumerável de $(a\,,b)$ que, juntamente com (5.259), implicarão que a função φ será diferenciável , exceto no máximo, em um subconjunto enumerável de $(a\,,b)$, completando a demonstração.

□

Observação 5.5.2 *Em particular, da Proposição 5.5.1 acima e do item 5. da Proposição 4.4.1, seque se a função $\varphi : (a\,,b) \to \mathbb{R}$ é uma função convexa então ela será Lebesgue integrável em $(a\,,b)$.*

Para o próximo resultado precisaremos da

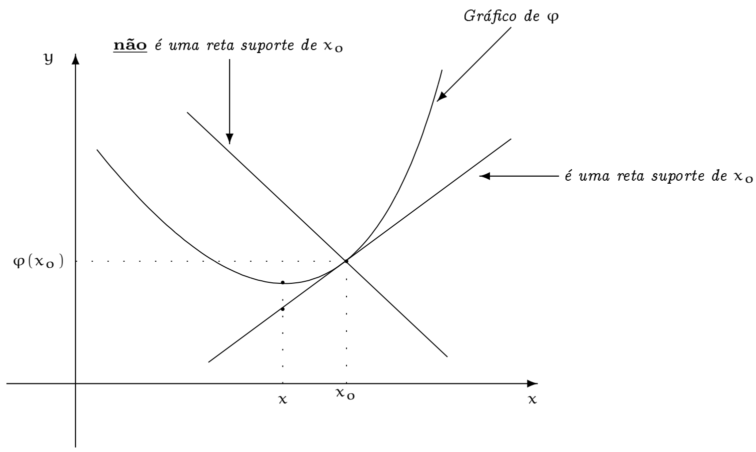
Definição 5.5.2 *Sejam $\varphi : (a\,,b) \to \mathbb{R}$ uma função convexa em $(a\,,b)$ e $x_o \in (a\,,b)$. A reta*

$$y = m\,(x - x_o) + \varphi(x_o) \tag{5.260}$$

que contém o ponto $(x_o\,,\varphi(x_o))$ será dita **reta suporte de x_o (relativamente à função φ)**, *se seus pontos estão sempre abaixo dos respectivos pontos do gráfico da função φ, isto é, se*

$$m\,(x - x_o) + \varphi(x_o) \leq \varphi(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in (a\,,b)\,. \tag{5.261}$$

A figura abaixo nos fornece uma caracterização geométrica da situação descrita acima.



Observação 5.5.3 *Sejam* $\varphi : (a\,,b) \to \mathbb{R}$ *uma função convexa em* $(a\,,b)$ *e* $x_o \in (a\,,b)$.

Notemos que, se a função φ *for diferenciável em* x_o*, teremos que*

$$\varphi'_-(x_o) = \varphi'_+(x_o) = \varphi'(x_o) = m\,. \tag{5.262}$$

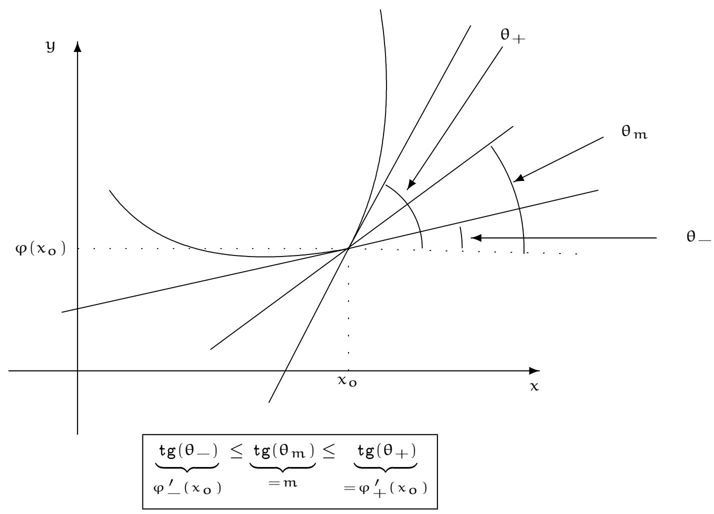
Por outro lado, se a função φ **não** *for diferenciável em* x_o*, da Proposição 5.5.1, segue que*

$$\varphi'_-(x_o) < \varphi'_+(x_o)\,. \tag{5.263}$$

Logo de (5.262) *e* (5.263)*, uma reta de* $\mathbb{R}^2$*, que intercepta o gráfico da função* φ *no ponto* $(x_o\,,\varphi(x_o))$ *será uma reta suporte no ponto* x_o *se, e somente se, seu coeficiente angular* m*, satisfaz*

$$\varphi'_-(x_o) \leq m \leq \varphi'_+(x_o)\,. \tag{5.264}$$

A figura abaixo ilustra a situação geométrica da desigualdade acima.



__Conclusão:__ *se a função* $\varphi : (a\,,b) \to \mathbb{R}$ *é convexa, sempre existe, pelo menos, uma reta suporte em cada ponto de* $(a\,,b)$.

Com isto podemos enunciar e provar a:

Proposição 5.5.2 (Desigualdade de Jensen) *Seja* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função convexa em* $\mathbb{R}$ *e* $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ *um função Lebesgue integrável em* $[0\,,1]$.

Então

$$\int_{[0\,,1]} (\varphi \circ f) \geq \varphi\left(\int_{[0\,,1]} f\right). \tag{5.265}$$

Demonstração:

Sejam

$$\alpha \doteq \int_{[0\,,1]} f \tag{5.266}$$

$$\text{e} \qquad y = a\,(x - \alpha) + \varphi(\alpha)\,, \tag{5.267}$$

uma reta suporte no ponto α, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (que existem pois a função f é Lebsegue integrável em $[0\,,1]$ e a função φ é uma função convexa em $\mathbb{R}$ e assim vale a Observação 5.5.3).

Logo, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ fixado, da Definição (5.5.2), segue que para $t \in [0\,,1]$, temos

$$\varphi[f(t)] \geq a\,[f(t) - \alpha] + \varphi(\alpha)\,. \tag{5.268}$$

Logo, de (5.268) e da Proposição 4.4.1, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{[0\,,1]} \varphi \circ f &\overset{(4.290)}{\geq} \int_{[0\,,1]} [a \cdot f - a \cdot \alpha + \varphi(\alpha)] \\
&\overset{(4.288)}{=} a \int_{[0\,,1]} f - a\,\alpha \underbrace{\int_{[0\,,1]} 1}_{=1} + \varphi(\alpha) \underbrace{\int_{[0\,,1]} 1}_{=1} \\
&= a \int_{[0\,,1]} f - a \underbrace{\alpha}_{=\int_{[0\,,1]} f} + \varphi(\underbrace{\alpha}_{=\int_{[0\,,1]} f}) \\
&= \varphi\left(\int_{[0\,,1]} f\right),
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Como consequência temos o:

Corolário 5.5.1 *Seja* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *uma função Lebesgue integrável em* $[0, 1]$.
Então

$$\int_{[0,1]} \exp(f) \geq \exp\left(\int_{[0,1]} f\right) \tag{5.269}$$

Demonstração:

Afirmamos que a função

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

é uma função convexa em $\mathbb{R}$.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Logo, da Proposição 5.5.2 segue que a desigualdade (5.269), completando a demonstração.

$\square$

Capítulo 6

Os Espaços L^p

Neste capítulo trataremos de uma classe importante de funções Lebesgue integráveis em $[0\,,1]$, a saber, as funções cujo módulo, elevado à $p \in [1, \infty)$, são Lebesgue integrável em $[0\,,1]$.

6.1 Os Espaço Vetorial Real Normado L^p

Começaremos com a

Definição 6.1.1 *Seja $p \in (0\,,\infty)$ fixado.*

Definamos o conjunto

$$\mathcal{L}^p([0\,,1]\,;\mathbb{R}) \doteq \{f : [0\,,1] \to \mathbb{R}\,; |f|^p \text{ é função Lebesgue integrável em } [0\,,1]\}\,. \tag{6.1}$$

Observação 6.1.1

1. *Da Definição 6.1.1 acima, segue que $f \in \mathcal{L}^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$ se, e somente se,*

$$\int_{[0\,,1]} |f|^p < \infty\,. \tag{6.2}$$

2. *Se $p = 1$,*

$$\mathcal{L}^1([0\,,1]\,;\mathbb{R})$$

denotará o conjunto formado por todas as funções Lebesgue integráveis em $[0\,,1]$.

3. *Notemos que se $f\,,g : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ são funções e $p \in [0\,,\infty)0$ está fixado então, para cada $x \in [0\,,1]$, teremos:*

$$|f(x) + g(x)|^p \leq C_p\ [|f(x)| + |g(x)|]^p\ . \tag{6.3}$$

Para mostramos a desigualdade acima, afirmamos que se $a\,,b \in [0\,,\infty)$*, existe* $C_p \in> 0$ *(que só depende de* p*), tal que :*

$$(a+b)^p \leq C_p\ (a^p + b^p)\ . \tag{6.4}$$

De fato,

$$p = 1\,,$$

considerando-se

$$C_p \doteq 1\,,$$

teremos uma igualdade em (6.4).

Por outro lado, se

$$p \in (0,\infty)\setminus\{1\} \quad e \quad a = 0 \quad ou \quad b = 0\,,$$

considerando-se

$$C_p \doteq 1\,,$$

a desigualdade (6.4) *acima tornar-se-á uma igualdade .*

Se

$$b > 0\,,$$

teremos que (6.4) *será equivalente (dividindo* (6.4) *por* $b^p > 0$*) à*

$$\left(\frac{a}{b} + 1\right)^p \leq C_p \left[\left(\frac{a}{b}\right)^p + 1\right]\,. \tag{6.5}$$

Notemos que, considerando-se

$$x \doteq \frac{a}{b}\,, \tag{6.6}$$

segue que (6.5) *será equivalente a*

$$(x+1)^p \leq C_p\,[x^p + 1]\ . \tag{6.7}$$

Mostremos (6.7).

Para isto, observemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^p}{x^p + 1} &\overset{L'Hôspital,\ com\ p\neq 1}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{p\,(x+1)^{p-1}}{p\,x^{p-1}} \\ &\overset{Exercício}{=} 1\,.\end{aligned}$$

Como limite acima existe, da disciplina de Análise I, podemos encontrar $C_p > 0$, *tal que*

$$\frac{(x+1)^p}{x^p+1} \leq C_p\,, \quad \textit{para cada} \quad x \geq 0\,,$$

$$\textit{isto é,} \qquad (x+1)^p \leq C_p\,(x^p+1)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \geq 0\,,$$

ou seja, vale (6.7), *ou ainda, vale* (6.4).

Para cada $x \in [0\,,1]$, *considerando-se*

$$a \doteq f(x) \quad e \quad b \doteq g(x)$$

segue, de (6.4), *que:*

$$|f(x)+g(x)|^p \leq C_p\,\left[|f(x)|^p + |g(x)|^p\right]\,,$$

ou seja, a validade de (6.3)

4. *Se* $f\,,g \in \mathcal{L}^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$, *do item* 3. *acima e da Proposição* 4.4.1, *segue que*

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} |f+g|^p &\overset{(6.3)\ e\ (4.290)}{\leq} \int_{[0,1]} C_p\,\left[|f|^p + |g|^p\right] \\
&\overset{(4.288)}{=} C_p\left[\underbrace{\int_{[0,1]} [|f|^p}_{\overset{(6.2)}{<}\infty} + \underbrace{\int_{[0,1]} [|g|^p}_{\overset{(6.2)}{<}\infty} < \infty\right] \\
&< \infty\,,
\end{aligned}$$

$$\textit{ou seja,} \qquad (f+g) \in \mathcal{L}^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,. \tag{6.8}$$

5. *Notemos também que se* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $f \in \mathcal{L}^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$, *da Proposição* 4.4.1, *teremos:*

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} |\alpha \cdot f|^p &= \int_{[0,1]} |\alpha|^p |\,f|^p \\
&\overset{(4.287)}{=} |\alpha|^p \underbrace{\int_{[0,1]} |f|^p}_{\overset{(6.2)}{<}\infty} \\
&< \infty\,,
\end{aligned}$$

$$\textit{ou seja,} \qquad \alpha \cdot f \in \mathcal{L}^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,. \tag{6.9}$$

6. *Logo dos itens* 4. *e* 5. *acima, podemos concluir que*

$$(\mathcal{L}^p([0\,,1])\,,+\,,\cdot)$$

é um espaço vetorial real (onde $+$ *denota a operação de adição usual de funções e* $\cdot$ *denota o produto usual de um número real por uma função).*

Nosso objetivo a seguir é tentar introduzir uma norma no espaço vetorial real

$$(\mathcal{L}^p([0,1]),+,\cdot)\,.$$

Começaremos pela:

Definição 6.1.2 *Para cada* $f \in \mathcal{L}^p([0,1];,\mathbb{R})$, *definiremos*

$$\|f\|_p \doteq \left(\int_{[0,1]} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\,. \tag{6.10}$$

Observação 6.1.2

1. *Notemos que, da Definição 6.1.1 , a função*

$$\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p([0,1];,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

está bem definida (pois $0 \leq \displaystyle\int_{[0,1]} |f|^p < \infty$*).*

2. *Podemos mostrar que a função* $\|\cdot\| : \mathcal{L}^p([0,1];,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

   (a) se $f \in \mathcal{L}^p([0,1];,\mathbb{R})$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *teremos:*

$$\|\alpha\cdot f\|_p = \alpha\,\|f\|_p\,; \tag{6.11}$$

   (b) se $f\,,g \in \mathcal{L}^p([0,1];,\mathbb{R})$, *teremos:*

$$\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p\,; \tag{6.12}$$

   (c) se $f \in \mathcal{L}^p([0,1];,\mathbb{R})$, *teremos:*

$$0 \leq \|f\|_p\,; \tag{6.13}$$

   (d)

$$\|O\|_p = 0\,; \tag{6.14}$$

3. *Notemos que, para* $f \in \mathcal{L}^p([0,1];,\mathbb{R})$, *como consequência do item 6. da Proposição 4.4.1, teremos:*

$$\begin{aligned} & \|f\|_p = 0 \\ \textit{se, e somente, se} \quad & |f|^p = O\,,\ \textit{q.p.t. em } [0,1]\,, \\ \textit{ou, equivalentemente,} \quad & f = O\,,\ \textit{q.p.t. em } [0,1]. \end{aligned} \tag{6.15}$$

4. *Logo, do item 3. acima, temos que existem funções* $f \in \mathcal{L}^p([0,1];\mathbb{R})$, **não identicamente nulas**, *tal que*
$$\|f\|_p = 0 .$$
Para vermos isto basta tomarmos, por exemplo, a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, *dada por:*
$$f(x) \doteq \begin{cases} 1, & \textit{para} \quad x = 0 \\ 0, & \textit{para} \quad x \in (0,1] \end{cases} . \tag{6.16}$$
Neste caso teremos que $f \neq O$ *em* $[0,1]$, *mas*
$$\|f\|_p = 0 .$$

5. *Dos itens 2. e 4., segue que a função* $\|\cdot\| : \mathcal{L}^p([0,1];,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ **não** *será uma norma no espaço vetorial real* $(\mathcal{L}^p([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$, *será uma* **semi-norma** *no espaço vetorial real* $(\mathcal{L}^p([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$.

