

NOTAS DE AULA

CÁLCULO VETORIAL

Cláudio Martins Mendes

Segundo Semestre de 2005

Sumário

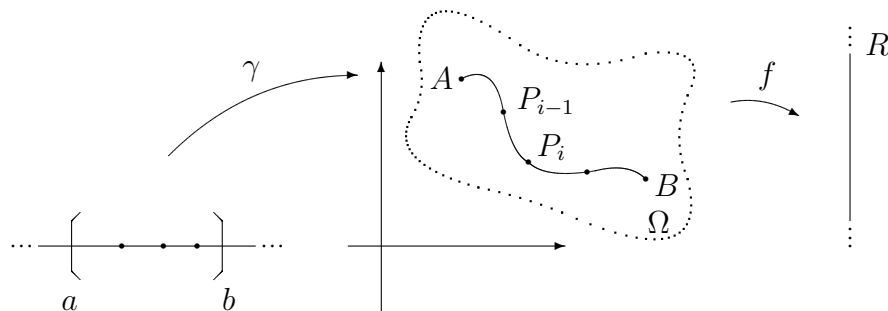
1	Cálculo Vetorial	2
1.1	Integrais de Linha	2
1.2	Campos Conservativos e Integrais de Linha	14
1.3	Teorema de Green	26
1.4	Integrais de Superfície	34
1.5	Divergente - Rotacional	48
1.6	Teoremas: Gauss - Stokes	51

Capítulo 1

Cálculo Vetorial

1.1 Integrais de Linha

Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^2 e $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma curva suave (isto é, $\gamma'(t)$ é contínuo e $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$). Seja ainda $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.



Tomemos $A = \gamma(a)$ e $B = \gamma(b)$.

Seja $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Esta partição em $[a, b]$ determina uma partição do arco \widehat{AB} em arcos $\widehat{P_{i-1}P_i}$, onde $P_i = \gamma(t_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Sejam $\Delta S_i =$ comprimento do arco $\widehat{P_{i-1}P_i}$ e $\|\Delta\| = \max \Delta S_i$.

Em cada arco $\widehat{P_{i-1}P_i}$ tomamos (u_i, v_i) e formamos a soma

$$\sum_i f(u_i, v_i) \Delta S_i$$

Definição 1. A integral curvilínea de f sobre γ de A até B é definida (e denotada) por:

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_i f(u_i, v_i) \Delta S_i ;$$

desde que o limite exista independentemente da escolha de $(u_i, v_i) \in \widehat{P_{i-1}P_i}$.

Obs: A integral anterior é também conhecida como **integral de linha relativa ao comprimento de arco**.

Uma condição suficiente para garantir a existência da integral em questão é dada a seguir.

Teorema 2. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (g(t), h(t))$ é suave e $f(x, y)$ é contínua em Ω , então existe $\int_{\gamma} f(x, y) ds$ e

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(g(t), h(t)) \cdot \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

A prova deste teorema é bastante técnica. O leitor interessado poderá consultar, por exemplo: ADVANCED CALCULUS - BUCK.

Observação: Se usarmos a notação vetorial para γ e colocarmos $\gamma(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j}$, temos:

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt .$$

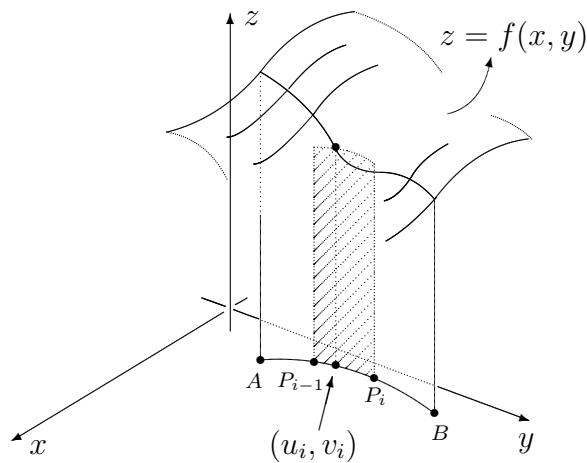
Muitos autores já definem a integral por esta fórmula.

Observe que no caso particular de $f(x, y) \equiv 1$ temos que $\int_{\gamma} f(x, y) ds$ é o comprimento da curva γ .

Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ contínua é dita **suave por partes** se existe uma partição finita de $[a, b]$ em subintervalos tal que a restrição de γ a cada subintervalo seja suave. Neste caso, definimos $\int_{\gamma} f(x, y) ds$ como soma das integrais das restrições.

Interpretação Geométrica

Suponhamos f contínua, com $f(x, y) \geq 0$ em Ω .



Área da região hachurada: $f(u_i, v_i) \cdot \Delta S_i$

É natural então:

$\int_{\gamma} f(x, y) ds =$ área da superfície cilíndrica de base \widehat{AB} com altura determinada pelo gráfico de f (uma espécie de cortina).

Interpretação Física:

Encarando a curva γ como um fio delgado e $f(x, y) =$ densidade em (x, y) , temos:

$$f(u_i, v_i) \Delta S_i \simeq \text{massa de } \widehat{P_{i-1}P_i} = \Delta m_i$$

$\sum_i f(u_i, v_i) \Delta S_i \simeq \sum_i \Delta m_i$ é, assim, uma aproximação da massa total M do fio.

Assim,

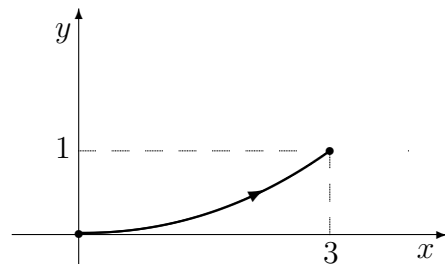
$$M = \int_{\gamma} f(x, y) ds.$$

Exercícios resolvidos

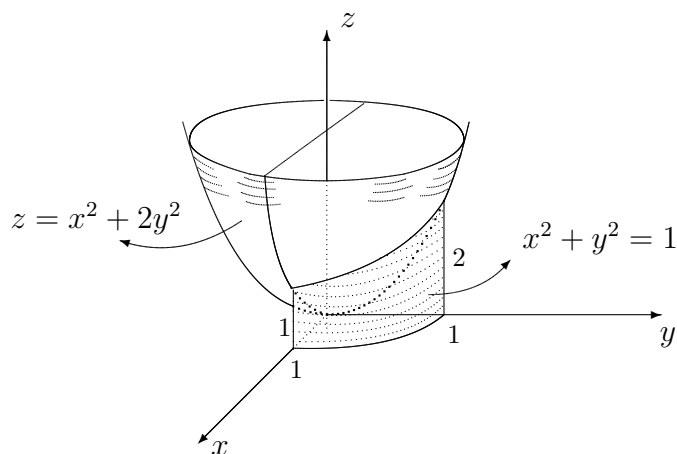
1. Calcular $\int_{\gamma} f(x, y) ds$ onde $f(x, y) = x^3 + y$ e $\gamma(t) = (3t, t^3)$, $t \in [0, 1]$.

Resolução:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x, y) ds &= \int_0^1 (27t^3 + t^3) \cdot \sqrt{9 + 9t^4} dt = \\ &= \int_0^1 84t^3 \sqrt{1 + t^4} dt = \dots \\ &= 14(2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$



2. Calcular a área da região representada abaixo.



Resolução: Consideremos $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Então a área A da superfície será dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\gamma} f(x, y) ds = \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t + 2\sin^2 t) \cdot \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 + \sin^2 t) dt = \int_0^{\pi/2} 1 + \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) dt = \dots = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$



Consideremos $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (g(t), h(t))$, suave, $f(x, y)$ contínua em Ω . Se, ao invés de ΔS_i usarmos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, onde $P_i = (x_i, y_i)$, na definição de integral curvilínea, obtemos a **integral curvilínea de f sobre γ em relação a x** , dada (e denotada) por:

$$\int_{\gamma} f(x, y) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_i f(u_i, v_i) \Delta x_i$$

Analogamente,

$$\int_{\gamma} f(x, y) dy = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_i f(u_i, v_i) \Delta y_i$$

Estas novas integrais podem ser calculadas através das formas:

$$\int_{\gamma} f(x, y) dx = \int_a^b f(g(t), h(t)) g'(t) dt$$

$$\int_{\gamma} f(x, y) dy = \int_a^b f(g(t), h(t)) h'(t) dt$$

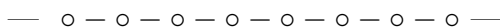
Observação:

Tudo o que foi feito até aqui é generalizável de maneira análoga para três ou mais variáveis.

Exercício proposto

Calcular $\int_{\gamma} x^2 y dx$ e $\int_{\gamma} x^2 y dy$ quando:

- a) γ é o segmento de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.
- b) γ é a parábola $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.
- c) γ é o segmento de $(1, 1)$ até $(0, 0)$.



Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (g(t), h(t), k(t))$ suave.

Sejam $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$ e $f_3(x, y, z)$ funções contínuas em Ω .

A soma

$$\int_{\gamma} f_1(x, y, z) dx + \int_{\gamma} f_2(x, y, z) dy + \int_{\gamma} f_3(x, y, z) dz$$

será indicada por

$$\int_{\gamma} f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz$$

Intrepretação Física

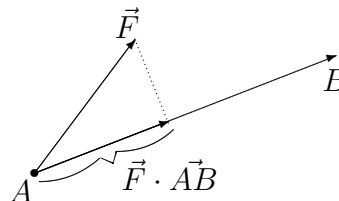
Suponhamos γ -trajetória de um objeto sujeito a um campo de forças

$$\vec{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$$

Se \vec{F} é constante e γ uma reta, temos:

Trabalho = $\vec{F} \cdot$ (vetor deslocamento),

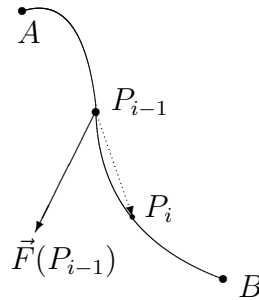
onde \cdot denota o produto escalar.



Se \vec{F} não é constante ou γ não é uma reta, particionamos γ num número finito de arcos.

Se $\|\Delta\|$ é pequena, o trabalho realizado por \vec{F} ao longo do arco $\widehat{P_{i-1}P_i}$ pode ser aproximado por

$$\Delta W_i = \vec{F}(P_{i-1}) \cdot (\Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j} + \Delta z_i \vec{k}) = f_1(P_{i-1})\Delta x_i + f_2(P_{i-1})\Delta y_i + f_3(P_{i-1})\Delta z_i$$



O trabalho W realizado por \vec{F} ao longo de γ é, por definição:

$$W = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum \Delta w_i, \quad \text{isto é,}$$

$$W = \int_{\gamma} f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz$$

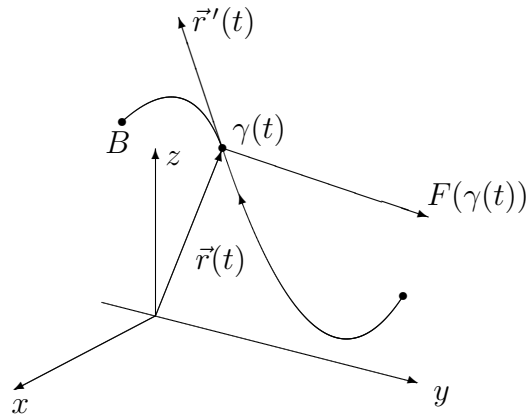
— o — o — o — o — o — o — o — o — o — o —

A integral anterior pode ser expressa em forma vetorial. É o que faremos a seguir.

Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (g(t), h(t), k(t))$ [ou na notação vetorial $\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j} + k(t)\vec{k}$] uma curva suave e $\vec{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$ um campo contínuo sobre Ω .

Então:

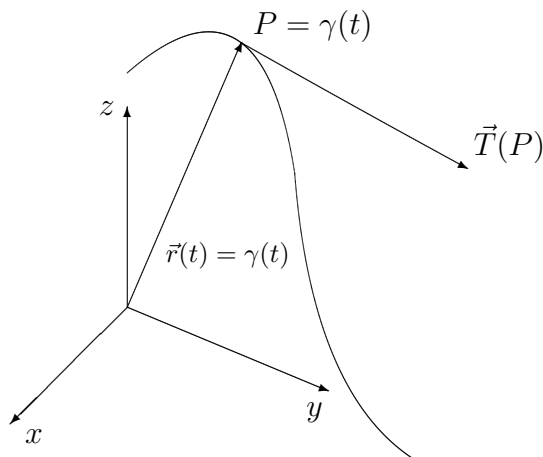
$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz = \\ &= \int_a^b [f_1(g(t), h(t), k(t)) \cdot g'(t) + f_2(g(t), h(t), k(t)) \cdot h'(t) + f_3(g(t), h(t), k(t)) \cdot k'(t)]dt = \\ &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \stackrel{\text{Notação}}{=} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \text{ a qual será chamada de } \mathbf{integral\ de\ linha\ do} \\ & \mathbf{campo\ } \vec{F} \mathbf{\ sobre\ } \gamma. \end{aligned}$$



Vejamos agora uma relação entre a integral de linha de um campo vetorial e a integral de linha com relação ao comprimento de arco.

Denotemos por $\vec{T}(P)$ o vetor unitário tangente a γ em P .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \left[\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right] \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \\ &= \int_a^b [\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}(\gamma(t))] \|\gamma'(t)\| dt \stackrel{\text{Teorema 2}}{=} \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}(\gamma(t)) ds \stackrel{\text{Notação}}{=} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{T} ds \end{aligned}$$



Resumindo:

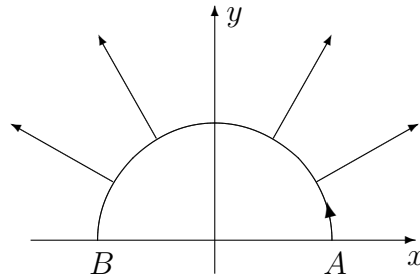
$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

Obs: Note que $\vec{F} \cdot \vec{T}$ é a componente tangencial de \vec{F} com relação à curva.

Exercícios resolvidos

1. Calcular $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$.

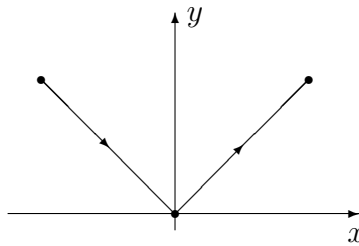
Resolução: Observe que deveremos ter a integral igual a zero, uma vez que o deslocamento se processa perpendicularmente ao campo.



De fato:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi} (\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}) \cdot (-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}) dt = \int_0^{\pi} 0 dt = 0.$$

2. Calcular o trabalho realizado por \vec{F} ao longo de γ , onde $\vec{F}(x, y) = (x, y)$ e $\gamma(t) = (t, |t|)$, $t \in [-1, 1]$.



