Notas do Curso de SLC533 - Topologia

Prof. Wagner Vieira Leite Nunes

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho poderá servir como notas de aula para cursos cujas ementas tratam de espaços métricos, em particular, para a disciplinas SLC533 - Topologia.

Serão exibidos todos os conceitos relacionados com o conteúdo acima, bem como propriedades e aplicações dos mesmos.

As referências ao final das notas poderão servir como material importante para o conteúdo aqui desenvolvido.

Capítulo 2

Espaços Métricos

2.1 Definições básicas e exemplos de espaços métricos

Começaremos com a:

Definição 2.1.1 *Seja* $\underline{M}$ *um conjunto não vazio.*
Diremos que uma aplicação

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

é uma **métrica (ou distância) no conjunto** $\underline{M}$ *se as seguintes condições estão satisfeitas:*

1. *para todo* $x \in M$, *deveremos ter* $\boxed{\mathbf{d1}}$

$$d(x\,,x) = 0\,; \tag{2.1}$$

2. *se* $x\,,y \in M$ *e* $x \neq y$, *deveremos ter* $\boxed{\mathbf{d2}}$

$$d(x\,,y) > 0\,; \tag{2.2}$$

3. *para todo* $x\,,y \in M$, *deveremos ter* $\boxed{\mathbf{d3}}$

$$d(x\,,y) = d(y\,,x)\,; \tag{2.3}$$

4. *para todo* $x\,,y\,,z \in M$, *deveremos ter* $\boxed{\mathbf{d4}}$

$$d(x\,,z) \leq d(x\,,y) + d(y\,,z)\,. \tag{2.4}$$

Observação 2.1.1

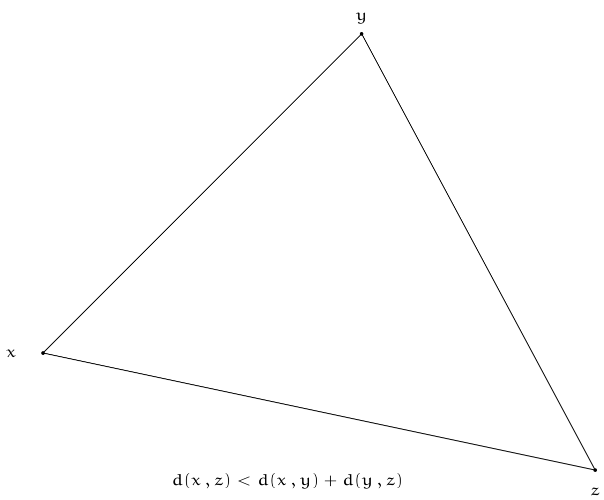
1. *Notemos que os itens 1. e 2. da Definição 2.1.1, implicam que, para todo* $x, y \in M$, *deveremos ter*
$$d(x,y) \geq 0, \tag{2.5}$$
e que
$$d(x,y) = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad x = y. \tag{2.6}$$

2. *Na situação acima, obtemos que, para* $x, y, z \in M$, *teremos:*
$$\begin{aligned} d(x,y) &\overset{(2.4)}{\leq} d(x,z) + d(z,y) \\ &\overset{(2.3)}{=} d(x,z) + d(y,z) \end{aligned}$$
$$\text{ou seja,} \quad d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z),$$
$$\text{ou ainda,} \quad |d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z).$$

3. *o item 3. da Definição 2.1.1, nos diz que a função* $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *é um função simétrica.*

4. *o item 4. da Definição 2.1.1, é conhecida como* **desigualdade triangular**.

   Este nome se deve ao fato que, na geometria euclideana, o comprimento de um lado de um triângulo é sempre menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados do triângulo.



Podemos agora introduzir a:

Definição 2.1.2 *Se a função* $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *é uma métrica no conjunto* $\underline{M}$, *então o par* (M, d) *será denominado* **espaço métrico**.

Observação 2.1.2 *Quando não houver possibilidade de confusão nos referiremos ao espaço métrico* $\underline{M}$, *ao invés de* (M, d), *deixando subentendido a métrica* $\underline{d}$ *a ser considerada.*

Notação 2.1.1 *Se* $(M\,,d)$ *é um espaço métrico, os elementos do conjunto* $\underline{M}$ *serão ditos* **pontos do espaço métrico**.

A seguir daremos alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 2.1.1 *Seja* $\underline{M}$ *um conjunto não vazio.*

Consideremos a aplicação $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$d(x\,,y) = \begin{cases} 0\,, & \textit{para } x = y \\ 1\,, & \textit{para } x \neq y \end{cases} . \tag{2.7}$$

Afirmamos que a função $\underline{d}$ *é uma métrica em* $\underline{M}$, *que será denominada* **métrica zero-um**.

Resolução:

O item 1. da Definição 2.1.1 ocorre.

Para isto notemos que, de (2.7), segue que

$$d(x\,,x) = 0\,,$$

mostrando que o item 1. da Definição 2.1.1 se verifica.

Mostremos que o item 2. da Definição 2.1.1 ocorre.

De fato, para isto notemos que se $x \neq y$, de (2.7), segue que

$$d(x\,,y) = 1 > 0\,,$$

mostrando que o item 2. da Definição 2.1.1 se verifica.

O item 2. da Definição 2.1.1 ocorre.

De fato, para isto notemos que se $x = y$, de (2.7), segue que

$$\begin{aligned} & d(x\,,y) = 0 \quad \text{e} \quad d(y\,,x) = 0\,, \\ \text{isto é,} \quad & d(x\,,y) = 0 = d(y\,,x)\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Por outro lado, de $x \neq y$, de (2.7), segue que

$$\begin{aligned} & d(x\,,y) = 1 \quad \text{e} \quad d(y\,,x) = 1\,, \\ \text{isto é,} \quad & d(x\,,y) = 1 = d(y\,,x)\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Logo, de (2.8) e (2.9), segue que item 3. da Definição 2.1.1 se verifica.

O item 3. da Definição 2.1.1 ocorre.

De fato, para isto notemos que se $x = z$ então, de (2.7), segue que

$$\begin{aligned} d(x\,,z) &= 0 \\ &\leq \underbrace{d(x\,,y)}_{\text{item 2. da Definição 2.1.1} \atop \geq 0} + \underbrace{d(y,z)}_{\text{item 2. da Definição 2.1.1} \geq 0} \end{aligned} \tag{2.10}$$

para todo $y \in M$.

Por outro lado, se $x \neq z$ então, de (2.7), segue que

$$d(x\,,z) = 1 \leq d(x\,,y) + d(y\,,z) \tag{2.11}$$

para todo $y \in M$, pois se $y = z$, de (2.7), teremos

$$d(x\,,y) = 0$$

e como $y = x \neq z$, de (2.7), segue que $d(y\,,z) = 1$ assim (2.11) ocorrerá.

Se $y = z$ teremos algo semelhante ocorrendo.

Logo, de (2.11) , segue que item 4. da Definição 2.1.1 se verifica, ou seja a função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, dada por (2.7), é uma métrica no conjunto $\underline{M}$.

$\square$

Temos também o:

Exercício 2.1.1 *Sejam* $(M\,,d)$ *um espaço métrico e* $S \subseteq M$*, não vazio.*

Então tomando-se a restrição de $\underline{d}$ *ao conjunto* $S \times S$*, isto é,* $d_{|_S} : S \times S \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$d_{|_S}(x\,,y) \doteq d(x\,,y)\,, \quad \textit{para cada} \quad x\,,y \in S\,,$$

segue que a função $d_{|_S}$ *será uma métrica no conjunto* $\underline{S}$*.*

<u>Resolução:</u>

A verificação que os itens 1., 2., 3. e 4. da Definição 2.1.1 ocorrerão para a função $d_{|_S}$ é imediata, pois as mesmas ocorrem no conjunto $\underline{M}$, logo continuarão valendo no subconjunto $\underline{S}$ do conjunto $\underline{M}$.

$\square$

Observação 2.1.3 *No caso acima o par* $(S\,,d_{|_S})$ *será dito* **subespaço métrico do espaço métrico** $(M\,,d)$ *e a métrica* $d_{|_S}$ *será dita* **<u>métrica induzida pela métrica d</u>** *do conjunto* $\underline{M}$*.*

Com isto temos o:

Exemplo 2.1.2 *Seja* $M \doteq \mathbb{R}$ *e* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$d(x\,,y) \doteq |x - y|\,, \quad \textit{para cada} \quad x\,,y \in \mathbb{R}\,. \tag{2.12}$$

Afirmamos que a funçao $\underline{d}$ *é uma métrica em* $M = \mathbb{R}$*.*

<u>Resolução:</u>

O item 1. da Definição 2.1.1 ocorre.

De fato, notemos que

$$d(x\,,x) \overset{(2.12)}{=} |x - x| = |0| \overset{\text{propriedade do módulo}}{=} 0\,,$$

mostrando que o item 1. da Definição 2.1.1 se verifica.

O item 2. da Definição 2.1.1 ocorre.

De fato, se $x \neq y$, segue que

$$d(x\,,y) \overset{(2.12)}{=} |x-y| \overset{x-y\neq 0}{>} 0\,,$$

mostrando que o item 2 da Definição 2.1.1 se verifica.

O item 3. da Definição 2.1.1 ocorre.

De fato, notemos que

$$\begin{aligned} d(y\,,x) &\overset{(2.12)}{=} |y-x| \\ &= |-(x-y)| \\ &\overset{\text{propriedade do módulo}}{=} |x-y| \\ &\overset{(2.12)}{=} d(x\,,y)\,, \end{aligned}$$

mostrando que o item 3. da Definição 2.1.1 se verifica.

O item 4. da Definição 2.1.1 ocorre.

De fato, observemos que

$$\begin{aligned} d(x\,,y) &\overset{(2.12)}{=} |x-y| \\ &= |x+(-z+z)-y| \\ &= |(x-z)+(z-y)| \\ &\overset{\text{propriedade do módulo}}{\leq} |x-z|+|z-y| \\ &\overset{(2.12)}{=} d(x\,,z)+d(z\,,y)\,, \end{aligned}$$

mostrando que o item 4. da Definição 2.1.1 se verifica, ou seja, a função $\underline{d}$, dada por (2.12), será uma métrica no conjunto $M = \mathbb{R}$.

□

Observação 2.1.4 *No caso acima diremos que a métrica $\underline{d}$ é a* **métrica usual em $\mathbb{R}$**.

Podemos estender a situação apresentada no Exemplo 2.1.2 acima, a saber:

Exemplo 2.1.3 *Para $n \in \mathbb{N}$, seja $M \doteq \mathbb{R}^n$.*

Podemos considerar as seguintes aplicações

$$d\,, d_1\,, d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

dadas por:

$$\begin{aligned}
d(x,y) &\doteq \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.13) \\
d_1(x,y) &\doteq |x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n| \\
&= \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|, \qquad (2.14) \\
d_2(x,y) &\doteq \max\{|x_1-y_1|,\cdots,|x_n-y_n|\} \\
&= \max_{i\in\{1,2,\cdots,n\}}|x_i-y_i|, \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

onde

$$x \doteq (x_1,x_2,\cdots,x_n),\ y \doteq (y_1,y_2,\cdots,y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Afirmamos que as aplicações d_1, d_2, d_3 *são métricas no conjunto* $M = \mathbb{R}^n$.

Resolução:

Mostremos que aplicação <u>d</u> satisfaz os itens 1., 2., 3. e 4. da Definição 2.1.1.

Notemos que

$$\begin{aligned}
d(x,x) &\overset{(2.14)}{=} \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}0^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja, o item 1. da Definição 2.1.1 se verifica.

Além disso, se $x \neq y$ então para algum $i_o \in \{1,2,\cdots,n\}$, temos que

$$x_{i_o} \neq y_{i_o}.$$

Com isot segue que

$$\begin{aligned}
d(x,y) &\overset{(2.14)}{=} \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \left[(x_{i_o}-y_{i_o})^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{x_{i_o}\neq y_{i_o}}{>} 0,
\end{aligned}$$

ou seja, o item 2. da Definição 2.1.1 se verifica.

Temos também que, se $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} d(x, y) &\stackrel{(2.14)}{=} \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} [-(y_i - x_i)]^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} (-1)^2 (y_i - x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{(2.14)}{=} d(y, x), \end{aligned}$$

ou seja, o item 3. da Definição 2.1.1 se verifica.

O item 3. da Definição 2.1.1 para da função $\underline{d}$ será verificada no Exemplo (2.1.4) que virá mais adiante.

Portanto a função $\underline{d}$ será uma métrica em $M = \mathbb{R}^n$.

Mostremos que aplicação $\underline{d_1}$ satisfaz os itens 1., 2., 3. e 4. da Definição 2.1.1.

Notemos que

$$\begin{aligned} d_1(x, x) &\stackrel{(2.15)}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, o item 2. da Definição 2.1.1 se verifica.

Além disso, se $x \neq y$ então para algum $i_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$, temos que

$$x_{i_o} \neq y_{i_o}.$$

Com isto segue que

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &\stackrel{(2.15)}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\ &\geq |x_{i_o} - y_{i_o}| \\ &\stackrel{x_{i_o} \neq y_{i_o}}{>} 0, \end{aligned}$$

ou seja, o item 2. da Definição 2.1.1 se verifica.

Temos também que, se $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &\overset{(2.15)}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |-(y_i - x_i)| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \\ &\overset{(2.15)}{=} d_1(y,x), \end{aligned}$$

ou seja, o item 3. da Definição 2.1.1 se verifica.

Para finalizar, observemos que, se $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, teremos:

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &\overset{(2.15)}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \\ &\overset{|a+b| \leq |a|+|b|}{\leq} \sum_{i=1}^{n} [|x_i - z_i| + |z_i - y_i|] \\ &\overset{\text{propriedade de somas finitas}}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| \\ &\overset{(2.15)}{=} d_1(x,z) + d_1(z,y) \end{aligned}$$

ou seja, o item 4. da Definição 2.1.1 se verifica.

Portanto a função $\underline{d_1}$ será uma métrica em $M = \mathbb{R}^n$.

Mostremos que aplicação $\underline{d_2}$ satisfaz os itens 1., 2., 3. e 4. da Definição 2.1.1.

Notemos que

$$\begin{aligned} d_2(x,x) &\overset{(2.15)}{=} \max_{i \in \{1,2,\cdots,n\}} |x_i - x_i| \\ &= \max_{i \in \{1,2,\cdots,n\}} 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, o item 2. da Definição 2.1.1 se verifica.

Além disso, se $x \neq y$ então para algum $i_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$, temos que

$$x_{i_o} \neq y_{i_o}.$$

Com isto segue que

$$\begin{aligned} d_2(x\,,y) &\overset{(2.15)}{=} \max_{i\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}} |x_i - y_i| \\ &\geq |x_{i_o} - y_{i_o}| \\ &\overset{x_{i_o}\neq y_{i_o}}{>} 0\,, \end{aligned}$$

ou seja, o item 2. da Definição 2.1.1 se verifica.

Temos também que, se $x\,,y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} d_2(x\,,y) &\overset{(2.15)}{=} \max_{i\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}} |x_i - y_i| \\ &= \max_{i\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}} |-(y_i - x_i)| \\ &= \max_{i\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}} |y_i - x_i| \\ &\overset{(2.15)}{=} d_2(y\,,x)\,, \end{aligned}$$

ou seja, o item 3. da Definição 2.1.1 se verifica.

Para finalizar, observemos que, se $x\,,y\,,z \in \mathbb{R}^n$, teremos:

$$\begin{aligned} d_2(x\,,y) &\overset{(2.15)}{=} \max_{i\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}} \\ &= \max_{i\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}} |x_i - z_i + z_i - y_i| \\ &= \max_{i\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}} |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \\ &\overset{|a+b|\leq|a|+|b|}{\leq} \max_{i\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}} [|x_i - z_i| + |z_i - y_i|] \\ &\overset{\text{propriedade do máximo de números não negativos}}{\leq} \max_{i\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}} |x_i - z_i| + \max_{i\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}} |z_i - y_i| \\ &\overset{(2.15)}{=} d_2(x\,,z) + d_2(z\,,y) \end{aligned}$$

ou seja, o item 4. da Definição 2.1.1 se verifica.

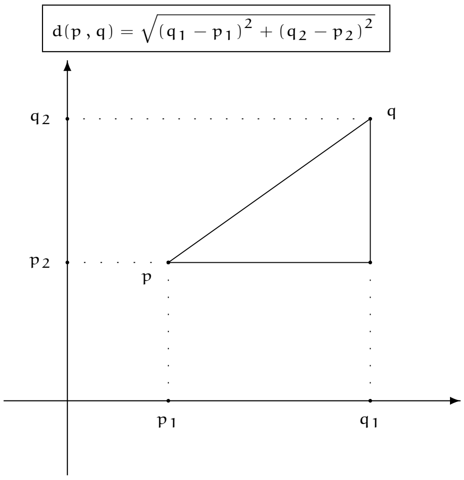
Portanto a função $\underline{d_2}$ será uma métrica em $M = \mathbb{R}^n$.

□

Observação 2.1.5

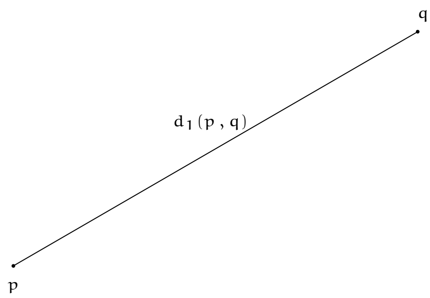
1. *A métrica $\underline{d}$ acima definida será denominada* <u>métrica euclideana em $\mathbb{R}^n$</u>.

   Ela provém da fórmula da distância entre dois pontos (em coordenadas cartesianas) que é uma conseqüência do Teorema de Pitágoras, pois o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados da distância entre os pontos que correspondem aos vértices da hipotenusa; logo devem ser igual *a soma dos quadrados dos catetos, que correspondem a somar o quadrado das distâncias das projeções ortogonais, nos respectivos eixos cartesianos (veja figura abaixo para o caso* $\mathbb{R}^2$*).*

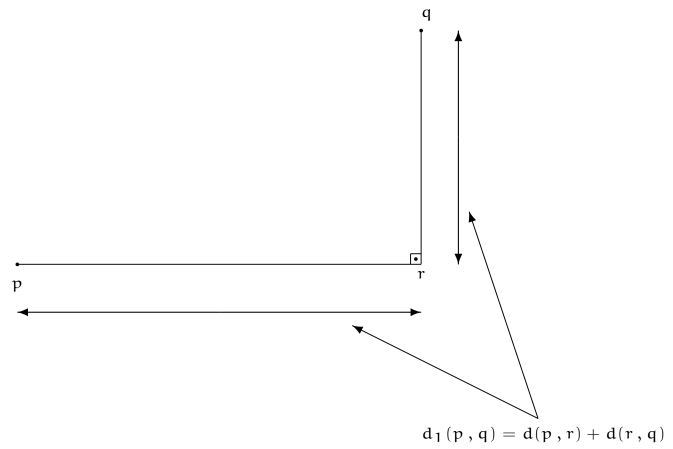


Devido a este fato a métrica $\underline{d}$ *será dita* **métrica usual de $\mathbb{R}^n$**.

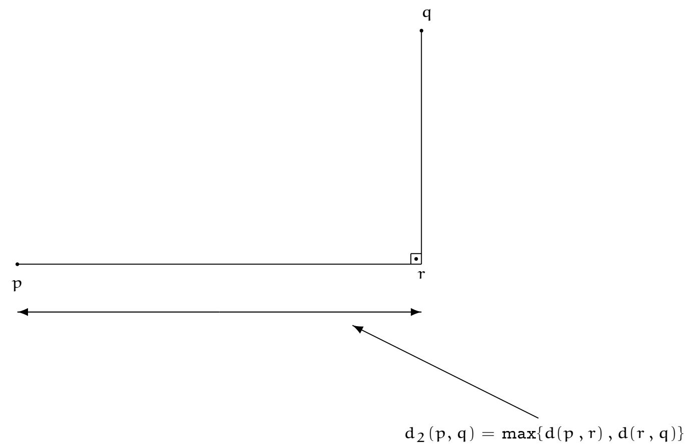
2. *Quando* $n = 2$*, a métrica* $\underline{d}$*, é a que nos fornece a distância usual entre os pontos* $\underline{p}$ *e* $\underline{q}$ *do plano* $\mathbb{R}^2$*, ou seja, o comprimento do segmento de reta que une os pontos* $\underline{p}$ *e* $\underline{q}$ *(veja a figura abaixo).*



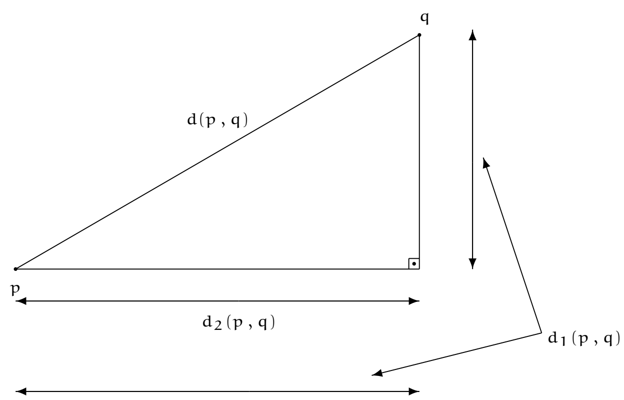
Já métrica $\underline{d_1}$*, nos fornece a distância entre dois pontos do plano, utilizando-se da soma dos catetos do triângulo retângulo determinado pelos pontos* $\underline{p}$ *e* $\underline{q}$ *(veja a figura abaixo).*



Por fim, a métrica $\underline{d_2}$*, nos fornece a distância entre dois pontos do plano, utilizando-se o comprimento do maior cateto do triângulo retângulo determinado pelos pontos* $\underline{p}$ *e* $\underline{q}$ *(veja a figura abaixo).*



Geometricamente, temos a seguinte configuração para as três métrica osu distâncias acima:



3. *Notemos que para* $n = 2$, *temos no plano* $\mathbb{R}^2$, *os elementos serão representados por pares ordenados, denotados por* (x, y) *ou* (u, v), *onde* $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

4. *Em algumas situações, identificaremos o conjunto* $\mathbb{R}^2$ *com o conjunto* $\mathbb{C}$, *o conjunto dos números complexos, por meio da seguinte correspondência:*
$$(x, y) \mapsto x + i\,y\,, \tag{2.16}$$
onde
$$i^2 \doteq -1\,.$$

5. *Para o casp* $n = 3$, *no espaço* $\mathbb{R}^3$, *representaremos os elementos por ternas ordenadas, denotadas por* (x, y, z) *ou* (u, v, w), *onde* $x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R}$.

Podemos agora enunciar e demonstrar o:

Proposição 2.1.1 *Consideremos* d, d_1, d_2 *as métricas introduzidas no Exemplo (2.1.3) no conjunto* $\mathbb{R}^n$.

Então, para todo $x, y, \in \mathbb{R}^n$ *teremos:*
$$d_2(x, y) \le d(x, y) \le d_1(x, y) \le n\,d_2(x, y)\,. \tag{2.17}$$

Demonstração:

Afirmamos que, para todo $a, b \ge 0$ temos que:
$$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}\,. \tag{2.18}$$

De fato, pois
$$\begin{aligned}\left[\sqrt{a}+\sqrt{b}\right]^2 &= \left[\sqrt{a}\right]^2 + 2\sqrt{a}\,\sqrt{b} + \left[\sqrt{b}\right]^2 \\ &= a + \underbrace{2\,\sqrt{a}\,\sqrt{b}}_{\ge 0} + b \ge a + b\,.\end{aligned}$$

Portanto
$$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
como afirmamos.

Observemos que para todo $x, y, \in \mathbb{R}^n$, teremos:
$$\begin{aligned} d_2(x, y) &\overset{(??)}{=} \max_{i \in \{1, 2, \cdots, n\}} |x_i - y_i| \\ &\overset{|a| = \sqrt{a^2}}{=} \max_{i \in \{1, 2, \cdots, n\}} \sqrt{(x_i - y_i)^2} \\ &\le \left[\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{(2.14)}{=} d(x, y)\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Temos também:

$$
\begin{aligned}
d(x\,,y) &\overset{(2.14)}{=} \left[\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(2.18)}{\leq} \sum_{j=1}^{n}\sqrt{(x_j - y_j)^2} \\
&\overset{\sqrt{a^2}=|a|}{=} \sum_{j=1}^{n}|x_j - y_j| \\
&\overset{(2.15)}{=} d_1(x\,,y)\,. \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

Para finalizar, notemos que:

$$
\begin{aligned}
d_1(x,y) &\overset{(2.15)}{=} \sum_{j=1}^{n}|x_j - y_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n}\max_{j\in\{1\,,2\,,\cdots n\}}|x_j - y_j| \\
&= \max_{j\in\{1\,,2\,,\cdots n\}}\{|x_j - y_j|\}\sum_{j=1}^{n}1 \\
&\max_{j\in\{1\,,2\,,\cdots n\}}\{|x_j - y_j|\}\cdot n \\
&\overset{(2.15)}{=} n\,d_2(x\,,y) \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

Logo, de (2.19), (2.20) e (2.21) segue a desigualdade (2.17), completando a demonstração.

$\square$

Temos a seguinte :

Definição 2.1.3 *Seja* $\underline{X}$ *um conjunto não vazio. Diremos que uma função* $f : X \to \mathbb{R}$ *é* **<u>limitada</u>**, *se existir* $k = k_f > 0$ *tal que*

$$
|f(x)| \leq k\,, \quad \textit{para todo} \quad x \in X\,. \qquad (2.22)
$$

Denotaremos por $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$, *o conjunto formado por todas as funções,* $f : X \to \mathbb{R}$ *que são limitadas, isto é,*

$$
\mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \doteq \{f : X \to \mathbb{R} : f \ \textit{é limitada}\}\,. \qquad (2.23)
$$

Precisaremos, como veremos mais adiante, de um conceito e alguns resultados relacionados a:

Definição 2.1.4 *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}$ *com* $A \neq \emptyset$.

Diremos que o conjunto $\underline{A}$ *é* **limitado superiormente em $\mathbb{R}$**, *se existir* $l \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$a \leq l, \quad \textit{para todo} \quad a \in A. \tag{2.24}$$

Neste caso diremos que o número real $\underline{l}$ *será dito* **limitante superior do conjunto $\underline{A}$**.

De modo semelhante, diremos que o conjunto $\underline{A}$ *é* **limitado inferiormente em $\mathbb{R}$**, *se existir* $m \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$m \leq a, \quad \textit{para todo} \quad a \in A. \tag{2.25}$$

Neste caso diremos que o número real $\underline{m}$ *será dito* **limitante inferior do conjunto $\underline{A}$**.

Consideremos o:

Exemplo 2.1.4

1. *Se*
$$A \doteq (-\infty, \pi) \subseteq \mathbb{R},$$
então o conjunto $\underline{A}$ *será limitado superiormente em* $\mathbb{R}$.
De fato, por exemplo, $l \doteq 4$ *será um limitante superior do conjunto* A
O conjunto $\underline{A}$ **não** *é limitado inferiormente em* $\mathbb{R}$.

2. *Se*
$$A \doteq (e, \infty) \subseteq \mathbb{R},$$
então o conjunto $\underline{A}$ *será limitado inferiormente em* $\mathbb{R}$.
De fato, por exemplo, $m \doteq 3$ *é um limitante inferior do conjunto* A
O conjunto $\underline{A}$ **não** *é limitado superiormente em* $\mathbb{R}$.

3. *Se*
$$A \doteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R},$$
então A **não** *é limitado superiormente ou inferiormente em* $\mathbb{R}$.

4. *Se*
$$A \doteq \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\},$$
então o conjunto $\underline{A}$ *é limitado superiormente e inferiormente em* $\mathbb{R}$.
De fato, por exemplo, $l \doteq 1$ *é um limitante superior do conjunto* A, *e* $m \doteq 0$ *é um limitante inferior do conjunto* A.

Podemos agora introduzir a:

Definição 2.1.5 *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ limitado superiormente em $\mathbb{R}$.*

Diremos que $s_o \in \mathbb{R}$ é o **supremo do conjunto $\underline{A}$**, *denotado por $\underline{\sup A}$, se este satisfaz as seguintes condições:*

1. *s_o é um limitante superior do conjunto $\underline{A}$;* $\boxed{s1}$

2. *s_o é o menor número real, satisfazendo a propriedade 1. acima, mais precisamente, qualquer número real menor que ele, não será limitante superior do conjunto $\underline{A}$.* $\boxed{s2}$

De modo semelhante, temos a:

Definição 2.1.6 *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ limitado inferiormente em $\mathbb{R}$.*

Diremos que $s_1 \in \mathbb{R}$ é o **ínfimo do conjunto A**, *denotado por $\underline{\inf A}$, se satisfaz as seguintes condições:*

1. *s_1 é um limitante inferior do conjunto $\underline{A}$;* $\boxed{i1}$

2. *s_1 é o maior número real satisfazendo a propriedade 1. acima, mais precisamente, qualquer número real maior que ele não será limitante superior do conjunto $\underline{A}$.* $\boxed{i2}$

A seguir daremos um resultado muito útil para a caracterização do supremo, respectivamente, do ínfimo, de um subconjunto limitado superiormenmte, respectivamente, infeiormente, de $\mathbb{R}$, a saber:

Teorema 2.1.1 *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ limitado superiormente em $\mathbb{R}$.*

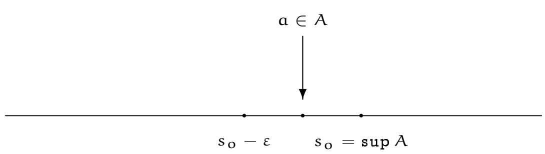
Temos que $s_o \doteq \sup A$ se, e somente se,

1. *s_o é um limitante superior do conjunto A;* $\boxed{s1'}$

2. *dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $a \in A$, de modo que* $\boxed{s2'}$

$$s_o - \varepsilon < a \leq s_o\,. \tag{2.26}$$

A figura abaixo ilustra a situação acima:



Demonstração:

Suponhamos que $s_o = \sup A$.

Notemos que o item 1. da Definição 2.1.5 é o mesmo do item 1. acima.

Por outro lado, dado $0 < \varepsilon$, temos que

$$s \doteq s_o - \varepsilon < s_o,$$

logo o número real $\underline{s}$ não poderá ser limitante superior, pois s_o é o menor limitante superior do conjunto $\underline{A}$ e

$$s < s_o.$$

Assim, deverá existir $a \in A$, de modo que

$$s_o - \varepsilon < a \leq s_o,$$

ou seja, 2. acima.

Por outro lado se 2. acima ocorrer, devemos mostrar que 2. da Definição 2.1.5 deverá ocorrer.

Para isto, consideremos $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$s < s_o.$$

Mostraremos que o número real $\underline{s}$ **não** poderá ser limitante superior do conjunto $\underline{A}$, ou seja, s_o será o menor limitante superior do conjunto $\underline{A}$, mostrando que 2. da Definição 2.1.5 deverá ocorrer, ou seja,

$$s_o = \sup A.$$

Consideremos

$$\varepsilon \doteq s_o - s > 0. \tag{2.27}$$

Do item 2. acima, segue que podemos encontrar $a \in A$, de modo que

$$s_o - \varepsilon < a \leq s_o, \tag{2.28}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} s &= s_o - (s_o - s) \\ &\overset{(2.27)}{=} s_o - \varepsilon \\ &\overset{(2.28)}{<} a, \end{aligned}$$

para algum $a \in A$, ou ainda, $s < a$, para algum $a \in A$.

Logo o número real $\underline{s}$ **não** pode ser um limitante superior do conjunto $\underline{A}$, completando a demonstração.

□

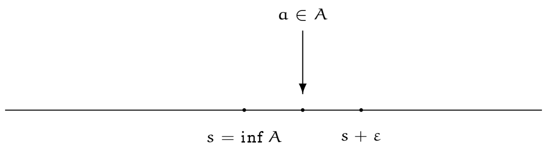
De modo análogo temos o:

Teorema 2.1.2 *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ limitado inferiormente em $\mathbb{R}$.*
Temos que $s_1 \doteq \inf A$ se, e somente se,

1. *s_1 é um limitante inferior do conjunto $\underline{A}$;* $\boxed{i1'}$

2. *dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $a \in A$, de modo que* $\boxed{i2'}$

$$s_1 \leq a < s_1 + \varepsilon \,. \tag{2.29}$$



<u>**Demonstração:**</u>
Suponhamos que

$$s_1 = \inf A \,.$$

Notemos que o item 1. da Definição 2.1.6 é o mesmo do item 1. acima .
Por outro lado, dado $0 < \varepsilon$, temos que

$$s \doteq s_1 + \varepsilon < s_o,$$

logo o número real $\underline{s}$ não poderá ser limitante inferior, pois s_1 é o menor limitante superior do conjunto $\underline{A}$ e

$$s_1 < s \,.$$

Assim, deverá existir $a \in A$, de modo que

$$s_1 < a \leq s_1 + \varepsilon,$$

ou seja, 2. acima.
Por outro lado se 2. acima ocorrer, devemos mostrar que 2. da Definição 2.1.6 deverá ocorrer.
Para isto, consideremos $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$s_1 < s \,.$$

Mostraremos que o número real $\underline{s}$ **não** poderá ser limitante inferior do conjunto $\underline{A}$, ou seja, s_1 será o maio limitante inferior do conjunto $\underline{A}$, mostrando que 2. da Definição 2.1.6 deverá ocorrer, ou seja,

$$s_1 = \inf A \,.$$

Consideremos

$$\varepsilon \doteq s - s_1 > 0 \,. \tag{2.30}$$

Do item 2. acima, segue que podemos encontrar $a \in A$, de modo que

$$s_1 < a \leq s_1 + \varepsilon, \tag{2.31}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} s &= s_1 + (s - s_1) \\ &\overset{(2.30)}{=} s_1 + \varepsilon \\ &\overset{(2.31)}{>} a\,, \end{aligned}$$

para algum $a \in A$, ou ainda, $s > a$, para algum $a \in A$.

Logo o número real $\underline{s}$ **não** pode ser um limitante inferior do conjunto $\underline{A}$, completando a demonstração.

□

Temos as seguintes propriedades para o supremo e o ínfimo de subsconjuntos limitados de $\mathbb{R}$:

Proposição 2.1.2 *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjunto limitados (isto é, limitado superiormente e inferiormente) e $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Então

1. $$\inf A \leq \sup A\,. \tag{2.32}$$
2. *Se $A \subseteq B$ então*
$$\sup A \leq \sup B\,, \tag{2.33}$$
$$\inf A \geq \inf B\,. \tag{2.34}$$
3. *Definamos o conjunto:*
$$A + B \doteq \{a + b\,;\, a \in A \ \text{ e } \ b \in B\}\,.$$
Então o conjunto $A + B$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ e
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B\,, \tag{2.35}$$
$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B\,. \tag{2.36}$$
4. *Se $\alpha > 0$, definamos o conjunto:*
$$\alpha \cdot A \doteq \{\alpha\,;\, a \in A\}\,.$$
Então o conjunto $\alpha \cdot A$ é limitado em $\mathbb{R}$ e
$$\sup(\alpha \cdot A) = \alpha \sup A\,, \tag{2.37}$$
$$\inf(\alpha \cdot A) = \alpha \inf A\,. \tag{2.38}$$
5. *Se $\alpha < 0$, então*
$$\sup(\alpha \cdot A) = \alpha \inf A\,, \tag{2.39}$$
$$\inf(\alpha \cdot A) = \alpha \sup A\,. \tag{2.40}$$

6. *Em particular, se*

$$-A \doteq \{-a\,;\, a \in A\}, \text{ então}$$

$$\sup(-A) = -\inf A \tag{2.41}$$

$$\inf(-A) = -\sup A\,. \tag{2.42}$$

7. *Se os conjunto* $A\,, B \subseteq [0, \infty)$ *são limitados, definamos o conjunto:*

$$A \cdot B \doteq \{a\, b\,;\, a \in A \ e \ b \in B\}.$$

Então o conjunto $A \cdot B$ *é limitado em* $\mathbb{R}$ *e*

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \, \sup B\,, \tag{2.43}$$

$$\inf(A \cdot B) = \inf A \, \inf B\,. \tag{2.44}$$

$$\tag{2.45}$$

Demonstração:

Deixaremos a demonstração como exercício para o leitor.

□

Temos também as seguintes propriedades para o supremo e o ínfimo de funções limitadas tomando valores em $\mathbb{R}$:

Proposição 2.1.3 *Sejam* $f\,, g \in \mathcal{B}(X\,;\,\mathbb{R})$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então:*

1. *segue que* $(f + g) \in \mathcal{B}(X\,;\,\mathbb{R})$ *(isto é, a função* $f + g$ *é uma função limitada em* $\underline{X}$*) e valem:*

$$\sup_{x \in X}(f + g)(x) \leq \sup_{x \in X} f(x) + \sup_{x \in X} g(x) \tag{2.46}$$

$$\inf_{x \in X}(f + g)(x) \geq \inf_{x \in X} f(x) + \inf_{x \in X} g(x)\,. \tag{2.47}$$

2. *temos que* $(\alpha\, f) \in \mathcal{B}(X\,;\,\mathbb{R})$ *(isto é, a função* $\alpha\, f$ *é uma função limitada em* $\underline{X}$*) e, para* $\alpha > 0$, *teremos:*

$$\sup_{x \in X}(\alpha\, f)(x) = \alpha \sup_{x \in X} f(x) \tag{2.48}$$

$$\inf_{x \in X}(\alpha\, f)(x) = \alpha \inf_{x \in X} f(x)\,, \tag{2.49}$$

por outro lado, para $\alpha < 0$, *teremos:*

$$\sup_{x \in X}(\alpha\, f)(x) = \alpha \inf_{x \in X} f(x) \tag{2.50}$$

$$\inf_{x \in X}(\alpha\, f)(x) = \alpha \sup_{x \in X} f(x)\,. \tag{2.51}$$

3. *Se* $f\,,g : X \to [0\,,\infty)$ *são função limitadas, então* $(f \cdot g) \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ *(isto é, a função* $f \cdot g$ *é uma função limitada em* $\underline{X}$*) e valem:*

$$\sup_{x\in X}(f \cdot g)(x) \leq \sup_{x\in X} f(x)\, \sup_{x\in X} g(x)\,, \tag{2.52}$$
$$\inf_{x\in X}(f \cdot g)(x) \geq \inf_{x\in X} f(x)\, \inf_{x\in X} g(x)\,. \tag{2.53}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Deixaremos como exercício para o leitor a demonstração da mesma.

□

Observação 2.1.6

1. *Observemos que utilizamos as seguintes notações nna Proposição 2.1.3 acima:*

$$\sup_{x\in X} f(x) \doteq \sup\{f(X)\}, \qquad \inf_{x\in X} f(x) \doteq \inf\{f(X)\}, \tag{2.54}$$
$$\sup_{x\in X}(f+g)(x) \doteq \sup\{(f+g)(X)\}, \qquad \inf_{x\in X}(f+g)(x) \doteq \inf\{(f+g)(X)\}, \tag{2.55}$$
$$\sup_{x\in X}(\alpha\, f)(x) \doteq \sup\{(\alpha\, f)(X)\}, \qquad \inf_{x\in X}(\alpha\, f)(x) \doteq \inf\{(\alpha\, f)(X)\}, \tag{2.56}$$
$$\sup_{x\in X}(f \cdot g)(x) \doteq \sup\{(f \cdot g)(X)\}, \qquad \inf_{x\in X}(f \cdot g)(x) \doteq \inf\{(f \cdot g)(X)\}, \tag{2.57}$$
$$\tag{2.58}$$

onde

$$f(X) \doteq \{f(x)\,;\, x \in X\}\,. \tag{2.59}$$

2. *Para as demonstrações dos itens 1. e 2. da Proposição 2.1.3 acima, será útil mostrarmos que valem as seguintes inclusões: se* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *então*

$$(f+g)(X) \subseteq f(X) + g(X)\,, \tag{2.60}$$
$$(f \cdot g)(X) \subseteq f(X) \cdot g(X)\,. \tag{2.61}$$

3. *Lembremos, da disciplina de Álgebra Linear, que um conjunto* $\underline{E}$*, não vazio, munido de duas operações:*

$$+ : E \times E \to E \quad e$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$$

será dito <u>**espaço vetorial sobre** $\mathbb{R}$</u> *, se satisfaz as seguintes: propriedades:*

(A1) *a operação + é comutativa, isto é,*

$$x + y = y + x \quad \textit{para} \quad x\,,y \in E\,; \tag{2.62}$$

(A2) *a operação $+$ é associativa , isto é,*

$$(x+y)+z = x+(y+z) \quad \textit{para} \quad x\,,y\,,z \in E\,; \tag{2.63}$$

(A3) *a operação $+$ admite* **elemento neutro**, *isto é, podemos encontrar um elemento, que será indicado por $\underline{O}$, pertencente ao conjunto $\underline{E}$, de modo que*

$$x+O = x \quad \textit{para} \quad x \in E\,; \tag{2.64}$$

(A4) *a operação $+$ admite elemento oposto, isto é, dado $x \in E$, podemos encontrar um elemento, que será indicado por $\underline{-x}$, pertencente ao conjunto $\underline{E}$, denominado* **elemente oposto de $\underline{x}$**, *tal que*

$$x+(-x) = O \quad \textit{para} \quad x \in E\,; \tag{2.65}$$

(M1) *Vale propriedade associativa da operção $\cdot$ por elmentos de $\underline{E}$, isto e ́,*

$$(\alpha\,\beta)\cdot x = \alpha\cdot(\beta\cdot x) \quad \textit{para} \quad x \in E \quad e \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,; \tag{2.66}$$

(M2) *O número real $\underline{1}$ é elemento neutro da operção $\cdot$, isto é,*

$$1\cdot x = x \quad \textit{para} \quad x \in E\,; \tag{2.67}$$

(D1) *Vale a propriedade distributiva da operação $\cdot$ pela operação $+$, isto é,*

$$\alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x+\alpha\cdot y \quad \textit{para} \quad x\,,y \in E \quad e \quad \alpha \in \mathbb{R}\,; \tag{2.68}$$

(D2) *Vale a distributiva de adição de números reais pela operação $\cdot$, isto é,*

$$(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x+\beta\cdot x \quad \textit{para} \quad x \in E \quad e \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,. \tag{2.69}$$

4. Na situação acima denotaremos o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ pela terna $(E\,,+\,,.)$ ou, quando não houver possibilidade de confusão, por $\underline{E}$ simplesmente.

Com isto temos o:

Exemplo 2.1.5 $(\mathcal{B}(X;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com as operações usuais de adição de funções (ou seja, a operação $+$) e multiplicação de número real por função (ou seja, a operação $\cdot$).*

Resolução:

A verificação deste fato será deixado como exercício para o leitor.

□

Exemplo 2.1.6 *Relativamente ao Exemplo acima, consideremos a função*

$$d : \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

por

$$d(f,g) \doteq \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|, \tag{2.70}$$

para $f, g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$.

Afirmamos que d *é uma métrica em* $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$, *que será denominada* **métrica da convergência uniforme** *ou* **métrica do sup**.

Resolução:

De fato:

1. Se $f \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ então
$$\begin{aligned} d(f,f) &\overset{(2.70)}{=} \sup_{x\in X} |f(x) - f(x)| \\ &= 0, \end{aligned}$$
mostrando que vale o item 1. da Definição 2.1.1.

2. Se $f, g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ e $f \neq g$, então podemos encontrar $x_o \in X$ tal que
$$f(x_o) \neq g(x_o). \tag{2.71}$$
Assim
$$\begin{aligned} d(f,g) &\overset{(2.70)}{=} \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \\ &\geq |f(x_o) - g(x_o)| \overset{(2.71)}{>} 0, \end{aligned}$$
mostrando que vale o item 2. da Definição 2.1.1.

3. Se $f, g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$, termeos
$$\begin{aligned} d(f,g) &\overset{(2.70)}{=} \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x\in X} |-[g(x) - f(x)]| \\ &= \sup_{x\in X} |g(x) - f(x)| \\ &\overset{(2.70)}{=} d(g,f), \end{aligned}$$
mostrando que vale o item 3. da Definição 2.1.1.

4. Se $f, g, h \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ então, para cada $x \in X$ temos que

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |[f(x) - h(x)] + [h(x) - g(x)]| \\ &\overset{[|a+b| \leq |a|+|b|]}{\leq} |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Logo

$$\begin{aligned} d(f, g) &\overset{(2.70)}{=} \sup_{x \in X}\{|f(x) - g(x)|\} \\ &\overset{(2.72)}{\leq} \sup_{x \in X}\{|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\} \\ &\overset{(2.46)}{=} \sup_{x \in X}\{|f(x) - h(x)| + \sup |h(x) - g(x)|\} \\ &\overset{(2.70)}{=} d(f, h) + d(h, g) \end{aligned}$$

mostrando que vale o item 4. da Definição 2.1.1, completando a prova que a função $\underline{d}$, dada por (2.70), é uma métrica em $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$.

$\square$

Observação 2.1.7

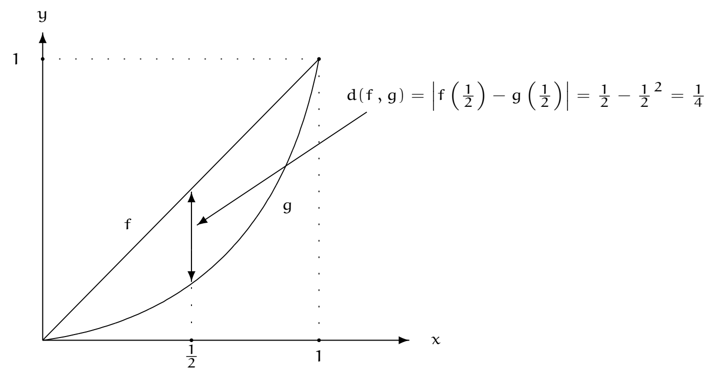
1. *Para ilustrar, considermeos* $X \doteq [0, 1]$, *e as duas funções*

$$f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

são dadas por

$$f(x) \doteq x \quad e \quad g(x) \doteq x^2, \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, 1].$$

Então, geometricamente, $d(f, g)$, *dada por* (2.70), *será o comprimento da maior corda vertical unindo os pontos do gráficos das funções* $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$ *(veja a figura abaixo).*



2. *Vale observar que se*

$$X \doteq \{1, 2, \cdots, n\},$$

então toda função $f \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ *será limitada.*

De fato, pois

$$|f(x)| \leq \max_{i \in \{1, 2, \cdot, n\}} |f(i)|, \quad \text{para} \quad x \in X.$$

Notemos também que identificar a função $\underline{f}$ *com a* $\underline{n}$*-upla*

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

onde

$$x_i \doteq f(i) \quad \text{para} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Portanto, neste caso, o conjunto $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ *pode ser identificado com conjunto* $\mathbb{R}^n$*.*

Neste caso, a métrica $\underline{d}$ *em* $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$*, definida no Exemplo* (2.1.6) *acima (dada por* (2.70)*), induzirá a métrica* d_2 *em* $\mathbb{R}^n$*, vista no Exemplo 2.1.3 (veja* (2.15)*).*

De fato, pois

$$\begin{aligned} d(f, g) &\overset{(2.70)}{=} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \\ &= \max_{i \in \{1, 2, \cdots, n\}} |f(i) - g(i)| \\ &= \max_{i \in \{1, 2, \cdots, n\}} |x_i - y_i| \\ &\overset{(2.15)}{=} d_2(x, y), \end{aligned}$$

onde

$$x_i \doteq f(i), \quad y_i \doteq g(i) \quad \text{para} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Conclusão, temos a seguinte identificação:

$$(\mathcal{B}(X; \mathbb{R}), d) = (\mathbb{R}^n, d_2).$$

Para o próximo exemplo precisaremos da:

Definição 2.1.7 *Seja* $(E, +, \cdot)$ *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*.*

Diremos que uma função

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$$

é uma **<u>norma em</u>** $\underline{E}$ *se as seguintes condições são verificadas:*

1. *Se* $x \in E$ *é tal que* $x \neq O$ *então* **(n1)**
$$\|x\| \neq 0\,; \tag{2.73}$$

2. *Se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $x \in E$, *então* **(n2)**
$$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\,\|x\|\,; \tag{2.74}$$

3. *Se* $x\,, y \in E$, *então* **(n3)**
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\,. \tag{2.75}$$

Observação 2.1.8

1. *Observemos que, na sistuação da Definição acima, se* $x \in E$, *teremos:*
$$\begin{aligned}
\|O\| &= \|0 \cdot x\| \\
&\overset{(2.74)}{=} |0|\,\|x\| \\
&= 0\,, \qquad (2.76)\\
\|-x\| &= \|(-1)\cdot x\| \\
&\overset{(2.74)}{=} |-1|\,\|x\| \\
&= \|x\| \qquad (2.77)\\
0 &= \|x + (-x)\| \\
&\overset{(2.77)}{\leq} \|x\| + \|-x\| \\
&\overset{(2.77)}{=} \|x\| + \|x\| \\
&= 2\,\|x\|\,, \\
\textit{ou seja,} \quad \|x\| &\geq 0\,. \qquad (2.78)
\end{aligned}$$

Finalmente, notemos se $x \in E$ *e* $x \neq O$ *segue, de* (2.73) *e* (2.78), *que,*
$$\|x\| > 0\,. \tag{2.79}$$

2. *Notemos também que, para* $\vec{x}\,, \vec{y} \in E$ *teremos:*
$$\big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|\,.$$

A demosntração deste fato segue de (2.75) *e será deixada como exercício para o leitor.*

Com isto podemos introduzir a:

Definição 2.1.8 *Um* **espaço vetorial normado** *é um par* $(E, \|\cdot\|)$*, onde* $(E, +\cdot)$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *e* $\|\cdot\|$ *é uma norma definida em* $\underline{E}$.

A seguir exibiremos alguns exemplos de espaços vetoriais normados.

Exemplo 2.1.7 *Consideremos no espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações de adição de* n*-uplas e multiplicação de número real por* n*-upla) as seguintes funções* $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, dadas por:*

$$\|x\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2} \tag{2.80}$$

$$\|x\|_1 \doteq \sum_{i=1}^{n} |x_i| , \tag{2.81}$$

$$\|x\|_2 \doteq \max_{i \in \{1,2,\cdots n\}} |x_i| , \tag{2.82}$$

onde

$$x \doteq (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n .$$

Então as funções $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$*, definidas acima, são normas no espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Resolução:

De fato, mostremos que a função $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por (2.80), satisfaz as 3 condições da Definição (2.1.7).

Para isto, observemos que

(n1) para $x \in \mathbb{R}^n$, se $x \neq O$, segue que

$$x_{i_o} \neq 0 , \quad \text{para algum} \quad i_o \in \{1, 2, \cdots, n\} .$$

Assim

$$\|x\| \overset{(2.80)}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2} \geq x_{i_o}{}^2 \overset{x_{i_o} \neq 0}{>} 0 ,$$

$$\text{em particular,} \qquad \|x\| \neq 0 ,$$

mostrando que o item 1. da Definição (2.1.7) ocorre.

(n2) para $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\|\lambda \cdot x\| &\overset{(2.80)}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\lambda\, x_i)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda^2\, x_i^2} \\
&= \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\
&= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\
&\overset{\sqrt{\lambda^2}=|\lambda|}{=} |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\
&\overset{(2.80)}{=} |\lambda|\, \|x\|\,,
\end{aligned}$$

mostrando que o item 2. da Definição (2.1.7) ocorre.

(n3) A pripriedade 3. da Definição (2.1.7), será verificada no Exemplo (2.1.4).

Portanto a função $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ é uma norma no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n\,, +\,, \cdot)$.

Mostremos agora, que a função $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por (2.81), satisfaz as 3 condições da Definição (2.1.7).

Para isto, notemos que:

(n1) Para $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq O$, temos que

$$x_{i_o} \neq 0\,, \qquad \text{para algum} \quad i_o \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}\,.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &\overset{(2.81)}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\
&\geq |x_{i_o}| \overset{x_{i_0} \neq 0}{>} 0\,,
\end{aligned}$$

$$\text{em particular,} \qquad \|x\|_1 \neq 0\,,$$

mostrando que o item 1. da Definição (2.1.7) ocorre.

(n2) Para $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned}
\|\lambda \cdot x\|_1 &\overset{(2.81)}{=} \sum_{i=1}^{n} |\lambda\, x_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\lambda|\, |x_i| \\
&= |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\
&\overset{(2.81)}{=} |\lambda|\, \|x\|_1\,,
\end{aligned}$$

mostrando que o item 2. da Definição (2.1.7) ocorre.

(n3) Para $x\,, y \in \mathbb{R}^n$, temos que:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_1 &\overset{(2.81)}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \\
&\overset{\text{para cada } i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\} \text{ temos: } |x_i+y_i| \leq |x_i|+|y_i|}{\leq} \sum_{i=1}^{n} [|x_i| + |y_i|] \\
&\overset{\text{propriedade de somatório}}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \\
&\overset{(2.81)}{=} \|x\|_1 + \|y\|_1\,,
\end{aligned}$$

mostrando que o item 3. da Definição (2.1.7) ocorre, ou seja, a função $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por (2.81) é uma norma no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n\,, +\,, \cdot)$.

Finalmente, mostremos que a função $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por (2.82), satisfaz as 3 condições da Definição (2.1.7).

(n1) Para $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq O$ temos que

$$x_{i_o} \neq 0\,, \qquad \text{para algum} \quad i_o \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}\,.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\|x\|_2 &\overset{(2.82)}{=} \max_{i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}} |x_i| \\
&\geq |x_{i_o}| \overset{x_{i_o} \neq 0}{>} 0\,,
\end{aligned}$$

$$\text{em particular,} \qquad \|x\|_2 \neq 0\,,$$

mostrando que o item 1. da Definição (2.1.7) ocorre.

(n2) Para $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos:

$$
\begin{aligned}
\|\lambda \cdot x\|_2 &\overset{(2.82)}{=} \max_{i \in \{1,2,\cdots,n\}} |\lambda\, x_i| \\
&= \max_{i \in \{1,2,\cdots,n\}} [|\lambda|\, |x_i|] \\
&\overset{\text{item 4. da Proposição (2.1.2)}}{=} |\lambda| \max_{i \in \{1,2,\cdots,n\}} |x_i| \\
&\overset{(2.82)}{=} |\lambda|\, \|x\|_2 \,,
\end{aligned}
$$

mostrando que o item 2. da Definição (2.1.7) ocorre.

(n3) Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos:

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_2 &\overset{(2.82)}{=} \max_{i \in \{1,2,\cdots,n\}} |x_i + y_i| \\
&\overset{\text{para cada } i \in \{1,2,\cdots,n\}, \text{ temos: } |x_i+y_i| \leq |x_i|+|y_i|}{\leq} \max_{i \in \{1,2,\cdots,n\}} [|x_i| + |y_i|] \\
&\overset{\text{item 3. da Proposição (2.1.2)}}{\leq} \max_{i \in \{1,2,\cdots,n\}} |x_i| + \max_{i \in \{1,2,\cdots,n\}} |y_i| \\
&\overset{(2.82)}{=} \|x\|_2 + \|y\|_2 \,,
\end{aligned}
$$

mostrando que o item 3. da Definição (2.1.7) ocorre, ou seja, a função $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por (2.81) é uma norma no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

□

Outro exemplo importante é

Exemplo 2.1.8 *No Exemplo 2.1.5 acima, podemos considerar a função* $\|\cdot\| : \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$
\|f\| \doteq \sup_{x \in X} |f(x)| \,, \quad \textit{para cada} \quad f \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R}). \tag{2.83}
$$

Afirmamos que a função $\|\cdot\| : \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *é uma norma no espaço vetorial real* $(\mathcal{B}(X;\mathbb{R}), +, \cdot)$.

