Estudo do Cálculo e Aplicações

Erick Bernardo

Escola de Engenharia de São Carlos - USP São Carlos

Bolsa: Ensinar com Pesquisa

Orientador: Janete Crema Simal

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC - USP São Carlos

Sumário

1 Resumo

Todos os anos estudantes das ciências exatas têm contato com o cálculo diferencial e integral aplicado a funções de uma variável real. Porém, muitos têm dificuldade de visualizar sua aplicabilidade em problemas das mais variáveis áreas. Assim, este material vem trazer uma série de questões resolvidas explorando a aplicação da teoria de sala de aula em problemas diversos do cálculo de funções de uma variável.

2 Objetivos

Esta apostila tem como objetivo se tornar um banco de dados de questões resolvidas para uso na elaboração de listas de exercícios e exemplos que trazem uma aplicação diversificada do cálculo de funções de uma variável.

3 Aplicações do Cálculo Diferencial e Integral

3.1 Funções elementares

1. Sejam F e C as temperaturas em graus Fahrenheit e graus Celsius. Ache a equação que relaciona F e C, sabendo-se que a função é linear e que $F = 32$ quando $C = 0$ e $F = 212$ quando $C = 100$.

   Queremos encontrar F=f(C) (linear)

   $F = f(C) = aC + b$

   $f(0) = a0 + b = 32 \Rightarrow b = 32$
   $f(100) = a100 + b = 212 \Rightarrow a = \frac{180}{100} = 1,8$

   $F = f(C) = 1,8C + 32$

2. Numa certa viagem de bicicleta, a primeira metade da distância foi percorrida a 30 km/h e a segunda metade, a 20 km/h. Qual foi a velocidade média?

   Seja d a distância percorrida na primeira e segunda metade

   $t_1 = \frac{d}{30}$ *e* $t_2 = \frac{d}{20}$

   $V_m = \frac{D}{T}$ *com* $D = 2d$ *e* $T = t_1 + t_2$

   Assim, $V_m = \frac{D}{T} = \frac{2d}{\frac{d}{30}+\frac{d}{20}} = \frac{30*20}{25} = 24\ km/h$

3. Uma agente de promoção considera que quanto mais ela divulga seus produtos na televisão, mais ela venderá. A relação pode ser expressa por $y = \frac{3}{2}x + 150$, na qual y é o número de vendas por semana, e x indica o número de vezes que o comercial foi divulgado durante a semana. Reproduza o gráfico dessa equação.

   A função $y = \frac{3}{2}x + 150$ *é uma reta que cruza o eixo x em x=-100 e o eixo y em y=150.*

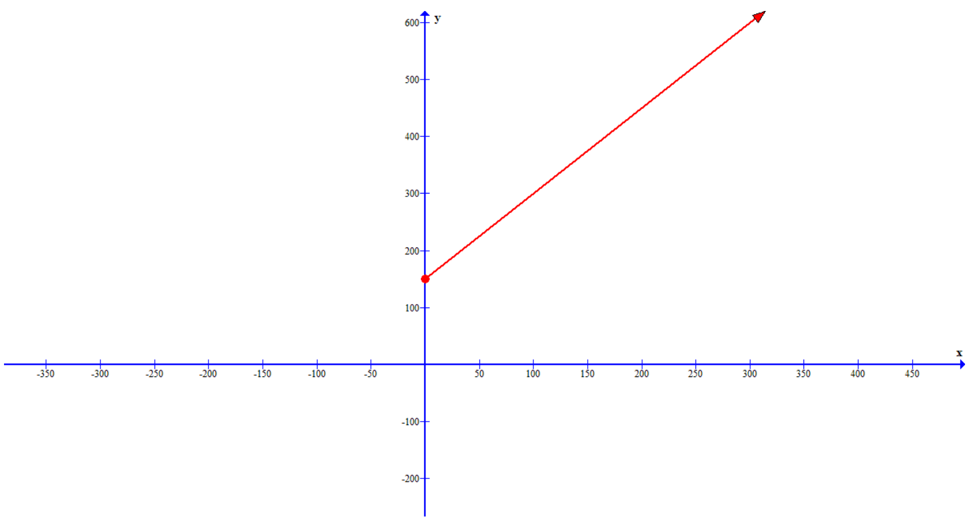

Figura 1: $y = \frac{3}{2}x + 150$

4. Em um laboratório ratos aprendem a pressionar um botão para receberem comida. A equação $y = \frac{1}{2}x$ expressa o número de vezes que a botão é pressionado em um minuto

(y) e a quantidade de comida dada (x). Faça o gráfico da equação dada. Quando quatro unidades de comida é dada, quantas vezes os ratos pressionaram a barra?

A função $y = \frac{1}{2}x$ *representa uma reta que passa pela origem, como o gráfico abaixo descreve.*

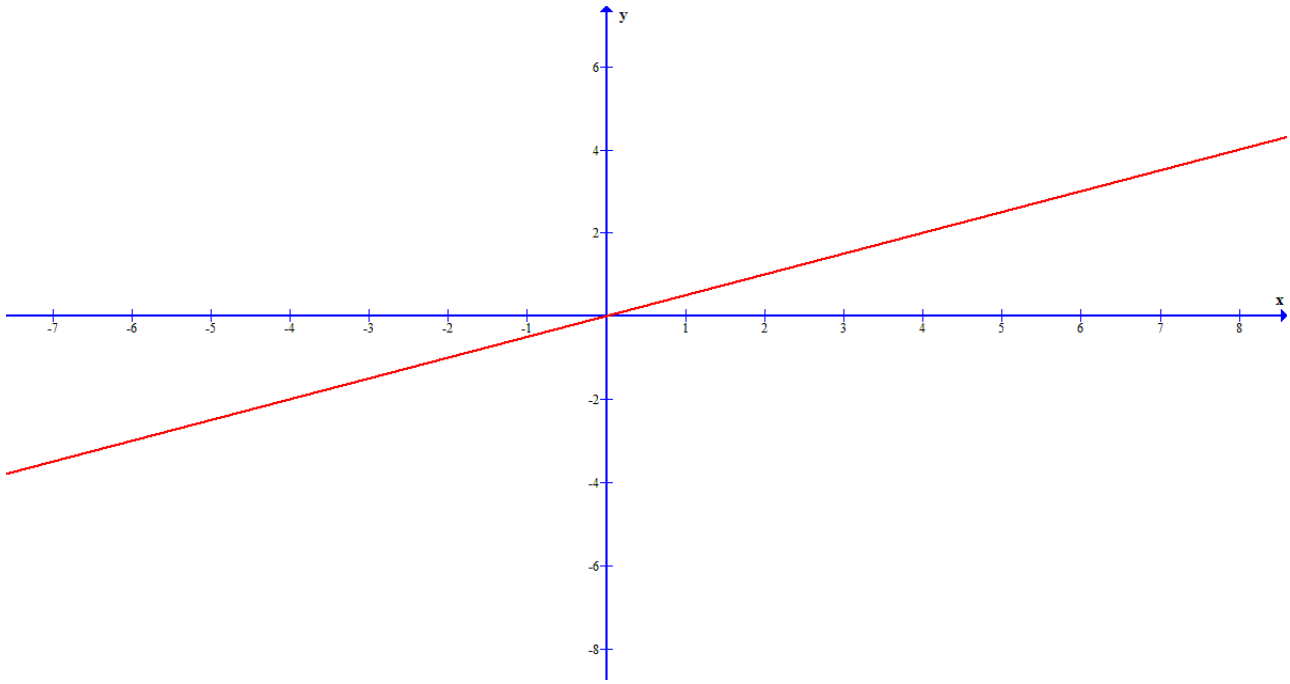

Figura 2: $y = \frac{1}{2}x$

$y = f(x) = \frac{1}{2}x$, *Assim,* $f(4) = \frac{1}{2}(4) = 2$. *O botão foi pressionado 2 vezes.*