Resolução:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{-1}^0 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt + \int_0^1 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \int_{-1}^0 (t, |t|) \cdot (1, -1) dt + \int_0^1 (t, |t|) \cdot (1, 1) dt = \int_{-1}^0 2t dt + \int_0^1 2t dt = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

— o — o — o — o — o — o — o — o — o —

Uma pergunta que se coloca aqui: A integral $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ depende da parametrização de γ ? Veremos a seguir que só depende do sentido de percurso.

Teorema 3. *Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva suave e $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ uma mudança de parâmetros (isto é $h' > 0$ ou $h' < 0$). Seja ainda $\lambda = \gamma \circ h$ uma reparametrização de γ .*

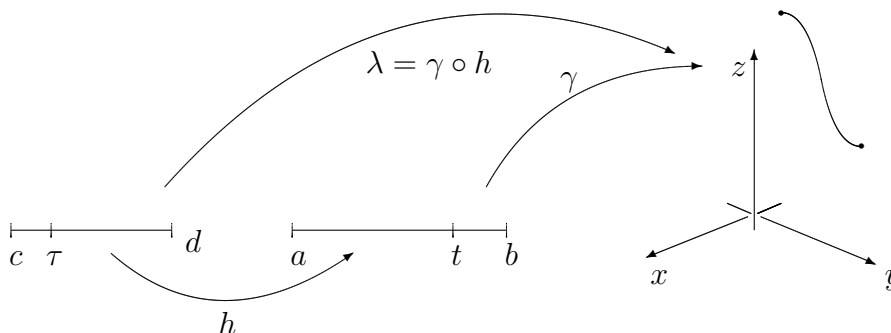
Então:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{se } h'(\tau) > 0$$

ou

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{se } h'(\tau) < 0$$

Prova:



Suponhamos $h'(\tau) < 0$. Neste caso, $h(c) = b$ e $h(d) = a$.

Pela Regra da Cadeia, $\lambda'(\tau) = \gamma'(h(\tau)) \cdot h'(\tau)$.

Fazendo a mudança $t = h(\tau)$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_d^c \vec{F}(\gamma(h(\tau))) \cdot \gamma'(h(\tau)) \cdot h'(\tau) d\tau = \\ &= - \int_c^d \vec{F}(\gamma(h(\tau))) \cdot \gamma'(h(\tau)) \cdot h'(\tau) d\tau = \int_c^d \vec{F}(\lambda(\tau)) \cdot \lambda'(\tau) d\tau = \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

O caso $h'(\tau) > 0$ é semelhante.

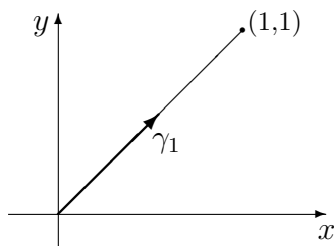
Observação: Relembre a definição de $\int_{\gamma} f(x, y) ds$. Fica claro que este tipo de integral independe também do sentido de γ . Prove isto com o mesmo tipo de argumento usado na demonstração do teorema anterior.

Exercícios resolvidos

1. Calcular $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde $\vec{F}(x, y) = (x^2y, xy)$ quando:
 - (a) γ_1 é o segmento de reta que liga $(0, 0)$ a $(1, 1)$.
 - (b) γ_2 é a parábola $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.
 - (c) γ_3 é o segmento de reta que liga $(1, 1)$ a $(0, 0)$.

Resolução:

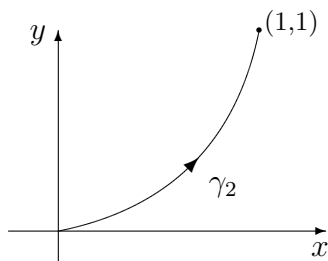
(a) uma parametrização da curva pode ser $\gamma_1(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.



Assim,

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^3, t^3) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 2t^3 dt = \dots = \frac{1}{2}$$

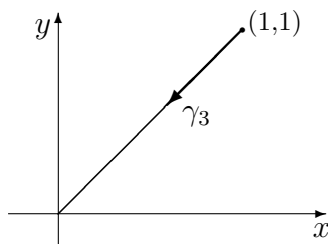
(b) uma parametrização da curva pode ser $\gamma_2(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.



Assim,

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^4, t^4) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 t^4 + 2t^5 dt = \dots = \frac{8}{15}$$

(c) uma parametrização da curva pode ser $\gamma_3(t) = (1-t, 1-t)$, $0 \leq t \leq 1$.

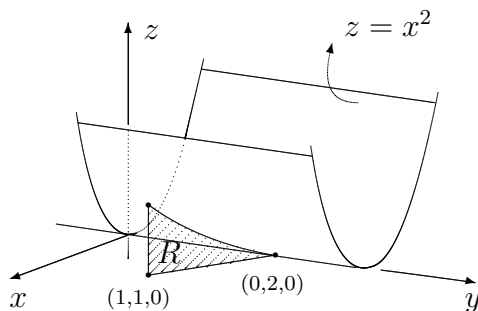


Assim,

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 ((1-t)^3, (1-t)^3) \cdot (-1, -1) dt = \int_0^1 -2(1-t)^3 dt = \dots = -\frac{1}{2}$$

Observemos neste exercício que podemos obter dois valores diferentes para a integral de linha ao longo de duas curvas ligando $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

2. Calcular a área da região R representada a seguir:



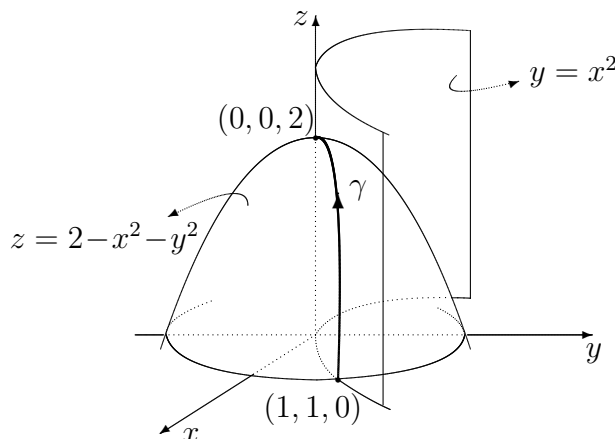
Resolução:

Sejam $z = f(x, y) = x^2$ e $\gamma(t) = (t, 2 - t)$, $t \in [0, 1]$.

$$\text{Área de } R = \int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_0^1 t^2 \cdot \sqrt{2} dt = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ u.a.}$$

3. Calcule $\int_{\gamma} 2x dx + dy + dz$, onde γ é a intersecção do cilindro $y = x^2$ com o parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$, contida no octante $x, y, z \geq 0$. O caminho é percorrido de $(1, 1, 0)$ a $(0, 0, 2)$.

Resolução: Uma visualização da curva:



Uma parametrização de γ pode ser dada por

$$\gamma(t) = (1 - t, (1 - t)^2, 2 - (1 - t)^2 - (1 - t)^4), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

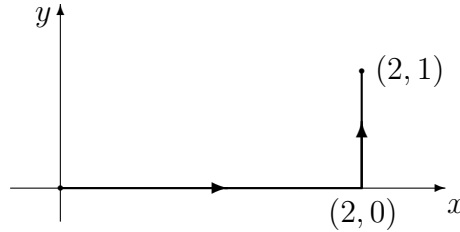
Temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} 2x dx + dy + dz &= \int_0^1 [-2(1 - t) - 2(1 - t) + 2(1 - t) + 4(1 - t)^3] dt = \\ &= \int_0^1 [2(t - 1) + 4(1 - t)^3] dt = [(t - 1)^2 - (1 - t)^4] \Big|_0^1 = 0 \end{aligned}$$

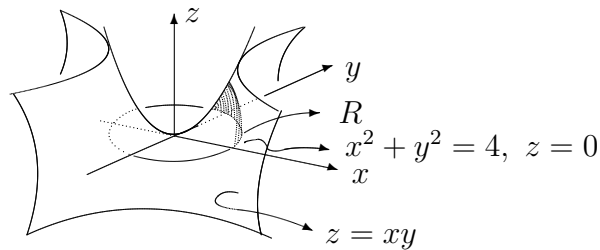
— o — o — o — o — o — o — o — o — o —

Exercícios propostos

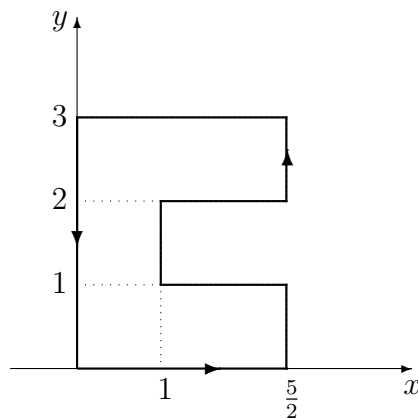
1. Calcular $\int_{\gamma} x^2 y dx + xy^2 dy$, onde γ é a curva indicada a seguir.



2. Considere o campo vetorial sobre \mathbb{R}^2 , definido por $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$. Encontre uma curva γ começando no ponto $(1, 2)$ de comprimento 1 tal que $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.
3. Calcule a área da região R representada a seguir



4. Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde $\vec{F}(x, y) = (2x + y^3)\vec{i} + 3xy^2\vec{j}$ e γ é a curva indicada na figura a seguir



Observação: Volte a fazer este exercício após a leitura da secção a seguir.

1.2 Campos Conservativos e Integrais de Linha

Proposição 4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ dada por $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ uma curva suave por partes tal que $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$. Então, $\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$.*

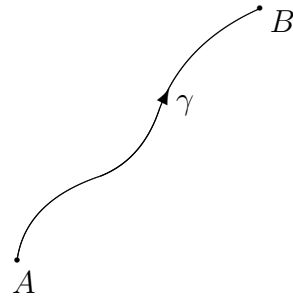
Prova:

(i) Se γ é suave:

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_n(t) \\ &= \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t). \end{aligned}$$



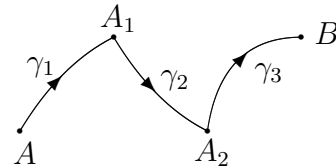
Do Teorema Fundamental do Cálculo segue que:

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A)$$

(ii) Se γ é suave por partes:

$\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_m$, onde γ_i é suave, $i = 1, \dots, m$

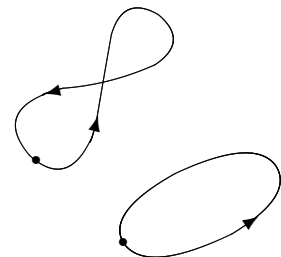
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} &= \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} \nabla f \cdot d\vec{r} \\ &= \cancel{f(A_1)} - f(A) + \cancel{f(A_2)} - \cancel{f(A_1)} + \dots + f(B) - \cancel{f(A_{m-1})} = f(B) - f(A). \end{aligned}$$



Definição 5. *Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita **fechada** quando $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Notação: Quando a curva γ é fechada,

costuma-se denotar \int_{γ} por \oint_{γ} . Quando γ está no plano, usa-se ainda \oint_{γ} ou \oint_{γ} .



Corolário 6. *Se $\vec{F} = \nabla f$ onde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $f \in C^1$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ é suave por partes e fechada, então $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.*

Exercícios resolvidos

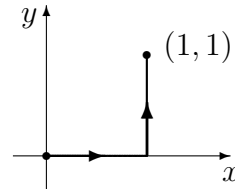
1. Calcular $\int_{\gamma} x dx + y dy$ em cada um dos casos abaixo:

i) γ é o segmento de $(0, 0)$ a $(1, 1)$

ii) γ é a parábola $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$

iii) γ é a curva indicada ao lado.

iv) γ é a circunferência $(\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$



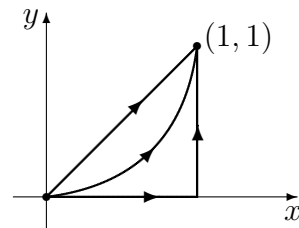
Resolução:

$$\int_{\gamma} x dx + y dy = \int_{\gamma} (x, y) \cdot d\vec{r}.$$

$$\text{Seja } f(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2).$$

$$\text{Então } \nabla f(x, y) = (x, y).$$

$$\text{Logo, } \int_{\gamma} x dx + y dy = \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r}.$$



Respostas para (i), (ii), (iii): $f(1, 1) - f(0, 0) = 1$

Respostas para (iv): 0, pois $A = B$.

2. Calcular $\int_{\gamma} y dx + x dy$ onde γ é uma curva suave unindo $(0, 1)$ a $(2, 3)$.

Resolução:

$$\int_{\gamma} y dx + x dy = \int_{\gamma} (y, x) \cdot d\vec{r}.$$

$$\text{Seja } g(x, y) = xy. \text{ Então } \nabla g(x, y) = (y, x).$$

Logo,

$$\int_{\gamma} y dx + x dy = g(2, 3) - g(0, 1) = 6.$$

Observação: A Proposição anterior afirma que, sob certas condições, a integral de linha independe do caminho de integração, mas somente dos pontos extremos. Conforme já visto anteriormente, nem todas as integrais de linha tem esta propriedade. Veremos uma recíproca da Proposição anterior.

Definição 7. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito **conexo** se quaisquer dois pontos em Ω podem ser ligados por uma curva suave por partes, inteiramente contida em Ω . Uma **região** é um conjunto aberto e conexo.

Exemplos:

Nos casos abaixo Ω_1 é conexo e Ω_2 não é conexo.

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 1\}$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| > 1\}$$

Teorema 8. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região e $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo. Se a integral de linha $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente da curva suave por partes γ ligando A a X em Ω , onde A é fixado e X é arbitrário, então a função real definida por

$$f(X) = \int_A^X \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

é de classe C^1 e satisfaz $\nabla f = \vec{F}$ em Ω .

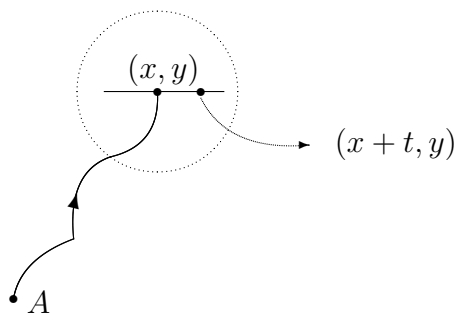
Prova:

Para simplificar a notação vamos fazer a prova para $n = 2$.

Inicialmente observemos que em virtude da independência de caminho a fórmula para $f(x, y)$ fornece uma função sem ambigüidade.

Precisamos mostrar que $\nabla f(x, y) = \vec{F}(x, y)$, ou seja $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$.

Escolhemos curva suave por partes ligando A a (x, y) contida em Ω (que existe pois Ω é conexo) e a estendemos horizontalmente até o ponto $(x + t, y)$, $|t| < \delta$ (isto é possível pois Ω é aberto).



$$\begin{aligned}
f(x+t, y) - f(x, y) &= \int_A^{(x+t, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_A^{(x, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\
&= \int_{(x, y)}^{(x+t, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^t \vec{F}(x+\tau, y) \cdot (1, 0) d\tau = \int_0^t F_1(x+\tau, y) d\tau
\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t F_1(x+\tau, y) d\tau = \\
&= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t F_1(x+\tau, y) d\tau \right) \Big|_{t=0} = F_1(x, y)
\end{aligned}$$

onde usamos nas igualdades anteriores a definição de derivada de função de uma variável e o Teorema Fundamental do Cálculo.

Analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y)$.

Logo $\nabla f(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = \vec{F}(x, y)$.

— o — o — o — o — o — o — o — o — o —

Resumindo a Proposição 4 e o Teorema 8, podemos enunciar:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – região.

$\gamma \subset \Omega$ – curva suave por partes, ligando A a B .

\vec{F} – campo vetorial contínuo sobre Ω .

$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente de $\gamma \iff \exists f$ tal que $\vec{F} = \nabla f$ em Ω .

Definição 9. Um campo vetorial \vec{F} para o qual existe uma função real f tal que $\vec{F} = \nabla f$ é chamado um **campo gradiente** ou **conservativo**. A função $-f$ é chamada o **potencial** de \vec{F} .

A motivação para chamarmos um campo gradiente por conservativo será colocada a seguir.

Suponhamos uma partícula de massa m percorrendo um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ suave por partes, sob a ação de um campo contínuo \vec{F} .

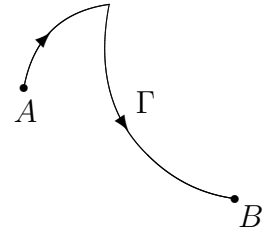
Temos:

$$W = \text{Trabalho} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Da segunda Lei de Newton temos: $F(\gamma(t)) = m \cdot \gamma''(t)$

Portanto,

$$\begin{aligned} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= m \cdot \gamma''(t) \cdot \gamma'(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \cdot \gamma'(t) \cdot \gamma'(t) \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \cdot \|\gamma'(t)\|^2 \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (v(t))^2 \right], \end{aligned}$$



onde $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ é a velocidade escalar da partícula.

Portanto,

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m (v(t))^2 \right) \right] dt = \frac{1}{2} m (v(b))^2 - \frac{1}{2} m (v(a))^2 = \\ &= K(b) - K(a) \text{ onde } K(t) = \frac{1}{2} m (v(t))^2 \end{aligned}$$

é a **energia cinética** da partícula no instante t . Assim,

Trabalho = variação da energia cinética.

Suponhamos agora que $\vec{F} = \nabla f$.

Sabemos da Proposição 4 que $W = f(B) - f(A)$.

Comparando com a fórmula acima, temos:

$$f(B) - f(A) = K(b) - K(a)$$

ou seja,

$$K(b) - f(B) = K(a) - f(A).$$

A quantidade $-f(P)$ é chamada **energia potencial** da partícula em P .

Portanto, a soma da energia potencial com a energia cinética permanece constante quando a partícula se move ao longo de um campo gradiente. Esta é a razão de chamarmos este tipo de campo como “**Campo Conservativo**”.

Exercício

Encontrar o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x, y, z) = \frac{K}{x^2 + y^2 + z^2} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ ao longo da curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$

Resolução:

Poderíamos resolver usando a definição.

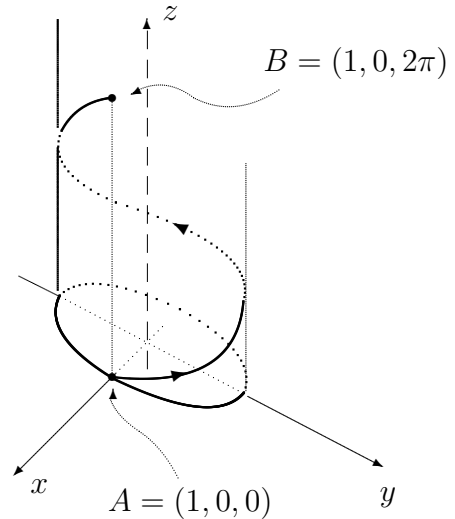
Tentaremos resolver aplicando a Proposição 4.

Procuramos f tal que

$$f_x(x, y, z) = \frac{Kx}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1)$$

$$f_y(x, y, z) = \frac{Ky}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2)$$

$$f_z(x, y, z) = \frac{Kz}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3)$$



Integrando (1) em relação a x obtemos

$$f(x, y, z) = \int \frac{Kx}{x^2 + y^2 + z^2} dx + \phi(y, z) = \frac{K}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \phi(y, z) \quad (4)$$

Assim,

$$f_y(x, y, z) = \frac{Ky}{x^2 + y^2 + z^2} + \phi_y(y, z).$$

Comparando com (2) temos $\phi_y(y, z) = 0$ e assim $\phi = \phi(z)$, isto é ϕ não depende de y .

Logo (4) pode ser escrita como

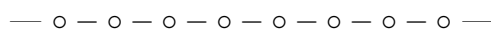
$$f(x, y, z) = \frac{K}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \phi(z)$$

Diferenciando com respeito a z e comparando com (3) obtemos $\phi'(z) = 0$ e assim $\phi \equiv C$.

Tomemos $\phi \equiv 0$.

$$\text{Portanto } f(x, y, z) = \frac{K}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$\text{Assim } W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(1, 0, 2\pi) - f(1, 0, 0) = \frac{K}{2} \ln(1 + 4\pi^2).$$



Problema: Dado \vec{F} , como saber se $\exists f$ tal que $\nabla f = \vec{F}$?

Teorema 10. Seja $\vec{F}(x, y) = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}$, onde $A(x, y)$ e $B(x, y)$ são de classe C^1 num retângulo $\mathfrak{R} = [a, b] \times [c, d]$.

$$A_y = B_x \text{ em } \mathfrak{R} \iff \exists f \text{ tal que } \nabla f = \vec{F} \text{ em } \mathfrak{R}.$$

Prova:

(\Leftarrow)

Se $\nabla f = \vec{F}$ então $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $B = \frac{\partial f}{\partial y}$. Logo

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \stackrel{\text{Teo. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

(\Rightarrow)

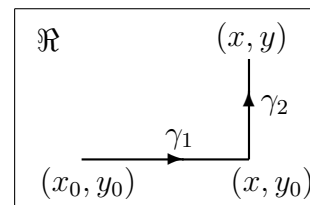
Faremos argumento semelhante ao feito na prova do Teorema anterior.

Fixemos $(x_0, y_0) \in \mathfrak{R}$.

Seja $f(x, y)$ definida em \mathfrak{R} por:

$$f(x, y) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde γ é a curva indicada na figura ao lado.



Consideremos as parametrizações $\gamma_1 : [x_0, x] \rightarrow \mathfrak{R}$ dada por $\gamma_1(t) = (t, y_0)$ e $\gamma_2 : [y_0, y] \rightarrow \mathfrak{R}$ dada por $\gamma_2(t) = (x, t)$.

$$\text{Assim } f(x, y) = \int_{x_0}^x A(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y B(x, t) dt.$$

$$\text{Então: } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = B(x, y).$$

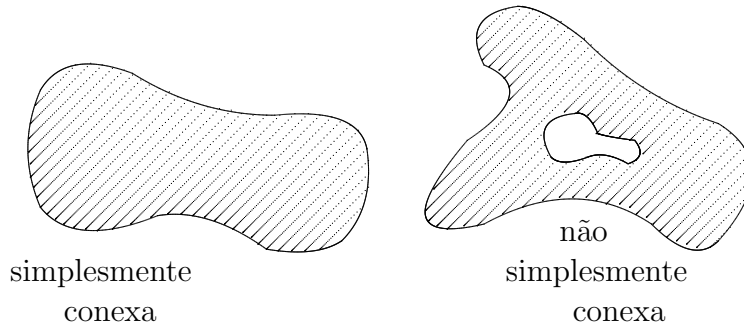
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= A(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial B}{\partial x}(x, t) dt \stackrel{\text{hip.}}{=} A(x, y_0) + \\ &+ \int_{y_0}^y \frac{\partial A}{\partial y}(x, t) dt = A(x, y_0) + A(x, y) - A(x, y_0) = \\ &= A(x, y). \end{aligned}$$

Portanto, $\nabla f(x, y) = \vec{F}(x, y)$.

Observação:

O teorema anterior continua válido se ao invés do retângulo \mathfrak{R} considerarmos uma **região** Ω **simplesmente conexa**, isto é, Ω não apresenta “buracos”. [Mais precisamente, uma

região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dita simplesmente conexa se toda curva fechada contida em Ω puder ser deformada continuamente dentro de Ω até reduzir-se a um ponto.] No entanto, o teorema não é válido para regiões quaisquer, conforme mostra o exemplo a seguir.



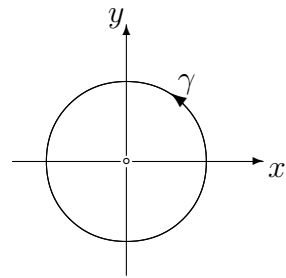
Exemplo:

Seja $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}; \quad (x, y) \in \mathcal{D} = \mathbb{R}^2 - \{0\}$$

$$A(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \Rightarrow A_y(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$B(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow B_x(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$



Se existir f tal que $\nabla f = \vec{F}$ em \mathcal{D} , então $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = 0$.

Mas, calculando pela definição,

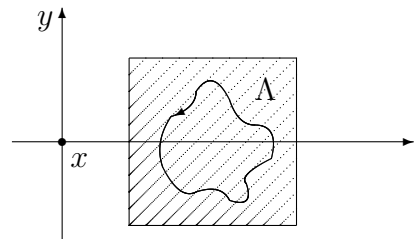
$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Portanto, $\nexists f$ definida em \mathcal{D} com a propriedade acima.

No entanto, para qualquer curva fechada Λ contida em um retângulo contido em \mathcal{D} teremos:

$$\int_{\Lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Um resultado análogo ao teorema anterior também é válido para \mathbb{R}^3 . Vejamos.

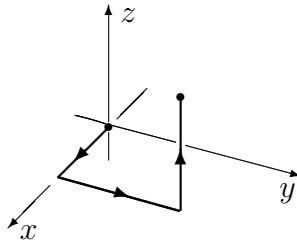


Teorema 11. Seja $\vec{F}(x, y, z) = A(x, y, z)\vec{i} + B(x, y, z)\vec{j} + C(x, y, z)\vec{k}$ onde A , B e C são de classe C^1 no paralelepípedo $\mathfrak{R} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$.

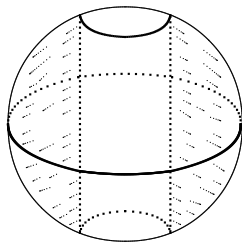
Então \vec{F} é conservativo em \mathfrak{R} se e somente se

$$A_y = B_x, \quad A_z = C_x \quad \text{e} \quad B_z = C_y \quad \text{em } \mathfrak{R}$$

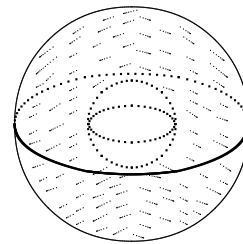
Observação: A prova é semelhante à do teorema anterior, sendo que a função potencial do campo pode ser obtida integrando \vec{F} sobre uma poligonal contida em \mathfrak{R} como abaixo:



Observação: O teorema anterior continua válido se ao invés do paralelepípedo \mathfrak{R} considerarmos uma região Ω simplesmente conexa como na Observação depois do **Teorema 10**. Note que no \mathbb{R}^3 uma região simplesmente conexa pode apresentar “buracos” como entendidos na linguagem comum. Tal é o caso de uma bola da qual foi retirada o centro. Já uma bola da qual foi retirado um diâmetro não é uma região simplesmente conexa.



Não simplesmente
conexa



Simplesmente
conexa

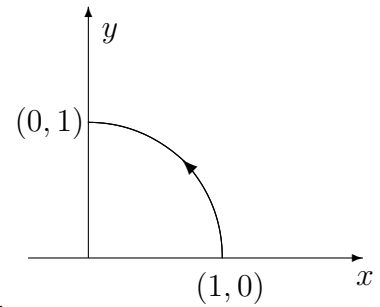
Exercícios resolvidos

1. Seja $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$, $t \in [0, \pi/2]$

$$\vec{F}(x, y) = y^2 \vec{i} + (2xy - e^y) \vec{j}.$$

Calcular $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Resolução:



1º Método:

Pela definição:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t, 2 \cos t \sin t - e^{\sin t}) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \dots$$

2º Método:

\vec{F} é do tipo gradiente?

$A_y = 2y = B_x$ em qualquer retângulo.

Portanto é gradiente.

Procuramos f tal que $\nabla f = \vec{F}$, isto é,

$$f_x(x, y) = y^2 \quad (1)$$

$$f_y(x, y) = 2xy - e^y \quad (2)$$

Logo $f(x, y) = xy^2 + \phi(y)$

$$f_y(x, y) = 2xy + \phi'(y) \stackrel{(2)}{=} 2xy - e^y$$

$$\therefore \phi'(y) = -e^y \Rightarrow \phi(y) = -e^y$$

$$\therefore f(x, y) = xy^2 - e^y$$

Logo,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(0, 1) - f(1, 0) = 1 - e$$

3º Método:

Sabemos que \vec{F} é do tipo gradiente em \mathbb{R}^2 . Logo, a integral não depende da curva.

Vamos calcular sobre o segmento de (1,0) até (0,1).

Consideremos $\gamma(t) = (1-t)\vec{i} + t\vec{j}$, $t \in [0, 1]$

Assim:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^2, 2t(1-t) - e^t) \cdot (-1, 1) dt = \int_0^1 [-t^2 + 2t(1-t) - e^t] dt = 1 - e$$

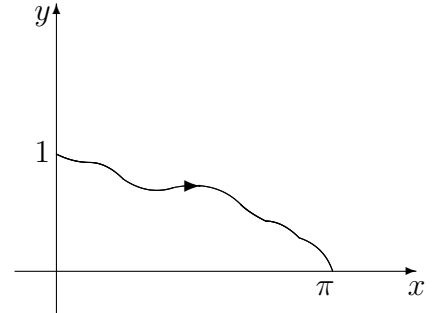
2. Calcular $\int_{\gamma} (y + \sin x)dx + (x + e^y)dy$ onde γ é uma curva suave por partes, de $(0, 1)$ a $(\pi, 0)$.

Resolução:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

Portanto vale a condição do Teorema 10

em qualquer retângulo \mathfrak{R} .



$$f(x, y) = \int_0^x \sin t \, dt + \int_0^y (x + e^t)dt = xy + e^y - \cos x$$

Logo,

$$\int_{\Gamma} (y + \sin x)dx + (x + e^y)dy = \int_{\Gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\pi, 0) - f(0, 1) = 3 - e$$

3. Considere $\vec{F}(x, y, z) = y^2\vec{i} + (2xy + e^{3z})\vec{j} + 3ye^{3z}\vec{k}$. Encontre uma função f tal que $\nabla f = \vec{F}$.

Resolução:

Queremos $f(x, y, z)$ tal que:

$$f_x(x, y, z) = y^2 \quad (1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2xy + e^{3z} \quad (2)$$

$$f_z(x, y, z) = 3ye^{3z} \quad (3)$$

Integrando (1) com respeito a x , obtemos:

$$f(x, y, z) = xy^2 + \phi(y, z) \quad (4)$$

Assim $f_y(x, y, z) = 2xy + \phi_y(y, z)$.