De fato, notemos que:

(n1) *para* $f \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ *e* $f \neq 0$ *(ou seja, não é a função identicamente nula), então podemos encontrar*

$$
x_o \in X \quad \textit{de modo que} \quad f(x_0) \neq 0 \,.
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\|f\| &\overset{(2.83)}{=} \sup_{x \in X} |f(x)| \\
&\geq |f(x_o)| \overset{f(x_o) \neq 0}{>} 0 \,,
\end{aligned}
$$

$$
\textit{em particular,} \qquad \|f\| \neq 0 \,,
$$

mostrando que o item 1. da Definição (2.1.7) ocorre.

(n2) *para* $f \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *temos:*

$$\begin{aligned}\|\lambda \cdot f\| &\overset{(2.83)}{=} \sup_{x\in X} |\lambda\, f(x)| \\ &= \sup_{x\in X} [|\lambda|\, |f(x)|] \\ &\overset{\text{item 2. da Proposiçao 2.1.3}}{=} |\lambda| \sup_{x\in X} |f(x)| \\ &\overset{(2.83)}{=} |\lambda|\, \|f\|,\end{aligned}$$

mostrando que o item 2. da Definição (2.1.7) ocorre.

(n3) *para* $f, g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ *teremos:*

$$\begin{aligned}\|f+g\| &\overset{(2.83)}{=} \sup_{x\in X} |(f+g)(x)| \\ &= \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)| \\ &\overset{\text{para cada } x\in X, \text{ temos: } |f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|}{\le} \sup_{x\in X} [|f(x)|+|g(x)|] \\ &\overset{\text{item 1. da Proposiçao 2.1.3}}{\le} \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)| \\ &\overset{(2.83)}{=} \|f\| + \|g\|,\end{aligned}$$

mostrando que o item 3. da Definição (2.1.7) ocorre, ou seja, a função $\|\cdot\| : \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *é uma norma no espaço vetorial real* $(\mathcal{B}(X;\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Tal norma será denominada de **norma da convergência uniforme (ou do sup) no espaço vetorial real** $(\mathcal{B}(X;\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Podemos agora obter uma coleção de exemplos de espaços métricos, a saber:

Exemplo 2.1.9 *Seja* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado.*

Consideremos a funções $d : E \times E \to \mathbb{R}$, *dada por:*

$$d(x, y) \doteq \|x - y\|, \quad \textit{para cada} \quad x, y \in E. \tag{2.84}$$

Afirmamos que a função $\underline{d}$ *é um métrica em* $\underline{E}$.

Resolução:

Verifiquemos que as 4 condições da Definição 2.1.1 ocorrem.

(d1) para $x \in E$ temos que

$$\begin{aligned}d(x, x) &\overset{(2.84)}{=} \|x - x\| \\ &= \|O\| \\ &\overset{(2.76)}{=} 0,\end{aligned}$$

ou seja, o item 1. da Definição 2.1.1 ocorre.

(d2) Se $x \neq y$ temos que

$$x - y \neq O\,,$$

logo

$$\begin{aligned} d(x\,,y) &\overset{(2.84)}{=} \|x - y\| \\ &\overset{(2.77)}{>} 0\,, \end{aligned}$$

ou seja, o item 2. da Definição 2.1.1 ocorre.

(d3) para $x\,,y \in E$, temos que

$$\begin{aligned} d(x\,,y) &\overset{(2.84)}{=} \|x - y\| \\ &= \|-(y - x)\| \\ &\overset{(2.77)}{=} \|y - x\| \\ &\overset{(2.84)}{=} d(y\,,x)\,, \end{aligned}$$

ou seja, 3. da Definição 2.1.1 ocorre.

(d4) para $x\,,y\,,z \in E$, temos que:

$$\begin{aligned} d(x\,,z) &\overset{(2.84)}{=} \|x - z\| \\ &= \|(x - y) + (y - z)| \\ &\overset{(3)}{\leq} \|x - y\| + \|y - z| \\ &\overset{(2.84)}{=} d(x\,,y) + d(y\,,z)\,, \end{aligned}$$

ou seja, o item 4. da Definição 2.1.1 ocorre.

Portanto a função $\underline{d}$, dada por (2.84), é um métrica no espaço vetorial normado $(E\,,\|\cdot\|)$ e assim $(E\,,d)$ é um espaço métrico.

$\square$

Observação 2.1.9

1. *O Exemplo 2.1.9 acima, nos mostra que todo espaço vetorial normado é um espaço métrico, onde a métrica é dada por (2.84).*

   Neste caso diremos que a métrica $\underline{d}$, dada por (2.84), **provém** *da norma $\|\cdot\|$ do espaço vetorial normado $(E\,,\|\cdot\|)$.*

2. *Por exemplo, as métricas $d\,,d_1\,,d_2$ do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$, dadas por (2.13), (2.14) e (2.15), provém das normas $\|\cdot\|\,,\|\cdot\|_1\,,\|\cdot\|_2$, , dadas por (2.80), (2.81) e (2.82), respectivamente.*

3. *De modo semelhante temos que a métrica* $d : \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *dada por*
$$d(f\,,g) = \|f - g\| \quad \textit{para} \quad f\,,g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})\,, \tag{2.85}$$
(onde a norma $\|\cdot\|$ *é a do Exemplo 2.1.8) é proveniente da norma da convergência uniforme.*

4. *Pergunta-se:*

   Seja $(E\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real e* $\underline{d}$ *é uma métrica em* $\underline{E}$*.*

   Sempre existirá uma norma $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$*, no espaço vetorial real* $(E\,,+\,,\cdot)$*, de modo que a métrica dada* $\underline{d}$ *provém dessa norma?*

   Ou seja, uma métrica qualquer definida no espaço vetorial real $(E\,,+\,,\cdot)$ *provém de alguma norma definida nesse espaço vetorial real* $(E\,,+\,,\cdot)$ *?*

   Infelizmente isto é falso.

   Na verdade na lista de exercício pede-se para mostrar que em um espaço vetorial real $(E\,,+\,,\cdot)$*, uma métrica* $\underline{d}$ *provém de uma norma se, e somente se, valem as seguintes identidades*
$$d(x + a\,, y + a) = d(x\,,y) \tag{2.86}$$
$$d(\lambda \cdot x\,, \lambda \cdot y) = |\lambda|\, d(x\,,y)\,, \tag{2.87}$$
   para todo $x\,,y\,,a \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

5. *Observemos também que se* $(E\,,\|\cdot\|)$ *é um espaço vetorial normado, então para todo* $x \in E$ *temos*
$$d(x\,,O) \overset{(2.84)}{=} \|x - O\| = \|x\|\,,$$
   isto é, a norma do vetor $x \in E$ *é igual a distância do ponto* $x \in E$ *à origem* $O \in E$*.*

Para considerar uma outra classe de exemplos precisaremos da

Definição 2.1.9 *Seja* $(E\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*.*
Diremos que a função
$$\langle\,\cdot\,,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$$
é um **produto interno (ou escalar) no espaço vetorial** $(E\,,+\,,\cdot)$ *se satisfaz as se-*

guintes condições:

$\boxed{\textbf{(p1)}}$ *para* $x, x', y \in E$ *deveremos ter:*

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle ; \tag{2.88}$$

$\boxed{\textbf{(p2)}}$ *para* $x, y \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *devemos ter:*

$$\langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle ; \tag{2.89}$$

$\boxed{\textbf{(p3)}}$ *para* $x, y \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *devemos ter:*

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle ; \tag{2.90}$$

$\boxed{\textbf{(p4)}}$ *para* $x \in E$, $x \neq O$, *devemos ter:*

$$\langle x, x \rangle > 0 . \tag{2.91}$$

Neste caso diremos que o par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *é um* **espaço (vetorial) com produto interno (ou escalar)**.

Observação 2.1.10

1. *Se* $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *é um espaço vetorial com produto interno, então para* $x, y, y' \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *teremos:*

$$\begin{aligned} \langle x, y + y' \rangle &\overset{(2.90)}{=} \langle y + y', x \rangle \\ &\overset{(2.88)}{=} \langle y, x \rangle + \langle y', x \rangle \\ &\overset{(2.90)}{=} \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle \end{aligned} \tag{2.92}$$

e

$$\begin{aligned} \langle x, \lambda \cdot y' \rangle &\overset{(2.90)}{=} \langle \lambda \cdot y, x \rangle \\ &\overset{(2.89)}{=} \lambda \langle y, x \rangle \\ &\overset{(2.90)}{=} \lambda \langle x, y \rangle , \end{aligned} \tag{2.93}$$

ou seja, a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ *será uma transformação linear, quando fixada cada uma das suas entradas, e assim será dita* **forma bilinear**.

2. *Notemsoq também que* (2.91) *garante que se* $x \in E$ *e*

$$\langle x, x \rangle = 0 , \quad \text{então} \quad x = O . \tag{2.94}$$

Portanto temos que

$$\langle x, x \rangle \geq 0 , \quad \text{para todo} \quad x \in E \tag{2.95}$$

$$\text{e} \quad \langle x, x \rangle = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad x = O . \tag{2.96}$$

3. *No curso de Álgebra Linear, a função* $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ *é denominada* **forma bilinear, simétrica, positiva e definida** .

A seguir exibiremos alguns exemplos de espaços com produto interno.

Exemplo 2.1.10 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *(onde as operações* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de* n*-uplas e multiplicação de número real por* n*-upla) e definamos a aplicação*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

dada por

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &\doteq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\end{aligned} \tag{2.97}$$

onde

$$x \doteq (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad y \doteq (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.98}$$

Afirmamos que $\langle\cdot,\cdot\rangle$*, dada por* (2.98)*, é um produto interno no espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que a função $\langle\cdot,\cdot\rangle$, dada por (2.98), satisfaz as condições (2.88), (2.89), (2.90) e (2.91), ou seja, a aplicação

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

é um produto interno no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

□

Observação 2.1.11 *O caso* $n = 3$ *foi tratado na disciplina de Geometria Analítica.*

Outro caso importante é dado pelo:

Exemplo 2.1.11 *Consideremos*

$$C([a,b];\mathbb{R}) \doteq \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ \ \textit{a função } \underline{f} \textit{ contínua em } [a,b]\}. \tag{2.99}$$

Afirmamos que $(C([a,b];\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *denotam as operações de adição de funções e multiplicação de número real por função, respectivamente) é um espaço vetorial real.*

Considerando-se a função

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : C([a,b];\mathbb{R}) \times C([a,b];\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

dada por:

$$\langle f, g\rangle \doteq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\,, \tag{2.100}$$

onde $f, g \in C([a, b]; \mathbb{R})$*, afirmamos que a a função*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : C([a, b]; \mathbb{R}) \times C([a, b]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,,$$

é um produto interno no espaço vetorial real $(C([a, b]; \mathbb{R}), +, \cdot)$*.*

Resolução:

Lembremos que se $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ então a função $\underline{f}$ será limitada em $[a, b]$, ou seja, $f \in \mathcal{B}([a, b]; \mathbb{R})$.

Portanto, para mostrar que $(C([a, b]; \mathbb{R}), +, \cdot)$ é um espaço vetorial real, como visto da disciplina de Álgebra Linear, basta mostrar que $C([a, b]; \mathbb{R})$ é um subsepaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathcal{B}([a, b]; \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Mas isto é simples pois, a soma de duas funções contínuas é uma função contínua e multiplicação de um número real por uma função contínua é uma função contínua.

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que a função $\langle\cdot,\cdot\rangle$, dada por (2.99), satisfaz as condições (2.88), (2.89), (2.90) e (2.91), ou seja, a aplicação

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : C([a, b]; \mathbb{R}) \times C([a, b]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,,$$

é um produto interno no espaço vetorial real $(C([a, b]; \mathbb{R}), +, \cdot)$.

$\square$

Com isto temos a:

Proposição 2.1.4 *Seja* $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *um espaço vetorial com produto interno.*

Considere a função

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x\rangle}\,, \tag{2.101}$$

para $x \in E$*.*

Afirmamos que a funçao $\|\cdot\|$ *é uma norma no espaço vetorial real* $(E, +, \cdot)$*.*

Resolução:

Notemos que:

1. para $x \in E$, como $x \neq O$, teremos

$$\|x\| \overset{(2.101)}{=} \sqrt{\langle x, x\rangle} \overset{(2.95)\text{ e }(2.96)\text{ temos que }\langle x,x\rangle>0}{\neq} 0\,,$$

   isto é, vale (1) da Definição 2.1.7.

2. para $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\|\lambda \cdot x\| &\overset{(2.101)}{=} \sqrt{\langle \lambda \cdot x , \lambda \cdot x \rangle} \\
&\overset{(2.89) \text{ e } (2.93)}{=} \sqrt{\lambda^2 \, \langle x , x \rangle} \\
&= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\langle x , x \rangle} \\
&\overset{(2.101)}{=} |\lambda| \, , \|x\| \, ,
\end{aligned}$$

isto é, vale (2) da Definição 2.1.7.

3. vale a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, ou seja, sendo $(E , \langle \cdot , \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno, então para todo $x , y \in E$ temos que

$$| \langle x , y \rangle | \leq \|x\| \, \|y\| \, . \tag{2.102}$$

De fato:

Se $x \doteq O$, como

$$\langle O , y \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \|x\| = 0 \, ,$$

valerá a igualdade em (2.102), logo valerá a desiguladade.

Se $x \neq O$, podemos definir o número rela

$$\lambda \doteq \frac{\langle x , y \rangle}{\|x\|^2} \, , \tag{2.103}$$

$$z \doteq y - \lambda \cdot x \, . \tag{2.104}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\langle z , x \rangle &\overset{(2.104)}{=} \langle y - \lambda \cdot x , x \rangle \\
&\overset{(2.88) \text{ e } (2.89)}{=} \langle y , x \rangle - \lambda \, \langle x , x \rangle \\
&\overset{(2.103)}{=} \langle y , x \rangle - \frac{\langle x , y \rangle}{\langle x , x \rangle} \, \langle x , x \rangle \\
&\overset{(2.90)}{=} \langle x , y \rangle - \langle x , y \rangle = 0 \, ,
\end{aligned} \tag{2.105}$$

isto é, os vetores em $\underline{z}$ e $\underline{x}$ são ortogonais.

Logo

$$\|y\|^2 \overset{(2.101)}{=} \langle y\,,y\rangle$$
$$\overset{(2.104)}{=} \langle z+\lambda\cdot x\,,z+\lambda\cdot x\rangle$$
$$\overset{(2.88)\text{ e }(2.89)}{=} \langle z\,,z\rangle+\lambda\,\langle z\,,x\rangle+\lambda\,\langle x\,,z\rangle+\lambda^2\,\langle x\,,x\rangle$$
$$\overset{(2.105)}{=} \|y\|^2+\lambda^2\,\|x\|^2 \overset{\|y\|^2\geq 0}{\geq} \lambda^2\|x\|^2\,,$$

ou seja, $\quad \lambda^2\,\|x\|^2 \leq \|y\|^2\,,$

de (2.103), teremos: $\quad \left[\dfrac{\langle x\,,y\rangle}{\|x\|^2}\right]^2\,\|x\|^2 \leq \|y\|^2\,,$

isto é, $\quad \langle x\,,y\rangle^2 \leq \|x\|^2\,\|y\|^2\,, \qquad (2.106)$

implicando a desigualdade (2.102), como queríamos demonstrar.

4. Para finalizar, se $x\,,y\in E$, teremos:

$$\|x+y\|^2 \overset{(2.101)}{=} \langle x+y\,,x+y\rangle$$
$$\overset{(2.88)\text{ e }(2.89)}{=} \langle x\,,x\rangle+\langle x\,,y\rangle+\langle y\,,x\rangle+\langle y\,,y\rangle$$
$$\overset{(2.101)\text{e}(2.90)}{=} \|x\|^2+2\,\langle x\,,y\rangle+\|y\|^2$$
$$\overset{(2.102)}{\leq} \|x\|^2+2\,(\|x\|\,\|y\|)+\|y\|^2$$
$$=(\|x\|+\|y\|)^2\,,$$

inplicando na:

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|,$$

vale (3) da Definição 2.1.7, mostrando com isto que a aplicação $\|\cdot\|$, dada por (2.101), é uma norma no espaço vetorial real $(E\,,+\,,\cdot)$.

□

Observação 2.1.12

1. *No caso acima diremos que a norma $\|\cdot\|$, dada por (2.101), será dita uma norma que* **provém** *do produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ espaço vetorial real $(E\,,+\,,\cdot)$.*

2. *Logo a Proposição (2.1.4) acima, nos mostra que todo espaço vetorial com produto interno, pode tornar-se um espaço vetorial normado, com a norma que provém do produto interno dado.*

3. *Pergunta-se: toda norma no espaço vetorial real $(E\,,+\,,\cdot)$ provém de um produto interno?*

A resposta é negativa, isto é, existem espaços vetoriais normados cuja norma **não** *provém de um produto interno definido no espaço vetorial em questão.*

Como exemplo disto temos que no espaço vetorial real $(\mathcal{B}(X;\mathbb{R}),+,\cdot)$, *a norma da convergência uniforme* **não** *provém de um produto interno definido no espaço vetorial em questão.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Um outro exemplo pode ser obtido utlizando-se o item abaixo.

4. *Para respoder a questão acima temos a seguinte afirmação: seja* $(E,\|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado.*

   Então a norma $\|\cdot\|$ *provém de um produto interno definido no espaço vetorial real* $(E,+,\cdot)$ *se, e somente se, vale a seguinte identidade:*

   $$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right), \tag{2.107}$$

   para todo $x,y\in E$, *que é conhecida como* **lei do paralelogramo**.

5. *Devido a este fato, pode-se mostra que a norma* $\|\cdot\|_1$, *dada por* (2.81), *definida no espaço vetorial real* $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$ **não** *provém de um produto interno espaço vetorial em questão.*

   De fato, pois tomando-se

   $$x \doteq (1,0) \quad e \quad y \doteq (0,1),$$

   temos que estes vetores não satisfazem a lei do paralelogramo, isot é (2.107).

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

6. *Como conseqüência do que vimos acima todo espaço vetorial com produto interno é um espaço métrico.*

   Para isto, basta tomar a métrica que provém da norma que, por sua vez, é proveniente do produto interno dado incialmente.

Para concluir a seção temos a:

Proposição 2.1.5 *Sejam* (M,d_M) *e* (N,d_N) *dois espaços métricos.*
Em $M\times N$ *podemos considerar as seguinte funções*

$$d,d_1,d_2:(M\times N)\times(M\times N)\to\mathbb{R}$$

dadas por:

$$d(z,z') \doteq \sqrt{[d_M(x,x')]^2+[d_N(y,y')]^2}; \tag{2.108}$$
$$d_1(z,z') \doteq d_M(x,x')+d_N(y,y'); \tag{2.109}$$
$$d_2(z,z') \doteq \max\{d_M(x,x'),\ d_N(y,y')\}, \tag{2.110}$$

onde

$$z \doteq (x\,,y)\,,\ \ z' \doteq (x'\,,y') \in M \times N\,.$$

<u>**Demonstração:**</u>

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que a funções $d\,,d_1\,,d_2 : (M \times N) \times (M \times N) \to \mathbb{R}$ são metricas em $M \times N$.

□

Observação 2.1.13

1. *Podemos generalizar a Proposição 2.1.5 acima, para o produto de um númerto finito de espaços métricos.*

   Mais precisamente, se

   $$(M_1\,,d_1)\,,(M_2\,,d_2)\,,\cdots\,,(M_n\,,d_n)$$

   são n-espaços métricos, então podemos definir as seguintes métricas no produto cartesiano $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$:

   $$\begin{aligned} d(x\,,y) &\doteq \sqrt{[d_1(x_1\,,y_1)]^2 + \cdots + [d_n(x_n\,,y_n)]^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [d_i(x_i\,,y_i)]^2}\,; \qquad (2.111) \\ d_1(x\,,y) &\doteq d_1(x_1\,,y_1) + \cdots + d_n(x_n\,,y_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i\,,y_i)\,; \qquad (2.112) \\ d_2(x\,,y) &\doteq \max\{d_1(x_1\,,y_1)\,,\cdots\,,d_n(x_n\,,y_n)\} \\ &= \max_{i\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}} \{d_i(x_i\,,y_i)\}\,, \qquad (2.113) \end{aligned}$$

   onde

   $$x \doteq (x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n)\,,\ \ y \doteq (y_1\,,y_2\,,\cdots\,,y_n) \in M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n\,.$$

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *A métrica <u>d</u>, dada por (2.111), será dita* <u>**métrica produto em**</u>

   $$M \doteq M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n\,.$$

   A métrica <u>d_1</u>, dada por (2.112), será dita <u>**métrica da soma em**</u>

   $$M \doteq M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n\,.$$

   A métrica <u>d_2</u>, dada por (2.113), será dita <u>**métrica do máximo em**</u>

   $$M \doteq M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n\,.$$

3. *De modo análogo ao feito na Proposição 2.1.1, pode-se mostrar que para todo* $x, y, \in M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ *temos*

$$d_2(x, y) \leq d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n\, d_2(x, y). \tag{2.114}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

4. *Quando*

$$M_1 = M_2 = \cdots = M_n = \mathbb{R},$$

reobteremos o espaço euclideano $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*, como produto cartesiano de* $\underline{n}$*-cópias do espaço vetorial real métrico* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

2.2 Bolas abertas, bolas fechadas e esferas em espaços métricos

Começaremos introduzindo a:

Definição 2.2.1 *Sejam* (M, d) *um espaço métrico,* $a \in M$ *e* $r > 0$.

Definimos a **bola aberta, de centro no ponto $\underline{a}$ e raio $\underline{r}$**, *denotada por* $B(a; r)$, *como sendo o seguinte subconjunto de* (M, d):

$$B(a; r) \doteq \{x \in M;\ d(x, a) < r\}. \tag{2.115}$$

Definimos a **bola fechada, de centro no ponto $\underline{a}$ e raio $\underline{r}$**, *denotada por* $B[a; r]$, *como sendo o seguinte subconjunto de* (M, d):

$$B[a; r] \doteq \{x \in M;\ d(x, a) \leq r\}. \tag{2.116}$$

Definimos a **esfera, de centro no ponto $\underline{a}$ e raio $\underline{r}$**, *denotada por* $S(a; r)$, *como sendo o seguinte subconjunto de* (M, d):

$$S(a; r) \doteq \{x \in M;\ d(x, a) = r\}. \tag{2.117}$$

Observação 2.2.1

1. *Em um espaço métrico, a bola aberta, de centro no ponto* $\underline{a}$ *e raio* $\underline{r}$*, é o conjunto dos pontos de* (M, d)*, cuja a distância ao ponto* $\underline{a}$ *é menor do que* $\underline{r}$.

   POr outro lado, a bola fechada, de centro no ponto $\underline{a}$ *e raio* $\underline{r}$*, é o conjunto dos pontos de* (M, d)*, cuja a distância ao ponto* $\underline{a}$ *é menor ou igual do que* $\underline{r}$.

   Finalmente, a esfera, de centro no ponto $\underline{a}$ *e raio* $\underline{r}$*, é o conjunto dos pontos de* (M, d) *cuja a distância ao ponto* $\underline{a}$ *é igual* $\underline{r}$.

2. *Afirmamos que*
$$B[a\,;\,r] = B(a\,;\,r) \cup S(a\,;\,r), \tag{2.118}$$
onde a reunião acima disjunta, isto é,
$$B(a\,;\,r) \cap S(a\,;\,r) = \emptyset. \tag{2.119}$$
A verificação destes fatos é simples e será deixada como exercício para o leitor.

3. *Se* $M \doteq E$, *onde* $(E\,,+\,,\cdot)$ *é um espaço vetorial real e a métrica* $d : E \times E \to \mathbb{R}$ *provém de uma norma* $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, *isto é,*
$$d(\vec{x}\,,\vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|\,, \quad \textit{para cada} \quad \vec{x}\,,\vec{y} \in E\,,$$
então teremos:
$$B(\vec{a}\,;\,r) = \{\vec{x} \in E\,;\, \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}, \tag{2.120}$$
$$B[\vec{a}\,;\,r] = \{\vec{x} \in E\,;\, \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r\}, \tag{2.121}$$
$$S(\vec{a}\,;\,r) = \{\vec{x} \in E\,;\, \|\vec{x} - \vec{a}\| = r\}. \tag{2.122}$$

Com isto temos a:

Proposição 2.2.1 *Sejam* $(M\,,d_M)$ *um espaço métrico,* $X \subseteq M$ *um subsepaço (métrico) de* $(M\,,d_M)$, $a \in X$ *e* $r > 0$.

Denotemos por $B_X(a;r)$ *a bola aberta de centro no ponto* $\underline{a}$ *e raio* $\underline{r}$ *no espaço métrico* $(X\,,d_M)$.

Então
$$B_X(a\,;\,r) = B_M(a\,;\,r) \cap X\,, \tag{2.123}$$
onde $B_M(a\,;\,r)$ *enota a bola aberta, de centro no ponto* $\underline{a}$ *e raio* $\underline{r}$, *no espaço métrico* $(M\,,d_M)$.

Reciprocamente, dada uma bola aberta, de centro no ponto$\underline{a}$ *e raio* $\underline{r}$, *no espaço métrico* $(M\,,d_M)$, *então o conjunto* $B_M(a\,;\,r) \cap X$ *será uma bola aberta, de centro no ponto* $\underline{a}$ *e raio* $\underline{r}$, *no espaço métrico* $(X\,,d_M)$, *ou seja,*
$$B_M(a\,;\,r) \cap X = B_X(a\,;\,r)\,. \tag{2.124}$$

Demonstração:

Observemos que
$$\begin{aligned} B_X(a\,;\,r) &\overset{(2.120)}{=} \{x \in X\,;\, d_M(x\,,a) < r\} \\ &= \{y \in M\,;\, d_M(y\,,a) < r\} \cap X \\ &\overset{(2.120)}{=} B_M(a\,;\,r) \cap X\,, \end{aligned}$$
completando deste modo a demonstração do resultado.

□

De modo semelhante temos a:

Proposição 2.2.2 *Sejam* $(M\,,_M d)$ *um espaço métrico,* $X \subseteq M$ *um subsepaço (métrico) de* $(M\,, d_M)$*,* $a \in X$ *e* $r > 0$*.*

Denotemos por $B_X[a\,;\,r]$ *e* $S_X(a\,;\,r)$ *a bola fechada e esfera, de centro no ponto* $\underline{a}$ *e raio* $\underline{r}$*, no espaço métrico* $(X\,, d_M)$*, respectivamente.*

Então

$$B_X[a\,;\,r] = B_M[a\,;\,r] \cap X \quad e \quad S_X[a\,;\,r] = S_M(a\,;\,r) \cap X \tag{2.125}$$

onde $B_M[a\,;\,r]$*,* $S_M(a\,;\,r)$ *denotam a bola fechada e a esfera, de centro no ponto* $\underline{a}$ *e raio* $\underline{r}$*, no espaço métrico* $(M\,, d_M)$*, respectivamente.*

Reciprocamente, dadas a bola fechada e a esfera, de centro no ponto $\underline{a}$ *e raio* $\underline{r}$*, no espaço métrico* $(M\,, d_M)$*, então os conjuntos* $B_M[a\,;\,r] \cap X$ *e* $S_M(a\,;\,r) \cap X$ *serão a bola fechada e a esfera, de centro no ponto* $\underline{a}$ *e raio* $\underline{r}$*, no espaço métrico* X*, respectivamente, ou seja,*

$$B_M[a\,;\,r] \cap X = B_X[a\,;\,r] \quad e \quad S_M(a\,;\,r) \cap X = S_X[a\,;\,r]\,. \tag{2.126}$$

Demonstração:

A demonstração destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

$\square$

Para ilustrar temos os:

Exemplo 2.2.1 *Consideremos* $\mathbb{R}^2$ *a métrica* $\underline{d}$*, dada por* (2.13) *(com* $n = 2$*) e*

$$X \doteq S^1 \doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 = 1\right\}\,.$$

Seja $\vec{a} \in S^1$ *e* $r > 0$*.*

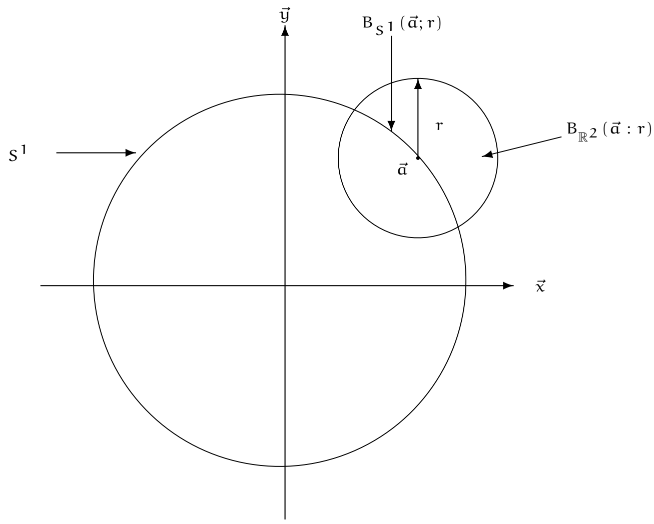
Encontre, geometricamente, $B_X(\vec{a}\,;\,,r)$*,* $B_X[\vec{a}\,;\,,r]$ *e* $S_X(\vec{a}\,;\,,r)$

Resolução:

Pela Proposição 2.2.1 (ou ainda (2.124)), segue que

$$B_{S^1}(\vec{a}\,;\,r) = B_{\mathbb{R}^2}(\vec{a}\,;\,r) \cap S^1\,,$$

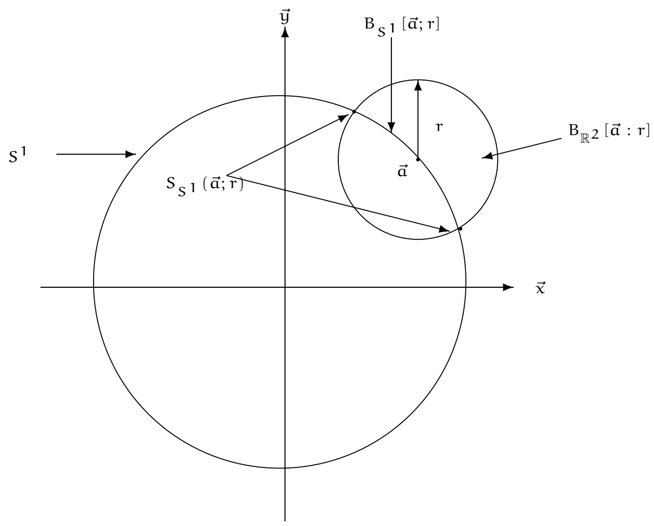
ou seja, será um arco (sem os extremos) da circunferência S^1, cujo ponto médio será $\underline{\vec{a}}$ (veja figura abaixo).



De modo semelhante, pela Proposição 2.2.2 (ou ainda, (2.125)), segue que

$$B_{S^1}[\vec{a}\,;\,r] = B_{\mathbb{R}^2}[\vec{a}\,;\,r] \cap S^1 \quad \text{e} \quad S_{S^1}(\vec{a}\,;\,r) = S_{\mathbb{R}^2}(\vec{a}\,;\,r) \cap S^1\,,$$

ou seja, serão o arco (com os extremos) da circunferência S^1, cujo ponto médio será o $\underline{\vec{a}}$ e os pontos extremos do mesmo arco, respectivamente (veja a figura abaixo).



□

Exemplo 2.2.2 *Sejam $M \neq \emptyset$, munido da métrica zero-um, $a \in X$ e $r > 0$.*
Encontre os conjuntos

$$B(a\,;\,r)\,, \quad B[a\,;\,r] \quad e \quad S(a\,;\,r)\,.$$

Resolução:

Observemos que

$$d(x\,,y) \doteq \begin{cases} 0\,, & \text{se} \quad x = y\,, \\ 1\,, & \text{se} \quad x \neq y \end{cases} \,. \tag{2.127}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\text{para } r > 1 \text{ temos que: } B(a\,;r) &\overset{(2.120)}{=} \{x \in M\,;\, d(x\,,a) < r\} \\
&\overset{d(x,a) \overset{(2.127)}{\leq} 1 < r}{=} M\,, \\
B[a\,;\,r] &\overset{(2.121)}{=} \{x \in M\,;\, d(x\,,a) \leq r\} \\
&\overset{d(x,a) \overset{(2.127)}{\leq} 1 < r}{=} M\,; \\
\text{para } r < 1 \text{ temos que: } B(a\,;\,r) &\overset{(2.120)}{=} \{x \in M\,;\, d(x\,,a) < r\} \\
&\overset{r\leq 1}{=} \{x \in M\,;\, d(x\,,a) = 0\} \\
&\overset{(2.6)}{=} \{a\}\,, \\
B[a\,;\,r] &\overset{(2.121)}{=} \{x \in M\,;\, d(x\,,a) \leq r\} \\
&\overset{r\leq 1}{=} \{x \in M\,;\, d(x\,,a) = 0\} \\
&\overset{(2.6)}{=} \{a\}\,; \\
\text{para } r = 1 \text{ temos que: } B(a\,;\,r) &\overset{(2.120)}{=} \{x \in M\,;\, d(x\,,a) < r\} \\
&\overset{r\leq 1}{=} \{x \in M\,;\, d(x\,,a) = 0\} \\
&\overset{(2.6)}{=} \{a\}\,, \\
B[a\,;r] &\overset{(2.121)}{=} \{x \in M\,;\, d(x\,,a) \leq r\} \\
&\overset{r=1}{=} \\
&\overset{(2.127)}{=} M\,.
\end{aligned}$$

Como consequência das relações acima, teremos:

$$\begin{aligned}
\text{para} \quad r \neq 1 \text{ segue que: } \quad S(a\,;\,r) &\overset{(2.118) \text{ e } (2.119)}{=} B[a\,;\,r] \setminus B(a\,;\,r) = \emptyset\,, \\
S(a\,;\,1) &\overset{(2.118) \text{ e } (2.119)}{=} B[a\,;\,1] \setminus B(a\,;\,1) = M - \{a\}\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 2.2.3 *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}\,,d)$, *onde* $\underline{d}$ *é a métrica usual,* $a \in \mathbb{R}$ *e* $r > 0$.

Encontre e represente geometricamente a bola aberta, bola fechada e a esfera, de centro no ponto $\underline{a}$ *e raio* $\underline{r}$.

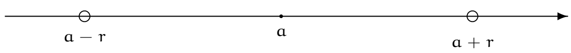
Resolução:

Notemos que

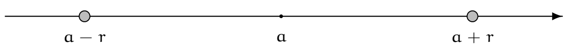
$$
\begin{aligned}
B(a\,;\,r) &\overset{(2.115)}{=} \{x \in M\,;\, d(x\,,a) < r\} \\
&\overset{(2.13)\text{ com } n=1}{=} \{x \in \mathbb{R}\,;\, |x-a| < r\} \\
&= (a-r\,,a+r)\,, \\
&\text{ou seja, um intervalo aberto de } \mathbb{R}, \\
B[a\,;\,r] &\overset{(2.116)}{=} \{x \in M\,;\, d(x\,,a) \leq r\} \\
&\overset{(2.13)\text{ com } n=1}{=} \{x \in \mathbb{R}\,;\, |x-a| \leq r\} \\
&= [a-r\,,a+r]\,, \\
&\text{ou seja, um intervalo fechado de } \mathbb{R}; \\
S(a\,;\,r) &= \overset{(2.117)}{=} \{x \in M\,;\, d(x\,,a) = r\} \\
&\overset{(2.13)\text{ com } n=1}{=} \{x \in \mathbb{R}\,;\, |x-a| = r\} \\
&x = a - r \quad \text{e} x = a + r\,, \\
&\text{ou seja, os extremos de um intervalo limitado em } \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Geometricamente temos:

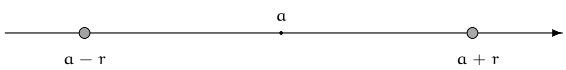
Bola aberta, de centro no ponto $\underline{a}$ e raio $\underline{r}$



Bola fechada, de centro no ponto $\underline{a}$ e raio $\underline{r}$



Esfera, de centro no ponto $\underline{a}$ e raio $\underline{r}$



□

Temos também o:

Exemplo 2.2.4 *Consideremos os espaços métricos* $(\mathbb{R}^2\,,d)$, $(\mathbb{R}^2\,,d_1)$ *e* $(\mathbb{R}^2\,,d_2)$, *onde as as métricas* $d\,,d_1\,,d_2$ *foram definidas no Exemplo 2.1.3,* $\vec{a} \doteq (a_1\,,a_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $r > 0$.

Encontre e represente geometricamente a bola aberta, bola fechada e a esfera, de centro no ponto $\underline{a}$ *e raio* $\underline{r}$.

Resolução:

Encontraremos e representaremos a bola aberta, de centro no ponto $\underline{a}$ e raio $\underline{r}$.

Os casos da bola fechada e da esfera serão deixados como exercício para o leitor.

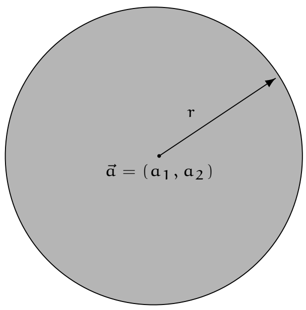
Notemos que, se $\vec{x} \doteq (x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

1.: para a mátrica $\underline{d}$:

$$\begin{aligned} B(\vec{a}\,;r) &\overset{(2.115)}{=} \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2;\ d(\vec{x}\,,\vec{a}) < r\right\} \\ &= \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 : d[(x\,,y)\,,(a_1\,,a_2)] < r\right\} \\ &\overset{(2.13)\ \text{com } n=2}{=} \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} < r\right\} \\ &= \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < r^2\right\}, \end{aligned}$$

isto é, a região interior de uma circunferência, de centro no ponto $\underline{a}$ e raio $\underline{r}$.

A figura abaixo nos fornece a representação do conjunto acima.



2.: para a mátrica $\underline{d_1}$:

$$\begin{aligned} B_1(\vec{a};\,r) &\overset{(2.115)}{=} \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2;\ d_1(\vec{x}\,,\vec{a}) < r\right\} \\ &= \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 : d_1[(x\,,y)\,,(a_1\,,a_2)] < r\right\} \\ &\overset{(2.14)\ \text{com } n=2}{=} \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x-a_1| + |y-a_2| < r\right\} \end{aligned}$$

isto é, a região interior do losango, de centro no ponto $(a_1\,,a_2)$ e cujas diagonais são paralelas aos eixos coordenados (veja figura abaixo).

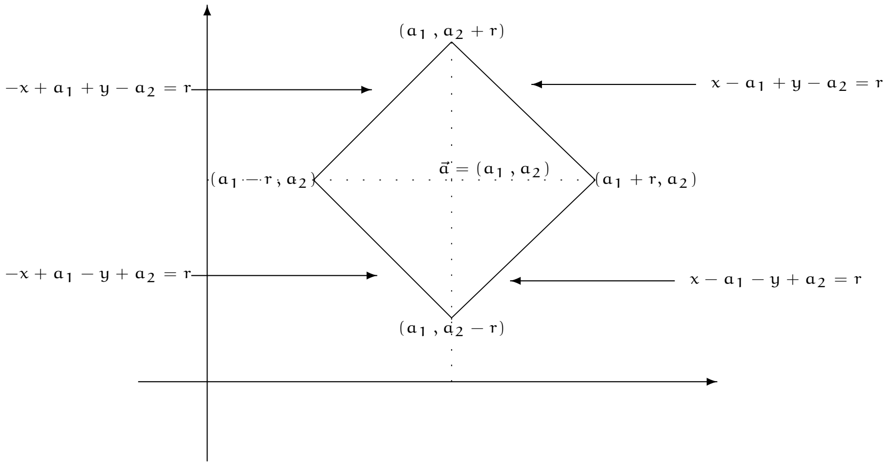
Observemos que

$$|x-a_1| + |y-a_2| = r$$

se, e somente se,
$$\begin{cases} x-a_1+y-a_2 = r, & \text{para} \quad x-a_1 \geq 0 \text{ e } y-a_2 \geq 0 \\ -(x-a_1)+y-a_2 = r, & \text{para} \quad x-a_1 < 0 \text{ e } y-a_2 > 0 \\ -(x-a_1)-(y-a_2) = r, & \text{para} \quad x-a_1 < 0 \text{ e } y-a_2 < 0 \\ x-a_1-(y-a_2) = r, & \text{para} \quad x-a_1 > 0 \text{ e } y-a_2 < 0 \end{cases}$$

que darão origem as quatro retas que determinam losango citado acima.

A figura abaixo nos fornece a representação do conjunto acima.

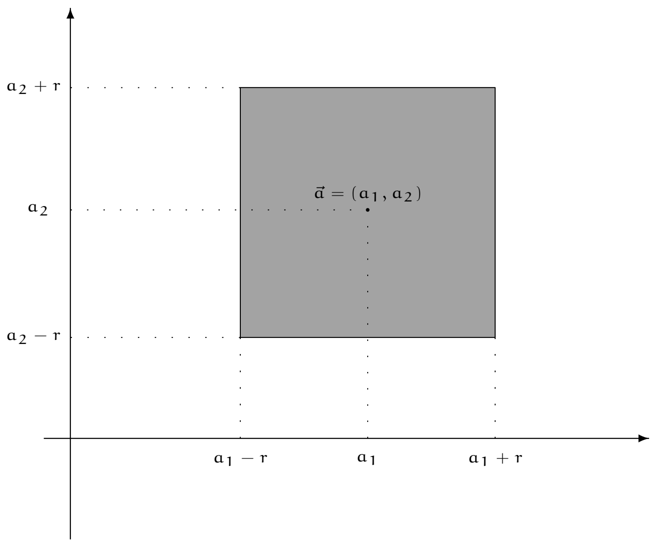


<u>**3.:**</u> para a mátrica <u>d_2</u>:

$$
\begin{aligned}
B_2(\vec{a}; r) &\overset{(2.115)}{=} \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 ; d_1(\vec{x}, \vec{a}) < r\right\} \\
&= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; d_1[(x, y), (a_1, a_2)] < r\right\} \\
&\overset{(2.15) \text{ com } n=2}{=} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \max\{|x-a_1|, |y-a_2|\} < r\right\} \\
&= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |x-a_1| < r \text{ e } |y-a_2| < r\right\} \\
&= (a_1-r, a_1+r) \times (a_2-r, a_2+r)
\end{aligned}
$$

isto é, a região interior do quadrado $[a_1-r, a_1+r] \times [a_2-r, a_2+r]$.

A figura abaixo nos fornece a representação do conjunto acima.



□

Observação 2.2.2 *Geometricamente, o Exemplo 2.2.4 ilustra que uma bola aberta pode <u>**não**</u> ncessariamnte corresponder ao que pensamos.*

Por exemplo, no caso da métrica $\underline{d_2}$*, dada por* (2.15)*, uma bola aberta corresponde a região interior de um quadrado.*

De modo análogo, temos situações semelhantes para a bola fechada e para a esfera.

Temos também o:

Exemplo 2.2.5 *Consideremos o espaço métrico* $(\mathcal{B}([a\,,b]\,;\mathbb{R})), d)$*, onde a métrica* $\underline{d}$ *é a métrica do* sup *(veja os Exemplos 2.1.5 e 2.1.6, com* $X \doteq [a,,b]$*).*

Sejam $f_o \in \mathcal{B}([a\,,b]\,;\mathbb{R}))$ *e* $r > 0$*.*

Encontre e represente geometricamente a bola aberta, bola fechada e a esfera, de centro no ponto $\underline{f_o}$ *e raio* $\underline{r}$*.*

Resolução:

Encontraremos e representaremos a bola aberta, de centro no ponto $\underline{a}$ e raio $\underline{r}$.

Os casos da bola fechada e da esfera serão deixados como exercício para o leitor.

Notemos que, de (2.115), $g \in B(f_o\,;r)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
& d(f_o\,,g) < r \\
\text{que, de (2.70), é o mesmo que:} \quad & \sup_{x\in[a\,,b]} |f_o(x) - g(x)| < r \\
\text{ou seja,} \quad & |f_o(x) - g(x)| < r\,, \quad \text{para todo } x \in [a,b] \\
\text{ou ainda,} \quad & f_o(x) - r < g(x) < f_o(x) + r\,, \quad \text{para cada } x \in [a\,,b]\,,
\end{aligned} \tag{2.128}$$

logo

$$B(f_o\,;r) = \{g \in \mathcal{B}([a,,b]\,;\mathbb{R})\,;\, f_o(x) - r < g(x) < f_o(x) + r\,, \quad \text{para cada } x \in [a\,,b]\}\,. \tag{2.129}$$

Geometricamente podemos interpretar o conjunto acima da seguinte forma:

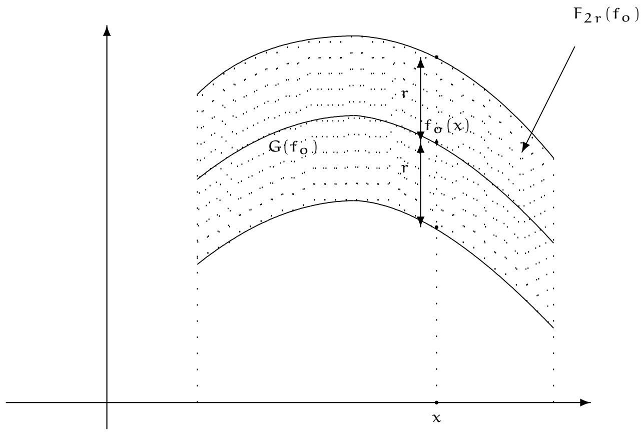
Encontremos a representação geométrica do gráfico da função f_o, isto é, do conjunto

$$G(f) \doteq \{(x\,,f(x))\,;\, x \in [a\,,b]\}\,.$$

Com isto podemos considerar a **faixa de amplitude** $\underline{2\,r}$ em torno do gráfico da função $\underline{f_o}$, que indicaremos por $F_{2\,r}(f_o)$ isto é, o conjunto

$$F_{2\,r}(f_o) \doteq \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, f_o(x) - r < y < f_o(x) + r\,, \text{ para cada } x \in [a\,,b]\}\,.$$

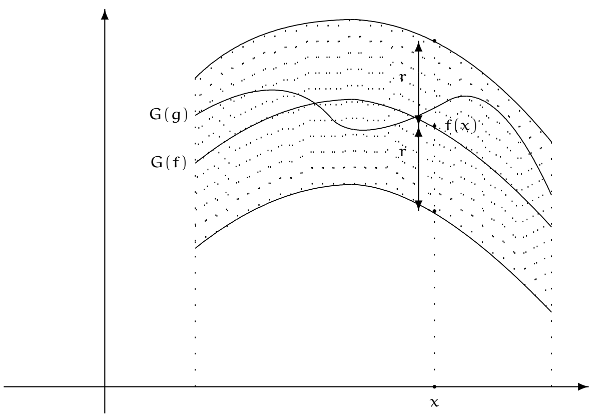
A representação geométrica do conjunto acima é dada pela figura abaixo.



Deste modo, de (2.128), teremos que $g \in B(f_o\,;\,r)$ se, e somente se, a representação geométrica do gráfico da função $\underline{g}$ estiver contida na faixa de amplitude $\underline{2\,r}$ em torno do gráfico da função $\underline{f_o}$, isto é,

$$G(g) \subseteq F_{2\,r}(f_o)\,.$$

Portanto, a representação geométrica do conjunto $B(f_o\,;\,r)$ será dada pela figura abaixo.



□

Observação 2.2.3 *Notemos que, no Exemplo 2.2.5 acima, pode ocorrer de*

$$G(g) \subseteq F_{2\,r}(f_o) \quad e \quad d(f\,,g) = r\,.$$

Para ver isto basta considerar as funções $f\,,g : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$f(x) \doteq 0\,, \quad para \quad x \in [0\,,1] \qquad e \qquad g(x) \doteq \begin{cases} x\,, & para \ x \in [0\,,1) \\ 0\,, & para \quad x = 1 \end{cases} \tag{2.130}$$

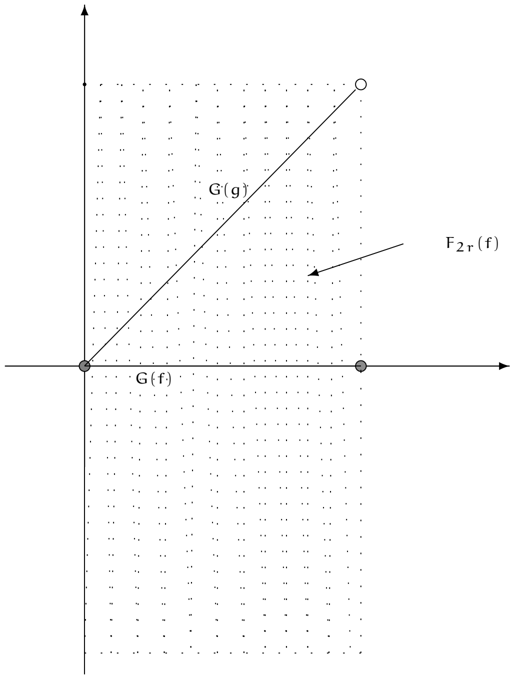
Neste caso, temso

$$d(f\,,g) \overset{(2.70)}{=} \sup_{x\in[0\,,1]} |f(x) - g(x)| \overset{(2.130)}{=} 1\,,$$

ou seja, $g \not\in B(f_o\,;\,1)$.

Porém o conjunto $G(g)$ *está contido no conjunto* $F_2(f_o)$

A figura abaixo ilustra a situação acima.



Temos também o:

Exemplo 2.2.6 *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}^2\,,d)$, *onde a métrica* $\underline{d}$ *é a usual (ou seja, dada por* (2.13)*) e o conjunto*

$$M \doteq \left\{\vec{z} = (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, \|\vec{z}\| \leq 1\right\} \tag{2.131}$$

subespaço métrico o espaço métrico $(\mathbb{R}^2\,,d)$ *(ou seja, a bola fechada, de centro na origem* $\vec{O} = (0\,,0)$ *e raio* $\underline{1}$*, em* $(\mathbb{R}^2\,,d)$*).*

Encontre e represente geometricamente a bola aberta, bola fechada e a esfera, de centro no ponto $\underline{\vec{O}}$ *e raio* $\underline{r}$*, ou seja,*

$$M = B\left[\vec{O}\,;\,1\right]\,. \tag{2.132}$$

<u>**Resolução:**</u>

Notemos que, da Proposição 2.2.2, teremos:

1. para $r \in (1\,,\infty)$, segue que:

$$\begin{aligned} B_M\left(\vec{0}\,;\,r\right) &\overset{(2.124)}{=} B\left(\vec{0}\,;\,r\right) \cap M \\ &\overset{(2.132)}{=} B\left(\vec{0}\,;\,r\right) \cap B\left[\vec{0}\,;\,1\right] \\ &\overset{r\geq 1}{=} B\left[\vec{0}\,;\,1\right] \\ &\overset{(2.132)}{=} M\,, \end{aligned} \tag{2.133}$$

2. para $r \in (0\,,1)$, segue que:

$$\begin{aligned} B_M\left(\vec{0};\, r\right) &\overset{(2.124)}{=} B\left(\vec{0};\, r\right) \cap M \\ &\overset{(2.132)}{=} B\left(\vec{0};\, r\right) \cap B\left[\vec{0};\, 1\right] \\ &\overset{0<r<1}{=} B\left(\vec{0};\, r\right) . \end{aligned}$$

Por outro lado, da Proposição (2.2.2), teremos:

1. para $r \in [1\,,\infty)$, segues que:

$$\begin{aligned} B_M\left[\vec{0};\, r\right] &\overset{(2.125)}{=} B\left[\vec{0};\, r\right] \cap M \\ &\overset{(2.132)}{=} B\left[\vec{0};\, r\right] \cap B\left[\vec{0};\, 1\right] \\ &\overset{r\geq 1}{=} B\left[\vec{0};\, r\right] \\ &\overset{(2.132)}{=} M\,, \end{aligned} \tag{2.134}$$

2. para $r \in (0\,,1)$, segue que:

$$\begin{aligned} B_M\left[\vec{0};\, r\right] &\overset{(2.125)}{=} B\left[\vec{0};\, r\right] \cap M \\ &\overset{(2.132)}{=} B\left[\vec{0};\, r\right] \cap B\left[\vec{0};\, 1\right] \\ &\overset{0<r<1}{=} B\left[\vec{0};\, r\right] . \end{aligned}$$

Em particular, para $r \in (1\,,\infty)$, de (2.133) e (2.134), segue que

$$B_M\left(\vec{0};\, r\right) = B_M\left[\vec{0};\, r\right] .$$

Para finalizar, , da Proposição (2.2.2), teremos:

1. para $r \in [1\,,\infty)$, segues que:

$$\begin{aligned} S_M\left(\vec{0};\, r\right) &\overset{(2.125)}{=} S\left(\vec{0};\, r\right) \cap M \\ &\overset{(2.132)}{=} S\left(\vec{0};\, r\right) \cap B\left[\vec{0};\, 1\right] \\ &\overset{r\geq 1}{=} \emptyset\,, \end{aligned} \tag{2.135}$$

2. para $r \in (0\,,1)$, segue que:

$$\begin{aligned} S_M\left(\vec{0};\, r\right) &\overset{(2.125)}{=} S\left(\vec{0};\, r\right) \cap M \\ &\overset{(2.132)}{=} S\left(\vec{0};\, r\right) \cap B\left[\vec{0};\, 1\right] \\ &\overset{0<r<1}{=} S\left(\vec{0};\, r\right) . \end{aligned}$$

□

Temos também o:

Exemplo 2.2.7 *Para* $n \in \mathbb{N}$, *sejam* $(M_1\,,d_1)\,,(M_2\,,d_2)\,,\cdots(M_n\,,d_n)$ $\underline{n}$ *espaços métricos e consideremos o espaço* $(M\,,d)$, *onde* $M \doteq M_1 \times \cdots M_n$ *e a métrica* $\underline{d}$ *e dada por* (2.113) *(ou seja, a métrica do máximo).*

Sejam $a \doteq (a_1\,,a_2\,,\cdots\,,a_n) \in M$ *e* $r > 0$.

