

NOTAS DE AULA

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS -  
INTEGRAÇÃO

Cláudio Martins Mendes

Segundo Semestre de 2005

# Sumário

<b>1</b>	<b>Funções de Várias Variáveis - Integração</b>	<b>2</b>
1.1	Integrais Iteradas . . . . .	2
1.2	Integrais Múltiplas . . . . .	4
1.3	Mudança de Variáveis . . . . .	22
1.4	Algumas Aplicações . . . . .	36
1.4.1	Densidade - Centro de Massa . . . . .	36
1.4.2	Momento de Inércia . . . . .	41

# Capítulo 1

## Funções de Várias Variáveis - Integração

### 1.1 Integrais Iteradas

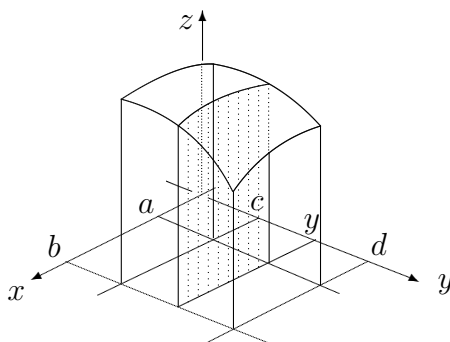
Suponhamos que  $f(x, y)$  seja contínua num retângulo  $R$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ .  
Consideremos

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

Prova-se que a função  $F$  é contínua em  $[c, d]$ . Logo, tem sentido escrever:

$$\int_c^d F(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy .$$

Uma integral desse tipo é chamada **integral iterada**.



A região de integração das integrais iteradas não precisa, necessariamente, ser um retângulo.  
Podemos fazer integrais iteradas sobre regiões como exemplificam as figuras:

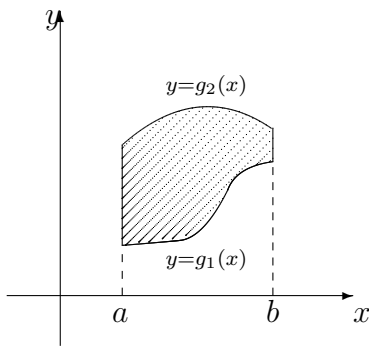


Figura 1

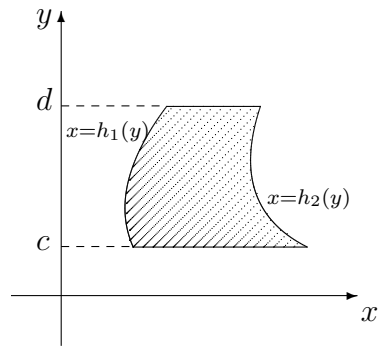


Figura 2

Na figura (1) temos:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx .$$

Na figura (2) temos:

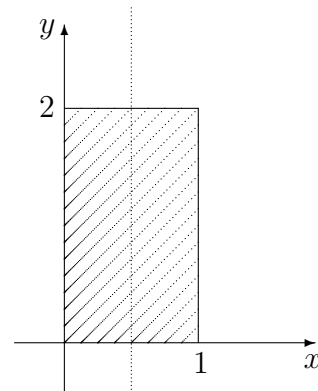
$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy .$$

**Exemplos:**

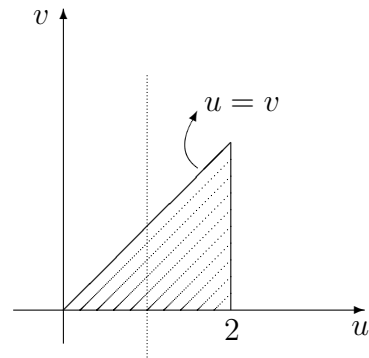
1.  $\int_0^1 \int_0^2 (x^2 + y^2) dy dx = I$

$$I = \int_0^1 \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 dx =$$

$$= \int_0^1 \left( 2x^2 + \frac{8}{3} \right) dx = \left( \frac{2x^3}{3} + \frac{8}{3}x \right) \Big|_0^1 = \frac{10}{3} .$$

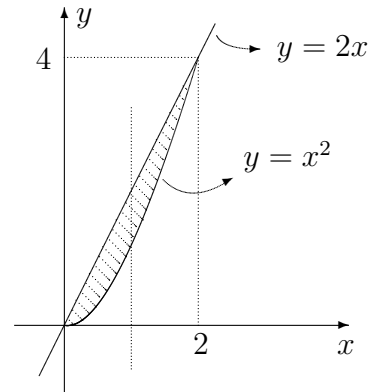


2.  $\int_0^2 \int_0^u 5u^2 v dv du$



$$3. \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 - yz) dz dy dx = \frac{1}{12}$$

$$4. \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy dx = \frac{32}{3}$$

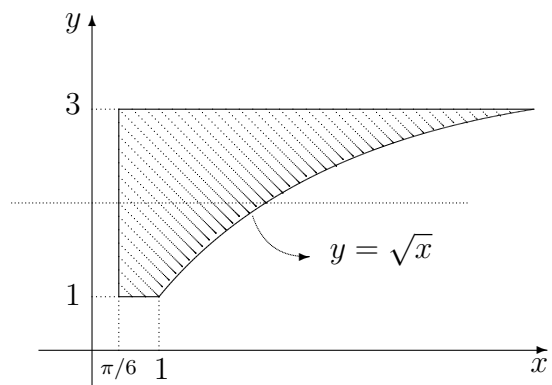


$$5. \int_1^3 \int_{\pi/6}^{y^2} 2y \cos x dx dy = I$$

$$I = \int_1^3 2y \sin x \Big|_{\pi/6}^{y^2} dy =$$

$$= \int_1^3 (2y \sin y^2 - y) dy =$$

$$= \left( -\cos y^2 - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_1^3 = \cos 1 - \cos 9 - 4$$



Uma outra **notação** que usaremos para as integrais iteradas é:

$$\int_a^b dy \int_{h(y)}^{g(y)} f(x, y) dx, \quad \text{onde}$$

$$\int_a^b dy \int_{h(y)}^{g(y)} f(x, y) dx = \int_a^b \int_{h(y)}^{g(y)} f(x, y) dx dy.$$

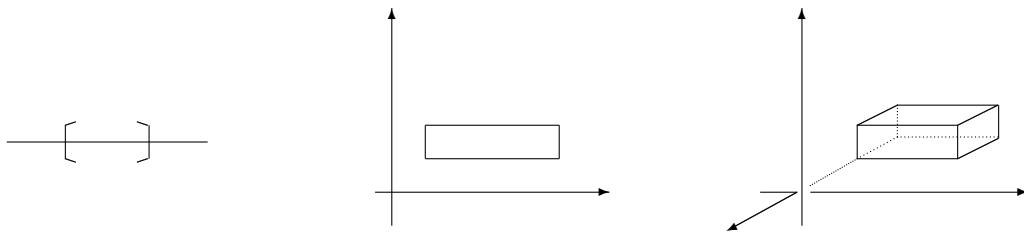
## 1.2 Integrais Múltiplas

Consideremos agora  $f : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Problema:** Definir a integral de  $f$  sobre  $B$ , análoga à definição para função de uma variável.

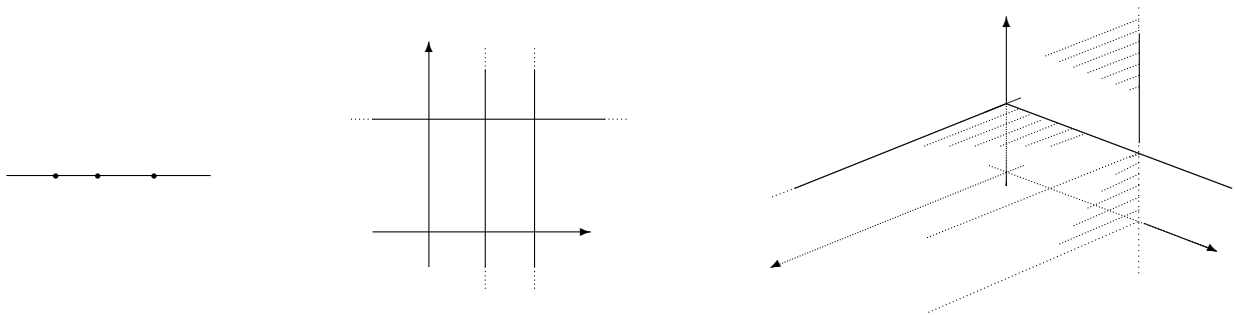
Um retângulo coordenado fechado  $R$  no  $\mathbb{R}^n$  é um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  constituído de todos os pontos  $x = (x_1, \dots, x_n)$  que satisfazem às desigualdades:

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$



O volume de  $R$ , denotado por  $V(R)$ , é definido como  $V(R) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ . Se para algum  $i$ ,  $a_i = b_i$ , então o retângulo é degenerado e  $V(R) = 0$ .

Um número finito de planos  $n-1$  dimensionais no  $R^n$ , paralelos aos planos coordenados, é chamado uma rede.

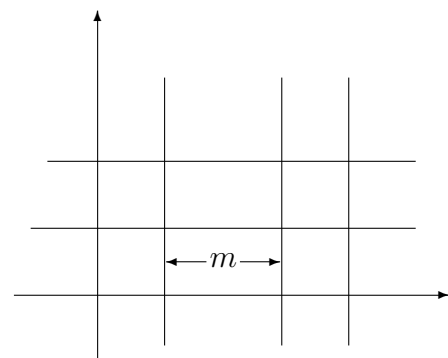


Uma rede sempre divide o  $R^n$  em um número finito de conjuntos limitados (retângulos) e um número finito de conjuntos não limitados.

Dizemos que uma rede cobre um conjunto  $B \subset R^n$ , se este estiver contido na reunião dos retângulos fechados  $R_1, \dots, R_r$ , por ela determinados.

Claramente, um conjunto pode ser coberto por uma rede se, e somente se, ele é limitado.

Malha da rede será o maior comprimento dos lados dos retângulos.



$m =$  malha da rede

**Definição 1.2.1.** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $B \subset \mathbb{R}^n$ , tais que:*

a)  $B$  é um subconjunto limitado.

b)  $f$  é limitada sobre  $B$ .

Seja ainda:

$$f_B(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin B. \end{cases}$$

Tomemos  $G$  uma rede que cobre  $B$  e que tenha malha  $m(G)$ . Em cada um dos retângulos coordenados  $R_i$  determinados por  $G$ ,  $i = 1, \dots, r$ , escolhemos um ponto arbitrário  $P_i$ .

A soma:

$$\sum_{i=1}^r f_B(P_i)V(R_i)$$

é chamada uma soma de Riemann de  $f$  sobre  $B$ .

Dados  $f$  e  $B$ , este valor depende da rede  $G$  e dos pontos escolhidos  $P_1, \dots, P_r$ .

Se, variando as redes  $G$ , com  $m(G)$  tendendo a zero,

$$\lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r f_B(P_i)V(R_i)$$

existe ele é chamado a integral de  $f$  sobre  $B$ , sendo denotado por:

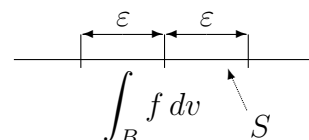
$$\int_B f dv$$

Se a integral existe, então  $f$  é dita integrável sobre  $B$ .

$$\lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r f_B(P_i)V(R_i) = \int_B f dv$$

significa que para  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$ , tal que se  $G$  é qualquer rede que cobre  $B$  e tem malha menor que  $\delta$ , sendo  $S$  uma soma de Riemann arbitrária para  $f_B$  formada de  $G$ , então:

$$\left| S - \int_B f dv \right| < \varepsilon.$$



**Notações:**

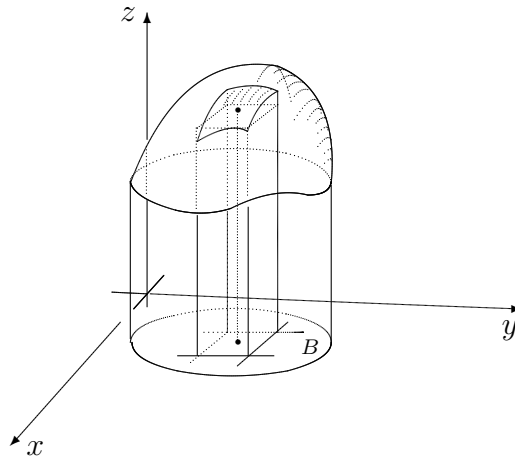
$$\int_B f dA \qquad \int_B f(x, y) dx dy \qquad n = 2$$

$$\int_B f(x, y, z) dx dy dz \qquad n = 3$$

$$\int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n.$$

Para interpretar, geometricamente, o significado da integral dupla  $\int_B f(x, y) dx dy$ , suporemos  $f$  positiva e contínua sobre  $B$ .

Então, o gráfico de  $f$  é uma superfície que está acima do plano  $xy$ . A soma de Riemann é a soma dos volumes dos paralelepípedos cujas bases são os retângulos determinados pela rede e cujas alturas correspondentes são os valores  $f(x_i, y_i)$ .