Para resolver o problema relacionado com o item 5. da Observação 6.1.2, agirmeos do seguinte modo:

Definição 6.1.3 *Sejam* $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *funções Lebesgue mensuráveis em* $[0,1]$.

Diremos que a **função f é equivalente à função g**, *denotando por*
$$f \sim g ,$$
se
$$f = g , \quad \textit{q.t.p. em } [0,1] . \tag{6.17}$$

Observação 6.1.3 *Pode-se mostrar que a relação* $\sim$ *é uma relação de equivalência no conjunto formado por todas as funções Lebesgue mensuráveis em* $[0,1]$ *(veja 1.4.1).*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Com podemos introduzir a:

Definição 6.1.4 *Definimos o seguinte conjunto:*
$$L^p([0,1];\mathbb{R}) \doteq \mathcal{L}^p([0,1];\mathbb{R})/\sim , \tag{6.18}$$
ou seja, o espaço quociente de $\mathcal{L}^p([0,1];\mathbb{R})$ *pela relação de equivalência* $\sim$.

Se $f \in \mathcal{L}^p([0,1];\mathbb{R})$, *indicaremos a* **classe de equivalência** *de* $L^p([0,1];\mathbb{R})$ *que contém a função* f *por* $[f]$, *como sendo:*
$$[f] \doteq \{g \in \mathcal{L}^p([0,1];\mathbb{R}) ; \, g \sim f\} . \tag{6.19}$$

Observação 6.1.4

1. *Observemos que para* $[f], [g] \in L^p([0,1];\mathbb{R})$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *definiremos:*

$$[f] + [g] \doteq [f+g] \tag{6.20}$$

$$\text{e} \qquad \alpha \cdot [f] \doteq [\alpha \cdot f], \tag{6.21}$$

onde $+$ *e* $\cdot$ *são as operações do espaço vetorial real* $(\mathcal{L}^p([0,1];\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Notemos que as operações $+$ *e* $\cdot$ *estão bem definidas.*

De fato, pois:

(a) se $f_1, f_2 \in [f]$ *e* $g_1, g_2 \in [g]$ *então, de* (6.19), *segue que*

$$f_1 \sim f_2 \quad \text{e} \quad g_1 \sim g_2,$$

que, da Definição (6.1.3), *é o mesmo que:*

$$f_1 = f_2 \quad \text{e} \quad g_1 = g_2, \quad q.t.p \text{ em } [0,1] \tag{6.22}$$

Logo, de (6.22), *segue que*

$$f_1 + g_1 = f_2 + g_2, \quad q.t.p. \text{ em } [0,1],$$

que, da Definição (6.1.3), *é o mesmo que:*

$$[f_1 + g_1] = [f_2 + g_2],$$

mostrando que o lado esquerdo de (6.20), *independe das escolhas das funções nas classes de equivalências* $[f]$ *e* $[g]$, *respectivamente.*

Portanto a operação $+$, *introduzida em* (6.20), *está bem definida.*

(b) de modo semelhante, se $f_1, f_2 \in [f]$ *então, de* (6.19), *segue que*

$$f_1 \sim f_2,$$

que, da Definição (6.1.3), *é o mesmo que:*

$$f_1 = f_2, \quad q.t.p \text{ em } [0,1] \tag{6.23}$$

Logo, de (6.23), *segue que*

$$\alpha \cdot f_1 = \alpha \cdot f_2, \quad q.t.p. \text{ em } [0,1],$$

que, da Definição (6.1.3), *é o mesmo que:*

$$[\alpha \cdot f_1] = [\alpha \cdot f_2],$$

mostrando que o lado esquerdo de (6.21), *independe da escolha da função na classe de equivalência* $[f]$.

Portanto a operação $\cdot$, *introduzida em* (6.21), *está bem definida.*

2. *Com isto pode-se mostrar que*

$$(L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$$

é um espaço vetorial real.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

3. *Definamos a função*
$$\|\cdot\|_p : L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,,$$
dada por:
$$\|\,[f]\,\|_p \doteq \left(\int_{[0\,,1]} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\,. \tag{6.24}$$
Notemos que esta aplicação está bem definida.

De fato, se $f_1, f_2 \in [f]$ *então, de* (6.19), *segue que*
$$f_1 \sim f_2\,,$$
que, da Definição (6.1.3), *é o mesmo que:*
$$f_1 = f_2\,, \quad \text{q.t.p em } [0\,,1] \tag{6.25}$$
Logo, do item 6. da Proposição 4.4.1, segue que
$$\int_{[0\,,1]} |f_1|^p = \int_{[0\,,1]} |f_2|^p\,, \tag{6.26}$$
mostrando que o lado esquerdo de (6.24) *independe da escolha da função na classe de equivalência* $[f]$.

Portanto a função $\|\cdot\|_p : L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, *introduzida em* (6.24), *está bem definida.*

4. *Notemos que se* $f_1 \in \mathcal{L}^p([0\,,1])$, *de* (6.25), *segue que*
$$f_1 = 0\,, \quad \text{q.t.p. em } [0\,,1], \text{ se, e somente se: } \quad f_1 \in [O]\,. \tag{6.27}$$
Com isto, de (6.24) *e do item 3. da Observação 6.1.2, teremos:*
$$[f] = [O] \quad \text{se, e somente se} \quad \|\,[f]\,\|_p = 0. \tag{6.28}$$

5. *Notemos que, se* $[f] \in L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$,

   (a) teremos:
$$\|\,[f]\,\|_p \geq 0\,,$$
$$\text{e} \qquad [f] = [O] \quad \text{se, e somente se} \quad \|\,[f]\,\|_p = 0\,. \tag{6.29}$$

(b) segue que:

$$\begin{aligned}
\|\,[\alpha\cdot f]\,\|_p &\overset{(6.24)}{=} \left(\int_{[0,1]} |\alpha\cdot f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{(6.11)}{=} |\alpha| \left(\int_{[0,1]} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{(6.24)}{=} |\alpha|\,\|\,[f]\,\|_p\,. \qquad (6.30)
\end{aligned}$$

(c) Na próxima seção mostraremos que se $[f]\,,[g] \in L^p([0,1];\mathbb{R})$ *então*

$$\|\,[f+g]\,\|_p \leq \|\,[f]\,\|_p + \|\,[g]\,\|_p\,, \qquad (6.31)$$

conhecida como **desigualdade triangular**,

ou seja, a função $\|\cdot\|_p : L^p([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *será um norma no espaço vetorial real* $(L^p([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$, *ou ainda,* $(L^p([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$ *munido da função* $\|\cdot\|_p$, *dada por* (6.24), *é um espaço vetorial real normado.*

6. *Para aliviar a notação denotaremos os elementos de* $L^p([0,1];\,)$ *por* f *em vez de* $[f]$.

Temos também a:

Definição 6.1.5 *Definimos o seguinte conjunto*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^\infty([0,1];\mathbb{R}) \doteq \{f\,;\, f:[0,1]\to\mathbb{R},\ &\textit{Lebesgue mensurável,}\\
&\textit{limitada q.t.p. em } [0,1]\}. \qquad (6.32)
\end{aligned}$$

Uma função que está em $\mathcal{L}^\infty([0,1])$ *será dita* **essencialmente limitada em** $[0,1]$.

Observação 6.1.5

1. *Observemos que se* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $f,g \in \mathcal{L}^\infty([0,1];\mathbb{R})$ *então*

$$\alpha\cdot f\,, f+g \in \mathcal{L}^\infty([0,1];\mathbb{R})\,,$$

ou seja, $(\mathcal{L}^\infty([0,1]),+,\cdot)$ *é um espaço vetorial real, onde* $+$ *dentoa a operação usual de soma de funções e* $\cdot$ *dentoa a operação de multiplicação de número real por uma função.*

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. *Para o que vem a seguir precisaremos da seguinte noção:*

Seja $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ *uma função limitada, exceto em um subconjunto de medida zero de* $[0,1]$.

Definimos o <u>**supremo essencial da função** h **em** $[0,1]$</u>*, indicando por*

$$\text{ess}\sup_{x\in[0,1]} h\,,$$

como sendo:

$$\text{ess}\sup_{x\in[0,1]} h(x) \doteq \inf_{g\in\mathcal{A}}\left\{\sup_{x\in[0,1]} g(x)\right\}, \tag{6.33}$$

onde

$$\mathcal{A} \doteq \{g\,;\ g:[0,1]\to\mathbb{R}\,,\ \textit{tal que } g{=}h\ \ \textit{q.t.p em}\ \ [0,1]. \tag{6.34}$$

3. *Na situação acima, teremos:*

$$\text{ess}\sup_{x\in[0,1]} h(x) = \inf\{M\,;\ m\left(\{x\in[0,1]\,;\ h(x)>M\}\right)=0\}\,. \tag{6.35}$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

4. *Nosso próximo passo é tentar introduzir uma norma no espaço vetorial real* $(\mathcal{L}^\infty([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$.

   Consideremos a função $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}^\infty([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*, dada por:*

$$\|f\|_\infty \doteq \text{ess}\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|\,, \quad \textit{para cada} \quad f\in\mathcal{L}^\infty([0,1];\mathbb{R})\,. \tag{6.36}$$

   Com isto temos que a função $\|\cdot\|_\infty$ *está bem definida.*

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

5. *Notemos que existe* $f\in\mathcal{L}^\infty([0,1];\mathbb{R})$*,* <u>**não**</u> *identicamente nula (a mesma do item 4. da Observação 6.1.2), tal que*

$$\|f\|_\infty = 0\,, \qquad \textit{ou seja,} \quad \|\cdot\|_\infty$$

   <u>**não**</u> *poderá ser uma norma no espaço vetorial real* $(\mathcal{L}^\infty([0,1]),+,\cdot)$.

6. *Para resolver isto faremos como no caso* $\mathcal{L}^p([0,1])$*, isto é, consideraremos*

$$L^\infty([0,1];\mathbb{R}) \doteq \mathcal{L}^\infty([0,1];\mathbb{R})/\sim, \tag{6.37}$$

   onde a relação $\sim$ *é a introduzida na Definição 6.1.3.*

7. *Com isto teremos que*

$$(L^\infty([0,1]),+,\cdot)$$

   é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações introduzidas no item 1. da Observação 6.1.4).*

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

8. *Deste modo podemos definir a função*

$$\|\cdot\|_\infty : L^\infty([0\,,1]\,;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,,$$

dada por:

$$\|[f]\|_\infty \doteq \operatorname{ess\,sup}_{x\in[0\,,1]}|f(x)|\,, \quad \textit{para cada} \quad [f]\in L^\infty([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,. \tag{6.38}$$

Com isto teremos:

(a) a função $\|\cdot\|_\infty$*, dada por* (6.38)*, está bem definida;*

(b) para $[f]\in L^\infty([0\,,1]\,;\mathbb{R})$ *temos que:*

$$\begin{aligned} & \|\,[f]\,\|_\infty \geq 0\,, \\ \textit{e} \qquad & [f] = [0] \\ \textit{se, e somente se} \qquad & \|\,[f]\,\|_\infty = 0\,; \end{aligned} \tag{6.39}$$

(c) para $\alpha\in\mathbb{R}$ *e* $[f]\in L^\infty([0\,,1]\,;\mathbb{R})$*, teremos:*

$$\|\,[\alpha\cdot f]\,\|_\infty = |\alpha|\,\|\,[f]\,\|_\infty\,; \tag{6.40}$$

(d) para $[f]$, $[g]\in L^\infty([0\,,1]\,;\mathbb{R})$*, teremos:*

$$\|\,[f]+[g]\,\|_\infty \leq \|\,[f]\,\|_\infty + \|\,[g]\,\|_\infty\,, \tag{6.41}$$

conhecida como <u>**desigualdade triangular**</u> *(veja o Exercício 1, da página 112 de [HLR]).*

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

(e) De (6.39), (6.40) *e* (6.41) *segue que a função* $\|\cdot\|_\infty$*, dada por* (6.38)*, será um norma no espaço vetorial real* $(L^\infty([0\,,1])\,,+\,,\cdot)$*, ou ainda, o espaço vetorial real* $(L^\infty([0\,,1])\,,+\,,\cdot)$ *quando munido da função* $\|\cdot\|_\infty$*), dada por* (6.38)*, tornar-se-á um espaço vetorial real normado.*

(f) Para aliviar a notação denotaremos os elementos de $L^\infty([0\,,1]\,;\mathbb{R})$ *por* f *em vez de* $[f]$.

6.2 Desigualdade de Hölder e Minkowski

Nosso objetivo nesta seção é provar a desigualdade triangular no espaço vetorial real normado $(L^p([0\,,1])\,,+\,,\cdot\,,\|\cdot\|_p)$, com $p\in[1,\infty]$ (ou seja, (6.31), para $p\in[1\,,\infty)$, e (6.41), para $p=\infty$).

Para isto precisaremos, entre outras coisas, do:

Lema 6.2.1 *Sejam $\alpha, \beta \geq 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ fixados.*
Então vale a seguinte desigualdade:

$$\alpha^{\lambda} \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \alpha + (1-\lambda) \beta . \tag{6.42}$$

Além disso, ocorrerá a igualdade em (6.42) se, e somente se,

$$\alpha = \beta . \tag{6.43}$$

Demonstração:
Para tando, conisderemos a função $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\varphi(t) \doteq \lambda t - t^{\lambda}, \quad \text{para cada} \quad t \in (0, \infty) . \tag{6.44}$$

Observemos que a função φ é diferenciável em $(0, \infty)$ e além disso, para cada $t \in (0, \infty)$, tereos:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &\overset{(6.44)}{=} \lambda - \lambda t^{\lambda-1} \\ &= \lambda \left(1 - t^{\lambda-1}\right) . \end{aligned} \tag{6.45}$$

Como $\lambda - 1 < 0$ segue, de (6.45), que

$$\varphi'(t) = \begin{cases} < 0, & \text{para} \quad t \in (0, 1), \\ > 0, & \text{para} \quad t \in (1, \infty) \end{cases} . \tag{6.46}$$

Logo a função φ tem um (único) mínimo global em $t = 1$, isto é, se

$$t \in (0, \infty) \setminus \{1\}, \quad \text{teremos:} \quad \varphi(t) > \varphi(1), \tag{6.47}$$

$$\begin{aligned} \text{isto é,} \qquad \lambda t - t^{\lambda} &\overset{(6.44)}{=} \varphi(t) \\ &\overset{(6.47)}{>} \varphi(1) \\ &\overset{(6.44) \text{ com } t=1}{=} \lambda \cdot 1 - 1^{\lambda} \\ &= \lambda - 1, \\ \text{ou ainda,} \qquad \lambda t + (1-\lambda) &> t^{\lambda} . \end{aligned} \tag{6.48}$$

e ocorrerá a igualdade em (6.48) se, e somente se,

$$t = 1 . \tag{6.49}$$

Notemos que:

1. se

   $$\alpha = \beta = 0 ,$$

   teremos que o lado direito e o lado esquerdo de (6.42) serão iguais a 0, ou seja, valerá a igualdade em (6.42).