Encontre a bola aberta e bola fechada, de centro no ponto $\underline{a}$ *e raio* $\underline{r}$

Resolução:

Notemos que:

$$
\begin{aligned}
B(a\,;r) &\overset{(2.115)}{=} \{x \in M\,;\, d(x\,,a) < r\} \\
&\overset{(2.113)}{=} \{(x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n\,;\, \max_{i\in\{1,2,\cdots,n\}} d_i(x_i\,,a_i) < r\} \\
&= \{(x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n\,;\, d_i(x_i\,,a_i) < r\,,\ \text{para cada } i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\} \\
&= \{x_1 \in M_1\,;\, d_1(x_1\,,a_1) < r\} \times \cdots \times \{x_n \in M_n\,;\, d_n(x_n\,,a_n) < r\} \\
&= B_{M_1}(a_1\,;r) \times B_{M_2}(a_2\,;r) \times \cdots \times B_{M_n}(a_n\,;r)
\end{aligned}
$$

De modo semelhante temos que:

$$
B[a\,;r] = B_{M_1}[a_1\,;r] \times \cdots \times B_{M_n}[a_n\,;r]
$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 2.2.4

1. *Acabamos de mostrar que a bola aberta (ou fechada), no produto cartesiano de espaços métricos, munido da métrica do máximo, será igual ao produto cartesiano das bolas abertas (ou fechadas) em cada um dos fatores do produto cartesiano dos espaços métricos.*

2. *Se no Exemplo 2.2.7 acima mudarmos a métrica do máximo pela métrica produto ou pela métrica da soma (ou seja, as métricas dadas por* (2.111) *ou* (2.112)*,) teremos que uma bola aberta (ou fechada) no produto cartesiano* **pode não** *ser o produto cartesiano das bolas abertas (ou fechadas) em cada um dos fatores do produto cartesiano dos espaços métricos.*

   Como exercício para o leitor deixaremos que o mesmo encontre um contra-exemplo para a situação acima no espaço métrico $(\mathbb{R}^2\,,d)$, *ou a métrica* $\underline{d}$ *é a usual (ou seja, dada por* (2.111) *ou* (2.113)*, com* $n = 2$*).*

3. *Se considerarmos o conjunto* $(\mathbb{R}^3, d)$, *como sendo o produto cartesiano dos espaços métricos* $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ *e* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ *munidos das correspondentes métricas euclieanas (ou seja,* $d_{\mathbb{R}^2}$ *e* $d_{\mathbb{R}}$ *são dadas por* (2.111), *com* $n = 2$ *e* $n = 1$, *respectivamente) e tormarmos no conjunto* $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, *a métrica* $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$d[(x, t), (x', t')] \doteq \max\{d_{\mathbb{R}^2}(x, x'), d_{\mathbb{R}}(t, t')\}, \tag{2.136}$$

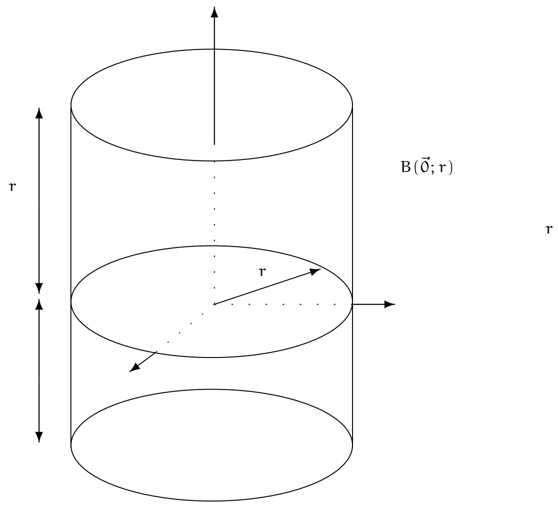
onde

$$(x, t), (x', t') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R},$$

então uma bola aberta (respectivamente, fechada), de centro no ponto $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ *e raio* $r > 0$, *ou seja* $B(\vec{a}; r)$ *(respectivamente,* $B[\vec{a}; r]$*) no espaço métrido* $(\mathbb{R}^3, d)$, *onde a métrica* $\underline{d}$, *será a região interior de um tronco cilindro circular reto, que tem o eixo* Oz *como eixo revolução, raio da base* $\underline{r}$*) e altura igual a* $2r$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

A figura abaixo é a representação geométrica da situação acima.



Temos a:

Definição 2.2.2 *Seja* (M, d) *um espaço métrico.*

Diremos que um ponto $a \in M$ *é um* **ponto isolado de** (M, d), *se podemos encontrar uma bola aberta em* (M, d), *que contenha somente o ponto* $\underline{a}$, *isto é, existe* $r > 0$, *tal que*

$$B(a; r) = \{a\}. \tag{2.137}$$

Observação 2.2.5

1. *Um ponto* $a \in M$ *é ponto isolado de* (M, d), *se existe* $r > 0$, *de modo que* **<u>não</u>** *existem pontos, diferentes do ponto* $\underline{a}$, *a uma distância menor que* $\underline{r}$, *do ponto* $\underline{a}$.

2. *Um ponto* $a \in M$ **<u>não</u>** *é um ponto isolado de* (M, d) *se toda bola aberta, centrada no ponto* $\underline{a}$, *contém, pelo menos, um ponto do conjunto* $\underline{M}$, *diferente do ponto* $\underline{a}$, *isto é, para todo* $r > 0$ *temos*

$$[B(a\,;\,r) \cap M] \setminus \{a\} \neq \emptyset\,. \tag{2.138}$$

Apliquemos os conceitos acima ao:

Exemplo 2.2.8 *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{Z}, d)$, *onde* $\mathbb{Z}$ *é o conjunto formado por todos os números reais inteiros e a métrica* $\underline{d}$ *é a métrica usual de* $(\mathbb{R}, d)$ *(dada por* (2.111) *com* $n = 1$*) induzida de* $(\mathbb{R}, d)$.

Mostre que todo ponto do conjunto $\mathbb{Z}$ *é um ponto isolado do espaço métrico* $(\mathbb{Z}, d)$.

<u>Resolução:</u>

De fato, notemos que se $n \in \mathbb{Z}$ e $r \in (0, 1)$, teremos que

$$B_{\mathbb{Z}}(n\,;\,r) \cap \mathbb{Z} = \{n\},$$

pois

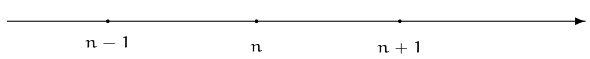
$$\begin{aligned} B(n\,;\,r) &\overset{(2.120)}{=} \{x \in \mathbb{R}\,;\, |x - n| < r \leq 1\} \qquad = (n - r, n + r) \\ &\overset{0<r\leq 1}{\subseteq} (n - 1, n + 1)\,. \end{aligned} \tag{2.139}$$

Logo, se $r \in (0, 1)$ temos que

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{Z}}(n\,;\,r) &\overset{(2.124)}{=} B(n\,;\,r) \cap \mathbb{Z} \\ &\overset{(2.139)}{=} (n - 1, n + 1) \cap \mathbb{Z}, \\ &= \{n\}, \end{aligned} \tag{2.140}$$

ou seja, não existe nenhum natural, diferente de $\underline{n}$, no intervalo $(n-1, n+1)$, mostrando que todo $n \in \mathbb{Z}$ é ponto isolado do espçao métrico $(\mathbb{Z}, d)$.

A figura abaixo ilustra a situação acima.



$\square$

Temos também o:

Exemplo 2.2.9 *Consideremos o espaço métrico* $(\overline{P}, d)$, *onde*

$$\overline{P} \doteq \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}, \tag{2.141}$$

munido da métrica $\underline{d}$, *dada por* (2.111) *(com* $n = 1$*), induzida de* $(\mathbb{R}, d)$.

Mostre que o ponto $O \in \overline{P}$ *é o único que não é ponto isolado do espaço métrico* $(\overline{P}, d)$.

Resolução:

Afirmamos que o ponto $\underline{0}$ não é ponto isolado do espaço métrico $(\overline{P}, d)$.

De fato, dado $r > 0$, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$, de modo que

$$n_o > \frac{1}{r}. \tag{2.142}$$

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{n_o}, 0\right) &\overset{(2.111) \text{ com } n=1}{=} \left|\frac{1}{n_o} - 0\right| \\ &= \frac{1}{n_o} \overset{(2.142)}{<} r, \\ \text{isto é,} \quad \frac{1}{n_o} &\in [B(0; r) \cap \overline{P}] \setminus \{0\} = B_{\overline{P}}(0;, r) \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

ou seja, o ponto $\underline{0}$ não é ponto isolado do espaço métrico $(\overline{P}, d)$.

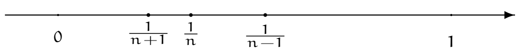
Afirmamos que, qualquer outro ponto do conjunto $\overline{P} \setminus \{0\}$ é um ponto isolado. do espaço métrico $(\overline{P}, d)$.

De fato, se

$$\frac{1}{n} \in \overline{P},$$

notemos que o ponto mais próximo dele, no espaço métrico $(\overline{P}, d)$, é o ponto $\dfrac{1}{n+1}$.

A figura abaixo ilustra a sistuação acima.



Observemos que a distância entre o ponto $\dfrac{1}{n+1}$ e o ponto distância a $\dfrac{1}{n}$, no espaço métrico $(\overline{P}, d)$, é dada por:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right) &\overset{(2.111), \text{ com } n=1}{=} \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| \\ &= \left|\frac{(n+1) - n}{n(n+1)}\right| \\ &= \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned} \tag{2.143}$$

Se tomarmos

$$0 < r < \frac{1}{n(n+1)}, \tag{2.144}$$

segue, de (2.143) e (2.144), que para

$$x \in \overline{P}, \qquad \text{com} \qquad d\left(x, \frac{1}{n}\right) < r < \frac{1}{n\,(n+1)},$$

deveremos ter

$$x = \frac{1}{n}, \qquad \text{ou seja,} \qquad \left[B\left(\frac{1}{n}; r\right) \cap \overline{P}\right] \setminus \left\{\frac{1}{n}\right\} = \emptyset,$$

mostrando que o ponto $\dfrac{1}{n}$ é um ponto isolado do espaço métrico $(\overline{P}, d)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, completando a resolução.

$\square$

Observação 2.2.6 *Se no conjunto*

$$P \doteq \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}, \tag{2.145}$$

considerarmos a métrica $\underline{d}$ (dada por (2.111), com $n = 1$) induzida do espaço métrico $(\mathbb{R}, d)$ então, do Exemplo 2.2.9 acima, segue que todo ponto do conjunto $\underline{P}$ é um ponto isolado do espaço métrico (P, d).

Temos o:

Exemplo 2.2.10 *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado, com $E \neq \left\{\vec{O}\right\}$.*

Mostre que nenhum ponto do conjunto $\underline{E}$ é um ponto isolado do espaço métrico (E, d), onde $\underline{d}$ é a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$ (ou seja, dada por (2.1.9) - veja o Exemplo 2.1.9).

<u>**Resolução:**</u>

De fato, dado $\vec{a} \in E$, para cada $r > 0$, mostremos que

$$B(\vec{a}; r) \setminus \{\vec{a}\} \neq \emptyset.$$

Para mostrar isso, consideremos $\vec{y} \in E$, tal que $\vec{y} \neq \vec{0}$.

Notemos que o vetor

$$\vec{z} \doteq \frac{r}{2\,\|\vec{y}\|} \cdot \vec{y} \tag{2.146}$$

é um vetor diferente do vetor $\vec{O}$ e

$$\begin{aligned} \|\vec{z}\| &\overset{(2.146)}{=} \left\| \frac{r}{2\,\|\vec{y}\|} \cdot \vec{y} \right\| \\ &\overset{(2)}{=} \frac{r}{2\,\|\vec{y}\|} \|\vec{y}\| \\ &= \frac{r}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{logo:} \quad 0 < \|\vec{z}\| < r. \tag{2.147}$$

Seja

$$\vec{x} \doteq \vec{a} + \vec{z}. \tag{2.148}$$

Então

$$\vec{x} \neq \vec{a},$$

pois $\vec{z} \neq \vec{0}$e

$$\|\vec{x} - \vec{a}\| \overset{(2.148)}{=} \|\vec{z}\| \overset{(2.147)}{<} r,$$

ou seja,

$$\vec{x} \in B(\vec{a}\,; r) \quad \text{e} \quad \vec{x} \neq \vec{a},$$

mostrando que

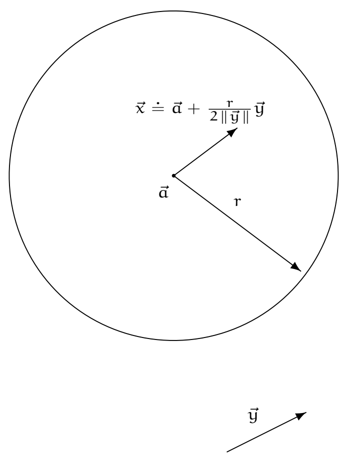
$$\vec{x} \in B(\vec{a}\,; r) \setminus \{\vec{a}\},$$

isto é,

$$B(\vec{a}\,; r) \setminus \{\vec{a}\} \neq \emptyset.$$

Portanto o ponto $\vec{x}$ do conjunto $\underline{E}$, não é ponto isoldado do espaço métrico $(E\,, d)$.

A situação acima pode ser descrita geometricamente pela figura abaixo.



□

Podemos agora introduzir a:

Definição 2.2.3 *Diremos que um espaço métrico* $(M\,, d)$ *é* ***discreto*** *se todo ponto do conjunto* $\underline{M}$ *é um ponto isolado do espaço métrico* $(M\,, d)$.

Exemplo 2.2.11 *O Exemplo 2.2.8 mostra que o espaço métrico* $(\mathbb{Z}\,, d)$, *onde* $\underline{d}$ *é a métrica dada por* (2.111) *(com* $n = 1$*), induzida do espaço métrico* $(\mathbb{R}\,, d)$, *é um espaço métrico discreto.*

Exemplo 2.2.12 *A Observação 2.2.6 garante que o conjunto*

$$P \doteq \left\{1\,, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{3}\,, \cdots, \frac{1}{n}\,, \cdots\right\},$$

quando munido da métrica $\underline{d}$, *dada por* (2.111) *(com* $n = 1$*), induzida do espaço métrico* $(\mathbb{R}\,, d)$, *é um espaço métrico discreto.*

Temos também o:

Exemplo 2.2.13 *Seja* (M, d) *um espaço métrico, onde e* $\underline{d}$ *é a métrica zero-um .*
Afirmamos que (M, d) *é um espaço métrico discreto.*

<u>**Resolução:**</u>
De fato,, pois se $a \in M$, então para $r \in (0\,1)$, do Exemplo (2.2.2), segue que

$$B(a\,;\,r) = \{a\},$$

ou seja todo ponto do conjunto M é ponto isolado do espaço métrico (M, d), portanto (M, d) é um espaço métrico discreto.

□

Podemos agora introduzir a:

Definição 2.2.4 *Seja* (M, d_M) *um espaço métrico.*
Diremos que um subconjunto $X \subseteq M$ *é* <u>**discreto**</u> *em* (M, d_M)*, se o espaço métrico* (X, d_M) *é um espaço métrico discreto.*

Observação 2.2.7 *Da Proposição 2.2.1 (ou de (2.124)) e da Definição acima segue que um conjunto* $\underline{X}$ *é discreto em* (M, d_M) *se, e somente se, para cada* $x \in X$*, existe* $r > 0$ *tal que*

$$B(x\,;\,r) \cap X = \{x\}.$$

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 2.2.14 *Seja* (M, d) *um espaço métrico e* $\underline{X}$ *um subconjunto formado por um finito de pontos* $\underline{M}$*.*
Mostre que o conjunto $\underline{X}$ *é um subconjunto discreto de* (M, d)*.*

<u>**Resolução:**</u>
Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

□

Para finalizar esta seção, temos a:

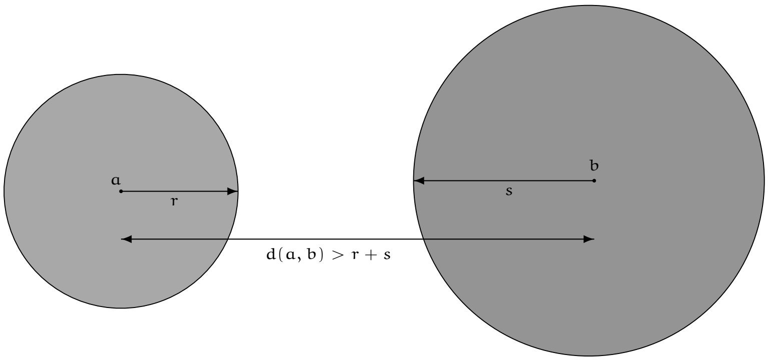
Proposição 2.2.3 *Sejam* (M, d) *espaço métrico,* $a, b \in M$*, com* $a \neq b$*.*
Consideremos $r, s > 0$ *tais que*

$$r + s \leq d(a, b)\,. \tag{2.149}$$

Então as bolas abertas $B(a\,;\,r)$ *e* $B(b\,;\,s)$ *são disjuntas , isto é,*

$$B(a\,;\,r) \cap B(b\,;\,s) = \emptyset\,. \tag{2.150}$$

A figura abaixo ilustra a situação acima.



<u>**Demonstração:**</u>

Suponhamos, por absurdo, que existe

$$x \in B(a\,;\,r) \cap B(b\,;\,s)\,,$$
$$\text{ou seja,} \quad d(a\,,x) < r \qquad \text{e} \qquad d(b\,,x) < s\,. \tag{2.151}$$

Portanto

$$\begin{aligned} d(a\,,b) &\overset{(??)}{\leq} d(a\,,x) + d(x\,,b) \\ &\overset{(2.151)}{\leq} r + s \\ &\overset{(2.149)}{\leq} d(a\,,b)\,, \\ \text{ou seja,} \quad d(a\,,b) &< d(a\,,b)\,, \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Portanto deveremos ter

$$B(a\,;\,r) \cap B(b\,;\,s) = \emptyset\,,$$

como queríamos mostrar.

□

De modo semelhante temos a:

Proposição 2.2.4 *Na situação da Proposição (2.2.3) acima, se*

$$r + s < d(a\,,b)\,, \tag{2.152}$$

então as bolas fechadas $B[a\,;\,r]$ *e* $B[b\,;\,s]$ *são disjuntas , isto é,*

$$B[a\,;\,r] \cap B[b\,;\,s] = \emptyset\,. \tag{2.153}$$

<u>**Resolução:**</u>

Suponhamos, por absurdo, que existe

$$x \in B[a\,;\,r] \cap B[b\,;\,s]\,,$$
$$\text{ou seja,} \qquad d(a\,,x) \leq r \quad \text{e} \quad d(b\,,x) \leq s\,. \tag{2.154}$$

Portanto

$$d(a\,,b) \overset{(??)}{\leq} d(a\,,x) + d(x\,,b)$$
$$\overset{(2.154)}{\leq} r + s$$
$$\overset{(2.152)}{\leq} d(a\,,b)\,,$$

$$\text{ou seja,} \qquad d(a\,,b) < d(a\,,b)\,,$$

o que é um absurdo.

Portando deveremos ter

$$B[a\,;\,r] \cap B[b\,;\,s] = \emptyset\,,$$

como queríamos mostrar.

□

2.3 Subconjuntos limitados de um espaços métricos

Iniciaremos com a:

Definição 2.3.1 *Seja* $(M\,,d)$ *um espaço métrico.*

Diremos que um subconjunto $X \subseteq M$*, não vazio, é* **limitado em** $(M\,,d)$*, se podemos encontrar* $c > 0$ *de modo que*

$$d(x\,,y) \leq c\,, \qquad \textit{para todo} \qquad x\,,y \in X\,. \tag{2.155}$$

Observação 2.3.1 *Se* $X \subseteq M$*, é um conjunto limitado em* $(M\,,d)$*, então podemos considerar o conjunto*

$$D \doteq \{a \in \mathbb{R}\,;\, d(x\,,y) \leq a\,, \quad \textit{para todo} \quad x\,,y \in X\} \subseteq \mathbb{R}\,. \tag{2.156}$$

Como o conjunto $\underline{X}$ *é limitado em* $(M\,,d)$*, segue que o conjunto* $\underline{D}$ *é não vazio e limitado superiormente, ou seja, podemos encontrar* $c \in \mathbb{R}$*, de modo que*

$$c \in D\,.$$

Como todo subconjunto limitado superiormente em $\mathbb{R}$*, admite supremo segue que existe*

$$\sup D \in [0\,,\infty)\,.$$

Logo podemos introduzir a:

Definição 2.3.2 *Na situação acima,* $\underline{\sup D}$ *será denominado* **diâmetro do conjunto** $\underline{X}$**, em** $(M\,,d)$ *e indicado por* $\operatorname{diam}(X)$*, ou seja,*

$$\operatorname{diam}(X) \doteq \sup\{a \in \mathbb{R}\,;\, d(x\,,y) \leq a\,, \quad \textit{para todo} \quad x\,,y \in X\}\,. \tag{2.157}$$

Observação 2.3.2

1. *Se* $X = \emptyset$ *segue que*
$$\mathrm{diam}(X) = 0\,.$$

2. *Se* $X \subseteq M$ *não for limitado em* $(M\, d)$*, escreveremos*
$$\mathrm{diam}(X) = \infty. \tag{2.158}$$
Isto significa que para todo $c > 0$*, podemos encontrar* $x_c\,, y_c \in X$*, de modo que*
$$d(x_c, y_c) > c\,.$$

3. *Se* $X \subseteq M$ *for limitado em* $(M\,,d)$ *então, de* (2.157)*, segue que*
$$d(x\,,y) \leq \mathrm{diam}(X)\,, \quad \textit{para todo} \quad x\,,y \in X\,. \tag{2.159}$$

4. *Notemos que se* $X \subseteq M$ *for limitado em* $(M\,,d)$ *e* $Y \subseteq X$*, então* $Y \subseteq M$ *é limitado em* $(M\,,d)$ *e*
$$\mathrm{diam}(Y) \leq \mathrm{diam}(X)\,. \tag{2.160}$$
A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Consideremos alguns exemplos relacionados com os conceitos introduzidos acima.

Exemplo 2.3.1 *Sejam* $(M\,,d)$ *um espaço métrico.*

Então toda bola aberta (ou fechada; ou esfera) é subconjunto limitado em $(M\,,d)$ *e seu diâmetro é menor ou igual ao dobro do raio da bola aberta (ou fechada; ou esfera) .*

Resolução:

Faremos a demonstração para o caso da bola aberta.
Os outros casos são semelhante e serão deixados como exercício para o leitor
Sejam $a \in M$ e $r > 0$.
Se $x\,,y \in B(a\,;r)$ então

$$\begin{aligned} d(x\,,y) &\leq d(x,a) + d(a,y) \\ &< r + r = 2\,r\,, \end{aligned}$$

mostrando que o $B(a\,;r) \subseteq M$ é um subconjunto limitado em $(M\,,d)$.

Além disso, segue que $2\,r$ é um limitante superior do conjunto

$$\{a \in \mathbb{R}\,;\, d(x\,,y) \leq a\,, \quad \text{para todo} \quad x\,,y \in B(a\,;r)\}\,.$$

Portanto
$$\mathrm{diam}[B(a\,;r)] \leq 2\,r\,,$$
como afirmamos acima.

□

Observação 2.3.3 *Em geral,* **não** *podemos garantir que o diâmetro da bola aberta (ou fechada, ou esfera) seja igual ao dobro do seu raio, como mostra o seguinte exemplo:*

Consideremos em $\mathbb{Z}$*, a métrica usual induzida de* $\mathbb{R}$ *(ou seja, a métrica (2.12)),* $r = 1$ *e* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Como vimos no Exemplo (2.2.8),

$$B(n\,;\,1) = \{n\},$$

ou seja, cujo diâmetro é zero (que é menor que 2, que é o dobro do raio, que é igual a 1).

Logo, neste caso, temos que

$$\operatorname{diam}[B(n\,;\,1)] < 2\,.$$

Quando vale a igualdade?

O exemplo a seguir responde esta questão:

Exemplo 2.3.2 *Seja* $(E\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial munido de uma norma, indicada por* $\|\cdot\|$*, tal que*

$$E \neq \left\{\vec{O}\right\}.$$

Afirmamos que toda bola aberta (ou fechada, ou esfera) tem diâmetro igual ao dobro do raio da mesma, ou seja:

$$\operatorname{diam}[B(a\,;\,r)] = \operatorname{diam}[B[a\,;\,r]] = \operatorname{diam}[S(a\,;\,r)] = 2\,r\,. \tag{2.161}$$

Resolução:

Faremos a demonstração para a bola aberta.

Os outros casos são semelhantes e serão deixados como exercício para o leitor.

Sejam $\vec{a} \in E$ e $r > 0$.

Sabemos que $B\,(\vec{a}\,;\,r)$ é um subconjunto limitado no espçao métrico $(E\,,d)$, onde a métrica $\underline{d}$ é dada por (2.84).

Além disso, se

$$\vec{x}\,,\vec{y} \in B(\vec{a}\,;\,r)\,, \tag{2.162}$$

teremos:

$$\begin{aligned} d(\vec{x}\,,\vec{y}) &\overset{(??)}{\leq} d(\vec{x}\,,\vec{a}) + d(\vec{a}\,,\vec{y}) \\ &\overset{(2.162)}{\leq} r + r = 2\,r\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \qquad \operatorname{diam}[B(\vec{a}\,;\,r)] \leq 2\,r\,. \tag{2.163}$$

Mostremos que se

$$s \in (0\,,2\,r)$$

então $\underline{s}$ não poderá ser limitante superior do conjunto (2.156), relativamente a $X \doteq B(\vec{a}\,;\, r)$, ou seja, podemos encontrar

$$\vec{x}_1\,, \vec{y}_1 \in B(\vec{a}\,; r)\,, \quad \text{tal que} \quad d(\vec{x}_1\,, \vec{y}_1) > s\,.$$

Consideremos $\vec{y} \in E$, tal que $\vec{y} \neq \vec{0}$ e seja $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$t \in \left(\frac{s}{2}\,, r\right) \subseteq (0\,, \infty)\,. \tag{2.164}$$

Observemos que o vetor

$$\vec{x} \doteq \frac{t}{\|\vec{y}\|} \cdot \vec{y} \in E \tag{2.165}$$

tem a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\| &\overset{(2.165)}{=} \left\| \frac{t}{\|\vec{y}\|} \cdot \vec{y} \right\| \\ &\overset{(2.74)}{=} \underbrace{|t|}_{\overset{(2.164)}{=} t} \underbrace{\frac{\|\vec{y}\|}{\|\vec{y}\|}}_{=1} \\ &= t\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \qquad \|\vec{x}\| = t \overset{(2.164)}{=} r\,. \tag{2.166}$$

Afirmamos que

$$\vec{x}_1 \doteq \vec{a} + \vec{x}\,,\ \vec{y}_1 \doteq \vec{a} - \vec{x} \in B\,(\vec{a}\,;\, r)\ . \tag{2.167}$$

De fato,

$$\begin{aligned} d(\vec{x}_1\,, \vec{a}) &\overset{(2.166)}{=} d(\vec{a} + \vec{x}\,, \vec{a}) \\ &\overset{(2.84)}{=} \|(\vec{a} + \vec{x}) - \vec{a}\| \\ &= \|\vec{x}\| \overset{(2.84)}{<} r\,, \end{aligned}$$

De modo semelhante podemos mnostrar que

$$d(\vec{y}_1\,, \vec{a}) < r\,.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Para finalizar, notemos que

$$\begin{aligned} d\,(\vec{x}_1\,, \vec{y}_1) &\overset{(2.166)}{=} d\,(\vec{a} + \vec{x}\,, \vec{a} - \vec{x}) \\ &\overset{(2.84)}{=} \|(\vec{a} + \vec{x}) - (\vec{a} - \vec{x})\| \\ &= \|2 \cdot x\| \\ &\overset{(2.74)}{=} 2\,\|x\| \\ &\overset{(2.166)}{=} 2\,t \\ &\overset{(2.164)}{>} s\,, \end{aligned}$$

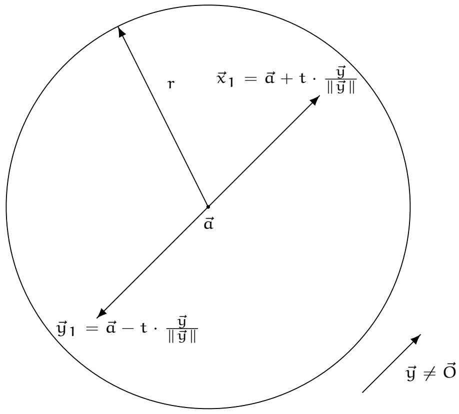
ou seja,

$$d(\vec{x}_1, \vec{y}_1) > s,$$

com $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in B(\vec{a}; r)$.

Logo $s \in (0, 2r)$ não pode ser o diâmetro da bola aberta $B(a; r)$, completando a demonstaçao da afirmação.

A figura abaixo ilustra geometricamente a situação descrita acima.



□

Observação 2.3.4

1. *Dado um espaço métrico qualquer (mesmo sendo não limitado), podemos considerar subespaços (métricos) do mesmo que sejam limitados.*

   Basta considerarmos os subconjunto limitados do mesmo e colocar a métrica induzida do espaço métrico dado, neste subconjunto.

2. *Seja* $(E, +, \cdot)$ *um espaço vetorial, munido de uma norma, que indicaremos por* $\|\cdot\|$, *tal que* $E \neq \{\vec{O}\}$.

   Então o espaço métrico (E, d), *onde a métrica* $\underline{d}$ *é dada por* (2.84), *não é limitado.*

   De fato, dado $\vec{x} \in E$, *com* $\vec{x} \neq \vec{0}$, *para cada* $c > 0$ *podemos considerar o vetor do espaço vetorial real* $(E, +, \cdot)$, *definido por*

$$\vec{x}_c \doteq \frac{2c}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x}. \tag{2.168}$$

   Observemos que

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_c\| &\overset{(2.168)}{=} \left\| \frac{2c}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x} \right\| \\ &\overset{(2.74)}{=} 2c \underbrace{\frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}}_{=1} \\ &= 2c. \end{aligned} \tag{2.169}$$

Logo

$$d\left(\vec{x}_c\,,\vec{O}\right) \overset{(2.84)}{=} \left\|\vec{x}_c - \vec{O}\right\|$$
$$= \|\vec{x}_c\| \overset{(2.169)}{>} c\,,$$

mostrando que o espaço nmétrico $(E\,,d)$ *não é limitado.*

3. *Seja* $(M\,,d)$ *um espaço métrico.*

   Vale observar que um subconjunto $X \subseteq M$*, não vazio, é limitado em* $(M\,,d)$ *se, e somente se, o conjunto* $\underline{X}$ *está contido em alguma bola aberta em* $(M\,,d)$*, isto é, existe* $a \in M$ *e* $r > 0$ *tal que*

   $$X \subseteq B(a\,;r)\,.$$

   De fato, se existe $a \in M$ *e* $r > 0$ *são tais que*

   $$X \subseteq B(a\,;r)\,, \tag{2.170}$$

   então para todo $x\,,y \in X$*, temos que*

   $$d(x\,,y) \overset{(??)}{\leq} d(x\,,a) + d(a\,,y)$$
   $$\overset{(2.170)}{<} r + r = 2\,r\,,$$

   ou seja, $\underline{X}$ *é limitado em* $(M\,,d)$.

   Além disso, o diâmentro do conjunto $\underline{X}$ *é menor ou igual a* $2\,r$.

   Reciprocamente, se o conjunto $\underline{X}$ *é limitado em* $(M\,,d)$*, segue que existe* $c > 0$ *tal que*

   $$d(x\,,y) \leq c\,, \quad \textit{para todo} \quad x\,,y \in X\,. \tag{2.171}$$

   Consideremos $x_o \in X$.

   De (2.171)*, segue que*

   $$d(x\,,x_o) \leq c\,, \quad \textit{para todo} \quad x \in X\,, \tag{2.172}$$

   assim teremos que $X \subseteq B(x_o\,;r)$*, ou seja, o conjunto* $\underline{X}$ *está contido em uma bola aberta de* $(M\,,d)$*, como queríamos mostrar.*

Podemos agora enunciar e demonstrar a

Proposição 2.3.1 *Sejam* $(M\,,d)$ *espaço métrico e* $X\,,Y \subseteq M$ *subconjuntos limitados em* $(M\,,d)$.

Então os conjuntos $X \cup Y$ *e* $X \cap Y$ *são subconjuntos limitados em* $(M\,,d)$.

Além disso, temos:

$$\mathrm{diam}\,(X \cap Y) \leq \min\{\mathrm{diam}(X)\,,\mathrm{diam}(Y)\}\,. \tag{2.173}$$

Demonstração:

Observemos que

$$X \cap Y \subseteq X, Y$$

e como o conjunto $\underline{X}$ é limitado em (M, d) segue, do item 4. da Observação (2.3.2) , que o conjunto $X \cap Y$ também será limitado em (M, d) e, de (2.160), teremos

$$diam\,(X \cup Y) \leq diam(X)\,, diam(Y)$$

ou seja, vale (2.173).

Notemos que, se

$$X = \emptyset \quad \text{ou} \quad Y = \emptyset\,,$$

segue que

$$X \cup Y = Y \quad \text{ou} \quad X \cup Y = X\,,$$

respectivamente, implicando que o conjunto $X \cup Y$ é limitado em (M, d) e vale a (??), pois $diam(X) = 0$ ou $diam(Y) = 0$, respectivamente.

Logo podemos supor, sem perda de generalidade, que $X, Y \neq \emptyset$.

Por outro lado, se $X, Y \neq \emptyset$, como ambos são limitados em (M, d), do item 3. da Observação 2.3.4, segue que existem $r, s > 0$ e $a, b \in M$ tais que

$$X \subseteq B(a\,; r) \quad \text{e} \quad Y \subseteq B(b\,; r)$$

ou seja,

$$d(x_1\,, x_2) \leq 2\,r \quad \text{e} \quad d(y_1\,, y_2) \leq 2\,s\,, \tag{2.174}$$

para todo $x_1\,, x_2 \in X$ e $y_1\,, y_2 \in Y$.

Podemos supor, sem perdade de generalidade, que

$$r < s\,.$$

Com isto, de (2.174), teremos

$$d(x_1\,, x_2) \leq 2\,s \quad \text{e} \quad d(y_1\,, y_2) \leq 2\,s \tag{2.175}$$

para todo $x_1\,, x_2 \in X$ e $y_1\,, y_2 \in Y$.

Consideremos

$$k \doteq 2\,s + d(a\,, b) \geq 2\,s > 0\,. \tag{2.176}$$

Notemos que, se $x \in X$ e $y \in Y$, segue que

$$\begin{aligned} d(x\,, y) &\overset{(??)}{\leq} d(x\,, a) + d(a\,, b) + d(b\,, y) \\ &\overset{(2.175)}{\leq} s + d(a\,, b) + s \\ &\overset{(2.176)}{=} k\,. \end{aligned} \tag{2.177}$$

Portanto se $x, y \in X \cup Y$, teremos que:

$$\text{Se } x, y \in X, \text{ segue que: } d(x, y) \overset{(2.175)}{\leq} 2s \overset{(2.176)}{\leq} k$$
$$\text{Se } x, y \in X, \text{ segue que: } d(x, y) \overset{(2.175)}{\leq} 2s \overset{(2.176)}{\leq} k$$
$$\text{Se } x \in X \text{ e } y \in Y, \text{ segue que: } d(x, y) \overset{(2.178)}{\leq} k,$$

ou seja,

$$d(x, y) \leq k, \quad \text{para todo} \quad x, y \in X \cup Y,$$

mostrando que o conjunto $X \cup Y$ é limitado em (M, d).

□

Como conseqüência temos o:

Corolário 2.3.1 *Sejam* (M, d) *espaço métrico e* $X_1, X_2, \cdots, X_n \subseteq M$ *limitados em* (M, d).

Então os conjunto $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ *e* $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n$ *são subconjuntos limitados em* (M, d).

Além disso, temos:

$$\operatorname{diam}(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) \leq \min\{\operatorname{diam}(X_1), \operatorname{diam}(X_2), \cdots, \operatorname{diam}(X_n)\}. \tag{2.178}$$

Demonstração:

A demonstração segue de indução matemática e da Proposição 2.3.1 acima.

Sua elaboração será deixada como exercício para o leitor.

□

Como outra conseqüência temos o

Corolário 2.3.2 *Seja* (M, d) *espaço métrico.*

Então subconjunto $\underline{X}$ *finito de* $\underline{M}$ *é limitado em* (M, d).

Demonstração:

Basta observar que se $\underline{X}$ é um subconjunto finito de $\underline{M}$ ele será uma reunião finita de subconjuntos formados por cada um dos seus pontos.

Como o conjunto formado por um ponto é limitado em (M, d) segue, do Corolário 2.3.1 acima, que o conjunto $\underline{X}$ será um subconjunto limitado em (M, d), completando a demonstração.

□

Notação 2.3.1 *Dada uma função* $f : X \to Y$ *denoteremos o conjunto imagem associado a função* $\underline{f}$, *indicado por* $f(X)$, *e dado por*

$$f(X) \doteq \{f(x) ; x \in X\} \subseteq Y. \tag{2.179}$$

Podemos agora introduzir a:

Definição 2.3.3 *Sejam* (M, d) *espaço métrico e* $\underline{X}$ *um subconjunto não vazio.*

Diremos que uma função $f : X \to M$ *é* **limitada** *se seu conjunto imagem, isto é conjunto* $f(X) \subseteq M$*, for um subconjunto limitado em* (M, d)*.*

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.3.3 *Sejam* $(\mathbb{R}, d)$ *com a métrica usual (ou seja, a métrica dada por* (2.13)*, com* $n = 1$*) e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por:*

$$f(x) \doteq \frac{1}{1+x^2}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.180}$$

Mostre que a função $\underline{f}$ *é limitada.*

Resolução:

Observemos que

$$\begin{aligned} |f(x)| &\overset{(2.180)}{=} \left|\frac{1}{1+x^2}\right| \\ &= \frac{1}{1+x^2} \\ &\overset{x^2+1\geq 1}{\leq} 1, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.181}$$

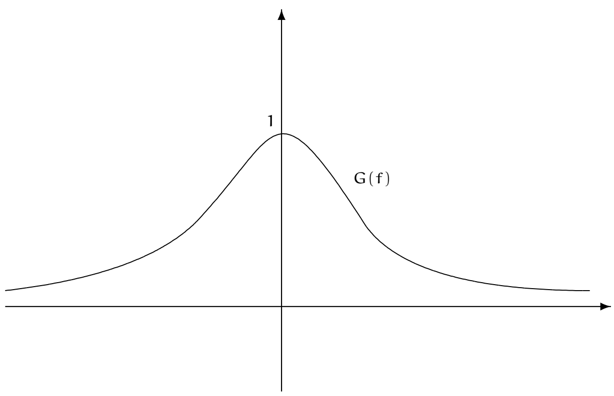
Logo, da Definição 2.3.3 , segue que a função $\underline{f}$ é uma função limitada.

Notemos que, neste caso, temos

$$f(\mathbb{R}) = (0, 1].$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

A figura abaixo nos fornece a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$.



$\square$

Exemplo 2.3.4 *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}, d)$ *como no Exemplo 2.3.3. Consideremos a função* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$g(x) \doteq x^2, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.182}$$

Afirmamos que a função $\underline{g}$ *não é limitada.*

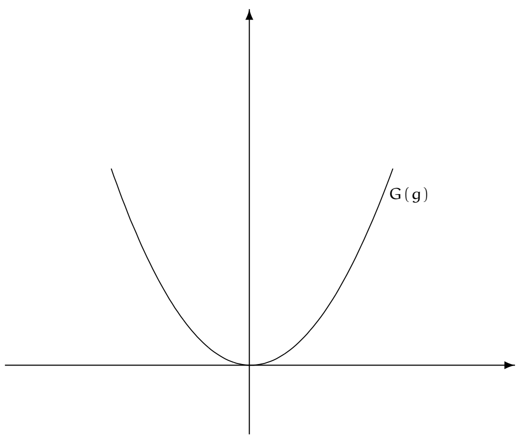
<u>**Resolução:**</u>

Notemos que
$$g(\mathbb{R}) = [0, \infty).$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Como o conjunto $[0, \infty)$ não é um subconjunto limitado de $(\mathbb{R}, d)$, segue que a função $\underline{g}$ não será limitada.

A figura abaixo nos nos fornece a representação geométrica do gráfico da função $\underline{g}$.



□

Um outro exemplo importante é:

Exemplo 2.3.5 *Seja* $d_{\|\cdot\|} : E \times E \to \mathbb{R}$ *uma métrica definida no espaço vetorial real* $(E, +, \cdot)$, *que provém de uma norma* $\|\cdot\|$, *que está definida no espaço vetorial real* $(E, +, \cdot)$, *então a função* $\underline{d}$ *não é uma função limitada.*

<u>**Resolução:**</u>

Do item 2. da Observação 2.3.4, temos que o conjunto E não é limitado em $(E, d_{\|\cdot\|})$.

Logo
$$d_{\|\cdot\|}(E \times E) = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$$

não poderá ser um subconjunto limitado, ou seja, a função $\underline{d_{\|\cdot\|}}$ não será uma função limitada.

□

Podemos agora generalizar o exemplo (2.1.5) por meio do

Exemplo 2.3.6 *Sejam* X *um conjunto não vazio e* (M, d_M) *um espaço métrico.*

Indiquermos por $\mathcal{B}(X; M)$ *o conjunto de todas as funções limitadas, definidas em* $\underline{X}$ *e tomando valores em* $\underline{M}$*, isto é,*

$$\mathcal{B}(X; M) \doteq \{f : X \to M ; f \text{ é uma função limitada } \}. \tag{2.183}$$

Dadas $f, g \in \mathcal{B}(X; M)$ *temos que o conjunto*

$$\{d_M(f(x), g(x)); x \in X\}$$

é limitado em $\mathbb{R}$*.*

Resolução:

De fato, como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são limitadas segue, de Definição 2.3.3, que os conjuntos $f(X)$ e $g(X)$ são subconjuntos limitados em (M, d).

Logo, da Proposição 2.3.1, temos que o conjunto $f(X) \cup g(X)$ será um subconjunto limitado em (M, d), ou seja, o conjunto

$$\{d_M(f(x), g(x)); x \in X\} \tag{2.184}$$

é limitado em $(\mathbb{R}, d)$

□

Observação 2.3.5

1. *Notemos que, an situação acima, o conjunto (2.184) admite supremo em* $\mathbb{R}$*.*

   Portanto, dadas $f, g \in \mathcal{B}(X; M)$*, podemos definir a função* $d : \mathcal{B}(X; M) \times \mathcal{B}(X; M) \to \mathbb{R}$*, dada por*

   $$d(f, g) \doteq \sup_{x \in X}\{d_M(f(x), g(x))\}. \tag{2.185}$$

   Pode-se mostrar que a função $\underline{d}$ *é uma métrica em* $\mathcal{B}(X; M)$ *que será denominada* **métrica da convergência uniforme ou métrica do sup**.

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. *Consideremos o conjunto* $\mathcal{F}(X; M)$ *formado por todas as funções definidas em* $\underline{X}$ *e tomando valores em* $\underline{M}$*.*

   Neste caso, a métrica do sup, dada por (2.185), pode não fazer sentido em $\mathcal{F}(X; M)$*, pois existem funções* $f, g : X \to M$*, tais que o conjunto*

   $$\{d_M(f(x), g(x)); x \in X\}$$

   não é limitado em $\mathbb{R}$ *logo, neste caso, não poderemos considerar o supremo desse conjunto (2.184).*

   Para mais detalhes ver [1], página 15.

3. *Seja* $(E\,,\|\cdot\|)$ *é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) normado.*

   Se $f\,,g\in\mathcal{B}(X;\,E)$ *e* $\lambda\in\mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*) , pode-se mostrar que*

$$(f+g)\in\mathcal{B}(X;E)\qquad e\quad \lambda\cdot f\in\mathcal{B}(X;\,E)\,,$$

   ou seja $(\mathcal{B}(X\,,;\,E)\,,+\,,\cdot)$ *tornar-se-á um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) , com as operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real (respectivamente complexo) por função.*

   A verificação deste dao será deixada como exercício para o leitor.

4. *Na situação acima, a métrica da convergência uniforme em* $\mathcal{B}(X;\,E)$ *(ou seja, a métrica dada por* (2.185)*) provém da seguinte norma do espaço vetorial real(respectivamente, complexo)* $(\mathcal{B}(X;\,E)\,,+\,,\cdot)$, $\|\cdot\|:\mathcal{B}(X;\,E)\to\mathbb{R}$, *dada por:*

$$\|f\|\doteq\sup_{x\in X}\|f(x)\|_E,\qquad f\in\mathcal{B}(X;\,E).\tag{2.186}$$

   A verificação deste dao será deixada como exercício para o leitor.

5. *Notemos que, para* $f\,,g\in\mathcal{B}(X\,,;\,E)$, *teremos:*

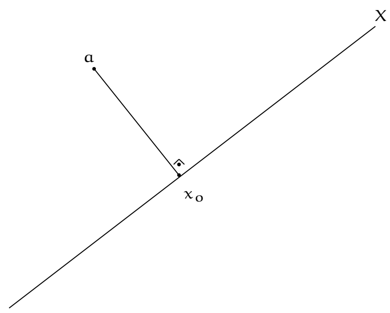
$$\begin{aligned}d(f\,,g)&\overset{(2.185)}{=}\sup\{d_E(f(x)\,,g(x))\,;\,x\in X\}\\&\overset{(2.186)}{=}\sup_{x\in X}\|f(x)-g(x)\|\,.\end{aligned}\tag{2.187}$$

2.4 Distância de um ponto a um subconjunto em um espaço métrico

Observação 2.4.1 *Como motivação consideremos o seguinte caso:*

Em um plano consideremos uma reta $\underline{X}$ *e* $\underline{a}$ *um ponto, que não pertence à reta* $\underline{X}$ *(veja a figura abaixo).*

Consideremos $x_o\in X$ *o "pé da reta perpendicular" à reta* $\underline{X}$, *que contém o ponto* $\underline{a}$ *(veja a figura abaixo).*

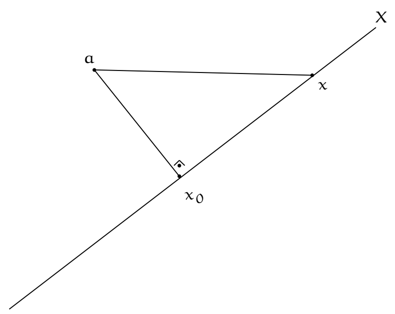


Seja

$$x \in X \quad \textit{tal que} \quad x \neq x_o .$$

Então aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $\Delta a x_o x$ *(veja a figura abaixo) obtemos*

$$[d(a\,,x)]^2 = [d(a\,,x_o)]^2 + [d(x_o\,,x)]^2 .$$



Em particular, teremos

$$d(a\,,x) \geq d(a\,,x_o)\,,$$

para todo $x \in X$*, ou seja, o ponto* x_o *é o ponto mais próximo do ponto* $\underline{a}$*, que pertence à reta* $\underline{X}$*.*

Deste modo poderemos escrever

$$d(a\,,x_o) = \inf_{x \in X}\{d(a\,,x)\}.$$

Podemos generalizar este fato, para isto observemos que se $(M\,,d_M)$*é um espaço métrico,* $X \subseteq M$ *não vazio e* $a \in M$*, então o conjunto*

$$A \doteq \{d_M(x\,,a)\,;\, x \in X\} \subseteq \mathbb{R}$$

é limitado inferiormente por $\underline{0}$*, pois*

$$d_M(a\,,x) \geq 0\,, \quad \textit{para todo} \quad x \in X .$$

Logo existe o ínfimo do conjunto $\underline{A}$*, em* $\mathbb{R}$*, assim podemos introduzir a:*

Definição 2.4.1 *Sejam* $(M\,,d_M)$ *um espaço métrico,* $X \subseteq M$ *não vazio e* $a \in M$*.*

Definimos a **distância do ponto $\underline{a}$ ao conjunto $\underline{X}$***, indicada por* $d(a\,,X)$*, como sendo*

$$d(a\,,X) \doteq \inf\{d_M(a\,,x)\,;\, x \in X\}. \tag{2.188}$$

Observação 2.4.2

1. *Das propriedades de ínfimo de subconjuntos limitados inferiormente em* $\mathbb{R}$*, segue que:*

(a) *para todo* $x \in X$, *temos que*

$$d(a\,,X) \leq d(a\,,x)\,, \tag{2.189}$$

isto é, $d(a\,,X)$ *é um limitante inferior do conjunto*

$$\{d(x\,,a)\,;\,x \in X\} \subseteq \mathbb{R}\,;$$

(b) *Se* $d(a\,,X) < c$, *então existe* $x \in X$, *tal que* $d(a\,,x) < c$, *isto é,* $d(a\,,X)$ *é o maior dos limitantes inferiores do conjunto*

$$\{d(x\,,a)\,;\,x \in X\} \subseteq \mathbb{R}\,.$$

2. *Observemos que se* $a \in X$ *então*

$$d(a\,,X) = 0\,.$$

De fato, se $a \in X$, *então*

$$0 \leq d(a\,,x) = \inf_{x \in X} d(a\,,x) \overset{a \in X}{=} 0\,.$$

3. *Além disso, se* $X \subseteq Y$, *então*

$$d(a\,,Y) \leq d(a\,,X)\,,$$

Lembremos que se

$$A \subseteq B\,, \quad \textit{então} \quad \inf B \leq \inf A\,. \tag{2.190}$$

Logo, se $X \subseteq Y$ *então*

$$\{d(x\,,a)\,;\,x \in X\} \subseteq \{d(y\,,a)\,;\,y \in Y\}\,.$$

Assim, de (2.190), *segue que*

$$\begin{aligned} d(a\,,Y) &= \inf\{d(y\,,a)\,;\,y \in Y\} \\ &\overset{(2.190)}{\leq} \inf\{d(x\,,a)\,;\,x \in X\} \\ &= d(a\,,X)\,. \end{aligned}$$

4. *Se*

$$d(a\,,X) = 0\,,$$

isto **não** *implica, necessariamente, que* $a \in X$, *como vereremos em exemplos a seguir.*

O que podemos afirmar é que:

$$d(a, X) = 0$$

se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $x \in X$, *tal que*

$$d(a\,,x) < \varepsilon\,.$$

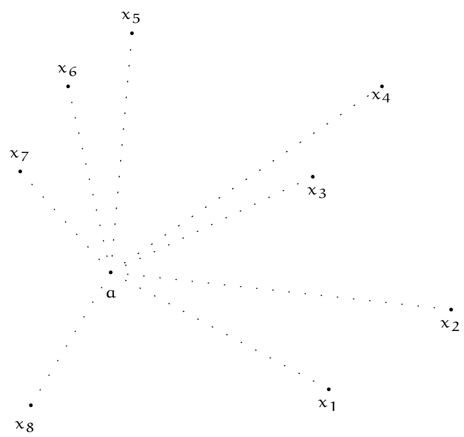
5. *Vale observar que, em geral,* **não** *podemos substituir o ínfimo na definição acima pelo mínimo, isto é, pode* **não** *existir um ponto em* $x_o \in X$*, de tal modo que*
$$d(a\,,X) = d(a\,,x_o)\,,$$
como veremos em exemplos a seguir.

Consideremos alguns exemplos:

Exemplo 2.4.1 *Seja* $(M\,,d)$ *um espaço métrico,* $a \in M$ *e* $X \doteq \{x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n\}$ *um subconjunto finito de* $\underline{M}$.

Então

$$d(a\,,X) = \inf_{1\leq i\leq n}\{d(a,x_i)\} \overset{\underline{X} \text{ é conjunto finito}}{=} \min_{i\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}}\{d(a\,,x_i)\}\,.$$



Exemplo 2.4.2 *Consideremos o espaço metrico* $\left(\mathbb{R}^2\,,d\right)$*, onde* $\underline{d}$ *é a métrica usual (ou seja, dada por* (2.13)*, com* $n=2$*) e* $S^1 \doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2+y^2=1\right\}$*, a circunferência de centro na origem* $(0\,,0)$ *e raio igula a* $\underline{1}$.

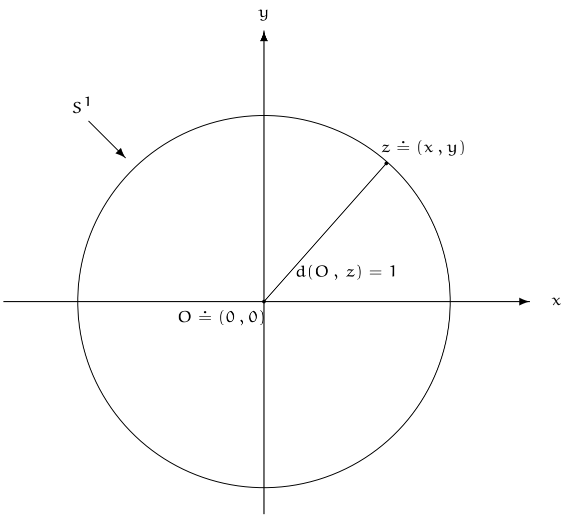
Então, se $z \doteq (1\,,0) \in S^1$ *e* $O \doteq (0\,,0)$*, temos que*

$$d(O\,,z) = \sqrt{(1-0)^2+(y-0)^2}$$
$$= 1\,,$$
$$\text{ou seja,} \qquad d\left(O\,,S^1\right) \leq 1\,.$$

Pode-se mostrar que
$$d\left(O\,,S^1\right) = 1\,.$$

A verificação deste dato será deixada como exercício para o leitor.

A figura abaixo ilustra da situação acima.



Observação 2.4.3 *No Exemplo 2.4.2 acima, para qualquer ponto* $z \in S^1$, *temos que*

$$d(O\,,\,S^1) = d(O\,,\,z)\,.$$

A verificação deste dato será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo 2.4.3 *Conisderemos o espaço métrico* $(\mathbb{R}\,,d)$, *onde* $\underline{d}$ *é a métrica usual (ou seja, dada por* (2.13)*, com* $n = 1$*) e* $X \doteq (a\,,b)$.

Então temos que

$$d(a\,,X) = d(b\,,X) = 0\,.$$

Resolução:

Deixaremos a resolução como exercício para o leitor.

$\square$

Podemos provar isto diretamente ou utilizar o seguinte resultado geral:

Proposição 2.4.1 *Sejam* $(E\,,\|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado,* $\vec{a} \in E$ *e* $r > 0$.

Então dado $\vec{b} \in E$, *temos que*

$$d\left(\vec{b}\,,\,B(\vec{a}\,;\,r)\right) = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad \vec{b} \in B\,[\vec{a}\,;\,r]\ ,$$

onde a métrica considerada é a que provém da norma $\|\cdot\|$, *ou seja,* $d : E \times E \to \mathbb{R}$ *será dada por*

$$d\,(\vec{x}\,,\vec{a}) \doteq \|\vec{x} - \vec{y}\|\ , \tag{2.191}$$

onde $\vec{x}\,,\vec{y} \in E$.