Quando a malha da rede tende a zero, essas somas vão se aproximando do que podemos chamar volume do sólido  $S$ , delimitado pelo domínio  $B$ , pelo gráfico de  $f$ , e pelas retas que passam pela fronteira de  $B$  e são paralelas ao eixo  $z$ . Definimos então:

$$V(S) = \int_B f(x, y) dx dy.$$

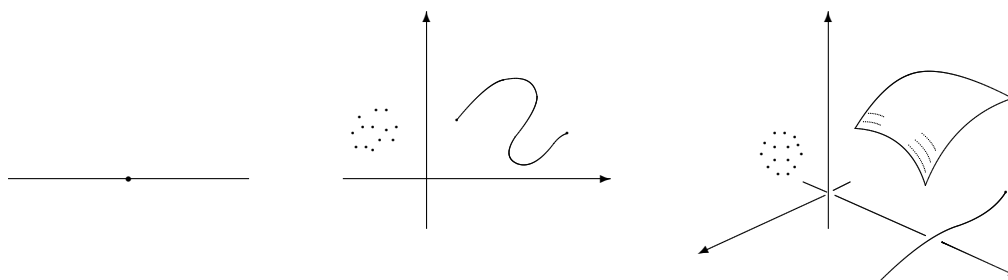
Surge a primeira pergunta: Quais seriam as condições, sobre a função  $f$  e sobre o conjunto  $B$ , que poderiam garantir a existência da  $\int_B f dv$ ?



O Teorema a seguir dará a resposta a esta pergunta.

**Definição 1.2.2.** Conjunto suave em  $R^n$  é a imagem de um conjunto compacto sob uma função

$\phi : R^m \rightarrow R^n$ ,  $m < n$  e  $\phi$  de classe  $C^1$ . Conjunto suave em  $R$  será entendido como um conjunto unitário.



Tipos de Conjuntos Suaves

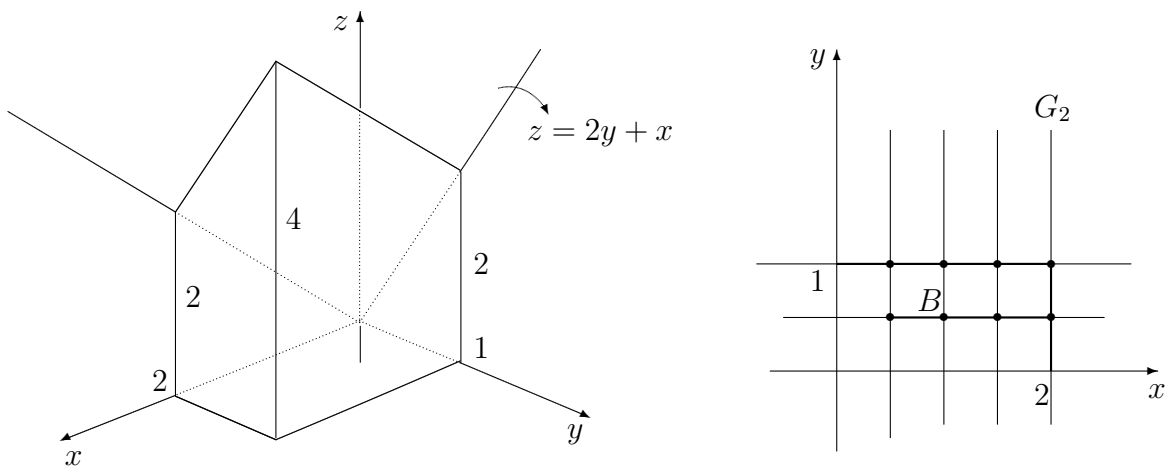
A idéia intuitiva de conjunto suave é a de que o conjunto deve ter “volume” nulo no espaço em que estiver contido.

**Teorema 1.2.3.** Seja  $B \subset R^n$ , limitado, tal que a fronteira de  $B$  esteja contida em um número finito de conjuntos suaves. Seja ainda  $f$  definida e limitada em  $B$ . Se  $f$  é contínua sobre  $B$ , exceto talvez sobre um número finito de conjuntos suaves, então  $f$  é integrável sobre  $B$ . O valor de  $\int_B f dv$  não se altera por troca de valores de  $f$  sobre qualquer conjunto suave.

**Exemplo:**

$$\int_B (2y + x) dx dy,$$

onde  $B = \{(x, y) \in R^2 / 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$



Observe que a existência da integral está assegurada pelo Teorema anterior. Por esta razão, qualquer seqüência de somas de Riemann associadas a redes que têm malhas tendendo a zero, pode ser usada para avaliar a integral.

Para cada  $n = 1, 2, 3, \dots$  consideremos a rede  $G_n$  constituída das retas  $x = \frac{i}{n}$ ,  $i = 0, \dots, 2n$  e  $y = \frac{j}{n}$ ,  $j = 0, \dots, n$ .

Temos:

$$m(G_n) = \frac{1}{n}$$

$$\text{área de } R_{ij} = \frac{1}{n^2}.$$

Em cada um dos retângulos coordenados, escolhemos os pontos  $x_{ij} = (x_i, y_j) = \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$   $i = 1, \dots, 2n$ ;  $j = 1, \dots, n$ .

Formamos então a soma de Riemann:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^n (x_i + 2y_j) A(R_{ij}) &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{i}{n} + \frac{2j}{n}\right) \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^n (i + 2j) = \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} \left( ni + 2 \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{2n} (i + 1 + n) = \\ &= \frac{1}{n^2} \left[ \frac{(1+2n)}{2} \cdot 2n + (1+n) \cdot 2n \right] = \\ &= \frac{2}{n} \left( \frac{1+2n}{2} + 1 + n \right) = 4 + \frac{3}{n} \end{aligned}$$

$$\therefore \int_B (2y + x) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{3}{n}\right) = 4$$

**Observação:** Compare este resultado com o volume do sólido  $S$  sob o gráfico de  $f(x, y) = 2y + x$  e acima de  $[0, 2] \times [0, 1]$ . (Neste caso particular o volume é de cálculo direto)

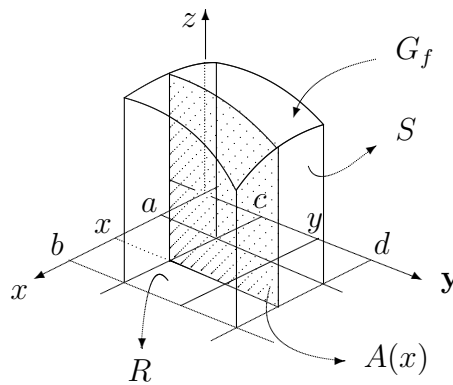
O exemplo anterior mostra que uma avaliação direta da integral múltipla, pode ser muito difícil. Agora vamos avançar no sentido de vencer esta dificuldade.



Antes de prosseguirmos, vejamos um caso especial:

Consideremos  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow R$ ,  $f$  contínua e  $f \geq 0$ .

Foi visto em Cálculo de uma Variável que:  $Vol(S) = \int_a^b A(x) dx$



Observemos que nesta situação temos  $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$

Assim  $Vol(S) = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$

Pelo visto anteriormente, também temos:  $Vol(S) = \int_R f(x, y) dx dy$

Logo, pelo menos neste caso,

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

ou seja, a integral múltipla é igual à integral iterada.

Surge então a pergunta geral:

O que dizer da integral múltipla, relativamente à integral iterada, quando ambas estão definidas?

O Teorema a seguir dará a resposta à esta pergunta.

**Teorema 1.2.4.** *Seja  $B$  um subconjunto do  $R^n$  tal que a integral iterada*

$$\int dx_1 \int dx_2 \cdots \int f dx_n$$

*existe sobre  $B$ . Se a integral múltipla  $\int_B f dv$  existe, então as duas integrais são iguais.*

**Corolário 1.2.5.** *Se  $\int_B f dv$  existe e as integrais iteradas existem para algumas ordens de integração, então todas as integrais são iguais.*

**Exemplos:**

1. Avaliar a integral  $\int_B (2y + x) dx dy$ , onde  $B$  é o retângulo  $0 \leq x \leq 2$  e  $0 \leq y \leq 1$ .

Aplicando os Teoremas anteriores temos:

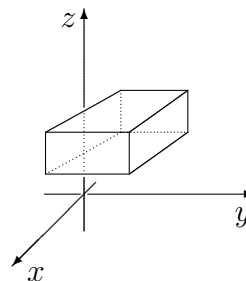
$$\int_B (2y + x) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^1 (2y + x) dy = \int_0^2 (1 + x) dx = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^2 = 2 + 2 = 4$$

2. Seja  $R$  o retângulo definido por  $-1 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $1 \leq z \leq 2$ .

Considere  $f(x, y, z) = xyz$ .

Então:

$$\begin{aligned} \int_R f dv &= \int_R xyz dx dy dz = \\ &= \int_{-1}^2 dx \int_0^1 dy \int_1^2 xyz dz = \cdots = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$



**Observação:** Registramos aqui o fato de que é possível a existência da integral iterada sem que exista a integral múltipla.

**Exemplo:**

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \text{ é racional} \\ 2y & , \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 1 dx = 1.$$

Mas  $\int_R f dA$  não existe, onde  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ .

De fato:

Seja  $G$  uma rede, do tipo ao lado, cobrindo  $R$ .

Vamos formar duas somas de Riemann, a partir da rede  $G$ .

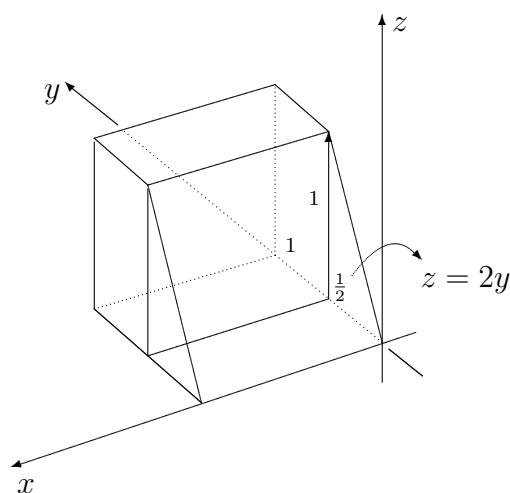
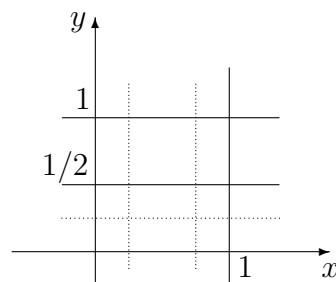
Primeira Soma: nos retângulos coordenados escolhemos pontos  $(x_i, y_j)$ , tais que  $x_i \in Q$ . Logo,

$$S_1 = 1.$$

Segunda Soma: até a altura  $y = \frac{1}{2}$  escolhemos pontos  $(x_i, y_j)$  nos retângulos coordenados tais que  $x_i \notin Q$ . Logo, esta parcela da soma de Riemann converge para  $\frac{1}{4}$  à medida que  $m(G) \rightarrow 0$ . Depois que  $y = \frac{1}{2}$  escolhemos pontos  $(x_i, y_j)$ , tais que  $x_i \in Q$ . Esta segunda parcela da soma de Riemann dará  $\frac{1}{2}$ .

$$\text{Assim, } S_2 \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Deste modo, as somas de Riemann não convergem para nenhum número real.



Seja a função  $f \equiv 1$  integrável sobre um conjunto  $B \subset R^n$ . Então definimos **volume** de  $B$

como sendo:

$$V(B) = \int_B 1 \, dv = \int_B dv .$$

No caso de  $B \subset \mathbb{R}^2$  o volume anteriormente definido é o que chamamos de área. Escrevemos, então,  $A(B)$  e não  $V(B)$ .

Segue, da última parte do Teorema 13 que o volume de um conjunto suave é igual a zero:

$$V(S) = \int_S 1 \, dv = \int_S 0 \, dv = 0 .$$

Para alguns conjuntos  $B$ , a integral  $\int_B dv$  não existe. Quando isto acontece, o volume de  $B$  não está definido.

**Exemplo:**

$$B = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$$

$$\int_B dx \text{ não existe } \quad (\text{Pense em dois tipos de somas de Riemann})$$

**Observação 1:** Para retângulos  $R$  o volume  $V(R)$  tem sido definido de duas maneiras:

- (i) Como produto dos comprimentos dos lados.
- (ii) Como uma integral.