5. O crescimento de uma determinada cultura pode ser estimada pela equação $y = 0,2x^2$, na qual y é a quantidade após x horas. Represente o gráfico dessa equação e determine a quantidade presente inicialmente ($x = 0$) e depois de uma e de duas horas.

   As raízes de f *são obtidas por:*

$$f(x) = 0,2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

   Como $x \geq 0$,

   Em, $f(0) = 0$, $f(1) = 0,2$ *e* $f(2) = 0,8$

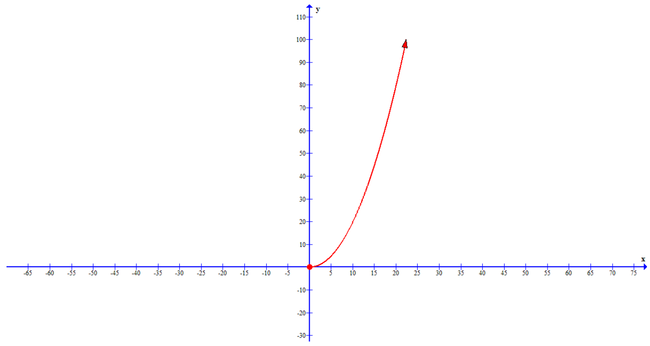

Figura 3: $y = 0,2x^2$

6. Um biólogo determina que a temperatura da água tem um efeito sobre o número de peixes capturados em um dia. Ele encontrou a relação $N = -\frac{1}{2}t^2 + 60t - 1300 (t \geq 25)$, na qual N representa o número de peixes capturados em um dia, e t é a temperatura em °F.
   (a) Represente o gráfico dessa equação.
   (b) Qual é a temperatura ideal da água para capturar mais peixes?

   (a)O gráfico pode ser representado pela figura (4):

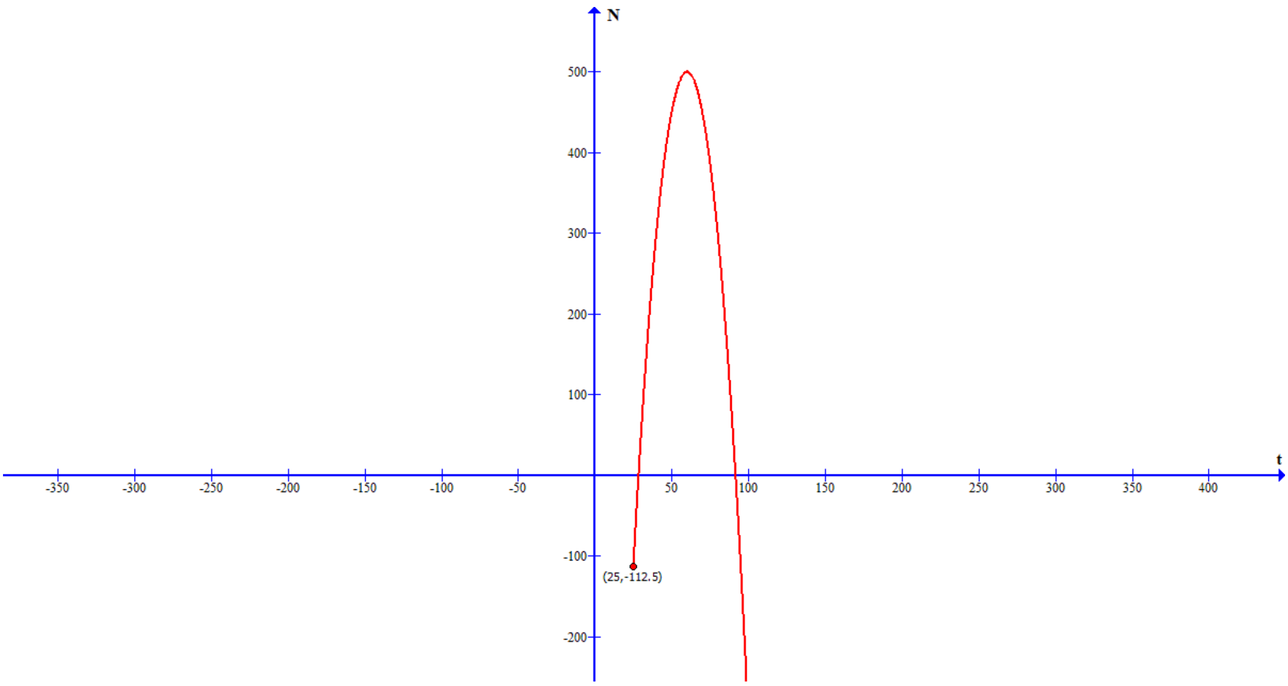

Figura 4: $N = -\frac{1}{2}t^2 + 60t - 1300,\ (t \geq 25)$

(b) A expressão $N = -\frac{1}{2}t^2 + 60t - 1300$ *é uma função quadrática com um ponto de N máximo como podemos observar no gráfico.*

$N = -\frac{1}{2}t^2 + 60t - 1300 = 0 \Rightarrow t = 91.62$ *e* $t = 28.38$

Devido a simetria temos:

$$d = \frac{91,62 + 28,38}{2} = 31,62 \quad e \quad t = 28,38 + d = 60^o F$$

A temperatura para a máxima captura de peixe é de 60ºF.

7. Uma fábrica possui um custo, y, em reais, para produzir x unidades de uma mercadoria representado pela equação $y = \frac{1}{3}x + 212$.
(a) Represente seu gráfico;
(b) Qual é o custo de produção de 48 unidades?

(a) A equação representa uma reta. Ver figura (5).