Demonstração:

Suponhamos que

$$\vec{b} \in B\,[\vec{a}\,;\,r]\ , \quad \text{ou seja,} \quad \left\|\vec{b} - \vec{a}\right\| \leq r\,.$$

Se tivermos

$$\|\vec{b} - \vec{a}\| < r\,,$$

segue que

$$\vec{b} \in B(\vec{a}\,; r)\,, \quad \text{ou seja,} \quad d\left(\vec{b}\,, B\,(\vec{a}\,; r)\right) = 0\,.$$

Afirmamos que se

$$\|\vec{b} - \vec{a}\| = r > 0\,, \tag{2.192}$$

dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\vec{x} \in B\,(\vec{a}\,; r)$, de modo que

$$d\left(\vec{b}\,, \vec{x}\right) < \varepsilon\,.$$

De fato, consideremos

$$\vec{u} \doteq \frac{1}{r} \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right) \in E\,. \tag{2.193}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &\overset{(2.193)}{=} \left\|\frac{1}{r} \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right)\right\| \\ &\overset{(2.74)}{=} \frac{1}{r} \left\|\vec{b} - \vec{a}\right\| \\ &\overset{(2.192)}{=} \frac{1}{r}\, r = 1\,. \end{aligned} \tag{2.194}$$

Escolhamos

$$t \in (r - \varepsilon\,, r)\,, \quad \text{deste modo teremos} \quad 0 < r - t < \varepsilon\,. \tag{2.195}$$

Consideremos

$$\vec{x} \doteq \vec{a} + t \cdot \vec{u} \in E\,. \tag{2.196}$$

Com isto, teremos:

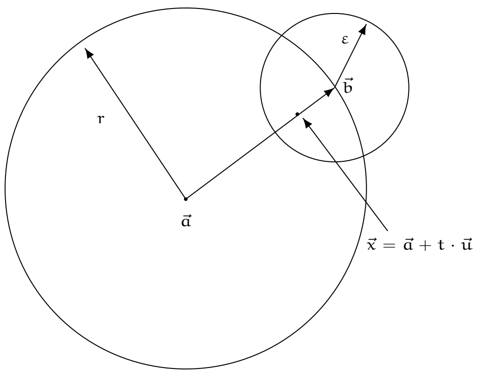
$$\begin{aligned} d\,(\vec{x}\,, \vec{a}) &\overset{(2.191)}{=} \|\vec{x} - \vec{a}\| \\ &\overset{(2.197)}{=} \|(\vec{a} + t \cdot \vec{u}) - a\| \\ &= \|t \cdot \vec{u}\| \\ &\overset{(2.74)}{=} |t|\ \|\vec{u}\| \\ &\overset{(2.194)}{=} t \\ &\overset{(2.195)}{=} r\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad \vec{x} \in B\,(\vec{a}\,; r)\;. \tag{2.197}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
d\left(\vec{x}, \vec{b}\right) &\overset{(2.191)}{=} \left\|\vec{b} - \vec{x}\right\| \\
&\overset{(2.197)}{=} \left\|\vec{b} - (\vec{a} + t \cdot \vec{u})\right\| \\
&= \left\|(\vec{b} - \vec{a}) - t \cdot \vec{u}\right\| \\
&\overset{\vec{b}-\vec{a} \overset{(2.193)}{=} r \cdot \vec{u}}{=} \|r \cdot \vec{u} - t \cdot \vec{u}\| \\
&= \|(r - t) \cdot \vec{u}\| \\
&\overset{(2.74)}{=} |r - t| \, \|\vec{u}\| \\
&\overset{(2.194)}{=} |r - t| \\
&\overset{(2.195)}{<} \varepsilon .
\end{aligned}$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima:



Logo dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\vec{x} \in B(\vec{a}; r)$, de modo que

$$0 \le d(\vec{b}, \vec{x}) < \varepsilon ,$$

ou seja, $$0 \le d\left(\vec{b}, B(\vec{a}; r)\right) \le d\left(\vec{b}, \vec{x}\right) < \varepsilon ,$$

isto é, $$0 \le d\left(\vec{b}, B(\vec{a}; r)\right) = \inf\left\{d\left(\vec{b}, \vec{x}\right) ; \vec{x} \in B(\vec{a}; r)\right\} = 0 ,$$

ou seja,

$$d\left(\vec{b}, B(\vec{a}; r)\right) = 0 .$$

Reciprocamente, suponhamos que

$$d\left(\vec{b}, B(\vec{a}; r)\right) = 0 . \tag{2.198}$$

Seja $\vec{p} \in E$, tal que

$$\vec{p} \notin B[\vec{a}; r] . \tag{2.199}$$

Afirmamos que

$$d(\vec{p}, B(\vec{a}; r)) > 0. \tag{2.200}$$

De fato, como $\vec{p} \notin B[\vec{a}; r]$, temos que

$$\begin{aligned} d(\vec{p}, \vec{a}) &\overset{(2.191)}{=} \|\vec{p} - \vec{a}\| \\ &\overset{\vec{p} \notin B[\vec{a}; r]}{>} r, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \qquad \|\vec{p} - \vec{a}\| = r + c, \tag{2.201}$$

para algum $c > 0$.

Se $\vec{x} \in B(\vec{a}; r)$, teremos

$$\|\vec{x} - \vec{a}| \overset{(2.191)}{=} d(\vec{x} - \vec{a}) < r \tag{2.202}$$

e como

$$\begin{aligned} \|\vec{p} - \vec{a}\| &\overset{(2.75)}{\leq} \|\vec{p} - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{a}\|, \end{aligned}$$

$$\text{ou ainda} \qquad \|\vec{p} - \vec{x}\| \geq \|\vec{p} - \vec{a}\| - \|\vec{x} - \vec{a}\| \tag{2.203}$$

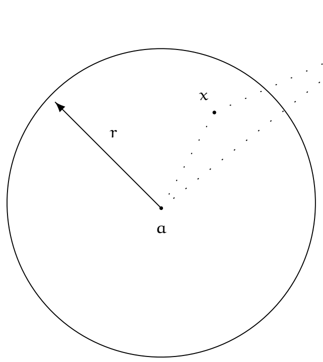
segue que

$$\begin{aligned} d(\vec{p}, \vec{x}) &\overset{(2.191)}{=} \|\vec{p} - \vec{x}\| \\ &\overset{(2.203)}{\geq} \|\vec{p} - \vec{a}\| - \|\vec{x} - \vec{a}\| \\ &\overset{(2.201)}{=} (r + c) - \|\vec{x} - \vec{a}\| \\ &\overset{(2.202)}{>} (r + c) - r \\ &= c > 0, \end{aligned}$$

ou seja, o número real $\underline{c}$ é um limitante inferior do subconjunto

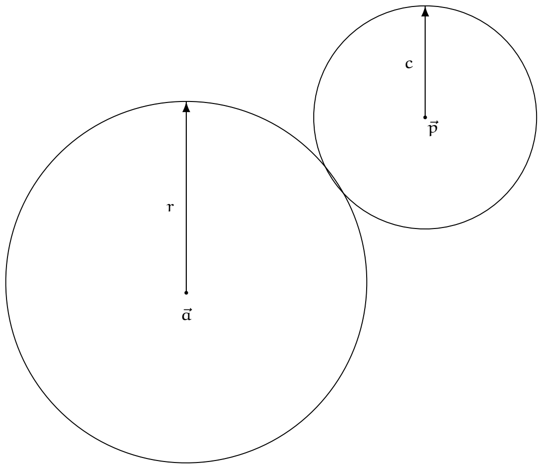
$$\{d(\vec{p}, \vec{x}) \,;\, \vec{x} \in B(\vec{a}; r)\} \subseteq \mathbb{R}. \tag{2.204}$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Como $d(\vec{p}, B(\vec{a}; r))$ é o ínfimo do conjunto (2.204) acima, segue que

$$d(\vec{p}, B(\vec{a}; r)) \geq c > 0 .$$



Como, por hipótese, temos que

$$d\left(\vec{b}, B(\vec{a}; r)\right) = 0 ,$$

da afirmação (2.200), segue que deveremos ter $\vec{b} \in B[\vec{a}; r]$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Observação 2.4.4 *Em particular, a Proposição (2.4.1) nos diz que podemos ter* $b \in E$*, com* $d(b, X) = 0$ *e* $b \notin X$*, como afirmamos anteriormente.*

Para tanto, no caso da Proposição (2.4.1) acima, basta considerar $\vec{b} \in S(\vec{a}; r)$ *e notar que* $\vec{b} \notin B(\vec{a}, r)$*, apesar de termos*

$$d(\vec{b}, B(\vec{a}; , r) = 0 .$$

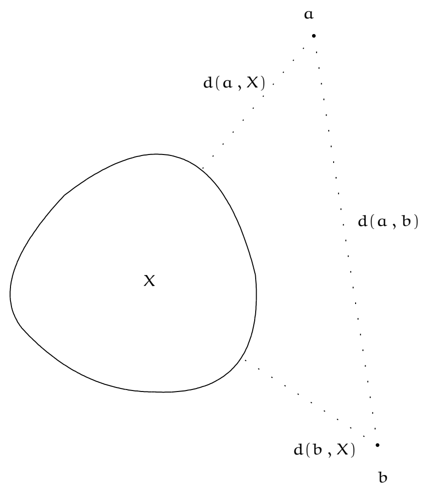
Temos também a:

Proposição 2.4.2 *Sejam* (M, d) *um espaço métrico,* $a, b \in M$ *e* $X \subseteq M$ *não vazio. Então*

$$|d(a, X) - d(b, X)| \leq d(a, b) . \tag{2.205}$$

Demonstração:

A figura abaixo ilustra o resultado acima.



A desigualdade (2.205) é equivalente a

$$-\,d(a\,,b) \le d(a\,,X) - d(b\,,X) \le d(a\,,b)\,. \tag{2.206}$$

Observemos que para todo $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned} & d(a\,,X) \le d(a\,,x) \overset{(??)}{\le} d(a\,,b) + d(b\,,x)\,,\\ \text{ou seja,}\quad & d(a\,,X) - d(a\,,b) \le d(b, x)\,, \end{aligned}$$

ou ainda, o número real

$$d(a\,,X) - d(a\,,b)$$

é um limitante inferior do subconjunto

$$\{d(b\,,x)\,;\, x \in X\} \subseteq \mathbb{R}\,.$$

Da definição de ínfimo de um subconjunto limitado inferiormente em $\mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned} & d(a\,,X) - d(a\,,b) \le d(b\,,X)\,,\\ \text{isto é,}\quad & d(a\,,X) - d(b\,,X) \le d(a\,,b) \end{aligned} \tag{2.207}$$

Observemos também que, para todo $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned} & d(b\,,X) \le d(b\,,x) \overset{(??)}{\le} d(b\,,a) + d(a\,,x)\,,\\ \text{ou seja,}\quad & d(b\,,X) - d(a\,,b) \le d(a\,,x) \end{aligned}$$

ou ainda, o número real

$$d(b\,,X) - d(a\,,b)$$

é um limitante inferior do subconjunto

$$\{d(a\,,x)\,;\, x \in X\} \subseteq \mathbb{R}\,.$$

Da definição de ínfimo de um subconjunto limitado inferiormente em $\mathbb{R}$, segue que

$$d(b,X) - d(a,b) \leq d(a,X),$$

$$\text{isto é,} \qquad d(a,X) - d(b,Y) \geq -d(a,b). \tag{2.208}$$

Portanto, de (2.207) e (2.208), segue a desigualdade (2.206), ou seja, (2.205), concluindo a demonstração.

□

Como conseqüência temos o:

Corolário 2.4.1 *Seja* (M,d) *um espaço métrico e* $a,b,x \in M$. *Então*

$$|d(a,x) - d(a,y)| \leq d(a,b). \tag{2.209}$$

Demonstração:
Basta considerar

$$X \doteq \{x\},$$

na Proposição (2.4.2) acima e verificar que

$$d(a,\{x\}) = d(a,x).$$

□

2.5 Distância entre dois subconjuntos de um espaço métrico

Podemos introduzir a:

Definição 2.5.1 *Sejam* (M,d) *um espaço métrico e* $X,Y \subseteq M$ *não vazios.*
Definimos a **distância entre os conjuntos $\underline{X}$ e $\underline{Y}$**, *indicada por* $d(X,Y)$, *como sendo*

$$d(X,Y) \doteq \inf\{d(x,y)\,;\, x \in X \quad e \quad y \in Y\}. \tag{2.210}$$

Com siot temos o:

Exemplo 2.5.1 *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R},d)$, *onde* $\underline{d}$ *é a métrica usual (ou seja, dada por* (2.13), *com* $n = 1$*),*

$$X \doteq (-\infty,0) \qquad e \qquad Y \doteq (0,\infty).$$

Mostre que $d(X,Y) = 0$ *e temos* $X \cap Y = \emptyset$.

Resolução:

Dado $\varepsilon > 0$, existem $x \in X$ e $y \in Y$ tal que

$$d(x, y) < \varepsilon, \quad \text{ou seja,} \quad d(X, Y) = 0.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Observemos também que

$$X \cap Y = (-\infty, 0) \cap (0, \infty) = \emptyset.$$

□

Observação 2.5.1 *Sejam* (M, d) *é um espaço métrico e* $X, Y \subseteq M$*, não vazios então:*

1. *Se* $X \cap Y \neq \emptyset$*, segue que*
$$d(X, Y) = 0.$$

2. *Notemos também que*
$$d(X, X) = 0 \quad e \quad d(X, Y) = d(Y, X).$$

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

2.6 Imersões Isométricas e Isometrias entre espaços métricos

Começaremos pela

Definição 2.6.1 *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos.*

Diremos que uma função $f : M \to N$ *é uma* imersão isométrica de (M, d_M) em (N, d_N) *se*

$$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y), \quad \text{para cada} \quad x, y \in M. \tag{2.211}$$

Neste caso, diremos que a função f preserva as distâncias (ou as métricas) de (M, d_M) e (N, d_N) .

Observação 2.6.1

1. *Notemos que, se a função* $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ *é uma imersão isométrica, segue que a função* f *será injetora e contínua em* (M, d_M)*.*

   De fato, se

$$f(x) = f(y), \tag{2.212}$$

$$\text{então,} \quad d_M(x, y) \overset{(2.211)}{=} d_N(f(x), f(y)) \overset{(2.212)}{=} 0,$$

$$\text{logo,} \quad x = y,$$

   mostrando a função f *é injetora.*

2. *Sejam* (M, d_M), (N, d_N) *e* (P, d_P) *espaços métricos e* $f : M \to N$, $g : N \to P$ *imersões isométricas de* (M, d_M) *em* (N, d_N) *e de* (N, d_N) *em* (P, d_P)*, respectivamente.*

   Afirmamos que a função $(g \circ f) : (M, d_M) \to (P, d_P)$ *é uma imersão isométrica de* (M, d_M) *em* (P, d_P).

   De fato, se $x, y \in M$*, segue que*

$$\begin{aligned} d_P((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) &= d_P(g(f(x)), g(f(y))) \\ &\overset{g \text{ é isometria}}{=} d_N(f(x), f(y)) \\ &\overset{f \text{ é isometria]}}{=} d_M(x, y), \end{aligned}$$

   mostrando que a função $(g \circ f)$ *preserva as métricas de* d_M *e* d_P*, ou seja, será uma imersão isométrica entre os espaços métricos* (M, d_M) *e* (P, d_P).

Podemos também introduzir a:

Definição 2.6.2 *Um imersão isométrica entre espaços métricos, que uma função é sobrejetora será denominada* <u>**isometria de** (M, d_M) **em** (N, d_N)</u>.

Observação 2.6.2

1. *Notemos que, a função* $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ *é uma isometria se, e somente se, a função* <u>f</u> *preservar as métricas (ou distâncias)* d_M *e* d_N *e for uma função sobrejetora.*

2. *Em particular se a função* $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ *é isometria segue, do item 1. da Observação 2.6.1 que a função* <u>f</u> *será bijetora.*

   Logo admitirá função inversa $f^{-1} : (N, d_N) \to (M, d_M)$ *e esta também é uma isometria.* $\boxed{*}$

   Em particular, a função <u>f</u> *será contínua em* (M, d_M) *e a função* <u>f^{-1}</u> *será contínua em* (N, d_N). $\boxed{*}$

   De fato pois se $w, z \in N$ *temos que existem* $x, y \in M$ *tal que*

$$z = f(x) \quad e \quad w = f(y). \tag{2.213}$$

   Portanto, teremos:

$$\begin{aligned} d_M\left(f^{-1}(z), f^{-1}(w)\right) &\overset{(2.213)}{=} d_M\left(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y))\right) \\ &= d_M(x, y) \\ &\overset{(2.211)}{=} d_N(f(x), f(y)) \\ &\overset{(2.213)}{=} d_N(z, w), \end{aligned}$$

   mostrando que a função <u>f^{-1}</u> *preserva as métricas de* d_N *e* d_M *e como é sobrejetora, segue que ela será uma isometria de* (N, d_N) *em* (M, d_M).

3. *Como conseqüência do item 2. da Observação 2.6.1 e do fato que composta de funções sobrejetora é uma função sobrejetora, segue que a composta de isometrias também será uma isometria.*

4. *Notemos que se* $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ *é uma imersão isométrica, então sobre a imagem de* $\underline{M}$ *a aplicação* $\underline{f}$ *será uma isometria, ou seja, a aplicação* $f : (M, d_M) \to (f(M), d_N)$ *é uma isometria, pois a função* $f : M \to f(M)$ *será sobrejetora e continuará a preservar as métricas* d_M *e* d_N.

Podemos agoram introduzir o seguinte conceito:

Definição 2.6.3 *Diremos que os espaços métricos* (M, d_M) *e* (N, d_N) *são* **isométricos**, *se existir uma isometria de* (M, d_M) *em* (N, d_N) *e neste caso escreveremos*

$$M \sim N. \tag{2.214}$$

Observação 2.6.3 *Observemos que:*

1. $M \sim M$.

   De fato, basta considerar a aplicação identidade $\mathrm{id} : (M, d_M) \to (M, d_M)$, *dada por*

   $$\mathrm{id}(x) \doteq x, \quad \textit{para cada} \quad x \in M. \tag{2.215}$$

   Deste modo teremos que a aplicação $\underline{\mathrm{id}}$ *será sobrejetora e*

   $$d_M(\mathrm{id}(x), \mathrm{id}(y)) \overset{(2.215)}{=} d_M(x, y),$$

   para todo $x, y \in M$.

2. *Se* $M \sim N$, *então* $N \sim M$.

   De fato, pois se existe uma isometria $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$, *como vimos no item 2. da Observação (2.6.2), existe a função inversa* $f^{-1} : (N, d_N) \to (M, d_M)$, *além disso, será uma isometria, ou seja,* $N \sim M$.

3. *Se* $M \sim N$ *e* $N \sim P$, *então* $M \sim P$.

   De fato, pois se existem isometrias $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ *e* $g : (N, d_N) \to (P, d_P)$, *como vimos no item 3. da Observação (2.6.2), a função composta* $(g \circ f) : (M, d_M) \to (P, d_P)$ *será uma isometria, ou seja,* $M \sim P$.

4. *Os três itens acima nos dizem que a relaçaõ* $\simeq$, *introduzida pela Definição 2.6.3 é uma relação de equivalência no conjunto formado por todos os espaços métricos, isto é, a relação* $\simeq$ *satisfaz as propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva .*

5. *Se existir uma imerão isométrica* $f : (M\,, d_M) \to (N\,, d_N)$*, então teremos que*

$$M \sim f(M)\,.$$

De fato pois, do item 4. da Observação 2.6.2, a função $f : (M\,, d_M) \to (f(M)\,, d_N)$ *será uma isometria.*

6. *Sejam* $\underline{X}$ *um subconjunto não vazio,* $(M\,, d_M)$ *um espaço métrico e* $f : X \to M$ *uma função injetora.*

   Nosso objetivo é introduzir uma métrica em $\underline{X}$*, que indicaremos por* $\underline{d_X}$*, de tal modo que a função* $f : (X\,, d_X) \to (M\,, d_M)$ *seja uma imersão isométrica de* $(X\,, d_X)$ *e* $(M\,, d_M)$.

   Para isto definamos a aplição $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$*, por*

$$d_X(x\,, y) \doteq d_M(f(x)\,, f(y))\,, \quad \textit{para cada} \quad x, y \in X\,. \tag{2.216}$$

   Com isto a função $\underline{d_X}$ *será uma métrica em* $\underline{X}$.

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

   Notemos que precisaremos utilizaar do fato que a função $\underline{f}$ *é injetora!*

   Como isto a função $f : (X\,, d_X) \to (M\,, d_M)$ *tornar-se-á uma imersão isométrica de* $(X\,, d_X)$ *em* $(M\,, d_M)$.

7. *Na situação acima, podemos mostrar que a métrica* $\underline{d_X}$*, em* $\underline{X}$ *é a* **<u>única métrica</u>** *que torna a funçao* $f : (X\,, d_X) \to (M\,, d_M)$ *uma imersão isométrica de* $(X\,, d_X)$ *em* $(M\,, d_M)$.

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Baseados nos dois últimos itens acima, introduziremos a:

Definição 2.6.4 *A métrica* $\underline{d_X}$*, definida no item 6. da Observação 2.6.3, será denominada* **<u>métrica induzida pela função f em X</u>**.

Observação 2.6.4 *Um caso particular da situação acima é a quando* $X \subseteq M$*, não vazio, onde* (M, d_M) *é um espaço métrico.*

Neste caso se considerarmos a **<u>aplicação inclusão</u>** $i : X \to M$*, dada por*

$$i(x) \doteq x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in X\,, \tag{2.217}$$

é fácil ver que a função $\underline{i}$ *será injetora.*

Logo podemos considerar em $\underline{X}$*, a métrica induzida pela função* $\underline{i}$*, que será coincidirá com a métrica induzida de* $(M\,, d_M)$ *em* $\underline{X}$.

De fato, pois

$$\begin{aligned} d_X(x,y) &\overset{(2.216)}{=} d_M(i(x),i(y)) \\ &\overset{(2.217)}{=} d_M(x,y)\,, \end{aligned}$$

para todo $x, y \in X$.

A seguir consideraremos alguns exemplos relacionados com os conceitos introduzidos acima.

Exemplo 2.6.1 *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, *onde a métrica* $\underline{d_{\mathbb{R}}}$ *é a métrica usual (ou seja, dada por* (2.13), *com* $n = 1$*) e o espaço métrico* $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, *onde* $\underline{d_{\mathbb{R}^n}}$ *é uma metrica induzida por alguma norma, que indicaremos por* $\|\cdot\|$, *do espaço vetorial real normado* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *(ou seja, dada por* (2.191)*).*

Sejam $\vec{a}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, *tal que*

$$\|\vec{u}\| = 1\,. \tag{2.218}$$

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *dada por*

$$f(t) \doteq \vec{a} + t \cdot \vec{u}\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{2.219}$$

Afirmamos que a funçao $\underline{f}$ *é um imersão isómétrica de* $(\mathbb{R}, d)$ *em* $(\mathbb{R}^n, d_n)$.

<u>**Resolução:**</u>

De fato, notemos que se $t, s \in \mathbb{R}$, segue que:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^n}(f(t), f(s)) &\overset{(2.191)}{=} \|f(t) - f(s)\| \\ &\overset{(2.219)}{=} \|(\vec{a} + t \cdot \vec{u}) - (\vec{a} + s \cdot \vec{u})\| \\ &= \|(t-s) \cdot \vec{u}\| \\ &\overset{(2.74)}{=} |t - s|\, \|\vec{u}\| \\ &\overset{(2.218)}{=} |t - s| \\ &\overset{(2.13)\ \text{com}\ n=1}{=} d_{\mathbb{R}}(t,s)\,, \end{aligned}$$

mostrando que a função $\underline{f}$, dada por (2.219) preserva as métricas de $d_{\mathbb{R}}$ e $d_{\mathbb{R}^n}$.

$\square$

Observação 2.6.5 *Observemos que a representação geométrica do conjunto* $f(\mathbb{R})$ *será uma reta, que passa pelo ponto* $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ *e tem a direção do vetor unitário* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$.

Em particular, a função $\underline{f}$ <u>**não**</u> *é uma isometria de* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ *em* $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, *pois não é sobrejetora.*

Exemplo 2.6.2 *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}^n\,, d_{\mathbb{R}^n})$*, onde* $\underline{d_{\mathbb{R}^n}}$ *é uma metrica induzida por alguma norma, que indicaremos por* $\|\cdot\|$*, do espaço vetorial real normado* $(\mathbb{R}^n\,, \|\cdot\|)$ *(ou seja, dada por* (2.191)*). e* $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$*.*

Mostre que a função $f : (\mathbb{R}^n\,, d_{\mathbb{R}^n}) \to (\mathbb{R}^n\,, d_{\mathbb{R}^n})$*, dada por*

$$f(\vec{x}) \doteq \vec{x} + \vec{a}\,, \quad \textit{para cada} \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n\,, \tag{2.220}$$

é uma isometria.

Resolução:

De fato, para $\vec{x}\,, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, segue que:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^n}(f(\vec{x})\,, f(\vec{y})) &\overset{(2.191)}{=} \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \\ &\overset{(2.220)}{=} \|(\vec{x} + \vec{a}) - (\vec{y} + \vec{a})\| \\ &= \|\vec{x} - \vec{y}\| \\ &\overset{(2.191)}{=} d_{\mathbb{R}^n}(\vec{x}, \vec{y})\,, \end{aligned}$$

mostrando que a função $\underline{f}$ preserva a distância $d_{\mathbb{R}^n}$.

Além disso

$$f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n\,,$$

pois se $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, considerando-se

$$\vec{x} \doteq \vec{y} - \vec{a}\,, \tag{2.221}$$

segue que

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &\overset{(2.220)}{=} \vec{x} + \vec{a} \\ &\overset{(2.221)}{=} (\vec{y} - \vec{a}) + \vec{a} \\ &= \vec{y}\,, \end{aligned}$$

ou seja, a função $\underline{f}$ é sobrejetora, ou seja, a função $\underline{f}$ é uma isometria.

□

Observação 2.6.6 *Poderiámos generalizar o Exemplo* 2.6.2 *acima, para a seguinte situação: sejam* $(E\,, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado,* d_E *a metrica induzida pela norma (ou seja, dada por* (2.191)*) e* $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$*.*

Mostre que a função $f : (E\,, d_E) \to (E\,, d_E)$*, dada por*

$$f(\vec{x}) \doteq \vec{x} + \vec{a}\,, \quad \textit{para cada} \quad \vec{x} \in E\,, \tag{2.222}$$

é uma isometria.

A verificação deste fato é semelhante a resolução do Exemplo 2.6.2 *e será deixada como exercício para o leitor.*

Com isto temos a;

Definição 2.6.5 *A isometria* $f : (E, d_E) \to (E, d_E)$, *dada por* (2.222), *será denominada* **translação pelo vetor $\vec{a}$**.

Temos também o:

Exemplo 2.6.3 *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, *onde* $d_{\mathbb{R}^n}$ *é uma metrica induzida por alguma norma, que indicaremos por* $\|\cdot\|$, *do espaço vetorial real normado* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *(ou seja, dada por* (2.191)*). e* $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.

Mostre que a função $f : (\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n}) \to (\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, *dada por*

$$f(\vec{x}) \doteq -\vec{x}, \quad \textit{para cada} \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{2.223}$$

é uma isometria.

Resolução: De fato, para $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, segue que:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^n}(f(\vec{x}), f(\vec{y})) &\overset{(2.191)}{=} \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \\ &\overset{(2.223)}{=} \|(-\vec{x}) - (-\vec{y})\| \\ &= \|(-1) \cdot (\vec{x} - \vec{y})\| \\ &\overset{(2.74)}{=} |-1|\, \|\vec{x} - \vec{y}\| \\ &\overset{(2.191)}{=} d_{\mathbb{R}^n}(\vec{x}, \vec{y}), \end{aligned}$$

mostrando que a função f preserva a distância $d_{\mathbb{R}^n}$.

Além disso

$$f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n,$$

pois se $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, considerando-se

$$\vec{x} \doteq -\vec{y}, \tag{2.224}$$

segue que

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &\overset{(2.223)}{=} -\vec{x} \\ &\overset{(2.224)}{=} -(\vec{y}) \\ &= \vec{y}, \end{aligned}$$

ou seja, a função f é sobrejetora, ou seja, a função f é uma isometria.

$\square$

Observação 2.6.7 *Poderiámos generalizar o Exemplo 2.6.3 acima, para a seguinte situação: sejam* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado,* d_E *a metrica induzida pela norma (ou seja, dada por* (2.191)*) e* $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.

Mostre que a função $f : (E\,,d_E) \to (E\,,d_E)$*, dada por*

$$f(\vec{x}) \doteq -\vec{x}\,, \quad \textit{para cada} \quad \vec{x} \in E\,, \tag{2.225}$$

é uma isometria.

A verificação deste fato é semelhante a resolução do Exemplo 2.6.3 e será deixada como exercício para o leitor.

Com isto temos a

Definição 2.6.6 *A função* $f : (E\,,d_E) \to (E\,,d_E)$*, dada por* (2.225)*, será denominada* **reflexão, em torno da origem de** $O \in E$.

Observação 2.6.8 *Observemos que, na situaçaõ da Observação acima, fixados* $\vec{a}\,,\vec{b} \in E$*, existe uma isometria* $f : (E\,,d_E) \to (E\,,d_E)$ *tal que*

$$f\left(\vec{b}\right) = \vec{a}\,.$$

Para mostrar isto, basta considerar a translação $f : (E\,,d_E) \to (E\,,d_E)$*, dada por*

$$f(\vec{x}) \doteq \vec{x} + (\vec{a} - \vec{b})\,, \quad \textit{para cada} \quad \vec{x} \in E\,.$$

Temos também o:

Exemplo 2.6.4 *Considermos o espaço métrico* $(\mathbb{C}\,,d_{\mathbb{C}})$*, onde* $\mathbb{C}$ *denota o conjunto formado pelos números complexos e* $\underline{d_{\mathbb{C}}}$ *é a munido da métrica induzida pelo valor absoluto de um número complexo, isto é, se* $z \doteq a + b\,i$ *então*

$$\|z\| \doteq \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{2.226}$$

Sejam $u \in \mathbb{C}$*, tal que*

$$\|u\| = 1 \tag{2.227}$$

e a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$f(z) \doteq u \cdot z\,, \quad \textit{para cada} \quad z \in \mathbb{C} \tag{2.228}$$

onde $\underline{\cdot}$ *denota a multiplicação de números complexos.*

Mostre que a função $f : (\mathbb{C}\,,d_{\mathbb{C}}) \to (\mathbb{C}\,,d_{\mathbb{C}})$ *é uma isometria.*

Resolução:

Notemos que, para $z_1\,, z_2 \in \mathbb{C}$, temos:

$$\begin{aligned} d(f(z_1)\,, f(z_2)) &\overset{(2.191)}{=} \|f(z_1) - f(z_2)\| \\ &\overset{(2.226)}{=} \|u \cdot z_1 - u \cdot z_2\| \\ &= \|u \cdot (z_1 - z_2)\| \\ &\overset{\text{propriedade do módulo do produto em } \mathbb{C}}{=} \|u\|\,\|z_1 - z_2\| \\ &\overset{(2.227)}{=} \|z_1 - z_2\| \\ &\overset{(2.191)}{=} d(z_1\,, z_2)\,, \end{aligned}$$

mostrando que a função $f : (\mathbb{C}\,, d_{\mathbb{C}}) \to (\mathbb{C}\,, d_{\mathbb{C}})$ preserva a métrica $d_{\mathbb{C}}$, ou seja, é uma imersão isométrica.

Além disso, se $w \in \mathbb{C}$ consideranod-se

$$z \doteq \frac{w}{u} \in \mathbb{C}\,, \tag{2.229}$$

segue que

$$\begin{aligned} f(z) &\overset{(2.228)}{=} u \cdot z \\ &\overset{(2.229)}{=} u \cdot \frac{w}{u} \\ &= w\,, \end{aligned}$$

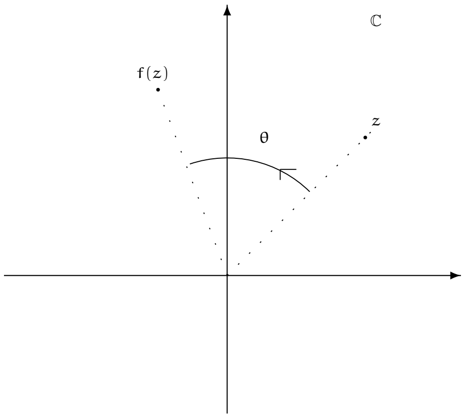
ou seja, a função $\underline{f}$ é sobrejetora, portanto uma isometria.

$\square$

Observação 2.6.9 *A isometria $\underline{f}$, dada por (2.228), apresentada no Exemplo 2.6.4 acima, geometricamente, produz uma rotação (no sentido horário), de um ângulo*

$$\begin{aligned} &\theta \doteq \frac{\pi}{2}\,, \quad \textit{se} \quad u = i \\ &\quad \textit{e} \\ &\theta \doteq \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)\,, \quad \textit{se} \quad u = a + b\,i\,, \quad \textit{para} \quad a \neq 0\,. \end{aligned}$$

A figura baixo ilustra a situação descrita acima.



Finalizaremos esta seção com a:

Proposição 2.6.1 *Seja (M, d_M) um espaço métrico limitado.*

Então existe uma imersão isométrica $\varphi : (M, d_M) \to (\mathcal{B}(M; \mathbb{R}), d_u)$, onde $\underline{d_u}$ é a métrica induzida pela norma da convergência uniforme (dada por (2.187), com $E \doteq \mathbb{R}$, munido da métrica usual de $\mathbb{R}$ ou seja, dada por (2.13), com $n = 1$).

Demonstração:

Consideremos a aplicação $\varphi : M \to \mathcal{B}(M;\mathbb{R})$, dada por

$$\varphi(x) \doteq d_x \,, \tag{2.230}$$

onde a função $d_x : M \to \mathbb{R}$ é dada por

$$d_x(y) \doteq d_M(x, y) \tag{2.231}$$

ou seja, a distância do ponto $\underline{y}$ ao ponto $\underline{x}$.

Notemos que (M, d_M) é limitado, segue que existe $K \geq 0$ tal que,

$$d_M(x, y) \leq K \,, \quad \text{para todo} \quad x, y \in M \,.$$

Donde teremos $d_x \in \mathcal{B}(M; \mathbb{R})$, ou seja, a função $\underline{\varphi}$ está bem definida.

Mostremos que a função $\underline{\varphi}$ preserva as métricas $\underline{d_M}$ e $\underline{d_u}$.

Para tanto, obervemos que se $x, x', y \in M$, teremos:

$$\begin{aligned} |d_x(y) - d_{x'}(y)| &\overset{(2.231)}{=} |d(x, y) - d(x', y)| \\ &\overset{(2.209)}{\leq} d_M(x, x') \,, \end{aligned} \tag{2.232}$$

$$\text{assim:} \quad \|d_x - d_{x'}\| = \sup_{y \in M} |d_x(y) - d_{x'}(y)| \overset{(2.232)}{\leq} d_M(x, x') \,. \tag{2.233}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |d_x(x') - d_{x'}(x')| &\overset{(2.231)}{=} |d_M(x, x') - d_M(x', x')| \\ &= |d_M(x, x') - d_M(x', x')| \\ &= d_M(x, x') \,. \end{aligned} \tag{2.234}$$

Logo

$$\|d_x - d_{x'}\| = \sup_{y \in M} |d_x(y) - d_{x'}(y)| \overset{(2.34)}{\geq} d_M(x, x') \,. \tag{2.235}$$

Portanto, de (2.233) e (2.234), segue que

$$\|d_x - d_{x'}\| = d_M(x, x') \,. \tag{2.236}$$

$$\begin{aligned} d_u(\varphi(x), \varphi(x')) &\overset{(2.230)}{=} d_u(d_x, d_{x'}) \\ &\overset{(2.187)}{=} \|d_x - d_{x'}\| \\ &\overset{(2.236)}{=} d_M(x, x') \,, \end{aligned}$$

ou seja, a aplicação $\varphi : (M, d_M) \to (\mathcal{B}(M; \mathbb{R}), d_u)$ preserva as métricas d_M e d_u, isto é, é uma imersão isométrica.

□

Observação 2.6.10

1. *Pode-se provar um resultado análogo ao exibido acima retirando-se a hipótese do espaço métrico (M, d_M) ser limitado.*

   Uma demonstração para esse fato pode ser encontrada em [1], na págna 20.

2. *O resultado acima garante que todo espçao métrico pode ser imerso isometricamente, em um espaço vetorial normado.*

2.7 Exercícios

Capítulo 3

Funções Contínuas Definidas em Espaços Métricos

3.1 Definição de função contínua em espaços métricos e exemplos

Temos a:

Definição 3.1.1 *Sejam* $(M\,, d_M)$, $(N\,, d_N)$ *espaços métricos e* $a \in M$.

Diremos que uma função $f : M \to N$ *é* **contínua no ponto $\underline{a}$**, *se dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $\delta = \delta(\varepsilon\,, a) > 0$, *de modo que se* $x \in M$ *satisfaz:*

$$d_M(x\,, a) < \delta\,, \qquad \textit{implicar que} \qquad d_N(f(x)\,, f(a)) < \varepsilon\,. \tag{3.1}$$

Diremos que a função $f : M \to N$ *é* **contínua em $\underline{M}$** *se ela for contínua em cada um dos pontos de* $\underline{M}$.

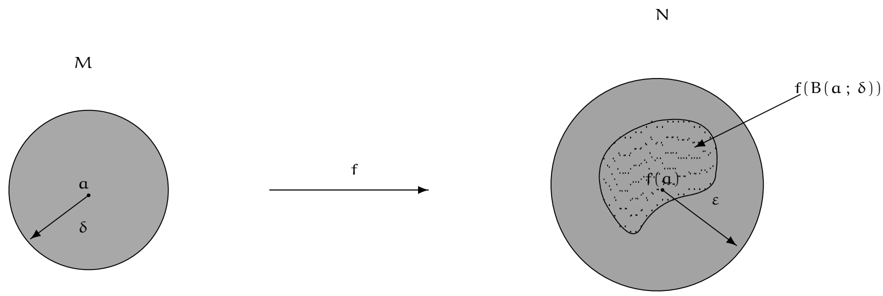
Observação 3.1.1

1. *Na situação da Definição ?? acima, a função* $f : (M\,, d_M) \to (N\,, d_N)$ *é contínua no ponto* $\underline{a}$ *se, e somente se, se dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $\delta = \delta(\varepsilon\,, a) > 0$, *de modo que*

   $$f\,(B(a\,;\,\delta)) \subseteq B(f(a)\,;\,\varepsilon)\,, \tag{3.2}$$

   ou ainda, dada uma bola aberta, em $(N\,, d_N)$, *de centro no ponto* $\underline{f(a)}$ *e raio* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar uma bola aberta, em* $(M\,, d_M)$, *de centro no ponto* $\underline{a}$ *e raio* $\delta > 0$, *de modo a imagem, pela função* $\underline{f}$, *da segunda bola estará contida na primeira bola.*

   Geometricamente, temos a seguinte situação:



2. Se

$$M \subseteq \mathbb{R} \quad e \quad N = \mathbb{R}$$

munidos da métrica usual (ou seja, $\underline{d}$*, dada por* (2.13)*, com* $n = 1$*), temos que a função* $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d)$ *será contínua em* $a \in R$ *se, e somente se, dado* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $\delta \doteq \delta(\varepsilon, a) > 0$*, de modo que se*

$$x \in \mathbb{R}, \quad \textit{satisfaz} \quad a - \delta < x < a + \delta\,,$$

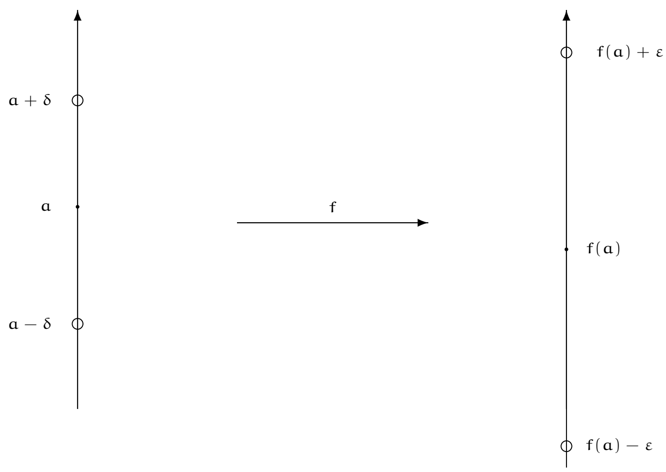
teremos

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon\,,$$

ou seja,

$$f((a - \delta, a + \delta)) \subseteq (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon). \tag{3.3}$$

Geometricamente, a situação é caraterizada pela figura abaixo:



A seguir exibiremos alguns exemplos, antes porém introduziremos a:

Definição 3.1.2 *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos e uma função* $f : M \to N$ *que tem a seguinte propriedade: existe* $c > 0$*, tal que*

$$d_N(f(x), f(y)) \le c\, d_M((x, y) \quad \textit{para todo} \quad x, y \in M\,. \tag{3.4}$$

Neste caso diremos que a função $\underline{f}$ *é* **lipschitziana em** (M, d_M).
A constante $\underline{c}$ *será dita* **constante de Lipschitz associada a função** $\underline{f}$.

Com isto temos a:

Proposição 3.1.1 *Se $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ é uma função lipschitiziana em (M, d_M), então a função $\underline{f}$ é contínua em (M, d_M).*

Demonstração:

De fato, como $\underline{f}$ é lipschitiziana em (M, d_M), da Definição 3.1.2, existe $c > 0$, tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c\, d_M((x, y) \quad \text{para todo} \quad x, y \in M\,. \tag{3.5}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, consideremos

$$\delta \doteq \frac{\varepsilon}{c} > 0\,. \tag{3.6}$$

Então se $a \in M$ e

$$d_M(x, a) < \delta\,, \tag{3.7}$$

teremos

$$\begin{aligned} d_N(f(x), f(a)) &\overset{(3.5)}{\leq} c\, d_M(x, a) \\ &\overset{(3.7)}{<} c\,\delta \\ &= c\,\frac{\varepsilon}{c} \\ &= \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é contínua no ponto $a \in M$.

Como $a \in M$ é arbitrário, segue que a função $\underline{f}$ é contínua em $\underline{M}$.

□

Passemos a exibir alguns exemplos importantes.

Exemplo 3.1.1 *Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ um espaço vetorial real normado e $\lambda \in \mathbb{R}$ (a métrica em $\underline{E}$ é a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$, dada por (2.191)).*

Afirmamos que a aplicação

$$f_\lambda : E \to E$$

dada por

$$f_\lambda(x) \doteq \lambda \cdot x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in E\,, \tag{3.8}$$

é lipschitiziana em $\underline{E}$.

Em particular, da Proposição 3.1.1, segue que a função $\underline{f}$ será contínua em $\underline{E}$.

Resolução:

De fato, para $x\,,y \in E$, temos que

$$\begin{aligned} d_E(f_\lambda(x)\,,f_\lambda(y)) &\overset{(2.191)}{=} \|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)\|_E \\ &\overset{(3.8)}{=} \|\lambda \cdot x - \lambda \cdot y\|_E \\ &= \|\lambda \cdot (x - y)\|_E \\ &\overset{(2.74)}{=} |\lambda|\, \|x - y\|_E \\ &\overset{(2.191)}{=} |\lambda|\, d_E(x\,,y)\,, \end{aligned}$$

mostrando que a afirmação é verdadeira.

□

Exemplo 3.1.2 *Suponhamos que as funções* $f_1\,,f_2\,,\cdots,f_n : E \to E$, *onde* $(E\,,\|\cdot\|)$ *é um espaço vetorial real normado (a métrica em* $\underline{E}$ *é a métrica induzida pela norma* $\|\cdot\|$, *dada por* (2.191)*), são lipschitzianas.*

Então dados $a_1\,,a_2\cdots,a_n \in \mathbb{R}$, *temos que a função* $f : E \to E$ *dada por*

$$f(x) \doteq a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + \cdots a_n \cdot f_n(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in E\,, \tag{3.9}$$

também será uma função lipschitziana.

Em particular, da Proposição 3.1.1, segue que a função $\underline{f}$ *será contínua em* $\underline{E}$

Resolução:

De fato, como para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$ a função $\underline{f_i}$ é lipschitziana em $\underline{E}$, ous eja, então existe $c_i > 0$, tal que

$$d_E(f_i(x)\,,f_i(y) \le c_i\, d_E(x\,,y) \quad \text{para todo} \quad x\,,y \in M\,. \tag{3.10}$$

Definamos

$$c \doteq |a_1|\, c_1 + |a_2\, c_2 + \cdots + |a_n|\, c_n\,. \tag{3.11}$$

Então, se $x, y \in E$, temos que

$$\begin{aligned} d_E(f(x)\,,f(y) &\overset{(2.191)}{=} \|f(x) - f(y)\|_E \\ &\overset{(3.9)}{=} \|[a_1 \cdot f_1 + \cdots + a_n \cdot f_n](x) - [a_1 \cdot f_1 + \cdots + a_n \cdot f_n](y)\|_E \\ &= \|[a_1 \cdot [f_1(x) - f_1(y)] + \cdots + a_n \cdot [f_n(x) - f_n(y)]](x)\|_E \\ &\overset{(2.75)}{\le} \|a_1 \cdot [f_1(x) - f_1(y)]\|_E + \cdots + \|a_n \cdot [f_n(x) - f_n(y)]\|_E \\ &\overset{(2.74)}{=} |a_1|\, \|f_1(x) - f_1(y)\|_E + \cdots + |a_n|\, \|f_n(x) - f_n(y)(x)\|_E \\ &\overset{(2.191)}{\le} |a_1|\, d_E(f_1(x)\,,f_1(y)) + \cdots + |a_n|\, d_M(f_n(x)\,,f_n(y)) \\ &\overset{(3.10)}{\le} |a_1|\, [c_1\, d_E(x\,,y)] + \cdots + |a_n|\, [c_n\, d_E(x\,,y)] \\ &= [|a_1|\, c_1 + \cdots + |a_n|\, c_n]\, d_E(x\,,y) \\ &\overset{(3.11)}{=} c\, d_E(x\,,y)\,, \end{aligned}$$

mostrando que a função $f : E \to E$, dada por (3.9), é lipschitziana.

$\square$

Observação 3.1.2 *Logo, resumindo O Exemplo 3.1.2 acima nos diz que a combinação linear de funções lipschitzianas é uma função lipschitziana em um espaço vetorial normado.*

Temos também o:

Exemplo 3.1.3 *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}\, d_{\mathbb{R}})$, *onde a métrica* $\underline{d_{\mathbb{R}}}$ *é a métrica usual (ou seja, dada por* (2.13), *com* $n = 1$*).*

Então a $f : (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ *é lipschitiziana em* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ *se, e somente se existe* $c > 0$, *tal que*

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq c \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \text{com} \quad x \neq y. \tag{3.12}$$

Resolução:

De fato, pois para $x, y \in \mathbb{R}$, com $x \neq y$, temos que:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \overset{(2.191)}{=} \frac{d_{\mathbb{R}}(f(x), f(y))}{d_{\mathbb{R}}(x, y)} \tag{3.13}$$

Logo, da Definição 3.1.2, a função $\underline{f}$ será lipschitiziana em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ se, e somente se, existe $c > 0$, de modo que

$$d_{\mathbb{R}}(f(x), f(y)) \leq c\, d_{\mathbb{R}}(x, y) \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Logo, de (3.13), segue que (3.14) será equivalente a (3.12), completando a demonstração.

$\square$

Como consequência temos o:

Exemplo 3.1.4 *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}, d)$, *onde* $\underline{d}$ *é a métrica usual (ou seja, dada por* (2.13), *com* $n = 1$*) e* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* $\underline{I}$, *onde* $\underline{I}$ *é um intervalo aberto de* $(\mathbb{R}, d)$, *tal que existe* $c \geq 0$, *de modo que*

$$|f'(x)| \leq c, \quad \text{para todo} \quad x \in I. \tag{3.15}$$

Mostre que a função $\underline{f}$ *é lipschitziana em* (I, d).

Resolução:

De fato, dados $x, y \in I$, do Teorema do Valor Médio para funções de uma variável real, a valores reais (visto na discipina de Cálculo I), segue que existe $\bar{x} \in (x, y)$ (ou (y, x), se $y < x$) tal que

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\bar{x}). \tag{3.16}$$

Logo

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \overset{(3.16)}{=} |f'(\bar{x})| \overset{(3.15)}{\leq} c\,,$$

ou seja, da Definição 3.1.2, segue que a função $\underline{f}$ é lipschitziana em $\underline{I}$, completando a resolução

□

Observação 3.1.3 *Conclusão: toda função real, de variável real, diferenciável em um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, de modo que sua derivada é limitada nesse intervalo é uma função lipschitiziana no intervalo em questão.*

Em particular, será uma função contínua nesse intervalo.

Uma situação mais geral é dada pela:

Definição 3.1.3 *Sejam $(M\,, d_M)$ e $(N\,, d_N)$ espaços métricos.*

Diremos que a função $f:(M\,, d_M)\to(N\,, d_N)$ é <u>**localmente lipschitziana em M**</u>*, se para cada $a\in M$, podemos encontrar $r_a>0$, de modo que a restrição da função $\underline{f}$ a bola aberta $B(a\,; r_a)$ (,isto é, $f_{|_{B(a\,;r_a)}}$) é uma função lischitziana em $B(a\,; r_a)$, ou seja, existe $c\doteq c(B(a\,;r_a))>0$, de modo que*

$$d_N(f(x)\,, f(y))\leq c\,d_M((x\,,y) \quad \textit{para todo} \quad x\,,y\in B(a\,;r)\,. \tag{3.17}$$

Com isto temos o:

Exemplo 3.1.5 *Sejam $(M\,, d_M)$ e $(N\,, d_N)$ espaços métricos. Suponhamos que a função $f:(M\,, d_M)\to(N\,, d_N)$ é localmente lipschitziana em $\underline{M}$.*

Mostre que a função $\underline{f}$ é contínua em $(M\,, d_M)$.

<u>**Resolução:**</u>

De fato, dado $a\in M$, seja $r_a>0$ tal que a restrição da função $\underline{f}$ a bola aberta $B(a\,; r_a)$ seja lipschitziana, ou seja, vale (3.17).

Dado $\varepsilon>0$, consideremos

$$\delta\doteq\min\left\{\frac{\varepsilon}{c}\,, r_a\right\}>0\,. \tag{3.18}$$

Logo se, $x\in M$ satisfaz

$$d_M(x\,,a)<\delta\,, \tag{3.19}$$

teremos

$$\begin{aligned}
d_N(f(x), f(a)) &\overset{\delta \overset{(3.18)}{\leq} r_a\text{, logo vale (3.17)}}{\leq} c\, d_M(x, a) \\
&\overset{(3.19)}{\leq} c\,\delta \\
&\overset{(3.18)}{\leq} c\,\frac{\varepsilon}{c} \\
&= \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é contínua no ponto $a \in M$.

Como $a \in M$ é arbitrário, segue que a função $\underline{f}$ é contínua em (M, d_M), completando a resolução.

□

Temos também o:

Exemplo 3.1.6 *Consideremos* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial real normado, e denotemos por* $d_{\|\cdot\|}$*, a métrica em* $\underline{E}$*, induzida pela norma* $\|\cdot\|$ *(ou seja, dada por* (2.191)*).*

Consideremos $f_1, f_2, \cdots, f_n :\to E$ *funções de modo que, para cada* $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$*, a função* $\underline{f_j}$ *seja localmente lipschitziana em* $\left(E, d_{\|\cdot\|}\right)$ *e* $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$*.*

Mostre que a função $f : E \to E$*, dada por*

$$f(\vec{x}) \doteq a_1 \cdot f_1(\vec{x}) + a_2 \cdot f_2(\vec{x}) + \cdots + a_n \cdot f_n(\vec{x})\,, \quad \textit{para cada} \quad \vec{x} \in E\,, \tag{3.20}$$

é uma função localmente lipschitziana $\left(E, d_{\|\cdot\|}\right)$*.*

Resolução:

De fato, dado $\vec{a} \in E$, como para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ a função $\underline{f_j}$ é localmente lipschitizianaem $\left(E, d_{\|\cdot\|}\right)$, podemos encontrar $c_j \geq 0$ e $r_{a,j} > 0$, de modo que teremos

$$d_{\|\cdot\|}(f(\vec{x}), f(\vec{y})) \leq c_j\, d_{\|\cdot\|}(\vec{x}, \vec{y}), \quad \text{para todo} \quad x, y \in B(\vec{a}; r_{a,j})\,. \tag{3.21}$$

Consideremos

$$C \doteq |a_1|\, c_1 + \cdots + |a_n|\, c_n \quad \text{e} \quad r_a \doteq \min\{r_{a,j}\,;\, j \in \{1, 2, \cdots, n\}\} > 0\,. \tag{3.22}$$

Logo, para $\vec{x}, \vec{y} \in B(\vec{a};\, r_a)$, de (3.22), teremos que

$$B(\vec{a};\, r_a) \subseteq B(\vec{a};\, r_{a,j})\,, \quad \text{para todo} \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\}\,, \tag{3.23}$$

pois $r_a \leq r_{a,j}$, para todo $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
d_{\|\cdot\|}(f(\vec{x}), f(\vec{y})) &\overset{(2.191)}{=} \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \\
&\overset{(3.20)}{=} \|[a_1 \cdot f_1(\vec{x}) + \cdots + a_n \cdot f_n(\vec{x})] - [a_1 \cdot f_1(\vec{y}) + \cdots + a_n \cdot f_n(\vec{y})]\| \\
&= \|a_1 \cdot [f_1(\vec{x}) - f_1(\vec{y})] + \cdots a_n \cdot [f_n(\vec{x}) - f_n(\vec{y})]\| \\
&\overset{(2.75)}{\leq} \|a_1 \cdot [f_1(\vec{x}) - f_1(\vec{y})]\| + \cdots \|a_n \cdot [f_n(\vec{x}) - f_n(\vec{y})]\| \\
&\overset{(2.74)}{\leq} |a_1|\, \|f_1(\vec{x}) - f_1(\vec{y})\| + \cdots |a_n|\, \|f_n(\vec{x}) - f_n(\vec{y})\| \\
&\overset{(2.191)}{=} |a_1|\, d_{\|\cdot\|}(f_1(\vec{x}), f_1(\vec{y})) + \cdots |a_n|\, d_{\|\cdot\|}(f_n(\vec{x}), f_n(\vec{y})) \\
&\overset{(3.23) \text{ e } (3.21)}{\leq} |a_1| \left[c_1\, d_{\|\cdot\|}(\vec{x}, \vec{y})\right] + \cdots |a_n| \left[c_n\, d_{\|\cdot\|}(\vec{x}, \vec{y})\right] \\
&= [|a_1|\, c_1 + \cdots |a_n|\, c_n]\, d_{\|\cdot\|}(\vec{x}, \vec{y}) \\
&\overset{(3.22)}{=} C\, d_{\|\cdot\|}(\vec{x}, \vec{y}),
\end{aligned}
$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é localmente lipschitiziana em $\left(E, d_{\|\cdot\|}\right)$, completando a resolução.

□

Observação 3.1.4 *Conclusão: combinação linear de funções localmente lipschitzianas é uma função localmente lipschitziana em* $\left(E, d_{\|\cdot\|}\right)$.

Em particular, será uam funçao contínua em $\left(E, d_{\|\cdot\|}\right)$.

Exemplo 3.1.7 *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}, d)$, *onde* $\underline{d}$ *é a métrica usual (ou seja, dada por* (2.13), *com* $n = 1$*) e, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *fixado, a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x) \doteq x^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

Mostre que a funçãoo $\underline{f}$ *é localmente lispchitziana em* $(\mathbb{R}, d)$.

Em particular, será contínua em $(\mathbb{R}, d)$.

Resolução:

De fato, como a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = n\, x^{n-1}, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.25}$$

par cada $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, se

$$x \in B(a; r) = (a - r, a + r), \tag{3.26}$$

teremos que

$$
\begin{aligned}
|x| &= |(x - a) + a| \\
&\leq |x - a| + |a| \\
&\overset{(3.26)}{<} r + |a|
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\overset{(3.25)}{=} \left|n\,x^{n-1}\right| \\ &= n\,|x|^{n-1} \\ &\overset{(3.27)}{<} n\,(r+|a|)^{n-1} \doteq M\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|f'(x)| \leq M\,, \quad \text{para todo} \quad x \in I \doteq (a-r\,, a+r)\,.$$

Logo, do Exemplo 3.1.4, segue que a função $\underline{f}$ é localmente lischitziana em $(\mathbb{R}\,, d)$.
ou seja, f .
Em particular, será uma função contínua em $(\mathbb{R}\,, d)$.