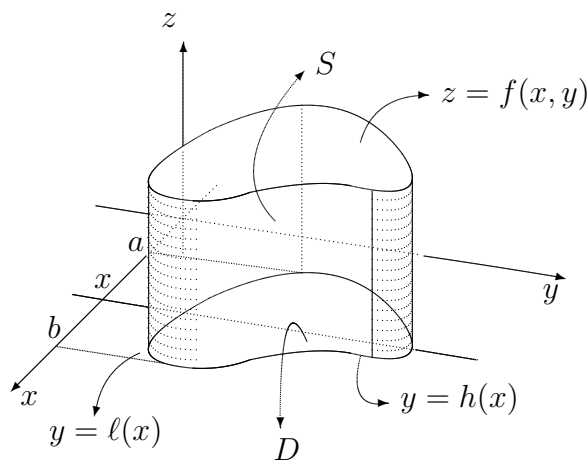
As duas definições são compatíveis pelos Teoremas 1.2.3 e 1.2.4.

$$\int_R dv = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) .$$

**Observação 2:** Seja  $f(x, y) \geq 0$ , tal que  $\int_D f \, dA$  exista onde  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

Na situação ao lado, o volume do sólido  $S$  tem sido definido de duas maneiras, que são compatíveis, pois:

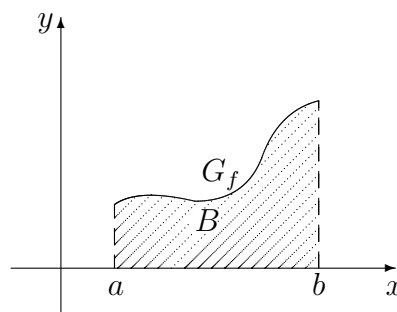
$$\begin{aligned} V(S) &= \int_S 1 \, dv = \int_a^b dx \int_{\ell(x)}^{h(x)} dy \int_0^{f(x,y)} dz = \\ &= \int_a^b dx \int_{\ell(x)}^{h(x)} f(x, y) dy = \int_D f \, dA . \end{aligned}$$



### Exercícios resolvidos:

1. Seja  $B$  a região do plano representada abaixo. Calcule a área de  $B$ .

$$\begin{aligned} A(B) &= \int_B dA = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \\ &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

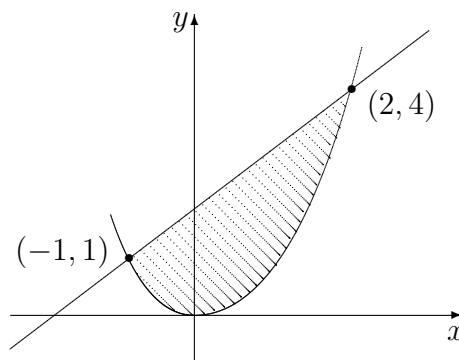


2. Calcular a área entre a parábola  $y = x^2$  e a reta  $y = x + 2$ , representada abaixo:

$$A = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} dy$$

ou

$$A = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx.$$



(Note como é importante a ordem de integração)

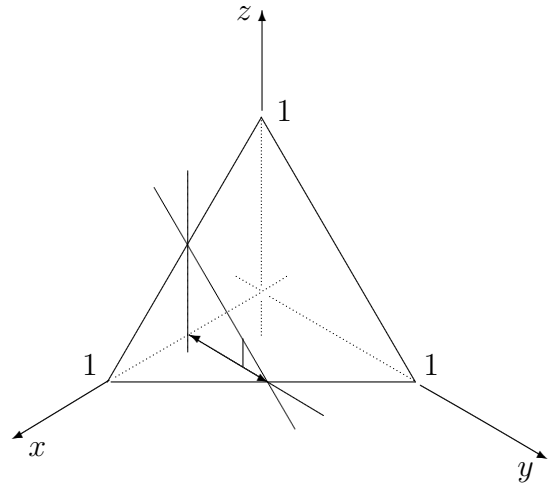
3. Ache o volume da região  $B \subset R^3$ , limitada pelos planos coordenados  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  e  $x + y + z = 1$

$$V(B) = \int_B dv = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \dots = \frac{1}{6}$$

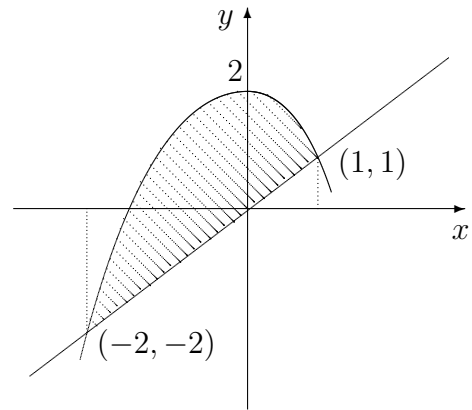
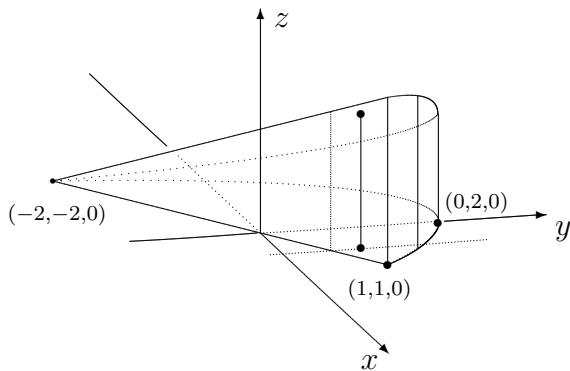
Poderíamos resolver também pensando

como o gráfico de  $f(x, y) = 1 - x - y$

$$V(B) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \dots = \frac{1}{6}$$



4. Determine o volume do sólido cuja base é a região do plano  $xy$  delimitada pela parábola  $y = 2 - x^2$  e pela reta  $y = x$  e cuja parte superior está contida no plano  $z = x + 2$ .



$$V = \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} dy \int_0^{x+2} dz = \dots = \frac{27}{4}$$

ou

$$V = \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} (x + 2) dy = \dots = \frac{27}{4}$$

**Regra Geral:** Para estabelecer os limites de uma integral iterada, devemos primeiramente escolher as variáveis externa, imediata e interna. Digamos, por exemplo,  $y$ ,  $x$  e  $z$  respectivamente.

**Primeira Etapa:**



Achar os valores extremos da variável externa. Por exemplo:

$$\int_a^b dy \int dx \int f(x, y, z) dz .$$

**Segunda Etapa:**

Fixe a variável externa num determinado valor, determinando um corte na região sólida.

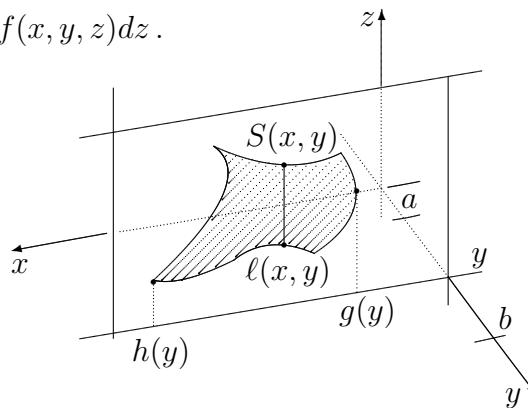
Determine os valores extremos da variável imediata neste corte. Por exemplo:

$$\int_a^b dy \int_{g(y)}^{h(y)} dx \int f(x, y, z) dz .$$

**Terceira Etapa:**

Fixe agora, neste corte, a variável imediata, obtendo um segmento de reta. Determine os valores extremos da variável interna. Por exemplo:

$$\int_a^b dy \int_{g(y)}^{h(y)} dx \int_{\ell(x,y)}^{S(x,y)} f(x, y, z) dz .$$



Vejamos agora algumas propriedades das integrais múltiplas

1. Se  $f$  e  $g$  são integráveis sobre  $B$  e se  $a, b$  são números reais, então  $af + bg$  é integrável sobre  $B$  e

$$\int_B (af + bg) dv = a \int_B f dv + b \int_B g dv$$

2. Se  $f \geq 0$  é integrável sobre  $B$ , então

$$\int_B f dv \geq 0$$

3. Se  $f$  e  $g$  são integráveis sobre  $B$  e  $f \leq g$  sobre  $B$ , então:

$$\int_B f \, dv \leq \int_B g \, dv$$

4. Se  $f$  é integrável sobre cada um dos conjuntos disjuntos  $B_1$  e  $B_2$ , então  $f$  é integrável sobre  $B_1 \cup B_2$  e

$$\int_{B_1 \cup B_2} f \, dv = \int_{B_1} f \, dv + \int_{B_2} f \, dv$$

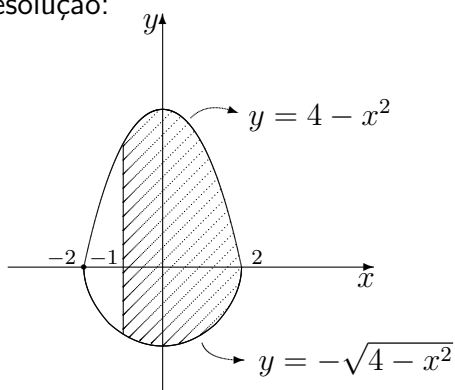
Observemos que isto generaliza a seguinte propriedade:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

### Exercícios resolvidos:

1. Desenhe a região de integração referente à integral  $\int_{-1}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2} dy$

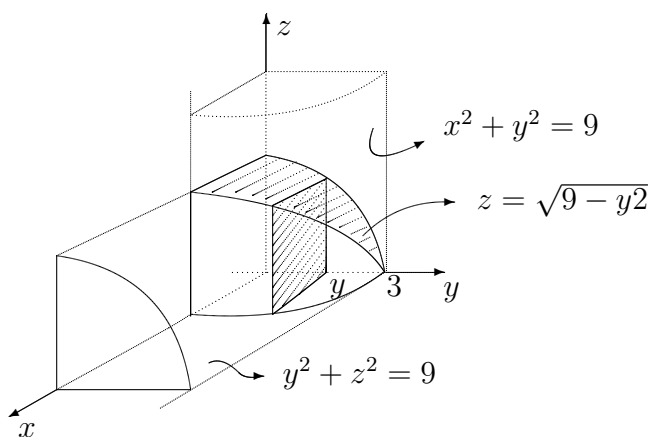
Resolução:



2. Encontre o volume do sólido limitado pelos gráficos de  $x^2 + y^2 = 9$  e  $y^2 + z^2 = 9$ .

Resolução:

Notemos inicialmente que o gráfico de cada uma das equações representa um cilindro, com eixo sendo um dos eixos coordenados e raio igual a 3. A representação da porção do sólido situada no primeiro octante seria:



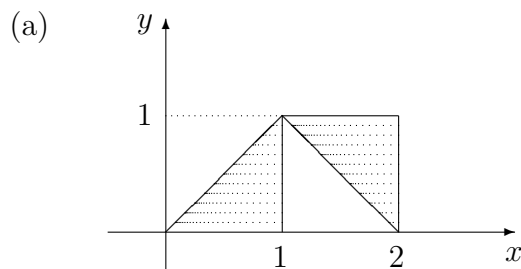
Assim, calculando como volume sob o gráfico da função  $f(x, y) = \sqrt{9 - y^2}$  temos:

$$V = 8 \int_0^3 dy \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-y^2} dx = \dots = 144$$

3. (a) Desenhe a região de integração  $\int_0^1 dx \int_0^x dy + \int_1^2 dx \int_{2-x}^1 dy$

(b) Sem calcular, dê o valor da integral.

Resolução:



(b) Observemos que a integral representa a área da região formada por dois triângulos de base 1 e altura 1 e assim seu valor é 1.

4. Dada a expressão

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} dy + \int_{-1}^0 dy \int_{3-\sqrt{1-y^2}}^{3+\sqrt{1-y^2}} dx$$

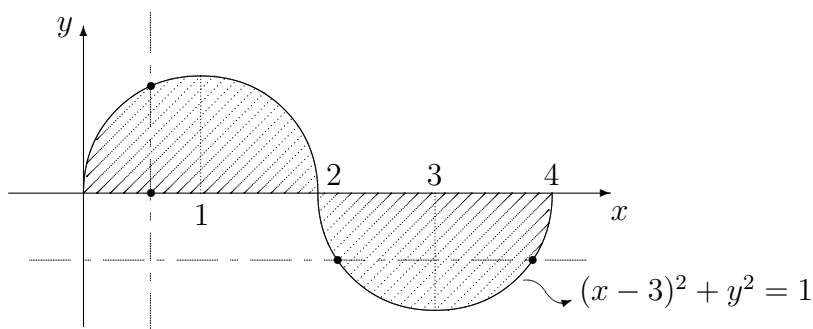
Pede-se:

(a) Região de integração.

(b) Valor da integral.

Resolução:

(a)



(b) Observemos que a integral representa a área da região anterior, a qual é igual a área do círculo de raio 1, e assim o valor da integral é  $\pi$ .

5. Ache a massa do cilindro  $C$  a seguir, se a densidade em cada ponto é proporcional a distância à base inferior.

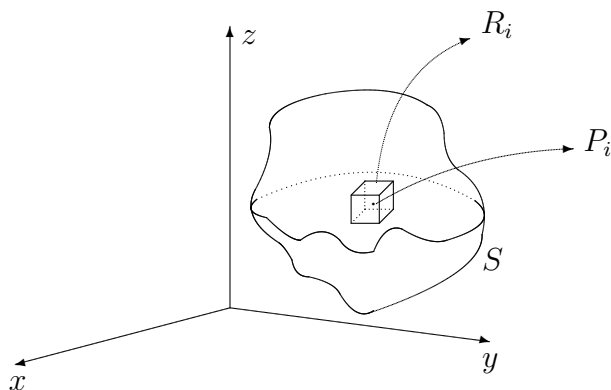
Resolução:

Aproveitemos este exercício para introduzir a Situação Geral:

Seja um sólido  $S$ , com densidade  $\rho(P)$  no ponto  $P$ , sendo a função  $\rho$  contínua sobre  $S$ .