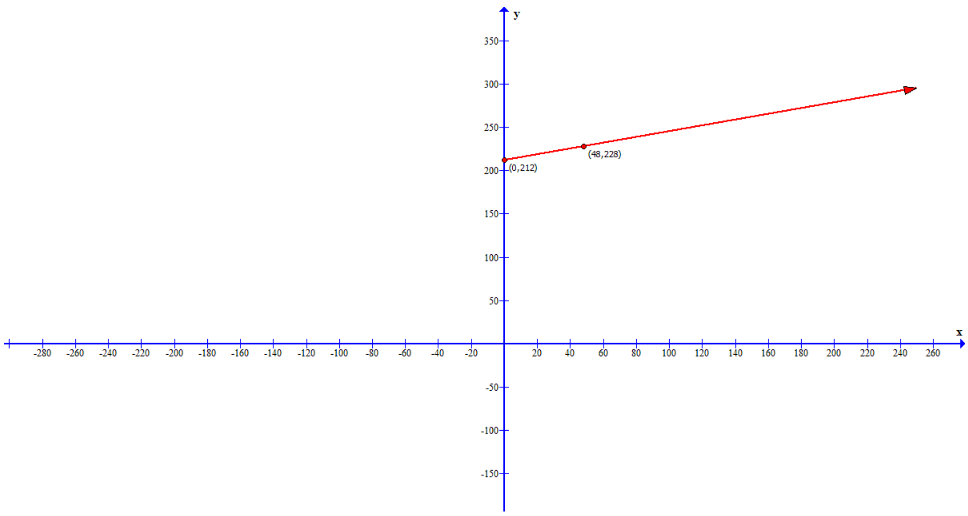

Figura 5: $y = \frac{1}{3}x + 212, \; x \geq 0$

(b) Substituindo x=48 em y temos, $y = f(48) = \frac{1}{3}(48) + 212 = 228$ *reais.*

8. Uma fábrica comprou uma máquina em 2000 por R\$10000,00. Devido a depreciação a máquina valia R\$5000,00 em 2005. Se a depreciação é considerada linear, encontre a equação que descreve o valor da máquina depois de x anos. Encontre também o valor da máquina em 2007.

   A equação de uma reta pode ser representada por $y-y_0 = m(x-x_0)$, na qual m representa o coeficiente angular da reta e (y_0, x_0) um ponto conhecido.

   Em $x_0 = 0$ temos $y_0 = 10^4$ e um $x = 2005 - 2000 = 5$ em $y = 5000$. Logo, $m = \frac{10000-5000}{0-5}$
   Assim, para x qualquer:

$$y - 10000 = \frac{10000 - 5000}{0 - 5}(x - 0) \Longrightarrow y = -1000x + 10000$$

   A função $y = -1000x + 10000$ é linear e decrescente. Assim, o preço y da máquina decresce após x anos.

   Em 2007 temos x=7 anos, logo encontramos $y = f(7) = -1000(7) + 10000 = 3000$ reais.

9. Uma companhia tem R\$20000,00 como custo fixo para produzir uma certa mercadoria e mais R\$5,00 por unidade produzida. Se cada unidade é vendida por R\$9,00, encontre o ponto em que a renda é igual ao custo.

   A função custo é dada por $C(x) = 20000 + 5x$, a renda por $R(x) = 9x$ e seja x o número de items produzidos. Então,

$$C(x) = 20000 + 5x = 9x = R(x)$$

   O que nos dá $x = 5000$ unidades.

10. É usual para economistas desenvolverem suas equações de demandas com relações lineares. A equação de demanda pode ser da forma $y = ax + b, \quad a < 0$ (quando o preço y cresce, a demanda pela mercadoria x irá cair). Uma equação também linear $y = cx + d, \quad c > 0$, representa o efeito contrário (a alta do preço y irá aumentar a oferta da mercadoria x). Neste contexto, um produtor de capas de chuva estabeleceu para seu produto a equação de demanda $y = -\frac{5}{3}x + \frac{230}{3}$, e a equação de produção de $y = \frac{2}{3}x + \frac{55}{3}$ na qual x é o número de capas de chuva em centenas e y é o preço por capa.
    (a)O que representa a intersecção entre as duas curvas?
    (b)Encontre a quantidade e o preço de equilíbrio.

    (a) A intersecção dessas duas curvas, onde demanda é igual a oferta, representa a quantidade e preço de equilíbrio.

    (b) Interceptando as duas retas temos:

$$-\frac{5}{3}x + \frac{230}{3} = \frac{2}{3}x + \frac{55}{3} \Longrightarrow x = 25$$

    Consequentemente, $y = \frac{2}{3}25 + \frac{55}{3} = 35$.
    As coordenadas do ponto de equilíbrio são x=25 e y=35. Assim, quando 2500 capas de chuva são oferecidas por um preço de 35 reais cada, a oferta e demanda pelo produto são iguais.

11. Em um laboratório de biologia um técnico é responsável pelo fornecimento de uma determinada bactéria utilizada em experimentos. Se a equação da demanda é $y = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3}$ e a equação da oferta é $y = \frac{10x-11}{8}$, com x em milhares de bactérias e y em centenas de reais. Determine a quantidade de bactérias, o preço de equilíbrio e represente seus gráficos.

No ponto de equilíbrio:

$$-\frac{2}{3}x + \frac{16}{3} = \frac{10x-11}{8}$$

Resolvendo para x encontramos $x = 3,5$. Substituindo em qualquer uma das equações obtemos $y = 3$. O ponto de equilíbrio pode ser observado na figura (6)