□

Observação 3.1.5 *Notemos que, do Exemplo 3.1.7 acima e do Exemplo 3.1.6, segue que toda função polinomial*

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$$

ou seja, dada por

$$p(x) \doteq a_o + a_1\,x + \cdots\,, a_n\,x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{3.28}$$

onde $a_1\,, a_2\,, \cdots\,, a_n \in \mathbb{R}$ *estão fixadas, é uma função localmente lispchitziana em* $(\mathbb{R}\,, d)$.

Em partitular, toda função polinomial será contínua em $(\mathbb{R}\,, d)$.

temos o:

Exemplo 3.1.8 *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}\,, d)$, *onde* $\underline{d}$ *é a métrica usual (ou seja, dada por* (2.13), *com* $n = 1$*) e a função* $f : \mathbb{R}^* \doteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{x}\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}^*\,. \tag{3.29}$$

Mostre que a função $\underline{f}$ *é localmente lischitiziana em* $(\mathbb{R}^*\,, d)$.
Em particular, a função será contínua em $(\mathbb{R}^*\,, d)$.

Resolução:

Para cada $a \in \mathbb{R}^*$, consideremos

$$x\,, y \in B\left(a\,; \frac{|a|}{2}\right) = \left(a - \frac{|a|}{2}\,, a + \frac{|a|}{2}\right)\,. \tag{3.30}$$

Notemos que se $z \in \left(a - \frac{|a|}{2}\,, a + \frac{|a|}{2}\right)$ então

$$|z| \geq \frac{|a|}{2}\,. \tag{3.31}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

$$
\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) &\overset{(2.191)}{=} |f(x) - f(y)| \\
&\overset{(3.29)}{=} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \\
&= \left| \frac{y - x}{x y} \right| \\
&= \frac{1}{|x|\,|y|} |x - y| \\
&\overset{(3.31)}{\leq} \frac{1}{|a|^2} |x - y| \\
&\overset{(2.191)}{=} \frac{1}{a^2} d_{\mathbb{R}}(x, y),
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

mostrando que $\underline{f}$ é lipschitziana em $B\left(a\,;\,\frac{|a|}{2}\right)$ (bastando tomar a constante de Lipschitz como sendo $c \doteq \frac{1}{a^2}$).

Portanto a função $\underline{f}$ é localmente lischitiziana em $(\mathbb{R}^*, d)$.

$\square$

Temos também o:

Exemplo 3.1.9 *Sejam* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial real normado, munido da métrica* $d_{\|\cdot\|}$*, induzida pela norma* $\|\cdot\|$ *(ou seja, dada por* (2.191)*) e o espaço métrico* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$*, onde* $d_{\mathbb{R}}$ *é a métrica usual (ou seja, dada por* (2.13)*, com* $n = 1$*) e* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

Mostre que a aplicação $m : \mathbb{R} \times E \to E$*, dada por*

$$
m(\lambda, \vec{x}) \doteq \lambda \cdot \vec{x}, \quad \textit{para cada} \quad (\lambda, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times E, \tag{3.33}
$$

é localmente lipschitiziana no espaço métrico $(\mathbb{R} \times E, d_{\mathbb{R}\times E})$*, onde a métrica* $d_{\mathbb{R}\times E}$ *no produto cartesiano* $\mathbb{R} \times E$*, é a métrica induzida pela norma*

$$
\|(\lambda, \vec{x})\|_{\mathbb{R}\times E} \doteq |\lambda| + \|\vec{x}\|_E, \quad \textit{para cada} \quad (\lambda, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times E, \tag{3.34}
$$

Em particular, a aplicação $m : \mathbb{R} \times E \to E$ *será contínua em* $(\mathbb{R} \times E, d_{\mathbb{R}\times E})$*.*

Resolução:

Notemos que a métrica $d_{\mathbb{R}\times E} : (\mathbb{R} \times E) \times (\mathbb{R} \times E) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$
d_{\mathbb{R}\times E}\left[(\lambda, \vec{x}), (\beta, \vec{y})\right] \doteq |\lambda - \beta| + \|\vec{x} - \vec{y}\|, \tag{3.35}
$$

pra cada $(\lambda, \vec{x}), (\beta, \vec{y}) \in \mathbb{R} \times E$.

De fato, dado $(\lambda_o, \vec{x}_o) \in \mathbb{R} \times E$, para $r > 0$ fixado, temos que se

$$(\lambda, \vec{x}), (\beta, \vec{y}) \in B((\lambda_o, \vec{x}_o); r),$$

teremos:

$$|\lambda - \lambda_o|, |\beta - \beta_o| < r \quad e \quad \|\vec{x} - \vec{x}_o\|_E, \|\vec{y} - \vec{x}_o\|_E < r. \tag{3.36}$$

Logo

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{R}\times E}(m(\lambda, \vec{x}), m(\beta, \vec{y})) &\overset{(3.35)}{=} \|m(\lambda, \vec{x}) - m(\beta, \vec{y})\| \\
&\overset{(3.33)}{=} \|\lambda \cdot \vec{x} - \beta \cdot y\| \\
&= \|\lambda \cdot x - \lambda \cdot y + \lambda \cdot y - \beta \cdot \vec{y}\| \\
&= \| [\lambda \cdot (\vec{x} - \vec{y})] + (\lambda - \beta) \cdot \vec{y}\| \\
&\overset{(2.75)}{\leq} \|\lambda \cdot (\vec{x} - \vec{y})\| + \|(\lambda - \beta) \cdot \vec{y}\| \\
&\overset{(2.74)}{\leq} |\lambda| \, \|\vec{x} - \vec{y}\| + |\lambda - \beta| \, \|\vec{y}\| \\
&\overset{|\lambda| \leq |\lambda - \lambda_o| + |\lambda_o| \overset{(3.36)}{\leq} r + |\lambda_o|}{\leq} [r + |\lambda_o|] \, \|\vec{x} - \vec{y}\| + |\lambda - \beta| \, \|\vec{y}\| \\
&\overset{\|\vec{y}\| \leq \|\vec{y} - \vec{x}_o\| + \|\vec{x}_o\|_E \overset{(3.36)}{\leq} r + \|\vec{x}_o\|}{\leq} [r + |\lambda_o|] \, \|\vec{x} - \vec{y}\| + [r + \|\vec{x}_o\|_E] \, |\lambda - \beta| \\
&\leq \max\{r + |\lambda_o|, r + \|\vec{x}_o\|\} \, [\|\vec{x} - \vec{y}\| + |\lambda - \beta|] \\
&\overset{c \doteq \max\{r + |\lambda_o|, r + \|\vec{x}_o\|\}}{=} c[|\lambda - \beta| + \|\vec{x} - \vec{y}\|_E] \\
&\overset{(3.35)}{=} c \, d_{\mathbb{R}\times E}[(\lambda, \vec{x}), (\beta, \vec{y})]
\end{aligned}$$

mostrando que a afirmação é verdadeira.

□

Observação 3.1.6 *Em particular, do Exemplo 3.1.9 aciam, segue que vale os análogos para multiplicação de números reais ou multiplicação de números reais por vetores de* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Uma outra classe de funções importantes é dada pela:

Definição 3.1.4 *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos.*

Diremos que a função $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ *é* **uma contração fraca em M**, *se*

$$d_N(f(x), f(y)) \leq d_M(x, y), \quad \textit{para todo} \quad x, y \in M. \tag{3.37}$$

e uma subclasse desta é dada pela:

Definição 3.1.5 *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos e* $f : M \to N$.

Diremos que a função $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ *é* **uma contração (forte) em M**, *se existir* $c \in (0, 1)$ *tal que*

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c \, d_M(x, y), \quad \textit{para todo} \quad x, y \in M. \tag{3.38}$$

Observação 3.1.7 *Observemos que toda contração fraca ou forte, definida entre espaço espaços métricos, é uma aplicação lipschitiziana e portanto uam função contínua em todo o espaço métrico.*

A seguir, daremos alguns exemplos de contrações fracas definida entre espaço espaços métricos.

Exemplo 3.1.10 *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos e* $k \in \mathbb{R}$ *fixo.*
Consideremos a função $f : (M, d_M) \to (N\, d_N)$*, dada por*

$$f(x) \doteq k, \quad \textit{para cada} \qquad x \in M. \tag{3.39}$$

Então a função $\underline{f}$ *é uma contração forte em* (M, d_M)*.*
Em particular, a função $\underline{f}$ *é contínua em* (M, d_M)*.*

Resolução:
De fato, pois para todo $x, y \in M$, temos:

$$\begin{aligned} d_N(f(x), f(y)) &\overset{(3.39)}{=} d_N(k, k) \\ &= 0 \leq \frac{1}{2}\, d_M(x, y). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Logo a função $\underline{f}$ é uma contração forte em (M, d_M), onde

$$c \doteq \frac{1}{2} < 1.$$

□

Observação 3.1.8 *Notemos que, no Exemplo 3.1.10 acima, poderíamos ter escolhido qualquer*

$$c \in [0, 1),$$

no lugar de $\frac{1}{2}$*, em* (3.40).

Temos também o:

Exemplo 3.1.11 *Sejam* (M, d_M) *espaço métrico e* $X \subseteq M$ *subespaço métrico de* (M, d_M)*.*
A função $i : (X, d_M) \to (M, d_M)$*, dada por*

$$i(x) \doteq x, \quad \textit{para cada} \quad x \in X, \tag{3.41}$$

(ou seja, a inclusão, de $\underline{X}$ *em* $\underline{M}$*, veja a Observação 2.6.4, ou ainda,* (2.217)*) é uma contração fraca, mas não é uma contração forte.*
Em particular, a aplicação $i : X \to M$ *é contínua em* (X, d_M)*.*

Resolução:

De fato, pois para $x, y \in X$, temos que pois

$$d_M(i(x), i(y)) \overset{(3.41)}{=} d_X(x, y).$$

Logo a função $\underline{f}$ é uma contração fraca em (X, d_M), onde

$$c \doteq 1.$$

Notemos que a mesma não será uma contração forte em (X, d_M).

□

Podemos estender o exemplo acima, como afirma o:

Exemplo 3.1.12 *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos.*

Se a função $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ é uma imersão isométrica então a função $\underline{f}$ será uma contração fraca em (M, d_M).

Em particular, a aplicação $\underline{f}$ será contínua em (M, d_M).

Resolução:

De fato, pois para cada $x, y \in M$, teremos: pois

$$d_N(f(x), f(y)) \overset{\text{Definição } 2.6.1}{=} d_M(x, y),$$

ou seja, a função $\underline{f}$ é uma contração fraca em (M, d_M), onde

$$c \doteq 1.$$

□

Observação 3.1.9 *Como caso particular do Exemplo 3.1.12 acima, temos que toda isometria entre espaços métricos será uma contração fraca.*

Em particular, será contínua entres os espaços métricos considerados.

Exemplo 3.1.13 *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos.*

Escolha uma das três métricas, $\underline{d}$, $\underline{d_1}$ ou $\underline{d_2}$, em $M \times N$ consideradas na Proposição 2.1.5, que indicaremos por $\underline{D}$.

Para cada $a \in M$ e $b \in N$ fixados, consideremos as aplicações

$$i_b : M \to M \times N \quad e \quad j_a : N \to M \times N,$$

dadas por

$$i_b(x) \doteq (x, b), \tag{3.42}$$

$$j_a(y) \doteq (a, y), \tag{3.43}$$

para cada $x \in M$ e cada $y \in N$, respectivamente.

Então as funções $\underline{i_b}$ e $\underline{j_a}$ são uma contrações fracas em (M, d_M) e (N, d_N), respectivamente.

Em particular, as aplicações $i_b : M \to M \times N$ e $j_a : N \to M \times N$ são contínuas em (M, d_M) e (N, d_N), respectivamente.

Resolução:

Notemos que, para $x_1, x_2 \in M$ e $y_1, y_2 \in N$, teremos:

$$D_{M\times N}[(x_1, b), (x_2, b)] \leq d_M(x_1, x_2), \tag{3.44}$$
$$D_{M\times N}[(a, y_1), (a, y_2)] \leq d_M(y_1, y_2). \tag{3.45}$$

Deixaremos, como exercício para o leitor, a verificação destes fatos.

Com isto, para $x_1, x_2 \in M$ e $y_1, y_2 \in N$, teremos:

$$\begin{aligned} D_{M\times N}(i_b(x_1), i_b(x_2)) &\overset{(3.42)}{=} D_{M\times N}[(x_1, b), (x_2, b)] \\ &\overset{(3.44)}{\leq} d_M(x_1, x_2), , \\ D_{M\times N}(j_a(y_1), i_b(y_2)) &\overset{(3.43)}{=} D_{M\times N}[(a, y_1), (a, y_2)] \\ &\overset{(3.45)}{\leq} d_N(y_1, y_2), \end{aligned}$$

mostrando que as funções $\underline{i_b}$ e $\underline{j_a}$ são uma contrações fracas em (M, d_M) e (N, d_N), respectivamente.

□

Um outro caso interessante é dado pelo:

Exemplo 3.1.14 *Conisderemos (M, d_M) espaço métrico e $X \subseteq M$, não vazio e o espaço métrico $(\mathbb{R}, d_\mathbb{R})$, onde $d_\mathbb{R}$ é a métrica usual (ou seja, dada por (2.13), com $n = 1$).*

Definamos a função $d_X : (M, d_M) \to (\mathbb{R}, d_\mathbb{R})$, dada por

$$d_X(y) \doteq d(y, X), \quad \textit{para cada} \quad y \in M. \tag{3.46}$$

Mostre que a função $\underline{d_X}$ é uma contração fraca em (M, d_M).

Em particular, a aplicação $d_X : M \to \mathbb{R}$ é contínua em (M, d_M).

Resolução:

De fato, para $y_1, y_2 \in M$, teremos:

$$\begin{aligned} d_\mathbb{R}[d_X(y_1), d_X(y_2)] &\overset{(2.13) \text{ com } n=1}{=} |d_X(y_1) - d_X(y_2)| \\ &\overset{(3.46)}{=} |d(y_1, X) - d(y_2, X)| \\ &\overset{\text{Proposição 2.4.2}}{\leq} d_M(y_1, y_2), \end{aligned}$$

mostrando que a função $\underline{d_X}$ é uma contração fraca em (M, d_M).

□

Observação 3.1.10 *Do Exemplo 3.1.14 acima segue que, para cada $x \in M$ fixado, temos que a aplicação $d_x : (M, d_M) \to (\mathbb{R}, d_\mathbb{R})$, dada por*

$$d_x(y) \doteq d_M(x, y), \quad \textit{para cada} \quad y \in M, \tag{3.47}$$

é uma contração fraca em (M, d_M).

Para mostrarmos isto basta considerar

$$X \doteq \{x\} \subseteq M.$$

Em particular, a aplicação $d_x : M \to \mathbb{R}$ *será contínua em* (M, d_M).

UM outro caso interessante é dado pelo:

Exemplo 3.1.15 *Seja* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial real normado.*

Mostre que a aplicação $\|\cdot\| : (E, d_{\|\cdot\|}) \to (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ *é uma contração fraca.*

Em particular, a aplicação $\|\cdot\| : (E, d_{\|\cdot\|}) \to (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ *é uma função contínua em* $(E, d_{\|\cdot\|})$.

Resolução:

De fato, para $\vec{x}, \vec{y} \in E$, teremos:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}(\|\vec{x}\|, \|\vec{y}\|) &\overset{(2.13)\text{ com } n=1}{=} \big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big| \\ &\overset{\text{item 2. da Observação 2.1.8}}{\leq} \|\vec{x} - \vec{y}\| \\ &\overset{(2.191)}{=} d_{\|\cdot\|}(\vec{x}, \vec{y}), \end{aligned}$$

mostrando que a aplicação $\|\cdot\| : (E, d_{\|\cdot\|}) \to (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ é uma contração fraca.

□

Exemplo 3.1.16 *Seja* $(M_1, d_1), \cdots, (M_n, d_n)$ *espaços métricos.*

Para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *consideremos a aplicação* $p_i : M_1 \times \cdots \times M_n \to M_i$, *dada por*

$$p_i(x) \doteq x_i, \quad \textit{para cada} \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n, \tag{3.48}$$

denominada como **i-ésima projeção**.

Mostre, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *a aplição* $\underline{p_i}$ *é uma contração fraca, onde podemos considerar no produto cartesiano* $M \doteq M_1 \times \cdots \times M_n$ *a métrida* $\underline{d_M}$ *como sendo uma das três métricas,* $\underline{d}$, $\underline{d_1}$ *ou* $\underline{d_2}$, *introduzidas na Observação 2.1.13 (dadas por (2.111), (2.112) ou (2.113), respectivamente).*

Em particular, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *a aplicação* $p_i : (M_1 \times \cdots \times M_n, d_M) \to (M_i, d_i)$ *é contínua em* $(M_1 \times \cdots \times M_n, d_M)$.

Resolução:

De fato, para cada $x_i, y_i \in M_i$, teremos:

$$\begin{aligned} d_{M_1}(p_i(x), p_i(y)) &\overset{(3.48)}{=} d_{M_i}(x_i, y_i) \\ &\overset{\text{independente da métrica escolhida em } \underline{M}}{\leq} d_M(x, y), \end{aligned} \tag{3.49}$$

onde

$$x \doteq (x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n), \quad y \doteq (y_1, y_2, \cdots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \cdots, y_n) \in M,$$

mostrando que a afirmação é verdadeira.

□

Outro caso interessante é dado pelo:

Exemplo 3.1.17 *Seja* (M, d_M) *espaço métrico.*

Mostre que a aplicação $d_M : (M \times M, d_1) \to (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ *(ou seja, a própria métrica) é uma contração fraca em* $(M \times M, d_1)$*, onde* $\underline{d_1}$ *é métrica em* $M \times M$*, introduzida na Propsição 2.1.5, dada por* (2.108)*, e a métrica* $d_{\mathbb{R}}$ *é a métrica usual (dada por* (2.13)*, com* $n = 1$*).*

Em particular, a aplicação $d_M : (M \times M, d_1) \to (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ *será contínua em* $(M \times M, d_1)$.

Resolução:

De fato, para cada $(x, y), (x', y') \in M \times M$ teremos:

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{R}}(d_M(x, y), d_M(x', y')) &\overset{(2.13),\ \text{com}\ n=1}{=} |d_M(x, y) - d_M(x', y')| \\
&= |d_M(x, y) - d_M(x', y) + d_M(x', y) - d_M(x', y')| \\
&\overset{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |d_M(x, y) - d_M(x', y)| + |d_M(x', y) - d_M(x', y')| \\
&= |d_M(x, y) - d_M(y, x')| + |d_M(y, x') - d_M(x', y')| \\
&\overset{\text{item 2. da Observação 2.1.1}}{\leq} d_M(x, x') + d_M(y, y') \\
&\leq d_{M\times M}[(x, y), (x', y')],
\end{aligned}$$

mostrando que a aplicação $d_M : M \times M \to \mathbb{R}$ (ou seja, a própria métrica) é uma contração fraca em $(M \times M, D)$.

□

Temos também o:

Exemplo 3.1.18 *Seja* $(E, \|\cdot\|_E)$ *um espaço vetorial real normado e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Mostre que a aplicação $s : E \times E \to E$*, dada por*

$$s(x, y) \doteq x + y, \quad \textit{para cada} \quad (x, y) \in E \times E, \tag{3.50}$$

é uma contração fraca, onde em $E \times E$ *estamos considerando a norma da soma, isto é, para* $(x, y) \in E \times E$*, temos que*

$$\|(x, y)\|_{E\times E} \doteq \|x\|_E + \|y\|_E \tag{3.51}$$

e a respectiva métrica associada a esta norma (dada por (2.191)*).*

Em particular, a aplicação $s : (E \times E, d_{E\times E}) \to (E, d_{\|\cdot\|})$ *será contínua em* $(E \times E, d_{E\times E})$.

Resolução:

De fato, para cada $(x, y), (x', y') \in E \times E$, teremos:

$$\begin{aligned} d_E(s(x,y), s(x',y')) &\overset{(2.191)}{=} \|s(x,y) - s(x',y')\|_E \\ &\overset{(3.51)}{=} \|(x+y) - (x'+y')\|_E \\ &= \|(x-x') + (y-y')\|_E \\ &\overset{(2.75)}{\leq} \|x-x'\| + \|y-y'\|_E \\ &\overset{\text{norma da soma}}{=} \|(x,y) - (x',y')\|_{E\times E} \\ &\overset{(2.191)}{=} d_{E\times E}((x,y),(x',y')), \end{aligned}$$

mostrando que a aplicação $s : E \times E \to E$ é uma contração fraca em $(E \times E, d_{E\times E})$.

□

Observação 3.1.11 *Em particular, vale o mesmo para soma números reais, ou seja, no espaço vetorial real* $(\mathbb{R}, + \cdot)$ *ou, masi geralemnte, para soma de vetores no espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*, ou ainda, para soma no espaço vetorial real* $(\mathcal{B}(X; M), +, \cdot)$*, munido da métrica do* sup *(dada por* (2.70)*).*

Observação 3.1.12

1. *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos,* $a \in M$ *um ponto isolado do espçao métrico* (M, d_M) *e* $f : M \to N$ *uma função.*

   Afirmamos que a função f *é contínua em* $a \in M$.

   De fato, como $a \in M$ *é um ponto isolado de* (M, d_M)*, existe* $\delta_o > 0$*, tal que*

   $$B(a; \delta_o) \cap M = \{a\}. \tag{3.52}$$

   Dado $\varepsilon > 0$*, consideremos*

   $$\delta \in (0, \delta_o]. \tag{3.53}$$

   Logo se $x \in M$ *satisfaz*

   $$d_M(x,a) < \delta \overset{(3.53)}{\leq} \delta_o,$$

   de (3.52)*, segue que*

   $$x = a. \tag{3.54}$$

   Logo

   $$d_N(f(x), f(a)) \overset{(3.54)}{=} d_N(f(a), f(a)) = 0 < \varepsilon,$$

   mostrando que a função f *é contínua em* $a \in M$

2. *Como conseqüência da Observação acima, temos que se o espaço métrico* $(M\,,d_M)$ *for um espaço discreto (isto é, todo ponto dele é ponto isolado), então toda função* $f : M \to N$ *será contínua em* $(M\,,d_M)$.

   Em particular, se a métrica de $(M\,,d_M)$ *é a métrica zero-um (veja o Exemplo 2.1.1, ou ainda (2.7)) então vale o mesmo.*

3. *Por outro lado, se o espaço métrico* $(N\,,d_N)$ *for um espaço discreto, temos que a função* $f : (M\,,d_M) \to (N\,,d_N)$ *é contínua em* $(M\,,d_M)$ *se, e somente se, para cada* $a \in M$*, a função* $\underline{f}$ *é constante em alguma bola aberta de centro no ponto* $\underline{a}$.

   De fato, suponhamos que a funçao $\underline{f}$ *é contínua em* $a \in M$.

   Logo, como $f(a) \in N$*, e o espaço métrico* $(N\,,d_N)$ *é discreto, segue que existe* $\varepsilon_o > 0$*, de modo que*
   $$B(f(a)\,;\varepsilon_o) = \{f(a)\}\,. \tag{3.55}$$

   Logo, dada $\varepsilon \in (o\,,\varepsilon_o)$*, para qualquer* $\delta > 0$*, se*
   $$x \in B(a\,;\delta)\,,$$
   para que tenhamos
   $$f(x) \in B(f(a),\varepsilon) = \{f(a)\},$$
   deveremos ter $f(x) = f(a)$*, ou seja, a função* $\underline{f}$ *é constante na bola aberta* $B(a\,;\,\delta)$*, como afirmamos acima.*

   A recíproca é imediata e será deixada como exercício para o leitor.

   Em particular, se a métrica em $\underline{N}$ *é a métrica zero-um, teremos a o mesmo.*

Podemos agora introduzir a:

Definição 3.1.6 *Sejam* $(M\,,d_M)$ *e* $(N\,,d_N)$ *espaços métricos e* $a \in M$.

Diremos que a função $f : M \to N$ *é* **descontínua no ponto** $\underline{a}$*, se ela não for contínua no ponto* $\underline{a}$.

Observação 3.1.13

1. *Na situação acima, a função* $f : (M\,,d_M) \to (N\,,d_N)$ *é descontínua no ponto* $a \in M$ *se, e somente se, podemos encontrar* $\varepsilon_o > 0$*, de modo que para cada* $\delta > 0$*, podemos encontrar e* $x_\delta \in M$*, tal que*
   $$d_M(x_\delta\,,a) < \delta\,, \quad mas \quad d_N(f(x_\delta)\,,f(a)) \geq \varepsilon_o\,. \tag{3.56}$$

2. *Sejam* $(M\,,d_M)$ *um espaço métrico,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $\underline{M}$ *e* $x_o \in M$.

   Diremos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge para $\underline{x_o}$, em $(M\,,d_M)$**, *se dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $N_o \in N$, *de modo que*

$$\textit{se}\quad n \geq N_o\,,\quad \textit{teremos:}\quad d_M(x_n\,,x_o) < \varepsilon\,. \tag{3.57}$$

   Neste caso diz-se que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é* **convergente para $\underline{x_o}$, em $(M\,,d_M)$** *e escreveremos*

$$x_n \to x_o \qquad \textit{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_o\,. \tag{3.58}$$

3. *Com a noção acima, podemos obter uma formulação equivalente do item 1, a saber: a função* $f:(M\,,d_M)\to(N\,,d_N)$ *é descontínua no ponto* $a\in M$ *se, e somente se, podemos encontrar* $\varepsilon_o > 0$, *de modo que para cada* $n\in\mathbb{N}$, *existe* $x_n \in M$, *tal que*

$$d_M(x_n\,,a) < \frac{1}{n}\,,\quad \textit{mas}\quad d_N(f(x_n)\,,f(a)) \geq \varepsilon_o\,. \tag{3.59}$$

   Isto poderia ser dito da seguinte forma: existe uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $(M\,,d_M)$ *que é convergente para* $a\in M$, *em* $(M\,,d_M)$, *de modo que a seqüência* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $(N\,,d_N)$, *não é convergente em* $(N\,,d_N)$.

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

4. *Ainda de modo equivalente com a noção de descotinuidade, temos que: a função* $f:(M\,,d_M)\to(N\,,d_N)$ *é descontínua no ponto* $a\in M$ *se, e somente se, podemos encontrar duas sequências, em* $(M\,,d_M)$, *que denotaremos por* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *de modo que*

$$p_n \to a\,,\qquad q_n \to a$$

   de modo que uma possibilidades abaixo deverá ocorrer:

   - *ou uma das sequências* $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(f(q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *não é convergente em* $(M\,,d_M)$,
   - *se*
   $$f(p_n)\to b\,,\qquad f(q_n)\to c\,,$$
   teremos
   $$b \neq c\,.$$

Com isot temos o:

Exemplo 3.1.19 *Consideremos função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} 1\,, & \textit{para}\quad x\in\mathbb{Q} \\ 0\,, & \textit{para}\quad x\in\mathbb{I} \end{cases} \tag{3.60}$$

com no espaço métrico $(\mathbb{R}\, d_{\mathbb{R}})$ *a métrica* $d_{\mathbb{R}}$ *é a métrica usual (ou seja, dada por* (2.13)*, com* $n = 1$*).*

Mostre que a função f *não é contínua em nenhum ponto de* $(\mathbb{R}\, d_{\mathbb{R}})$*.*

Resolução:

Mostremos que a função f não é contínua em nenhum ponto de $\mathbb{Q}$ e depois faremos o mesmo para os pontos de $\mathbb{I}$.

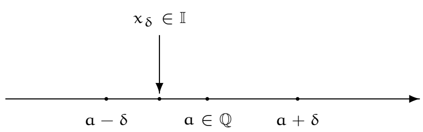
Dado $a \in \mathbb{Q}$, consideremos

$$\varepsilon = \frac{1}{2} > 0\,. \tag{3.61}$$

Dado $\delta > 0$, seja $x_\delta \in \mathbb{I}$ tal que

$$|x_\delta - a| < \delta\,, \quad \text{isto é,} \quad d_{\mathbb{R}}(x_\delta\,, a) < \delta\,. \tag{3.62}$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



De (3.60), temos que

$$f(x_\delta) = 0 \quad \text{e} \quad f(a) = 1\,, \tag{3.63}$$

segue que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}(f(x)\,, f(a)) &\overset{(2.13)\ \text{com}\ n=1}{=} |f(x) - f(a)| \\ &\overset{(3.63)}{=} |0 - 1| \\ &= 1 \geq \frac{1}{2} \overset{(3.61)}{=} \varepsilon\,, \end{aligned}$$

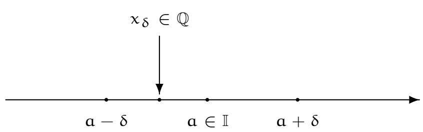
mostrando que f não é contínua em $a \in \mathbb{Q}$.

Por outro lado, para $a \in \mathbb{I}$, consideremos ε como em (3.61).

Dado $\delta > 0$, seja $x_\delta \in \mathbb{I}$ tal que

$$|x_\delta - a| < \delta\,, \quad \text{isto é,} \quad d_{\mathbb{R}}(x_\delta\,, a) < \delta\,. \tag{3.64}$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



De (3.60), temos que

$$f(x_\delta) = 1 \quad \text{e} \quad f(a) = 0\,, \tag{3.65}$$

segue que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}(f(x)\,,f(a)) &\overset{(2.13)\text{ com } n=1}{=} |f(x) - f(a)| \\ &\overset{(3.65)}{=} |1 - 0| \\ &= 1 \geq \frac{1}{2} \overset{(3.61)}{=} \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando que $\underline{f}$ não é contínua em $a \in \mathbb{I}$.

Portanto a função $\underline{f}$ não é contínua em nenhum ponto de $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$.

□

Observação 3.1.14 *Observemos que, no Exemplo 3.1.19 acima, temos que as funções restrições*

$$f_{|_{\mathbb{Q}}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f_{|_{\mathbb{I}}} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$$

são contínuas em $(\mathbb{Q}\,,d_{\mathbb{R}})$ e $(\mathbb{I}\,,d_{\mathbb{R}})$, respectivamente.

Na verdade a primeira é constante e igual a $\underline{0}$ em $(\mathbb{Q}\,,d_{\mathbb{R}})$, e a segunda é constante e igual a $\underline{1}$, em $(\mathbb{I}\,,d_{\mathbb{R}})$.

Portanto dada uma função $f : (M\,,d_M) \to (N\,,d_N)$ e $X \subseteq M$ não vazio, o Exemplo 3.1.19 acima, nos mostra a diferença entre:

1. *$f_{|_X} : X \to N$ contínua em $(X\,,d_M)$;*

2. *$f : M \to N$ contínua em todos os pontos de $(M\,,d_M)$.*

Podemos afirmar que na situação acima 2. implicará, sempre, em 1. .

Mas, em geral, a situação 1. pode não implicar em 2., como mostra o Exemplo 3.1.19 acima.

3.2 Propriedades elementares de funções contínuas entre espaços métricos

Começaremos pela:

Proposição 3.2.1 *Sejam $(M\,,d_M)$, $(N\,,d_N)$ e $(P\,,d_P)$ espaços métricos e $a \in M$.*

Suponhamos que a função $f : M \to N$ é contínua em $\underline{a}$ e a função $g : N \to P$ é contínua em $\underline{f(a)}$.

Então a função $g \circ f : M \to P$ será contínua em $\underline{a}$.

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como a função $\underline{g}$ é contínua no ponto $\underline{f(a)}$, podemos encontrar $\lambda > 0$, tal que se $y \in N$ e

$$d_N(y\,, f(a)) < \lambda\,, \quad \text{teremos:} \quad d_P(g(y)\,, g(f(a))) < \varepsilon\,. \tag{3.66}$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua no ponto $\underline{a}$, dado $\lambda > 0$ (obtido acima), podemos encontrar $\delta > 0$, tal que se $x \in M$ e

$$d_M(x\,, a) < \delta\,, \quad \text{teremos:} \quad d_N(f(x)\,, f(a)) < \lambda\,. \tag{3.67}$$

Logo, de (3.67) e (3.66), segue qu

$$d_P(g(f(x))\,, g(f(a))) < \varepsilon\,,$$

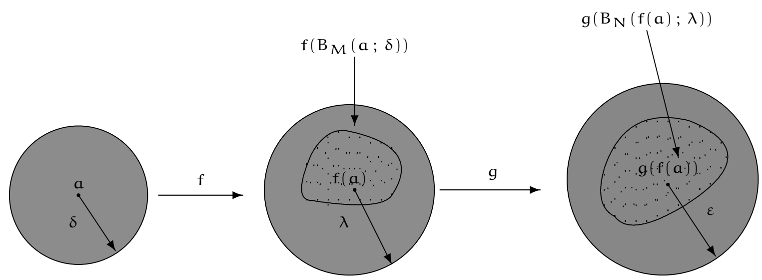
mostrando que a função $\underline{g \circ f}$ é contínua no ponto $\underline{a}$, como queríamos mostrar.

□

Observação 3.2.1

1. *O resultado acima nos diz, de modo coinciso, que a composta de duas funções contínuas é uma função contínua.*

2. *Temos a seguinte caracterização geométrica para a demonstração do resultado acima:*



Como conseqüência temos:

Corolário 3.2.1 *Sejam* $(M\,, d_M)$, $(N\,, d_N)$ *espaços métricos,* $X \subseteq M$, *não vazio e* $a \in X$.

Suponhamos que a função $f : M \to N$ *é contínua em* $\underline{a}$.

Então a função restrição $f_{|_X} : (X\,, d_M) \to (N\,, d_N)$ *será contínua em* $\underline{a}$.

Demonstração:

Sabemos que a aplicação inclusão, $i : (X\,, d_M) \to (M\,, d_M)$ é contínua em $(X\,, d_M)$ (veja o Exemplo 3.1.11).

Observemos que

$$f_{|_X} = f \circ i\,.$$

Como, por hipótese, a função $\underline{f}$ é contínua em $\underline{a}$ segue, da Proposição 3.2.1 acima, que a função $f_{|X} = f \circ i$ será contínua no ponto $\underline{a}$, completando a demosntração.

$\square$

Observação 3.2.2

1. *O Corolário 3.2.1 acima nos diz que a restrição de uma função contínua a um subconjunto do seu domínio será uma função contínua nesse subconjunto.*

2. *Sejam* (M, d_M), (N, d_N), (P, d_P) *espaços métricos,* $f : (M \times N, d_{M\times N}) \to (P, d_P)$, *onde em* $M \times N$ *estamos consideranod uma das três métricas usuais do produto cartesiano (da raiz quadrada, da soma ou do máximo, ou seja, dadas por* (2.111), (2.112) *ou* (2.113), *com* $n = 2$*).*

   Logo a função $\underline{f}$ *será contínua no ponto* $(a, b) \in M \times N$, *se dado* $\varepsilon > 0$, *podemos encontrar* $\delta > 0$, *tal que*

$$d_{M\times N}((x, y), (a, b)) < \delta \quad \textit{implicar} \quad d_P(f(x, y), f(a, b)) < \varepsilon . \tag{3.68}$$

   Neste caso diremos que a função $\underline{f}$ *é* **contínua conjuntamente no ponto** (a, b).

Podemos agora introduzir a:

Definição 3.2.1 *Sejam* (M, d_M), (N, d_N), (P, d_P) *espaços métricos, uma função* $f : M \times N \to P$ *e* $(a, b) \in M \times N$.

Diremos que a função f *é* **contínua, em relação a 1.a variável, no ponto** (a, b) *se a aplicação* $f_b : (M, d_M) \to (P, d_P)$, *dada por*

$$f_b(x) \doteq f(x, b), \quad \textit{para cada} \quad x \in M, \tag{3.69}$$

for contínua no ponto $\underline{a}$.

Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **contínua, em relação a 2.a variável, no ponto** (a, b) *se a aplicação* $f^a : N \to P$, *dada por*

$$f^a(y) \doteq f(a, y), \quad \textit{para cada} \quad y \in N, \tag{3.70}$$

for contínua no ponto $\underline{b}$.

Diremos que a função $f : M \times N \to P$ *é* **contínua separadamente, no ponto** (a, b), *se ela for contínua em relação a cada uma das variáveis no ponto* (a, b).

Observação 3.2.3

1. *Na situação da Definição 3.2.1 acima se a função* $f : M \times N \to P$ *é contínua conjuntamente no ponto* (a, b) *então temos que as funções* $f_b : (M, d_M) \to (P, d_P)$ *e* $f^a : (N, d_n) \to (P, d_P)$, *que podem ser dadas por:*

$$f_b = f \circ i_b \quad \textit{e} \quad f^a = f \circ j_a ,$$

onde as funções

$$i_b : (M, d_M) \to (M \times N, d_{M\times N}) \quad e \quad j_a : (N, d_N) \to (M \times N, d_{M\times N}),$$

são as aplicações dadas pelo Exemplo 3.1.13 (dadas por (3.42) e (3.43), respectivamente).

Assim, como $\underline{i_b}$ e $\underline{j_a}$ são contínuas em (M, d_M) e (N, d_N), respectivamente (veja o Exemplo 3.1.13), segue que que as funções $\underline{f^a}$ e $\underline{f_b}$ serão contínuas nos pontos $\underline{a}$ e $\underline{b}$, respectivamente.

Portanto a função $\underline{f}$ será contínua separadamente no ponto (a, b).

2. **Não** *vale, em geral, a recíproca do resultado acima, isto é, existem funções $f : (M\times N, d_{M\times N}) \to (P, d_P)$ que são contínuas separadamente no ponto (a, b), mas* **não** *são contínuas conjuntamente no ponto (a, b).*

   Para ver isto, consideremos o seguinte exemplo:

   Consideremos os espaços métricos $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, d_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}})$ e $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, onde a métrica $d_{\mathbb{R}}$ é a métrica usual (ou seja, dada por (2.13), com $n = 1$) e a métrica $d_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ uma das três métricas do produto cartesiano (ou seja, dadas por (2.111), (2.112) ou (2.113)), e a função $f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, d_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, dada por

$$f(x) \doteq \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2 + y^2}, & \textit{para} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 \quad , & \textit{para} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \tag{3.71}$$

   Notemos que que a função $\underline{f}$ é contínua separamente no ponto $(0, 0)$.

   Isto segue do fato que

$$f(x, 0) \overset{(3.71)}{=} 0 \quad e \quad f(0, y) \overset{(3.71)}{=} 0$$

   para todo $x, y \in \mathbb{R}$ que são funções contínuas em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

   Afirmamos que a função $\underline{f}$ **não** *é contínua conjuntamente no ponto $(0, 0)$.*

   De fato, se tomarmos a restrição da função $\underline{f}$ à reta

$$y = a\,x, \quad \textit{para cada} \quad a \neq 0$$

   (que tornar-se-á um espaço métrico com a métrica induzida pela métrica de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) então teremos

$$\begin{aligned} f(x, a\,x) &\overset{(3.71)}{=} \frac{a\,x^2}{x^2 + a^2x^2} \\ &= \frac{a}{1 + a^2} \neq 0, \quad \textit{para} \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, para $x = 0$*, teremos que*

$$f(0\,, a\cdot 0) \overset{(3.71)}{=} (0, 0)\,,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ *é descontínua no ponto* $(0\,, 0)$.

Para o próximo resultado precisaremos da:

Definição 3.2.2 *Sejam* $M)$, N_1, N_2 *espaços métricos e a função* $f : M \to N_1 \times N_2$, *dada por*

$$f(x) \doteq (f_1(x)\,, f_2(x))\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in M \tag{3.72}$$

onde, para cada $j \in \{1\,, 2\}$, *a função* $f_j : M \to N_j$, *será dita* **funções coordenadas da função $\underline{f}$** *ou ainda* **j-éisma função coordenada associada à função $\underline{f}$** .

Neste caso escreveremos

$$f = (f_1\,, f_2)\,.$$

Com isto temos a:

Proposição 3.2.2 *Sejam* $(M\,, d_M)$, $(N_1\,, d_1)$, $(N_2\,, d_2)$, $N_1 \times N_2$ *espaços métricos, onde no último consideramos uma das três métricas usuais (ou seja, dada por* (2.111), (2.112) *ou* (2.113)*) e a função* $f : M \to N_1 \times N_2$ *dada por*

$$f(x) \doteq (f_1(x)\,, f_2(x))\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in M \tag{3.73}$$

onde, para cada $j \in \{1\,, 2\}$, *a função* $f_j : M \to N_j$ *é a* j*-ésima função coordenada associada à função* $\underline{f}$, *e* $a \in M$.

Então a função $\underline{f}$ *é contínua no ponto* $\underline{a}$ *se, e somente se, as funções* $\underline{f_1}$ *e* $\underline{f_2}$ *são contínuas no ponto* $\underline{a}$.

Demonstração:

Suponhamos que a função $\underline{f}$ é contínua no ponto $\underline{a}$.

Temos que

$$f_1 = p_1 \circ f \quad \text{e} \quad f_2 = p_2 \circ f \tag{3.74}$$

onde, para cada $j \in \{1\,, 2\}$, a função $p_j : N_1 \times N_2 \to N_j$ é a i-ésima projeção em N_1 e N_2, definida no Exemplo 3.1.16, respectivamente (dada por (3.48)).

Como vimos no Exemplo 3.1.16, as funçoes p_1, p_2 são contínuas em $(N_1\,, d_1)$ e $(N_2\, d_2)$, respectivamente, segue, de (3.74) e da Proposição 3.2.1, que as funções $\underline{f_1}$ e $\underline{f_2}$ são contínuas em $a \in M$.

Reciprocamente, suponhamos que as funções $f_1 : (M\,, d_M) \to (N_1\,, d_1)$ e $f_2 : (M\,, d_M) \to (N_2\,, d_2)$ são contínua no ponto $a \in M$.

(i) Consideremos em $N_1 \times N_2$ a métrica do máximo (ou seja, dada por (2.113)).

Como as funções $\underline{f_1}$ e $\underline{f_2}$ são contínuas em $a \in M$, dado $\varepsilon > 0$, podemso encontrar

$$\delta_1 \quad \text{e} \quad \delta_2 > 0\,,$$

tal que, para cada $i \in \{1\,,2\}$, se

$$d_M(x\,,a) < \delta_i\,, \quad \text{teremos:} \quad d_{N_i}(f_i(x)\,,f_i(a)) < \varepsilon\,. \tag{3.75}$$

Seja

$$\delta \doteq \min\{\delta_1\,,\delta_2\} > 0\,. \tag{3.76}$$

Logo, se

$$d_M(x\,,a) < \delta \overset{(3.76)}{\leq} \delta_i\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1\,,2\},$$

de (3.75), teremos:

$$\begin{aligned} d_{N_1 \times N_2}(f(x)\,,f(a)) &\overset{(2.113)}{=} \max\{d_1(f_1(x)\,,f_1(a))\,,d_2(f_2(x)\,,f_2(a))\} \\ &\overset{(3.75)}{<} \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando que a funçao $\underline{f}$ é contínua no ponto $\underline{a}$.

(ii) Se considerarmos em $N_1 \times N_2$ a métrica da raiz quadrada (ou seja, dada por (2.111)), dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar

$$\delta_1\,,\ \delta_2 > 0\,,$$

tal que, para cada $i \in \{1\,,2\}$, se

$$d_M(x\,,a) < \delta_i\,, \quad \text{teremos:} \quad d_{N_i}(f_i(x)\,,f_i(a)) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\,. \tag{3.77}$$

Consideremos

$$\delta \doteq \min\{\delta_1\,,\delta_2\} > 0\,. \tag{3.78}$$

Logo, se

$$d_M(x\,,a) < \delta \overset{(3.78)}{\leq} \delta_i\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1\,,2\},$$

de (3.77), segue que:

$$\begin{aligned} d_{N_1 \times N_2}(f(x)\,,f(a)) &\overset{(2.111)}{=} \sqrt{[d_1(f_1(x)\,,f_1(a))]^2 + [d_2(f_2(x)\,,f_2(a))]^2} \\ &\overset{(3.77)}{<} \sqrt{\left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right]^2 + \left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} \\ &= \sqrt{\varepsilon^2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que a funçao $\underline{f}$ é contínua no ponto $\underline{a}$.

(iii) Se considerarmos em $N_1 \times N_2$ a métrica da soma (ou seja, dada por (2.112)), dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar

$$\delta_1\,,\ \delta_2 > 0\,,$$

tal que, para cada $i \in \{1\,,2\}$, se

$$d_M(x\,,a) < \delta_i\,, \quad \text{teremos} \quad d_{N_i}(f_i(x)\,,f_i(a)) < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3.79}$$

Conisderemos

$$\delta \doteq \min\{\delta_1\,,\delta_2\} > 0\,. \tag{3.80}$$

Logo, se

$$d_M(x\,,a) < \delta \overset{(3.80)}{\leq} \delta_i\,, \quad \text{para cada} \quad in \in \{1\,,2\},$$

de (3.79), teremos

$$\begin{aligned} d_{N_1\times N_2}(f(x)\,,f(a)) &\overset{(2.112)}{=} d_1(f_1(x)\,,f_1(a)) + d_2(f_2(x)\,,f_2(a)) \\ &\overset{(3.79)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é contínua no ponto $\underline{a}$, completando a demonstração.

$\square$

Como conseqüência temos o:

Corolário 3.2.2 *Sejam* $(M_1\,,d_1)$, $(M_2\,,d_2)$, $(N_1\,,d_1)$, $(N_2\,,d_2)$ *espaços métricos e as funções* $f_1 : M_1 \to N_1$ *e* $f_2 : M_2 \to N_2$.

Suponhamos que as funções $\underline{f_1}$ *e* $\underline{f_2}$ *são contínuas em* $(M_1\,,d_1)$ *e* $(M_2\,,d_2)$, *respectivamente.*

Então a aplicação

$$\begin{gathered} f_1 \times f_2 : (M_1 \times M_2\,, d_{M_1\times M_2}) \to (N_1 \times N_2\,, d_{N_1\times N_2}) \\ (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) \doteq (f_1(x_1), f_2(x_2))\,, \quad \textit{para cada} \quad (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 \end{gathered}$$

será contínua em $(M_1 \times M_2\,, d_{M_1\times M_2})$, *onde a métrica* $d_{M_1\times M_2}$ *e* $d_{N_1\times N_2}$ *é uma das três métricas usuais definidas no produto cartesiano* $M_1 \times M_2$ *e* $N_1 \times N_2$, *respectivamente (ou seja, dada por* (2.111), (2.112) *ou* (2.113)*).*

Demonstração:

Notemso que as funções coordenadas associadas à função $f_1 \times f_2$ são as funções $(f_1 \times f_2)_1 : M_1 \times M_2 \to N_1$ e $(f_1 \times f_2)_2 : M_1 \times M_2 \to N_2$, dadas por

$$(f_1 \times f_2)_1 = f_1 \circ p_1 \quad \text{e} \quad (f_1 \times f_2)_2 = f_2 \circ p_2\,, \tag{3.81}$$

onde, para cada $i \in \{1, 2\}$, a função $p_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ é a projeção de $M_1 \times M_2$ em M_i, que é contínuas em $(M_1 \times M_2, d_{M_1 \times M_2})$ (veja o Exemplo (3.1.16)).

Como, por hipótese as funções $\underline{f_1}$ e $\underline{f_2}$ são contínuas em (M_1, d_1) e (M_2, d_2), respectivamente, de (3.81) e da Proposição (3.2.1), segue que as funções $(f_1 \times f_2)_1$ e $(f_1 \times f_2)_2$ são contínuas $(M_1 \times M_2, d_{M_1 \times M_2})$.

Assim, da Proposição (3.2.2), temos que a função $f_1 \times f_2$ será contínua em $(M_1 \times M_2, d_{M_1 \times M_2})$, concluindo a demonstração do resultado.

□

Como consequência dos resultados acima temos a:

Proposição 3.2.3 *Sejam* (M, d_M) *espaço métrico,* $(E, \|\cdot\|_E)$ *espaço vetorial real normado,* $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$*, onde* $d_{\mathbb{R}}$ *é a métrica usual (ou seja, dada por* (2.13) *com* $n = 1$*),* $f, g : M \to E$ *funções em* (M, d_M)*,* $\alpha, \beta : M \to \mathbb{R}$ *funções contínuas em* (M, d_M)*, com* $\beta(x) \neq 0$*, para todo* $x \in M$*.*

Então as funções $f + g$*,* $\alpha \cdot f : M \to E$ *são contínuas em* (M, d_M) *e a função* $\dfrac{\alpha}{\beta} : M \to \mathbb{R}$ *é contínua em* (M, d_M)*, onde*

$$(f+g)(x) \doteq f(x) + g(x), \quad (\alpha \cdot f)(x) \doteq \alpha \cdot f(x), \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(x) \doteq \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

para cada $x \in M$*.*

<u>**Demonstração:**</u>

Vimos nos Exemplos (3.1.8), (3.1.18) e (3.1.9), que as funções

$$r : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad s : E \times E \to E \quad \text{e} \quad m : E \to E,$$

dadas por

$$r(t) \doteq \frac{1}{t}, \quad s(x+y) \doteq x + y, \quad m(\lambda, x) \doteq \lambda \cdot x,$$

onde $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, são contínuas em $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, d_{\mathbb{R}})$, $(E \times E, d_{E \times E})$ e $(\mathbb{R} \times E, d_{\mathbb{R} \times E})$, respectivamente.

Notemos que

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{(f,g)} & E \times E & \xrightarrow{s} & E \\ x & \longrightarrow & (f(x), g(x)) & \longrightarrow & f(x) + g(x) \end{array},$$

ou seja,

$$(f+g)(x) = [s \circ (f, g)](x), \quad \text{para cada} \quad x \in E.$$

Logo, da Corolário (3.2.2), do Exemplo (3.1.18) e da Proposição (3.2.1), segue que a função $(f + g)$ será contínua em (M, d_M).

Noteos também que

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{(\alpha,f)} & \mathbb{R} \times E & \xrightarrow{m} & E \\ x & \longrightarrow & (\alpha(x), f(x)) & \longrightarrow & \alpha(x) \cdot f(x) \end{array}.$$

Logo , da Corolário (3.2.2), do Exemplo (3.1.9) e da Proposição (3.2.1), segue que a função $\alpha \cdot f$ é contínua em $(M\,,d_M)$.

Finalmente, observemos que

$$\begin{array}{ccccccc} M & \stackrel{(\alpha\,,\beta)}{\longrightarrow} & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\} & \stackrel{(id\,,r)}{\longrightarrow} & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \stackrel{m}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & (\alpha(x)\,,\beta(x)) & \longrightarrow & \left(\alpha(x)\,,\dfrac{1}{\beta(x)}\right) & \longrightarrow & \alpha(x)\,\dfrac{1}{\beta(x)}\,, \end{array}$$

onde a função $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a aplicação identidade, isto é

$$id(x) \doteq x\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Logo , da Corolário (3.2.2), do Exemplo (3.1.8), do Exemplo (3.1.9) e da Proposição (3.2.1), segue que a função $\dfrac{\alpha}{\beta}$ é contínua em $(M\,,d_M)$, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Como conseqüência imediata temos o:

Corolário 3.2.3 *Sejam $(M\,,d_M)$ espaço métrico, $(\mathbb{R}\,d_{\mathbb{R}})$, onde $d_{\mathbb{R}}$ é a métrica usual (ou seja, dada por (2.13), com $n = 1$), $f\,,g : M \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $(M\,,d_M)$.*

Então as funções $f + g$, $f\,g : M \to \mathbb{R}$ são contínuas em $(M\,,d_M)$ e $\dfrac{f}{g} : X \doteq M \setminus \{x \in M\,;\, g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ é contínua em $(X\,,d_M)$.

Demonstração:

É consequência imediata da Proposiçao (3.2.3) e sua elaboração será deixada como exercício para o leitor.

$\square$

3.3 Homeomorfismos entre espaços métricos

Observação 3.3.1 *O objetivo desta seção é estudar funções bijetoras e contínuas que admitam função inversa contínua.*

Ao contrário do que ocorreu na disciplinas de Álgebra Linear (onde a função inversa de uma transformação linear é, necessariamente, uma transformação linear) e da disciplina de Álgebra (onde a função inversa de um homomorfismo é, necessariamente, um homomorfismo), na Topologia existem funções contínuas e bijetoras cujas funções inversas podem **não** *ser funções contínuas, como mostra o exemplo a seguir:*

Exemplo 3.3.1 *Sejam o espaço métrico $(M\,,d)$, onde $M \doteq \mathbb{R}$ e a métrica d_M é a métrica zero-um e o espaço métrico $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$, onde $d_{\mathbb{R}}$ é a métrica usual (ou seja, dada por (2.13), com $n = 1$).*

Consideremos a aplicação identidade $\mathrm{id} : M \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$i(x) \doteq x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in M\,. \tag{3.82}$$

Observemos que, neste caso, aplicação $\underline{\mathrm{id}}$ *é bijetora e contínua em* $(M\,,d_M)$ *(veja o item 2. da Observação 3.1.12).*

Afirmamos que a função inversa associada a $\underline{\mathrm{id}}$, *que é a aplicação* $\mathrm{id}^{-1} : \mathbb{R} \to M$ *dada por*

$$\mathrm{id}^{-1}(y) \doteq y\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in \mathbb{R}\,, \tag{3.83}$$

não *é uma função contínua em nenhum ponto de* $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$.

De fato, pois a métrica em $\underline{M}$ *é a métrica zero-um (veja o item 3. da Obervação 3.1.12).*

A seguir exibiremos um outro exemplo menos "artificial", a saber:

Exemplo 3.3.2 *Sejam*

$$M \doteq [-1\,,0] \cup (1\,,\infty) \qquad e \qquad N \doteq [0\,,\infty) \tag{3.84}$$

ambos munidos da métrica induzida de $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$, *onde* $d_{\mathbb{R}}$ *é a métrica usual (dada por* (2.13), *com* $n = 1$*).*

Consideremos a função $f : M \to N$, *dada por*

$$f(x) = x^2\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in M\,. \tag{3.85}$$

Afirmamos que a função $f : (M\,,d_{\mathbb{R}}) \to (N\,,d_{\mathbb{R}})$ *é uma aplicação bijetora e contínua em* $(M\,,d_M)$ *e a função inversa* $f^{-1} : (N\,,d_{\mathbb{R}}) \to (M\,,d_{\mathbb{R}})$, *que é dada por*

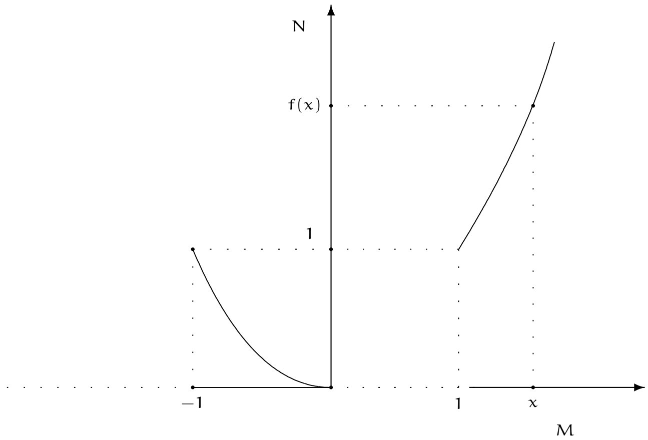
$$f^{-1}(y) \doteq \begin{cases} -\sqrt{y}\,, & \textit{para cada} \quad y \in [0\,,1] \\ \sqrt{y}\,, & \textit{para cada} \quad y \in (1\,,\infty) \end{cases} \tag{3.86}$$

não *é contínua em* $y = 1$.