Comparando com (2) obtemos

$$\phi_y(y, z) = e^{3z}.$$

Logo $\phi(y, z) = ye^{3z} + h(z)$.

Reescrevendo (4):

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z).$$

Diferenciando com relação a z e comparando com (3) obtemos $h'(z) = 0$ e assim $h(z) = K$.

Logo: $f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K$ é tal que $\nabla f = \vec{F}$.

4. Seja \vec{F} um campo de quadrado inverso tal que

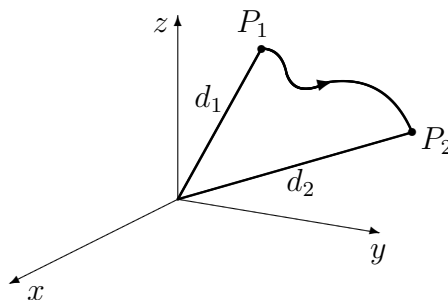
$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}, \text{ onde}$$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e c é uma constante. Sejam P_1 e P_2 pontos cujas distâncias à origem são d_1 e d_2 , respectivamente.

Expresse em termos de d_1 e d_2 o trabalho realizado por \vec{F} ao longo de uma curva suave por partes unindo P_1 a P_2 .

Resolução:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$



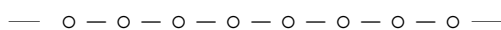
Notemos que

$$\|\vec{F}(x, y, z)\| = \frac{|c|}{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ ou seja, } \vec{F} \text{ é do tipo quadrado inverso.}$$

Observemos então que $\vec{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ onde $f(x, y, z) = \frac{-c}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}$.

Assim:

$$W = f(P_2) - f(P_1) = \frac{-c}{d^2} + \frac{c}{d_1} = \frac{c(d_2 - d_1)}{d_1 d_2}.$$



Exercícios propostos

1. Calcular $\oint_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, onde γ é a fronteira do disco unitário, centro em $(2, 0)$.

2. Calcular $\int_{\gamma} (3x^2y - \operatorname{sen} x) dx + x^3 dy$ onde γ é a curva

$$\gamma(t) = ((1 - \pi)t^2 + \pi, t), \quad t \in [0, 1]$$

3. Calcular $\int_{\gamma} x dy + y dx$ onde γ é uma curva suave unindo $(1, 1)$ a $(2, 3)$.

4. Prove: Se \vec{F} é um campo vetorial contínuo definido numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então são equivalentes:

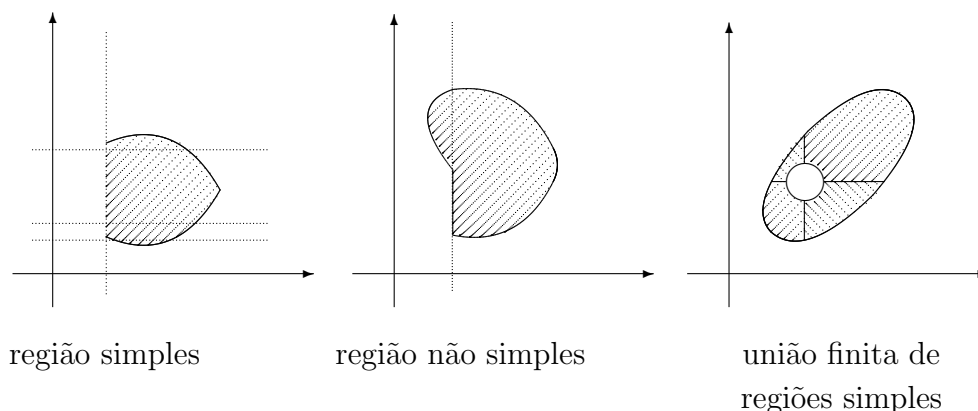
(a) $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para qualquer curva fechada $\gamma \subset \Omega$.

(b) $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho suave por partes, γ , ligando dois pontos em Ω .

5. Calcular o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x, y) = (2 - 5x + y)\vec{i} + x\vec{j}$ ao deslocarmos uma partícula de massa unitária ao longo do triângulo de vértices $(2, 2)$, $(3, 1)$ e $(3, 2)$, no sentido anti-horário.

1.3 Teorema de Green

Definição 12. Uma região $B \subset \mathbb{R}^2$ é dita uma **região simples** se toda reta paralela a um dos eixos coordenados corta a fronteira de B em um segmento ou, no máximo, em dois pontos.



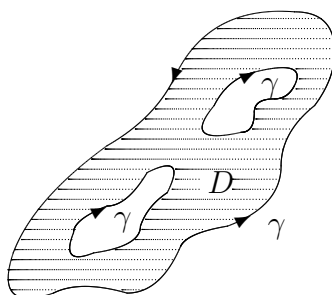
Teorema 13 (de Green). *Seja \mathcal{D} região plana limitada, que é reunião finita de regiões simples, cada uma com fronteira constituída de uma curva suave por partes. Se $A(x, y)$ e $B(x, y)$ são de classe C^1 num aberto contendo \mathcal{D} e a sua fronteira γ , então:*

$$\int_{\gamma} A(x, y)dx + B(x, y)dy = \iint_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right] dx dy$$

onde γ é percorrida deixando \mathcal{D} sempre à esquerda (dizemos γ -orientada positivamente).

De maneira abreviada:

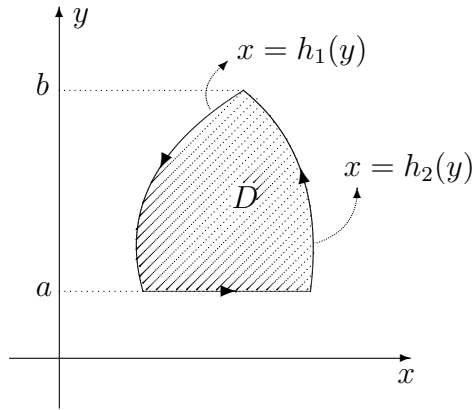
$$\int_{\gamma} A dx + B dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy$$



Prova:

1º Caso:

Suponhamos \mathcal{D} -região simples (com o aspecto abaixo, por exemplo)



$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) dx dy &= \int_a^b dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) dx = \\
 &= \int_a^b [B(h_2(y), y) - B(h_1(y), y)] dy = \\
 &= \int_a^b B(h_2(y), y) dy + \int_b^a B(h_1(y), y) dy = \int_{\gamma} B(x, y) dy
 \end{aligned}$$

A última igualdade ocorre, uma vez que a parte paralela ao eixo x em nada contribui com a integral.

Analogamente,

$$\int_{\gamma} A(x, y) dx = - \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) dx dy$$

A soma destas igualdades fornece a prova deste primeiro caso.

2º Caso:

Suponhamos $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \dots \cup \mathcal{D}_n$ reunião finita de regiões simples, cada uma com uma fronteira constituída de uma curva suave por partes γ_i , $i = 1, \dots, n$.

Temos já provado:

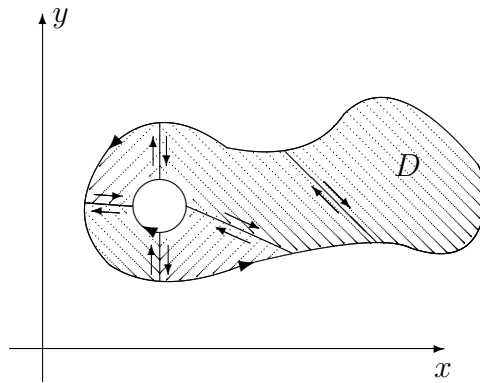
$$\int_{\gamma_i} A dx + B dy = \iint_{\mathcal{D}_i} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy$$

A soma das integrais sobre \mathcal{D}_i é uma integral sobre \mathcal{D} . Logo,

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} A dx + B dy \quad (*)$$

A fronteira de \mathcal{D} é constituída de partes das curvas γ_i .

Podem existir partes das curvas γ_i que não fazem parte de γ , como mostra a figura a seguir.



Estas partes serão percorridas duas vezes, uma em cada sentido, em nada contribuindo com o membro direito de (*).

Logo,

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} A dx + B dy$$

Aplicação: Área de uma região plana

Tomando-se $A \equiv 0$ e $B(x, y) = x$, temos Área de $\mathcal{D} = \iint_{\mathcal{D}} dx dy = \int_{\gamma} x dy$.

Tomando-se $A(x, y) = -y$ e $B \equiv 0$, temos Área de $\mathcal{D} = \iint_{\mathcal{D}} dx dy = - \int_{\gamma} y dx$

ou ainda:

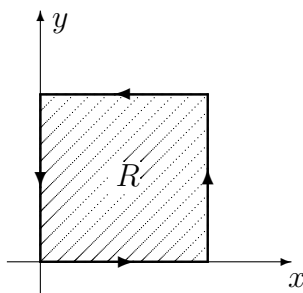
$$\text{Área de } \mathcal{D} = \frac{1}{2} \int_{\gamma} -y dx + x dy.$$

Exercícios resolvidos

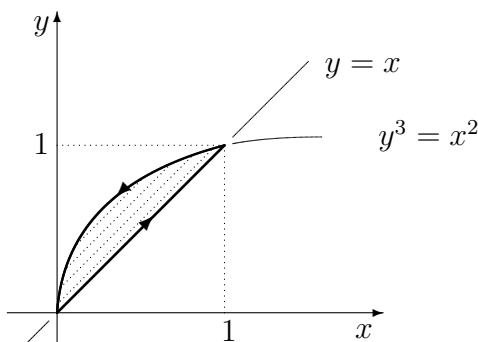
1. Use o Teorema de Green para calcular $\oint_{\Gamma} (1 + 10xy + y^2) dx + (6xy + 5x^2) dy$, onde Γ é o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a)$ e (a, a) .

Resolução:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (1 + 10xy + y^2)dx + (6xy + 5x^2)dy &= \iint_R [(6y + 10x) - (10x + 2y)] dx dy = \\ &= \iint_R 4y dx dy = \\ &= \int_0^a dy \int_0^a 4y dx = \dots = 2a^3. \end{aligned}$$



2. Calcular $\int_{\Gamma} x^2y dx + y^3 dy$, onde Γ é a curva indicada na figura.



Resolução:

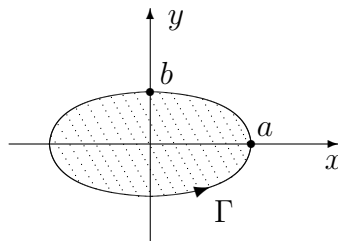
Seja \mathcal{D} a região limitada pela curva.

$$A(x, y) = x^2y, \quad \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = x^2$$

$$B(x, y) = y^3, \quad \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} x^2y dx + y^3 dy &= \iint_{\mathcal{D}} -x^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_x^{x^{2/3}} x^2 dy = \\ &= - \int_0^1 (x^{8/3} - x^3) dx = \dots = -\frac{1}{44}. \end{aligned}$$

3. Calcular a área limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Resolução:

Seja $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \text{área} &= \frac{1}{2} \oint x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t + b \sin t \cdot a \sin t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab \end{aligned}$$

4. $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$

$A(x, y) = A(r)$, $B(x, y) = B(r)$ funções de classe C^1 que dependem somente da distância r à origem.

Prove que

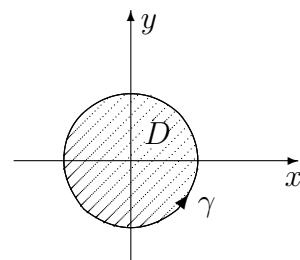
$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Resolução:

Seja $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Pelo Teorema de Green,

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} A(1) dx + B(1) dy$$



Considerando agora $\bar{A}(x, y) = A(1)$ e $\bar{B}(x, y) = B(1)$, $(x, y) \in \mathcal{D}$ (isto é, estendemos A e B como constantes em \mathcal{D}) e aplicando novamente o Teorema de Green obtemos

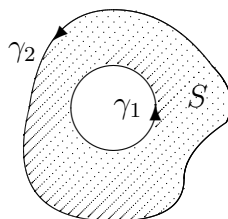
$$\int_{\gamma} A(1) dx + B(1) dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} 0 dx dy = 0$$

Assim:

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

5. Considere $\vec{F}(x, y) = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}$

$A, B \in C^1$ com $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$ na região S hachurada abaixo.



Prove que:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Resolução:

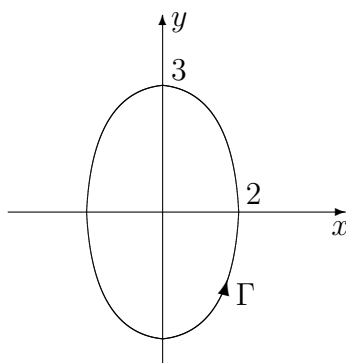
Pelo Teorema de Green:

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

$$\therefore \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

6. Considere $\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \vec{j}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ e $\Gamma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Calcular $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

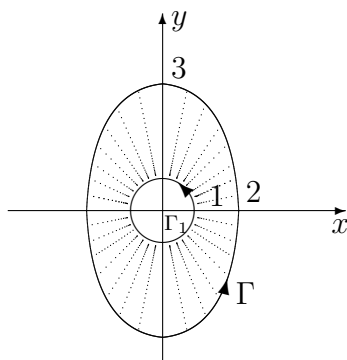


Resolução:

Torna-se difícil calcular diretamente.

Ainda: não podemos aplicar diretamente o Teorema de Green.

Observamos que $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$ na região hachurada ao lado.

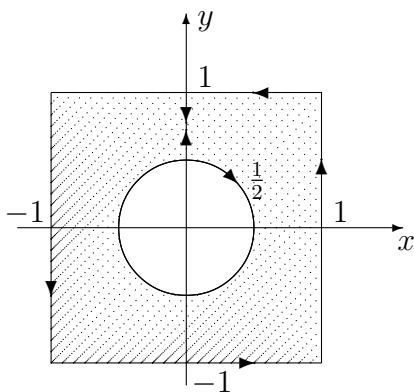


Pelo exercício anterior temos:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Exercícios propostos

1. Calcular $\int_{\gamma} (x^2 + y)dx = (2x + 2y)dy$, onde Γ é a curva indicada na figura.

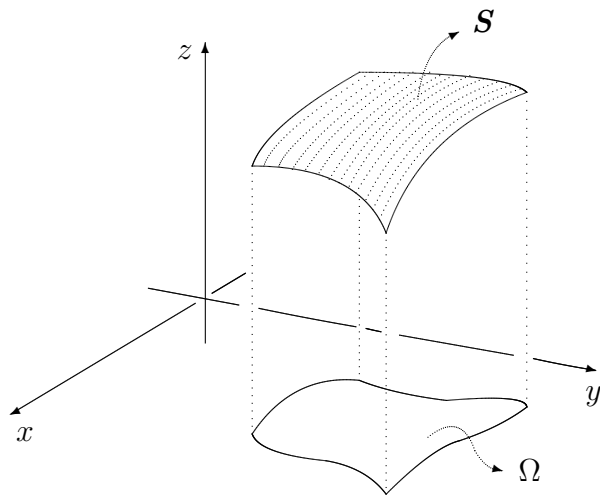


2. Use o Teorema de Green para calcular a integral $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde:

$$\vec{F}(x, y) = (\sin y - x^2 y)\vec{i} + (x \cos y + xy^2)\vec{j} = e \quad \Gamma \text{ é a circunferência } x^2 + y^2 = 1,$$
 orientada positivamente.
3. Calcule $\int_{\Gamma} \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$, onde Γ é a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, sentido anti-horário.
(Sugestão: usar a definição).