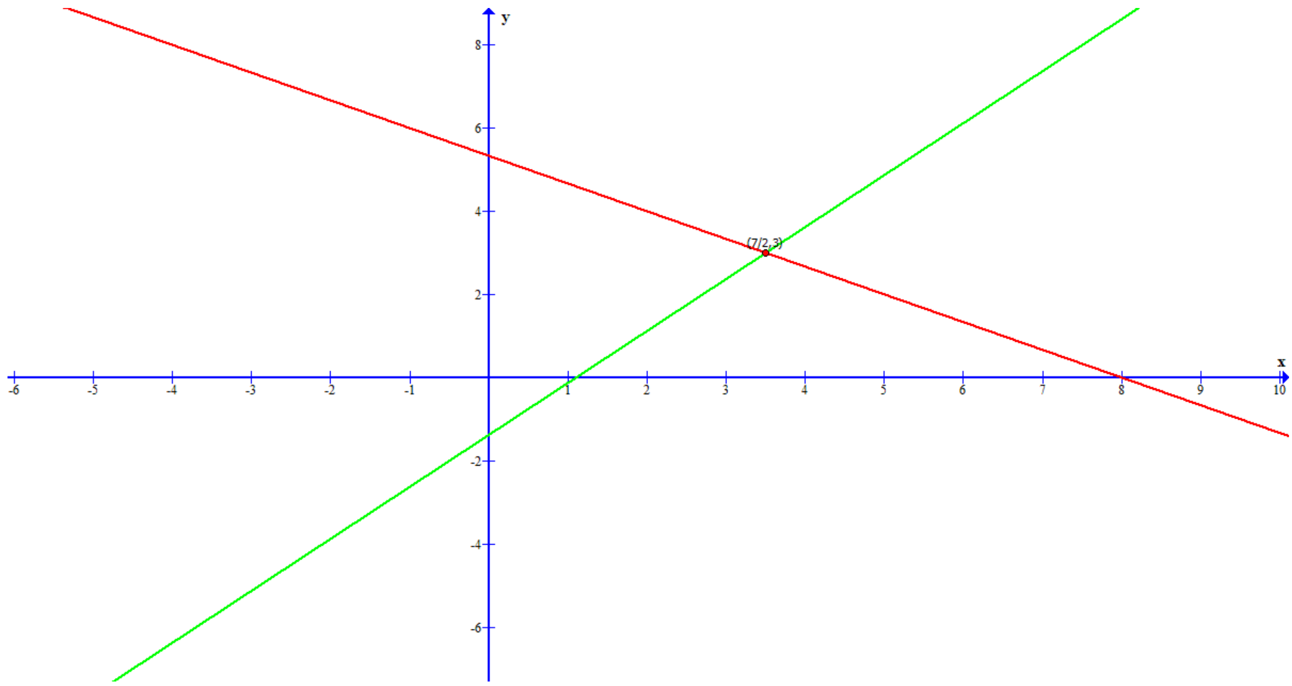

Figura 6: Ponto de equilíbrio $(\frac{7}{2}, 3)$

12. Uma companhia tem um custo fixo de R\$26000,00. O custo de produzir um item é de R\$30,00. Se cada item é vendido por R\$43,00, encontre o ponto em que a receita se iguala ao custo.

O custo pode ser representado por $C(x) = 30x + 26000$ e a renda por $R(x) = 43x$, sendo x o número de itens produzidos. Igualando ambas:

$$C(x) = 30x + 26000 = 43x = R(x)$$
$$26000 = 13x$$
$$x = 2000 \quad unidades$$

13. Para produzir x pares de skis, uma companhia tem um custo de $C(x) = 80 + 0,2x^2$. A renda é dada por $R(x) = 150x - 0,1x^2$. Encontre a função lucro e verifique qual o lucro máximo que se pode obter.

O lucro é representado por $L(x) = R(x) - C(x)$. Assim,

$$L(x) = (150x - 0,1x^2) - (80 + 0,2x^2)$$
$$L(x) = -80 + 150x - 0,12x^2$$

Ponto de máximo em $L(x) = \frac{-b}{2a} = \frac{-150}{-0,24} = 625$ unidades

14. O tempo, em minutos, em que uma pessoa é testada e completa uma tarefa pode ser encontrado por $T(x) = \frac{440}{\sqrt{x}}$, onde x é o QI da pessoa.
(a) Quanto tempo é necessário para uma pessoa com QI de 100 completar a tarefa?
(b) Qual é o QI de uma pessoa que completa a tarefa em 40 minutos?

Seja $T(x) = \frac{440}{\sqrt{x}}$, e x o QI da pessoa. Assim,

(a) $T(100) = \frac{440}{\sqrt{100}} = 44 \quad minutos$

(b) Sendo T=40 minutos:

$$40 = \frac{440}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x} = 11, \quad x > 0$$

$$x = 121$$

O QI da pessoa é de 121.

15. O volume V, em cm^3, de um vaso sanguíneo cilíndrico de 8 cm de comprimento é função do raio r, em cm. A relação é dada por $V = 8\pi r^2$.
(a) Faça o gráfico.
(b) O que acontece com o volume se o raio é reduzido pela metade devido acúmulo de gordura nos vasos?

(a) Figura (7).

(b) Seja r_0 o raio inicial do vaso e $r_f = \frac{r_0}{2}$ o raio final. Então,
$Volume\ inicial \quad V_0(r_0) = 8\pi {r_0}^2$
$Volume\ final \quad V_f(r_f = \frac{r_0}{2}) = 8\pi(\frac{r_0}{2})^2 = \frac{8\pi r_0^2}{4} = \frac{V_0}{4}$
Assim, o volume do vazo sanguíneo é reduzido em quatro vezes.

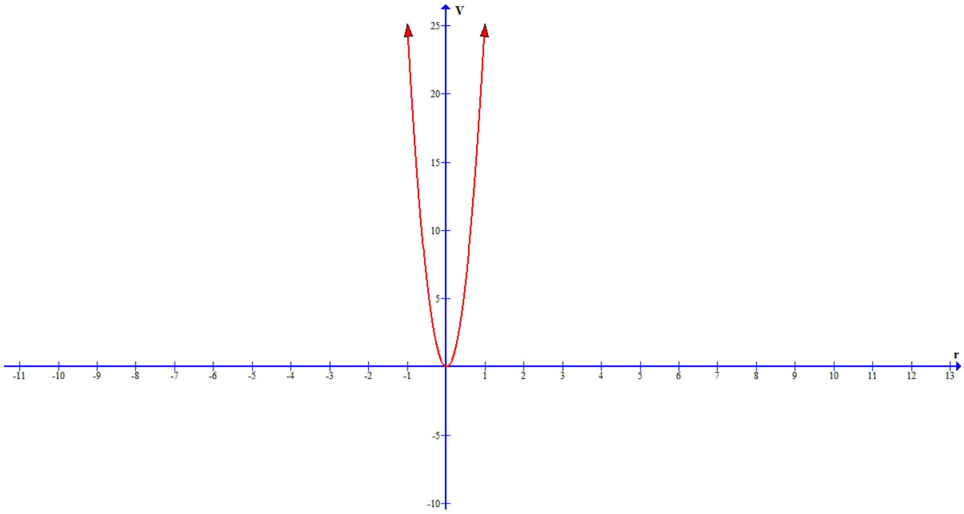

Figura 7: $V = 8\pi r^2$

16. A concentração de bactérias num sistema de água público tem aumentado, o que ocasionou um tratamento com agentes anti-bacterianos. Bioquímicos responsáveis pelo tratamento da água estimam que $N(t)$, o número de bactérias por cm^3, pode ser descrito pela equação $N(t) = 40t^2 - 320t + 1000$, onde t é o número de dias de tratamento.
(a) A água é considerada imprópria para beber quando a concentração excede 720 bactérias por cm^3. Quanto tempo após o início do tratamento a água poderá ser bebida novamente?

$$t \geq 0 \textit{ e t: número de dias de tratamento}$$

$$N(t) \leq 720$$
$$40t^2 - 320t + 1000 \leq 720$$
$$f(t) = 40t^2 - 320t + 280 \leq 0$$

$$40t^2 - 320t + 280 = 0 \Rightarrow t_1 = 1 \textit{ e } t_2 = 7$$

Como temos uma parábola com concavidade para cima a água poderá ser consumida após um período de tratamento entre 1 e 7 dias.

17. De acordo com um modelo desenvolvido por um grupo de saúde pública, o número de pessoas $N(t)$, em milhares, que estarão doentes devido uma gripe no tempo t, em meses, no próximo inverno é descrito por $N(t) = 100 + 30t - 10t^2$, onde $t = 0$ corresponde ao início de junho.
(a) Quando a gripe atingirá seu pico? Quantas pessoas estarão afetadas?
(b) Faça o gráfico.
(c) Quando o surto de gripe terminará?