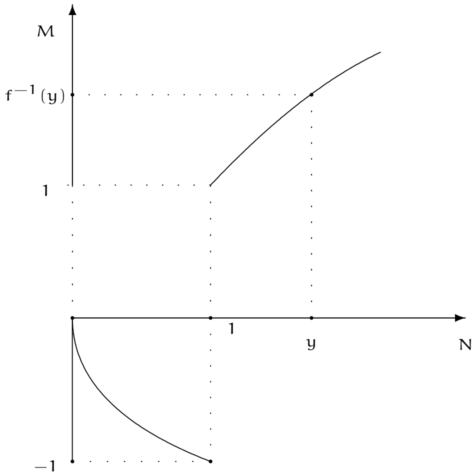
Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que a função $f : (M\,,d_{\mathbb{R}}) \to (N\,,d_{\mathbb{R}})$ é uma aplicação bijetora e contínua em $(M\,,d_M)$ e que a sua função invesa $f^{-1} : (N\,,d_{\mathbb{R}}) \to (M\,,d_{\mathbb{R}})$ é dada por (3.86).

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ e dada pela figura abaixo.



A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f^{-1}}$ e dada pela figura abaixo.



Mostremos que $f^{-1} : (N\,, d_{\mathbb{R}}) \to (M\,, d_{\mathbb{R}})$ **não** é contínua em $y = 1$.

De fato, dado

$$\varepsilon = \frac{1}{2} > 0\,,$$

para qualquer $\delta > 0$ fixado, cosnderemos

$$z \in (1, 1 + \delta)\,. \tag{3.87}$$

Com isto teremos que

$$z \in B_M(1\,;\,\delta)\,,$$

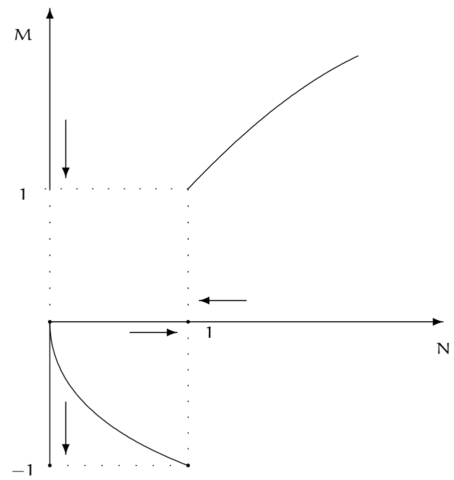
mas

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}\left(f^{-1}(z)\,, f^{-1}(1)\right) &\overset{(2.13) \text{ com } n=1}{=} \left|f^{-1}(z) - f^{-1}(1)\right| \\ &\overset{f^{-1}(1) \overset{(3.86)}{=} -1}{=} \left|f^{-1}(z) + 1\right| \\ &= \underbrace{f^{-1}(z)}_{\in(1\,,\infty)} + 1 \\ &> \frac{1}{2} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

mostrando que
$$f^{-1}(z) \notin B_N\left(f^{-1}(1)\,;\,\varepsilon\right)\,.$$

Portanto $\underline{f^{-1}}$ não será contínua no ponto $y = 1$.

A figura abaixo nos fornece uma ilustraçaõ da situação acima.



□

Sobre o mesmo assunto, temos seguinte caso importante:

Exemplo 3.3.3 *Sejam*
$$M \doteq [0\,,2\pi)\,,$$
munido da métrica $d_{[0\,,2\pi)}$*, induzida da métrica* $d_{\mathbb{R}}$ *(ou seja, (2.13), com* $n = 1$*),*
$$S^1 \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$
(a circunferência unitária, de centro na origem, no plano) munido da métrica d_{S^1}*, induzida pela métrica* $d_{\mathbb{R}^2}$ *(ou seja, (2.13), com* $n = 2$*) e* $f : [0\,,2\pi) \to S^1$*, a função dada por*
$$f(t) = (\cos(t)\,,\text{sen}(t))\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in [0\,,2\pi)\,. \tag{3.88}$$

Afirmamos que a função $\underline{f}$ *é contínua em* $(M\,,d_{[0\,,2\pi)})$ *e bijetora, logo existe a função inversa* $f^{-1} : S^1 \to [0\,,2\,\pi)$*, mas esta* ***não*** *é contínua em* $(1\,,0) = f(0)$*.*

Resolução:

Deixaremos a verificação que a função $\underline{f}$ é contínua e bijetora em $([0\,,2\pi)\,,d_{[0\,,2\pi)})$ como exercício para o leitor (notemos que as componentes da função $\underline{f}$ são funções contínuas em $([0\,,2\pi)\,,d_{\mathbb{R}})$).

Para mostrar a descotinuidade da função $\underline{f^{-1}}$ no ponto $f(0) \overset{(3.88)}{=} (1\,,0)$, utilizaremos o item 4. da Observação 3.1.13.

Mais precisamente, construiremos duas sequência em S^1, que denotaremos por $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de modo que

$$p_n \to (1\,,0)\,, \text{ em } (S^1\,,d_{S^1})\,, \quad q_n \to (1\,,0)\,, \text{ em } (S^1\,,d_{S^1})$$

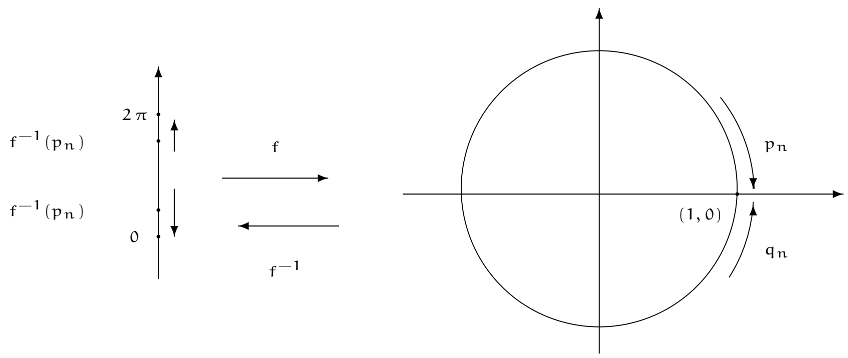
e

$$f^{-1}(p_n) \to 0 \quad \text{e} \quad f^{-1}(q_n) \to 2\pi\,.$$

Logo, do item 4. da Observação 3.1.13, segue que a função $\underline{f^{-1}}$ não será contínua em $f(0) = (1\,,0)$.

As sequências $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estão representadas na figura abaixo.

Notemos que, a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, em $(S^1\,,d_{S^1})$, está contida no semi-plano superior $y > 0$, a sequência $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, em $(S^1\,,d_{S^1})$, está contida no semi-plano superior $y < 0$ e ambas são convergentes para $f(0) = (1\,,0)$, em $(S^1\,,d_{S^1})$ (por construção).



Deste modo, da definição da função $\underline{f^{-1}}$, teremos:

$$f^{-1}(P_n) \to 0 \qquad \text{e} \qquad f^{-1}(Q_n) \to 2\pi$$

em $\big([0\,,2\pi)\,,d_{[0\,,2\pi)}\big)$, mostrando que a função $\underline{f^{-1}}$ não é contínua em $f(0) = (1\,,0)$, completando a resolução.

□

Quando a função inversa, associada a uma função contínua e bijetora, for contínua, teremos a:

Definição 3.3.1 *Sejam* $(M\,,d_M)$ *e* $(N\,,d_N)$ *espaços métricos.*

Diremos que a função $f : M \to N$ *é um* **homemorfismo de $(M\,,d_M)$ em $(N\,,d_N)$**, *se a função* $\underline{f}$ *for contínua em* $(M\,,d_M)$, *bijetora (logo admite função inversa) e a sua função inversa for contínua em* $(N\,,d_N)$.

Neste caso diremos que o espaço métrico $(M\,,d_M)$ *é* **homeomorfo** *ao espaço métrico* $(N\,,d_N)$ *e, neste caso, escreveremos:*

$$M \sim N\,. \tag{3.89}$$

Com isto temos a:

Proposição 3.3.1 *Sejam* $(M\,,d_M)$, $(N\,,d_N)$ *espaços métricos e* $f:(M\,,d_M)\to(N\,,d_N)$ *uma isometria.*

Então a função $\underline{f}$ *é um homeomorfismo de* $(M\,,d_M)$ *em* $(N\,,d_N)$.

<u>**Demonstração:**</u>

Como a função $\underline{f}$ é uma isometria de $(M\,,d_M)$ em $(N\,,d_N)$, do item 2. da Observação 2.6.2 (veja $\boxed{*}$), segue que, além de existir sua função inversa, ela também será uma isometria.

Em particular, a função $\underline{f}$ e sua função inversa $\underline{f^{-1}}$ serão contínuas em $(M\,,d_M)$ e $(N\,,d_N)$, respectivamente, ou seja, a função $\underline{f}$ será um homeomorfismo de $(M\,,d_M)$ em $(N\,,d_N)$, completando a demosntração.

□

Observação 3.3.2 *Sejam* $(M\,,d_M)$, $(N\,,d_N)$ *e* $(P\,,d_P)$ *espaços métricos.*

1. *Notemos que*
$$M\sim M\,.$$
De fato, pois a aplicação identidade $\mathrm{id}:M\to M$, *dada por*
$$\mathrm{id}(x)\doteq x\,,\quad \textit{para cada}\quad x\in M\,,$$
é um homeomorfismo de $(M\,,d_M)$ *em* $(M\,,d_M)$ *(pois é uma isometria!).*

   Logo a relação, $\simeq$, *no conjunto formado por todos os espaços métricos, é reflexiva.*

2. *Observemos que se a função* $f:(M\,,d_M)\to(N\,,d_N)$ *é um homeomorfismo, de* $(M\,,d_M)$ *em* $(N\,,d_N)$, *então a função* $f^{-1}:(N\,,d_N)\to(M\,,d_M)$ *também será um homeomorfismo, de* $(N,\,,d_N)$ *em* $(M\,,d_M)$, *ou seja,*
$$\textit{se}\quad M\sim N\,,\quad \textit{teremos}\quad N\sim M\,.$$
Logo a relação, $\simeq$, *no conjunto formado por todos os espaços métricos, é simétrica.*

3. *Se as funções* $f:(M\,,d_M)\to(N\,,d_N)$, $g:(N\,,d_N)\to(P\,,d_P)$ *são homeomorfismos de* $(M\,,d_M)$ *em* $(N\,,d_N)$, *e de* $(M\,,d_M)$ *em* $(N\,,d_N)$, *respectivamente então, da Proposição 3.2.1, segue que a função* $(g\circ f):(M\,,d_M)\to(P\,,d_P)$ *também será um homeomorfismo, de* $(M\,,d_M)$ *em* $(P\,,d_P)$*), ou seja,*
$$\textit{se}\quad M\sim N\quad e\quad N\sim P\,,\quad \textit{teremos}\quad N\sim P\,.$$
Logo a relação, $\simeq$, *no conjunto formado por todos os espaços métricos, é transitiva.*

4. *Portanto, dos iten 1., 2. e 3. desta Observação, segue que a relação $\simeq$, é uma relação de equivalência no conjunto formado por todos os espaços métricos.*

Introduziremos as seguintes:

Definição 3.3.2 *Diremos que uma propriedade $\underline{\mathcal{P}}$, de um espaço métrico $(M\,,d_M)$ é uma* **propriedade topológica** *se todo espaço métrico homeomorfo a $(M\,,d_M)$ tem a propriedade $\underline{\mathcal{P}}$, ou seja propriedades topológicas são aquelas preservadas por homeomorfismos.*

Definição 3.3.3 *Diremos que uma propriedade $\underline{\mathcal{Q}}$, de um espaço métrico $(M\,,d_M)$, é uma* **propriedade métrica**, *se todo espaço métrico isométrico a $(M\,d_M)$ tem a propriedade $\underline{\mathcal{Q}}$, ou seja, propriedades métricas são aquelas preservadas por isometrias.*

Observação 3.3.3

1. *Obsevefmos que a Proposição (3.3.1) garante que toda propriedade topológica é uma propriedade métrica.*

   De fato, pois se uma propriedade $\underline{\mathcal{P}}$ é preservada por homeomorfismo, então ela também será preserva por isometrias, pois toda isometria é um homeorofismo.

2. *Em geral,* **não** *vale a recíproca da afirmação acima, ou seja, existem propriedades métricas, em espaço métricos, que* **não** *são propriedades topológicas.*

   Ou seja, existem propriedades $\underline{\mathcal{Q}}$, em alguns espaço métricos, que são preservada por isometrias mas **não** *são preservas por homeomorfismos.*

   Veremos um Exemplo deste caso no item 4. da Observação 3.3.4.

Relativamente a homeoformisfos entre espaços métricos, temos os seguintes resultados:

Proposição 3.3.2 *Sejam $(M\,,d_M)$ um espaço métrico , $(N\,,d_N)$ um espaço métrico discreto e a função $f : M \to N$ um homeomorfismo de $(M\,,d_M)$ em $(N\,,d_N)$.*

Então o espaço métrico $(M\,,d_M)$ é um espaço métrico discreto.

Demonstração:

De fato, para $a \in M$, mostremos que o ponto $\underline{a}$ é um ponto isolado em $(M\,,d_M)$, isto é, podemos encontrar $\delta > 0$, de modo que

$$B_M(a\,;\,\delta) = \{a\}\,.$$

Para isto, como o espaço métrico $(N\,,d_N)$ é discreto e $f(a) \in N$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$, de modo que

$$B_N(f(a)\,;\,\varepsilon) = \{f(a)\}\,. \tag{3.90}$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $\underline{a}$, podemos encontrar $\delta > 0$, de modo que

$$f(B_M(a\,;\,\delta)) \subseteq B_N(f(a)\,;\,\varepsilon) \overset{(3.90)}{=} \{f(a)\}. \tag{3.91}$$

Como a função $\underline{f}$ é injetora, de (3.91), segue que $B_M(a\,;\,\delta)$ só poderá ter um único ponto, a saber, o ponto $\underline{a}$.

De fato, caso contrário, se existisse $x \neq a$, tal que $x \in B(a\,;\,\delta)$, de (3.91), teríamos

$$f(x) \in B(f(a)\,;\,\varepsilon) \overset{(3.90)}{=} \{f(a)\},$$

ou seja,

$$f(x) = f(a)\,, \quad \text{com} \quad x \neq a\,,$$

o que seria um absurdo, pois a função $\underline{f}$ é injetora.

Assim

$$B_M(a;\delta) = \{a\}\,,$$

ou seja, o pknto $\underline{a}$ é um ponto isolado de $(M\,,d_M)$, mostrando que o espaço métrico $(M\,,d_M)$ é discreto, como queríamos demonstrar.

□

Observação 3.3.4

1. *Na verdade, na demonstração da Proposição 3.3.2, mostramos uma situação mais geral, a saber: se a função* $f : (M\,,d_M) \to (N\,,d_N)$ *é contínua em* $(M\,,d_M)$, *injetora e, para algum* $a \in M$, *temos o ponto* $\underline{f(a)}$ *é um ponto isolado de* $(N\,,d_N)$ *então o ponto* $\underline{a}$ *será um ponto isolado de* $(M\,,d_M)$.

2. *Em particular, a Proposição 3.3.2 acima, garante que a propriedade:*

   $(\mathcal{P})$ *espaço métrico ser discreto (ou não discreto) ,*

   é uma propriedade topológica, ou seja, é preservada por homeomorfismos entre espaços métricos.

3. *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos discretos.*

   Os espaço métricos $(M\,,d_M)$ *e* $(N\,,d_N)$ *são homeomorfos se, e somente se, os conjuntos* $\underline{M}$ *e* $\underline{N}$ *têm a mesma cardinalidade, ou seja, existe uma aplicação bijetora* $f : M \to N$.

   De fato, suponhamos que

   $$M \sim N\,.$$

   Então, em particular, existe uma aplicação bijetora $f : M \to N$, *ou seja, os conjuntos* $\underline{M}$ *e* $\underline{N}$ *têm a mesma cardinalidade.*

Por outro lado, se os conjuntos $\underline{M}$ *e* $\underline{N}$ *têm a mesma cardinalidade, como toda aplicação definida num espaço métrico discreto é contínua (veja o item 2. da Observação 3.1.12), segue que toda aplicação bijetora entre espaços métricos discretos será um homeomorfismo (pois ela e sua inversa estão definidas em espaços métricos discretos, logo são contínuas, pelo item 2. da Observação 3.1.12).*

Portanto, a aplicação $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ *será um homeomorfismo, ou seja,* $M \sim N$.

4. *Afirmamos que a propriedade:*

   $(\mathcal{P})$ *espaço métrico ser limitado,*

   é uma propriedade métrica, ou seja, é preservada por isometrias.

   A verificação deste fato é simples será deixada como exercício para o leitor.

   Porém a proriedade $(\mathcal{P})$ **não** *é uma propriedade topológica, ou seja, pode* **não** *ser preservada por homeomorfismos, como mostra o seguinte exemplo:*

   Consideremos os espaço métricos

$$(\mathbb{N}, d_{\mathbb{N}}) \quad e \quad (P, d_P),$$

   com

$$P \doteq \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \right\}, \tag{3.92}$$

   onde as métricas $d_{\mathbb{N}}$ *e* d_P*, são as respectivas métricas induzida pela métrica* $d_{\mathbb{R}}$ *(dada por (2.13), com* $n = 1$*).*

   Temos que os espaços métricos $(\mathbb{N}, d_N)$ *e* (P, d_P) *são homeomorfos.*

   Notemos que os espaços métricos $(\mathbb{N}, d_N)$ *e* (P, d_P) *são discretos.*

   A verificação deste fato é simples será deixada como exercício para o leitor.

   Além disso, notemos que os conjuntos $\mathbb{N}$ *e* P *têm a mesma cardinalidade, pois a aplicação* $f : \mathbb{N} \to P$*, dada por*

$$f(n) \doteq \frac{1}{n}, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{N},$$

   é uma aplicação bijetora do conjunto $\mathbb{N}$ *no conjunto* P.

   A verificação deste fato é simples será deixada como exercício para o leitor.

   Logo, do item 3 desta Observação segue que eles serão homeomorfos.

   Porém, notemos que o espaço métrico $(\mathbb{N}, d_{\mathbb{N}})$ **não** *é limitado e o espaço métrico* (P, d_P) *é limitado, ou seja, a propriedade* $(\mathcal{P})$ **não** *é uma propriedade topológica (apesar de ser uma propriedade métrica !).*

Um outro resultado interessante é dado pela:

Proposição 3.3.3 *Sejam* $(E, \|\cdot\|_E)$ *um espaço vetorial real normado,* $\vec{a} \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *com* $\lambda \neq 0$.

Então a aplicação <u>**translação do vetor** $\vec{a}$</u>*, que indicaremos por* $t_{\vec{a}} : E \to E$ *e a aplicação* <u>**homotetia**</u>*, indicada por* $m_\lambda : E \to E$*, dadas por:*

$$t_{\vec{a}}(\vec{x}) \doteq \vec{x} + \vec{a}\,, \tag{3.93}$$

e

$$m_\lambda(\vec{x}) \doteq \lambda \cdot \vec{x}\,, \quad \textit{para cada} \quad \vec{x} \in E\,, \tag{3.94}$$

são homeomorfismos em $(E, \|\cdot\|)$.

<u>**Demonstração:**</u>

De fato, da Proposição 3.2.3, segue que as funções $t_{\vec{a}}$ e m_λ são contínuas em $(E, \|\cdot\|)$.

Além disso, elas admitem funções inversas $t_{\vec{a}}^{\,-1} : E \to E$ e $m_\lambda^{\,-1} : E \to E$, que são dadas por:

$$t_{\vec{a}}^{\,-1}(y) \doteq \vec{y} - \vec{a} \quad \text{e} \quad m_\lambda^{\,-1}(\vec{y}) \doteq \frac{1}{\lambda} \cdot \vec{x}\,, \quad \text{para cada} \quad \vec{y} \in E\,. \tag{3.95}$$

A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Observemos que as funções $t_{\vec{a}}^{\,-1} : E \to E$ e $m_\lambda^{\,-1} : E \to E$ são contínuas em $(E, \|\cdot\|)$, logo seão homeomorfismos de $(E, \|\cdot\|)$, completando a demonstração.

$\square$

Como conseqüêcia temos o:

Corolário 3.3.1 *Sejam* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial real normado,* $\vec{a}, \vec{b} \in E$ *e* $r, s > 0$.

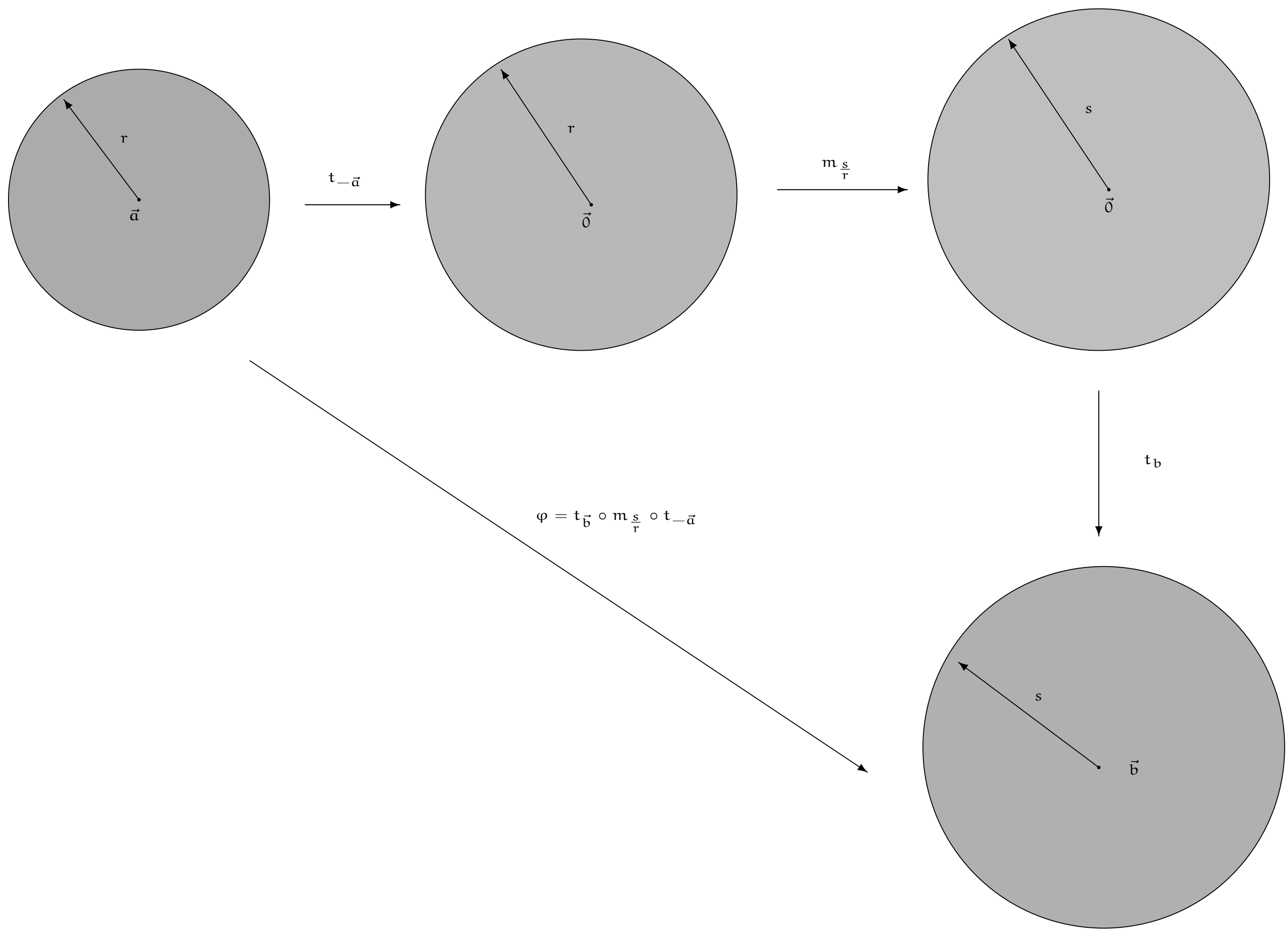
Então as bolas abertas $B(\vec{a}; r)$ *e* $B\left(\vec{b}; s\right)$ *são homeomorfas, munidas da métrica induzida* $d_{\|\cdot\|}$ *(dada por* (2.191)*).*

<u>**Demonstração:**</u>

Consideremos a aplicação $\varphi : B(\vec{a}; r) \to E$, dada por:

$$\varphi(\vec{x}) \doteq \left(t_{\vec{b}} \circ m_{\frac{s}{r}} \circ t_{-\vec{a}}\right)(\vec{x})\,, \quad \text{para cada} \quad \vec{x} \in B(\vec{a}; r)\,. \tag{3.96}$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita pela função acima:



Observemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{a}) &\overset{(3.96)}{=} \left(t_{\vec{b}} \circ m_{\frac{s}{r}} \circ t_{-\vec{a}}\right)(\vec{a}) \\
&= \left(t_{\vec{b}} \circ m_{\frac{s}{r}}\right)(t_{-\vec{a}}(\vec{a})) \\
&\overset{(3.93)}{=} \left(t_{\vec{b}} \circ m_{\frac{s}{r}}\right)(\vec{a} - \vec{a}) \\
&= \left(t_{\vec{b}} \circ m_{\frac{s}{r}}\right)\left(\vec{O}\right) \\
&= t_{\vec{b}}\left(m_{\frac{s}{r}}\left(\vec{O}\right)\right) \\
&\overset{(3.94)}{=} t_{\vec{b}}\left(\frac{s}{r} \cdot \vec{O}\right) \\
&= t_{\vec{b}}\left(\vec{O}\right) \\
&\overset{(3.93)}{=} \vec{O} + \vec{b} \\
&= \vec{b},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi(\vec{a}) = \vec{b}\,. \tag{3.97}$$

Notemos também que, para cada

$$\vec{x} \in B(\vec{a}\,; r)\,, \tag{3.98}$$

teremos:

$$\begin{aligned}
d_{\|\cdot\|}\left(\varphi(\vec{x})\,,\varphi(\vec{a})\right) &\overset{(2.191)}{=} \|\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{a})\| \\
&\overset{(3.96)\text{ e }(3.97)}{=} \left\| \left(t_{\vec{b}} \circ m_{\frac{s}{r}} \circ t_{-\vec{a}}\right)(\vec{x}) - \vec{b} \right\| \\
&= \left\| \left(t_{\vec{b}} \circ m_{\frac{s}{r}}\right)(t_{-\vec{a}}(\vec{x})) - \vec{b} \right\| \\
&\overset{(3.93)}{=} \left\| \left(t_{\vec{b}} \circ m_{\frac{s}{r}}\right)(\vec{x} - \vec{a}) - \vec{b} \right\| \\
&= \left\| t_{\vec{b}}\left(m_{\frac{s}{r}}(\vec{x} - \vec{a})\right) - \vec{b} \right\| \\
&\overset{(3.94)}{=} \left\| t_{\vec{b}}\left(\frac{s}{r} \cdot (\vec{x} - \vec{a})\right) - \vec{b} \right\| \\
&\overset{(3.93)}{=} \left\| \left[\frac{s}{r} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \vec{b}\right] - \vec{b} \right\| \\
&= \left\| \frac{s}{r} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) \right\| \\
&\overset{(2.74)}{=} \underbrace{\left|\frac{s}{r}\right|}_{\frac{s}{r}\,,\ \text{pois } s\,,r>0} \|\vec{x} - \vec{a}\| \\
&\overset{(2.191)}{=} \frac{s}{r}\, d_{\|\cdot\|}(\vec{x}\,,\vec{a}) \\
&\overset{(3.98)}{<} \frac{s}{r}\, r \\
&= s\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi(\vec{x}) \in B(\varphi(\vec{a})\,; s) \overset{(3.98)}{=} B(\vec{b}\,; s)\,,$$

mostrando que

$$\varphi : B(\vec{a}\,; r) \to B(\vec{b}\,; s)\,.$$

Logo, da Proposição 3.3.3, segue que a função φ é um homeomorfismo (pois é uma composta de homeomorfismos), mostrando que $\left(B(\vec{a}\,; r)\,, d_{\|\cdot\|}\right)$ e $\left(B(\vec{b}\,; s\,, d_{\|\cdot\|})\right)$ são homeomorfos, completando a demonstração.

□

De modo semelhante pode-se demonstrar o:

Corolário 3.3.2 *Sejam* $(E\,, \|\cdot\|_E)$ *espaço vetorial real normado,* $\vec{a}\,,\vec{b} \in E$ *e* $r, s > 0$.

Então as bolas fechadas $B[\vec{a}\,;\,r]$ *e* $B[\vec{b}\,;\,s]$ *são homeomorfas, munidas da métrica induzida* $d_{\|\cdot\|}$ *(dada por* (2.191)*).*

Além disso e as esferas $S(\vec{a}\,;\,r)$, $S(\vec{b}\,;\,s)$ *também são homeomorfas, munidas da métrica induzida* $d_{\|\cdot\|}$ *(dada por* (2.191)*).*

Demonstração:

A verificação destes fatos é semelhante a do Corolário 3.3.1 e assim, sua elaboração será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 3.3.5

1. *Sabemos que o diâmetro de um subconjunto de um espaço métrico é um invariante métrico, isto é, é preservado por isometrias, mas* **não** *é um invariante topológico, isto é, pode não ser preservado por homeomorfismo, como mostram os Corolários acima, no caso de espaços vetoriais normados.*

2. *Observemos que em um espaço métrico arbitrário, duas bolas abertas (ou fechadas) podem* **não** *ser homeomorfas, como mostra o seguinte exemplo:*

   Consideremos $(M\,,d_M)$ *um espaço métrico que possua um ponto* $\underline{a}$ *que seja ponto isolado em* $(M\,,d_M)$ *e um ponto* $\underline{b}$ *que não seja ponto isolado de* $(M\,,d_M)$.

   Logo, podemos encontrar $\varepsilon > 0$, *de modo que*

   $$B(a\,;\,\varepsilon) = \{a\}\,.$$

   Em particular essa bola aberta **não** *será homeomorfa a uma bola aberta de centro em* $\underline{b}$ *com qualquer raio fixado.*

   De fato, pois, para todo $s > 0$, *temos que a bola aberta*

   $$B(b\,;\,s)$$

   é um conjunto infinito, pois o ponto $\underline{b}$ *não é ponto isolado de* $(M\,,d_M)$.

   Portanto, **não** *poderá existir uma aplicação* **bijetora** *do*

   $$\text{conjunto} \quad B(a\,;\varepsilon) = \{a\}\,, \quad \text{no conjunto} \quad B(b\,;s)\,.$$

   Portanto as bolas $(B(a\,;\,\varepsilon)\,,d_M)$ *e* $(B(b\,;\,s)\,,d_M)$ **não** *são homeomorfas em* $(M\,,d_M)$.

A seguir, iremos introduzir a:

Definição 3.3.4 *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos.*

Diremos que uma função $f : M \to N$ *é uma* **imersão topológica de** (M, d_M) **e** (N, d_N) *se a função* $f : (M, d_M) \to (f(M), d_N)$ *for um homeomorfismo de* (M, d_M) *em* $(f(M), d_N)$.

Observação 3.3.6

1. *Notemos que um imersão isométrica* $f : (M\, d_M) \to (N, d_N)$ *será uma imersão topológica.*

   De fato, pois se a função $\underline{f}$ *é uma imersão isométrica, teremos*

   $$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y) \quad \textit{para todo} \quad x, y \in M,$$

   mostrando que a função $f : (M\, d_M) \to (f(M), d_N)$ *será bijetora, contínua em* (M, d_M) *e com função inversa* $f^{-1} : (f(M), d_N) \to (M, d_M)$ *contínua em* $(f(M), d_N)$.

2. **Não** *vale a recíproca do item 1. acima, ou seja, nem toda imersão topológica é uma imersão isométrica, como mostra o seguinte exemplo:*

   Consideremos os espaços métricos $\left(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2}\right)$, $(\mathbb{R} \times \{0\}, d_{\mathbb{R}^2})$, *onde a métrica* $d_{\mathbb{R}^2}$ *é métrica usual (dadas por (2.13), com* $n = 2$*), o espaço métrico* (N, d_N), *onde*

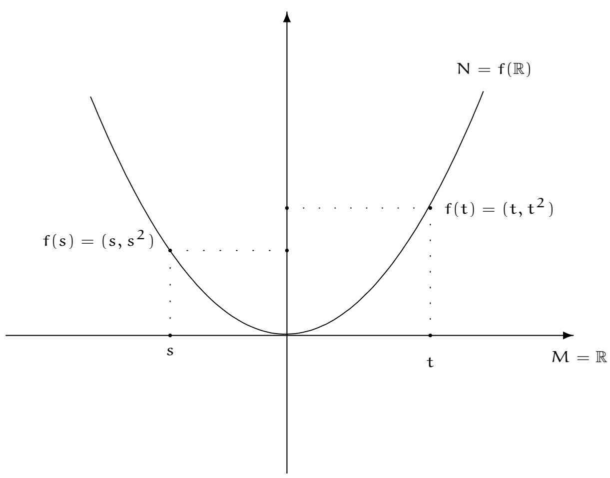
   $$N \doteq \left\{\left(x, x^2\right) ; x \in \mathbb{R}\right\} \tag{3.99}$$

   (cuja representção geométrica é uma parábola - veja a figura abaixo) e a métrica $d_N : N \times N \to \mathbb{R}$ *é dada por*

   $$d(P, Q) \doteq \textit{comprimento do arco da parábola que } \underline{P} \textit{ a } \underline{Q}, \tag{3.100}$$

   para cada $P, Q \in N$, *e a função* $f : \mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

   $$f(t, 0) \doteq \left(t, t^2\right), \quad \textit{para cada} \quad (t, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}. \tag{3.101}$$



Observemos que a função $\underline{f}$ *é contínua em* $(\mathbb{R} \times \{0\}, d_{\mathbb{R}^2})$ *(pois cada uma de suas componentes é), bijetora sobre*

$$f(\mathbb{R} \times \{0\}) \overset{(3.101) \text{ e } (3.99)}{=} N$$

e sua função inversa será a função $f^{-1} : N \to \mathbb{R} \times \{0\}$*, dada por:*

$$f\left(t, t^2\right) \doteq (t, 0), \quad \textit{para cada} \quad \left(t, t^2\right) \in N, \tag{3.102}$$

que corresponde a restrição da projeção $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \{0\}$*, dada por*

$$p_1(x, y) \doteq (x, 0), \quad \textit{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.103}$$

(que é uma função contínua em $\left(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2}\right)$*) ao conjunto* $f(\mathbb{R} \times \{0\})$*.*

Logo a função $f : (\mathbb{R}\times\{0\}, d_{\mathbb{R}^2}) \to (N, d_N)$ *será um homeomorfismo, mostrando que a função* $f : (\mathbb{R} \times \{0\}, d_{\mathbb{R}^2}) \to (N, d_N)$ *é uma imersão topológica.*

Observemos que a função $f : (\mathbb{R} \times \{0\}, d_{\mathbb{R}^2}) \to (N, d_N)$ **não** *é uma imersão isométrica de* $(\mathbb{R} \times \{0\}, d_{\mathbb{R}^2})$ *em* (N, d_N)*.*

De fato, pois para $t, s \in \mathbb{R}$*, com* $t \neq s$*, teremos que*

$$d_N(f(t, 0), f(s, 0))$$

é o comprimento do arco da parábola $\underline{N}$ *que une os pontos*

$$\left(s, s^2\right) \quad \textit{ao ponto} \quad \left(t, t^2\right),$$

enquanto

$$d_{\mathbb{R}^2}((t, 0), (s, 0))$$

é o comprimento do segmento de reta que une os pontos

$$(s, 0) \quad e \quad (t, 0).$$

Portanto (veja a figura acima)

$$d_N(f(t, 0), f(s, 0)) > d_M((s, 0), (t, 0)),$$

mostrando que a função $f : (\mathbb{R} \times \{0\}, d_{\mathbb{R}^2}) \to (N, d_N)$ *não será uma imersão isométrica.*

Outro resultado importante é dado pela:

Proposição 3.3.4 *Seja* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial real normado.*

Então toda bola aberta de $(E, \|\cdot\|)$ *é homeomorfa a* $(E, \|\cdot\|)$*, isto é, se* $\vec{a} \in E$ *e* $r > 0$ *então*

$$\left(B\left(\vec{a}; r\right), d_{\|\cdot\|}\right) \sim \left(E, d_{\|\cdot\|}\right).$$

Demonstração:

Notemos que, do Corolário 3.3.1, segue que basta mostrar que

$$\left(B\left(\vec{O};1\right),d_{\|\cdot\|}\right)\sim(E,d_{\|\cdot\|}),$$

ou seja, basta construir um homeomorfismo

$$f:(E,d_{\|\cdot\|})\to\left(B\left(\vec{O};1\right),d_{\|\cdot\|}\right).$$

Consideremos a função $f:E\to E$, dada por:

$$f(\vec{x})\doteq\frac{1}{1+\|\vec{x}\|}\cdot\vec{x},\quad\text{para cada}\quad\vec{x}\in E. \tag{3.104}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}d\left(f(\vec{x}),\vec{O}\right)&\overset{(2.191)}{=}\|f(\vec{x})-\vec{O}\|\\&\overset{(3.104)}{=}\left\|\frac{1}{1+\|\vec{x}\|}\cdot x\right\|\\&\overset{(2.74)}{=}\frac{1}{1+\|\vec{x}\|}\,\|\vec{x}\|\\&<1,\end{aligned}$$

mostrando que

$$f(E)\subseteq B\left(\vec{O};1\right),\quad\text{ou seja,}\quad f:E\to B\left(\vec{O};1\right).$$

Além disso a função $\underline{f}$ é uma função contínua, pois a aplicação

$$\vec{x}\to\|\vec{x}\|$$

é contínua em $\left(E,d_{\|\cdot\|}\right)$ e

$$1+\|\vec{x}\|\neq0,\quad\text{para todo}\quad\vec{x}\in E.$$

Definamos a função $g:B\left(\vec{O};1\right)\to E$, dada por:

$$g(\vec{y})\doteq\frac{1}{1-\|\vec{y}\|}\cdot\vec{y},\quad\text{para cada}\quad\vec{y}\in B\left(\vec{O};1\right). \tag{3.105}$$

Notemos que a função $\underline{g}$ é contínua em $\left(B\left(\vec{O};1\right),d_{\|\cdot\|}\right)$, pois a aplicação

$$\vec{y}\to\|\vec{y}\|$$

é contínua $\left(E,d_{\|\cdot\|}\right)$ e

$$1-\|\vec{y}\|\neq0,\quad\text{para todo}\quad\vec{y}\in B\left(\vec{O};1\right).$$

Além disso, para cada $\vec{y} \in B\left(\vec{O}\,;\,1\right)$, teremos:

$$\begin{aligned}
f\left(g(\vec{y})\right) &\overset{(3.105)}{=} f\left(\frac{1}{1-\|\vec{y}\|}\cdot\vec{y}\right) \\
&\overset{(3.104)}{=} \frac{1}{1+\left\|\dfrac{1}{1-\|\vec{y}\|}\cdot\vec{y}\right\|}\,\frac{1}{1-\|\vec{y}\|}\cdot\vec{y} \\
&\overset{(2.74)}{=} \frac{1}{1+\dfrac{1}{1-\|\vec{y}\|}\,\|\vec{y}\|}\,\frac{1}{1-\|\vec{y}\|}\cdot\vec{y} \\
&= \frac{1-\|\vec{y}\|}{1-\|\vec{y}\|+\|\vec{y}\|}\,\frac{1}{1-\|\vec{y}\|}\cdot\vec{y} \\
&= \vec{y}\,.
\end{aligned}$$

De modo semelhante mostra-se que

$$g(f(\vec{x})) = \vec{x}\,, \quad \text{para cada} \quad \vec{x} \in E\,.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Portanto,

$$g = f^{-1}\,,$$

mostrando que a função $f : (E\,,d_{\|\cdot\|}) \to \left(B\left(\vec{O}\,;\,1\right)\,,d_{\|\cdot\|}\right)$ é um homeomorfismo de $(E\,,d_{\|\cdot\|})$ em $\left(B\left(\vec{O}\,;\,1\right)\,,d_{\|\cdot\|}\right)$, ou ainda,

$$(E\,,d_{\|\cdot\|}) \sim \left(B\left(\vec{O}\,;\,1\right)\,,d_{\|\cdot\|}\right)\,,$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Observação 3.3.7

1. *Da Proposição 3.3.4 acima segue que,*

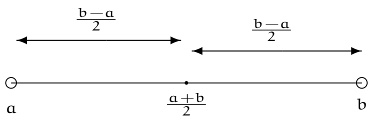
$$((a\,,b)\,,d_{\mathbb{R}}) \sim (\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})\,,$$

onde $d_{\mathbb{R}}$ *é métrica usual (dada por (2.13), com* $n = 1$*).*

De fato, pois

$$(a\,,b) = B\left(\frac{a+b}{2}\,;\,\frac{b-a}{2}\right)\,.$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



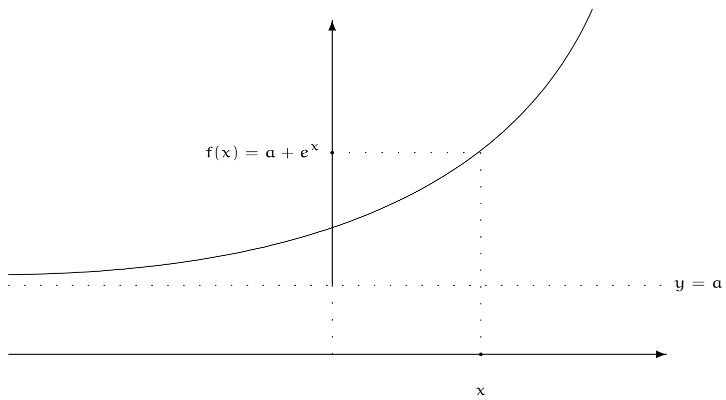
2. *Na situação do item acima, temos que*

$$(a\,,\infty)\,,d_{\mathbb{R}})\sim(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})\,.$$

Um outro modo de mostrar isto é considerando a função $f:\mathbb{R}\to(a\,,\infty)$, *dada por:*

$$f(x)\doteq a+e^{x}\,,\quad \textit{para cada}\quad x\in\mathbb{R}\,. \tag{3.106}$$

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$ *é dada pela figura abaixo.*

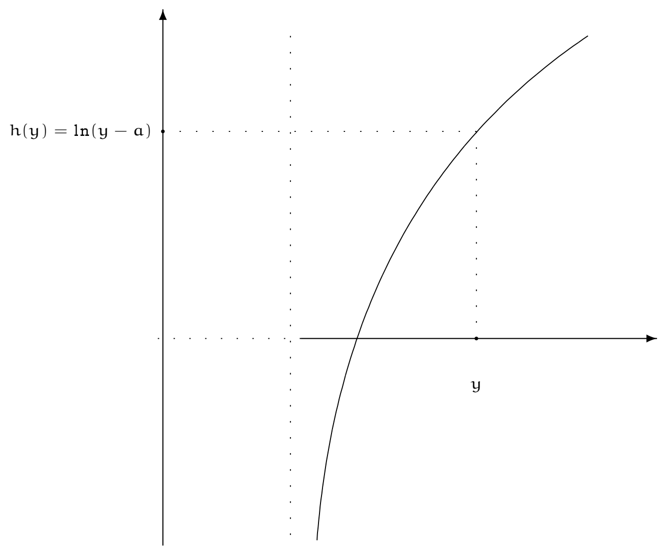


Com isto pode-se mostrar que a função $\underline{f}$ *é contínua em* $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$ *e se definindo-se a função* $h:(a\,,\infty)\to\mathbb{R}$, *dada por:*

$$h(y)\doteq \ln(y-a)\,,\quad \textit{para cada}\quad y\in(a\,,\infty)\,, \tag{3.107}$$

teremos que a função $\underline{h}$ *será contínua em* $((a\,,\infty)\,,d_{\mathbb{R}})$.

A representação geométrica do gráfico da função $\underline{h}$ *é dada pela figura abaixo.*



Além disso, pode-se verificar que

$$f(h(y)) = y\,, \quad \textit{para cada} \quad y \in (a\,,\infty) \quad e \quad g(f(x)) = x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

mostrando que

$$h = f^{-1}\,.$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Portanto, a função $\underline{f}$ *é um homeormorfismo de* $((a\,,\infty)\,,d_{\mathbb{R}})$ *em* $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$*, ou seja,*

$$((a\,,\infty)\,,d_{\mathbb{R}}) \sim (\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})\,.$$

3. *De modo semelhante ao que fizemos no item 2. pode-se mostrar (será deixado como exercício para o leitor) que* $(-\infty, b) \sim \mathbb{R}$*.*

Um outro caso importante é dado pelo:

Exemplo 3.3.4 *Consoderemos o espaço métrico* $(S^n\,,d_{\mathbb{R}^{n+1}})$*, onde*

$$S^n \doteq \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1}\,;\, \|x\| = 1\right\} \tag{3.108}$$

é a denominada **esfera unitária $\underline{n}$-dimensional** *, de centro na origem, munida da métrica* $d_{\mathbb{R}^{n+1}}$*, induzida pela métrica usual (dada por* (2.13)*, com* $n = n+1$*) e*

$$N \doteq (0\,,0\,,\cdots\,,0\,,1) \in \mathbb{R}^{n+1}\,, \tag{3.109}$$

o denominado polo norte da esfera S^n*.*

Mostrares que

$$(S^n \setminus \{N\}, d_{\mathbb{R}^{n+1}}) \sim (\mathbb{R}^n\,,d_{\mathbb{R}^n})\,.$$

Resolução:

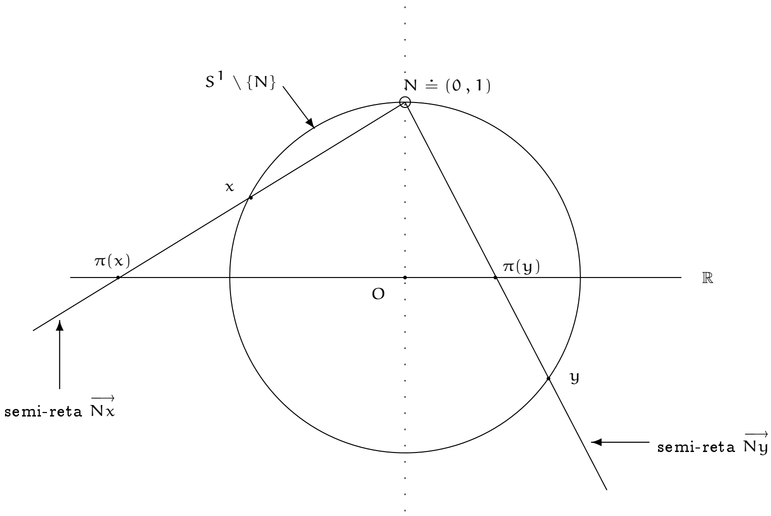
Para isto exibiremos uma aplicação $\Pi : (S^n \setminus \{N\}, d_{\mathbb{R}^{n+1}}) \to (\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ que é um homeomorfismo.

A aplicação $\underline{\Pi}$ será definida da seguinte forma:

Dado $x \in S^n \setminus \{N\}$, consideremos a semi-reta $\overrightarrow{Nx}$, que une os pontos $\underline{N}$ e $\underline{x}$, que está bem definida pois $x \neq N$.

Definimos $\Pi(x)$, como sendo o ponto de intersecção da semi-reta $\overrightarrow{Nx}$, com o híper-plano $x_{n+1} = 0$.

A figura abaixo ilustra a situação para o caso que $n = 1$.



A seguir obteremos uma expressão para $\pi(x)$, para cada $x \in S^n \setminus \{N\}$.

Observemos para cada $x \in S^1 \setminus \{N\}$, os pontos da semi-reta $\overrightarrow{Nx}$ são da forma

$$p + t \cdot (x - p), \quad \text{para cada} \quad t \in (0, \infty).$$

Logo

$$\pi(x) = p + t \cdot (x - p), \quad \text{para algum} \quad t \in (0, \infty). \tag{3.110}$$

Mas $\pi(x)$ deverá pertencer ao híper-plano $x_{n+1} = 0$, ou seja, a última coordanada de $\pi(x)$ deverá ser zero.

Como a última coordenada de (3.110) é da forma

$$1 + t \cdot (x_{n+1} - 1),$$

pois a última coordenada do ponto $\underline{N}$ é igua a 1 (veja (3.109)), $t \in (0, \infty)$ deverá satisfazer

$$1 + t\,(x_{n+1} - 1) = 0,$$

ou seja, deveremos ter

$$t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}. \tag{3.111}$$

Dado $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, podemos escrevê-lo na forma

$$x \doteq (x_1\, x_2\,, \cdots, x_n\,, x_{n+1}) = (x'\,, x_{n+1})\,, \tag{3.112}$$

onde

$$x' \doteq (x_1\,, x_2\,, \cdots, x_n) \quad \text{e} \quad x_{n+1} \in \mathbb{R}\,, \tag{3.113}$$

segue que

$$\begin{aligned}
N + t \cdot (x - p) &\overset{(3.111)}{=} N + \frac{1}{1 - x_{n+1}} \cdot (x - N) \\
&\overset{(3.109) \text{ e } (3.112)}{=} (0\,,0\,,\cdots,0\,,1) + \frac{1}{1 - x_{n+1}} \cdot [(x_1\,, x_2\,, \cdots, x_n\,, x_{n+1}) - (0\,,0\,,\cdots,0\,,1)] \\
&= (0\,,0\,,\cdots,0\,,1) + \frac{1}{1 - x_{n+1}} \cdot (x_1\,, x_2\,, \cdots, x_n\,, x_{n+1} - 1) \\
&\overset{(3.112) \text{ e } (3.113)}{=} (0\,,0\,,\cdots,0\,,1) + \left(\frac{1}{1 - x_{n+1}} \cdot x'\,, -1\right) \\
&= \left(\frac{1}{1 - x_{n+1}} x'\,, 0\right)\,.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$(\{(x_1\,, x_2\,, \cdots, x_n\,, 0)\,;\, x_i \in \mathbb{R}\,,\ \text{para } i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}\}, d_{\mathbb{R}^{n+1}}) \sim (\mathbb{R}^n\,, d_{\mathbb{R}^n})\,.$$

Para ver isto, basta considerar a aplicação $\phi : \{(x'\,,0)\,;\, x' \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, dada por

$$\phi(x'\,,0) \doteq x'\,, \quad \text{para cada} \quad \in (x'\,,0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}\,, \tag{3.114}$$

e mostrar que esta é um homeomorfismo de $(\{(x'\,,0)\,;\, x' \in \mathbb{R}^n\}, d_{\mathbb{R}^{n+1}})$ em $(\mathbb{R}^n\,, d_{\mathbb{R}^n})$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Assim a aplicação $\Pi : S^1 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ será dada por

$$\Pi(x) = (\phi \circ \pi)(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in S^1 \setminus \{N\},$$

ou seja,

$$\Pi(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}} \cdot x'\,, \quad \text{para cada} \quad x \in S^1 \setminus \{N\}, \tag{3.115}$$

onde, como em (3.112), temos que

$$x = (x'\,, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}\,.$$

Como $x_{n+1} \neq 1$ (pois $x \neq N$), de (3.115), segue que a função $\Pi : S^1 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ será contínua em $S^1 \setminus \{N\}$.