Por definição:

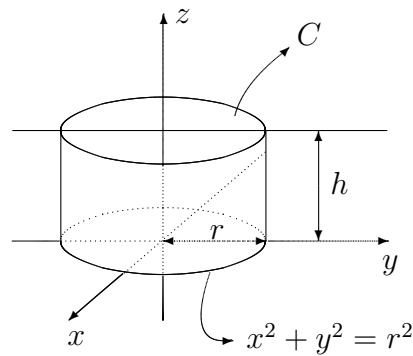
$$\text{Massa} = M = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i \rho(P_i) \text{Vol}(R_i) = \int_S \rho \, dv$$



No caso particular de termos  $\rho(P) \equiv K = \text{constante}$  podemos escrever:

$$M = \int_S \rho \, dv = \rho \int_S dv = \rho \cdot \text{Vol}(S)$$

Voltando então ao caso do exercício proposto temos:  $\rho(x, y, z) = Kz$



Assim:

$$\begin{aligned}
 M &= \int_C \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_{-r}^r dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \int_0^h Kz dz = 4K \int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \int_0^h z dz = \\
 &= 4K \int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{h^2}{2} dy = 2Kh^2 \int_0^r \sqrt{r^2-x^2} dx = 2Kh^2 \frac{1}{4} \pi r^2 = \frac{1}{2} Kh^2 r^2 \pi.
 \end{aligned}$$

Estamos usando a simetria do problema e ainda que  $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2} dx$  é igual a um quarto da área do círculo de raio  $r$ .

### Exercícios propostos:

1. Desenhe a região de integração para a integral iterada:  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx$

2. Calcule  $\int_R f dv$  para as seguintes escolhas de  $f$  e  $R$

(a)  $f(x, y, z) = \sqrt{x+y+z}$

$R$  : Cubo de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$  e  $(1, 1, 1)$ .

(b)  $f(x, y, z) = x^2 y z$

$R$  : Tetraedro de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  e  $(1, 1, 1)$ .

(c)  $f(x, y, z) = x + z$

$R$  :  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

3. Determinar o volume do sólido no 1º octante limitado pelos planos coordenados e os gráficos das equações:  $z = x^2 + y^2 + 1$  e  $2x + y = 2$ .

4. Justifique as desigualdades:

(a)  $0 \leq \int_R (x^2 + y^2) dx dy \leq 30 \quad R : [0, 1] \times [0, 3].$

(b)  $\frac{4}{3} \leq \int_R e^{xy} dx dy \leq \frac{4e^2}{3} \quad R : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 + x^2 \end{cases}$

(c)  $84\pi e^{-16} \leq \int_R e^{-x^2-y^2-z^2} dx dy dz \leq 84\pi e^{-1} \quad R : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16.$

5. Se  $D$  é a região triangular limitada pelas retas  $2y = x$ ,  $y = 2x$  e  $x = \pi$ , calcule  $\int_D \operatorname{sen} y dA$ .

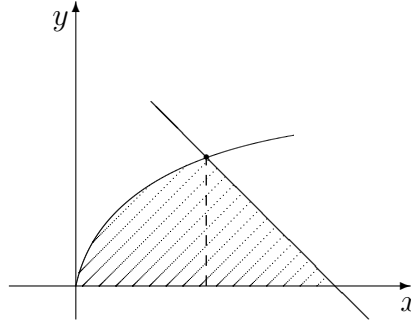
6. Seja  $D$  o conjunto de pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , tais que  $x \geq 0$ ,  $y \geq x^2$  e  $y \leq 2 - x^2$ . Calcule  $\int_D \sqrt{xy} dA$ .

7. Ao se estabelecer a integral dupla que dará o volume  $V$  sob o parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e acima de uma certa região  $R$  do plano  $xy$ , chegou-se a seguinte expressão:

$$V = \int_0^1 dy \int_0^y (x^2 + y^2) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx.$$

Desenhe a região  $R$ .

8. Ache a área da região do plano  $xy$  limitada pelos gráficos de  $x = y^3$ ,  $x + y = 2$  e  $y = 0$ , desenhada abaixo.

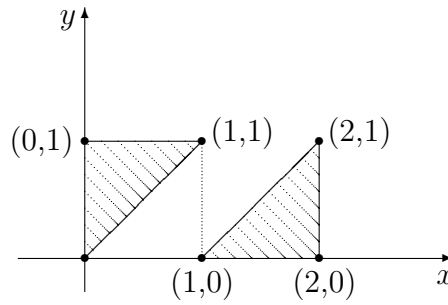


9. Justifique a afirmação, usando as propriedades conhecidas das integrais:

Se  $f$  é contínua em uma região limitada  $R \subset \mathbb{R}^2$  com fronteira de  $R$  contida em um número finito de conjuntos suaves, então:

$$\left| \int_R f(x, y) dx dy \right| \leq \int_R |f(x, y)| dx dy$$

10. Calcule a integral  $\int_B x dx dy$  onde  $B$  é o conjunto representado a seguir:



11. Responda, justificando:

(a) Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \neq \frac{1}{n} , n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n} & , \text{ se } x = \frac{1}{n} , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Considere  $B = [\frac{1}{4}, 1] \times [0, 2]$ .

Então,  $\int_B f \, dA = \frac{3}{2}$ .

(b)  $2\pi e^{-4} \leq \int_R e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy \leq 2\pi$ , onde  $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}$ .

(c)  $V(B) = \sqrt{2}$ , onde  $b = \left\{ \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) / n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(0, 0)\}$ .

### 1.3 Mudança de Variáveis

A troca de variáveis para integrais 1-dimensionais é dada por:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\phi(u)) \phi'(u) \, du \quad (x = \phi(u))$$

Este resultado será estendido para dimensões mais altas.

Num espaço  $n$ -dimensional, uma troca de variáveis é efetuada por uma transformação  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^n$ .

No que se segue, é mais conveniente tomar o espaço domínio e o espaço de chegada como distintos. Assim, consideramos  $T$  como uma transformação de uma cópia do  $\mathbb{R}^n$  (a qual chamamos de  $U^n$ ), em outra do  $\mathbb{R}^n$  (a qual continuaremos chamando de  $\mathbb{R}^n$ ), e escrevemos  $T(u) = x$ , onde  $u \in U^n$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ .

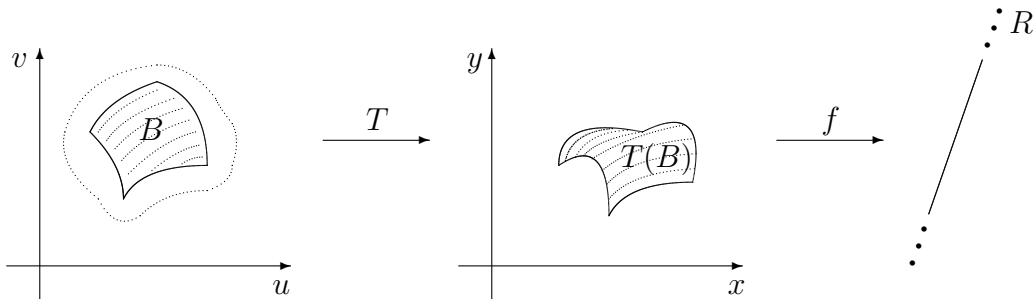
**Teorema 1.3.1.** *Seja  $A \subset U^n \xrightarrow{T} R^n$  uma transformação de classe  $C^1$ . Seja  $B$  um subconjunto limitado de  $U^n$ , tendo sua fronteira contida em um número finito de conjuntos suaves. Suponhamos que  $B$  e sua fronteira estejam contidos no interior do domínio de  $T$  e que:*

(i)  $T$  é injetora em  $B$ .

(ii)  $\det J(T) \neq 0$  para todo ponto de  $B$ .

Então, se a função  $f$  é limitada e contínua sobre  $T(B)$ , temos:

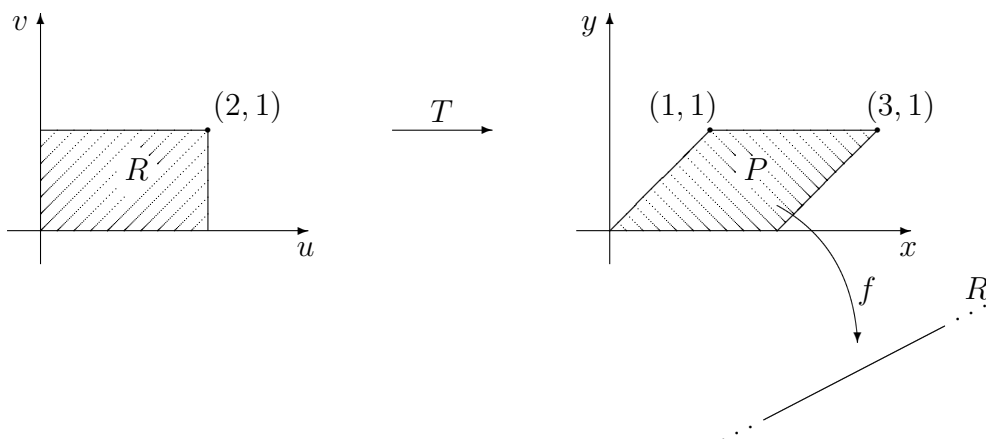
$$\int_{T(B)} f \, dv = \int_B (f \circ T) \cdot |\det J(T)| \, dv$$



**Observação:** O teorema ainda é verdadeiro se as condições (i) e (ii) **não** são verdadeiras em um conjunto de volume nulo.

**Exemplos:**

1. A integral  $\int_P (x + y) \, dx \, dy$ , onde  $P$  é o paralelogramo ilustrado abaixo, pode ser transformada na integral sobre um retângulo:





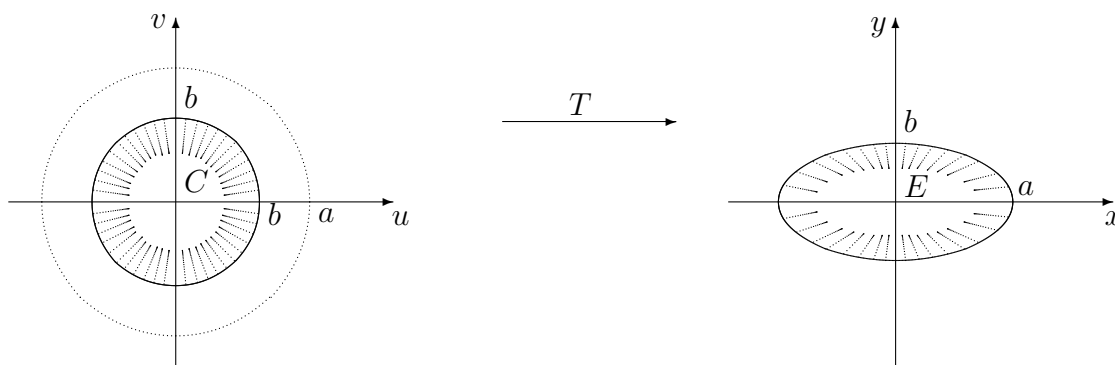
$$(x, y) = T(u, v) = (u + v, v)$$

$$\det J(T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$T$  é injetora,  $T$  é de classe  $C^1$  e  $T(R) = P$ .

$$\int_P (x + y) dx dy = \int_R [(u + v) + v] \cdot 1 du dv = \int_0^2 du \int_0^1 (u + 2v) dv = \dots = 4$$

2. Calcular a área da região limitada pela elipse, conhecendo-se a do círculo.



$$(x, y) = T(u, v) = \left( \frac{a}{b} u, v \right)$$

$T$  é injetora,  $T$  é de classe  $C^1$  e  $T(C) = E$ .

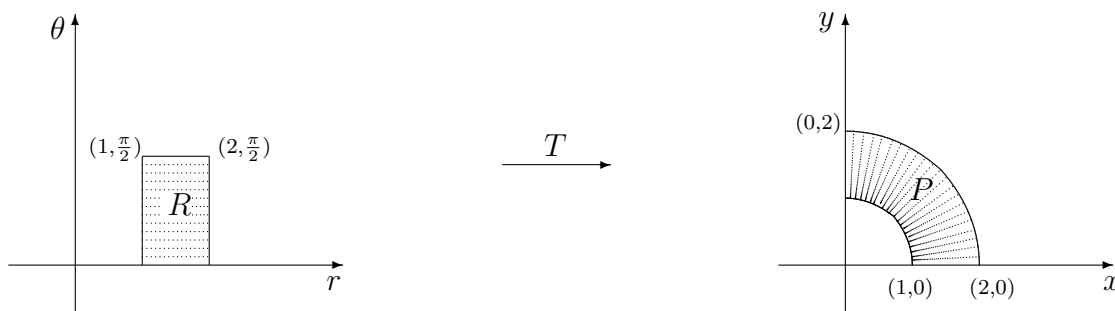
$$\det J(T) = \begin{vmatrix} a/b & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a}{b} > 0.$$

Pelo Teorema 15

$$\int_E dA = \int_C \frac{a}{b} dA = \frac{a}{b} \int_C dA = \frac{a}{b} \pi b^2 = \pi ab.$$

Logo, a área da região limitada pela elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  é  $\pi ab$ .