$N(t) = 100 + 30t - 10t^2 = 0 \Rightarrow t_1 = -2$ *e* $t_2 = 5$. *Como temos uma parábola com concavidade para baixo a função apresenta um máximo.*

Ponto de máximo $t = \frac{t_1+t_2}{2} = \frac{-2+5}{2} = 1,5$
Assim, $N(1,5) = 122,5$

(a) O pico ocorrerá em t=1,5, o que corresponde a 45 dias após o início do surto. 122500 pessoas estarão infectadas.
(b) Figura (8)

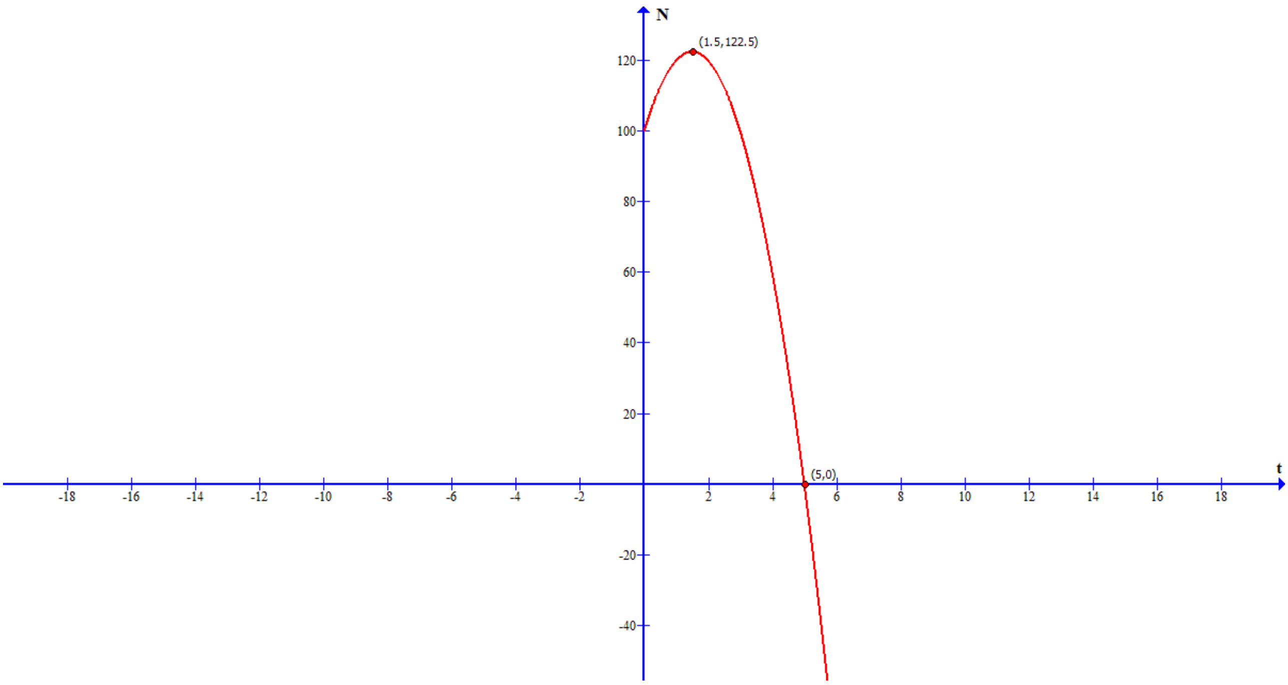

Figura 8: N(t) para $t \geq 0$

(c) Como confirmado pelo gráfico a gripe terminará em $t = 5$ *e portanto no final de Outubro, como confirmado pelo gráfico.*

18. Mortes por trauma após um sério acidente são conhecidas como sendo de dois tipos. Tipo A é devido a um sério dano num órgão principal, como cérebro, coração . Tipo B é devido perda de sangue ou através de hemorragia ou através de perda de sangue do corpo. Considere as seguintes funções respectivamente, associadas ao Tipo A e ao Tipo B.

$$f(t) = \frac{25}{t}, \quad g(t) = \frac{50}{1+(t-2)^2}$$

(a) Em que tempo t as funções se interceptam?
(b) Fazer os gráficos.

(a)

$$\begin{array}{rcll} f(t) & = & g(t) & \\ \frac{25}{t} & = & \frac{50}{1+(t-2)^2} & com\ (t \neq 0) \\ 1+(t-2)^2 & = & 2t & \\ t^2-6t+5 & = & 0 & \Rightarrow t_1 = 1\ e\ t_2 = 5 \end{array}$$

As funções se interceptam nos tempos t=1 e t=5.
(b)

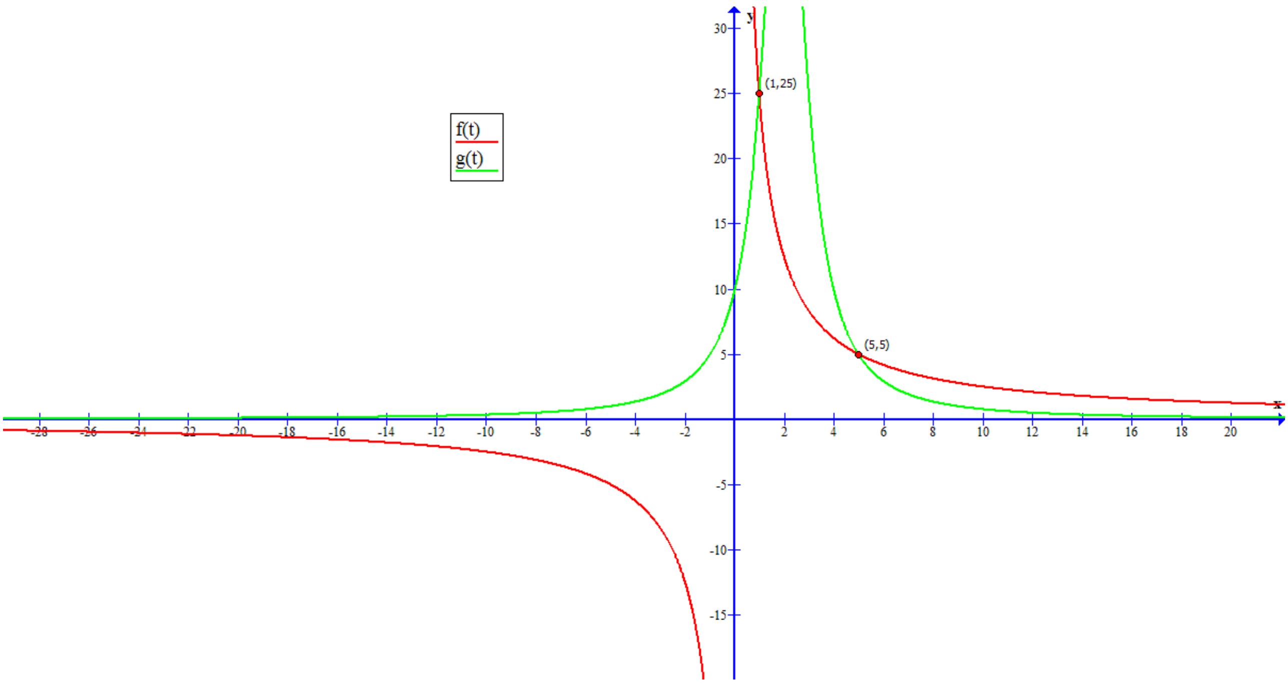

Figura 9: Interseções de f(t) e g(t)