Consideremos agora a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$\varphi(y) \doteq x\,, \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{3.116}$$

onde $x = (x', x_{n+1})$, com

$$x' \doteq \frac{2}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1} \cdot y \quad \text{e} \quad x_{n+1} \doteq \frac{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 - 1}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1}, \tag{3.117}$$

isto é,

$$\varphi(y) \doteq \left(\frac{2}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1} \cdot y \, , \frac{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 - 1}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1} \right) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.118}$$

Observemos que, para cada $y \in \mathbb{R}^n$, teremos

$$\begin{aligned}
\|\varphi(y)\|_{\mathbb{R}^{n+1}}{}^2 &\overset{(3.118)}{=} \left\| \frac{2}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1} \cdot y \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \left| \frac{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 - 1}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1} \right|^2 \\
&\overset{(2.74)}{=} \frac{4}{\left(\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1\right)^2} \|y\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \frac{\left(\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 - 1\right)^2}{\left(\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1\right)^2} \\
&= \frac{4\,\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + \left(\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 - 1\right)^2}{\left(\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1\right)^2} \\
&= \frac{4\,\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + \left(\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^4 - 2\,\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1\right)}{\left(\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1\right)^2} \\
&= \frac{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^4 + 2\,\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1}{\left(\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1\right)^2} \\
&= \frac{\left(\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1\right)^2}{\left(\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1\right)^2} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

ou seja, de (3.108), teremos:

$$\varphi(y) \in S^n, \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.119}$$

Notemos que, se existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\varphi(y) = (0, 0, \cdots, 0, 1) = N \in \mathbb{R}^{n+1},$$

de (3.118), deveríamos ter:

$$\frac{2}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1} \cdot y = (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n \tag{3.120}$$

e

$$\frac{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 - 1}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1} = 1. \tag{3.121}$$

Logo, de (3.120), deveríamos ter

$$y = (0\,,0\,,\cdots\,,0) \in \mathbb{R}^n \tag{3.122}$$

e este $\underline{y}$ não irá satisfazer (3.122), ou seja,

$$N \notin \varphi\,(\mathbb{R}^n)\ . \tag{3.123}$$

Logo, de (3.119) e (3.112) segue que

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}. \tag{3.124}$$

Observemos também que, de (3.118) a função $\underline{\varphi}$ é contínua em $(\mathbb{R}^n\,, d_{\mathbb{R}^n})$ e, além disso, para

$$x = (x'\,, x_{n+1}) \in S^n \setminus \{N\}, \tag{3.125}$$

temos que

$$\begin{aligned} 1 &\overset{(3.125)}{=} \|x\|_{\mathbb{R}^{n+1}}{}^2 \\ &\overset{(3.125)}{=} \|x'\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + (x_{n+1})^2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} \neq 1\,, \\ \text{assim} \qquad & \|x'\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 = 1 - (x_{n+1})^2\,. \end{aligned} \tag{3.126}$$

Deste modo, teremos

$$\begin{aligned}
\varphi(\Pi(x)) &\overset{(3.118)}{=} \left(\frac{2}{\|\Pi(x)\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1}\cdot \Pi(x)\,, \frac{\|\Pi(x)\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 - 1}{\|\Pi(x)\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1}\right) \\
&\overset{(3.115)}{=} \left(\frac{2}{\left\|\frac{1}{1-x_{n+1}}\cdot x'\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 + 1}\cdot\left[\frac{1}{1-x_{n+1}}\cdot x'\right], \frac{\left\|\frac{1}{1-x_{n+1}}\cdot x'\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 - 1}{\left\|\frac{1}{1-x_{n+1}}\cdot x'\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 + 1}\right) \\
&\overset{(2.74)}{=} \left(\frac{2}{\frac{1}{(1-x_{n+1})^2}\,\|x'\|_{\mathbb{R}^n}^2 + 1}\,\left[\frac{1}{1-x_{n+1}}\cdot x'\right], \frac{\frac{1}{(1-x_{n+1})^2}\,\|x'\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 - 1}{\frac{1}{(1-x_{n+1})^2}\,\|x'\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1}\right) \\
&= \left(\frac{2\,(1-x_{n+1})^2}{\left[\|x'\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + (1-x_{n+1})^2\right]\ (1-x_{n+1})}\cdot x', \frac{\|x'\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 - (1-x_{n+1})^2}{\|x'\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + (1-x_{n+1})^2}\right) \\
&= \left(\frac{2\,(1-x_{n+1})}{\left[\|x'\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + (1-x_{n+1})^2\right]}\cdot x', \frac{\|x'\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 - (1-x_{n+1})^2}{\|x'\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + (1-x_{n+1})^2}\right) \\
&\overset{(3.126)}{=} \left(\frac{2\,(1-x_{n+1})}{\left\{\left[1-(x_{n+1})^2\right] + (1-x_{n+1})^2\right\}}\cdot x', \frac{\left[1-(x_{n+1})^2\right] - (1-x_{n+1})^2}{\left[1-(x_{n+1})^2\right] + (1-x_{n+1})^2}\right) \\
&= \left(\frac{2\,(1-x_{n+1})}{\left[1-(x_{n+1})^2 + 1 - 2\,x_{n+1} + (x_{n+1})^2\right]}\cdot x', \frac{1-(x_{n+1})^2 - \left[1-2\,x_{n+1} + (x_{n+1})^2\right]}{1-(x_{n+1})^2 + \left[1-2\,x_{n+1} + (x_{n+1})^2\right]}\right) \\
&= \left(\frac{2\,(1-x_{n+1})}{(2-2x_{n+1})}\cdot x', \frac{2\,x_{n+1} - 2(x_{n+1})^2}{2-2\,x_{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(x' , \frac{2\,(1 - x_{n+1}) x_{n+1}}{2\,(1 - x_{n+1})} \right) \\
&= (x' , x_{n+1}) \\
&\overset{(3.112)}{=} x ,
\end{aligned}
$$

$$\text{ou seja,} \qquad \varphi(\Pi(x)) = x . \tag{3.127}$$

Por outro lado, para $y \in \mathbb{R}^n$, denotando

$$\varphi(y) = ([\varphi(y)]' , [\varphi(y)]_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} , \tag{3.128}$$

segue que:

$$
\begin{aligned}
\Pi(\varphi(y)) &\overset{(3.115)}{=} \frac{1}{1 - [\varphi(y)]_{n+1}} \cdot [\varphi(y)]' \\
&\overset{(3.118)}{=} \frac{1}{1 - \left[\dfrac{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 - 1}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1} \right]} \cdot \left[\left(\frac{2}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1} \cdot y , \frac{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 - 1}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1} \right) \right]' \\
&\overset{\text{definição de } '}{=} \frac{1}{1 - \left[\dfrac{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 - 1}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1} \right]} \frac{2}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1} \cdot y \\
&= \frac{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1}{(\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1) - (\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 - 1)} \frac{2}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1} \cdot y \\
&= \frac{2\,\left(\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1\right)}{2\,\left(\|y\|_{\mathbb{R}^n}{}^2 + 1\right)} \cdot y \\
&= y ,
\end{aligned}
$$

$$\text{ou seja,} \qquad \Pi(\varphi(y)) = y . \tag{3.129}$$

Portanto, de (3.127) e (3.129), segue que

$$\Pi(\varphi(x)) = x , \quad \text{para cada} \quad x \in S^n \setminus \{N\} \quad \text{e} \quad \varphi(\Pi(y)) = y , \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R}^n ,$$

mostrando que a função contínua φ é a função inversa da função contínua Π e como isto podemos concluir que

$$\Pi : (S^n \setminus \{N\}, d_{\mathbb{R}^{n+1}}) \to (\mathbb{R}^n , d_{\mathbb{R}^n})$$

é um homeormorfismo, ou ainda

$$S^n \setminus \{p\} \sim \mathbb{R}^n ,$$

como queríamos mostrar.

□

Observação 3.3.8 *A aplicação* $\Pi : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$*, dada por* (3.115)*, é denominada* **projeção estereográfica**.

Para finalizar a seção temos a:

Definição 3.3.5 *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos e* $f : M \to N$.

Definimos o **gráfico da função** f*, indicado por* $G(f)$*, como sendo o seguinte subconjunto de* $M \times N$*:*

$$G(f) \doteq \{(x\,,f(x))\,;\,x \in M\}\,. \tag{3.130}$$

Com isto temos a:

Proposição 3.3.5 *Sejam* $(M\,,d_M)$ *e* $(N\,,d_N)$ *espaços métricos e* $f : (M\,,d_M) \to (N\,,d_N)$ *uma função contínua em* $(M\,,d_M)$.

Então o espaço métrico

$$(G(f)\,,d_{M\times N})\,,$$

onde $d_{M\times N}$ *é uma das três métrica do produto cartesiano (dadas por* (2.111)*,* (2.112) *ou* (2.113)*), é homeomorfo a* $(M\,,d_M)$.

Demonstração:

Consideremos a seguinte aplicação

$$\tilde{f} : M \to M \times N$$

dada por

$$\tilde{f}(x) \doteq (x\,,f(x))\,, \quad \text{para cada} \quad x \in M\,. \tag{3.131}$$

Observemos que a função $\tilde{f}$ é contínua em $(M\,,d_M)$, pois suas funções coordenadas são contínuas em $(M\,,d_M)$, é injetora, pois se $x_1 \neq x_2$, teremos

$$\tilde{f}(x_1) \overset{(3.131)}{=} (x_1\,,f(x_1)) \neq (x_2\,,f(x_2)) \overset{(3.131)}{=} \tilde{f}(x_2)$$

e portanto bijetora sobre a sua imagem

$$\tilde{f}(M) \overset{(3.131)\text{ e }(3.130)}{=} G(f)\,.$$

Observemos que função $p_1 : G(f) \to M$, dada por

$$p_1(x\,,f(x)) \doteq x\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,f(x)) \in G(f) \tag{3.132}$$

(ou seja, a restrição ao conjunto $G(f)$ da projeção no primeiro fator) é contínua em $(G(f)\,,d_{M\times N})$ e

$$\begin{aligned} \tilde{f}(p_1(x\,,f(x))) &\overset{(3.132)}{=} \tilde{f}(x) \\ &\overset{(3.131)}{=} (x\,,f(x))\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,f(x)) \in G(f) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p_1(\tilde{f}(x)) &\overset{(3.131)}{=} p_1(x\,,f(x)) \\ &\overset{(3.132)}{=} x\,, \quad \text{para cada} \quad x \in M\,, \end{aligned}$$

mostrando que a aplicação $\underline{p_1}$ é a função inversa associada a função $\underline{\tilde{f}}$.

Como as funções acima são contínaus, segue que a aplicação $\tilde{f} : (M\,,d_M) \to (G(f)\,,d_{M\times N})$ é um homeomorfismo, mostrando que

$$(M\,,d_M) \sim (G(f)\,,d_{M\times N})\,,$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Podemos aplicar as ideias acima aos:

Exemplo 3.3.5 *Mostremos que* $(\mathbb{R}\backslash\{0\}\,,d_{\mathbb{R}})$*, onde a métrica* $d_{\mathbb{R}}$ *é a métrica induzida pela métrica usual (ou seja, dada por* (2.13)*, com* $n=1$*) é homeomorfo à* $(H\,,d_{\mathbb{R}^2})$*, onde a métrica* $d_{\mathbb{R}^2}$ *é a métrica induzida pela métrica usual (ou seja, dada por* (2.13)*, com* $n=2$*) e*

$$H \doteq \left\{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x\,y=1\right\}\,, \tag{3.133}$$

ou seja, é o gráfico da hipérbole

$$x\,y=1\,.$$

<u>**Resolução:**</u>

De fato, consideremos a função $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)\doteq\frac{1}{x}\,,\quad \text{para cada} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,. \tag{3.134}$$

Observemos que a função $\underline{f}$ contínua em $(\mathbb{R}\setminus\{0\}\,,d_{\mathbb{R}})$ e que

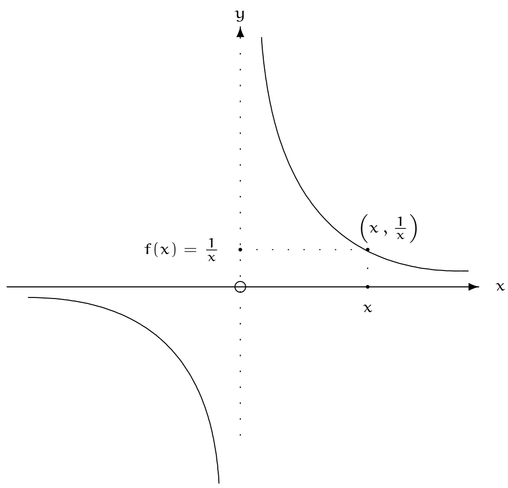
$$G(f)=H\,.$$

A verificãção destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Logo, da Proposição 3.3.5 segue que

$$(\mathbb{R}\setminus\{0\}\,,d_{\mathbb{R}})\sim(H\,,d_{\mathbb{R}^2})\,.$$

A figura abaixo nos fornece a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, ou seja, do conjunto $\underline{H}$.



$\square$

Exemplo 3.3.6 *Mostre que o* **<u>hemisfério norte</u>** *da esfera unitária centrada na origem contida em* $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$*, que será indicada por*

$$S_+^n \doteq \{(y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}) \in S^n ; y_{n+1} > 0\} \tag{3.135}$$

é homeomorfa à bola aberta unitária centrada na origem em $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^{n+1}})$*, isto é,*

$$(S_+^n, d_{\mathbb{R}^n}) \sim \left(B\left(\vec{O}; 1\right), d_{\mathbb{R}^n}\right).$$

<u>Resolução:</u>

De fato, consideremos a aplicação $f : B\left(\vec{O}; 1\right) \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) \doteq \sqrt{1 - \|x\|^2}, \quad \text{para cada} \quad x \in B\left(\vec{O}; 1\right). \tag{3.136}$$

Notemos que a função <u>f</u> é contínua em $\left(B\left(\vec{O}; 1\right), d_{\mathbb{R}^n}\right)$, pois é composta de funções contínuas.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Observemos que

$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}) \in S_+^n$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} 1 &= \|y\|^2 \\ &\overset{(2.13)}{=} y_1^2 + \cdots + y_n^2 + y_{n+1}^2 \end{aligned}$$

e

$$y_{n+1} > 0,$$

que é equivalente a

$$y_{n+1} = \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2}. \tag{3.137}$$

Logo, para $x \doteq (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que (3.137) é equivalente a

$$\|x\| = 1 \quad \text{e} \quad y_{n+1} = \sqrt{1 - \|x\|^2},$$

ou seja, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}) \in S_+^n$ se, e somente se, $y = \left(x, \sqrt{1 - \|x\|^2}\right)$,

ou ainda, $G(f) = S_+^n$. (3.138)

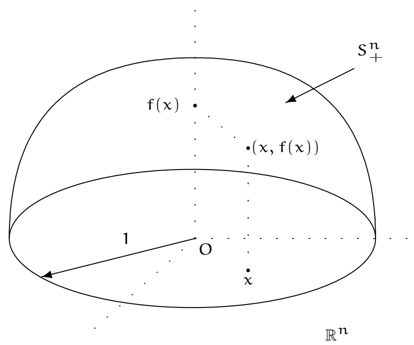
Logo, da Proposição 3.3.5 segue que

$$(G(f), d_{\mathbb{R}^{n+1}}) \sim (B\left(\vec{O}; 1\right), d_{\mathbb{R}^n}),$$

que, de (3.138), é o mesmo que dizer que

$$(S^n_+ \, , d_{\mathbb{R}^{n+1}}) \sim (B\left(\vec{O}\, ; 1\right) \, , d_{\mathbb{R}^n}) \, .$$

A figura abaixo nos fornece a representação geométrica do gráfico da função $\underline{f}$, ou seja, do conjunto $\underline{S^n_+}$.



□

3.4 Métricas equivalentes em um espaço métrico

Iniciaremos esta seção com a introdução do seguinte importante conceito:

Definição 3.4.1 *Sejam $\underline{d_1}$ e $\underline{d_2}$ duas métricas em $\underline{M}$.*

Diremos que **a métrica $\underline{d_1}$ é mais fina que a métrica $\underline{d_2}$**, *escrevendo $d_1 \succ d_2$, se a aplicação identidade $i_{12} : (M\, , d_1) \to (M\, , d_2)$, dada por*

$$i_{12}(x) \doteq x \, , \quad \textit{para cada} \quad x \in M \tag{3.139}$$

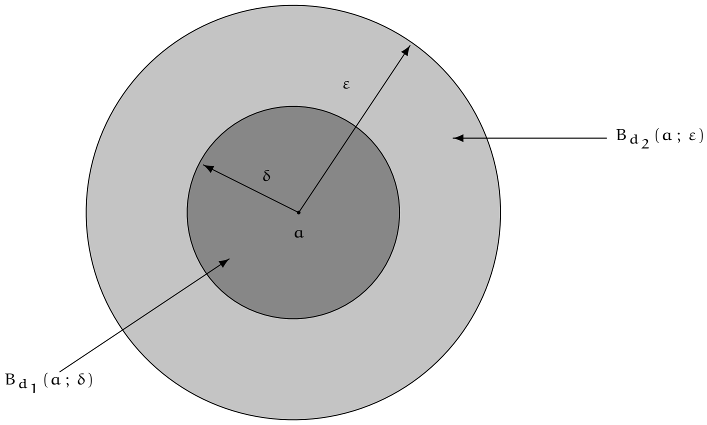
for contínua em $(M\, , d_1)$.

Observação 3.4.1 *Da Definição 3.4.1 acima, segue que a métrica $\underline{d_1}$ é mais fina que a métrica $\underline{d_2}$ (em $\underline{M}$) se, e somente se, para cada $a \in M$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$, de modo*

$$B_{d_1}(a\, ; \delta) \subseteq B_{d_2}(a\, ; \varepsilon) \, , \tag{3.140}$$

ou seja, toda bola aberta, segundo a métrica $\underline{d_2}$, contém uma bola aberta, segunda a métrica $\underline{d_1}$.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima



Com isto temos a:

Proposição 3.4.1 *Seja* $(M\,, d_1)$ *um espaço métrico discreto (isto é, a métrica* $\underline{d_1}$ *é a métrica discreta) e* $\underline{d_2}$ *uma outra métrica qualquer em* $\underline{M}$*.*

Então

$$d_1 \succ d_2\,, \tag{3.141}$$

ou seja, a métrica discreta em conjunto é mais fina que qualquer métrica que coloquemos nesse conjunto.

Além disso, se $\underline{d}$ *é uma métrica em* $\underline{M}$*, tal que*

$$d \succ d_1\,,$$

então a métrica $\underline{d}$ *é uma métrica discreta em* $\underline{M}$*, ou seja, a a métrica discreta em conjunto é a única métrica nesse conjunto que é mais fina que qualquer métrica que coloquemos nesse conjunto..*

<u>**Demonstração:**</u>

Lembremos que de $\underline{d_1}$ é métrica discreta em $\underline{M}$ então todo ponto de $(M\,, d_1)$ é isolado.

Logo, para cada $a \in M$, podemos encontrar $\delta > 0$, tal que

$$B_{d_1}(a\,;\,\delta) = \{a\}\,. \tag{3.142}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, temos que

$$B_{d_1}(a\,;\delta) \overset{(3.142)}{=} \{a\} \subseteq B_{d_2}(a\,;\,\varepsilon)$$

mostrando, pela Observação (3.4.1), que

$$d_1 \succ d_2\,,$$

completando a primeira parte da demonstração.

Suponhamos que a métrica $\underline{d}$ em $\underline{M}$ é tal que

$$d \succ d_1\,.$$

Logo, para cada $a \in M$, como a métrica $\underline{d_1}$ é a métrica discreta, podemos encontrar $\varepsilon > 0$, tal que

$$B_{d_1}(a\,;\,\varepsilon) = \{a\}. \tag{3.143}$$

Como

$$d \succ d_1\,,$$

da Observação (3.4.1), podemos encontrar $\delta > 0$, de modo que

$$B_d(a\,;\,\delta) \subseteq B_{d_1}(a\,;\,\varepsilon) \overset{(3.143)}{=} \{a\},$$

ou seja,

$$B_d(a\,;\,\varepsilon) = \{a\},$$

mostrando que a métrica $\underline{d}$ é a uma métrica discreta em $\underline{M}$, completando a demosntração.

□

Outro resultado interessante é dado pela:

Proposição 3.4.2 *Sejam* $\underline{d_1}$ *e* $\underline{d_2}$ *duas métricas em* $\underline{M}$*, satisfazendo a seguinte relação: existe* $c > 0$ *tal que*

$$d_2(x\,,y) \leq c\, d_1(x\,,y) \quad \textit{para todo} \quad x\,,y \in M\,. \tag{3.144}$$

Então

$$d_1 \succ d_2\,.$$

Demonstração:

Notemos que a desigualdade (3.144) acima implica que a aplicação identidade

$$i_{12} : (M\,,d_1) \to (M\,,d_2)$$

é lischitziana em $(M\,,d_1)$.

Em particular, pela Proposição 3.1.1, será uma função contínua em $(M\,,d_1)$ mostrando, pela Definição 3.4.1 que $d_1 \succ d_2$, completando a demonstração.

□

Observação 3.4.2 *Podemos provar o resultado acima diretamente, ou seja, para cada* $a \in M$*, para podemos mostra que a função* $i_{12} : (M\,,d_1) \to (M\,,d_2)$ *é contínua em* $\underline{a}$*.*

Para isto observemos que, dado $\varepsilon > 0$*, consideremos*

$$\delta \doteq \frac{\varepsilon}{c} > 0\,. \tag{3.145}$$

Logo, se $x \in M$ *satisfaz:*

$$x \in B_{d_1}(a\,;\delta)\,, \quad \textit{isto é,} \quad d_1(x\,,a) < \delta\,, \tag{3.146}$$

segue que

$$\begin{aligned} d_2(x\,,a) &\overset{(3.144)}{\leq} c\, d_1(x\,,a) \\ &\overset{(3.146)}{<} c\,\delta \\ &\overset{(3.145)}{<} c\,\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

ou seja, $x \in B_{d_2}(a\,;\varepsilon)$*, mostrando que*

$$B_{d_1}(a\,;\delta) \subseteq B_{d_2}(a\,;\varepsilon)\,,$$

e assim, da Observação (3.4.1), segue que, $d_1 \succ d_2$*, completando a verificação.*

Temos também a:

Proposição 3.4.3 *Sejam* $(M\,,d_1)$ *e* $(M\,,d_2)$ *espaços métricos.*
As afirmações são equivalentes;

1. $d_1 \succ d_2$*, isto é, a aplicação* $i_{12} : (M\,,d_1) \to (M\,,d_1)$ *é contínua em* $(M\,,d_1)$*;*
2. *Para todo espaço métrico* $(N\,,d_N)$*, se uma função* $f : (M\,,d_2) \to (N\,,d_N)$ *é contínua em* $(M\,,d_2)$*, então a aplicação* $f : (M\,,d_1) \to (N\,,d_N)$ *será contínua em* $(M\,,d_1)$*, ou seja, toda aplicação contínua segundo a métrica* $\underline{d_2}$ *deverá ser contínua segundo a métrica* $\underline{d_1}$*;*
3. *Consideremos o espaço métrico* $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$*, onde a métrica* $d_{\mathbb{R}}$ *é a métrica usual (ou deja, dada por (2.13), com* $n = 1$*). Se uma função* $f : (M\,,d_2) \to (\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$ *é contínua em* $(M\,,d_2)$*, então a função* $f : (M\,,d_1) \to (\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$ *será contínua em* $(M\,,d_1)$*, ou seja, toda aplicação contínua, a valores reais, segundo a métrica* $\underline{d_2}$ *deverá ser contínua segundo a métrica* $\underline{d_1}$*;*
4. *Para cada* $a \in M$ *fixado, a função* $d_{2\,a} : (M\,,d_1) \to (\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$*, dada por*
$$d_{2\,a} \doteq d_2(a\,,x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in M\,, \tag{3.147}$$
é contínua em $(M\,,d_1)$*;*
5. *Toda bola aberta, segundo a métrica* $\underline{d_2}$*, contém uma bola aberta, segundo* $\underline{d_1}$*, de mesmo centro que a primeira;*
6. *A função* $d_2 : (M \times M\,,D_1) \to (\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$ *é contínua em* $(M \times M\,,D_1)$*, onde a métrica* $\underline{D_1}$ *é uma das três métricas usuais do produto cartesiano, relativamente à métrica* $\underline{d_1}$ *(ou seja, dadas por (2.111), (2.112) ou (2.113)).*

Demonstração:
Faremos a demonstração segundo a seguinte seqüência de implicações:

$$\begin{tikzcd}
& 1. \arrow[r] \arrow[dl] & 2. \arrow[dd] \\
6. \arrow[dr] & & \\
& 4. \arrow[uu] \arrow[d, leftrightarrow] & 3. \arrow[l] \\
& 5. &
\end{tikzcd}$$

Começaremos mostrando que:

$1. \Longrightarrow 2.$:
isto é, vale 1., ou ainda, $d_1 \succ d_2$ e mostremos que 2. ocorrerá, ou seja, se a função $f : (M, d_2) \to (N, d_N)$ é contínua em (M, d_2) então a função $f : (M, d_1) \to (N, d_N)$ deverá ser contínua em (M, d_1).

Para isto, denotemos por

$$f^1 \doteq f : (M, d_1) \to (N, d_N) \tag{3.148}$$

$$\text{e} \qquad f^2 \doteq f : (M, d_2) \to (N, d_N)\,. \tag{3.149}$$

Logo, segundo a conveção acima teremos

$$f^1 = f^2 \circ i_{12}\,. \tag{3.150}$$

Como $d_1 \succ d_2$, pela Definição (3.4.1), segue que a função $i_{12} : (M, d_1) \to (M, d_2)$ é contínua em (M, d_1).

Logo, da hipótese que a função $\underline{f_2}$ é contínua em (M, d_2), de (3.150) e da Proposição 3.2.1, segue que a função $\underline{f_1}$ será contínua em (M, d_1), ou seja, vale 2. .

O diagrama abaixo ilustra a situação descrita acima:

$$\begin{tikzcd}
(M, d_1) \arrow[rr, "i_{12}"] \arrow[dr, "f^1"'] & & (M\, d_2) \arrow[dl, "f^2"] \\
& (N, d_N) &
\end{tikzcd}$$

Mostremos que:

$2. \Longrightarrow 3.$: isto é, vale 2., ou ainda, se a função $f : (M, d_2) \to (N, d_N)$ é contínua em (M, d_2) então a função $f : (M, d_1) \to (N, d_N)$ deverá ser contínua em (M, d_1) e deveremos mostrar que valerá 3., ou seja, então a função $f : (M, d_1) \to (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ será contínua em (M, d_1)

Notemos que isto é um como caso particular de 2., bastando conisderar

$$N \doteq \mathbb{R} \quad \text{e} \quad d_N \doteq d_{\mathbb{R}}\,,$$

e assim obteremos que 2. é verdadeira.

Mostremos agora que:

3. $\Longrightarrow$ 4.:

isto é, se vale 3., ou ainda, se a função $f : (M\,, d_2) \to (\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$ é contínua em $(M\,, d_2)$ implicará que a a função $f : (M\,, d_1) \to (\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$ é contínua em $(M\,, d_1)$, então valerá 4., isto é, a função $d_{2\,a} : (M\,, d_1) \to (\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$, dada por (3.147), será contínua em $(M\,, d_1)$.

Sabemos que a aplicação $d_{2a} : (M\,, d_2) \to (\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$, dada por (3.147), é contínua em $(M\,, d_2)$.

De fato pois, do Exemplo 3.1.17, temos que a função $\underline{d_2}$ é contínua em

$$(M\,, d_2) \times (M\,, d_2)\,, d)\;,$$

onde a métrica $\underline{d}$ é métrica dada por (2.13), no produto cartesiano.

Logo, do item 1. da Observação 3.2.3, segue que restrição de $\underline{d_2}$ à $(\{a\} \times M\,, d_2)$, será uma função $\underline{d_{2\,a}}$, também será contínua em $(\{a\} \times M\,, d)$.

Logo do item 3. segue a aplicação $d_{2\,a} : (M\,, d_1) \to (\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$ também será contínua em $(M\,, d_1)$, mostrando que 4. é verdadeira.

Mostremos agora que:

4. $\Longrightarrow$ 1.:

isto é, se vale 4., ou seja, se para cada $a \in M$ fixado, a função $d_{2\,a} : (M\,, d_1) \to (\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$, dada por (3.147) é contínua em $(M\,, d_1)$, mostremos que vale 1, ou seja, $d_1 \succ d_2$, ou ainda, precisamos mostra que a aplicação $i_{12} : (M\,, d_1) \to (M\,, d_2)$ é contínua em $(M\,, d_1)$.

Para isto precisamos mostrar que $i_{12} : (M\,, d_1) \to (M\,, d_2)$ é contínua em $\underline{b}$, para $b \in M$.

Por hipótese, para cada $a \in M$, a aplicação $d_{2\,a} : (M\,, d_1) \to (\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$ é contínua em $(M\,, d_1)$, segue que dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$, de modo se $x \in M$ satisfaz

$$\begin{aligned} & d_1(x\,, a) < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad |d_{2\,a}(x) - d_{2\,a}(a)| < \varepsilon\,, \\ \text{ou seja, (de (3.147))} \quad & \varepsilon > |d_2(x\,, a) - \underbrace{d_2(a\,, a)}_{\overset{(2.1)}{=}0}| = d_2(x\,, a). \end{aligned}$$

Portanto se $x \in M$ satistaz:

$$\begin{aligned} & d_1(x\,, a) < \delta\,, \quad \text{teremos} \quad d_2(x\,, a) < \varepsilon\,, \\ \text{ou seja,} \quad & B_{d_1}(a\,;\delta) \subseteq B_{d_2}(a\,;\varepsilon)\,, \end{aligned}$$

que, da Observação 3.4.1. é equivalente a dizer que $d_1 \succ d_2$, mostrando que 1. coorrerá.

Mostremos agora que:

4. $\Longleftrightarrow$ 5.:
isto é, vale 4., ou seja, se para cada $a \in M$ fixado, a função $d_{2\,a} : (M\,, d_1) \to (\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$, dada por (3.147) é contínua em $(M\,, d_1)$ se, e somente se, vale 5, ou seja, toda bola aberta, segundo a métrica $\underline{d_2}$, contém uma bola aberta, segundo $\underline{d_1}$, de mesmo centro que a primeira.

Suponhamos que, vale 4., isto é, a aplicação $d_{2\,a} : (M\,, d_1) \to (\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$, dada por (3.147), é contínua em $(M\,, d_1)$.

Logo dada a bola aberta $B_{d_2}(a\,;\,\varepsilon)$, da continuidade da aplicação $\underline{d_{2\,a}}$ no ponto $\underline{a}$, segue que existe $\delta > 0$, tal que se $x \in M$, satisfaz

$$
\begin{aligned}
& d_1(x\,, a) < \delta\,, \quad \text{ou seja, se} \quad x \in B_{d_1}(a\,;\,\delta) \\
\text{deveremos ter:} \quad & \varepsilon > |d_{2\,a}(x) - d_{2\,a}(a)| \\
& \overset{(3.147)}{=} |d_2(x\,, a) - \underbrace{d_2(a\,, a)}_{(2.1)=0}| \\
& = d_2(x\,, a)\,, \\
\text{ou seja,} \quad & x \in B_{d_2}(a\,;\,\varepsilon)\,.
\end{aligned}
$$

Portanto, se

$$
\begin{aligned}
& x \in B_{d_1}(a\,;\,\delta)\,, \quad \text{teremos} \quad x \in B_{d_2}(a\,;\,\varepsilon)\,, \\
\text{ou seja,} \quad & B_{d_1}(a\,;\,\delta) \subseteq B_{d_2}(a\,;\varepsilon)\,,
\end{aligned}
$$

mostrando que 5. ocorrerá.

Por outro lado, se vale 5., ou seja, se toda bola aberta, segundo a métrica $\underline{d_2}$, contém uma bola aberta, de mesmo centro, segundo a métrica $\underline{d_1}$, então dados $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, segue que podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$
B_{d_1}(a\,;\,\delta) \subseteq B_{d_2}(a\,;\,\varepsilon)\,. \tag{3.151}
$$

Logo se $x \in M$, satisfaz

$$
\begin{aligned}
& d_1(x\,, a) < \delta\,, \\
\text{ou seja,} \quad & x \in B_{d_1}(a\,;\delta)\,, \\
\text{teremos que} \quad & x \in B_{d_2}(a\,;\varepsilon)\,, \qquad (3.152) \\
\text{e assim, segue que:} \quad & |d_{2\,a}(x) - d_{2\,a}(a)| \overset{(3.147)}{=} |d_2(x\,, a) - \underbrace{d_2(a\,, a)}_{(2.1)=0}| \\
& \qquad = d_2(x\,, a) \overset{(3.152)}{<} \varepsilon\,,
\end{aligned}
$$

mostrando que a aplicação $d_{2\,a} : (M\,, d_1) \to (\mathbb{R}\,, d_{\mathbb{R}})$ é contínua em $(M\,, d_1)$, ou seja, 4. ocorrerá.

Mostremos agora que:

6. $\Longrightarrow$ 4.:
isto é, vale 6., ou seja, a função $d_2 : (M \times M, D_1) \to (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ é contínua em $(M_1 \times M_1, D_1)$, onde a métrica $\underline{D_1}$ é uma das três métricas usuais do produto cartesiano, relativamente à métrica $\underline{d_1}$ (ou seja, dadas por (2.111), (2.112) ou (2.113)) e mostremos que 4. ocorrerá, isto é, para cada $a \in M$ fixado, a função $d_{2\,a}$, dada por (3.147), é contínua em (M, d_1).

Notemos que se a função $d_2 : (M \times M, D_1) \to (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ é contínua em $(M \times M, D_1)$, relativamente à métrica $\underline{d_1}$, então a sua restrição ao conjunto $\{a\} \times M$ também será, isto é,

$$d_2|_{\{a\}\times M} : (\{a\} \times M, d_1) \to (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$$

será contínua em $(\{a\} \times M, d_1)$.

Observemos que

$$d_{2\,a} = d_2|_{\{a\}\times M},$$

portanto a aplicação $\underline{d_{2\,a}}$ será contínua em (M, d_1), mostrando que 4. ocorrerá.

Para finalizar, mostremos que:
1. $\Longrightarrow$ 6.:
isto é, vale 1., ou seja, se $d_1 \succ d_2$, então 6. ocorrerá, ou seja, a função $d_2 : (M\times M, D_1) \to (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ é contínua em $(M \times M, D_1)$, onde a métrica $\underline{D_1}$ é uma das três métricas usuais do produto cartesiano, relativamente à métrica $\underline{d_1}$ (ou seja, dadas por (2.111), (2.112) ou (2.113)).

De fato, se $d_1 \succ d_2$, então a aplicação $i_{12} : (M, d_1) \to (M, d_2)$ será contínua em (M, d_1).

Logo, do Corolário 3.2.2, segue que a aplicação identidade $id : (M, \times M, D_1) \to (M \times M, D_2)$ será contínua em $(M \times M, D_1)$, onde para cada $i \in \{1, 2\}$, a métrica D_i é uma das três métricas usuais do produto cartesiano, relativamente à métrica $\underline{d_i}$ (dadas por (2.111), (2.112) ou (2.113)), pois

$$id = (i_{12}, i_{12})$$

e a aplicação i_{12} é contínua em (M, d_1).

Portanto a métrica $\underline{D_1}$ é mais fina que a métrica $\underline{D_2}$, em $M \times M$.

Sabemos que a função $d_2 : (M \times M, D_2) \to (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ é contínua em $(M \times M, D_2)$.

Logo, como 1. $\Longrightarrow$ 3., segue que a aplicação $d_2 : (M\times M, D_1) \to (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ também será contínua em $(M \times M, D_1)$, mostrando que 6. ocorrerá, completando a demonstração.

□

Um outro resultado interessante é dado pela:

Proposição 3.4.4 *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos e uma aplicação* $f : M \to N$ *injetiva.*

Então a função $\underline{f}$ *é contínua em* (M, d_M) *se, e somente se, a métrica* $d_M \succ d_1$*, onde a métrica* $\underline{d_1}$ *é a métrica induzida em* (M, d_M) *pela aplicação* $\underline{f}$*.*

Demonstração:

Podemos supor, sem perda de generalidade que a função $\underline{f}$ é sobrejetora, isto é,

$$N = f(M)\,,$$

pois caso contrário trocamos o espaço métrico $(N\,,d_N)$ pelo espaço métrico $(f(M\,,d_N)$ (munido da métrica induzida por $(N\,,d_N)$).

Indicaremos por $d_f : M \times M \to \mathbb{R}$ a métrica induzida pela aplicação $\underline{f}$, isto é, dada por

$$d_f(x\,,y) \doteq d_N(f(x)\,,f(y))\,, \quad \text{para cada} \quad x\,,y \in M\,. \tag{3.153}$$

Notemos que a aplicação $f : (M\,,d_1) \to (N\,,d_N)$ será uma isometria, pois

$$d_N(f(x)\,,f(y)) \overset{(3.153)}{=} d_f(x\,,y)\,, \quad \text{para cada} \quad x\,,y \in M\,.$$

Indiquemos por

$$i_{Mf} : (M\,,d_M) \to (M\,,d_f)$$

a aplicação identidade.

Como a função $\underline{f}$ é bijetora, segue que será um homeomorfismo de $(M\,,d_f)$ em $(N\,,d_N)$.

Com isto temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(M\,,d_M) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_{Mf}"'] & (N\,,d_N) \\
(M\,,d_f) \arrow[ur, "\underline{f}\text{ é homeomrofismo}"'] &
\end{tikzcd}$$

Como

$$f = f \circ i_{Mf}$$

segue que a função $f : (M\,,d_M) \to (N\,,d_N)$ será contínua em $(M\,,d_M)$ se, e somente se, a função i_{Mf} é contínua em $(M\,,d_M)$, ou seja, $d_M \succ d_f$, completando a demostração da proposição.

$\square$

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 3.4.1 *Consideremos os espaços métricos*

$$([0\,,2\pi)\,,d_{[0\,,2\pi)}) \quad e \quad \left(S^1\,,d_{\mathbb{R}^2}\right)\,,$$

onde as métricas $\underline{d_{[0\,,2\pi)}}$ *e* $\underline{d_{S^1}}$ *são as métricas induzidas pelas métricas usuais* $\underline{d_{\mathbb{R}}}$ *e* $\underline{d_{\mathbb{R}^2}}$ *(dadas por* (2.13)*, com* $n = 1$ *e* $n = 2$*, respectivamente) em* $[0\,,2\pi)$ *e* S^1*, respectivamente,*

$$S^1 \doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

e a função $f : [0\,,2\,\pi) \to S^1$, *é dada por*

$$f(t) \doteq (\cos(t)\,,\operatorname{sen}(t))\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in [0\,,2\,\pi)\,. \tag{3.154}$$

Mostre que a métrica $d_{[0\,,2\,\pi)}$ *é mais fina que a métrica induzida pela aplicação* $\underline{f}$.

Resolução:

Vimos, no Exemplo (3.3.3), que a aplicação $\underline{f}$ é contínua e bijetora em $([0\,,2\,\pi)\,,d_{[0\,,2\,\pi)})$.

Logo, da Proposição (3.4.4) acima, segue que a métrica $d_{[0\,,2\pi)}$ é mais fina que a métrica induzida pela aplicação $\underline{f}$.

Notemos que $d_f : [0\,,2\,\pi) \times [0\,,2\,\pi) \to \mathbb{R}$ será dada por a métrica

$$\begin{aligned} d_f(x\,,y) &\doteq d_{S^1}(f(x)\,,f(y)) \\ &\overset{(3.154)}{=} d_{S^1}[(\cos(x)\,,\operatorname{sen}(x))\,,(\cos(y)\,,\operatorname{sen}(y))] \\ &\overset{(2.13)\text{ com } n=2}{=} \sqrt{[\cos(x)-\cos(y)]^2 + [\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(y)]^2}\,, \end{aligned}$$

para cada $x\,,y \in [0\,,2\pi)$.

□

Podemos agora introduzir a:

Definição 3.4.2 *Sejam* $\underline{d_1}$ *e* $\underline{d_2}$ *métricas em* $\underline{M}$.

Diremos que as métricas $\underline{d_1}$ *e* $\underline{d_2}$ *são* **equivalentes em** $\underline{M}$, *denotando por* $d_1 \sim d_2$, *se a aplicação*

$$i_{12} : (M\,,d_1) \to (M\,,d_2)$$

for um homeomorfismo de $(M\,,d_1)$ *em* $(M\,,d_2)$.

Observação 3.4.3

1. *As métricas* $\underline{d_1}$ *e* $\underline{d_2}$ *em* $\underline{M}$, *são equivalentes em* $\underline{M}$ *se, e somente se,*

$$d_1 \succ d_2 \quad e \quad d_2 \succ d_1\,. \tag{3.155}$$

2. *A relação* $\underline{\sim}$, *no conjunto formado por todas as métricas definidas em* $\underline{M}$, *é uma relação de equivalência, isto é, satisfaz as seguintes condições:*

   (a) *para toda métrica* $\underline{d_1}$ *em* $\underline{M}$, *temos que*

   $$d_1 \sim d_1\,,$$

   ou seja, a relação $\underline{\sim}$ *é reflexiva.*

   De fato, pois a aplicação identidade

   $$i_{11} : (M\,,d_1) \to (M\,,d_1)$$

   é uma isometria, em particular, um homeomorfismo de $(M\,,d_1)$ *em* $(M\,,d_1)$, *assim* $d_1 \sim d_1$.

(b) *se as métricas* $\underline{d_1}$ *e* $\underline{d_2}$ *em* $\underline{M}$, *satisfazem* $d_1 \sim d_2$, *então* $d_2 \sim d_1$, *ou seja, a relação* $\simeq$ *é simétrica.*

De fato, pois se $d_1 \sim d_2$, *então a aplicação identidade*

$$i_{12} : (M\,, d_1) \to (M\,, d_2)$$

é um homeomorfismo de $(M\,, d_1)$ *em* $(M\,, d_2)$.

Logo a aplicação identidade

$$i_{21} = {i_{12}}^{-1} : (M\,, d_2) \to (M\,, d_1)$$

também será um homeomorfismo de $(M\,, d_2)$ *em* $(M\,, d_1)$, *mostrando que* $d_2 \sim d_1$.

(c) *se as métricas* $\underline{d_1}$, $\underline{d_2}$ *e* $\underline{d_3}$ *em* $\underline{M}$, *satisfazem* $d_1 \sim d_2$ *e* $d_2 \sim d_3$ *então teremos que* $d_1 \sim d_3$, *ou seja, a relação* $\simeq$ *é transitiva.*

De fato, pois se $d_1 \sim d_2$, *então a aplicação identidade*

$$i_{12} : (M\,, d_1) \to (M\,, d_1)$$

será um homeomorfismo de $(M\,, d_1)$ *em* $(M\,, d_2)$.

De modo semelhante, como $d_2 \sim d_3$, *então teremos que a aplicação identidade*

$$i_{23} : (M\,, d_2) \to (M\,, d_3)$$

também será um homeomorfismo de $(M\,, d_2)$ *em* $(M\,, d_3)$.

Logo a aplicação identidade

$$i_{13} = i_{23} \circ i_{12} : (M\,, d_1) \to (M\,, d_3)$$

deverá ser um homeomorfismo de $(M\,, d_1)$ *em* $(M\,, d_3)$ *mostrando que* $d_1 \sim d_3$.

3. *Notemos que, da Proposição 3.4.3, segue que duas métricas em* $\underline{M}$ *são equivalentes se, e somente se, toda bola aberta, segundo uma das métricas, contém uma bola aberta, de mesmo centro, segundo a outra métrica.*

4. *Observemos que duas métricas discretas em* $\underline{M}$ *são sempre equivalentes, pois toda bola aberta segundo uma será uma bola aberta segunda a outra.*

   Além disso, vale observar que se $d_1 \sim d_2$ *e a métrica* $\underline{d_1}$ *é uma métrica discreta em* $\underline{M}$ *então, da Proposição 3.4.1, segue que a métrica* $\underline{d_2}$ *também será uma métrica discreta em* $\underline{M}$.

5. *Observemos também que, o 2. da Proposição 3.4.3, garante que se* $d_1 \sim d_2$ *em* $\underline{M}$*, então uma aplicação*

$$f : (M, d_1) \to (N, d_N)$$

será contínua em (M, d_1) *se, e somente se, a aplicação*

$$f : (M, d_2) \to (N, d_N)$$

for contínua em (M, d_2)*.*

Conclusão: *se trocarmos a métrica de um espaço métrico por uma outra métrica equivalente dada inicialmente, estudar a continuiade de uma função segundo a métrica, dada inicialmente, é equivalente a estudar a continuidade da função segundo a nova métrica.*

A seguir consideraremos alguns exemplos importantes.

Exemplo 3.4.2 *Mostre que as métricas* $\underline{d}$, $\underline{d_1}$ *e* $\underline{d_2}$ *em* $\mathbb{R}^n$*, introduzidas no Exemplo 2.1.3 (dadas por são* (2.13), (2.14) *e* (2.15)*, respectivamente) equivalentes.*

Resolução:

Notemos que, da Proposição 2.1.1 segue que para $x, y \in \mathbb{R}^n$ (veja (2.17)) temos

$$d_2(x, y) \leq d(x, y) \tag{3.156}$$
$$d(x, y) \leq d_1(x, y) \tag{3.157}$$
$$d_1(x, y) \leq n\, d_2(x, y)\,. \tag{3.158}$$

Logo, aplicando a Proposição 3.4.2 às métricas $\underline{d}$, $\underline{d_1}$ e $\underline{d_2}$, segue que;

- de (3.156), teremos que $d \succ d_2$;
- de (3.157), teremos que $d_1 \succ d$;
- de (3.158), teremos que $d_2 \succ d_1$;

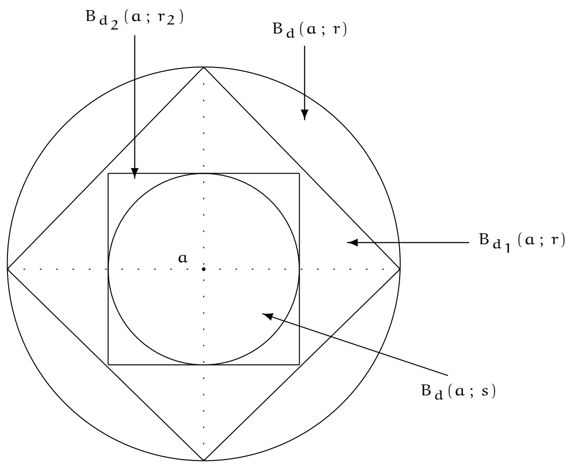
ou seja, as métricas são equivalentes $\underline{d}$, $\underline{d_1}$ e $\underline{d_2}$ em $\mathbb{R}^n$.

□

Observação 3.4.4

No Exemplo 3.4.2 acima, se $n = 2$*, temos garantido que toda bola aberta, segundo a métrica* $\underline{d}$ *(que, neste caso, é o interior de um disco), contém uma bola aberta, segundo a métrica* $\underline{d_1}$ *(que, neste caso, é o interior de um quadrado cujas diagonais são paralelas aos eixos coordenados) que, por sua vez, contém uma bola aberta, segundo a métrica* $\underline{d_2}$ *(que, neste caso, é o interior de um quadrado cujos lados são paralelos aos eixos coordenados) que, por fim, contém uma bola aberta, segundo a métrica* $\underline{d}$ *(que, neste caso, é o interior de um disco).*

A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica da situação descrita acima.



Em particular, do item 5. da Observação 3.4.3 segue que, para estudar a continuidade de uma função $f : \mathbb{R}^n \to (M\, d_M)$ *onde em* $\mathbb{R}^n$ *consideramos, por exemplo, a métrica* $\underline{d}$, *podemos trocar a mesma pela métrica* $\underline{d_1}$, *ou pela métrica* $\underline{d_2}$, *e estudar a continuidade da função dada relativamente à nova métrica considerada que o resultado obtido será o mesmo que seria obtido com a métrica* $\underline{d}$, *ou seja, a função* $f : (\mathbb{R}^n, d) \to (M, d_M)$ *é contínua em* $(\mathbb{R}^n, d)$ *se, e somente se, a função* $f : (\mathbb{R}^n, d_1) \to (M, d_M)$ *é contínua em* $(\mathbb{R}^n, d_1)$ *se, e somente se, a função* $f : (\mathbb{R}^n, d_2) \to (M, d_M)$ *é contínua em* $(\mathbb{R}^n, d_2)$. .

Podemos estender o Exemplo 3.4.2 acima, utilizando a Proposição 3.4.2, mais precisamente:

Corolário 3.4.1 *Sejam* $\underline{d_1}$ *e* $\underline{d_2}$ *duas métricas em* $\underline{M}$ *tais que podemos encontrar* $\alpha, \beta > 0$, *de modo que*

$$\alpha\, d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta\, d_1(x, y), \quad \textit{para cada} \quad x, y \in M. \tag{3.159}$$

Então $d_1 \sim d_2$.

Demonstração:

Denotemos por

$$\alpha\, d_1(x, y) \overset{(I)}{\leq} d_2(x, y) \overset{(II)}{\leq} \beta\, d_1(x, y), \quad \text{para cada} \quad x, y \in M.$$

Logo, de (I) segue que

$$d_1(x, y) \leq \frac{1}{\alpha}\, d_2(x, y), \quad \text{para cada} \quad x, y \in M.$$

Logo, da Proposição 3.4.2, segue que

$$d_2 \succ d_1.$$

Logo, de (II) segue que

$$d_2(x,y) \leq \beta\, d_1(x,y)\,, \quad \text{para cada} \quad x,y \in M\,.$$

Logo, da Proposição 3.4.2, segue que

$$d_1 \succ d_2\,,$$

portanto $d_1 \sim d_2$, como queríamos demonstrar.

□

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 3.4.3 *Seja $\underline{d}$ uma métrica em $\underline{M}$.*
Consideremos as aplicações $d_1\,,d_2 : M \times M \to \mathbb{R}$, dadas por

$$d_1(x,y) \doteq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \tag{3.160}$$

e

$$d_2(x,y) \doteq \min\{1\,,d(x,y)\}\,, \quad \textit{para cada} \quad x,y \in M\,. \tag{3.161}$$

Logo, da Proposição
Mostre que $\underline{d_1}$ e $\underline{d_2}$ são métricas em $\underline{M}$ e, além disso

$$d_1 \sim d \sim d_2\,.$$

Resolução:
Deixaremos a verificação que $\underline{d_1}$ e $\underline{d_2}$ são métricas em $\underline{M}$ como exercício para o leitor.
Observemos que, para cada $x\,,y \in M$, teremso:

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &\overset{(3.160)}{=} \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \\ &\leq d(x,y) \\ \text{e} \\ d_2(x,y) &\overset{(3.161)}{=} \min\{1\,,d(x,y)\} \\ &\leq d(x,y)\,. \end{aligned}$$

Logo, da Proposição 3.4.2, segue que

$$d \succ d_1 \quad \text{e} \quad d \succ d_2\,. \tag{3.162}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, consideremos

$$\delta_1 \doteq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0 \qquad \text{e} \qquad \delta_2 \doteq \min\{1\,,\varepsilon\} > 0\,. \tag{3.163}$$

Notemos que, para $x \in B_{d_1}(a\,;\,\delta_1)$, temos que

$$d_1(x\,,a) < \delta_1\,. \tag{3.164}$$

Assim, segue que $x \in M$ satisfaz

$$\begin{aligned}
& d_1(x\,,a) < \delta_1\,,\\
\text{por (3.163) e (3.160), é equivalente à:}\quad & \frac{d(x\,,a)}{1+d(x\,,a)} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\\
\text{ou ainda,}\quad & d(x\,,a)\,[1+\varepsilon] < \varepsilon\,[1+d(x\,,a)]\\
\text{ou, equivalentemente:}\quad & d(x\,,a) < \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

ou seja, teremos:

$$B_{d_1}(a\,;\,\delta_1) \subseteq B_d(a\,;\,\varepsilon),$$

mostrando que

$$d_1 \succ d\,.$$

De modo semelhante, se $x \in M$ satisfaz

$$d_2(x\,,a) < \delta_2 \overset{(3.161)}{\leq} 1\,, \tag{3.165}$$

teremos, em particular, que

$$d_2(x\,,a) < 1\,, \tag{3.166}$$

e assim segue que

$$\begin{aligned}
d(x\,,a) &\overset{(3.166)}{=} d_2(x\,,a)\\
&< \delta_2\\
&\overset{(3.163)}{=} \min\{1\,,\varepsilon\}\\
&\leq \varepsilon\,,
\end{aligned} \tag{3.167}$$

que implicará que

$$d(x\,,a) < \varepsilon\,,$$

ou seja

$$B_{d_2}(a\,;\,\delta_2) \subseteq B_d(a\,;\,\varepsilon),$$

mostrando que

$$d_2 \succ d\,.$$

Com isto teremos que

$$d_1 \sim d \sim d_2\,,$$

como queríamos mostrar.

□

Observação 3.4.5

1. *Observemos que as métricas* $\underline{d_1}$ *e* $\underline{d_2}$, *exibidas no Exemplo 3.4.3, são limitadas em* $M \times M$.

   De fato, pois para todo $x, y \in M$, *teremos:*

$$d_1(x,y) \overset{(3.160)}{=} \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \overset{d(x,y)\leq 1+d(x,y)}{\leq} 1$$

e

$$d_2(x,y) \overset{(3.161)}{=} \min\{1, d(x,y)\} \leq 1\,.$$

   Conclusão: *toda métrica em* $\underline{M}$ *é equivalente a uma métrica limitada em* $\underline{M}$.

2. *Ainda com relação ao Exemplo 3.4.3, observemos que se a métrica* $\underline{d}$ *é* **não** *limitada em* $\underline{M}$, *então* **não existe** $\beta_j \geq 0$, *tal que*

$$d(x,y) \leq \beta_j\, d_j(x,y)\,, \quad \textit{para cada} \quad x, y \in M \quad \textit{e cada} \quad j \in \{1, 2\}\,. \tag{3.168}$$

   De fato, se existisse $\beta_1 \geq 0$ *com a propriedade (3.168), no caso* $j = 1$, *para* $x, y \in M$, *com* $x \neq y$, *deveríamos ter:*

$$d(x,y) \leq \beta_1\, d_1(x,y)$$

de (3.160), é o mesmo que: $$d(x,y) \leq \beta_1 \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\,,$$

ou ainda, $$d(x,y)\,[1+d(x,y)] \leq \beta_1\, d(x,y)$$

se $x \neq y$, *temos que* $d(x,y) \neq 0$, *ou seja:* $$d(x,y) \leq \beta_1 - 1\,, \tag{3.169}$$

   portanto, a métrica $\underline{d}$ *deveria ser limitada, o que é um absurdo.*

   se existisse $\beta_2 \geq 0$ *com a propriedade (3.168), no caso* $j = 2$, *para* $x, y \in M$, *com* $x \neq y$, *deveríamos ter:*

$$d(x,y) \leq \beta_2\, d_2(x,y)$$

de (3.161), é o mesmo que: $$\beta_2 \underbrace{\min\{1, d(x,y)\}}_{\leq 1}$$

em particular, deveríamos ter: $$d(x,y) \leq \beta_2\,, \tag{3.170}$$

   portanto, a métrica $\underline{d}$ *deveria ser limitada, o que também é um absurdo.*

   Logo podemos concluir da situação descrita acima que a condição (3.159), dada pelo Corolário 3.4.1 é suficiente, mas **não** *é necessária, para que duas métricas sejam equivalentes em* $\underline{M}$.

Temos também a:

Proposição 3.4.5 *Sejam* $(M\,,d_M)$, $(N\,,d_N)$ *espaços métricos e* $f : M \to N$ *uma função bijetora.*

Então a função $\underline{f}$ *é um homeomorfismo de* $(M\,,d_M)$ *em* $(N\,,d_N)$ *se, e somente se, a métrica* $\underline{d_M}$ *é equivalente à métrica* $\underline{d_f}$ *em* $\underline{M}$*, induzida pela aplicação* $\underline{f}$*.*

Demonstração:

Notemos que a função $f : (M\,,d_f) \to (N\,,d_N)$ é uma isometria de $(M\,,d_f)$ em $(N\,,d_N)$, pois

$$d_1(x\,,y) \doteq d_N(f(x)\,,f(y))\,, \quad \text{para cada} \quad x\,,y \in M\,,$$

em particular, será um homeomorfismo de $(M\,,d_f)$ em $(N\,,d_N)$.

Portanto a função inversa

$$f^{-1} : (N\,,d_N) \to (M\,,d_f)$$

será contínua em $(N\,,d_N)$.

Consideremos as aplicações identidades

$$i_{fM} : (M\,,d_f) \to (M\,,d_M) \quad \text{e} \quad i_{Mf} : (M\,,d_M) \to (M\,,d_f)\,. \tag{3.171}$$

Notemos que

$$i_{Mf} = f^{-1} \circ f \quad \text{e} \quad i_{fM} = f^{-1} \circ f\,,$$

segundo o digrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
(M\,,d_M) \arrow[rr, shift right, "f"'] \arrow[d, shift right, "i_{Mf}"'] & & (N\,,d_N) \arrow[ll, shift right, "f^{-1}"'] \arrow[dll, shift right, "f^{-1}"'] \\
(M\,,d_f) \arrow[u, shift right, "i_{fM}"'] \arrow[urr, shift right, "f \text{ é isometria}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Portanto $d_f \succ d_M$, isto é, a aplicação i_{fM} é contínua de $(M\,,d_f)$ em $(M\,,d_M)$ se, e somente se, a função $f^{-1} : (N\,,d_N) \to (M\,,d_M)$ for contínua em $(N\,,d_N)$.

Por outro lado, $d_M \succ d_f$, isto é, a aplicação i_{Mf} é contínua de $(M\,,d_M)$ em $(M\,,d_f)$ se, e somente se, $f : (M\,,d_M) \to (N\,,d_N)$ for contínua em $(M\,,d_M)$.

Logo, das duas considerações acima, temos que

$$d_1 \sim d_M \quad \text{se, e somente se,} \quad \text{a função } \underline{f} \text{ é um homeomorfismo de } (M\,,d_M) \text{ em } (N\,,d_N)\,,$$

completando a demonstração.