3. Calcular a área da região  $P$  dada abaixo:



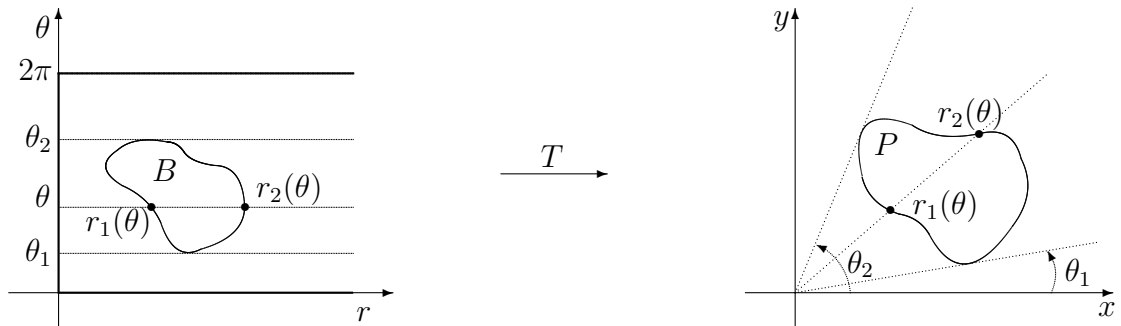
Observe que  $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  transforma o retângulo  $R$  do plano  $r\theta$  no setor  $P$  do plano  $xy$ .

$T$  é de classe  $C^1$ ,  $T$  é injetora

$$\det J(T) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

$$\int_P dA = \int_R 1 \cdot |r| dA = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 r dr = \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2} d\theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Na realidade, o exemplo anterior envolve um dos casos mais importantes de transformação de coordenadas, que é a **transformação polar**.



$(x, y) = T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  onde  $0 \leq r$  e  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

$T$  é de classe  $C^1$  e injetora (exceto em um conjunto de área nula)

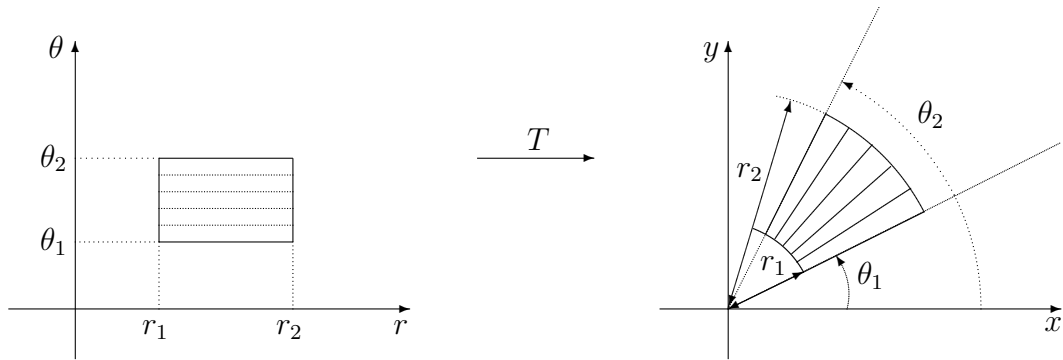
$$\det J(T) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

$\therefore \det J(T)$  é não nulo, exceto em um conjunto de área nula.

A fórmula de mudança fica:

$$\int_P f(x, y) dx dy = \int_B f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

Observemos abaixo como a transformação polar atua:

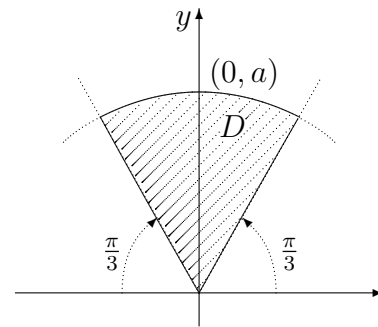


**Exercícios resolvidos:**

1. Determinar  $\int_D y \, dx \, dy$ , onde  $D$  é o setor circular mostrado abaixo.

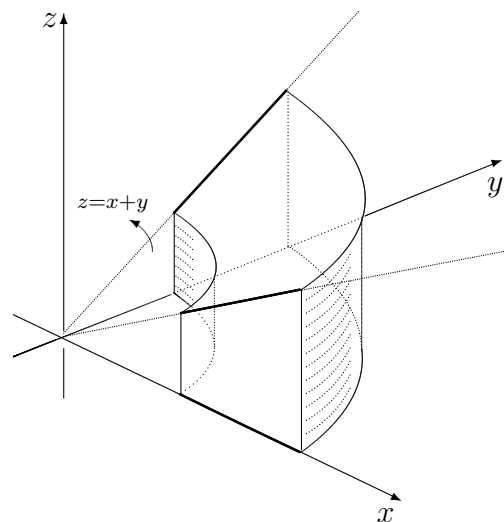
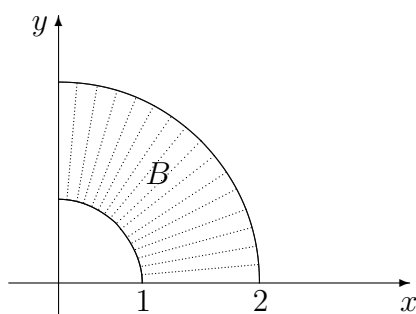
Resolução:

$$\begin{aligned} \int_D y \, dx \, dy &= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} d\theta \int_0^a r \sin \theta \, r \, dr = \\ &= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{a^3}{3} \sin \theta \, d\theta = \dots = \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$



2. Calcule o volume do sólido  $D$  cuja base está no plano  $xy$ , sendo delimitada pelas curvas  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ) e cuja parte superior está no plano  $z = x + y$ , tendo as faces laterais ortogonais ao plano  $xy$ .

Resolução:



$$V = \int_B (x + y) dx dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 (r \cos \theta + r \sin \theta) r dr = \dots = \frac{14}{3}$$

3. Calcular a área de um laço da figura  $r = \text{sen } 3\theta$ .

Resolução:

Precisamos ter  $\text{sen } 3\theta \geq 0$ . Assim:

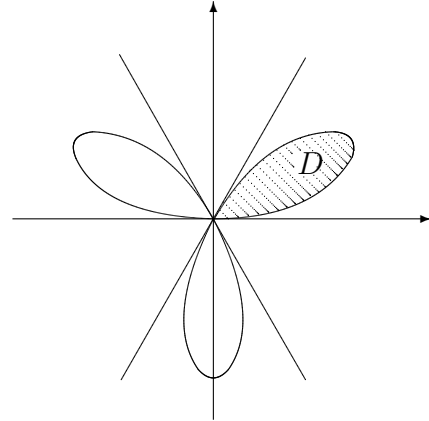
$$2k\pi \leq 3\theta \leq 2k\pi + \pi$$

$$\frac{2}{3}k\pi \leq \theta \leq \frac{2}{3}k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$k = 0 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

$$k = 1 \quad \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$$

$$k = 2 \quad \frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}$$

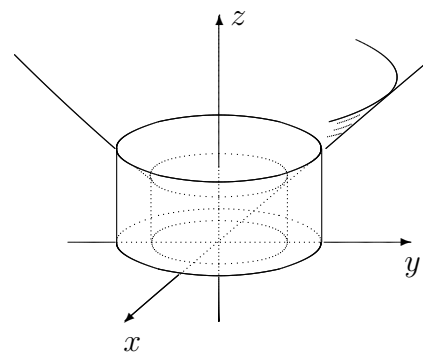
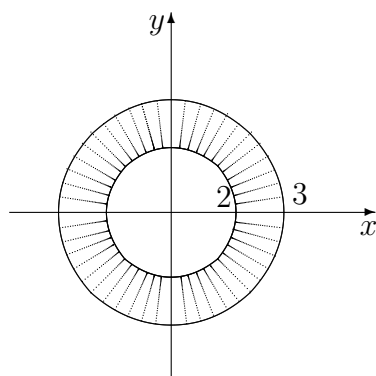


$$\int_D dx dy = \int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^{\text{sen } 3\theta} r dr = \int_0^{\pi/3} \frac{\text{sen}^2 3\theta}{2} d\theta = \dots = \frac{\pi}{12}$$

Lembrar:  $\text{sen}^2 u = \frac{1}{2} (1 - \cos 2u)$

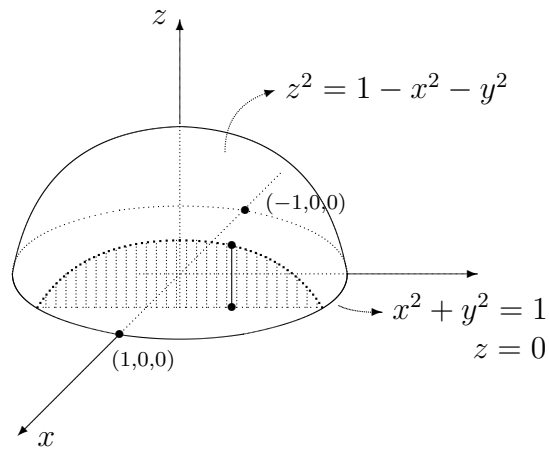
4. Calcular  $\int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , onde  $D$  é o domínio do plano  $xy$  limitado por  $x^2 + y^2 = 4$  e  $x^2 + y^2 = 9$ .

Resolução:



$$\int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 r r dr = \int_0^{2\pi} \frac{19}{3} d\theta = \frac{38}{3} \pi$$

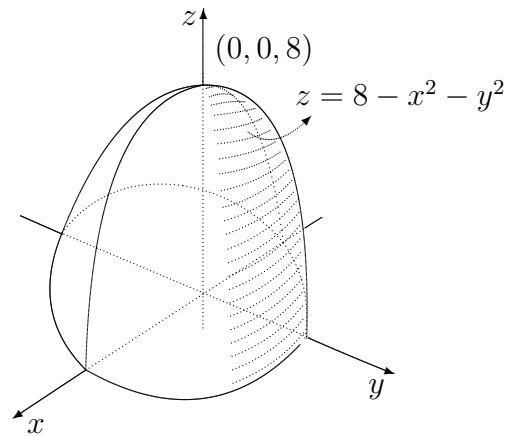
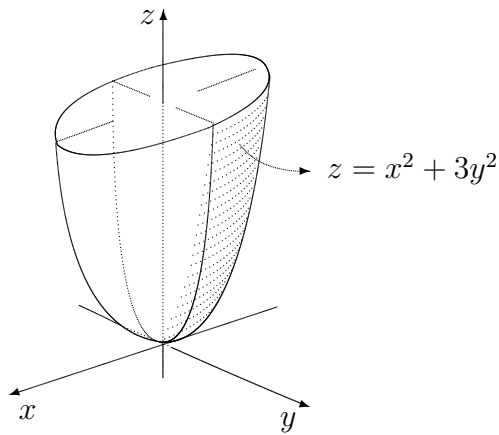
5. Determinar os extremos de integração onde  $R$  é o hemisfério  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $z \geq 0$ , como na figura a seguir:

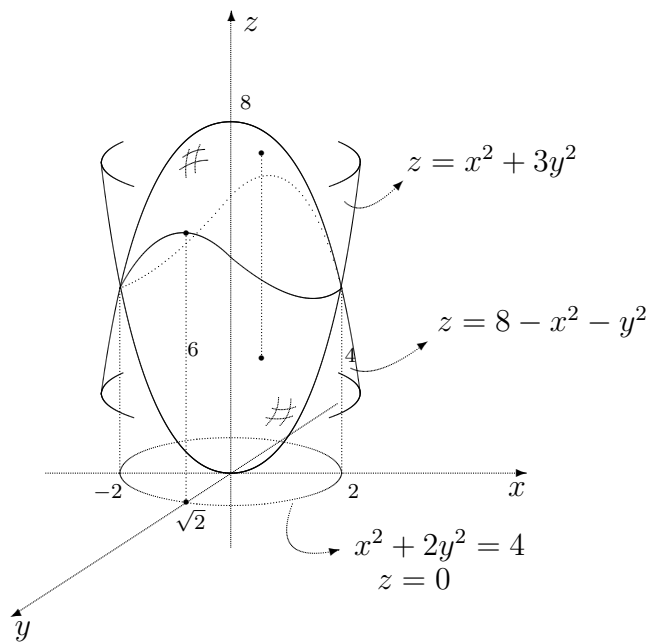


$$\int_R f(x, y, z) dv = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz$$

6. Determinar o volume compreendido entre as superfícies  $z = 8 - x^2 - y^2$  e  $z = x^2 + 3y^2$

Resolução:





Se um ponto  $(x, y, z)$  está na intersecção então:

$$x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2 \implies x^2 + 2y^2 = 4$$

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} dy \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz = \\ &= \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8 - 2x^2 - 4y^2) dy = \\ &= \int_{-2}^2 \left[ 2(8 - 2x^2)\sqrt{(4-x^2)/2} - \frac{8}{3} \left( \frac{4-x^2}{2} \right)^{3/2} \right] dx = \\ &= \int_{-2}^2 \frac{16}{3} \left( \frac{4-x^2}{2} \right)^{3/2} dx = 4 \frac{\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^2 (4-x^2)^{3/2} dx = \dots = 8\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

Lembre-se: você pode fazer uma substituição trigonométrica para resolver a integral.



Vamos agora estudar dois tipos particulares de transformações as quais são usadas muito freqüentemente.