19. Níveis de dióxido de carbono no pólo sul têm aumentado de 315 partes por milhão em 1958 para 322 partes por milhão em 1966 e 329 partes por milhão em 1974.
(a) Considerando-se t = 0 o ano correspondente a 1958, achar a função linear que relaciona o nível de dióxido de carbono como função do tempo.
(b) Qual o nível previsto para 2014?

(a) Função Linear $f(t) = at + b$, *a e b constantes*

$$\begin{array}{ll} f(0) = a0 + b = 315 & \Rightarrow b = 315 \\ f(8) = a8 + 315 = 322 & \Rightarrow a = \frac{7}{8} \\ f(t) = \frac{7}{8}t + 315 & \end{array}$$

(b) $2014 \Rightarrow t = 56$ *anos*
$f(56) = 364$ *partes por milhão*

20. Se a pressão for mantida constante, uma amostra de gás tem volume igual a V_0 a 0ºC. A relação entre o volume V do gás em litros e a temperatura T em graus centígrados é dada pela equação $V = V_0 + \frac{V_0}{273}T$

(a) Qual é a inclinação desta reta?
(b) Obter a expressão da temperatura em graus centígrados em função do volume nas condições acima?

(a) Função linear $f(x) = ax + b$
a: coeficiente angular = inclinação da reta $\Rightarrow a = \frac{V_0}{273}$

(b) $$\begin{array}{lll} 273V & = & 273V_0 + V_0T \\ T & = & \frac{273V - 273V_0}{V_0} & = \frac{273}{V_0}V - 273 \end{array}$$

21. Define-se o trabalho T realizado por um músculo por $T = Px$, sendo P o peso ou carga aplicada e x o comprimento da contração . Hill determinou que a energia E envolvida na contração muscular é expressa por $E = T + ax = (P + a)x$, onde ax representa o calor decorrente da contraçãoÀ razão ϵ entre o trabalho e a energia utilizada é definida como eficiência do músculo.
(a) De acordo com o modelo, mostre que a eficiência ϵ independe do encurtamento x.
(b) Mostre que $\frac{1}{\epsilon}$ depende linearmente de a, sendo ainda inversamente proporcional ao peso ou carga aplicada.
(c) Ache a relação entre a e P para que ocorra uma eficiência de 40%.

(a) $\epsilon = \frac{T}{E} = \frac{Px}{(P+a)x} = \frac{P}{P+a}$

(b) $\frac{1}{\epsilon} = \frac{P+a}{P} = 1 + \frac{1}{P}a$

Logo $\frac{1}{\epsilon}$ *depende linearmente de a e o coeficiente angular é inversamente proporcional ao peso P.*

(c) Se $\epsilon = 0.4 = \frac{P}{P+a}$

$$\begin{array}{l} 0.4P + 0.4a = P \\ 0.6P = 0.4a \Rightarrow P = \frac{2a}{3} \end{array}$$

22. Biologistas descobriram que a velocidade do sangue arterial é uma função da distância do sangue ao eixo central da artéria. De acordo com a lei de Poiseuille, a velocidade (em centímetros por segundo) do sangue que está a r centímetros do eixo central da artéria é dada por $S(r) = C(R^2 - r^2)$, onde $C = 1,76 \times 10^5$ cm e R $= 1,3 \times 10^{-2}$ cm é o raio da artéria.
(a) Calcule a velocidade do sangue no eixo central da artéria.
(b) Calcule a velocidade do sangue na metade da distância entre a parede da artéria e o eixo central.
(c) Em que caso a velocidade do sangue será a menor possível?

(a) No eixo central r=0:

$$S(0) = C(R^2 - 0) = 1.76 * 10^5 (1.3 * 10^{-2})^2 = 29.744 \ cm/s$$

(b) $S(\frac{R}{2}) = C(R^2 - \frac{R^2}{4}) = \frac{3}{4} CR^2 = \frac{3}{4} S(0) = 22.308 \ cm/s$

(c) $S(r) = 0 \Rightarrow r = R$

23. Suponha que, durante um programa nacional de imunização da população contra uma forma virulenta de gripe, representantes do Ministério da Saúde constataram que o custo de vacinação de x por cento da população era de, aproximadamente, $f(x) = \frac{150x}{200-x}$ milhões de reais. Construa o gráfico da função especificando sua parte relevante, tendo em vista a situação prática do problema em questão .

Tem-se x dado em porcentagem, logo $0 \leq x \leq 100\%$. Então esboçaremos o gráfico de $f(x) = \frac{150x}{200-x}$ neste intervalo.
Reescrevemos $f(x) = 150(\frac{x}{200-x}) = 150(\frac{200}{200-x} - 1)$. Observamos então que para $x\epsilon[0, 100]$, $200 - x > 0$ e $\frac{200}{200-x}$ cresce se x cresce. Além disso $f(0) = 0$ e $f(100) = 150$. Logo um esboço plausível é:

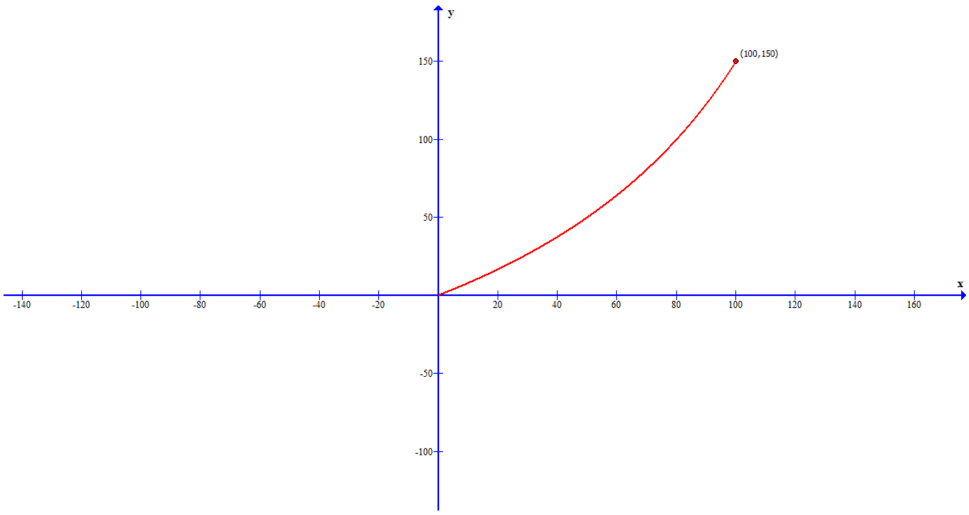

Figura 10: $f(x) = \frac{150x}{200-x}$, $0 \leq x \leq 100$

24. Biólogos afirmam, que sob condições ideais, o número de bactérias numa cultura cresce exponencialmente. Suponha que existam inicialmente 2000 bactérias em certa cultura e que existirão 6000 após 20 minutos. Quantas bactérias existirão após 1 hora?