$\square$

Observação 3.4.6 *Notemos que, da Proposição 3.4.5 acima segue que, no Exemplo 3.4.1, a métrica* $d_{[0,2\pi)}$*, induzida em* $[0\,,2\pi)$ *pela métrica usual de* $\mathbb{R}$ *(ou seja, dada por* (2.13)*, com* $n=1$*) e a métrica induzida em* $[0\,,2\pi)$ *pela função contínua e bijetora* $f:[0\,,2\pi)\to S^1$ *(dada por) **não** são equivalentes.*

De fato, pois como vimos no Exemplo 3.3.3, a função $\underline{f}$ ***não*** *é homeomorfismo de* $\left([0\,,2\pi)\,,d_{[0,2\pi)}\right)$ *em* $(S_1\,,d_{S^1})$*.*

Para finalizar a seção temos a:

Proposição 3.4.6 *Sejam* $\underline{d_1}$ *e* $\underline{d_2}$ *duas métricas em* $\underline{M}$*,* $(N\,,d_N)$ *e* $(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$ *espaços métricos, onde* $d_{\mathbb{R}}$ *é métrica usual (ou seja, dada por* (2.13)*, com* $n=1$*).*

As seguinte aformações são equivalentes:

1. $d_1 \sim d_2$;

2. *a aplicação* $f:(M\,,d_1)\to(N\,,d_N)$ *é contínua em* $(M\,,d_1)$ *se, e somente se,* $f:(M\,,d_2)\to(N\,,d_N)$ *é contínua em* $(M\,,d_2)$*;*

3. *a aplicação* $f:(M\,,d_1)\to(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$ *é contínua em* $(M\,,d_1)$ *se, e somente se,* $f:(M\,,d_2)\to(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$ *é contínua em* $(M\,,d_2)$*;*

4. *Para cada* $a\in M$*, as funções* $d_{1\,a}:(M,d_2)\to(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$ *e* $d_{2\,a}:(M,d_1)\to(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$*, dadas por*

$$d_{1\,a}(x)\doteq d_1(a\,,x) \quad e \quad d_{2\,a}(x)\doteq d_2(a\,,x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x\in M \tag{3.172}$$

   são contínuas no ponto $\underline{a}$*;*

5. *Toda bola aberta, segundo a métrica* $\underline{d_1}$*, contém uma bola aberta, de mesmo centro, segundo a métrica* $\underline{d_2}$ *e toda bola aberta, segundo a métrica* $\underline{d_2}$*, contém uma bola aberta, de mesmo centro, segundo a métrica* $\underline{d_1}$*;*

6. *As funções* $d_1:(M\times M\,,D_2)\to(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$ *e* $d_2:(M\times M\,,D_1)\to(\mathbb{R}\,,d_{\mathbb{R}})$ *são contínuas em* $(M\times M\,,D_1)$ *e* $(M\times M\,,D_2)$*, respectivamente, onde as métricas* $\underline{D_1}$ *e* $\underline{D_2}$ *podem ser uma das três métricas usuais de* $M\times M$*, relativamente a* $\underline{d_1}$ *e* $\underline{d_2}$*, respectivamente.*

Demonstração:

É, essencialmente, conseqüência da Proposição 3.4.3.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

$\square$

3.5 Transformações lineares e multilineares definidas em espaços vetoriais normados

Começaremos pela:

Definição 3.5.1 *Sejam* $(E, +_E, \cdot_E)$ *e* $(F, +_F, \cdot_F)$ *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$.

Diremos que uma aplicação $f : E \to F$ *é uma* **transformação linear de** $(E, +_E, \cdot_E)$ **em** $(F, +_F, \cdot_F)$, *se ela satisfaz as seguintes propriedades:*

$$f(\vec{x} +_E \vec{y}) = f(\vec{x}) +_F f(\vec{y}), \tag{3.173}$$

$$f(\lambda \cdot_E \vec{x}) = \lambda \cdot_F f(\vec{x}), \tag{3.174}$$

para todo $\vec{x}, \vec{y} \in E$ *e* $\lambda \in R$.

Se na situação acima, se $F = E$, *isto é,* $f : E \to E$, *então a aplicação* $\underline{f}$ *será dita* **operador linear em** $(E, +_E, \cdot_E)$.

Se na situação acima, $F = \mathbb{R}$ *(onde em* $\mathbb{R}$ *estamos considerando as operações usuais de soma e multiplicação de números reais), a saber,* $f : E \to \mathbb{R}$, *então a aplicação* $\underline{f}$ *será dita* **funcional linear em** $(E, +_E, \cdot_E)$.

Observação 3.5.1

1. *Vale observar que a adição do lado esquerdo de (3.173), ou seja,* $+_E$, *é adição de vetores do espaço vetorial real* $(E, +_E, \cdot_E)$, *e a adição do lado direito de (3.173), ou seha,* $+_F$, *é adição é adição de vetores do espaço vetorial real* $(F, +_F, \cdot_F)$.

   Além disso, a multiplicação por número real do lado esquerdo de (3.173), ou seja, $\cdot_E$, *é a multiplicação de vetores por número real em do espaço vetorial real* $(E, +_E, \cdot_E)$, *e a multiplicação por número real do lado direito de (3.173), ou seja,* $\cdot_F$, *é a multiplicação de vetores por número real do espaço vetorial real* $(F, +_F, \cdot_F)$.

2. *Como conseqüência de (3.173) e (3.174) temos que*

$$f(\lambda_1 \cdot_E \vec{x}_1 +_E \cdots +_E \lambda_n \cdot_E \vec{x}_n) = \lambda_1 \cdot_F f(\vec{x}_1) +_F \cdots +_F \lambda_n \cdot_F f(\vec{x}_n), \tag{3.175}$$

   para $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \in E$ *e* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

   A demonstração deste fato é simples e foi vista na disciplina Álgebra Linear.

3. *Nosso objetivo nesta seção é estudar a continuidade de transformações lineares entre espaços vetoriais reais normados.*

Com isto temos o:

Teorema 3.5.1 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$*, denotam as operações usuais de soma de* n*-uplas e multiplicação de número real por* n*-upla, respectivamente), munido da norma* $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$*, como sendo uma das três normas usuais, introduzidas no Exemplo 2.1.7 (dadas por (2.80), (2.81) e (2.82)) e o espaço vetorial* $(F, +_F, \cdot_F)$ *munido da norma* $\|\cdot\|_F$*.*

Se a função $f : \mathbb{R}^n \to F$ *é uma transformação linear, então a função* $\underline{f}$ *é contínua em* $\left(\mathbb{R}^n, d_{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}}\right)$*.*

Demonstração:

Para tando, consideremos

$$\mathcal{B} \doteq \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

a base canônica do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, ou seja,

$$\vec{e}_k \doteq (0, 0 \cdots, 0, \underbrace{1}_{k\text{−ésima posição}}, 0, \cdots, 0). \tag{3.176}$$

Logo para $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{e}_n, \tag{3.177}$$

para $x_i \in \mathbb{R}$, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Como a função $\underline{f}$ é uma trasformação linear, do item 2. da Observação 3.5.1, temos que

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &\overset{(3.177)}{=} f(x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{e}_n) \\ &\overset{(3.175)}{=} x_1 \cdot_F f(\vec{e}_1) +_F x_2 \cdot_F f(\vec{e}_2) +_F \cdots +_F x_n \cdot_F f(\vec{e}_n). \end{aligned} \tag{3.178}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x})\|_F &\overset{(3.178)}{=} \|x_1 \cdot_F f(\vec{e}_1) +_F x_2 \cdot_F f(\vec{e}_2) +_F \cdots +_F x_n \cdot_F f(\vec{e}_n)\|_F \\ &\overset{(2.75)}{\leq} \|x_1 \cdot_F f(\vec{e}_1)\|_F + \|x_2 \cdot_F f(\vec{e}_2)\|_F + \cdots + \|x_n \cdot_F f(\vec{e}_n)\|_F \\ &\overset{(2.74)}{\leq} |x_1|\,\|f(\vec{e}_1)\|_F + |x_2|\,\|f(\vec{e}_2)\|_F + \cdots + |x_n|\,\|f(\vec{e}_n)\|_F. \end{aligned} \tag{3.179}$$

Consideremos

$$c \doteq \max\{\|f(\vec{e}_1)\|_F, \|f(\vec{e}_2)\|_F, \cdots, \|f(\vec{e}_n)\|_F\}. \tag{3.180}$$

Logo, (3.179), segue que

$$\|f(\vec{x})\|_F \leq c\,(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|). \tag{3.181}$$

Consideremos a norma em $\mathbb{R}^n$ da soma, isto é,

$$\|\vec{x}\|_{\mathbb{R}^n} = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

onde $\vec{x} \doteq (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Então, de (3.181), teremos que

$$\|f(\vec{x})\|_F \leq c\,\|\vec{x}\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{para cada} \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.182}$$

Como a função $\underline{f}$ é uma transformação linear de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ em $(F, +_F, \cdot_F)$, temos que

$$\begin{aligned}\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\|_F &\overset{f \text{ é linear}}{=} \|f(\vec{x} - \vec{y})\|_F \\ &\overset{(3.182)}{\leq} c\,\|\vec{x} - \vec{y}\|_{\mathbb{R}^n} pc \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

mostrando que a aplicação $\underline{f}$ é lipschitiziana de $\left(\mathbb{R}^n, d_{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}}\right)$ em $\left(F, d_{\|\cdot\|_F}\right)$ e assim, da Proposição 3.1.1, temos que será uma função contínua em $\left(\mathbb{R}^n, d_{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}}\right)$.

Notemos que, como as métricas $\underline{d}$, $\underline{d_1}$ e $\underline{d_2}$ (que provém das três normas usuais) são equivalentes, do item 5. da Observação 3.4.3, segue que a transformação linear $f : \mathbb{R}^n \to F$ será contínua em relação a qualquer uma das três métricas usuais que considerarmos em $\mathbb{R}^n$, completando a demonstração.

□

Observação 3.5.2 *O resultado acima nos diz que uma transformação linear definida em espaço vetorial normado de* **dimensão finita** *e tomando valores em outro espaço vetorial normado é sempre contínua.*

Isto segue do fato que todo espaço vetorial de dimensão finita é isomorfo a $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, *para algum* $n \in \mathbb{N}$, *visot na dissiplina de Álgebra Linear.*

O mesmo **não** *é verdade se a dimensão do espaço vetorial do domínio* **não** *for finita, como mostra o seguinte exemplo.*

Exemplo 3.5.1 *Seja* $\underline{E}$, *o conjunto formado por todos os polinômios a valores reais, de uma variável real, munido dadas operações usuais de adição de funções e multiplicação de número real por funções.*

No curso de Álgebra Linear mostra-se que $(E, +, \cdot)$, *munido das operações acima, é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *(na verdade é um subespaço vetorial das funções reais contínuas de uma variável real).*

No espaço vetorial real $(E, +, \cdot)$ *podemos considerar a função* $\|\cdot\|_E : E \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$\|p\|_E \doteq \sup_{x \in [0,1]} |p(x)|. \tag{3.183}$$

Afirmamos que $\|\cdot\|_E$ *é uma norma no espaço vetorial real* $(E, +, \cdot)$.

Resolução:

De fato, $p, q \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, teremos:

1.
$$\|p\|_E \overset{(3.183)}{=} \sup_{x\in[0,1]} |p(x)| \geq 0$$

e
$$\|p\|_E = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad \sup_{x\in[0,1]} |p(x)| = 0\,,$$

implicando que
$$|p(x)| = 0\,, \quad \text{para cada} \quad para x \in [0\,,1]\,,$$

que é equivalente a dizer que
$$p(x) = 0\,, \quad \text{para todo} \quad x \in [0\,,1]\,. \tag{3.184}$$

Logo, se
$$p(x) = a_o + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{3.185}$$

de (3.184) segue que:
$$\begin{aligned}
0 &\overset{(3.184)}{=} p(0) \overset{(3.185)}{=} a_o\,,\\
0 &\overset{(3.184)}{=} p\,'(0) \overset{(3.185)}{=} a_1\,,\\
0 &\overset{(3.184)}{=} p\,''(0) \overset{(3.185)}{=} 2\,a_2\,,\\
&\vdots\,,\\
0 &\overset{(3.184)}{=} p^{(n)}(0) \overset{(3.185)}{=} n!\,a_n\,,
\end{aligned}$$

segue que
$$a_k = 0\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \{0\,,1\,,\cdots\,,n\}\,,$$

mostrando, por (3.185), que
$$p(x) = 0\,, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja,
$$p = O\,,$$

mostrando que $\|\cdot\|_E$ satisfaz a 1. da Definição 2.1.7.

2. Temos também:
$$\begin{aligned}
\|\alpha \cdot p\|_E &\overset{(3.183)}{=} \sup_{x\in[0,1]} |\alpha\,p(x)|\\
&\overset{\text{item 2. da Proposição 2.1.3}}{=} |\alpha| \sup_{x\in[0,1]} |p(x)|\\
&\overset{(3.183)}{=} |\alpha|\,\|p\|_E\,,
\end{aligned}$$

mostrando que $\|\cdot\|_E$ satisfaz a 2. da Definição 2.1.7.

3. PAra finalizar, notemos que:

$$\begin{aligned}
\|p+q\|_{E} &\overset{(3.183)}{=} \sup_{x\in[0,1]} |p(x)+q(x)| \\
&\overset{|p(x)+q(x)|\leq|p(x)|+|q(x)|}{\leq} \sup_{x\in[0,1]} [|p(x)|+|q(x)|] \\
&\overset{\text{item 1. da Proposição 2.1.3}}{\leq} \sup_{x\in[0,1]} |p(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |q(x)| \\
&\overset{(3.183)}{=} \|p\|_{E} + \|q\|_{E} \,,
\end{aligned}$$

mostrando que $\|\cdot\|_{E}$ satisfaz a 3. da Definição 2.1.7. ou seja, $\|\cdot\|_{E}$ é uma norma no espaço vetorial real $(E,+,\cdot)$.

□

Observação 3.5.3 *Na situação do Exemplo 3.5.1 acima, se considerarmos a função* $f: E \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(p) \doteq p(2)\,, \quad \textit{para cada} \quad p \in E\,, \tag{3.186}$$

segue que a função f é um funcional linear em $(E,+,\cdot)$.

De fato se $p, q \in E$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *teremos:*

$$\begin{aligned}
f(\alpha\cdot p+q) &\overset{(3.186)}{=} (\alpha\cdot p+q)(2) \\
&= (\alpha\cdot p)(2)+q(2) \\
&= \alpha\, p(2)+q(2) \\
&\overset{(3.186)}{=} \alpha\, f(p)+f(q)\,,
\end{aligned}$$

mostrando que a $f: E \to \mathbb{R}$ *é um funcional linear em* $(E,+,\cdot)$.

Afirmamos que o funcional linear f não é contínua em $O \in E$ *(onde O denota o polinômio nulo).*

De fato, seja

$$\varepsilon = \frac{1}{2} > 0\,,$$

e para cada $n \in \mathbb{N}$, *consideramos o polinômio*

$$p_n(x) \doteq \left(\frac{x}{2}\right)^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.187}$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ *temos que*

$$p_n \in E$$

e, além disso,

$$\begin{aligned}
d_{\|\cdot\|_E}(p_n\,,O) &\overset{(2.191)}{=} \|p_n - O\|_E \\
&\overset{(3.183)}{=} \sup_{x\in[0,1]} |p_n(x) - O(x)| \\
&= \sup_{x\in[0,1]} |p_n(x)| \\
&\overset{\text{a função } p_n \text{ é crescente}}{=} p_n(1) \\
&\overset{(3.187)}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Logo

$$p_n \to 0\,, \quad \text{em} \quad \left(E\,, d_{\|\cdot\|_E}\right)\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.$$

Porém, notemos que,

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{R}}[f(p_n)\,,f(O)] &\overset{(2.191)}{=} |f(p_n) - f(O)| \\
&\overset{(3.187)}{=} |p_n(2) - \underbrace{O(2)}_{=0}| \\
&= |p_n(2)| \\
&\overset{(3.187)}{=} \left(\frac{2}{2}\right)^n \\
&= 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

mostrando que o funcional linear $\underline{f}$ **não** *é contínuo em* $\left(E\,, d_{\|\cdot\|_E}\right)$.

Em geral temos o seguinte resultado importante:

Teorema 3.5.2 *Sejam* $(E\,,\|\cdot\|_E)$ *e* $(F\,,\|\cdot\|_F)$ *espaços vetoriais reias normados e* $f : E \to F$ *uma transformação linear.*

As seguintes afirmações são equivalentes:

1. *a função* $\underline{f}$ *é contínua em* $\left(E\,, d_{\|\cdot\|_E}\right)$;
2. *a função* $\underline{f}$ *é contínua em* $\vec{O} \in E$;
3. *podemos encontrar* $c > 0$, *tal que*
$$\|f(\vec{x})\|_F \leq c\,\|\vec{x}\|_E\,, \quad \text{para} \quad \vec{x} \in E\,; \tag{3.188}$$
4. *podemos encontrar* $c > 0$, *tal que*
$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\|_F \leq c\,\|\vec{x} - \vec{y}\|_E\,, \quad \text{para} \quad \vec{x}\,,\vec{y} \in E\,. \tag{3.189}$$

Demonstração:

O diagrama abaixo ilustra como será feita a demonstração:

$$\begin{tikzcd} 1. \arrow[r] & 2. \arrow[d] \\ 4. \arrow[u] & 3. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Notem os que, a implicação 1. $\Rightarrow$ 2. é trivial.

Mostremos que

2. $\Rightarrow$ 3.:

ou seja, mostremos que se 2. ocorrer, isto é, se a função $\underline{f}$ é contínua em $\vec{O} \in E$, então 3. ocorrerá, isto é, podemos encontrar $c > 0$, tal que (3.188) vai ocorrer.

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $\vec{O} \in E$ e

$$f(\vec{O}) = \vec{O}\,,$$

pois a função f é uma transformação linear de $(E\,, +_{_E}\,, \cdot_{_E})$ em $(F\,, +_{_F}\,, \cdot_{_F})$, dado $\varepsilon = 1 > 0$, poderemos encontrar $\delta > 0$, de modo que, se

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\| &= \left\|\vec{x} - \vec{O}\right\|_{_E} \\ &= d_{\|\cdot\|_E}(\vec{x}\,, \vec{O}) \\ &< \delta\,, \end{aligned} \tag{3.190}$$

deveremos ter:

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x})\|_{_F} &= \left\| f(\vec{x}) - \underbrace{f(\vec{O})}_{=\vec{O}} \right\|_{_F} \\ &= d_{\|\cdot\|_F}\left(f(\vec{x})\,, f\left(\vec{O}\right)\right) \\ &< \varepsilon = 1\,. \end{aligned} \tag{3.191}$$

Consideremos $c \in \mathbb{R}$, de modo que

$$c > \frac{1}{\delta}\,. \tag{3.192}$$

Com isto, para $\vec{x} = \vec{O}$, teremos

$$\begin{aligned}
\|f(\vec{x})\|_F &= \left\|f(\vec{O})\right\|_F \\
&\overset{f(\vec{O})=\vec{O}}{=} \left\|\vec{O}\right\|_F \\
&= 0 \\
&= c \cdot 0 \\
&= c \left\|\vec{O}\right\|_E \\
&= c \|\vec{x}\|_E \,,
\end{aligned}$$

mostrando que (3.188) ocorrerá, se $\vec{x} = \vec{O}$.

Por outro lado, para $\vec{x} \neq \vec{O}$, consideremos que o vetor

$$\frac{1}{c \|\vec{x}\|_E} \cdot_E \vec{x} \in E \,. \tag{3.193}$$

Observemos que este vetor satisfaz a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{c \|\vec{x}\|_E} \cdot_E \vec{x}\right\|_E &\overset{(2.74)}{=} \frac{1}{c \|\vec{x}\|_E} \|\vec{x}\|_E \\
&= \frac{1}{c} \overset{(3.192)}{<} \delta \,.
\end{aligned} \tag{3.194}$$

Logo, de (3.193), (3.190) e (3.191), segue que

$$\left\|f\left(\frac{1}{c \|\vec{x}\|_E} \cdot_E \vec{x}\right)\right\|_F \leq 1 \,. \tag{3.195}$$

Como a função $\underline{f}$ é uma trasformação linear temos que

$$f\left(\frac{1}{c \|\vec{x}\|_E} \cdot_E \vec{x}\right) = \frac{1}{c \|\vec{x}\|_E} \cdot_F f(\vec{x}) \,. \tag{3.196}$$

Logo, de (3.196) e (3.195), teremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c \|\vec{x}\|_E} \|f(\vec{x})\|_F &\overset{(3.196)}{=} \left\|\frac{1}{c \|\vec{x}\|_E} \cdot_F f(\vec{x})\right\|_F \\
&\overset{(3.196)}{\leq} 1 \,,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\|f(\vec{x})\|_F \leq c \|\vec{x}\|_E \,,$$

mostrando, se $\vec{x} \neq \vec{O}$, (3.188) também ocorrerá, ou seja, 3. vai ocorrer.

Mostremos agora que

3. $\Rightarrow$ 4. :

ou seja, mostremos que se 3. ocorrer, isto é, se podemos encontrar $c > 0$, tal que (3.188) ocorre, então 4. ocorrerá, isto é, podemos encontrar $c > 0$, tal que (3.189) ocorrerá.

Suponhamos que exista $c > 0$ tal que

$$\|f(\vec{x})\|_{_F} \leq c\,\|\vec{x}\|_{_E}\,, \quad \text{para} \quad \vec{x} \in E\,. \tag{3.197}$$

Observemos que, para $\vec{x}\,,\vec{y} \in E$, teremos

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\|_{_F} &\overset{f \text{ é transformação linear}}{=} \|f(\vec{x} - \vec{y})\|_{_F} \\ &\overset{(3.197)}{\leq} c\,\|\vec{x} - \vec{y}\|_{_F}\,, \end{aligned}$$

ou seja, (3.189) ocorrerá, ou ainda, 4. vai ocorrer..

A implicação

$4 \Rightarrow 1.$)

é imediata, pois (3.189) garante que a função $\underline{f}$ é lischitiziana em $\left(E\,, d_{\|\cdot\|_E}\right)$, logo será uma função contínua em $\left(E\,, d_{\|\cdot\|_E}\right)$, completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o:

Corolário 3.5.1 *Sejam* $(E\,, \|\cdot\|_{_E})$ *e* $(F\,, \|\cdot\|_{_F})$ *espaços vetoriais reais normados e* $f : E \to F$ *uma transformação linear bijetora.*

Então, a função $\underline{f}$ *é um homeomorfismo de* $(E\,, \|\cdot\|_{_E})$ *em* $(F\,, \|\cdot\|_{_F})$ *se, e somente se, podemos encontrar* $c\,, C > 0$, *tais que*

$$C\,\|\vec{x}\|_{_E} \overset{\boxed{I}}{\leq} \|f(\vec{x})\|_{_F} \overset{\boxed{II}}{\leq} c\,\|\vec{x}\|_{_E}\,, \quad \textit{para cada} \quad \vec{x} \in E\,. \tag{3.198}$$

Demonstração:

Afirmamo que se $f : E \to F$ é uma transformação linear bijetora então sua função inversa $f^{-1} : F \to E$ também será uma transformação linear (e bijetora).

De fato, pois se $\vec{y}_1\,, \vec{y}_2 \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, do fato que a função $\underline{f}$ é bijetora, existirão $x_1\,, x_2 \in E$, tais que

$$\vec{y}_1 = f(\vec{x}_1) \quad \text{e} \quad \vec{y}_2 = f(\vec{x}_2)\,. \tag{3.199}$$

ou seja,

$$\vec{x}_1 = f^{-1}(\vec{y}_1) \quad \text{e} \quad \vec{x}_2 = f^{-1}(\vec{y}_2)\,. \tag{3.200}$$

Logo

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\vec{y}_1 +_{_F} \alpha \cdot_{_F} \vec{y}_2\right) &\overset{(3.199)}{=} f^{-1}\left(f(\vec{x}_1) +_{_F} \alpha \cdot_{_F} f(\vec{x}_2)\right) \\ &\overset{\underline{f} \text{ é transformação linear}}{=} f\left(f(\vec{x}_1 +_{_E} \alpha \cdot_{_E} \vec{x}_2)\right) \\ &\overset{f^{-1} \circ f = id}{=} \vec{x}_1 +_{_E} \alpha \cdot_{_E} \vec{x}_2 \\ &\overset{(3.200)}{=} f^{-1}(\vec{y}_1) +_{_E} \alpha \cdot_{_E} f^{-1}(\vec{y}_2)\,, \end{aligned} \tag{3.201}$$

mostrando que a função $f^{-1} : F \to E$ transformação linear do espaço vetorial real $(E, +_{E}, \cdot_{E})$ no espaço vetorial real $(F, +_{F}, \cdot_{F})$.

Notemos que, com vale $\boxed{II}$ em (3.200), de 3. $\Rightarrow$ 1., do Teorema 3.5.2 acima, segue que a transformação linear $\underline{f}$ será contínua em $\left(E, d_{\|\cdot\|_E}\right)$.

Por outro lado se $\vec{y} \in F$, como a função $\underline{f}$ é bijetora, podemos encontra $\vec{x} \in E$, de modo que $\vec{y} = f(\vec{x})$, ou seja,

$$\vec{x} = f^{-1}(\vec{y}) . \tag{3.202}$$

Logo, de $\boxed{II}$, considerando-se $\vec{x} = f^{-1}(\vec{y})$, segue que

$$\begin{aligned} C \left\|f^{-1}(\vec{y})\right\|_{E} &\leq \|f[f^{-1}(\vec{y})]\|_{F} \\ &\overset{f^{-1} o f = id}{=} \|\vec{y}\|_{F} \quad \text{para} \quad \vec{y} \in F, \end{aligned}$$

ou seja,
$$\|f^{-1}(\vec{y})\|_{E} \leq \frac{1}{c}\|\vec{y}\|_{F}, \quad \text{para} \quad \vec{y} \in F .$$

Logo, de 3. $\Rightarrow$ 1., do Teorema 3.5.2 acima, segue que a função $\underline{f^{-1}}$ será contínua em $\left(F, d_{\|\cdot\|_F}\right)$, ou seja, a transformação linear $F : E \to F$ será um homeomorfismo de $\left(E, d_{\|\cdot\|_E}\right)$ em $\left(F, d_{\|\cdot\|_F}\right)$, como queríamos mostrar.

$\square$

A seguir exibiremos um exemplo de uma transformação linear bijetora que **<u>não</u>** é um homeomorfismo, mais precisamente, ela será uma função contínua mans a sua transformação linear inversa **<u>não</u>** será contínua.

Exemplo 3.5.2 *Denotemos por $\mathbb{R}^\infty$, o conjunto formado por todas as seqüências de números reais que têm a seguinte propriedade: $\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty$ se, e somente se, no máximo, um número finito de entradas $\underline{x_n}$ é não nula, isto é,*

$$\begin{aligned} & \vec{x} \in \mathbb{R}^\infty \\ \textit{se, e somente, se} \quad & \vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ \textit{com } x_n \neq 0, \\ & \textit{somente para } n \in \{n_1, n_2, \cdots, n_m\} \subseteq \mathbb{N} . \end{aligned} \tag{3.203}$$

1. *Mostre que $(\mathbb{R}^\infty, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, onde a operação $+$ é a operção de adição usual de seqüências e a operação $\cdot$ é a multiplicação usual de número real por uma sequência.*

2. *consideremos a aplicação $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_\infty &\doteq \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 + \cdots} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2}, \end{aligned} \tag{3.204}$$

onde

$$\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty .$$

Mostre que $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^\infty, +, \cdot)$.

3. *consideremos a aplicação* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\infty : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\begin{aligned}\langle \vec{x}\,,\vec{y}\rangle_\infty &\doteq x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n + \cdots \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot y_j\,, \end{aligned} \tag{3.205}$$

onde

$$\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \vec{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty\,.$$

Mostre que $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\infty$ *é um produto interno no espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^\infty\,, +\,, \cdot)$ *e que a norma* $\|\cdot\|_\infty$ *provém do produto interno* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\infty$.

4. *consideremos a função* $f : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, *dada por*

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \\ &= f(x_1\,, x_2\,, \cdots, x_n\,, \cdots) \\ &\doteq \left(\frac{x_1}{1}\,, \frac{x_2}{2}\,, \cdots, \frac{x_n}{n}\,, \cdots\right)\,, \end{aligned} \tag{3.206}$$

para cada $\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty$.

Mostre que a função $f : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ *é um operador linear no espaço vetorial* $(\mathbb{R}^\infty\,, +\,, \cdot)$ *que é contínuo em* $\left(\mathbb{R}^\infty\,, d_{\|\cdot\|_\infty}\right)$, *mas a sua transformação linear inversa* $f^{-1} : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ **não** *será uma função contínua em* $\left(\mathbb{R}^\infty\,, d_{\|\cdot\|_\infty}\right)$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitos mostrar que com as operações $+$ e $\cdot$ o conjunto $\mathbb{R}^\infty$, tornar-se-á um espaço vetorial real (basta mostrar que a adição de duas sequências de $\mathbb{R}^\infty$ é uma sequência pertencente à $\mathbb{R}^\infty$ e a multiplicação de um número real por uma sequência de $\mathbb{R}^\infty$ é uma sequência pertencente à $\mathbb{R}^\infty$).

Observemos que, para

$$\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \vec{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty\,,$$

de (3.203), segue que as séries numéricas que em (3.204) e (3.205), reduzem-se a somas finitas (pois as seqüências numéricas envolvidas são nulas, exceto para um número finito de termos).

Deste modo as aplições $\|\cdot\|_\infty$ e $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ estão bem definidas.

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que as funções $\|\cdot\|_\infty$ e $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ são uam norma e um produto interno no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^\infty\,, +\,, \cdot)$.

É fácil mostrar que a aplicação $f : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, dada por (3.206), é um operador linear em $(\mathbb{R}^\infty\,, +\,, \cdot)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Para cada $\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty$, temos que:

$$\begin{aligned}
\|f(\vec{x})\|_\infty{}^2 &= \|f((x_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_\infty{}^2 \\
&\overset{(3.206)\text{ e }(3.204)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{x_j}{j}\right|^2 \\
&\overset{|\frac{x_j}{j}|\leq|x_j|}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \\
&\overset{(3.204)}{=} \|\vec{x}\|_\infty{}^2, ,
\end{aligned}$$

ou seja, $$\|f(\vec{x})\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_\infty ,$$

Logo, de 3.$\Rightarrow$ 1., do Teorema (3.5.2), segue que o operador linera f é contínuo em $\left(\mathbb{R}^\infty, d_{\|\cdot\|_\infty}\right)$.

Observemos que a função f admite função inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, que é dada por

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\vec{y}) &= f^{-1}\left((y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \\
& f^{-1}(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots) \\
&\doteq (y_1, 2\,y_2, \cdots, n\,y_n, \cdots),
\end{aligned} \tag{3.207}$$

para cada $\vec{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor, isto é, que

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^\infty} .$$

Mostremos que a função f^{-1} **não** é contínua em $\left(\mathbb{R}^\infty, d_{\|\cdot\|_\infty}\right)$.

Para isto, notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que o vetor

$$\vec{e}_n \doteq (0, 0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{n-\text{ésima posição}}, 0, \cdots)$$

que pertence $\mathbb{R}^\infty$, pois somente o termo da n-ésima posição é não nulo, e igual a 1.

Observemos tamb ém que

$$\begin{aligned}
\|\vec{e}_n\|_\infty{}^2 &\overset{(3.204)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \\
&\overset{x_j=0 \text{ para } n\neq j\, x_n=1}{=} 1 .
\end{aligned} \tag{3.208}$$

Por outro lado, notemos que

$$\begin{aligned}
\|f^{-1}(e_n)\|_\infty^2 &\overset{(3.207)\text{ e }(3.204)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} |j\,x_j|^2 \\
&\overset{x_j=0 \text{ se } n\neq j \text{ e } x_n=1]}{=} n^2 .
\end{aligned} \tag{3.209}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \|f^{-1}(\vec{e}_n)\|_\infty &\overset{(3.208)}{=} n^2 \\ &\geq n \\ &\overset{(3.207)}{=} n\,\|\vec{e}_n\|_{\mathbb{R}^\infty}\,. \end{aligned} \tag{3.210}$$

Portanto, fazendo $n \to \infty$ em (3.211), ou seja, a função $\underline{f^{-1}}$ não satisfaz o item 3. do Teorema (3.5.2) item 3., portanto, do referido resultado, segue que a função $\underline{f^{-1}}$ não será contínua $\left(\mathbb{R}^\infty, d_{\|\cdot\|_\infty}\right)$, completando a resolução.

□

Introduziremos agora a:

Definição 3.5.2 *Para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *consideremos o espaço vetorial* $(E_i, +_i, \cdot_i)$ *e o espaço vetorial real* $(F, +_F, \cdot_F)$.

Diremos que uma aplicação

$$f : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to F$$

é **$\underline{n}$-linear (ou multi linear)**, *se ela for linear em cada uma de suas* n*-componentes, ou seja, para cada* $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *temos que*

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_j +_j \vec{y}_j, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_n) &= f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_n) \\ &\quad +_F f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{j-1}, \vec{y}_j, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_n) \end{aligned} \tag{3.211}$$

e

$$f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{j-1}, \lambda \cdot_j \vec{x}_j, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_n) = \lambda \cdot_F f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_n), \tag{3.212}$$

onde

$$(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_n), (\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{j-1}, \vec{y}_j, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_n) \in E_1 \times \cdots \times E_j \times \cdots \times E_n$$

e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observação 3.5.4

1. *Para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *consideremos o espaço vetorial* $(E_i, +_i, \cdot_i)$ *e o espaço vetorial real* $(F, +_F, \cdot_F)$ *e suponhamos que a aplicação*

   $$f : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to F$$

   seja $\underline{n}$*-linear.*

   Então, se
   $$\vec{x}_j = \vec{0} \in E_j, \quad \textit{para algum} \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

teremos

$$f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_n) = \vec{O},$$

isto é,

$$f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{j-1}, \vec{O}, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_n) = \vec{O}. \tag{3.213}$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_n) &= f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{j-1}, \vec{O}, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_n) \\ &= f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{j-1}, 0 \cdot \vec{O}, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_n) \\ &\overset{(3.212)}{=} 0 \cdot_F f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{j-1}, \vec{O}, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_n) \\ &= \vec{O}, \end{aligned}$$

ou seja, $\quad f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{j-1}, \vec{O}, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_n) = \vec{O},$

como afirmamos em (3.213).

2. *Na situação acima, para o caso* $n = 2$, *se* $(E_1, +_1, \cdot_1)$, $(E_2, +_2, \cdot_2)$ *e* $(F, +_F, \cdot_F)$ *são espaços vetoriais reais, uma funçao* $f : E_1 \times E_2 \to F$ *que satisfaz* (3.211) *e* (3.212), *será dita* **bilinear** *e é caracterizada pelas seguintes propriedades:*

$$f(\vec{x}_1 +_1 \vec{y}_1, \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1, \vec{x}_2) +_F f(\vec{y}_1, \vec{x}_2), \tag{3.214}$$

$$f(\vec{x}_1, \vec{x}_2 +_2 \vec{y}_2) = f(\vec{x}_1, \vec{x}_2) +_F f(\vec{x}_1, \vec{y}_2), \tag{3.215}$$

$$f(\lambda \cdot_1 \vec{x}_1, \vec{x}_2) = \lambda \cdot_F f(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \tag{3.216}$$

$$f(\vec{x}_1, \lambda \cdot_2 \vec{x}_2) = \lambda \cdot_F f(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \tag{3.217}$$

para $\vec{x}_j, \vec{y}_j \in E_j$, *com* $j \in \{1, 2\}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. *Observemos que, do item 3.214. acima, segue que*

$$f\left(\vec{O}_1, \vec{x}_2\right) = f\left(\vec{x}_1, \vec{O}_2\right) = \vec{O}_F,$$

para $\vec{x}_j \in E_j$, *com* $j \in \{1, 2\}$, *onde* $\vec{O}_j \in E_j$ *é o elemento neutro da adição de* $(E_1, +_j, \cdot_j)$, *com* $j \in \{1, 2\}$ *e* $\vec{O}_F \in F$ *é o elemento neutro da adição de* $(F, +_F, \cdot_F)$.

Temos os seguintes exemplos importantes de aplicações bilineares:

Exemplo 3.5.3 *Seja* $(E, +_E, \cdot_E)$ *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$.

A multiplicação de número real por vetor de $(E, +_E, \cdot_E)$ *é uma aplicação bilinear em* $(E, +_E, \cdot_E)$, *mas precisamente, a aplicação* $m : \mathbb{R} \times E \to E$, *dada por*

$$m(\lambda, \vec{x}) \doteq \lambda \cdot_E \vec{x} \quad para \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad e \quad \vec{x} \in E, \tag{3.218}$$

é uma aplicação bilinear de $(E, +_E, \cdot_E)$ *em* $(E, +_E, \cdot_E)$.

Resolução:

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

□

Exemplo 3.5.4 *Seja* $(E\,,+_{_E}\,,\cdot_{_E})$ *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*, munido de um produto interno* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$.

A aplicação

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : E \times E \to \mathbb{R}\,,$$

é uma aplicação bilinear, onde estamos considerando no contra-domínio o espaço vetorial $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$*, munido das operações usuais.*

Resolução:

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

□

Exemplo 3.5.5 *Seja* $(\mathbb{R}^m\,,+\,,\cdot)$ *o espaço vetorial real, munido das operações usuais de adição de* m*-uplas e multiplicação de número real por* m*-upla.*

Consideremos a aplicação $\det : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{m-fatores} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\det(\vec{x}_1\,,\cdots,\vec{x}_m) \doteq \begin{vmatrix} \vec{x}_1 & \cdots & \vec{x}_m \end{vmatrix}\,, \tag{3.219}$$

para $(\vec{x}_1\,,\cdots,\vec{x}_m) \in \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{m-fatores}$*, onde* <u>det</u>*, denota o determinante da matriz quadrada obtida colocando-se na* j*-ésima coluna da matriz as coordenadas do vetor* $\vec{x}_j$*, para* $j \in \{1\,,2\,,\cdots,m\}$*, ou seja, a matriz das coordendas do vetor* $\vec{x}_j$*, em relação à base canônica de* $(\mathbb{R}^m\,,+\,,\cdot)$ *, que é da forma* $(x_{ij})_{i\in\{1\,,2,\cdots,m\}}$*, para cada* $j \in \{1\,,2\,,\cdots,m\}$.

Mostre que a função <u>det</u>*, tem a seguinte propriedade:*

$$\begin{aligned}\det(\vec{x}_1\,,\cdots,\vec{x}_{j-1}\,,\lambda\cdot\vec{x}_j+\vec{y}_j\,,\vec{x}_{j+1}\,,\cdots,\vec{x}_m) &= \lambda\,\det(\vec{x}_1\,,\cdots,\vec{x}_{j-1}\,,\vec{x}_j\,,\vec{x}_{j+1}\,,\cdots,\vec{x}_m)\\ &\quad+\det(\vec{x}_1\,,\cdots,\vec{x}_{j-1}\,,\vec{y}_j\,,\vec{x}_{j+1}\,,\cdots,\vec{x}_m),\end{aligned}$$

para $(\vec{x}_1\,,\cdots,\vec{x}_{j-1}\,,\vec{x}_j\,,\vec{x}_{j+1}\,,\cdots,\vec{x}_m)\,,(\vec{x}_1\,,\cdots,\vec{x}_{j-1}\,,\vec{y}_j\,,\vec{x}_{j+1}\,,\cdots,\vec{x}_m) \in \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{m-fatores}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*, ou seja, a aplicação* <u>det</u> *é* m*-linear.*

Resolução:

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

□

Agora podemos enunciar e provar o:

Proposição 3.5.1 *Sejam* $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ *e* $(G, \| \|_G)$ *espaços vetoriais reais normados, no espaço vetorial real* $(E \times F, +, \cdot)$, *consideremos uma das três normas usuais (ou seja, da raiz quadrada, da soma ou do máximo) e uma aplicação* $f : E \times F \to G$ *é bilinear.*

São equivalentes:

1. *a função* $\underline{f}$ *é contínua em* $(E \times F, D)$, *onde a métrica* $\underline{D}$ *é induzida por uma das três normas usuais (ou seja, da raiz quadrada, da soma ou do máximo);*
2. *a função* $\underline{f}$ *é contínua em* $\left(\vec{O}_E, \vec{O}_F\right) \in E \times F$;
3. *Existe* $c > 0$, *tal que*
$$\|f(\vec{x}, \vec{y})\|_G \le c\, \|\vec{x}\|_E\, \|\vec{y}\|_F\,, \tag{3.220}$$
para $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times F$;
4. *a aplicação* $\underline{f}$ *é lischitziana em cada subconjunto limitado de* $(E \times F, D)$.

Demonstração:

O diagrama abaxo ilustra como será feita a demonstração:

$$\begin{tikzcd}
1. \arrow[r] & 2. \arrow[d] \\
4. \arrow[u] & 3. \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Notemos que é imediãto mostrar que

$$1. \Rightarrow 2. \quad \text{e que} \quad 4. \Rightarrow 1\,.$$

Mostremos que

2. $\Rightarrow$ 3.:

Consideremos no espaço vetorial real $(E \times F, +, \cdot)$ a norma da soma das normas, isto é,
$$\|(\vec{x}, \vec{y})\|_{E\times F} \doteq \|\vec{x}\|_E + \|\vec{y}\|_F\,, \tag{3.221}$$
para $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times F$.

O caso com as outras duas normas (a da raiz quadrada e do máximo) utilizamos o fato que estas normas são equivalentes à a norma acima.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $\left(\vec{O}_E, \vec{O}_F\right) \in E \times F$, então, como

$$f\left(\vec{O}_E, \vec{O}_F\right) = \vec{O}_G\,,$$

segue, tomando-se $\varepsilon = 1 > 0$ existirá $\delta > 0$, tal que

$$\|\vec{x}\|_E + \|\vec{y}\|_F \overset{(3.221)}{=} \|(\vec{x}, \vec{y})\|_{E \times F} < \delta \tag{3.222}$$

deveremos ter:

$$\|f(\vec{x}, \vec{y})\|_G \leq \varepsilon = 1\,. \tag{3.223}$$

Seja

$$c \doteq \frac{4}{\delta^2} > 0\,. \tag{3.224}$$

Logo para $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times F$ com

$$\vec{x} = \vec{O}_E \quad \text{ou} \quad \vec{y} = \vec{O}_F\,,$$

teremos

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{O}_G\,, \tag{3.225}$$

logo

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x}, \vec{y})\|_G &\overset{(3.225)}{=} \|\vec{O}_G\|_G \\ &= 0 \leq c\,\|(\vec{x}, \vec{y})\|_{E \times F}\,, \end{aligned}$$

ou seja, vale (3.220) nestes casos.

Suponhamos agoa que $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times F$ são tais que

$$\vec{x} \neq \vec{O}_E \quad \text{e} \quad \vec{y} \neq \vec{O}_F\,.$$

Então os vetores

$$\vec{X} \doteq \frac{\delta}{4\,\|\vec{x}\|_E} \cdot_E \vec{x} \in E \quad \text{e} \quad \vec{Y} \doteq \frac{\delta}{4\,\|\vec{y}\|_F} \cdot_F \vec{y} \in F\,, \tag{3.226}$$

satisfazem

$$\begin{aligned} \left\|\vec{X}\right\|_E &\overset{(3.226)}{=} \left\|\frac{\delta}{4\,\|\vec{x}\|_E} \cdot_E \vec{x}\right\|_E \\ &\overset{(2.74)}{=} \frac{\delta}{4\,\|\vec{x}\|_E}\,\|\vec{x}\|_E \\ &= \frac{\delta}{4} \\ &< \frac{\delta}{2} \end{aligned} \tag{3.227}$$

e

$$\begin{aligned} \left\|\vec{Y}\right\|_F &\overset{(3.226)}{=} \left\|\frac{\delta}{4\,\|\vec{y}\|_F} \cdot_F \vec{y}\right\|_F \\ &\overset{(2.74)}{=} \frac{\delta}{4\,\|\vec{y}\|_F}\,\|\vec{y}\|_F \\ &= \frac{\delta}{4} \\ &< \frac{\delta}{2}\,. \end{aligned} \tag{3.228}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)\right\|_{E\times F} &\overset{(3.221)}{=} \left\|\vec{X}\right\|_{E} + \left\|\vec{Y}\right\|_{F} \\
&\overset{(3.227)\text{ e }(3.228)}{<} \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \\
&= \delta\,. \qquad (3.229)
\end{aligned}$$

Logo, (3.229), (3.222) e (3.223), implicarão que

$$\begin{aligned}
1 &\overset{(3.223)}{\geq} \left\|f\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)\right\|_{G} \\
&\overset{(3.226)}{=} \left\|f\left(\frac{\delta}{4\,\|\vec{x}\|_{E}} \cdot_{E} \vec{x}, \frac{\delta}{4\,\|\vec{y}\|_{F}} \cdot_{F} \vec{y}\right)\right\|_{G} \\
&\overset{f\text{é bilinear}}{=} \left\|\frac{\delta}{4\,\|\vec{x}\|_{E}}\,\frac{\delta}{4\,\|\vec{y}\|_{F}} \cdot_{G} f(\vec{x}, \vec{y})\right\|_{G} \\
&\overset{(2.74)}{=} \frac{\delta}{4\,\|\vec{x}\|_{E}}\,\frac{\delta}{4\,\|\vec{y}\|_{F}}\,\|f(\vec{x}, \vec{y})\|_{G}\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|f(\vec{x}, \vec{y})\|_{G} \leq \underbrace{\frac{16}{\delta^2}}_{\doteq c}\,\|\vec{x}\|_{E}\,\|\vec{y}\|_{F}\,,,$$

para $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times F$, mostrando que (3.220) é verdadeira, ou seja, vale 3.

Mostremos agora que

3. $\Rightarrow$ 4.):

Para isto consideremos $U \subseteq E \times F$ um subconjunto limitado do espaço métrico $(E \times F, D)$.

Logo existe $r > 0$, tal que

$$U \subseteq B\left[\left(\vec{O}_{E}, \vec{O}_{F}\right); r\right].$$

Mostremos que a funçao $\underline{f}$ é lipschitiziana na bola

$$B_{D}\left[\left(\vec{O}_{E}, \vec{O}_{F}\right); r\right].$$

De fato, se $\vec{z} \doteq (\vec{x}, \vec{y}), \vec{z}\,' \doteq (\vec{x}\,', \vec{y}\,') \in B\left[\left(\vec{O}_E, \vec{O}_F\right); r\right]$ teremos:

$$
\begin{aligned}
\|f(\vec{z}) - f(\vec{z}\,')\|_G &= \|f(\vec{x}, \vec{y}) - f(\vec{x}\,', \vec{y}\,')\|_G \\
&= \|f(\vec{x}, \vec{y}) - f(\vec{x}, \vec{y}\,') + f(\vec{x}, \vec{y}\,') - f(\vec{x}\,', \vec{y}\,')\|_G \\
&\overset{\text{fbiliear}}{=} \|f(\vec{x}, \vec{y} - \vec{y}') + f(\vec{x} - \vec{x}\,', \vec{y}\,')\|_G \\
&\leq \|f(\vec{x}, \vec{y} - \vec{y}\,')\|_G + \|f(\vec{x} - \vec{x}\,', \vec{y}\,')\|_G \\
&\overset{3.}{\leq} c\,\|\vec{x}\|_E\,\|\vec{y} - \vec{y}\,'\|_F + c\,\|\vec{x} - \vec{x}\,'\|_E\,\|\vec{y}\,'\|_F \\
&\overset{\|\vec{x}\|_E, \|\vec{y}\,'\|_F \leq r}{\leq} c\,r\,\|\vec{y} - \vec{y}\,'\|_F + c\,r\,\|\vec{x} - \vec{x}\,'\|_E \\
&= c\,r\,[\|\vec{y} - \vec{y}\,'\|_F + \|\vec{x} - \vec{x}\,'\|_E] \\
&\overset{(3.221)}{=} c\,r\,\|\vec{z} - \vec{z}'\|_{E \times F},
\end{aligned}
$$

mostrando que 3. é verdadeira e assim completando a demonstração do resultado.

□

Por indução pode-se demonstrar o:

Corolário 3.5.2 *Para cada* $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *consideremos o espaço vetorial real normado* $(E_j, \|\cdot\|_j)$ *e o espaço vetorial real normado* $(F, \|\cdot\|_F)$*, o espaço vetorial real* $(E_1 \times \cdots \times E_n, +, \cdot)$ *munido de uma das três normas usuais (a saber, da raiz quadrada, da soma ou do máximo) e uma função* $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ *é* n*-linear.*

São equivalentes:

1. $\underline{f}$ *é contínua em* $(E_1 \times \cdots \times E_n, D)$*, onde* $\underline{D}$ *é a métrica induzida por um das três normas usuais no produto cartesiano;*

2. $\underline{f}$ *é contínua em* $(\vec{O}_{E_1}, \cdots, \vec{O}_{E_n}) \in E_1 \times \cdots \times E_n$*;*

3. *Existe* $c > 0$*, tal que*

$$\|f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n)\|_F \leq c\|\vec{x}_1\|_1 \cdots \|\vec{x}_n\|_n, \tag{3.230}$$

para $(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$*;*

4. *a afunção* $\underline{f}$ *é uma aplicação lischitziana em cada subconjunto limitado de* $(E_1 \times \cdots \times E_n, D)$.

<u>**Demonstração:**</u>

Será deixada como exercício para o leitor.

□

Como conseqüência temos o:

Corolário 3.5.3 *Sejam* $(F, \|\cdot\|_F)$ *um espaço vetorial real normado e, par* $j \in \{m, n\}$, *considremos o esapço vetorial real* $(\mathbb{R}^j, +, \cdot)$*, munido de uma das três normas usuais (dadas por* (2.80)*,* (2.81) *ou* (2.82)*).*

Mostre que se a aplicação $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to F$ *é uma aplicação bilinear, então ela será é contínua* $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, D)$*, onde a métrica* $\underline{D}$ *é uma das três métricas induzidas pelas respectivas normas consideradas.*

Demonstração:

Consideraremos a norma da soma nos espaços vetoriais reais $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ e $(\mathbb{R}^n, + \cdot)$.

Para as outras duas normas (a da raiz quadrada e dao máximo) podemos utilizar o fato que as respectivas normas são equivalentes à norma da soma.

Ssejam

$$\mathcal{B}_m \doteq \{\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_m}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_n \doteq \{\vec{f_1}, \cdots, \vec{f_n}\}$$

as bases canônicas dos espaços vetoriais reais $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ e $(\mathbb{R}^n, + \cdot)$, respectivamente.

Dado $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, temos que existem

$$x_1, \cdots x_m \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y_1, \cdots y_n \in \mathbb{R},$$

tais que

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \vec{e_i} \quad \text{e} \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \vec{f_j}. \tag{3.231}$$

Como a função $\underline{f}$ é bilinear, segue que

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, \vec{y}) &\overset{(3.231)}{=} f\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \vec{e_i}, \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \vec{f_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j \cdot f(\vec{e_i}, \vec{f_j}). \end{aligned} \tag{3.232}$$

Seja

$$c \doteq \max\left\{f\left(\vec{e_i}, \vec{f_j}\right) ; i \in \{1, 2, \cdots, m\} \text{ e } j \in \{1, 2, \cdots, n\}\right\} \geq 0. \tag{3.233}$$

Observemos que a norma escolhida é a norma da soma, ou seja,

$$\|\vec{x}\|_{\mathbb{R}^m} = \sum_{i=1}^{m} |x_i| \quad \text{e} \quad \|\vec{y}\|_{\mathbb{R}^n} = \sum_{j=1}^{n} |y_j|. \tag{3.234}$$

Assim, teremos:

$$\begin{aligned}
\|f(\vec{x}\,,\vec{y})\|_{_F} &\overset{(3.232)}{=} \left\| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j \cdot f\left(\vec{e_i}\,,\vec{f_j}\right) \right\|_{_F} \\
&\overset{(2.75)\text{ e }(2.74)}{\leq} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |x_i|\, |y_j| \left\| f\left(\vec{e_i}\,,\vec{f_j}\right) \right\|_{_F} \\
&\overset{(3.233)}{\leq} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} [|x_i|\, |y_j|\, c] \\
&= c \left[\sum_{i=1}^{m} |x_i| \right] \left[\sum_{j=1}^{n} |y_j| \right] \\
&\overset{(3.234)}{=} c\, \|\vec{x}\|_{_{\mathbb{R}^m}}\, \|\vec{y}\|_{_{\mathbb{R}^n}}\,,
\end{aligned}$$

e assim, do fato que 3 implica 4 na Proposição 3.5.1, segue que a funçao $\underline{f}$ é lipschitziana em $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n\,, D)$ e portanto contínua em $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n\,, D)$, completando a resolução.

□

Para finalizar temos a:

Observação 3.5.5

1. *Se* $(E\,, \|\cdot\|_{_E})$ *é um espaço vetorial real normado, então a aplicação bilinear (veja o Exemplo 3.5.4)* $m : \mathbb{R} \times E \to E$, *dada por*

$$m(\lambda\,,\vec{x}) = \lambda \cdot_{_E} \vec{x}\,, \quad \textit{para cada} \quad (\lambda\,,\vec{x}) \in \mathbb{R} \times E\,, \tag{3.235}$$

   será contínua em $(\mathbb{R} \times E\,, D)$, *onde a métrica* $\underline{D}$ *no produto cartesiano é a métrica induzida pelas respectivas normas em cada um dos fatores.*

   Isto segue do fato que se $(\lambda\,,\vec{x}) \in \mathbb{R} \times E$ *temos que*

$$\begin{aligned}
\|m(\lambda\,,\vec{x})\|_{_E} &\overset{(3.235)}{=} \|\lambda \cdot_{_E} \vec{x}\|_{_E} \\
&\overset{(2.74)}{=} |\lambda|\, \|\vec{x}\|_{_E} \\
&= \|\lambda\|_{_\mathbb{R}}\, \|\vec{x}\|_{_E}\,,
\end{aligned}$$

   ou seja, vale (3.220) da Proposição 3.5.1 (com $c = 1$*).*

   Logo, da mesma, segue que a função $\underline{m}$ *será contínua em* $(\mathbb{R} \times E\,, D)$.

2. *Se* $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_{_E}$ *é um produto interno no espaço vetorial real* $(E\,,+\,,\cdot)$, *a aplicação* $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_{_E} : E \times E \to \mathbb{R}$, *é uma aplicação bilinear contínua em* $(E \times E\,, D)$, *onde a métrica* $\underline{D}$ *no porduto cartesiano é a métrica induzida pela norma (que é induzida pelo produto interno acima) em cada um dos fatores.*

   O fato de ser bilinear é evidente da definição de produto interno.

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle_{_E}| \leq \|\vec{x}\|_{_E}\,\|\vec{y}\|_{_E}\,, \quad \textit{para cada} \quad \vec{x},\vec{y} \in E\,.$$

Logo o item 3. da Proposição 3.5.1 ocorre (com $c = 1$*) e assim a aplicação* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{_E}$ *será contínua em* $(E \times E\,, D)$.

3. *Do Corolário 3.5.3 acima, segue que a função determinante (veja o Exemplo 3.5.4) será contínua em* $\left(\underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{m-\textit{fatores}}, D\right)$, *onde a métrica* $\underline{D}$ *no produto cartesiano é a métrica induzida pela norma (que é induzida pelo produto interno acima) em cada um dos fatores.*

3.6 Exercícios

Referências Bibliográficas

[1] *E.L. Lima* - Espaços Métricos - Projeto Euclides, IMPA, 1977. 2, 1

[2] *G.F. Simmons* - Introduction to Topology and Modern Analysis, McGraw-Hill, 1963

[3] *S. Lipschutz* - Topologia Geral, McGraw-Hill do Brasil, 1973.

Índice Remissivo