1.4 Integrais de Superfície

Consideremos o problema de definir área de uma superfície $\mathbf{S}: z = f(x, y)$ sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.



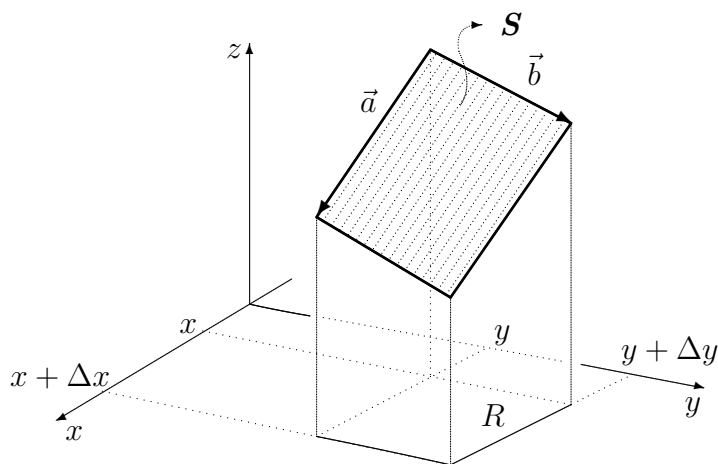
Começemos com uma superfície plana $\mathbf{S}: z = Ax + By + C$ sobre um retângulo R .

Sabemos que área de $\mathbf{S} = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$, onde:

ponto inicial de $\vec{a} = (x, y, Ax + By + C)$

ponto final de $\vec{a} = (x + \Delta x, y, A(x + \Delta x) + By + C)$

Logo $\vec{a} = (\Delta x, 0, A\Delta x)$ ou seja $\vec{a} = \Delta x \vec{i} + A\Delta x \vec{k}$.



Analogamente, $\vec{b} = \Delta y \vec{j} + B\Delta y \vec{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Delta x & 0 & A\Delta x \\ 0 & \Delta y & B\Delta y \end{vmatrix} = -A\Delta x \Delta y \vec{i} - B\Delta x \Delta y \vec{j} + \Delta x \Delta y \vec{k}.$$

Logo, área de $\mathbf{S} = \sqrt{A^2 + B^2 + 1} \Delta x \Delta y$.

Antes de passarmos ao caso geral, introduziremos uma nova nomenclatura.

Uma **superfície** \mathbf{S} será dita **suave** se o seu vetor normal unitário $\vec{\eta}$ variar continuamente através de \mathbf{S} .

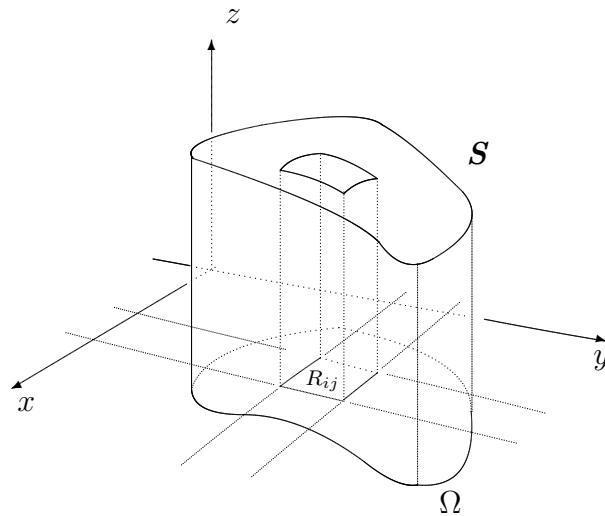
Se $\mathbf{S}: z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, então \mathbf{S} é suave se e somente se f é de classe C^1 sobre Ω (isto é, f_x e f_y são contínuas sobre um aberto contendo Ω).

Ainda, se $\mathbf{S}: z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ onde Ω é do tipo considerado para integrais duplas (fronteira contida em um número finito de conjuntos suaves) diremos que \mathbf{S} tem **projeção regular** no plano xy .

Consideremos então $\mathbf{S}: z = f(x, y)$, suave, com projeção regular Ω no plano xy .

Seja G uma rede cobrindo a região Ω .

Seja (x_i, y_j) o centro de cada retângulo coordenado R_{ij} determinado por G .



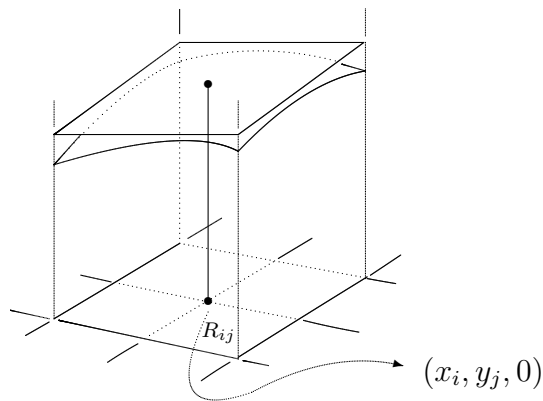
Aproximamos a área de \mathbf{S} sobre o retângulo R_{ij} pela área do plano tangente a \mathbf{S} pelo ponto $(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$.

A equação do plano tangente é:

$$(x - x_i) \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) + (y - y_j) \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) - (z - f(x_i, y_j)) = 0$$

ou

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j)y + C_{ij}$$



∴ Área sobre R_{ij} , no plano tangente considerado é:

$$\sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j)\right]^2 + 1} \cdot \Delta x_i \Delta y_j$$

Esta expressão dá uma estimativa para a área da superfície sobre R_{ij} .

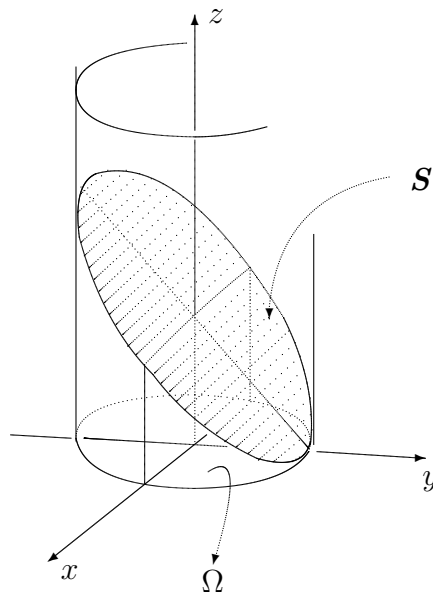
Somando, teremos uma estimativa para a área de \mathbf{S} .

Fazendo $m(G) \rightarrow 0$, temos:

$$\iint_{\Omega} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx \, dy \stackrel{\text{def.}}{=} \text{Área de } \mathbf{S}$$

Exemplos:

1. Ache a área da região do plano $z = -y + 1$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.



Seja $z = f(x, y) = -y + 1$

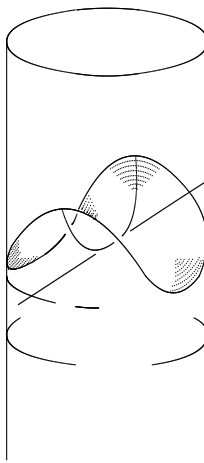
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$f_x(x, y) = 0$$

$$f_y(x, y) = -1$$

$A(\mathcal{S}) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + 1} dA = \sqrt{2} \int_{\Omega} dA = \sqrt{2} \pi$, onde usamos o fato que $\int_{\Omega} dA$ é a área do círculo de raio 1.

2. Calcular a área do parabolóide hiperbólico $z = xy$ que fica dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

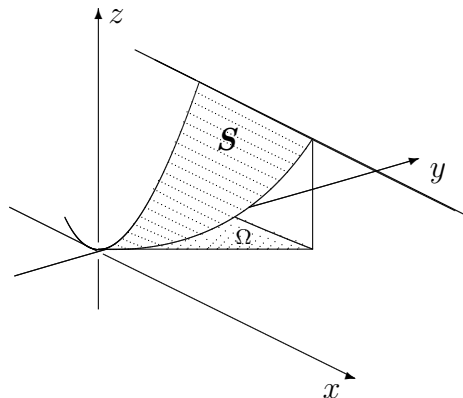


$$\text{Área} = \iint_{\Omega} \sqrt{y^2 + x^2 + 1} dx dy$$

Integrando em coordenadas polares:

$$\text{Área} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} r dr = \dots = \frac{2}{3} \pi [2\sqrt{2} - 1]$$

3. Dar a área da parte do cilindro $z = y^2$ que fica sobre o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$.



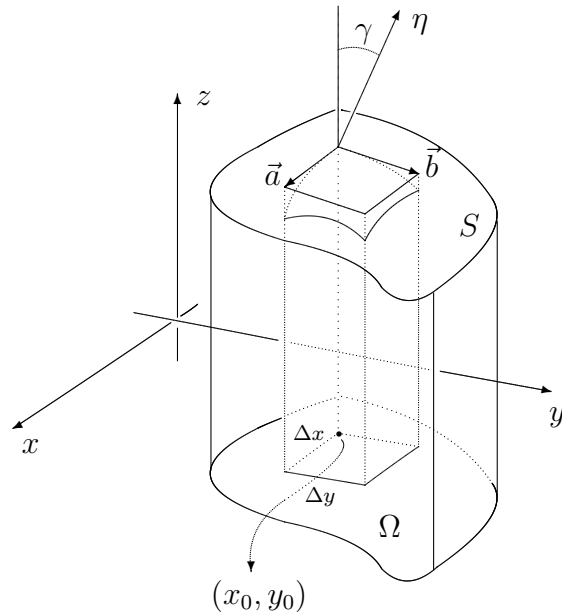
$$\begin{aligned}
 A(\mathcal{S}) &= \iint_{\Omega} \sqrt{4y^2 + 1} \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_0^y \sqrt{4y^2 + 1} \, dx = \\
 &= \int_0^1 \sqrt{4y^2 + 1} \, y \, dy = \dots = \frac{1}{12}(5\sqrt{5} - 1)
 \end{aligned}$$

— ○ — ○ — ○ — ○ — ○ — ○ — ○ — ○ — ○ —

Seja $\mathcal{S} : z = f(x, y)$ suave, com projeção regular Ω no plano xy .

$\vec{\eta}$ = vetor unitário normal a \mathcal{S} por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Sejam α, β e γ os ângulos que $\vec{\eta}$ faz com os semi-eixos positivos $0x, 0y, 0z$, respectivamente.



$$\vec{\eta} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k} \quad (*)$$

Convencionamos: $\vec{\eta}$ é tomado de modo que $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ (normal superior).

Observação: Com estas hipóteses, a situação $\gamma = \frac{\pi}{2}$ não ocorre. (Justifique)

Seja o retângulo ilustrado e a sua correspondente imagem no plano tangente a \mathcal{S} por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

A equação deste plano pode ser escrita como:

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y + C$$

Pelo visto anteriormente,

$$\vec{a} \times \vec{b} = [-f_x(x_0, y_0)\vec{i} - f_y(x_0, y_0)\vec{j} + \vec{k}] \Delta x \Delta y$$

$$\vec{\eta} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = \frac{-f_x(x_0, y_0)\vec{i} - f_y(x_0, y_0)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{[f_x(x_0, y_0)]^2 + [f_y(x_0, y_0)]^2 + 1}}$$

Comparando com (*),

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{[f_x(x_0, y_0)]^2 + [f_y(x_0, y_0)]^2 + 1}}$$

$$\text{Assim } \sqrt{[f_x(x_0, y_0)]^2 + [f_y(x_0, y_0)]^2 + 1} = \sec \gamma .$$

Variando o ponto $(x_0, y_0) : \gamma = \gamma(x, y)$

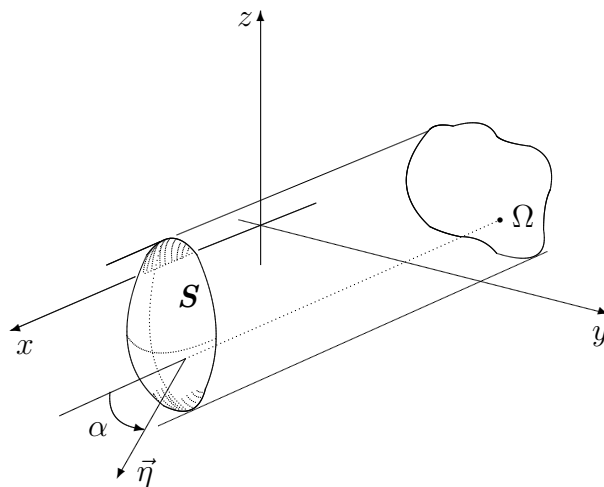
$$\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} = \sec \gamma(x, y)$$

$$\therefore \boxed{\text{Área de } \mathbf{S} = \iint_{\Omega} \sec \gamma(x, y) dx dy}$$

De modo análogo:

Se $\mathbf{S} : x = g(y, z)$ com hipóteses semelhantes às anteriores, teremos:

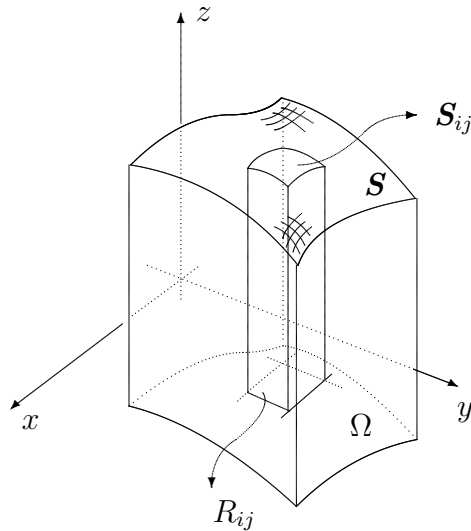
$$\text{Área de } \mathbf{S} = \iint_{\Omega} \sec \alpha(y, z) dy dz$$



Massa de uma Lâmina Curva

Consideremos uma lâmina que tenha a forma de uma superfície \mathcal{S} , a qual se projeta regularmente em Ω , no plano xy .

Problema: Definir a massa da lâmina.



Se a densidade ρ é constante, então massa = $\rho \cdot (\text{Área de } \mathcal{S})$.

Suponhamos $\rho = \rho(x, y, z)$ contínua.

$\mathcal{S} : z = f(x, y)$ suave, com projeção regular Ω no plano xy .

Seja G uma rede cobrindo Ω .

Seja (x_i, y_i) o centro de cada retângulo coordenado R_{ij} determinado por G .