2. se
$$\alpha > 0 \quad \text{e} \quad \beta = 0$$
(ou vice-versa), teremos que o lado esquerdo de (6.42) será igual a 0 e o lado direito será maior ou igual a 0, ou seja, valerá a desigualdade (6.42).

3. se
$$\alpha\,,\beta > 0\,,$$
consideremos
$$t \doteq \frac{\alpha}{\beta} \in (0\,,\infty)\,. \tag{6.50}$$
Logo, de (6.48), com t dado por (6.50), teremos:
$$\begin{aligned} & \lambda \cdot \frac{\alpha}{\beta} + (1-\lambda) \geq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\lambda}\,, \\ \text{ou seja:} \quad & \lambda \cdot \frac{\alpha}{\beta} + (1-\lambda) \geq \frac{\alpha^{\lambda}}{\beta^{\lambda}}\,, \\ \text{isto é:} \quad & \lambda \cdot \frac{\alpha}{\beta} + (1-\lambda) \geq \frac{\alpha^{\lambda}}{\beta^{\lambda-1}\cdot\beta}\,, \\ \text{como } \beta > 0\text{, isto será equivalente à:} \quad & \lambda \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta + (1-\lambda)\,\beta \geq \frac{\alpha^{\lambda}}{\beta^{\lambda-1}}\,, \\ \text{ou ainda:} \quad & \lambda\,\alpha + (1-\lambda)\,\beta \geq \alpha^{\lambda}\,\beta^{1-\lambda}\,, \end{aligned} \tag{6.51}$$

obtendo-se a desigualdade (6.42).

Além disso, de (6.49), ocorrerá a igualdade em (6.51) se, e somente se,
$$\alpha = \beta\,,$$
completando a demonstração.

□

Como consequência temos o:

Corolário 6.2.1 *Sejam* $a\,,b \in [0\,,\infty)$ *e* $p\,,q \in (1\,,\infty)$ *fixados, satisfazendo a seguinte identidade:*
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,. \tag{6.52}$$
Então vale a seguinte desigualdade:
$$a\,b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,. \tag{6.53}$$
Além disso, ocorrerá a igualdade em (6.53) *se, e somente se,*
$$a^p = b^q\,. \tag{6.54}$$

Demonstração:

Consideremos

$$\lambda \doteq \frac{1}{p}. \tag{6.55}$$

Deste modo teremos:

$$\begin{aligned} 1-\lambda &\overset{(6.55)}{=} 1-\frac{1}{p} \\ &\overset{(6.52)}{=} \frac{1}{q}. \end{aligned} \tag{6.56}$$

Logo, se $\alpha, \beta \in [0, \infty)$, do Lema 6.2.1 e de (6.55) e (6.56), segue que:

$$\alpha^{\frac{1}{p}} \beta^{\frac{1}{q}} \overset{(6.42)}{\leq} \frac{1}{p}\alpha + \frac{1}{q}\beta. \tag{6.57}$$

Além disso, do Lema 6.2.1, temos que ocorrerá a igualdade em (6.57) se, e somente se,

$$\alpha = \beta. \tag{6.58}$$

Consideremos

$$\alpha \doteq a^p, \quad \beta \doteq b^q \in [0, \infty). \tag{6.59}$$

Logo, de (6.57), teremos:

$$(a^p)^{\frac{1}{p}} (b^q)^{\frac{1}{q}} \overset{(6.42)}{\leq} \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q,$$

$$\text{ou seja,} \qquad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{6.60}$$

isto é, valerá desigualdade (6.53) e além disso, de (6.58) e (6.59), ocorrerá a igualdade em (6.60) se, e somente se,

$$a^p = b^q,$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 6.2.1 *Notemos que se $p, q \in [1, \infty]$ satisfazem a relação (6.52), diremos que o numéro real q é o* **conjugado do número real** p.

Podemos agora enunciar e provar a:

Proposição 6.2.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $p, q \in [1, \infty]$ satisfazendo a relação (6.52).*

Suponhamos que

$$f \in L^p([0,1];, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad g \in L^q([0,1]; \mathbb{R}). \tag{6.61}$$

Então teremos que

$$f\,g \in L^1([0,1];\mathbb{R}) \tag{6.62}$$

$$e \qquad \int_{[0,1]} |f\,g| \leq \|f\|_p\,\|g\|_q\,. \tag{6.63}$$

Além disso, se $p\,,q \in (1,\infty)$*, ocorrerá a igualdade em* (6.63) *se, e somente se,*

$$\alpha\,|f|^p = \beta\,|g|^q\,, \quad q.t.p. \text{ em } \quad [0,1]\,, \tag{6.64}$$

para algum $\alpha\,,\beta \in [0,\infty)$.

Demonstração:

Consideremos, primeiramente o caso:

$$p \doteq 1\,, \quad \text{logo, de (6.52), deveremos ter:} \quad q = \infty\,. \tag{6.65}$$

De modo análogo, se

$$q \doteq 1\,, \quad \text{de (6.52), deveremos ter} \quad p = \infty\,.$$

Trataremos do caso (6.65), o outro caso é análogo e será deixado como exercício para o leitro.

Logo, de (6.65) e (6.61), segue que

$$f \in L^1([0,1];\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad g \in L^\infty([0,1];\mathbb{R})\,. \tag{6.66}$$

Assim

$$\begin{aligned} |(f\,g)(x)| &= |f(x)|\,|g(x)| \\ &\overset{(6.36)}{\leq} |f(x)|\,\|g\|_\infty\,, \quad \text{q.t.p. em } \in [0,1]\,. \end{aligned} \tag{6.67}$$

Como $f \in L^1([0,1])$ segue, de (6.67), que

$$f\,g \in L^1([0,1])$$

e, além disso, de (6.67) e do item 4. da Proposição 4.4.1, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |f\,g| &\overset{(6.67) \text{ e } (4.290)}{\leq} \int_{[0,1]} [|f|\;\|g\|_\infty] \\ &\overset{(4.287)}{=} \|g\|_\infty \int_{[0,1]} |f| \\ &\overset{(6.24) \text{ com } p=1, \text{ e } (6.38)}{=} \|f\|_1\,\|g\|_\infty, \end{aligned}$$

mostrando a validade da desigualdade (6.63), para

$$p = 1 \quad \text{e} \quad q = \infty .$$

Consideremos agora o caso

$$p\,,q \in (1,\infty)\,, \quad \text{satisfazendo} \quad (6.52)\,. \tag{6.68}$$

Como, por hipótese, temos que

$$f \in L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad g \in L^q([0\,,1]\,;\mathbb{R})$$

segue que a função f e a função g serão Lebesgue mensuráveis em $[0\,,1]$.

Logo, da Proposição 3.5.2, segue que a função $(f\,g)$ é Lebesgue mensurável em $[0\,,1]$.

Notemos que se

$$\|f\|_p = 0\,, \quad \text{ou} \quad \|g\|_q = 0\,,$$

da Observação 4.3.2, segue que

$$f = 0\,, \quad \text{ou} \quad g = 0\,, \quad \text{q.t.p. em} \ \ [0\,,1]\,.$$

Deste modo teremos que

$$f\,g = 0\,, \quad \text{q.t.p. em} \ \ [0\,,1]\,,$$

logo $(f\,g) \in L^1([0\,,1]\,;\mathbb{R})$ e, além disso, o lado direito e o lado esquerdo de (6.63) serão iguais a zero, ou seja, valerá a igualdade em (6.63).

Logo podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\|f\|_p\,, \|g\|_q \neq 0\,. \tag{6.69}$$

Para cada $x \in [0\,,1]$, consideremos :

$$a \doteq \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\,, \quad b \doteq \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \in [0\,,\infty)\,. \tag{6.70}$$

Aplicando o Corolário 6.2.1 com os valores acima, obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\,\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} &\leq \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q \\ &= \frac{1}{p}\,\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p{}^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q{}^q} \end{aligned} \tag{6.71}$$

Logo, de (6.71) e do item 4. da Proposição 4.4.1, segue que

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\int_{[0,1]} \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}}_{\overset{(4.287)}{=} \frac{1}{\|f\|_p} \frac{1}{\|g\|_q} \int_{[0,1]} |f\,g|} &\overset{(4.290)}{\leq} \int_{[0,1]} \left(\frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \right) \\
&\overset{(4.287)}{=} \frac{1}{p} \frac{1}{\|f\|_p^p} \underbrace{\int_{[0,1]} |f|^p}_{\overset{(6.24)}{=} \|f\|_p{}^p} + \frac{1}{q} \frac{1}{\|g\|_q^q} \underbrace{\int_{[0,1]} |g(x)|^q}_{\overset{(6.24)}{=} \|g\|_q{}^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&\overset{(6.52)}{=} 1 ,
\end{aligned}
$$

ou seja,
$$\frac{1}{\|f\|_p} \frac{1}{\|g\|_q} \int_{[0,1]} |f\,g| \leq 1 ,$$

ou ainda ,
$$\int_{[0,1]} |f\,g| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \overset{(6.61)}{<} \infty , \tag{6.72}$$

mostrando que $(f\,g) \in L^1([0,1];\mathbb{R})$ e que vale a desiguadade (6.63). como queríamos demonstrar.

Além disso, do Corolário 6.2.1 (ou seja, de (6.54) e (6.70)), ocorrerá a igualdade em (6.72) se, e somente se,

$$\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p = \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q ,$$

isto é,
$$\underbrace{\|g\|_q{}^q}_{\doteq \alpha} |f(x)|^p = \underbrace{\|f\|_p{}^p}_{\doteq \beta} |g(x)|^q , \quad \text{q.t.p. em} \quad [0,1] ,$$

mostrando (6.64) e completando a demonstração.

□

Como consequência temos o:

Corolário 6.2.2 (Desigualdade de Cauchy-Bunyakowsii-Schwarz) *Suponhamos que* $f, g \in L^2([0,1];\mathbb{R})$.

Então teremos que

$$(f\,g) \in L^1([0,1];\mathbb{R}) \tag{6.73}$$

e
$$\int_{[0,1]} |f\,g| \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2 . \tag{6.74}$$

Demonstração:

Conisdrando-se

$$p = q = 2 , \quad \text{segue que} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Logo podemos aplicar a Proposição 6.2.1 acima para obter (6.73) e (6.74), completando a demonstração.

□

Observação 6.2.2 *Notemos que se* $p, q \in (1, \infty)$ *teremos:*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\textit{se, e somente se,} \qquad q(p-1) = p, \tag{6.75}$$

$$\textit{ou, equivalentemente,} \qquad p - \frac{p}{q} = 1. \tag{6.76}$$

Podemos agora enunciar e provar agora a:

Proposição 6.2.2 (Desigualdade de Minkowski) *Sejam* $p \in [1, \infty]$ *fixado e* $f, g \in L^p([0,1]; \mathbb{R})$.

Então teremos:

$$(f+g) \in L^p([0,1]; \mathbb{R}) \tag{6.77}$$

$$e \qquad \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{6.78}$$

Demonstração:

Consideremos, primeiramente o caso:

$$p = 1. \tag{6.79}$$

Notemos também que, para cada $x \in [0,1]$, da desigualdade triangular em $\mathbb{R}$, teremos:

$$|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|. \tag{6.80}$$

Como, por hipótese, temos que

$$f, g \in L^1([0,1]; \mathbb{R}), \quad \text{ou seja,} \quad \|f\|_1, \|g\|_1 < \infty. \tag{6.81}$$

Logo, de (6.80) e do item 4. da Proposição 4.4.1, segue que

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |f+g| &\overset{(6.80)\text{ e }(4.290)}{\leq} \int_{[0,1]} (|f| + |g|) \overset{(4.288)}{=} \int_{[0,1]} |f| + \int_{[0,1]} |g| \\ &\overset{(6.24)\text{ com } p=1}{=} \|f\|_1 + \|g\|_1 \overset{(6.81)}{<} \infty. \end{aligned} \tag{6.82}$$

Logo, de (6.82) segue que $(f+g) \in L^1([0,1]; \mathbb{R})$ e que

$$\begin{aligned} \|f+g\|_1 &\overset{(6.24)\text{ com } p=1}{=} \int_{[0,1]} |f+g| \\ &\overset{(6.82)}{\leq} \|f\|_1 + \|g\|_1, \end{aligned}$$

ou seja, vale a desigualdade (6.78) para $p = 1$.

Consideremos agora o caso

$$p = \infty . \tag{6.83}$$

Como, por hipótese,

$$f , g \in L^{\infty}([0 , 1] ; \mathbb{R}) , \quad \text{ou seja,} \quad \|f\|_{\infty} , \|g\|_{\infty} < \infty . \tag{6.84}$$

Assim, teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{x\in[0,1]}|(f+g)(x)| &\overset{(6.80)}{\leq} \operatorname{ess\,sup}_{x\in[0,1]}[|f(x)|+|g(x)|] \\ &\overset{\text{Exercício}}{\leq} \operatorname{ess\,sup}_{x\in[0,1]}|f(x)| + \operatorname{ess\,sup}_{x\in[0,1]}|g(x)| \\ &= \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} \overset{(6.85)}{<} \infty . \end{aligned} \tag{6.85}$$

Logo, de (6.85) segue que $(f + g) \in L^{\infty}([0 , 1] ; \mathbb{R})$ e que

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{\infty} &\overset{(6.36)}{=} \operatorname{ess\,sup}_{x\in[0,1]}|(f+g)(x)| \\ &\overset{(6.85)}{\leq} \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} , \end{aligned}$$

ou seja, vale a desigualdade (6.78) para $p = \infty$.

Para finalizar, consideremos o caso

$$p \in (1 , \infty) . \tag{6.86}$$

Notemos que, como $f , g \in L^p([0 , 1] ; \mathbb{R})$, segue que as funções f e g são Lebesgue mensuráveis em $[0 , 1]$.

Notemos que se

$$\|f + g\|_p = 0 , \tag{6.87}$$

segue a desigualdade (6.78) ocorrerá.

Assim podemos supor, sem perda da generalidade, que

$$\|f + g\|_p \neq 0 . \tag{6.88}$$

Logo, da Proposição 3.5.2, segue que a função $(f + g)$ é Lebesgue mensurável em $[0 , 1]$.