### Transformação Cilíndrica

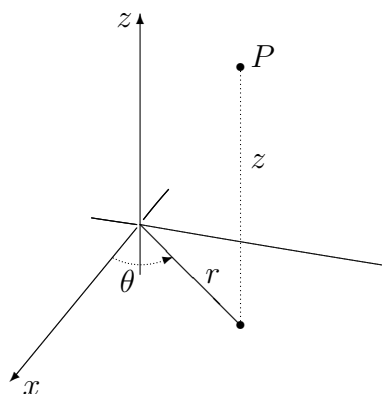
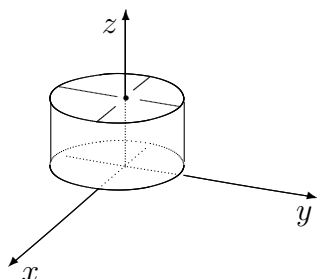
Consideremos a transformação:

$$(x, y, z) = T_c(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)$$

$$\det J(T_c) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Notemos que:

- (i)  $T_c$  é de classe  $C^1$ .
- (ii)  $T_c$  é injetora (exceto em conjunto de volume nulo).
- (iii)  $\det JT_c \neq 0$  (exceto em conjunto de volume nulo)

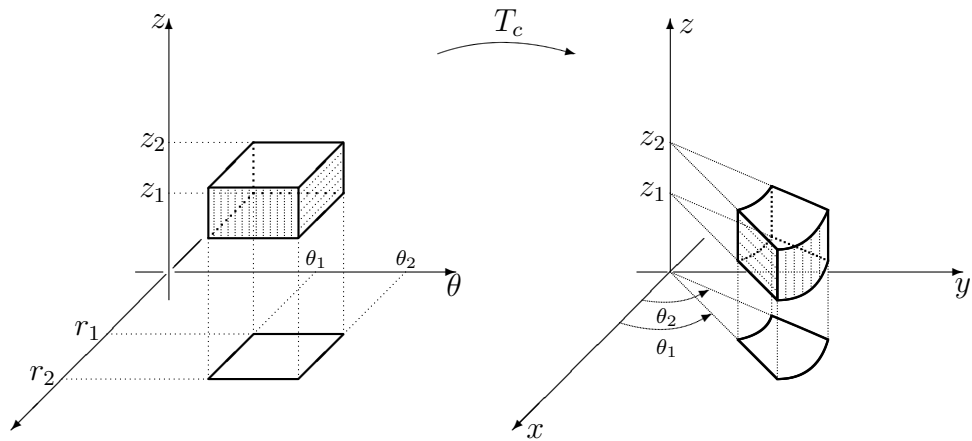


**Exemplo:**

Calcular  $\int_R f(x, y, z) dv$ , onde  $f(x, y, z) = 4xy$  e  $R$  é a região cilíndrica  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

$$\begin{aligned} \int_R 4xy dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^1 4r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta r dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta \underline{\underline{u = \operatorname{sen} \theta}} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

A figura geral a seguir informa qual é o efeito provocado pela atuação da transformação cilíndrica:



A segunda transformação a merecer um destaque especial seria a

### Transformação Esférica

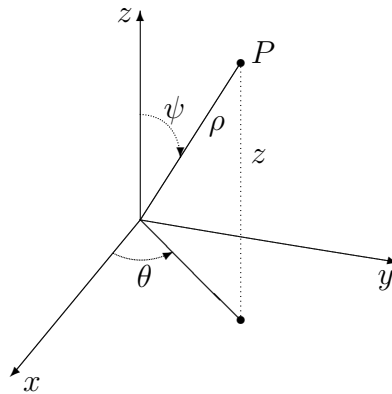
Consideremos a transformação:

$$(x, y, z) = T_e(\rho, \psi, \theta) = (\rho \operatorname{sen} \psi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \psi)$$

$$\det J(T_e) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \psi \cos \theta & \rho \cos \psi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \psi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \psi \cos \theta \\ \cos \psi & -\rho \operatorname{sen} \psi & 0 \end{vmatrix} = \dots = \rho^2 \operatorname{sen} \psi$$

Notemos que:

- (i)  $T_e$  é de classe  $C^1$ .
- (ii)  $T_e$  é injetora (exceto em conjunto de volume nulo).
- (iii)  $\det JT_e \neq 0$  (exceto em conjunto de volume nulo)





**Exemplo 1:**

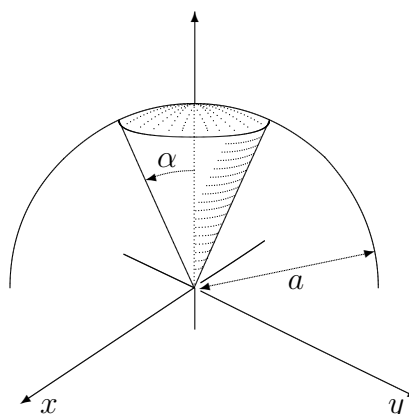
Calcular  $\int_B f(x, y, z) dv$ , onde  $f(x, y, z) = z^2$  e  $B$  é a região  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

$$\int_B z^2 dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\psi \int_0^1 \rho^2 \cos^2 \psi \rho^2 \sin \psi d\rho = \dots = \frac{4\pi}{15}$$

**Exemplo 2:**

Calcular o volume comum à esfera  $\rho = a$  e ao cone  $\psi = \alpha$  (Veja figura a seguir)

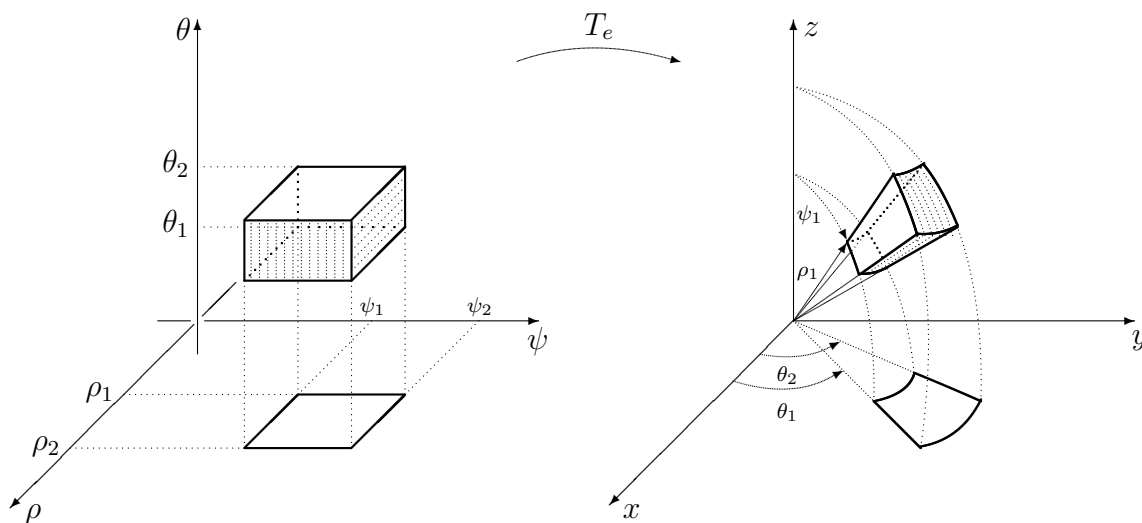
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha d\psi \int_0^a \rho^2 \sin \psi d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha \sin \psi d\psi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3} (1 - \cos \alpha) d\theta = \\ &= 2\pi \frac{a^3}{3} (1 - \cos \alpha). \end{aligned}$$



Observemos os casos particulares:

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{\pi}{2} &\rightarrow \text{hemisfério} & V &= 2\pi \frac{a^3}{3} \\ \alpha = \pi &\rightarrow \text{esfera} & V &= \frac{4}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

A figura geral a seguir informa qual é o efeito provocado pela atuação da transformação esférica:



### Exercícios propostos:

1. Calcule a área da imagem da região retangular com vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(2, 0)$  e  $(2, 1)$ , sob a transformação

$$(x, y) = T(u, v) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

2. Seja  $(x, y) = T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .
  - (a) Desenhe a imagem, sob  $T$ , da região quadrada de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, \frac{\pi}{2})$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  e  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .
  - (b) Qual é a área da região desenhada em (a) ?
3. Prove que a transformação  $T : U^3 \rightarrow R^3$  dada por  $(x, y, z) = T(u, v, w) = (u, u + v, u + v + w)$ , não altera o volume de regiões correspondentes.
4. Ache o volume do sólido  $V$  limitado pelo parabolóide  $z = 4 - x^2 - y^2$  e pelo plano  $xy$ .  
Sugestão: Coordenada polar.
5. Calcule:
  - (a) O volume da região abaixo do plano  $z = 2 + x + y$  para  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
  - (b) O volume do cone sólido acima da superfície  $z = \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$  e abaixo do plano  $z = h$ ; para  $h, a > 0$ .

6. Avaliar com a ajuda de coordenadas polares:

$$(a) \int_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \quad R : x^2 + y^2 \leq 4$$

$$(b) \int_R xy dx dy \quad R : \begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \end{cases}$$

$$(c) \int_R r^2 \cos \theta dr d\theta \quad R : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 \leq r \leq 1 + \sin \theta \end{cases}$$

7. Avaliar com a ajuda de coordenadas cilíndricas:

$$(a) \int_R xy dx dy dz \quad R : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1$$

$$(b) \int_R r^2 dr d\theta dz \quad R : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq z \leq r \sin \theta \end{cases}$$

8. Avaliar com a ajuda de coordenadas esféricas:

$$(a) \int_R (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dx dy dz \quad R : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

$$(b) \int_R \rho \cos(\psi + \theta) d\rho d\psi d\theta \quad R : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \psi \leq \theta \end{cases}$$

9. Seja a transformação  $T(u, v) = (u + v, u^2 - v) = (x, y)$ . Considere  $R$  a região limitada pelo eixo  $u$ , pelo eixo  $v$  e pela reta  $u + v = 2$ .

(a) Desenhe  $T(R)$ .

(b) Calcule  $\int_{T(R)} \frac{1}{\sqrt{1 + 4x + 4y}} dx dy$

10. Seja a transformação do plano  $xy$  no plano  $uv$  dada por:

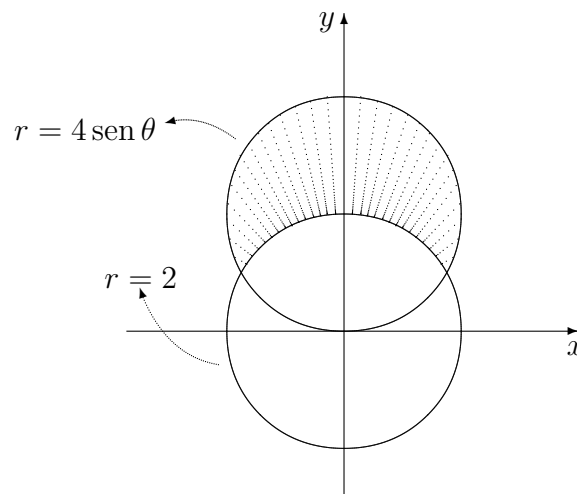
$$(u, v) = T(x, y) = (x, y(1 + 2x))$$

- (a) O que acontece com as retas horizontais do plano  $xy$ ?
- (b) Se  $R$  é a região retangular  $0 \leq x \leq 3$ ,  $1 \leq y \leq 3$  ache  $T(R) = D$ .
- (c) Calcule  $\int_D du dv$  diretamente e depois usando mudança de variáveis.
11. Faz-se um orifício circular em uma esfera, sendo que o eixo do orifício coincide com o diâmetro da esfera. O volume do sólido resultante é dado por:

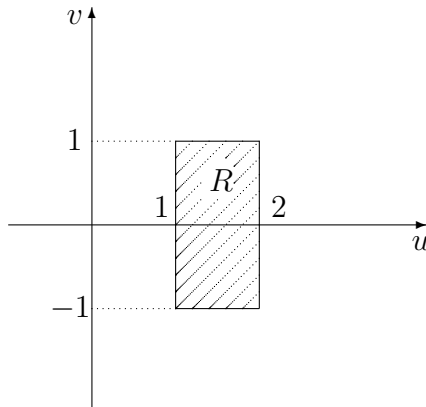
$$V = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 dr \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r dz .$$

- (a) Por observação da integral acima determine o raio do orifício e o raio da esfera.
- (b) Calcule o valor da integral.
12. Ache o volume de uma cunha formada pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  e pelos planos  $z = 0$  e  $z = 2y$ , no semi-espaço  $z \geq 0$ .

13. Calcule  $\int_B \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$  onde  $B$  é a região hachurada abaixo:



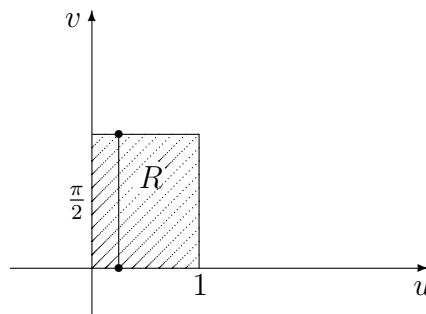
14. Considere a transformação  $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv) = (x, y)$ .
- (a) Qual é a imagem, por  $T$ , da região mostrada a seguir.
- (b) Calcular  $\int_{T(R)} x dx dy$



15. Considere a transformação  $T(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v) = (x, y)$ .

(a) Qual é a imagem, por  $T$ , da região mostrada a seguir.

(b) Calcular a área da região  $T(R)$ .



16. Calcular o volume compreendido entre as superfícies  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 8 - x^2 - y^2$ .

17. Calcular o volume do sólido delimitado por  $z = e^{y^2}$ ,  $z = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 3$  e  $3x = y$ .