    $N(t) = ka^t$, *sendo N(t) o número de bactérias no tempo t medido em horas.*

    $t = 0 \Rightarrow 2000 = ka^0 \Rightarrow k = 2000$

    20 minutos equivale a $\frac{1}{3}$ *de hora. Logo para*

    $t = \frac{1}{3} \Rightarrow 6000 = 2000a^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a = 27$

    Portanto $N(t) = 2000(27)^t$ *(t : horas)*
    $N(1) = 5400$ *bactérias*

25. Meia-vida de uma substância radioativa é o tempo gasto para 50% de amostra da substância se deteriorar. Considere que a quantidade remanescente de uma certa substância radioativa, após t anos, é dada por $Q(t) = Q_0e^{-0.003t}$. Calcule a meia-vida da substância.

    Sendo $Q(t) = Q_0e^{-0.003t}$ *encontraremos o tempo de meia vida substituindo* $Q(t)$ *por* $\frac{Q_0}{2}$ *e encontrando o tempo correspondente.*

    $$Q(t) = Q_0e^{-0.003t}$$
    $$\frac{Q_0}{2} = Q_0e^{-0.003t}$$
    $$0.5 = e^{-0.003t}$$
    $$t = -\frac{ln0.5}{0.003} = 231.05 \; anos$$

26. O rádio se deteriora exponencialmente. Sua meia-vida é de 1690 anos. Quanto tempo levará para uma amostra de 50 g de rádio se reduzir a 5g?

    Encontrando a constante c:

    $$Q(t) = Q_0e^{ct}$$
    $$\frac{Q_0}{2} = Q_0e^{c1690}$$
    $$0.5 = e^{c1690}$$
    $$c = \frac{ln0.5}{1690} = -4.1 * 10^{-4}$$

    Encontrada a função Q(t), basta encontrar t para Q(t)= 5 g:

    $$Q(t) = Q_0e^{\frac{ln0.5}{1690}t}$$

    $$5 = 50e^{\frac{ln0.5}{1690}t}$$
    $$0.1 = e^{\frac{ln0.5}{1690}t}$$
    $$t = \frac{1690ln0.1}{ln0.5} = 5614.06 \; anos$$

27. A relação entre o peso P em quilogramas e a altura h em metros de um adulto sentado é dada por $ln(P) = 1.9532 + 3.135ln(h)$ Encontrar P em função de h?

$$ln(P) = 1.9532 + 3.135ln(h)$$
$$P = e^{1.9532+3.135ln(h)}$$

28. Estima-se que, daqui t anos, a população de um certo país será de $P(t) = \frac{80}{8+12e-0.06t}$ milhares de habitantes.
(a) Qual é a população atual?
(b) Qual será a população daqui a 50 anos?

(a) Considerando-se $t = 0$ *o tempo atual.* $P(0) = \frac{80}{8+12} = \frac{80}{20} = 4$ *Ou seja, 4000 habitantes.*

(b) $P(50) = \frac{80}{8+12e^{-0.06*50}} = 9.3$ *Ou seja, 9300 habitantes.*

29. O corpo concentra iodo na tiróide. Esta observação leva ao tratamento de cancer de tiróide pela injeção de iodo radioativo na corrente sanguínea. Um isótopo usado tem meia-vida de aproximadamente 8 dias e decai exponencialmente no tempo.
(a) Se 50 mg deste isótopo sao injetados, que quantidade permanecerá após 3 semanas?
(b) Suponhamos que a quantidade desejada de iodo na corrente sanguínea seja mantida sempre maior ou igual a 20 mg. Quando nova injeção deverá ser aplicada, considerando que isto só poderá ocorrer após a quantidade original ter caído para 20 mg?

Sabemos o tempo de meia-vida $t_{\frac{1}{2}} = 8$ *dias e o modelo exponencial para o decaimento radioativo* $Q(t) = Q_0e^{kt}$*. Assim, encontraremos a constante k:*

$$Q(t) = Q_0e^{kt}$$
$$\frac{Q_0}{2} = Q_0e^{k8}$$
$$0.5 = e^{8k}$$
$$k = \frac{ln0.5}{8}$$

(a) $Q(21) = 50e^{\frac{ln0.5}{8}21} = 8.1$ *mg*

(b) Tempo para que uma quantidade Q_0 *atinja 20 mg.*

$$Q_0e^{\frac{ln0.5}{8}t} = 20 \Rightarrow t = \frac{8}{ln0.5}ln(\frac{20}{Q_0})$$

O tempo t para uma nova aplicação dependerá da quantidade inicial Q_0*. Se considerarmos* $Q_0 = 50$ *mg, tem-se t=10.57, ou seja, praticamente 10 dias para uma nova aplicação.*

30. Toda matéria viva tem dois tipos de carbono em suas moléculas 14C e 12C. Enquanto o organismo está vivo a razão entre 14C e 12C é constante. Quando o organismo morre nao há mais reposição de 14C e então ocorre decaimento exponencial de 14C com meia-vida de 5760 anos. Examinando a razão 14C/12C é possível determinar a porcentagem da quantidade original de 14C remanescente e então datar um fóssil.
(a) Que porcentagem da quantidade original de 14C existirá após 2000 anos?
(b) Se um fóssil contêm 10% da quantidade original de 14C, qual sua idade?

Conhecemos o modelo $A(t) = A_0 e^{kt}$. Para um tempo de meia-vida de 5760 anos acharemos a constante k:

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$
$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{k5760}$$
$$0.5 = e^{8k}$$
$$k = \frac{ln0.5}{5760}$$

(a)$\frac{A(2000)}{A_0} = e^{\frac{ln0.5}{5760}2000} = 0.7861$ *Ou seja, 78.61% após 2000 anos.*

(b)$\frac{A(t)}{A_0} = 0.1 = e^{\frac{ln0.5}{5760}t}$

$t = \frac{5760ln0.1}{ln0.5} = 19134.3$ *anos.*

31. A meia-vida de um elemento radioativo é o tempo necessário para que sua massa radioativa diminua pela metade. A massa do elemento radioativo no instante t é representada por

$$m(t) = m_0 \epsilon^{-kt}$$

na qual m_0 é a massa inicial do elemento e k sua constante de decaimento.