Consideremos

$$\mathcal{S}_{ij} : z = f(x, y); \quad (x, y) \in R_{ij}.$$

Se R_{ij} é pequeno, a densidade em \mathcal{S}_{ij} é aproximadamente $\rho(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ (ρ é contínua) e assim,

$$\begin{aligned} \text{massa de } \mathcal{S}_{ij} &\simeq \rho(x_i, y_j, f(x_i, y_j)) \cdot \text{Área } \mathcal{S}_{ij} \simeq \\ &\simeq \rho(x_i, y_j, f(x_i, y_j)) \cdot \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1} \Delta x_i \Delta y_j \end{aligned}$$

Somando, teremos uma estimativa para a massa de \mathcal{S} .

Fazendo $m(G) \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned} \text{massa de } \mathbf{S} &\stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{\Omega} \rho(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} \, dx \, dy \\ &= \iint_{\Omega} \rho(x, y, f(x, y)) \sec \gamma(x, y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Exercício resolvido

1. Calcular a massa de uma lâmina que tem a forma do cone $z^2 = x^2 + y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 4$, se a densidade é proporcional à distância ao eixo $0z$.

Resolução:

$$\rho(x, y, z) = k \sqrt{x^2 + y^2}$$

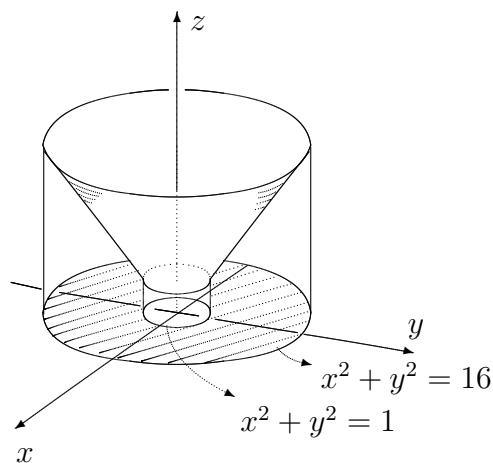
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_x^2 + f_y^2 + 1 = 2$$

$$\therefore \sec \gamma(x, y) = \sqrt{2}$$



$$\text{massa} = \iint_{\Omega} k \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{2} \, dx \, dy = \sqrt{2} k \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^4 r \cdot r \, dr = \dots = 2\sqrt{2} k\pi \left(\frac{4^3 - 1}{3} \right).$$

— o — o — o — o — o — o — o — o — o —

$\mathbf{S} : z = f(x, y)$ suave, com projeção regular Ω no plano xy .

Seja ainda $H(x, y, z)$ contínua em um aberto contendo \mathbf{S} .

Definição 14. A *integral de superfície* de H sobre \mathbf{S} é definida (e denotada) por:

$$\iint_{\mathbf{S}} H(x, y, z) \, d\mathbf{S} = \iint_{\Omega} H(x, y, f(x, y)) \sec \gamma(x, y) \, dx \, dy$$

Observação: É uma generalização da integral de linha.

Casos Especiais:

(i) $H(x, y, z) \equiv 1 \Rightarrow \iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} = \text{Área de } \mathcal{S}.$

(ii) $H(x, y, z) = \text{densidade no ponto } (x, y, z) \text{ de uma lâmina } \mathcal{S}.$

$$\iint_{\mathcal{S}} H(x, y, z) d\mathcal{S} = \text{massa da lâmina.}$$

Aplicação: Fluxo de um Fluido através de \mathcal{S}

Suponhamos \mathcal{S} imersa num fluido que escoa com velocidade \vec{V} (variando de ponto a ponto mas não com o tempo).

Fluxo através de $\mathcal{S} = \text{volume do fluido que atravessa } \mathcal{S} \text{ na unidade de tempo.}$

Casos Particulares:

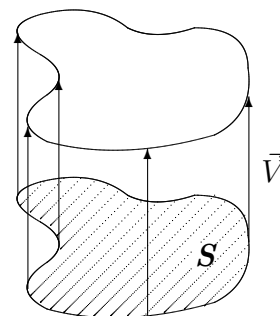
(i) \mathcal{S} - plana

\vec{V} - constante

$\vec{V} \perp \mathcal{S}$

Fluxo por $\mathcal{S} = \text{volume do cilindro} =$

$$= \|\vec{V}\| \cdot (\text{área de } \mathcal{S}).$$



(ii) \mathcal{S} - plana

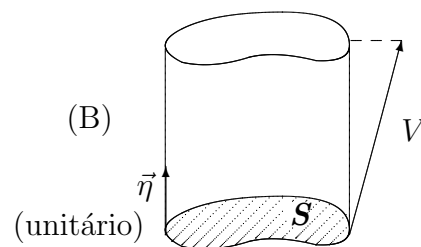
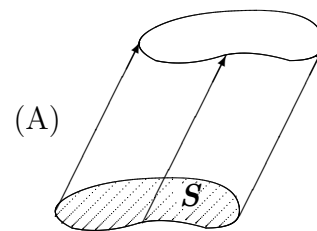
\vec{V} - constante

\vec{V} - não perpendicular a \mathcal{S}

Fluxo por $\mathcal{S} = \text{volume do cilindro (A)} =$

$= \text{volume do cilindro (B)} =$

$$= (\vec{V} \cdot \vec{\eta}) \cdot (\text{Área de } \mathcal{S}).$$



Caso Geral:

$\mathcal{S} : z = f(x, y)$ suave, com projeção regular Ω no plano xy .

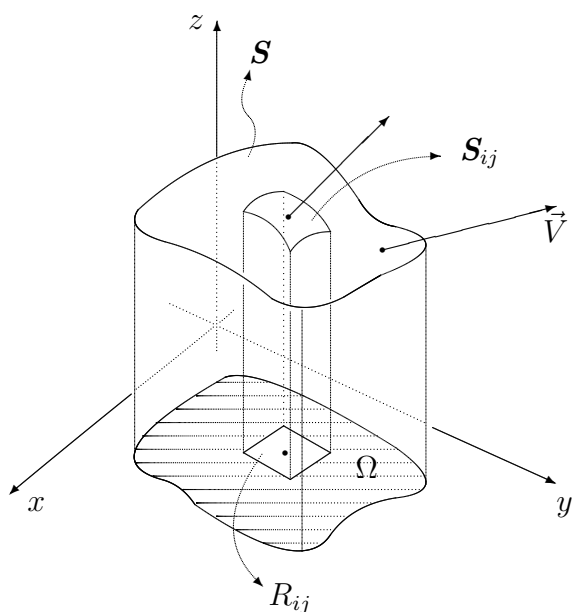
$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$ - contínuo.

Problema:

Definir fluxo através de \mathcal{S} .

Seja G uma rede cobrindo Ω , com retângulos R_{ij} dividindo \mathcal{S} em pedaços \mathcal{S}_{ij} .

(x_i, y_j) - centro de R_{ij} .



Se \mathcal{S}_{ij} é pequeno, supomos que $\vec{V} = \text{constante} = \vec{V}(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ em todo \mathcal{S}_{ij} .

Tomamos o plano tangente a \mathcal{S} por $(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ e substituímos \mathcal{S}_{ij} pela imagem de R_{ij} no plano tangente, denotando por \mathcal{S}_{ij}^* .

$$\begin{aligned} \text{Fluxo por } \mathcal{S}_{ij} &\simeq \vec{V}(x_i, y_j, f(x_i, y_j)) \cdot \vec{\eta}(x_i, y_j, f(x_i, y_j)) \cdot (\text{área de } \mathcal{S}_{ij}^*) = \\ &= \vec{V}(x_i, y_j, f(x_i, y_j)) \cdot \vec{\eta}(x_i, y_j, f(x_i, y_j)) \cdot \sec \gamma(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j \end{aligned}$$

Somando e fazendo $m(G) \rightarrow 0$, temos:

$$\begin{aligned} \text{Fluxo por } \mathcal{S} &\stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{\Omega} \vec{V}(x, y, f(x, y)) \cdot \vec{\eta}(x, y, f(x, y)) \cdot \sec \gamma(x, y) dx dy = \\ &\stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{\mathcal{S}} \vec{V}(x, y, z) \cdot \vec{\eta}(x, y, z) d\mathcal{S} \stackrel{\text{abrev.}}{=} \iint_{\mathcal{S}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} d\mathcal{S} \end{aligned}$$

Observação: Se trocarmos $\vec{\eta}$ por $-\vec{\eta}$, o sinal da integral será trocado.

Teorema 15.

$\mathbf{S} : z = f(x, y)$, onde $f \in C^1$ em

$\Omega =$ projeção regular de \mathbf{S} no plano xy .

$\vec{\eta}$ - normal superior (unitário)

\vec{V} - campo vetorial contínuo

Então:

$$\iint_{\mathbf{S}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S} = \iint_{\Omega} (-v_1 f_x - v_2 f_y + v_3) \, dx \, dy$$

(a integranda calculada em $(x, y, f(x, y))$).

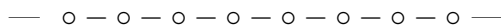
Prova:

Estamos supondo $\vec{V}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\vec{i} + v_2(x, y, z)\vec{j} + v_3(x, y, z)\vec{k}$.

Lembremos que $\vec{\eta} = \frac{-f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + \vec{k}}{\sec \gamma(x, y)}$.

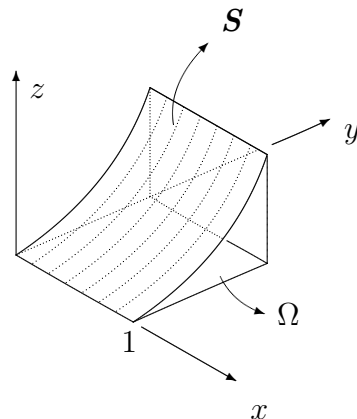
Logo,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{S}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S} &= \iint_{\Omega} \vec{V}(x, y, f(x, y)) \cdot [-f_x(x, y)\vec{i} - f_y(x, y)\vec{j} + \vec{k}] \, dx \, dy = \\ &= \iint_{\Omega} (-v_1 f_x - v_2 f_y + v_3) \, dx \, dy. \end{aligned}$$



Exercícios resolvidos

1. Calcule a integral $\iint_{\mathbf{S}} \sqrt{1 + y^2} \, d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{S} : z = \frac{1}{2}y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

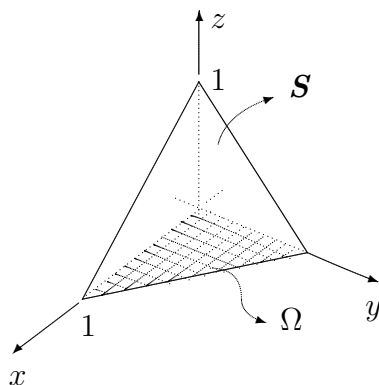


Resolução:

$$\sec \gamma(x, y) = \sqrt{1 + y^2}$$

$$\iint_{\mathbf{S}} \sqrt{1 + y^2} \, d\mathbf{S} = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + y^2} \cdot \sqrt{1 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_0^1 (1 + y^2) \, dx = \dots = \frac{4}{3}$$

2. Ache a massa de uma lâmina triangular com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, cuja densidade é proporcional ao quadrado da distância ao plano yz .



Resolução:

$$\rho(x, y, z) = kx^2$$

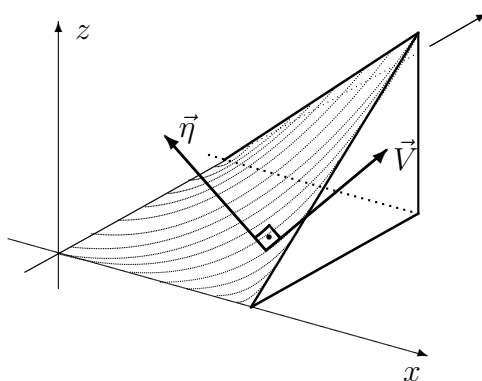
$$\text{Massa} = \iint_{\mathbf{S}} \rho(x, y, z) \, d\mathbf{S} = \iint_{\Omega} \rho(x, y, f(x, y)) \cdot \sec \gamma(x, y) \, dx \, dy$$

$$\mathbf{S}: z = f(x, y) = 1 - x - y$$

$$\sec \gamma(x, y) = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \text{Massa} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} kx^2 \cdot \sqrt{3} \, dy = \dots = \frac{1}{12} \sqrt{3} k$$

3. Determine o fluxo através de $\mathbf{S}: z = xy$ com $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ e $\vec{V} = x^2y\vec{i} + z^2\vec{k}$



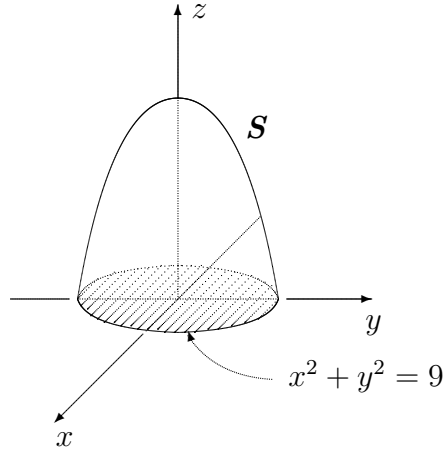
Resolução:

$$\begin{aligned} \text{Fluxo} &= \iint_{\mathbf{S}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S} \stackrel{\text{Teo.15}}{=} \iint_{\Omega} (-v_1f_x - v_2f_y + v_3) \, dx \, dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 (-x^2y^2 + x^2y^2) \, dy = 0 \end{aligned}$$

4. Sejam $S: z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0$, e $\vec{V}(x, y, z) = 3x\vec{i} + 3y\vec{j} + z\vec{k}$

Calcular $\iint_S \vec{V} \cdot \vec{\eta} dS$

Resolução:



Consideremos $\Omega: x^2 + y^2 \leq 9$ e $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$

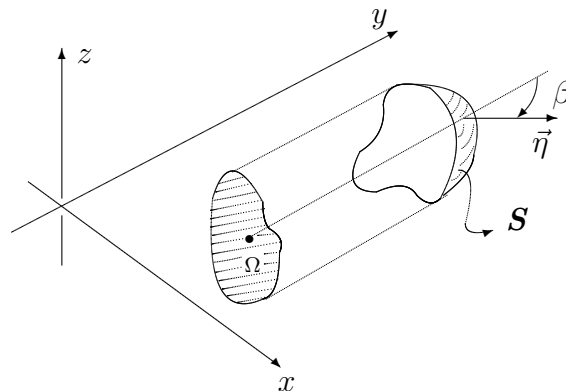
$$\begin{aligned} \iint_S \vec{V} \cdot \vec{\eta} dS &= \iint_{\Omega} [(-3x) \cdot (-2x) - (3y) \cdot (-2y) + (9 - x^2 - y^2)] dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} [5(x^2 + y^2) + 9] dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 (5r^2 + 9)r dr = \dots = \frac{567}{2} \pi \end{aligned}$$

— o — o — o — o — o — o — o — o — o — o —

Consideremos agora $S: y = g(x, z)$ suave, com projeção regular Ω no plano xz .