Além disso, para cada $x \in [0 , 1]$, do item 3. da Observação 6.1.1 (ou seja, de (6.3)), segue que existe $C_p \geq 0$, tal que

$$|(f + g)(x)|^p \leq C_p[|f(x)|^p + |g(x)|^p]. \tag{6.89}$$

Como $f , g \in L^p([0 , 1] ; \mathbb{R})$, segue que

$$|f|^p , |g|^p \in L^1([0 , 1] ; \mathbb{R}) . \tag{6.90}$$

Logo, de (6.89) e (6.90) segue que

$$(f+g) \in L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,. \tag{6.91}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\int_{[0\,,1]} |f+g|^p &= \int_{[0\,,1]} |f+g|^{p-1} \underbrace{|f+g|}_{\substack{\text{desigualdade triangular} \\ \leq \; |f|+|g|}} \\
&\overset{(4.290)}{\leq} \int_{[0\,,1]} |f+g|^{p-1}\,[|f|+|g|] \\
&\overset{(4.288)}{\leq} \int_{[0\,,1]} |f+g|^{p-1}\,|f| + \int_{[0\,,1]} |f+g|^{p-1}\,|g|\,.
\end{aligned} \tag{6.92}$$

Afirmamos que

$$|f+g|^{p-1} \in L^q([0\,,1]\,;\mathbb{R}) \tag{6.93}$$

$$\text{e} \qquad \||f+g|^{p-1}\|_q \leq \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}\,. \tag{6.94}$$

De fato, notemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{[0\,,1]} [|f+g|^{p-1}]^q &= \int_{[0\,,1]} |f+g|^{\overbrace{q\,(p-1)}^{\overset{(6.75)}{=}\,p}} \\
&= \int_{[0\,,1]} |f+g|^p \\
&= \|f+g\|_p^{\,p} \overset{(6.91)}{<} \infty\,,
\end{aligned} \tag{6.95}$$

mostrando a validade de (6.95) e (6.94).

Apliquemos desigualdade de Hölder a cada uma das parcelas de (6.92) (na 1.a parcela, consideramos $f \doteq |f|$, $g \doteq |f+g|^{p-1}$ e na 2.a parcela, consideramos $f \doteq |g|$, $g \doteq |f+g|^{p-1}$), para obtermos:

$$\int_{[0\,,1]} |f|\,|f+g|^{p-1} \leq \|f\|_p\, \||f+g|^{p-1}\|_q\,, \tag{6.96}$$

$$\int_{[0\,,1]} |f+g|^{p-1}\,|g| \leq \|g\|_p\, \||f+g|^{p-1}\|_q\,. \tag{6.97}$$

Portanto de (6.92), (6.96) e (6.97), segue que:

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_p{}^p &\overset{(6.24)}{=} \int_{[0,1]} |f+g|^p \\
&\overset{(6.92)}{\leq} \int_{[0,1]} |f+g|^{p-1}|f| + \int_{[0,1]} |f+g|^{p-1}|g| \\
&\overset{(6.96)\text{ e }(6.97)}{\leq} \|f\|_p \, \||f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \, \||f+g|^{p-1}\|_q \\
&\overset{(6.94)}{\leq} \|f\|_p \, \|f+g\|^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p \, \|f+g\|^{\frac{p}{q}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \, \|f+g\|^{\frac{p}{q}} \, .
\end{aligned} \tag{6.98}
$$

Logo, de (6.88) e (6.98), segue que

$$
\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p \, . \tag{6.99}
$$

Mas, da Observação 6.2.2, temos que

$$
p - \frac{p}{q} \overset{(6.76)}{=} 1 \, ,
$$

que juntamente com (6.99) implicarão na validade da desigualdade (6.78), completando a demonstração.

□

Observação 6.2.3

1. *Com isto completamos a verificação que no espaço vetorial* $(L^p([0,1];\mathbb{R}), +, \cdot)$, *a função* $\|\cdot\|_p$, *dada por* (6.24), *se* $p \in (1, \infty)$ *e por* (6.36), *se* $p = \infty$, *é uma norma nesse espaço, ou seja, o espaço vetorial real acima é normado, para* $p \in [1, \infty]$.

2. *Utilizando-se, entre outros, o Corolário* 6.2.2 *(ou seja,* (6.74)*), podemos mostrar que no espaço vetorial real*

$$
\left(L^2([0,1];\mathbb{R}), +, \cdot\right) \, , \tag{6.100}
$$

se consideramos a função

$$
\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2([0,1];\mathbb{R}) \times L^2([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \, ,
$$

dada por

$$
\langle f, g \rangle \doteq \int_{[0,1]} f \, g \, , \quad \textit{para cada} \quad f, g \in L^2([0,1];\mathbb{R}) \, , \tag{6.101}
$$

segue que está função será um produto interno no mesmo.

A verificação deste fato será deixada comoe exercício para o leitor.

A norma associada a este será a norma será a norma $\|\cdot\|_2$*, introduzida em* (6.24)*, com* $p \doteq 2$.

Em particular,

$$\left(L^2([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot\,,\langle\cdot\,,\cdot\rangle\right)$$

será um espaço vetorial real munido de um produto interno.

6.3 Convergência e Completitude no Espaço Vvetorial Real Normado L^p

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que, para cada $p \in [1\,,\infty]$ fixado, o espaço vetorial real

$$(L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)\ ,$$

quando munido da norma $\|\cdot\|_p$, introduzida em (6.24), torna-se-á um **espaço métrico completo**, isto é, é um **espaço de Banach**.

Para isto relembremos alguns conceitos importantes relacionados a cada um dos temas acima.

Começaremos pela:

Definição 6.3.1 *Sejam* $p \in [1\,,\infty]$ *fixado e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, uma sequência de funções em* $L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$ *e* $f \in L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$.

Diremos que **sequência de funções** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$**, é convergente para função** f**, em** $L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$*, se dado* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$*, tal que*

$$\textit{se} \quad n \geq N\,, \quad \textit{deveremos ter} \quad \|f - f_n\|_p < \varepsilon\,. \tag{6.102}$$

Neste caso escreveremos

$$f_n \to f\,, \qquad \textit{em } L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R}) \tag{6.103}$$

$$\textit{ou ainda,} \qquad f_n \overset{L^p([0,1];\mathbb{R})}{\longrightarrow} f\,, \tag{6.104}$$

$$\textit{ou, por simplicidade} \qquad f_n \overset{L^p}{\to} f\,, \tag{6.105}$$

Observação 6.3.1

1. *A convergência introduzida na Definição* 6.3.1 *em* $L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$ *também é conhecida como* **convegência em média de ordem** p.

2. *A convergência introduzida na Definição* 6.3.1 *é a obtida do espaço (vetorial real) métrico*

$$(L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,,d_p)\ ,$$

onde a métrica

$$d_b : L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R}) \times L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,,$$

é dada por:

$$\begin{aligned} d_p(f\,,g) &\doteq \|f-g\|_p \\ &= \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{[0\,,1]} |f-g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\,, & se \quad p \in (1\,,\infty) \\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in[0\,,1]}|f(x)-g(x)|\,, & se \quad p=\infty \end{cases} . \end{aligned} \tag{6.106}$$

3. *Da Definição 6.3.1 acima, temos que:*

$$\begin{aligned} & f_n \to f\,, \quad em\ L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,, \\ se,\ e\ somente,\ se \quad & \|f-f_n\|_p \to 0\,, \quad quando\ n \to \infty\,. \end{aligned} \tag{6.107}$$

4. *A convergência em $L^\infty([0\,,1]\,;\mathbb{R})$ é quase a convergência uniforme em $[0\,,1]$. Mais precisamente,*

$$\begin{aligned} & f_n \to f\,, \quad em\ L^\infty([0\,,1]) \\ se,\ e\ somente\ se, \quad & podemos\ encontrar\ E \subseteq [0\,,1],\ E \in \mathscr{M},\ com\ m(E)=0, \\ & tal\ que\ f_n \xrightarrow{u} f\ em\ [0\,,1] \setminus E. \end{aligned} \tag{6.108}$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

5. *Lembremos que*

$$\begin{aligned} & f_n \to f\,, \quad pontualmente\ em\ [0\,,1] \\ se,\ e\ somente\ se, \quad & para\ cada\ x \in [0\,,1],\ temos\ que \\ & f_n(x) \to f(x),\ quando\ n \to \infty\,. \end{aligned} \tag{6.109}$$

6. *Lembremos também que*

$$\begin{aligned} & f_n \to f\,, \quad q.t.p.\ em\ [0\,,1] \\ se,\ e\ somente\ se, \quad & podemos\ encontrar\ E \subseteq [0\,,1],\ E \in \mathscr{M},\ com\ m(E)=0, \\ & tal\ que,\ para\ cada\ x \in [0\,,1] \setminus E,\ teremos: \\ & f_n(x) \to f(x)\ quando\ n \to \infty\,. \end{aligned} \tag{6.110}$$

Temos também a:

Definição 6.3.2 *Sejam $p \in [1\,,\infty]$ fixado e $(f_n)_{n\ in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$.*

Diremos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma **sequência de Cauchy em $L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$**, *se dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$, tal que*

$$se \quad n\,,m \geq N\,, \quad teremos: \quad \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon\,. \tag{6.111}$$

Observação 6.3.2 *Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que se uma sequência é convergente em* $(L^p([0,1];\mathbb{R}), d_p)$*, então ela será uma sequência de Cauchy em* $(L^p([0,1];\mathbb{R}), d_p)$*.*

Como sabemos, a recíproca **nem** *sempre é verdadeira.*

Com sito temos a:

Proposição 6.3.1 *Sejam* $(U, +, \cdot, \|\cdot\|)$ *espaço vetorial normado e* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de Cauchy em* $(U, d_{\|\cdot\|})$*, onde* $d_{\|\cdot\|}$ *denota a métrica induzida pela norma* $\|\cdot\|$*.*

Suponhamos que uma a subsequência $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*, da sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, for uma sequência convergente* $(U, d_{\|\cdot\|})$*, para* $a \in U$*.*

Então a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será convergente em* $(U, d_{\|\cdot\|})$*, para* $a \in U$*, ou seja,*

$$a_n \to a, \quad \text{em } (U, d_{\|\cdot\|}). \tag{6.112}$$

Demonstração:

Como a subsequência $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é convergente, em $(U, d_{\|\cdot\|})$, para $a \in U$, temos que, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se} \quad n_k \geq N_1, \quad \text{teremos:} \quad |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.113}$$

Por outro lado, como a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em $(U, d_{\|\cdot\|})$, podemos encontrar $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se} \quad n, m \geq N_2, \quad \text{teremos:} \quad |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.114}$$

Seja

$$N_o = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}. \tag{6.115}$$

Notemos que, para $n \geq N_o$, escolhamos $n_k \in \mathbb{N}$, de modo que

$$n_k \geq N_o. \tag{6.116}$$

Deste modo teremos, de (6.116) e (6.115), que

$$n_k \geq N_1 \quad \text{e} \quad n_i \geq N_2.$$

Logo

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \\ &\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| \\ &\overset{(6.113)\text{ e }(6.114)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, em $(U, d_{\|\cdot\|})$, para $\underline{a}$, completando a demonstração.

□

Observação 6.3.3 *Notemos que a Proposição 6.3.2 pode ser demonstrada para espaços métricos.*

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor (feita na disciplina de Esmpaços Métricos).

Podemo introduzir a:

Definição 6.3.3 *Um espaço vetorial normado será dito* <u>**completo**</u>*, se toda sequência de Cauchy neste espaço, for convergente no espaço.*

Um espaço vetorial normado completo será denominado de <u>**espaço de Banach**</u>.

Observação 6.3.4

1. *A Definição 6.3.3 pode ser introduzia para espaços métricos (feita na disciplina de Esmpaços Métricos)..*

2. *Lembremos que dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço vetorial normado $(U, +, \cdot, \|\cdot\|)$, podemos construir uma nova sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cujos termos serão dados por:*
$$s_n \doteq \sum_{i=1}^{n} a_i\,, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6.117}$$
que será deminada de <u>**série associada a sequência** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$</u> *e indicada por* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

   Diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* <u>**convegente, em** $(U, d_{\|\cdot\|})$**, para** s</u> *se a sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente, em* $(U, d_{\|\cdot\|})$*, para* s*, ou seja, se*
$$s_n \to s\,, \quad \textit{em}\ (U, d_{\|\cdot\|})\,. \tag{6.118}$$

   Neste caso diremos s é a <u>**soma da série** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$</u> .

   Neste caso escreveremos
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \doteq s\,. \tag{6.119}$$

   Na situação acima, diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* <u>**absolutamente convegente em** $(U, d_{\|\cdot\|})$</u>*, se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ *for convergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$*, onde* $d_{\mathbb{R}}$ *denota a métrica usual de* $\mathbb{R}$.

3. *Lembremos que se* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de números reais e a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ *(isto é,* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *é convergente em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$*) então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente em* $\mathbb{R}$.

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (visto na disciplina de Análise II)

4. *Em geral, em um espaço vetorial normado a propriedade do item 3. acima pode* **não** *ser verdadeira.*

   O resultado a seguir nos diz que a propriedade do item 3. acima valerá se o espaço vetorial normado for completo, mais precisamente temos a:

Proposição 6.3.2 *Seja* $(U, +, \cdot, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado.*

O espaço vetorial normado $(U, +, \cdot, \|\cdot\|)$ *é completo se, e somente se, toda série absolutamente convergente em* $(U, d_{\|\cdot\|})$*, for uma série convergente em* $(U, d_{\|\cdot\|})$.

Demonstração:

Suponhamos que o espaço vetorial normado $(U, +, \cdot, \|\cdot\|)$ é completo e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja absolutamente convergente em $(U, d_{\|\cdot\|})$, ou seja, podemos encontar $s \geq 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| = M, \quad \text{em } (U, d_{\|\cdot\|}). \tag{6.120}$$

Logo, da convergência da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ segue que, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} \|a_n\| < \varepsilon. \tag{6.121}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$s_n \doteq \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{6.122}$$

Logo, se $n \geq m \geq N$, teremos

$$\begin{aligned}
\|s_n - s_m\| &\overset{(6.122)}{=} \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=m+1}^{n} a_i \right\| \\
&\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} \sum_{i=m+1}^{n} \|a_i\| \\
&< \sum_{n=N}^{\infty} \|a_n\| \overset{(6.121)}{<} \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Logo a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será um sequência de Cauchy em $(U\,, d_{\|\cdot\|})$, que é um espaço métrico completo.

Logo existe $s \in U$ tal que

$$s_n \to s\,, \quad \text{em } (U\,, d_{\|\cdot\|})\,,$$

mostrando que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente em $(U\,, d_{\|\cdot\|})$.

Reciprocamente, suponhamos que toda série absolutamente convergente em $(U\,, d_{\|\cdot\|})$ seja convergente em $(U\,, d_{\|\cdot\|})$.

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(U\,, d_{\|\cdot\|})$.

Mostremos que a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $(U\,, d_{\|\cdot\|})$, ou seja, o espaço métrico $(U\,, d_{\|\cdot\|})$ é completo.

Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $N_k \in \mathbb{N}$ tal que se

$$\text{se} \quad n\,, m \geq N_k\,, \quad \text{teremos} \quad \|a_n - a_m\| < 2^{-k}\,. \tag{6.123}$$

Podemos escolher N_k, de modo que

$$N_{k+1} > N_k$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Com isto obtemos uma subsequência $(a_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Consideremos a sequência $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dada por

$$b_1 \doteq a_{N_1} \quad \text{e} \quad b_k \doteq a_{N_k} - a_{N_{k-1}}\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \{2\,, 3\,, 4\,, \cdots\}\,. \tag{6.124}$$

Deste modo podemos considerar a série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Notemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} s_m &\doteq \sum_{k=1}^{m} b_k \\ &= (a_{N_k} - a_{N_{k-1}}) + (a_{N_{k-1}} - a_{N_{k-2}}) + \cdots + (a_{N_2} - a_{N_1}) + a_{N_1} \\ &= a_{N_k}\,. \end{aligned} \tag{6.125}$$

Logo, para cada $k \in \{2\,, 3\,, \cdots\}$, teremos:

$$\begin{aligned} \|b_k\| &\overset{(6.124)}{=} \|a_{N_k} - a_{N_{k-1}}\| \\ &\overset{(6.124)}{\leq} 2^{-k+1}\,, \end{aligned} \tag{6.126}$$

logo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|b_k\| &= \|b_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} \|b_k\| \\ &\overset{(6.126)}{\leq} \|b_1\| + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}}_{\leq 1} \\ &= \|b_1\| + 1\,, \end{aligned}$$

ou seja, a sequência numérica $\left(\sum_{k=1}^{m} \|b_k\|\right)_{m \in \mathbb{N}}$ é monótona (crecente) e limitada em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$.

Logo, de um resultado de Análise I, segue que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \|b_k\|$ será convergente em $(\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$.

Logo a série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ será absolutamente convergente em $(U\,, d_{\|\cdot\|})$ implicando, por hipótese, que a série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ será convergente em $(U\,, d_{\|\cdot\|})$, ou seja, podemos encontrar $a \in U$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \doteq a\,. \tag{6.127}$$

Logo, de (6.125), segue que a subsequência $(a_{N_k})_{k \in \mathbb{N}}$ da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será convergente, em $(U\,, d_{\|\cdot\|})$, para $a \in U$.

Como a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(U\,, d_{\|\cdot\|})$, da Proposição 6.3.2, segue que a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será convergente, em $(U\,, d_{\|\cdot\|})$, para $a \in U$, mostrando que o espaço vetorial normado é completo, finalizando a demonstração.

□

Podemos agora enunciar e provar o:

Teorema 6.3.1 (de Riez-Fischer) *Seja* $p \in [1\,,\infty]$ *fixo.*

Então o espaço vetorial real nomado $(L^p([0\,,1]\,;\,,\mathbb{R})\,,+\,,\cdot\,,\|\cdot\|_p)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração:

O caso
$$p = \infty$$
será deixado como exercício para o leitor (veja o Exercício 9, da página 118 de [HLR] e ver também a página 60 de [RB]).

Exibiremos, a seguir, a demonstração para o caso
$$p \in [1\,,\infty)\,.$$

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$.

Pela Proposição 6.3.2 acima, basta mostrar que se a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p$ é convergente em $(\mathbb{R}\, d_{\mathbb{R}})$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ será convergente em $(L^p([0\,,1]\,;\,,\mathbb{R})\,,d_p)$, onde a métrica d_p é dada por (6.106).

Suponhamos que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p$ é convergente em $(\mathbb{R}\, d_{\mathbb{R}})$ e consideremos
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p = M \in [0\,,\infty)\,. \tag{6.128}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos a função $s_n : [0\,,1] \to \mathbb{R}$, dada por:
$$s_n(x) \doteq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,. \tag{6.129}$$

Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$ temos, por hipótese, que $f_k \in L^p([0\,,1])$.

Logo, do fato acima, de (6.129) e do fato que $(L^p([0\,,1]\,;\,,\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ é um espaço vetorial (real), segue que
$$s_n \in L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Além disso, por indução $n \in \mathbb{N}$ e da Proposição 6.2.2 (ou seja, da desigualdade de Minkowsky), segue que
$$\begin{aligned} \|s_n\|_p &\overset{(6.78)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \\ &\overset{(6.128)}{\leq} M\,. \end{aligned} \tag{6.130}$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, de (6.129) segue que

$$s_n \geq 0 . \tag{6.131}$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, do item 4. da Proposição 4.4.1, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} (s_n)^p &\overset{(4.290)}{\leq} \int_{[0,1]} M^p \\ &\overset{(4.287)}{=} M^p \int_{[0,1]} 1 \\ &= M^p . \end{aligned} \tag{6.132}$$

Notemos que, para cada $x \in [0,1]$, a sequência numérica $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ será uma sequência numérica crescente em $\mathbb{R}$, o que implicará que a sequência numérica $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente em $([0,\infty], d_{\mathbb{R}^*})$, isto é, para cada $x \in [0,1]$, podemos encontrar

$$s(x) \doteq \lim_{n\to\infty} s_n(x) \in [0, \infty]. \tag{6.133}$$

Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$s_n(x) \leq s(x) , \quad \text{para cada} \quad s(x) \in [0,1] . \tag{6.134}$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função s_n é Lebesgue mensuráveis em $[0,1]$ segue, da Proposição 3.5.4, que a função $s : [0,1] \to [0,\infty]$ será Lebesgue mensurável em $[0,1]$.

Além disso, como temos (6.131), do Lema 4.3.1 (isto é, do Lema de Fatou), segue que

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} s^p &\overset{(4.235)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int_{[0,1]} (s_n)^p \\ &\overset{(6.132)}{\leq} M^p < \infty, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \qquad s^p \in L^1([0,1];\mathbb{R}) , \tag{6.135}$$

$$\text{em particular, teremos:} \qquad s(x) \in \mathbb{R} , \quad \text{q.t.p. em } [0,1] . \tag{6.136}$$

Notemos também que, pela construção acima (ou seja, (6.129)), se $x \in [0,1]$ é tal que

$$s(x) \in [0,\infty) ,$$

segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ será absolutamente convergente em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ com sua soma, que indicaremos por $S(x)$, isto é,

$$S(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) , \quad \text{para} \quad x \in [0,1] , \quad \text{se} \quad s(x) \in [0,\infty) . \tag{6.137}$$

Se $x \in [0,1]$ é tal que $s(x) = \infty$ definamos

$$S(x) \doteq 0. \tag{6.138}$$

Logo, de (6.136) , (6.137) e (6.138), segue que

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k, \quad \text{q.t.p. em } [0,1]. \tag{6.139}$$

Em particular, pela Proposição 3.5.5, segue que a função S será uma função Lebesgue mensurável em $[0,1]$.

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0,1]$, teremos:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| &\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \\ &\overset{(6.129)}{=} s_n(x) \\ &\overset{\text{a sequência } (s_n(x)) \text{ é crecente em } \mathbb{R}}{\leq} s(x).\end{aligned} \tag{6.140}$$

Logo, de (6.138), (6.139) e (6.140), segue que

$$|S(x)| \leq s(x), \quad \text{para cada} \quad x \in [0,1]. \tag{6.141}$$

De (6.135), temos que $s \in L^p([0,1];\mathbb{R})$, assim , de (6.141), segue que $S \in L^p([0,1];\mathbb{R})$.
Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x)\right|^p &\overset{\text{dsigualdade triangular e indução cobre } n \in \mathbb{N}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| + |S(x)|\right)^p \\ &\overset{(6.3)}{\leq} C_p \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|\right)^p + |S(x)|^p \\ &\overset{(6.3) \text{ e indução sobre } n \in \mathbb{N}}{\leq} C_p' \left[\sum_{k=1}^{n} |f_k|^p + |S(x)|^p\right] \\ &\overset{(6.140) \text{ e } (6.141)}{\leq} C_p'[s_n(x)]^p + [s(x)]^p \\ &\overset{(6.134)}{\leq} C_p'[s(x)]^p + [s(x)]^p \\ &= 2\,C_p'\,[s(x)]^p, \quad \text{para cada} \quad x \in [0,1].\end{aligned} \tag{6.142}$$

Como (veja (6.135)) $s \in L^p([0,1];\mathbb{R})$, de (6.142), segue que $C_p\, s^p \in L^1([0,1];\mathbb{R})$.
Além disso, de (6.139), temos que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k - S\right| \to 0, \quad \text{q.t.p. em } [0,1].$$

Logo, do Teorema 4.4.1 (isto é, do Teorema da convergência dominada de Lebesgue), segue que

$$\int_{[0,1]} \left| \sum_{k=1}^{n} f_k - S \right|^p \to 0 , \quad \text{quando} \quad n \to \infty ,$$

ou, equivalentemente,
$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k - S \right\|_p \to 0 , \quad \text{quando} \quad n \to \infty .$$

Portanto a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ será convergente, em $(L^p([0,1];\mathbb{R}), d_p)$, para a função S.

Logo, da Proposição 6.3.2, segue que o espaço métrico $(L^p([0,1]), d_p)$ será completo, completando a demonstração.

□

6.4 Funcionais Lineares Limitados no Espaço Vetorial Real Normado L^p

Nesta última seção estudaremos, para cada $p \in [1,\infty]$ fixado, algumas propriedades de funcionais lineares limitados definidos no espaço vetorial real normado

$$(L^p([0,1], +, \cdot, \|\cdot\|_p) .$$

Começaremos introduzindo a:

Definição 6.4.1 *Seja* $(U, +_u, \cdot_u)$ *um espaço vetorial real.*

Diremos que uma função $F : U \to \mathbb{R}$ *é um* <u>**funcional linear em** $(U, +, \cdot)$</u>, *se*

$$F(u +_u \alpha \cdot_u v) = F(u) +_{\mathbb{R}} \alpha \cdot_{\mathbb{R}} F(v) , \tag{6.143}$$

para todo $u, v \in U$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *onde* $+_{\mathbb{R}}$ *e* $\cdot_{\mathbb{R}}$ *denotam as operações de adição e multiplicação de números reais, respectivamente.*

Podemos deste modo, introduzir o seguinte conjunto:

$$\mathcal{L}(U;\mathbb{R}) = U' \doteq \{F : U \to \mathbb{R};\ F \text{ é um funcional linear em } (U, +, \cdot)\} . \tag{6.144}$$

Observação 6.4.1

1. *Na condições da Definição 6.4.1, temos que*

$$(\mathcal{L}(U;\mathbb{R}), +_{\mathcal{L}}, \cdot_{\mathcal{L}}) = (U', +_{\mathcal{L}} \cdot_{\mathcal{L}})$$

é um espaço vetorial real, onde $+_{\mathcal{L}}$ *denota a operação de adição usual de funções e* $\cdot_{\mathcal{L}}$ *denota a operação de multiplicação de um número real por uma função.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (feita na disciplina de Álgebra Linear).

2. *O conjunto*

$$\mathcal{L}(U;\mathbb{R}) = U',$$

também é denominado **dual algébrico** *do espaço vetorial real* $(U, +_u, \cdot_u)$.

Definição 6.4.2 *Seja* $(U, +_u, \cdot_u)$ *um espaço vetorial munido de uma norma* $\|\cdot\|_u$.

Diremos que um funcional linear $F : U \to \mathbb{R}$ *é* **limitado em** $(U, +, \cdot, \|\cdot\|)$, *se podemos encontrar* $M_F \geq 0$, *tal que*

$$|F(u)| \leq M_F \, \|u\|_u, \tag{6.145}$$

para todo $u \in U$.

Podemos deste modo, introduzir o seguinte conjunto:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(U;\mathbb{R}) &= U^* \\ &\doteq \{F : U \to \mathbb{R};\ F \text{ é um funcional linear limitado} \\ &\qquad \text{em } (U, +, \cdot, \|\cdot\|_u)\}.\end{aligned} \tag{6.146}$$

Observação 6.4.2

1. *Na condições da Definição 6.4.2, temos que*

$$(\mathcal{B}(U;\mathbb{R}), +_{\mathcal{L}}, \cdot_{\mathcal{L}}) = (U^*, +_{\mathcal{L}} \cdot_{\mathcal{L}})$$

é um espaço vetorial real, onde $+_{\mathcal{L}}$ *denota a operação de adição usual de funções e* $\cdot_{\mathcal{L}}$ *denota a operação de multiplicação de um número real por uma função.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (feita na disciplina de Álgebra Linear).

2. *Na situação da Definição 6.4.2, temos que*

$$\mathcal{B}(U;\mathbb{R}) = U^*,$$

é denominado **dual topológico** *do espaço vetorial real normado* $(U, +_u, \cdot_u, \|\cdot\|_u)$

Definição 6.4.3 *Nas condições da Definição 6.4.2, podemos intorduzi a funçaõ*

$$\|\cdot\|_{u^*} : U^* \to \mathbb{R},$$

dada por

$$\|F\|_{u^*} \doteq \sup\left\{\frac{|F(u)|}{\|u\|_u};\ u \neq O\right\}, \tag{6.147}$$

para cada $F \in U^*$.

Observação 6.4.3

1. *Observemos que se* $F \in U^*$ *então, da Definição 6.4.2, podemos encontrar* $M_F \geq 0$*, tal que*

$$|F(u)| \leq M_F \, \|u\|_u \,, \quad \textit{para} \quad u \in U \,,$$

e se $u \neq O$*, teremos:*
$$0 \leq \frac{|F(u)|}{\|u\|_u} \leq M_F \,,$$

mostrando que o conjunto

$$\left\{ \frac{|F(u)|}{\|u\|_u} \,;\; u \neq O \right\} \subset [0\,, \infty)$$

é limitado superiormente em $[0\,, \infty)$.

Logo admitirá supremo, logo $\|F\|_{u^*}$ *está bem definido.*

2. *Pode-se mostrar que função* $\|\cdot\|_{U^*}$ *é uma* **norma em** $(U^*\,, +_{\mathcal{L}} \cdot_{\mathcal{L}})$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (feita na disciplina de Álgebra Linear).

3. *Para* $F \in U^*$*, pode-se mostrar que*

$$\|F\|_{u^*} \doteq \sup\left\{ |F(v)| \,;\; v \in U \,, \quad \textit{com} \quad \|v\|_u = 1 \right\} . \tag{6.148}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (feita na disciplina de Álgebra Linear).

4. *Para* $f \in U^*$*, também pode-se mostrar que*

$$\|F\|_{u^*} \doteq \inf\left\{ M_F \,;\; M_F \ \textit{satisfaz} \ (6.145) \right\} . \tag{6.149}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (feita na disciplina de Álgebra Linear).

Com isto temos a:

Proposição 6.4.1 *Sejam* $p\,, q \in [1\,, \infty]$ *fixados, tal que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{6.150}$$

e $g \in L^q([0\,,1]\,;\mathbb{R})$.

Definamos a funções $F : L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*, dada por:*

$$F(f) \doteq \int_{[0\,,1]} f\, g \,, \quad \textit{para cada} \quad f \in L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R}) \,. \tag{6.151}$$

Então a função F *é um funcional linear limitado no espaço vetorial real normado* $(L^p([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot,\|\cdot\|_p)$.

Além disso, teremos

$$\|F\|_{\mathcal{U}^*} = \|g\|_q\,. \tag{6.152}$$

Demonstração:

Sabendo-se que

$$f \in L^p([0,1];\mathbb{R})\,, \quad g \in L^q([0,1];\mathbb{R}) \tag{6.153}$$

e temos (6.150), da Proposição 6.2.1 (ou seja, do Teorema da desigualdade de Hölder), segue que se $f \in L^p([0,1])$

$$\begin{aligned}\left|\int_{[0,1]} f\,g\right| &\overset{(4.282)}{\leq} \int_{[0,1]} |f\,g| \\ &\overset{(6.63)}{\leq} \|f\|_p\,\|g\|_q \\ &\overset{(6.153)}{<} \infty\,.\end{aligned} \tag{6.154}$$

mostrando que a função F, dada por (6.151) está bem definida.