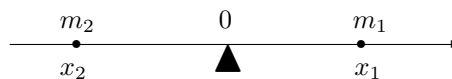
## 1.4 Algumas Aplicações

Já usamos as integrais múltiplas para calcular áreas de figuras planas e volumes de sólidos. Vejamos agora outras aplicações.

### 1.4.1 Densidade - Centro de Massa

Introdução:

Consideremos  $\ell$  uma reta coordenada e  $P$  um ponto sobre  $\ell$ , de coordenada  $x$ . Se uma partícula de massa  $m$  é colocada em  $P$ , então o momento da partícula em relação à origem  $O$  é definido como o produto  $mx$ . Consideremos uma “balança” do tipo desenhado abaixo, onde duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  estão localizadas em pontos com coordenadas  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente, sendo  $x_1 > 0$  e  $x_2 < 0$ . Então o sistema é dito em equilíbrio se  $m_1x_1 = m_2|x_2|$ , ou seja,  $m_1x_1 = -m_2x_2$ , ou ainda,  $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$ , isto é, a soma dos momentos em relação à origem é zero.



Em geral:

Se  $n$  partículas de massas  $m_1, \dots, m_n$  estão localizadas em pontos de  $\ell$  com coordenadas  $x_1, \dots, x_n$ , respectivamente, então a soma dos momentos  $\sum_{i=1}^n m_i x_i$  é chamada o momento do sistema em relação à origem.

Seja  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  a massa total do sistema. Definimos:

$$(*) \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m} \quad \text{ou} \quad m\bar{x} = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

O número  $m\bar{x}$  é o momento, em relação à origem, de uma partícula de massa  $m$  localizada no ponto de coordenada  $\bar{x}$ . A fórmula (\*) dá a posição  $\bar{x}$  na qual toda a massa  $m$  pode ser concentrada sem trocar o momento do sistema em relação à origem. O ponto  $P$  com coordenada  $\bar{x}$  é chamado o centro de massa do sistema.

Se  $\bar{x} = 0$ , então  $\sum_i m_i x_i = 0$  e o sistema é dito em equilíbrio. Neste caso, a origem é o centro de massa.

O conceito anterior pode ser estendido para dimensão 2, como segue:

Sejam  $n$  partículas de massas  $m_1, \dots, m_n$ , localizadas em pontos  $P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)$ , respectivamente, sobre um plano coordenado. Os momentos  $M_x$  e  $M_y$  do sistema em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, são definidos por:

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Se  $m$  denota a massa total do sistema ( $m = \sum_i m_i$ ), então o centro de massa do sistema é o ponto  $P = (\bar{x}, \bar{y})$ , dado por:

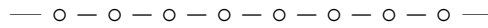
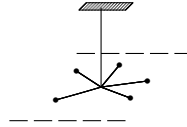
$$(**) \quad m\bar{x} = M_y \quad \text{e} \quad m\bar{y} = M_x$$

Observe que se tivermos uma partícula de massa  $m$  localizada no ponto  $P = (\bar{x}, \bar{y})$ , então o momento em relação ao eixo  $y$  será  $m\bar{x}$  e o momento em relação ao eixo  $x$  será  $m\bar{y}$ .

A fórmula (\*\*) dá a posição  $(\bar{x}, \bar{y})$ , na qual toda massa pode ser concentrada sem trocar os momentos do sistema em relação aos eixos coordenados.

Se  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ , então  $M_x = M_y = 0$  e o sistema é dito em equilíbrio. Neste caso a origem coincide com o centro de massa. O centro de massa é o ponto pelo qual poderíamos pendurar o sistema de modo que ele fique em equilíbrio na horizontal.

Visualização: Suponhamos que num plano temos 5 partículas constituindo um “mobile” do tipo da figura a seguir. Se quisermos através de um fio, prender este “mobile” ao teto, de maneira que o plano das partículas fique na posição horizontal, deveremos prender o fio no centro de massa do sistema.



Consideremos agora uma lâmina  $L$  com a forma da região  $D$  ao lado.

Suponhamos que a densidade no ponto  $(x, y)$

seja dada por  $\rho(x, y)$ , onde  $\rho$  é contínua sobre  $D$ .

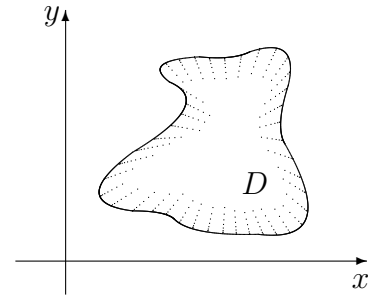
Tomemos  $G$  uma rede cobrindo  $D$ .

Escolhemos pontos  $(x_i, y_i)$  nos retângulos

coordenados  $R_i$ . Chamaremos de  $L_i$  a parte

de  $L$  que corresponde a  $R_i$ . Desde que  $\rho$

seja contínua, uma pequena troca em  $(x, y)$  produz uma pequena troca na densidade  $\rho(x, y)$ , isto é,  $\rho$  é quase constante sobre  $R_i$ , quando  $m(G) \rightarrow 0$ . Assim, se  $m(G) \rightarrow 0$ , então a massa de  $L_i$  pode ser aproximada por  $\rho(x_i, y_i) \cdot A(R_i)$ . A soma  $\sum_i \rho(x_i, y_i) \cdot A(R_i)$  é uma aproximação da massa de  $L$ . A massa  $M$  de  $L$  é definida como:



$$M = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i \rho(x_i, y_i) A(R_i) = \int_D \rho(x, y) dA$$

Em particular, se a distribuição de massa  $M$  for homogênea, isto é,  $\rho(x, y) = c$ , então:

$$M = c \int_D dA = c \cdot (\text{área de } D)$$

Ainda: a densidade média da lâmina  $L$  é

$$\bar{\rho} = \frac{\text{massa}}{\text{área}} = \frac{\int_D \rho(x, y) dA}{\int_D dA}$$

Se a massa de  $L_i$  é suposta concentrada em  $(x_i, y_i)$  então o momento de  $L_i$  em relação ao eixo  $x$  é  $y_i \rho(x_i, y_i) A(R_i)$ . O momento  $M_x$  de  $L$  em relação ao eixo  $x$  é definido como o limite de tais somas, isto é:

$$(**) \quad M_x = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i y_i \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot A(R_i) = \int_D y \cdot \rho(x, y) dA$$

Analogamente:

$$M_y = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i x_i \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot A(R_i) = \int_D x \cdot \rho(x, y) dA$$

Ainda, o centro de massa da lâmina  $L$  é o ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$ , tal que:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad e \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

Substituindo, temos:

$$\bar{x} = \frac{\int_D x \cdot \rho(x, y) dA}{\int_D \rho(x, y) dA} \quad e \quad \bar{y} = \frac{\int_D y \cdot \rho(x, y) dA}{\int_D \rho(x, y) dA}$$

No caso particular em que a densidade  $\rho(x, y)$  é constante, as expressões acima se reduzem a:

$$\bar{x} = \frac{\int_D x dA}{\int_D dA} \quad e \quad \bar{y} = \frac{\int_D y dA}{\int_D dA}$$

Neste caso, o centro de massa é denominado **centróide**. Observe que independe do valor  $c = \rho(x, y)$ . Deste modo, ele pode ser pensado como um conceito geométrico associado unicamente à forma da região  $A$ , independentemente da distribuição de massa.

### Exercícios resolvidos:

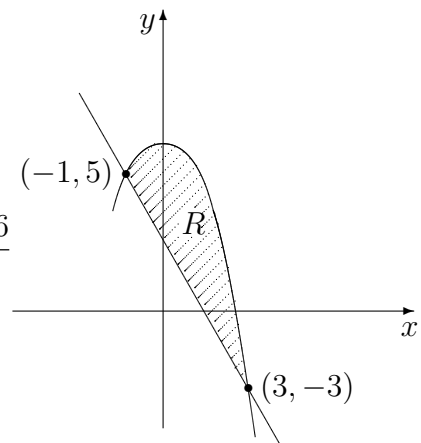
1. Ache o centróide de uma lâmina que ocupa a região  $D$ , delimitada pelos gráficos de  $y + x^2 = 6$  e  $y + 2x - 3 = 0$ .

Resolução:



$$A(R) = \int_{-1}^3 ((6-x^2) - (3-2x))dx = \dots = \frac{32}{3}$$

$$\begin{aligned} \int_D y dA &= \int_{-1}^3 dx \int_{3-2x}^{6-x^2} y dy = \\ &= \int_{-1}^3 ((6-x^2)^2 - (3-2x)^2)dx = \dots = \frac{416}{15} \end{aligned}$$



Logo,  $\bar{y} = \frac{416/15}{32/3} = \frac{13}{5}$

$$\int_D x dA = \int_{-1}^3 dx \int_{3-2x}^{6-x^2} x dy = \int_{-1}^3 x [(6-x^2) - (3-2x)] dx = \dots = \frac{32}{3}$$

Assim  $\bar{x} = \frac{32/3}{32/3} = 1$

$\therefore$  Centro de Massa é  $\left(1, \frac{13}{5}\right)$ .

2. Determine o centróide de uma lâmina que ocupa a região  $R$  do semicírculo  $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$ .

Resolução:

Por simetria sabemos que o centróide está situado sobre o eixo  $y$ , ou seja é da forma  $C = (0, \bar{y})$ .

Sabemos também que  $A(R) = \frac{\pi}{2}$

$$\int_R y dA = \int_0^\pi \int_0^1 (r \operatorname{sen} \theta) r dr d\theta = (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \cdot \left(\frac{r^3}{3}\right) \Big|_0^1 = (1+1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

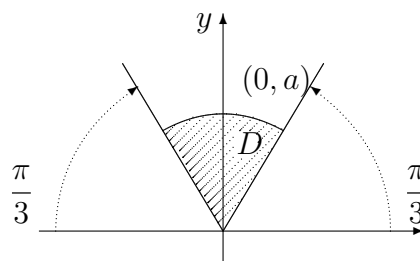
Assim temos:  $\bar{y} = \frac{\int_D y dA}{\int_D dA} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi}$

Logo, o centro de massa é o ponto  $\left(0, \frac{4}{3\pi}\right)$

**Exercício proposto:**

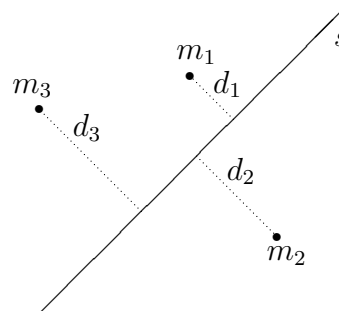
Determine o centro de massa de uma lâmina com a forma do setor circular abaixo, sendo que a densidade é  $\rho(x, y) = 5$ .

Resposta:  $\left(0, \frac{2a}{\pi}\right)$ .



### 1.4.2 Momento de Inércia

Suponhamos dadas uma reta  $s$  e massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  localizadas nos pontos  $P_1, \dots, P_n$ , no plano  $R^2$ . Denotemos por  $d_1, \dots, d_n$  as distâncias desses pontos à reta  $s$ . Ao número real  $I_s = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2$  costumamos chamar de momento de inércia do sistema em relação à reta  $s$ .



Em particular, se a reta  $s$  é o eixo dos  $x$ , temos  $I_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2$ , onde  $P_i = (x_i, y_i)$ .

Analogamente  $I_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2$ .

Este conceito pode ser estendido para lâminas usando o processo limite das integrais duplas. Se  $L$  é uma lâmina do tipo usado na seção anterior e se  $\rho(x, y)$  é a densidade em  $(x, y)$ , onde  $\rho$  é contínua, então é natural definir o momento de inércia  $I_x$  de  $L$  com relação ao eixo  $x$  trocando  $y_i$  por  $y_i^2$  em (\*\*). Assim,

$$I_x = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i y_i^2 \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot A(R_i) = \int_D y^2 \cdot \rho(x, y) dA$$

Analogamente,

$$I_y = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i x_i^2 \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot A(R_i) = \int_D x^2 \cdot \rho(x, y) dA$$

Se multiplicarmos  $\rho(x_i, y_i) \cdot A(R_i)$  por  $x_i^2 + y_i^2$  que é o quadrado da distância do ponto  $(x_i, y_i)$  à origem e tomarmos o limite de somas constituídos por tais termos, obtemos o momento de inércia  $I_0$  de  $L$  com relação à origem. Assim,

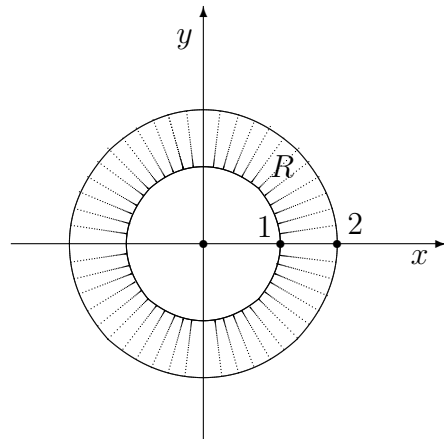
$$I_0 = \int_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)dA$$

$I_0$  é também chamado momento de inércia polar da lâmina  $L$  em relação à origem. Observe que  $I_0 = I_x + I_y$ .