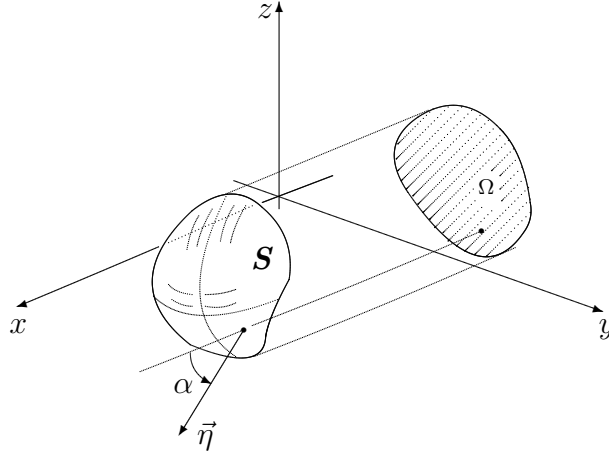
Definimos:

$$\iint_S H(x, y, z) dS = \iint_{\Omega} H(x, g(x, z), z) \sec \beta(x, z) dx dz$$



Analogamente, se $\mathbf{S}: x = h(y, z)$ suave, com projeção regular Ω no plano yz , definimos:

$$\iint_{\mathbf{S}} H(x, y, z) d\mathbf{S} = \iint_{\Omega} H(h(y, z), y, z) \cdot \sec \alpha(y, z) dy dz$$



Com estas considerações, podemos definir $\iint_{\mathbf{S}}$ quando \mathbf{S} é uma superfície “fechada”.

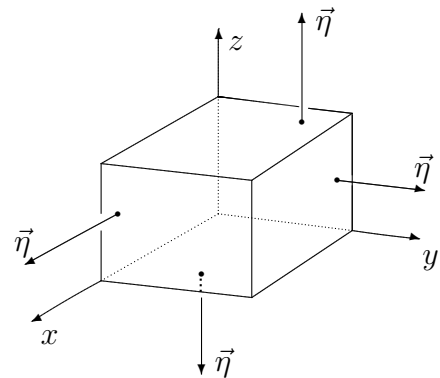
Nesse caso, convencionamos tomar $\vec{\eta}$ como a normal **externa** a \mathbf{S} . A integral $\iint_{\mathbf{S}} \vec{v} \cdot \vec{\eta} d\mathbf{S}$ mede o **fluxo que escoa para fora de \mathbf{S}** . Se for positiva, o fluxo para fora excede o fluxo para dentro (dizemos que dentro de \mathbf{S} temos uma **fonte**). Caso contrário, dizemos que dentro de \mathbf{S} temos um **sumidouro** ou **poço**.

Exercício resolvido

Calcule o fluxo total de $\vec{V}(x, y, z) = xy\vec{i} + 4yz^2\vec{j} - yz\vec{k}$ para fora do cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Resolução:

Face	$\vec{\eta}$	$\vec{V} \cdot \vec{\eta}$	Fluxo
$z = 1$	\vec{k}	$-yz$	$\iint_R -y dx dy = -\frac{1}{2}$
$z = 0$	$-\vec{k}$	yz	$\iint_R 0 dx dy = 0$
$x = 1$	\vec{i}	xy	$\iint_R y dy dz = \frac{1}{2}$
$x = 0$	$-\vec{i}$	$-xy$	$\iint_R 0 dy dz = 0$
$y = 1$	\vec{j}	$4yz^2$	$\iint_R 4z^2 dx dy = \frac{4}{3}$
$y = 0$	$-\vec{j}$	$-4yz^2$	$\iint_R 0 dx dz = 0$



$$\therefore \iint_{\mathcal{S}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathcal{S} = \frac{4}{3}. \quad \text{Assim, temos uma fonte no interior do cubo.}$$

Exercícios propostos

1. Seja $\mathcal{S} : z = f(x, y)$ suave, com projeção regular Ω no plano xy . Interprete geometricamente $\iint_{\mathcal{S}} H(x, y, z) \, d\mathcal{S}$, onde $H(x, y, z) \equiv C > 0$.
2. Mostre que uma integral dupla $\iint_{\Omega} g(x, y) \, dx \, dy$ do tipo considerado no Capítulo anterior é um caso particular de integral de superfície.

1.5 Divergente - Rotacional

Seja $\vec{F}(x, y, z) = A_1(x, y, z)\vec{i} + A_2(x, y, z)\vec{j} + A_3(x, y, z)\vec{k}$ um campo de vetores com derivadas parciais.

Definição 16. A *divergência de \vec{F}* , $\text{div } \vec{F}$, é definida por:

$$\text{div } \vec{F}_P = \frac{\partial A_1}{\partial x}(P) + \frac{\partial A_2}{\partial y}(P) + \frac{\partial A_3}{\partial z}(P).$$

No plano: $\vec{F}(x, y) = A_1(x, y)\vec{i} + A_2(x, y)\vec{j}$

$$\text{div } \vec{F}(x, y) = \frac{\partial A_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial A_2}{\partial y}(x, y).$$

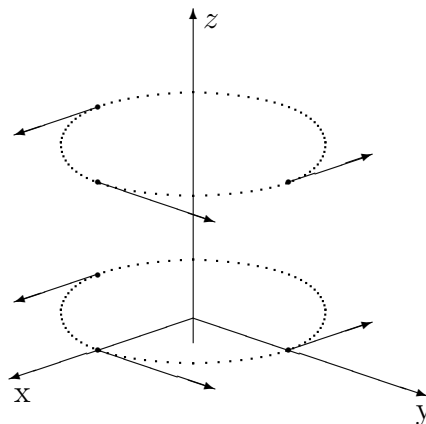
Exemplos:

$$1. \vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} - xy\vec{j} + xyz\vec{k}$$

$$\text{div } \vec{F}(x, y, z) = x + xy$$

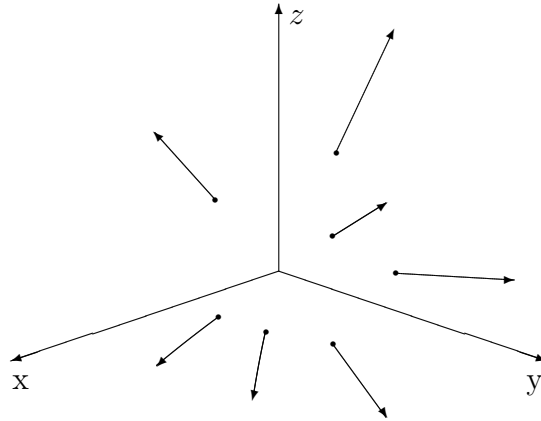
$$2. \vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

$$\text{div } \vec{F}(x, y, z) = 0$$



$$3. \vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 3$$



Definição 17. Seja $\vec{F} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$, com derivadas parciais. O **rotacional** de \vec{F} , $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F}$, é definido por:

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F}_P = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y}(P) - \frac{\partial A_2}{\partial z}(P) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z}(P) - \frac{\partial A_3}{\partial x}(P) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x}(P) - \frac{\partial A_1}{\partial y}(P) \right) \vec{k}$$

Pode ser calculado através do determinante simbólico:

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

No plano: $\vec{F}(x, y) = A_1(x, y)\vec{i} + A_2(x, y)\vec{j}$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F}(x, y) = \left[\frac{\partial A_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A_1}{\partial y}(x, y) \right] \vec{k}$$

Exercícios resolvidos

$$1. \vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{k} \quad (\text{rotação pura})$$

$$2. \vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F} = 0$$

Exercícios propostos

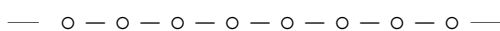
1. Sejam $\phi(x, y, z) = x^2yz^3$ e $\vec{F}(x, y, z) = xz\vec{i} - y^2\vec{j} + 2x^2y\vec{k}$

Calcular:

a) $\vec{\text{grad}} \phi$ b) $\text{div } \vec{F}$ c) $\vec{\text{rot}} \vec{F}$ d) $\text{div}(\phi \vec{F})$ e) $\vec{\text{rot}}(\phi \vec{F})$

2. Prove que $\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{F}) = 0$, onde $\vec{F} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$, com derivadas parciais segundas contínuas.

3. Prove que $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} f) = 0$, onde $f \in C^2$.



Observação:

Consideremos o operador ∇ (nabla) definido por:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Então:

$$\vec{\text{grad}} f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \nabla f,$$

notação que já vínhamos usando para o gradiente.

As notações abaixo, encontradas em muitos textos, são sugestivas:

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}.$$

Com a introdução do rotacional, podemos resumir alguns resultados já alcançados (Proposição 4 e Teoremas 8 e 10) do seguinte modo:

Seja \vec{F} um campo vetorial de classe C^1 num paralelepípedo $\mathfrak{R} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. \vec{F} é conservativo em \mathfrak{R} .

2. $\vec{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$ em \mathfrak{R} .

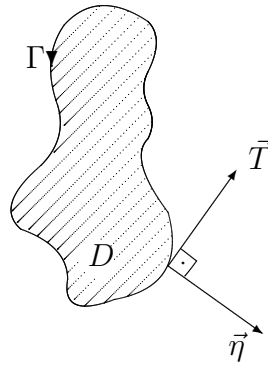
3. $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para qualquer curva fechada $\Gamma \subset \mathfrak{R}$, suave por partes.

4. $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente da curva suave por partes $\gamma \subset \mathfrak{R}$, ligando dois pontos em \mathfrak{R} .

1.6 Teoremas: Gauss - Stokes

Suponhamos $A, B, \Gamma, \mathcal{D}$ nas condições do teorema de Green (Teo. 13). Então:

$$\int_{\Gamma} -B dx + A dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx dy$$



Colocando

$$\vec{F}(x, y) = -B(x, y)\vec{i} + A(x, y)\vec{j}$$

$$\vec{V}(x, y) = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}$$

a equação acima fica:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{V} dx dy .$$

Lembrando que

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

(vide observação após a interpretação da integral de linha como trabalho).

e notando que

$$\vec{F} \cdot \vec{T} = \vec{V} \cdot \vec{\eta} \quad (*)$$

obtemos

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot \vec{\eta} ds = \iint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{V} dx dy}$$

Prova de (*):

Seja $\vec{\eta} = (a, b)$ e $\vec{T} = (-b, a)$ [rotação de 90° de $\vec{\eta}$ no sentido anti-horário].

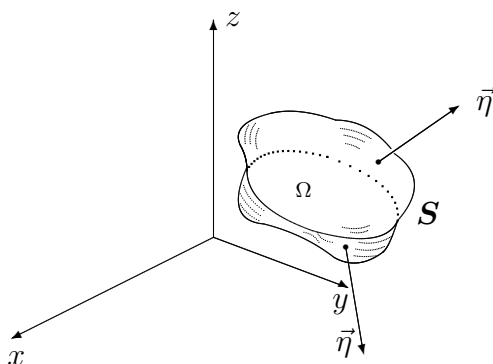
Temos: $\vec{F} = (-B, A)$ e $\vec{V} = (A, B)$.

Assim: $\vec{F} \cdot \vec{T} = Bb + Aa = \vec{V} \cdot \vec{\eta}$.

O teorema de Green, na formulação anterior, admite uma extensão.

Teorema 18 (da Divergência (ou Teorema de Gauss)). *Seja Ω um sólido limitado por uma superfície fechada S , formada por um número finito de superfícies suaves e seja $\vec{\eta}$ a normal externa unitária. Se as componentes de $\vec{V}(x, y, z)$ tem derivadas parciais contínuas num aberto contendo Ω , então:*

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz$$



Lembremos, antes de prosseguir, o Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral:

Seja $f : [a, b] \rightarrow R$ contínua. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$.

Resultado análogo continua válido para integrais triplas. Mais especificamente:

$g : E \rightarrow R$ contínua na esfera E . Então existe P_0 no interior de E tal que:

$$\iiint_E g(x, y, z) dx \, dy \, dz = g(P_0) \cdot \operatorname{vol}(E)$$

Interpretação Física da Divergência

P - ponto arbitrário.

B_ε - bola fechada de centro P , raio $\varepsilon > 0$, imersa em um fluido.

S_ε - superfície de B_ε .

$\vec{V}(x, y, z)$ - velocidade do fluido no ponto (x, y, z) , com derivadas parciais contínuas.

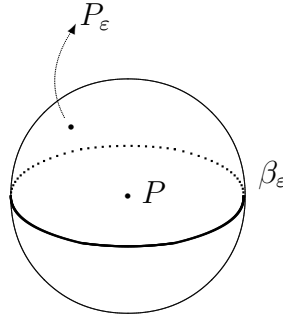
Pelo teorema da Divergência, temos:

$$\iint_{S_\varepsilon} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, dS = \iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz \quad (*)$$

Logo, $\iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz = \text{fluxo para fora de } S_\varepsilon$.

Aplicando o Teorema do Valor Médio para o segundo membro de (*), temos:

$$\int_{\mathbf{S}_\varepsilon} \vec{V} \cdot \vec{\eta} d\mathbf{S} = \operatorname{div} \vec{V}_{P_\varepsilon} \cdot \operatorname{vol}(B_\varepsilon)$$



onde $P_\varepsilon \in B_\varepsilon$, ou seja:

$$\operatorname{div} \vec{V}_{P_\varepsilon} = \frac{\iint_{\mathbf{S}_\varepsilon} \vec{V} \cdot \vec{\eta} d\mathbf{S}}{\operatorname{vol}(B_\varepsilon)}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que $P_\varepsilon \rightarrow P$ e assim

$$\operatorname{div} \vec{V}_P = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_{\mathbf{S}_\varepsilon} \vec{V} \cdot \vec{\eta} d\mathbf{S}}{\operatorname{vol}(B_\varepsilon)} \stackrel{\text{def.}}{=} \text{intensidade do fluxo em } P$$

Assim: $\operatorname{div} \vec{V}_P$ é o valor limite do fluxo por unidade de volume sobre uma esfera de centro em P , quando o raio da esfera tende a zero.

Se conhecermos $\operatorname{div} \vec{V}_P$ e tomamos uma pequena esfera de centro em P , temos:

$$\frac{\text{vol. do fluido para fora por unidade de tempo}}{\text{vol. da esfera}} \simeq \operatorname{div} \vec{V}_P$$

Logo, $\operatorname{div} \vec{V}_P > 0 \Rightarrow$ fluido “se afasta” de $P \Rightarrow P$ é uma fonte.

Se o fluido é incompressível, então $\operatorname{div} \vec{V} = 0$.

$\operatorname{div} \vec{V} = 0$ é chamada **equação de continuidade** dos fluidos incompressíveis.

Observação:

Podemos repetir o raciocínio acima para fluxo magnético ou elétrico.