É fácil ver que F é um funcional linear no espaço vetorial real $(L^p([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Notemos também que, para cada $f \in L^p([0,1];\mathbb{R})$, teremos:

$$\begin{aligned}|F(f)| &\overset{(6.151)}{=} \left|\int_{[0,1]} f\,g\right| \\ &\overset{(6.154)}{\leq} \underbrace{\|g\|_q}_{\doteq M_F}\,\|f\|_p\,,\end{aligned}$$

ou seja, da Definição 6.4.2, segue que a função F, dada por (6.151), é um funcional linear limitado no espaço vetorial real normado $(L^p([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot,\|\cdot\|_p)$.

Além disso, de (6.149), se $f \in L^p([0,1];\mathbb{R})$ é tal que $f \neq O$, então teremos

$$\frac{|F(f)|}{\|f\|_p} \overset{(6.149)}{\leq} \|g\|_q\,. \tag{6.155}$$

Logo, de (6.155) e (6.149), segue que

$$\|F\|_{\mathcal{U}^*} \leq \|g\|_q\,. \tag{6.156}$$

Faremos a demonstração da identidade (6.152) para o caso que

$$p \in (1,\infty)\,. \tag{6.157}$$

O caso que

$$p = \infty \quad \text{e} \quad q = 1 \quad \text{(ou vice-versa)}$$

será deixado como exercício para o leitor o caso (veja o Exercício 18, da página 123 de [HLR]).

Considermos a função $f_o : [0\,,1] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f_o(x) \doteq |g(x)|^{\frac{q}{p}}\, \mathrm{sgn}[g(x)]\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,, \tag{6.158}$$

onde $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a <u>**função sinal de** x</u>, isto é, dada por:

$$\mathrm{sgn}(y) \doteq \begin{cases} 1\,, & \text{se} \quad y \in (0\,,\infty)\,, \\ 0\,, & \text{se} \quad y = 0\,, \\ -1\,, & \text{se} \quad y \in (-\infty\,,0) \end{cases} \tag{6.159}$$

Notemos que,

$$f_o(0) = 0 \tag{6.160}$$

e, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, teremos:

$$\begin{aligned} |f_o(x)|^p &\overset{(6.158)}{=} \left\{ \left| |g(x)|^{\frac{q}{p}}\, \mathrm{sgn}[g(x)] \right| \right\}^p \\ &\left\{ \left| |g(x)|^{\frac{q}{p}} \right| \, |\mathrm{sgn}[g(x)]| \right\}^p \\ &\overset{|\mathrm{sgn}[g(x)]| \overset{(6.159)}{=} 1, \text{ para } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}{=} |g(x)|^q\,. \end{aligned} \tag{6.161}$$

Portanto, de (6.160) e (6.161) segue que

$$|f_o(x)|^p = |g(x)|^q\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.162}$$

Como $g \in L^q([0\,,1]\,;\mathbb{R})$, de (6.162), segue que $f \in L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$.

Além disso, de (6.162), teremos:

$$\begin{aligned} \|f_o\|_p{}^p &\overset{(6.24)}{=} \int_{[0\,,1]} |f_o|^p \\ &\overset{(6.162)}{=} \int_{[0\,,1]} |g|^q \\ &\overset{(6.24)}{=} \|g\|_q{}^q\,, \end{aligned} \tag{6.163}$$

ou seja,
$$\|f_o\|_p = \|g\|_q{}^{\frac{q}{p}} \tag{6.164}$$

Observemos que, de (6.150), segue que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

se, e somente se:
$$\frac{q+p}{p\,q} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$$

ou ainda:
$$\frac{q+p}{p} = q \quad \text{ou} \quad q - 1 = \frac{q}{p}\,. \tag{6.165}$$

Logo, teremos:

$$\begin{aligned} f_o\, g &\overset{(6.158)}{=} |g|^{\frac{q}{p}} \underbrace{\operatorname{sgn}(g)\cdot g}_{=|g|} \\ &= |g|^{\frac{q}{p}+1} \\ &\overset{(6.165)}{=} |g|^q \\ &\overset{(6.162)}{=} |f_o|^p . \end{aligned} \tag{6.166}$$

Finalmente temos

$$\begin{aligned} F(f_o) &\overset{(6.151)}{=} \int_{[0,1]} f_o\, g \\ &\overset{(6.166)}{=} \int_{[0,1]} |f_o|^p \\ &\overset{(6.24)}{=} \|f\|_p{}^p \\ &\overset{(6.163)}{=} \|g\|_q{}^q \\ &\overset{q\in(1,\infty)}{=} \|g\|_q\, \|g\|_q{}^{q-1} \\ &\overset{(6.165)}{=} \|g\|_q\, \|g\|_q{}^{\frac{q}{p}} \\ &\overset{(6.164)}{=} \|g\|_q\, \|f_o\|_p . \end{aligned} \tag{6.167}$$

Logo, de (6.156) e (6.167), segue que

$$\|F\|_{\mathcal{U}^*} = \|g\|_q ,$$

mostrando a validade da identidade (6.152) e completando a demonstração.

□

Nosso objetivo a seguir é mostrar que vale a recíproca da Proposição 6.4.1 acima, quando

$$\boxed{p \in [1,\infty)},$$

isto é, todo funcional linear limitado em $(L^p([0,1];\mathbb{R}), +, \cdot, \|\cdot\|_p)$, é da forma (6.151), para alguma $g \in L^q([0,1];,\mathbb{R})$.

Antes porém, temos o:

Lema 6.4.1 *Sejam* $p, q \in [1,\infty]$ *fixados, tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{6.168}$$

e $g \in L^1([0,1];\mathbb{R})$.

Suponhamos que exista $M_g \geq 0$*, tal que*

$$\left| \int_{[0,1]} f\, g \right| \leq M_g \, \|f\|_p \,, \tag{6.169}$$

para toda função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *Lebesgue mensurável e limitada em* $[0,1]$.

Então

$$g \in L^q([0,1]; \mathbb{R}) \quad e \quad \|g\|_q \leq M_g \,. \tag{6.170}$$

Demonstração:

Conisderaremos, primeiramente, o caso que

$$p \in (1, \infty)\,. \tag{6.171}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos as funções $g_n, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, dadas por:

$$g_n(x) \doteq \begin{cases} g(x)\,, & \text{se} \quad |g(x)| \leq n\,, \\ 0\,, & \text{se} \quad |g(x)| > n \end{cases} \,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0,1] \tag{6.172}$$

e

$$f_n \doteq |g_n|^{\frac{q}{p}} \operatorname{sgn}(g_n)\,, \tag{6.173}$$

onde a função sgn é dada por (6.159).

Notemos que, se $x \in [0,1]$ satisfaz

$$|g(x)| > n\,,$$

$$\text{então, de (6.172) e (6.173), teremos:} \quad f(x) = 0\,, \tag{6.174}$$

$$\text{ou seja,} \quad f_n\, g_n = f_n\, g \tag{6.175}$$

Com isto, para cada $n \in \mathbb{N}$ (semelhante a (6.164) e (6.166) na demonstração da Proposição 6.4.1 acima) teremos:

$$\|f_n\|_p \overset{(6.164)}{=} \|g_n\|_q^{\frac{q}{p}} \tag{6.176}$$

e

$$\begin{aligned} |g_n|^q &\overset{(6.166)}{=} f_n\, g_n \\ &\overset{(6.175)}{=} f_n\, g \end{aligned} \tag{6.177}$$

Observemos que, de (6.168), segue que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

$$\text{se, e somente se,} \quad \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$$

$$\text{ou ainda,} \quad q - 1 = \frac{q}{p}$$

$$\text{ou seja:} \quad q - \frac{q}{p} = 1\,. \tag{6.178}$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
\|g_n\|_q{}^q &\overset{(6.24)}{=} \int_{[0,1]} |g_n|^q \\
&\overset{(6.177)}{=} \int_{[0,1]} f_n\, g \\
&\overset{(6.169)}{\leq} M_g\, \|f_n\|_p \\
&\overset{(6.176)}{=} M_g \|g_n\|_q{}^{\frac{q}{p}} \\
\text{logo:} \quad & \|g_n\|_q{}^{q-\frac{q}{p}} \leq M_g \\
\text{que, de (6.178), implicará em:} \quad & \|g_n\|_q \leq M_g \\
\text{ou ainda, de (6.24), que:} \quad & \int_{[0,1]} |g_n|^q \leq M_g{}^q\,. \qquad (6.179)
\end{aligned}$$

Notemos que, de (6.172), segue que

$$|g_n|^q \to |g|^q\,, \quad \text{em } [0,1],. \qquad (6.180)$$

Logo, do Teorema 4.3.1 (ou seja, do Lema de Fatou), segue que

$$\begin{aligned}
\|g\|_q{}^q &\overset{(6.24)}{=} \int_{[0,1]} |g|^q \\
&\overset{(4.235)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{[0,1]} |g_n|^q \right) \\
&\overset{(6.179)}{\leq} M^q < \infty\,,
\end{aligned}$$

mostrando que

$$g \in L^q([0,1];\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \|g\|_q \leq M_g\,,$$

ou seja, a validade da identidade (6.170), completado esta parte da demonstração.

Tratemos agora do caso

$$p = 1\,. \qquad (6.181)$$

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos o conjunto

$$E_\varepsilon \doteq \{x \in [0,1]\,;\, |g(x)| \geq M + \varepsilon\} \qquad (6.182)$$

e a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f \doteq \operatorname{sgn}(g) \cdot \mathcal{X}_{E_\varepsilon}\,, \qquad (6.183)$$

onde a função sgn é dada por (6.159).

Como $g \in L^1([0,1];\mathbb{R})$ temos que a função g é Lebesgue mensúrável em $[0,1]$, logo teremos que

$$E_\varepsilon \in \mathscr{M}$$

e assim, a função f, dada por (6.183), será Lebesgue mensurável em $[0\,,1]$.

Notemos também que:

$$
\begin{aligned}
\|f\|_1 &\overset{(6.24)\text{ com } p=1}{=} \int_{[0\,,1]} |f| \\
&\overset{(6.183)}{=} \int_{[0\,,1]} |\mathrm{sgn}(g)\,\mathcal{X}_{E_\varepsilon}| \\
&= \int_{[0\,,1]} \mathcal{X}_{E_\varepsilon} \\
&= m(E_\varepsilon) \overset{E_\varepsilon \subseteq [0\,,1]}{\leq} 1 < \infty\,.
\end{aligned} \tag{6.184}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
M_g\, m(E_\varepsilon) &\overset{(6.184)}{=} M\,\|f\|_1 \\
&\overset{(6.169)\text{ com } p=1}{\geq} \left|\int_{[0\,,1]} f\,g\right| \\
&\overset{(6.183)}{=} \left|\int_{[0\,,1]} \underbrace{g\,\mathrm{sgn}(g)}_{=|g|}\,\mathcal{X}_{E_\varepsilon}\right| \\
&= \int_{E_\varepsilon} |g| \\
&\overset{(6.182)}{\geq} \int_{E_\varepsilon} (M_g + \varepsilon) \\
&= (M_g + \varepsilon)\int_{E_\varepsilon} 1 \\
&= (M + \varepsilon)\, m(E_\varepsilon)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\text{implicando em:} \qquad \varepsilon \cdot m(E_\varepsilon) \leq 0\,, \tag{6.185}
$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Logo, (6.185) implicará que

$$
m(E_\varepsilon) = 0\,,
$$

isto é,

$$
g \in L^\infty([0\,,1]\,;\,,\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \|g\|_\infty \leq M_g\,,
$$

ou seja, a validade da identidade (6.170) para $p = 1$, isto é, $q = \infty$, completado a demonstração.

□

Para finalizar temos o:

Teorema 6.4.1 (da Representação de Riesz) *Sejam* $p \in [1\,,\infty)$ *fixado e*

$$
F : L^p([0\,,1]\,;\,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}
$$

um funcional linear limitado no espaço vetorial real normado $(L^p([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot,\|\cdot\|_p)$ *(ou seja,* $F \in U^*$*).*

Então, existe $g_F \in L^q([0,1];\mathbb{R})$ *tal que*

$$F(f) = \int_{[0,1]} f\, g_F\,, \quad \textit{para cada} \quad f \in L^p([0,1];\mathbb{R})\,. \tag{6.186}$$

Além disso

$$\|F\|_{U^*} = \|g_F\|_q\,. \tag{6.187}$$

Demonstração:

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $F \neq O$, caso contrário, consderaremos

$$g_F \doteq O\,, \quad \text{em } [0,1]\,,$$

e a conclusão do resultado será válida.

Parte I:

Mostremos, primeiramente, que (6.186) e (6.187), são válidas para as funções

$$f = \mathcal{X}_s \doteq \mathcal{X}_{[0,s]}\,, \quad \text{para cada} \quad s \in [0,1]\,. \tag{6.188}$$

Notemos que, se $0 \leq s \leq t \leq 1$, de (6.188), teremos:

$$\begin{aligned} |\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_s| &= t - s \\ &= l[(s,t)]\,. \end{aligned} \tag{6.189}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Para ver isto, consideremos a função $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$\Phi(s) \doteq F(\mathcal{X}_s)\,, \quad \text{para cada} \quad s \in [0,1]\,. \tag{6.190}$$

Afirmamos que a função Φ é uma função absolutamente contínua em $[0,1]$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, consideremos (temos que $\|F\|_{U^*} \neq 0$)

$$\delta \doteq \min\left\{1\,, \left(\frac{\varepsilon}{\|F\|_{U^*}}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\,. \tag{6.191}$$

Suponahmso que a coleção de intervalos

$$\{(s_i\,, s_i')\,;\, i \in \{1,2,\cdots,N\}\}$$

é uma coleção finita e disjunta de intervalos abertos, contidos em $[0,1]$, tal que

$$\sum_{i=1}^{N} \underbrace{l[(s_i\,, s_i')]}_{=s_i'-s_i} < \delta\,. \tag{6.192}$$

Consideremos a função $h : [0\,,1] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$h \doteq \sum_{i=1}^{N} (\mathcal{X}_{s_i'} - \mathcal{X}_{s_i})\,\mathrm{sgn}\,[\Phi(s_i') - \Phi(s_i)]\ , \tag{6.193}$$

onde a função sgn é dada por (6.159).

Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} |\Phi(s_i') - \Phi(s_i)| &\overset{(6.190)}{=} \sum_{i=1}^{N} \left|F(\mathcal{X}_{s_i'}) - F(\mathcal{X}_{s_i})\right| \\
& \sum_{i=1}^{N} \left\{\left[F(\mathcal{X}_{s_i'}) - F(\mathcal{X}_{s_i})\right]\ \mathrm{sgn}\left[F(\mathcal{X}_{s_i'}) - F(\mathcal{X}_{s_i})\right]\right\} \\
&\overset{F\ \text{ é linear}}{=} F\left[\sum_{i=1}^{N} \left(\mathcal{X}_{s_i'} - \mathcal{X}_{s_i}\right)\ \mathrm{sgn}\left[F(\mathcal{X}_{s_i'}) - F(\mathcal{X}_{s_i})\right]\right] \\
&\overset{(6.193)}{=} F\left[\sum_{i=1}^{N} \left(\mathcal{X}_{s_i'} - \mathcal{X}_{s_i}\right) \mathrm{sgn}\,[\Phi(s_i') - \Phi(s_i)]\right] \\
&\overset{(6.193)}{=} F(h)\,.
\end{aligned} \tag{6.194}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|h\|_p{}^p &\overset{(6.24)}{=} \int_{[0\,,1]} |h|^p \\
&\overset{(6.193)}{=} \int_{[0\,,1]} \left|\sum_{i=1}^{N} (\mathcal{X}_{s_i'} - \mathcal{X}_{s_i})\,\mathrm{sgn}[\Phi(s_i') - \Phi(s_i)]\right|^p \\
&\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} \int_{[0\,,1]} \left[\sum_{i=1}^{N} \left|\mathcal{X}_{s_i'} - \mathcal{X}_{s_i}\right|\ \underbrace{|\mathrm{sgn}[\Phi(s_i') - \Phi(s_i)]|}_{=1}\right]^p \\
&= \int_{[0\,,1]} \left[\sum_{i=1}^{N} \left|\mathcal{X}_{s_i'} - \mathcal{X}_{s_i}\right|\right]^p \\
&\overset{(6.189)}{=} \int_{[0\,,1]} \left[\sum_{i=1}^{N} l[(s_i\,, s_i')]\right]^p \\
&\overset{\sum_{i=1}^{N} l[(s_i\,,s_i')] \overset{(6.192)}{<} \delta \overset{(6.191)}{\leq} 1 \text{ e } p\in[1\,,\infty)}{<} \sum_{i=1}^{N} l[(s_i\,, s_i')] \\
&\overset{(6.192)}{<} \delta\,.
\end{aligned} \tag{6.195}$$

Assim temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} |\Phi(s_i') - \Phi(s_i)| &\overset{(6.194)}{=} F(h)\\ &\overset{\text{F é limitado}}{\leq} \|F\|_{u^*}\, \|h\|_p\\ &\overset{(6.195)}{<} \|F\|_{u^*}\, \delta^p\\ &\overset{(6.191)}{\leq} \varepsilon,\end{aligned}$$

mostrando que a função Φ, dada por (6.190), é absolutamente contínua em $[0\,,1]$.

Pelo Teorema 5.4.1, temos que existe uma função $g \in L^1([0\,,1]\,;\mathbb{R})$, tal que

$$\Phi(s) = \int_{[0\,,s]} g\,, \quad \text{para cada} \quad s \in [0\,,1]\,. \tag{6.196}$$

Logo

$$\begin{aligned}F\,(\mathcal{X}_s) &\overset{(6.190)}{=} \Phi(s)\\ &\overset{(6.197)}{=} \int_{[0\,,s]} g\\ &= \int_{[0\,,1]} \mathcal{X}_s\, g\,.\end{aligned} \tag{6.197}$$

Deste modo completamos a demonstração da parte I.

Parte II:

Mostremos agora, que (6.186) e (6.187), são válidas para as funções degraus definidas em $[0\,,1]$.

De fato, se

$$[a\,,b] \subseteq [0\,,1]\,,$$

teremos

$$\mathcal{X}_{[a\,,b]} = \mathcal{X}_b - \mathcal{X}_a\,. \tag{6.198}$$

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

Com isto teremos:

$$\begin{aligned}
F(\mathcal{X}_{[a,b]}) &\overset{(6.198)}{=} F(\mathcal{X}_b - \mathcal{X}_a) \\
&\overset{F \text{ é linear}}{=} F(\mathcal{X}_b) - F(\mathcal{X}_a) \\
&\overset{(6.198)}{=} \int_{[0,1]} \mathcal{X}_b \, g - \int_{[0,1]} \mathcal{X}_a \, g \\
&= \int_{[0,1]} [\mathcal{X}_b \, g - \mathcal{X}_a \, g] \\
&= \int_{[0,1]} (\mathcal{X}_b - \mathcal{X}_a) \, g \\
&\overset{(6.198)}{=} \int_{[0,1]} \mathcal{X}_{[a,b]} \, g \,,
\end{aligned} \tag{6.199}$$

mostrando que o resultado é válido para as funções características $\mathcal{X}_{[a,b]}$, para cada $[a,b] \subseteq [0,1]$, ou seja, a função g está associada à classe de funções

$$\{\mathcal{X}_{[a,b]} \,;\, 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Observemos que toda função degrau (ou escada) Ψ, definida em $[0,1]$, é do tipo

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \mathcal{X}_{[s_{i-1}, s_i]} \,, \tag{6.200}$$

onde

$$\mathcal{P} \doteq \{s_i \,;\, i \in \{0, 1, \cdots, N\}\}$$

é uma partição do intervalo $[a,b]$, e $c_i \in \mathbb{R}$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$.

Logo podemos considerar a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, obtida em (6.195), $g \in L^1([0,1])$ e assim, teremos

$$\begin{aligned}
F(\psi) &\overset{(6.200)}{=} F\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mathcal{X}_{[s_{i-1}, s_i]}\right) \\
&\overset{F \text{ é linear}}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot F(\mathcal{X}_{[s_{i-1}, s_i]}) \\
&\overset{(6.199)}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{[0,1]} \mathcal{X}_{[s_{i-1}, s_i]} \, g \\
&= \int_{[0,1]} \left[\sum_{i=1}^{n} c_i \, \mathcal{X}_{[s_{i-1}, s_i]}\right] g \\
&\overset{(6.200)}{=} \int_{[0,1]} \psi \, g,
\end{aligned}$$

mostrando que o resultado é válido para as funções degraus definidas em $[0\,,1]$, ou seja, a função g, obtida em (6.195), está associada a classe das funções degraus definidas em $[0\,,1]$.

Deste modo completamos a demonstração da parte II.

Parte III:

Mostremos agora, que a (6.186) e (6.187), são válidas para as funções limitada e Lebesgue mensurável em $[0\,,1]$.

Para tanto, consideremos $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e Lebesgue mensurável em $[0\,,1]$, da Proposição 3.5.6, segue que existe uma sequência $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, formada por funções degraus, definidas em $[0\,,1]$, tal que

$$\psi_n \to f\,, \quad \text{q.t.p. em } [0\,,1]\,. \tag{6.201}$$

Consideremos a função $g : [0\,,1] \to \mathbb{R}$, obtida em (6.195), função Lebesgue integrável em $[0\,,1]$ tal que

$$F(\psi) = \int_{[0\,,1]} \psi\, g\,, \tag{6.202}$$

associada a classe das funções degraus, definidas em $[0\,,1]$.

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f - \psi_n$ é Lebesgue mensurável em $[0\,,1]$.

Além disso, de (6.201), segue que podemos encontrar $M \geq 0$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$|f - \psi_n| \leq M\,, \quad \text{q.t.p. em } [0\,,1]\,. \tag{6.203}$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, de (6.203), segue que:

$$\begin{aligned} & |f - \psi_n|^p \leq M^p\,, \quad \text{q.t.p. em } [0\,,1] \\ \text{e} \quad & |f - \psi_n|^p \to 0 \quad \text{q.t.p. em } [0\,,1]\,. \end{aligned} \tag{6.204}$$

Logo, do Teorema 4.4.1 (isto é, do Teorema da convergência dominada de Lebesgue), seque que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|f - \psi_n\|_p^p &\overset{(6.24)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{[0\,,1]} |f - \psi_n|^p \\ &\overset{(4.322)}{=} \int_{[0\,,1]} \lim_{n\to\infty} |f - \psi_n|^p \\ &\overset{(6.204)}{=} 0, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad \|f - \psi_n\|_p \to 0\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,. \tag{6.205}$$

Como o funcional linear F é limitado no espaço vetorial real normado

$$(L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,, +\,, \cdot\,, \|\cdot\|_p)\;,$$

segue que:

$$\begin{aligned}
|F(f) - F(\psi_n)| &\overset{\text{F é linear}}{=} |F(f - \psi_n)| \\
&\overset{\text{F é limitado}}{\leq} \|F\|_{u^*} \, \|f - \psi_n\|_p \\
&\overset{(6.205)}{\to} 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,
\end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \qquad F(f) = \lim_{n \to \infty} F(\psi_n). \tag{6.206}$$

Como

$$\psi_n \to f, \quad \text{q.t.p. em } [0\,,1]\,, \tag{6.207}$$

segue que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $C \geq 0$, tal que

$$|(g\,\psi_n)(x)| \leq C\,|g(x)|\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,1]\,. \tag{6.208}$$

Logo, novamente, do Teorema 4.4.1 (isto é, do Teorema da convergência dominada de Lebesgue), segue que

$$\begin{aligned}
\int_{[0\,,1]} f\,g &\overset{(6.207)}{=} \int_{[0\,,1]} \left(\lim_{n \to \infty} \psi_n\right) g \\
&\overset{(4.322)}{=} \lim_{n \to \infty} \left(\int_{[0\,,1]} \psi_n\,g\right).
\end{aligned}$$

Logo, para cada função $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ limitada e Lebesgue mensurável em $[0\,,1]$, temos que

$$F(f) = \int_{[0\,,1]} f\,g\,. \tag{6.209}$$

Notemos que, se $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ limitada e Lebesgue mensurável em $[0\,,1]$, teremos:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{[0\,,1]} f\,g\right| &\overset{(6.209)}{=} |F(f)| \\
&\overset{\text{F é limitado}}{\leq} \|F\|_{u^*}\,\|f\|_p\,.
\end{aligned}$$

Logo, do Lema 6.4.1, segue que $g \in L^q([0\,,1]\,;\mathbb{R})$, e

$$\|g\|_q \leq \|F\|_{u^*}\,. \tag{6.210}$$

<u>**Parte IV:**</u>

Mostremos agora, que (6.186) e (6.187), são válidas para as funções pertencentes a $L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$.

Para tanto, consideremos $f \in L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$.

Dado $\varepsilon > 0$, do Exercício 14, da página 118 de [HLR], existe uma função degrau, que indicaremos por $\psi : [0\,,1] \to \mathbb{R}$, tal que

$$\|f - \psi\|_p < \varepsilon\,. \tag{6.211}$$

Como a função ψ é limitada e Lebesgue mensurável em $[0\,,1]$, da parte III, segue que

$$F(\psi) = \int_{[0\,,1]} \psi\, g\,. \tag{6.212}$$

Com isot teremos:

$$\begin{aligned}
\left| F(f) - \int_{[0\,,1]} f\,g \right| &= \left| F(f) - F(\psi) + \underbrace{F(\psi)} - \int_{[0\,,1]} f\,g \right| \\
&\overset{(6.212)}{=} \left| F(f) - F(\psi) + \int_{[0\,,1]} \psi\, g - \int_{[0\,,1]} f\,g \right| \\
&\overset{F \text{ é linear}}{=} \left| F(f-\psi) + \int_{[0\,,1]} (\psi\, g - f\,g) \right| \\
&= \left| F(f-\psi) + \int_{[0\,,1]} (\psi - f)\; g \right| \\
&\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} \underbrace{|F(f-\psi)|}_{\overset{F \text{ é limitado}}{\leq} \|F\|_{\mathcal{U}^*}\, \|f-\psi\|_p} + \underbrace{\left| \int_{[0\,,1]} (\psi - f)\, g \right|}_{\overset{\text{des. Hölder}}{\leq} \|\psi-f\|_p\, \|g\|_q} \\
&\leq \|F\|_{\mathcal{U}^*}\, \|f-\psi\|_p + \|\psi - f\|_p\, \|g\|_q \\
&\overset{(6.212)}{<} (\|F\|_{\mathcal{U}^*} + \|g\|_q)\; \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$F(f) = \int_{[0\,,1]} f\,g\,, \tag{6.213}$$

para $f \in L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$, completando a demosntração da parte IV.

Notemos que, a Proposição 6.4.1 garante que

$$\|F\|_{\mathcal{U}^*} = \|g\|_q\,,$$

completando a demonstração.

□

Observação 6.4.4

1. *O Exercício 19, da página 123 de [HLR], garante que vale um resultado análogo para o espaço das sequências numéricas cujas séries são formadas pelos módulos dos termos elevados a* p *são convergentes em* $\mathbb{R}$*, ou seja, o* $l^p(\mathbb{R})$*, para* $p \in [1\,,\infty)$.

2. *No capítulo 14 (veja o Teorema 8) de [HLR], temos um resultado semelhante para a representação de funcionais lineares limitados definidos em* $C([a\,,b]\,;\mathbb{R})$.

3. *Infelizmente,* **<u>não</u>** *vale um resultado análogo para* $\mathrm{L}^\infty([0\,,1])$ *(ou para* $\mathrm{l}^\infty(\mathbb{R})$*). A verificação deste fatro será deixada como exercício para o leitor.*

$\boxed{\textbf{F I M}}$

Referências Bibliográficas

[HLR] Royden, H.L - *Real Analysis*, 1968.

[RB] Bartle, R. - *The Elements of Integration*, 1966.