**Exemplo:**

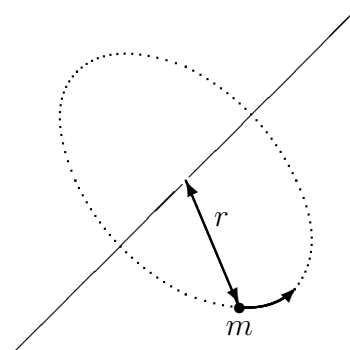
Uma lâmina delgada de densidade constante ocupa a região mostrada abaixo. Calcule o seu momento de inércia polar em relação a 0.

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_R (x^2 + y^2)\rho dA = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \rho r dr = \rho \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \Big|_1^2 d\theta = \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \frac{15}{4} d\theta = \rho \cdot \frac{15\pi}{2} . \end{aligned}$$



**Observação:** Quando uma partícula de massa  $m$  gira ao redor de um eixo, num círculo de raio  $r$ , com velocidade angular  $w$  e velocidade  $v(v = wr)$ , sua energia cinética é:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mw^2r^2$$



Se um sistema de partículas de massas  $m_1, \dots, m_n$  gira em torno do mesmo eixo com a mesma velocidade angular,  $w$ , as distâncias ao eixo sendo  $r_1, \dots, r_n$ , respectivamente, então

a energia do sistema é

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 I ,$$

onde  $I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$  é o momento de inércia em relação ao eixo.

A energia cinética de um sistema em rotação é a quantidade de trabalho necessária para fazer o sistema parar. Em certo sentido, o momento de inércia de um grande eixo é que torna difícil iniciar ou fazer cessar a rotação do eixo.

Além de sua importância em relação à energia cinética dos corpos com movimento giratório, o momento de inércia é também usado na teoria de deflexão de vigas sob a ação de carga transversa, onde o “fator de rigidez” da viga é dado por  $E.I$ , sendo  $E$  o módulo de Young e  $I$  o momento de inércia de uma seção transversa da viga em relação a um eixo horizontal passando por seu centro de massa. Quanto maior for o valor de  $I$ , mais rígida será a viga e menor a deflexão. Utiliza-se este fato nas chamadas “vigas em I”, nas quais as flanges acham-se a distâncias relativamente grandes do centro, e correspondem, portanto, a grandes valores de  $r^2$  na equação  $I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ , contribuindo assim para o momento de inércia, mais do que no caso de a seção transversa ser quadrada.

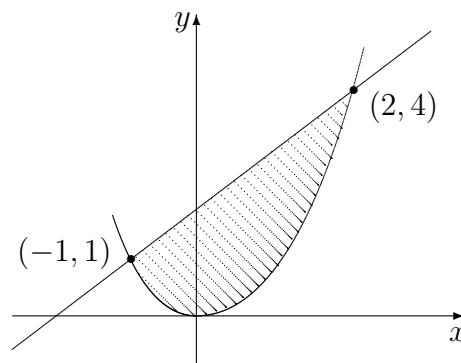
Os momentos também são usados em estatística. O segundo momento (que corresponde ao momento de inércia) é usado no cálculo do desvio padrão.

### Exercícios resolvidos:

1. Uma chapa delgada, de espessura e densidade uniformes cobre a região do plano  $xy$  situada entre  $y = x^2$  e  $y = x + 2$ . Calcular seu momento de inércia em relação ao eixo  $y$ .

Resolução:

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} x^2 \cdot \delta dy = \\ &= \delta \int_{-1}^2 x^2 y \Big|_{x^2}^{x+2} dx = \\ &= \delta \int_{-1}^2 (x^3 + 2x^2 - x^4) dx = \frac{63}{20} \delta \end{aligned}$$



2. Determinar o centro de massa de uma placa delgada, de espessura e densidade uniformes, que está sobre a região do plano  $xy$  limitada pelas retas  $y = 1$ ,  $x = 2$  e  $y = 0$  e pela parábola  $y = x^2$ .

Resolução:

$$\bar{x} = \frac{\int_A x \rho dA}{\int_A \rho dA} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}$$

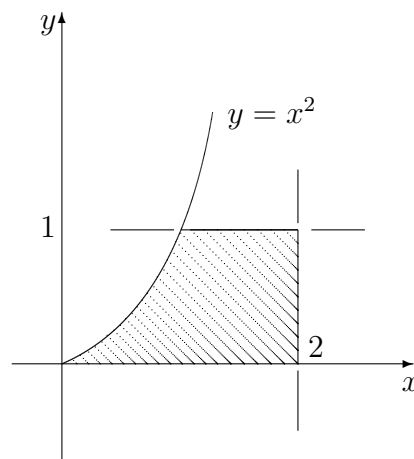
$$\int_A dA = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^2 dx = \dots = \frac{4}{3}$$

$$\int_A x dA = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^2 x dx = \dots = \frac{7}{4}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{21}{16}.$$

Analogamente,  $\bar{y} = \frac{9}{20}$

$$\therefore \text{Centro de gravidade: } \left( \frac{21}{16}, \frac{9}{20} \right).$$



3. Ache o centro de massa de uma lâmina quadrada  $ABCD$ , de lado  $\frac{3}{2}$ , sabendo que a densidade em qualquer ponto  $P$  é o produto das distâncias de  $P$  a  $AB$  e a  $BC$ .

Resolução:

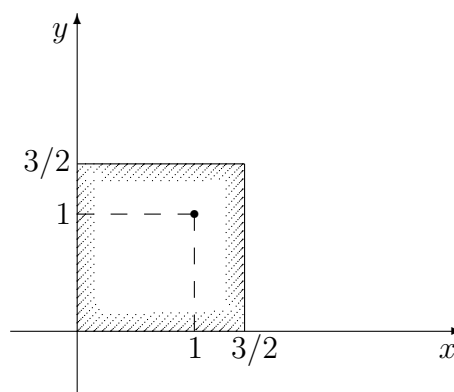
Escolhemos um sistema de coordenadas como na figura. Temos que  $\rho(x, y) = xy$

$$M = \int_0^{3/2} dy \int_0^{3/2} xy dx = \dots = \frac{81}{64}$$

$$M_x = \int_0^{3/2} dy \int_0^{3/2} xy^2 dx = \dots = \frac{81}{64}$$

$$M_y = \int_0^{3/2} dy \int_0^{3/2} x^2 y dx = \dots = \frac{81}{64}$$

Assim,  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$  é o centro de massa.



4. Ache o centro de massa de uma lâmina semicircular, sendo a densidade da lâmina em

qualquer ponto  $P$  proporcional à distância entre  $P$  e o centro do círculo.

Resolução:

Escolhemos um sistema de coordenadas polares, com o semicírculo tendo equação

$$r = a \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

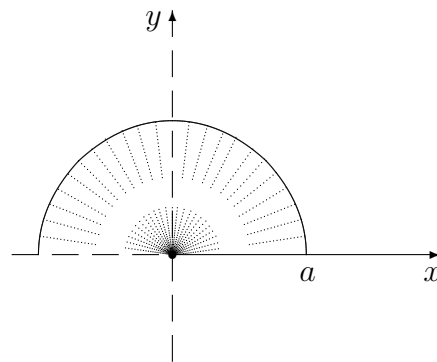
Temos  $\rho(r, \theta) = kr$ , para alguma constante  $k$ .

$$M = \int_0^\pi d\theta \int_0^a (kr)r dr = \frac{k \cdot a^3}{3} \int_0^\pi d\theta = \frac{\pi k \cdot a^3}{3}$$

$$M_x = \int_0^\pi d\theta \int_0^a (kr) \cdot r \sin \theta \cdot r dr = \frac{k \cdot a^4}{4} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{k \cdot a^4}{2}$$

Por simetria, temos que o centro de massa encontra-se sobre o raio  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , ou seja,  $M_y = 0$ .

Logo,  $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{3a}{2\pi}\right)$  ou em coordenadas polares  $\left(\frac{3a}{2\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$ .



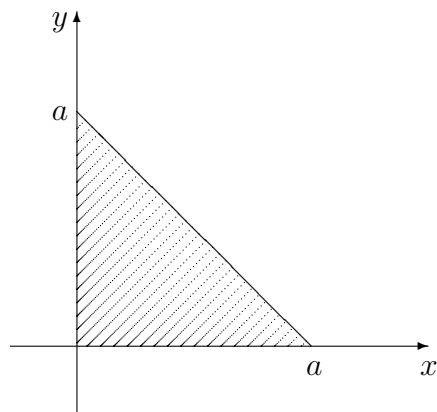
### Exercícios propostos:

1. Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles, cujos lados iguais medem  $a$ . Ache o centro de massa, sabendo que a densidade num ponto  $P$  é diretamente proporcional ao quadrado da distância de  $P$  ao vértice oposto à hipotenusa.

Resposta: na situação ao lado

o centro de massa é

$$\left(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}\right).$$



2. Calcular o momento de inércia, em relação ao eixo  $x$ , de uma lâmina situada entre as curvas  $x = y^2$  e  $x = 2y - y^2$ , sendo que a densidade em  $(x, y)$  é  $\rho(x, y) = y + 1$ .

Resposta:  $\frac{1}{6}$



Tudo o que foi visto nas seções anteriores generaliza-se para sólidos, usando-se integrais triplas.

Se um sólido tem o formato de uma certa região 3-dimensional  $Q$  e se a densidade no ponto  $(x, y, z)$  é  $\rho(x, y, z)$ , então analogamente ao visto anteriormente, a massa é dada por:

$$M = \int_Q \rho(x, y, z) dv.$$

Se temos uma partícula de massa  $m$  num ponto  $(x, y, z)$ , então seus momentos com relação aos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  são definidos como  $zm$ ,  $ym$  e  $xm$ , respectivamente. Usando os mesmos tipos de argumentos utilizados anteriormente definimos os **momentos** do sólido em relação aos planos coordenados como sendo:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_Q z \cdot \rho(x, y, z) dv \\ M_{yz} &= \int_Q x \cdot \rho(x, y, z) dv \\ M_{xz} &= \int_Q y \cdot \rho(x, y, z) dv \end{aligned}$$

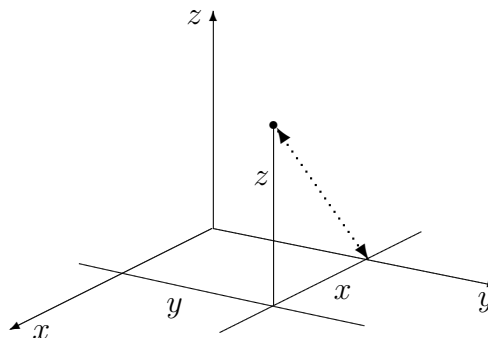
O centro de massa é o ponto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , onde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Quando  $\rho(x, y, z) \equiv C$ , então o centro de massa é chamado **centróide**. Observemos que ele

independe do valor de  $\rho(x, y, z)$ .

Se uma partícula de massa  $m$  está no ponto  $(x, y, z)$ , então seu momento de inércia em relação ao eixo  $y$  é  $(x^2 + z^2)m$ .



Novamente aqui somos levados a definir

$$I_y = \int_Q (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dv$$

Analogamente, temos:

$$I_x = \int_Q (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dv$$

$$I_z = \int_Q (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dv$$

### Exemplo:

Considere o sólido com o formato dado abaixo. Ache o seu centro de massa e o momento de inércia em relação ao eixo  $z$ . ( $\rho(x, y, z) = 1$ ).

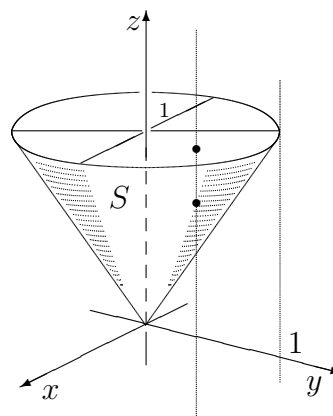
$$\begin{aligned} M &= \int_S 1dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 r dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r(1-r)dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) d\theta = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_S z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 zr dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)dr = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \bar{z} = \frac{\pi/4}{\pi/3} = \frac{3}{4}.$$

Por simetria  $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$\therefore \text{centro de massa: } \left(0, 0, \frac{3}{4}\right).$$





$$\begin{aligned}
I_z &= \int_S (x^2 + y^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 r^2 \cdot r dz = \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3(1-r) dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{20} d\theta = \frac{\pi}{10}
\end{aligned}$$

### Exercícios propostos:

1. Encontrar o centro de massa da pirâmide homogênea de base delimitada pelas retas  $x = 1, x = -1, y = 1, y = -1$  no plano  $z = 0$ , e cujo vértice é o ponto  $(0, 0, 1)$ .

Resposta:  $(0, 0, \frac{1}{4})$ .

2. Use coordenadas cilíndricas para determinar o momento de inércia de uma esfera de raio  $a$  e massa  $M$ , em relação a um diâmetro. Resposta:  $\frac{2}{5} Ma^2$ .

3. Calcule  $\int \int \int_B x^2 y^2 z dV$ , onde  $B$  é a bola de raio  $a$  e centro na origem do  $R^3$ .

Sugestão: Você pode calcular de uma maneira indireta. Resposta: 0

4. Está claro que se  $B$  é a bola de raio 1 e centro na origem então

$$\int \int \int_B [3 + (x^2 + y^2 + z^2) \sin z] dV = 4\pi ?$$

5. Calcule  $\int \int_B x^y dA$ , onde  $B = [0, 1] \times [1, 2]$ . Resposta:  $\ln(\frac{3}{2})$