Exercícios resolvidos

1. Comprove o teorema da divergência para o caso:

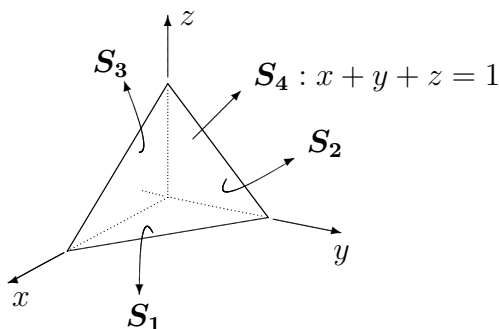
Ω - tetraedro limitado pelos planos coordenados e por $x + y + z = 1$.

$$\vec{V}(x, y, z) = 3x^2\vec{i} + xy\vec{j} + z\vec{k}$$

Resolução:

$$\operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) = 6x + x + 1 = 7x + 1$$

Consideremos:



$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 (7x + 1) dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \dots = \frac{1}{8}$$

$$\iint_{\mathbf{S}_1} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S} = \iint_{\mathbf{S}_1} (3x^2\vec{i} + xy\vec{j} + 0\vec{k}) \cdot (-\vec{k}) \, d\mathbf{S} = 0$$

$$\iint_{\mathbf{S}_2} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S} = \iint_{\mathbf{S}_2} (0\vec{i} + 0\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (-\vec{i}) \, d\mathbf{S} = 0$$

$$\iint_{\mathbf{S}_3} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S} = \iint_{\mathbf{S}_3} (3x^2\vec{i} + 0\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (-\vec{j}) \, d\mathbf{S} = 0$$

$$\mathbf{S}_4 : z = f(x, y) = 1 - x - y, \quad (x, y) \in \mathbf{S}_1$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{S}_4} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S} &\stackrel{\text{Teo.15}}{=} \iint_{\mathbf{S}_1} (-v_1 \cdot f_x - v_2 \cdot f_y + v_3) \, dx \, dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} [3x^2 + xy + (1 - x - y)] \, dx \, dy = \dots = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Logo,

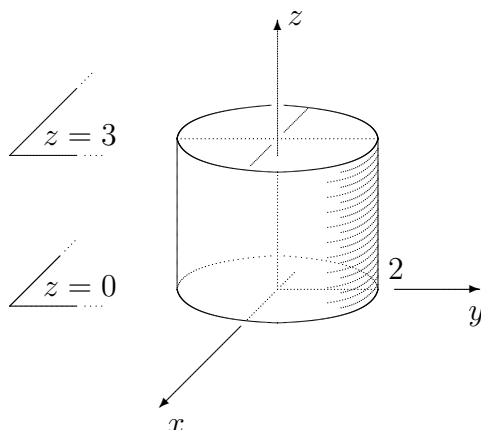
$$\iint_{\mathbf{S}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz$$

2. Sejam: Ω - sólido limitado por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 3$

$$\vec{V}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ e}$$

Use o teorema da divergência para calcular o fluxo $\iint_{\mathbf{S}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S}$.

Resolução:



Sem calcular, sabemos que $\iint_{\mathbf{S}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S} > 0$. Por que?

Calculando:

$$\iint_{\mathbf{S}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} 3 \, dx \, dy \, dz = 3 \cdot \text{vol}(\Omega) = 3 \cdot 12\pi = 36\pi$$

3. Idem ao exercício anterior, com $\vec{V}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.

Resolução:

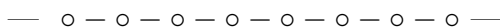
Sem calcular, sabemos que $\iint_{\mathbf{S}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S} = 0$. Por que?

Calculando:

$$\iint_{\mathbf{S}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} 0 \, dx \, dy \, dz = 0$$

Exercícios propostos

1. Se Ω é o cubo unitário $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, calcule o fluxo de $\vec{V}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ para fora de Ω .
2. Calcule o fluxo de $\vec{V} = x\vec{i} + 2y^2\vec{j} + 3z^2\vec{k}$ para fora do sólido $\Omega : x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 1$.



Voltemos a examinar o Teorema de Green.

Suponhamos $A, B, \Gamma, \mathcal{D}$ nas condições do Teorema. Então:

$$\int_{\Gamma} A dx + B dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy$$

Lembrando que se $\vec{V}(x, y) = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}$, então

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(x, y) = \left[\frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right] \vec{k},$$

podemos reescrever a fórmula acima como:

$$\oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{D}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) \cdot \vec{k} dx dy$$

O teorema de Green, na formulação anterior, admite uma extensão.

Teorema 19 (de Stokes). *Seja $\mathbf{S} : z = f(x, y)$ superfície suave que se projeta numa região Ω do plano xy , nas condições do Teorema de Green.*

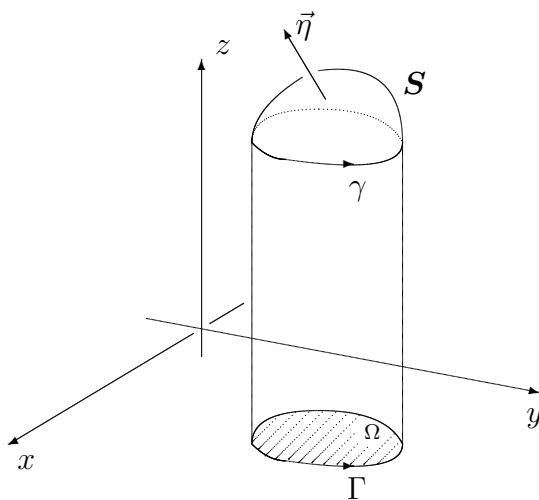
$\vec{\eta}$ - normal unitária superior

Γ - curva que delimita Ω orientada no sentido positivo.

Seja γ a imagem de Γ por f , orientada no mesmo sentido de Γ .

Se as componentes de \vec{V} tem derivadas parciais contínuas num aberto contendo \mathbf{S} , então:

$$\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathbf{S}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) \cdot \vec{\eta} d\mathbf{S}$$

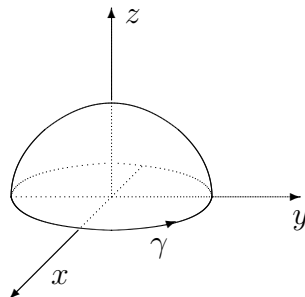


Exercícios resolvidos

1. Comprove o Teorema de Stokes para o caso:

\mathcal{S} : parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ e $\vec{V}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Resolução:



Notemos que $\overrightarrow{rot} \vec{V} = 0$

Logo,

$$\iint_{\mathcal{S}} (\overrightarrow{rot} \vec{V}) \cdot \vec{\eta} \, d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} 0 \, d\mathcal{S} = 0$$

Ainda: Seja $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} x \, dx + y \, dy + z \, dz = \int_0^{2\pi} (\cos t \cdot (-\sin t + \sin t \cdot \cos t)) dt = \int_0^{2\pi} dt = 0$$

2. Verifique o Teorema de Stokes para o caso:

\mathcal{S} : $z = 10 - x^2 - y^2$, $1 \leq z \leq 9$ e $\vec{V}(x, y, z) = 3z\vec{i} + 4x\vec{j} + 2y\vec{k}$

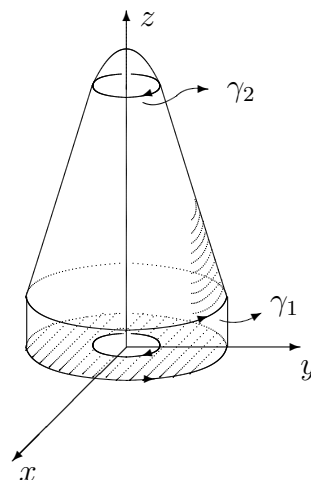
Resolução:

Queremos verificar que:

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{rot} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathcal{S} = \int_{\gamma_1} \vec{V} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

$$\gamma_1(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma_2(t) = (\cos t, -\sin t, 9), \quad t \in [0, 2\pi]$$



$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \vec{V} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (3, 12 \cos t, 6 \sin t) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t, 0) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-9 \sin t + 36 \cos^2 t) dt = 36 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \dots = 36\pi . \\ \int_{\gamma_2} \vec{V} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (27, 4 \cos t, -2 \sin t) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-27 \sin t - 4 \cos^2 t) dt = -4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \dots = -4\pi .\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 4x & 2y \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{S}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S} &= \iint_{\Omega} [-2 \cdot (-2x) - 3 \cdot (-2y) + 4] \, dx \, dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^3 [4r \cos \theta + 6r \sin \theta + 4] r \, dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{4}{3} r^3 \cos \theta + 2r^3 \sin \theta + 2r^2 \right]_1^3 = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{104}{3} \cos \theta + 52 \sin \theta + 16 \right) d\theta = \dots = 32\pi .\end{aligned}$$

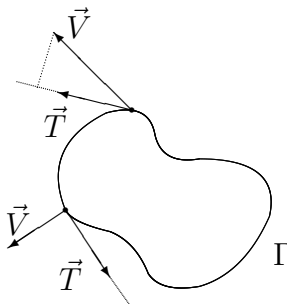
$$\therefore \int_{\gamma_1} \vec{V} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathbf{S}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S}$$

Interpretação Física do Rotacional

A integral $\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot \vec{T} \, ds$ é chamada **circulação ao longo de Γ** (mede a tendência média do fluido circular ao longo da curva Γ).

$\vec{V} \cdot \vec{T} \neq 0$ – contribui para movimento circulatório.

$\vec{V} \cdot \vec{T} = 0$ – não contribui para movimento circulatório.



Consideremos:

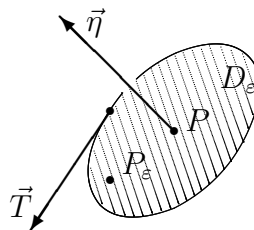
P – ponto arbitrário.

\mathcal{D}_ε – disco arbitrário de centro P ,
raio $\varepsilon > 0$, imerso em um fluido.

Γ_ε – circunferência de \mathcal{D}_ε .

\vec{T} – vetor tangente unitário.

$\vec{V}(x, y, z)$ – velocidade do fluido no ponto (x, y, z) – com derivadas parciais contínuas.



Usando os teoremas de Stokes e do Valor Médio para integrais duplas, obtemos:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \vec{V} \cdot \vec{T} \, d\mathbf{S} = \int_{\Gamma_\varepsilon} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{D}_\varepsilon} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S} = \left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \right]_{P_\varepsilon} (\pi\varepsilon^2)$$

$$\left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \right]_{P_\varepsilon} = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{\Gamma_\varepsilon} \vec{V} \cdot \vec{T} \, d\mathbf{S}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, temos que $P_\varepsilon \rightarrow P$ e assim

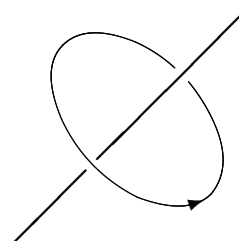
$$\left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \right]_P = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{\Gamma_\varepsilon} \vec{V} \cdot \vec{T} \, d\mathbf{S}.$$

Portanto: Em cada ponto P a componente de $\left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right]_P$ em qualquer direção $\vec{\eta}$ é o valor limite da circulação de \vec{V} por unidade de área no plano normal a $\vec{\eta}$. $\left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \right]_P$ tem máximo quando $\vec{\eta}$ é paralelo a $\left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right]_P$. Logo, a direção de $\left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right]_P$ é a direção para a qual a circulação ao longo da fronteira de um disco perpendicular a $\left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right]_P$ atinge seu valor máximo quando o disco tende a reduzir-se a um ponto.

Uma outra relação entre $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$ e os aspectos rotacionais do movimento pode ser feita no caso que descrevemos a seguir:

Consideremos um fluido em rotação uniforme em torno de um eixo.

Definimos o **vetor-velocidade angular**, \vec{w} , por:



(i) tem a direção do eixo de rotação.

(ii) tem o sentido positivo em relação à rotação (da “ponta” de \vec{w} , vê-se a rotação no sentido anti-horário).

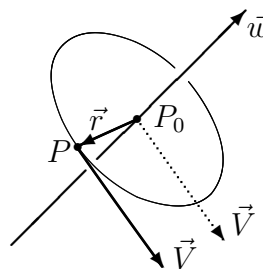
(iii) $\|\vec{w}\| \stackrel{\text{def.}}{=} \text{velocidade angular} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\|\vec{V}\|}{\|\vec{r}\|}$.

Da figura ao lado, notando que $\|\vec{V}\| = \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{r}\|$, concluímos que $\vec{V} = \vec{w} \times \vec{r}$.

Se $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$

$P = (x, y, z)$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$



Então:

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} =$$

$$= [w_2(z - z_0) - w_3(y - y_0)]\vec{i} + [w_3(x - x_0) - w_1(z - z_0)]\vec{j} + [w_1(y - y_0) - w_2(x - x_0)]\vec{k}.$$

Calculando $\overrightarrow{rot} \vec{V}$, temos $\overrightarrow{rot} \vec{V} = 2w_1\vec{i} + 2w_2\vec{j} + 2w_3\vec{k}$.

Assim $\overrightarrow{rot} \vec{V} = 2\vec{w}$.

Observação:

Se temos o movimento de um fluido incompressível e irrotacional, no plano, então:

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{V} = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

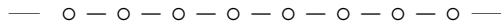
que são as equações de Cauchy-Riemann, muito utilizadas na teoria das funções de variáveis complexas.

Exercícios propostos

1. Seja \mathcal{S} parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, orientada pela normal superior, e seja $\vec{F}(x, y, z) = (x - y, 3z^2, -x)$.

Avalie $\iint_{\mathcal{S}} r \, \overrightarrow{rot} \vec{F} \cdot \vec{\eta} \, d\mathcal{S}$.

2. Verifique o Teorema de Stokes sobre o triângulo de vértices $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$ e para o campo $\vec{V}(x, y, z) = x^4\vec{i} + xy\vec{j} + z^4\vec{k}$.

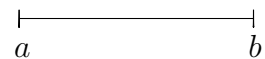


Resumo dos Teoremas

Os principais resultados vistos são generalizações do Teorema Fundamental do Cálculo. Colocamos a seguir uma relação de resultados (sem suas hipóteses) para que o leitor possa sentir suas semelhanças essenciais. Notemos que em cada caso temos do lado esquerdo uma integral de uma "derivada" sobre uma região, e do lado direito, temos os valores da função original somente na fronteira da região.

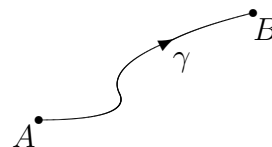
1. Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$



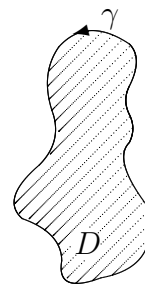
2. Teorema Fundamental para Integrais de Linha

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$$



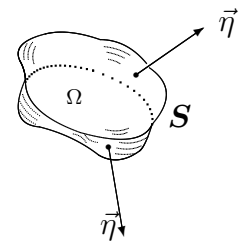
3. Teorema de Green

$$\iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} A dx + B dy$$



4. Teorema da Divergência ou de Gauss

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\mathbf{S}} \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S}$$



5. Teorema de Stokes

$$\iint_{\mathbf{S}} (\operatorname{rot} \vec{V}) \cdot \vec{\eta} \, d\mathbf{S} = \int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