[R] Rudin, W. - *Principles of Mathematical Analisys*, 1976. (document), 3.2, 3.3, 3.3, 3.5, 3.6, 4.3.2, 4.5, 3, 8d, 6.3, 6.4, 6.4, 1, 2

(document), 3.5.5, 3, 6.3

2, 5.5, 5.5

Índice Remissivo

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 10
$A \sim B$, 7
$A \triangle B$, 8
$A \cap B$, 8
$A \cup B$, 7
$A \setminus B$, 7
$A \subseteq B$, 8
$BV([a\,,b]\,;\mathbb{R})$, 225
$D^+f(x_o)$, 214
$D^-f(x_o)$, 214
$D_+f(x_o)$, 214
$D_-f(x_o)$, 214
$E \overset{\circ}{+} y_o$, 103
$G(f)$, 9
$L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$
  convergência em, 283
N, 224
N_a^b, 224
$N_a^b(f)$, 224
P, 224
P_a^b, 224
$P_a^b(f)$, 224
R^*, 43
T, 224
T_a^b, 224
$T_a^b(f)$, 224
U', 293
U^*, 294
$X/_\equiv$, 28
$X \times Y$, 9
X^n, 9
$[0\,,1)/\sim$, 105
$[f]$, 267
$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, 8
$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, 8
$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, 8
$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, 8
$\int_E \varphi$, 139
$\int_E f$, 154, 166, 186
$\int_F f$, 167
$\int_{\mathbb{R}} \varphi$, 139
$\int_a^b f$, 154
$\int_E \varphi\, dm$, 138
$\int_{\mathbb{R}} \varphi\, dm$, 138
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 44
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, 47
$\mathcal{R}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$, 134
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 286
$\mathcal{R}\left(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right)$, 134
$\mathcal{R}\left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right)$, 134
$\int_A f$, 154

$\int_E f$, 154
$\liminf_{n\to\infty} x_n$, 47
$\liminf_{x\to a^+} f(x)$, 213
$\liminf_{x\to a^-} f(x)$, 213
$\liminf_{x\to x_o^+} f(x)$, 213
$\liminf_{x\to x_o^-} f(x)$, 213
$\liminf_{x\to x_o} f(x)$, 213
$\limsup_{x\to a^+} f(x)$, 213
$\limsup_{x\to a^-} f(x)$, 213
$\limsup_{x\to x_o^+} f(x)$, 213
$\limsup_{x\to x_o^-} f(x)$, 213
$\limsup_{x\to x_o} f(x)$, 213
$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, 47
$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, 47
ess sup, 271
inf, 37
λ-ésima
    coordenada, 18
$\langle x_i\rangle_{i=1}^{\infty}$, 10
$\mathcal{B}(U\,;\mathbb{R})$, 294
$\mathcal{F}_\sigma$
    conjunto do tipo, 75
$\mathcal{F}_{\sigma\delta}$
    conjunto que é do tipo, 76
$\mathcal{F}_{\sigma\delta}$
    conjunto que é do tipo, 76
$\mathcal{G}_\delta$
    conjunto do tipo, 75
$\mathcal{L}(U\,;\mathbb{R})$, 293
$\mathcal{L}^\infty([0\,,1]\,;\mathbb{R})$, 270
$\mathscr{M}$, 87
max, 30
min, 30
$\overline{E}$, 56
sgn, 297
σ-álgebra, 16
    de Borel, 72
$\sim$, 105
sup, 37
$f(X)$, 9
$f: X \to Y$, 9
$f'(x_o)$, 214
$f \sim g$, 267
f^+, 118
f^-, 118
f^{-1}, 10
$f_+'(x_o)$, 215
$f_-'(x_o)$, 215
$f_n \xrightarrow{L^p} f$, 283
$f_n \to f$
    em $L^p([0\,,1]\,;\mathbb{R})$, 283
$m(E)$, 96
$m^*(A)$, 79
$x \overset{\circ}{+} y$, 103
$\mathscr{P}(X)$, 7
álgebra, 12
    de Bolean, 12
ínfimo
    de um conjunto, 37

a.e, 123
aberto
    conjunto, 49
    intervalo, 49
absolutamente contínua
    função, em intervalo fechado e limitado,, 239
adição
    módulo 1, 103
algébrico
    número, 25
anti-simétrica
    relação, 29
axioma
    da escolha, 17
    de Archimedes, 41
    de completitude, 38

de corpo, 35
de ordem, 36

Banach
espaço de, 283, 286
boa ordenação
em um conjunto, 31
princípio, 32
Bolean
álgebra, 12
Borel
σ-álgebra, 72
corpo de, 16
boreleano, 72

Cantor
processo de diagonalização de, 26
característica
função, 10, 112
Carathéodory, 87
cardinalidade
mesma, 18
Cauchy
critério de, 45
sequência de, 45, 284
Cauchy-Bunyakowski-Schwarz
desigualde de, 278
classe
de equivalência, 105, 267
de quivalência, 27
cobertura
aberta de um conjunto, 61
cobre um conjunto, 61
de um conjunto, 61
de um conjunto, no sentido de Vitali, 206
fechada de um conjunto, 61
finita de um conjunto, 61
subcobertura de uma, 61
compacto
conjunto, 64
completo
espaço métrico, 283
composta
de funções, 10
conjugado
de um número real, 275
conjunto
$\#$, 18
$\mathcal{F}_\sigma$, 75
$\mathcal{G}_\delta$, 75
$\sim$, 18
ínfimo de um, 37
aberto em $\mathbb{R}$, 49
bem ordenado, 31
boreleano, 72
coberto por uma cobertura, 61
cobertura aberta de um, 61
cobertura de um, 61
cobertura fechada de um, 61
cobertura finita de um, 61
compacto de $\mathbb{R}$, 64
das partes de um conjunto, 7
do tipo $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$, 76
do tipo $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$, 76
dos números reais
operações de adição e multiplicação no, 35
dos números reais estendido, 43
dos números reais positivos, 36
elemento maximal de um, 30
elemento minimal de um, 30
enumerável, 19
fechado, 57
fecho de um, 56
finito, 19
função característica de um, 112
função caraterística do, 10
função contínua em um, 65
função limitada em um, 65
imagem de uma função, 9
infinito, 19
Lebesgue mensurável, 87

limitado, 37
limitado inferiormente, 37
limitado superiormente, 37
maior elemento de um, 30
medida exterior de um, 79
menor elemento de um, 30
não enumerável, 19
no máximo enumerável, 19
ordem parcial estrita em um, 31
ordem parcial reflexiva em um, 31
ponto aderente de um, 55
relação de equivalência em um, 26
restrição de uma função a um, 10
sequência em um, 10
supremo de um, 37
totalmente ordenado, 29
conjuntos
de mesma cardinalidade, 18
diferença entre, 7
diferença simétrica entre, 8
disjuntos, 8
dois a dois disjuntos, 8
equivalentes, 18
função entre, 9
inclusão, 8
interseção de, 8
interseção enumerável de, 8
interseção qualquer de, 8
produto de, 9
produto entre, 9
reunião de, 7
reunião enumerável de, 8
reunião qualquer de, 8
constante
de Lipschtiz, 241
contínua
absolutamente, 239
função, 65
convergência
em $L^p([0,1];\mathbb{R})$, 283
em medida, de uma sequência de funções, 199
pontual de uma sequência de funções, 72
uniforme de uma sequência de funções, 72
convergência dominada
teorema, de Lebesgue, da, 195
convergente
sequência, 44
convexa
função, 250
corpo, 36
ordenado, 36
crescente
sequência, 47
critério
de Cauhy para convergência de uma sequência, 45

decrescente
sequência, 47
degrau
função, 126
derivada
de uma função em um ponto, 214
derivadas
laterais de uma função em um ponto, 214
laterais de uma função, em um ponto, 214
laterais inferiores de uma função, em um ponto, 214
laterais superiores de uma função, em um ponto, 214
desigualdade
de Cauchy-Bunyakowski-Schwarz, 278
de Hölder, 275
de Jensen, 260
de Minkowski, 279
triangular, 270, 272
diferenciável

função, 214
diferenciável à direita
função, 215
diferenciável à esquerda
função, 215
dual
algébrico de um espaço vetorial real, 294
topológico de um espaço vetorial real normado, 294

Egoroff
teorema de, 128
enumerável
conjunto, 19
enumeravelmente
sub-aditiva, 87
equivalência
classe de, 27, 105, 267
entre dois racionais pertencentes a $[0, 1)$, 105
relação de, 18, 26
escada
função, 126
escolha
axioma da, 17
função, 17
espaço
de Banach, 283, 286
métco completo, 286
métrico completo, 283
quociente, 105
quociente por uma relação de equivalência, 28
essencialmente limitada
função, 270

Faou
lema de, 176
fechado
intervalo, 49
subconjunto da reta que é, 57
fecho
de um subconjunto da reta, 56
finito
conjunto, 19
função
absolutamente contínua em um intervalo fechado e limitado, 239
característica de um conjunto, 10, 112
conjunto imagem, 9
contínua em um conjunto, 65
contínua em um ponto, 65
convexa, 250
de variaçao limitada em um intervalo fechado, 225
degrau, 126
diferenciável à direita de um ponto, 215
diferenciável à esquerda de um ponto, 215
diferenciável em um ponto, 214
equivalente a outra função, 267
escada, 126
escolha, 17
essencialmente limitada, 270
gráfico de uma, 9
injetora, 10
integral de Lebesgue de uma, 138, 154
integral de Lebesgue em um conjunto, de uma, 138
integral de Lebesgue, em um conjunto mensurável, de uma, 154
integral de Lebesgue, em um conjunto, de uma, 186
integral de Riemann de uma, 134
inversível, 10
inversa, 10
Lebesgue integrável em um conjunto, 186
Lebesgue integrável em um conjunto mensurável, 182
Lebesgue mensurável, 111
limitada em um conjunto, 65

Lipschtiziana em um intervalo fechado e limitado, 241
parte negativa da, 118
parte positiva da, 118
restrição a um conjunto, 10
reta suporte de um ponto, relativamente à uma, 258
Riemann integrável, 134
simples, 127
representação canônica, 128
sinal de, 297
sobrejetora, 10
supremo essencial, 271
uniformemente contínua, 70
variação negativa, em um intervalo fechado e limitado, de uma, 224
variação positiva, em um intervalo fechado e linitado, de uma, 224
variação total, em um intervalo fechado e linitado, de uma, 224

funções
composta de, 10

funcional
linear, 293
linear e limitado, 294

gráfico
de uma função, 9

Hölder
desigualdade de , 275

Hausdorff
princípio de, 31

Heine-Borel
teorema de, 61

indefinida
integral, 248

inferior
limitante, 37

infinito
conjunto, 19

injetora
função, 10

integrável
função Lebesgue, 186
segundo Riemann, 134

integral
de Lebesgue de uma função, 154
de Lebesgue de uma função, em um conjunto, 186
de Lebesgue, em um conjunto mensurável, de uma função, 154
de Riemann, 134
indefinida, 248

integral inferior
de Riemann, de uma função, em um intevalo fechado e limitado, 134

integral superior
de Riemann, de uma função, em um intevalo fechado e limitado, 134

intervalo
aberto, 49
fechado, 49
semi-aberto, 49

inversível
função, 10

inversa
função, 10

Jensen
desigualdade de, 260

Lebesgue
conjunto mensurável segundo, 87
função integrável em um conjunto mensurável, segundo, 182
função integrável em um conjunto, segundo, 186
função mensurável, segundo, 111
integral de, 154
integral de uma função em um conjunto, segundo, 138

integral de uma função, em um conjunto, segundo, 186
integral de uma função, segundo, 138
integral, em um conjunto mensurável, de, 154
medidade de um conjunto mensurável, segundo, 96
teorema da convergência dominada de, 195
lema
de Fatou, 176
de Vitali, 206
limitada
função, 65
teorema da convergência, 164
limitado
funcional linear e , 294
limitante
inferior, 37
superior, 37
limite
de uma sequência convergente, 44
inferior de uma função em um ponto, 213
inferior de uma função, pela direita de um ponto, 213
inferior de uma função, pela esquerda de um ponto, 213
superior de uma função em um ponto, 213
superior de uma função, pela direita de um ponto, 213
superior de uma função, pela esquerda de um ponto, 213
limite inferior
de uma sequência, 47
limite superior
de uma sequência, 47
Lindelöf
teorema de, 55
linear
funcional, 293
funcional limitado e, 294
Lipschtiz
constante de, 241
Lipschtiziana
função, 241
Littlewood
primeiro princípio de, 102
segundo princípio, 126
terceiro princípio de, 128

módulo 1
adição, 103
translação de um conjunto por um número, 103
maior ou igual, 30
medida
de Lebesgue de um conjunto mensurável, 96
exterior de um subconjunto da reta, 79
menor ou igual, 30
mensurável
conjunto Lebesgue, 87
função Lebesgue, 111
Minkowski
desigualdade de, 279
monótona
sequência, 47
teorema da convergência, 178

número
algébrico, 25
não enumerável
conjunto, 19
negativa
variação de uma função em um intervalo fechado e limitado, 224
no máximo enumerável
conjunto, 19
norma
de um funcional linear limitado, 295
semi-, 267

operação
binária compatível com uma relação de equivalência, 28
operações
de adição e multiplicação no conjunto dos números reais, 35
ordem
parcial estrita em um conjunto, 31
parcial reflexiva em um conjunto, 31
ordem parcial
relação de, 29
ordem total
relação de, 29
ordenado
corpo, 36

parte
negativa de uma função, 118
positiva de uma função, 118
partição
de um intervalo fechado e limitado, 126
ponto
aderente de um subconjunto da reta, 55
de acumulação de uma sequência, 45
ponto de acumulação
de uma sequência em $\mathbb{R}^*$, 46
pontualmente convergente
sequência de funções, 72
positiva
variação de uma função em um intervalo fechado e limitado, 224
primeiro princípio
de Littlewood, 102
princípio
da boa ordenação, 32
da definição recursiva, 38
maximal de Hausdorff, 31
produto
cartesiano qualquer, 18
projeção
natural de um conjunto no quociente, 28

q.s., 123
q.t.p., 123
quase
sempre, 123
toda parte, 123
quociente
espaço, 28, 105

recursiva
princípio da definição, 38
relação
$\sim$, 18
anti-simétrica em um conjunto, 29
de equivalência, 18
de equivalência em um conjunto, 26
de ordem parcial em um conjunto, 29
de ortem total em um conjunto, 29
representação
canônica de uma função simples, 128
restrição
de uma função a um conjunto, 10
reta suporte
de um ponto, relativamente à uma função, 258
Riemann
integrável, 134
integral, 134
integral inferior, 134
integral superior, 134
soma inferior, 133
soma superior, 133
Riesz
teorema da representação de, 301
Riez-Fischer
teorema de, 290

série, 286
absolutamente convergente, 286
soma de uma, 286

segundo princípio
de Littlewood, 126
semi
norma, 267
semi-aberto
intervalo, 49
sequência
convergente, 44
crescente, 47
critério de Cauchy para a convergência de uma, 45
de Cauchy em L^p, 284
de Cauhy, 45
de funções convergente em $L^p([0,1];\mathbb{R})$, 283
de funções convergente em média p, 283
de funções pontualmente convergente, 72
de funções uniformente convergente, 72
decrescente, 47
em um conjunto, 10
limite de uma, 44
limite inferior, 47
limite superior, 47
monótona, 47
ponto de acumulação de uma, 45
ponto de acumulação em $\mathbb{R}^*$, de uma, 46
sequência de funções
convergente em medida, 199
simples
função, 127
sobrejetora
função, 10
soma
de uma série, 286
soma inferior
de Riemann, associada a uma função e a uma partição de um intervalo fechado e limitado, 133
soma superior
de Riemann, associada a uma função e a uma partição de um intervalo fechado e limitado, 133
sub-aditiva
enumeravelmente, 87
subcobertura
de uma cobertura, 61
superior
limitante, 37
supremo
de um conjunto, 37
supremo essencial
de uma função, 271

teorema
da convergência dominada de Lebesgue, 195
da convergência limitada, 164
da convergência monótona , 178
da representação de Riesz, 301
de Egoroff, 128
de Heine-Borel, 61
de Lindelöf, 55
de Riez-Fischer, 290
terceiro princípio
de Littlewood, 128
total
variação de uma função em um intervalo fechado e limitado, 224
totalmente ordenado
conjunto, 29
translação
módulo 1, de conjunto por número, 103
triangular
desigualdade, 272

uniformemente convergente
sequência de funções, 72
uniformemente contínua
função, 70

validade de uma propriedade

quase sempre, 123
quase toda parte, 123
variação
negativa de uma função em um intervalo fechado e limitado, 224
positiva de uma função em um intervalo fechado e limitado, 224
total de uma função em um intervalo fechado e limitado, 224
variação limitada
função de, 225
Vitali
cobertura de um conjunto, no sentido de, 206
lema de, 206