(a) Mostre que a meia-vida de um elemento radioativo é

$$\frac{ln2}{k}$$

.

(b) Se a meia-vida do carbono-14, ou C_{14} é de 5600 anos calcule a sua constante de decaimento k.
(c) O carbono-14 é usado para estimarmos a idade de achados arqueológicos, fósseis, etc. Se o carvão de uma árvore morta durante a erupção do vulcão que formou o Lago Crater, em Oregon, continha $44,5\%$ do carbono-14 que é encontrado numa árvore viva, qual a idade aproximada do Lago Crater?

(a) Seja m_0 a massa inicial do elemento radioativo e t_m seu tempo de meia vida. Assim,

$$m(t_m) = \frac{m_0}{2} = \frac{m_0 \epsilon^{-k0}}{2}$$
$$-kt_m = ln(\tfrac{1}{2})$$
$$t_m = \frac{ln2}{k}$$

(b) A massa de carbono-14 em seu tempo de meia vida será $m(5600) = \frac{m_0}{2}$. Assim,

$$m_0^{-k5600} = \frac{m_0}{2}$$
$$-k5600 = -ln2$$
$$k = 1,238 * 10^{-4}$$

(c) $m(t) = 0,445 m_0 = m_0 \epsilon^{-kt}$
$-kt = ln0,445 \Longrightarrow t = 6541,49$ *anos*

32. Há vários dados que mostram que se x e y são medidas de dois particulares órgãos de um animal, então x e y são relacionados pela equação de alometria $lny - klnx = lnc$, onde $k > 0$ e $c > 0$ dependem dos órgãos.
(a) Resolver esta equação para y em função de x, k, c.

$$lny = lnc + klnx$$
$$lny = lnc + lnx^k = ln(cx^k)$$
$$y = cx^k$$

33. Suponha que um ecologista tenha estimado que após uma indústria se instalar em certo local serão depositados $A(t) = 400te^{2-t^2}$ gramas de material tóxico, para cada ano t de sua instalação.
(a) Calcular a quantidade total depositada nos quatro primeiros anos.

(a) Basta calcular $A(4)$, assim

$$A(4) = 400(4)e^{2-4} = 1600e^{-2} = 216.54\ g$$

34. No estudo de epidemias a equação $ln(1-y) - lny = c - rt$ aparece frequentemente, onde y é a fração da população que tem uma certa doença no tempo t, sendo c e r constantes positivas. (a) Resolver esta equação para y em termos de t, c, r.

Isolando y,

$$\begin{array}{ccc} ln(1-y) - lny & = & c - rt \\ ln(\frac{1-y}{y}) & = & c - rt \\ \frac{1-y}{y} & = & e^{c-rt} \\ 1 & = & y(1+e^{c-rt}) \\ y & = & \frac{1}{1+e^{c-rt}} \end{array}$$

35. Coelhos e raposas ocupam o mesmo nicho ecológico. Raposas predam coelhos e coelhos se alimentam de vegetaçao. Como resultado a população de raposas é dada pela função $F(t) = 200 - 40sen2t$, e a de coelhos como $R(t) = 500 + 100cos2t$, onde t é dado em anos.
(a) Fazer os gráficos de F(t) e de R(t).
(b) As curvas se interceptam em algum ponto? E o que isso significa nesse problema?

(a) Figura (11).
(b) Analisando os gráficos observa-se que os gráficos não se interceptam em nenhum ponto. Se as duas funções se interceptassem deveríamos ter raízes reais para a equação $F(t) = R(t)$, o que não ocorre. Logo nunca a população de coelhos será igual a de raposas, segundo este modelo matemático.

$$F(t) = R(t) \Rightarrow 221(tg(2t))^2 - 20tg(2t) + 200 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \textit{não há raízes reais}$$

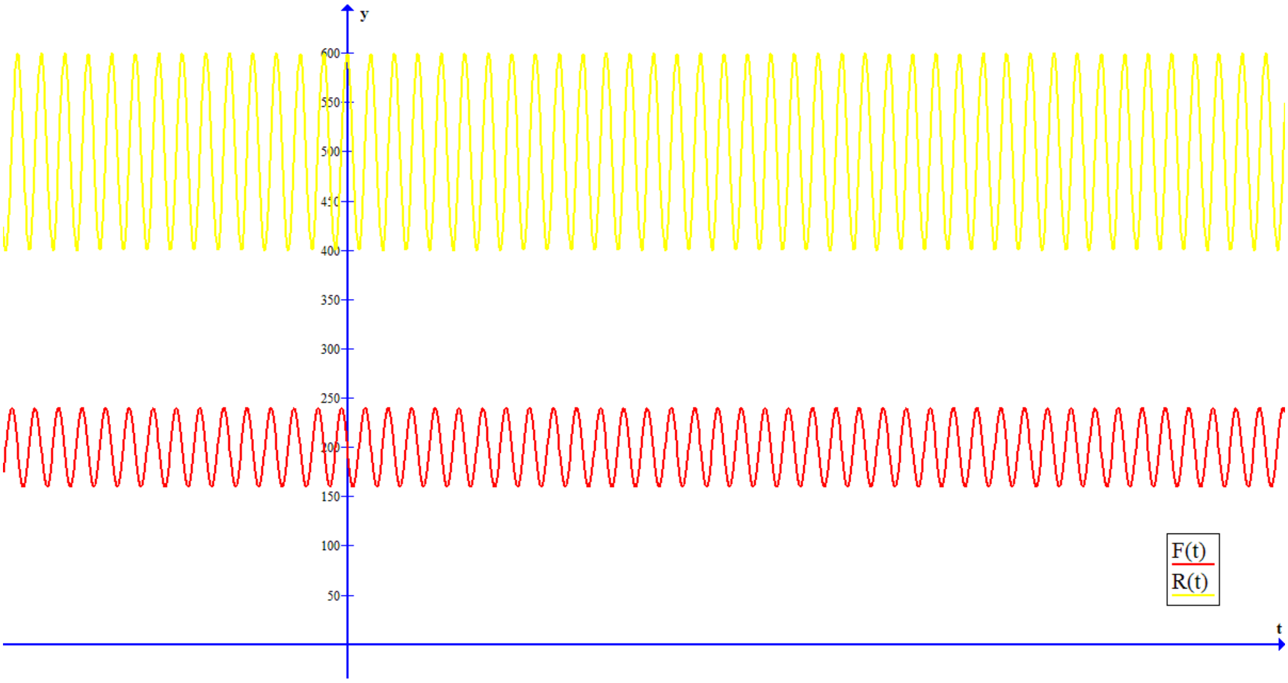

Figura 11: F(t) e R(t)

36. A temperatura média numa cidade dos EUA é modelada por $f(t) = 55 + 35sen(2\pi(\frac{t-90}{365}))$, t dado em dias e f(t) em graus Fahrenheit.
(a) Considerando-se $t = 0$ o primeiro dia do inverno, depois de quantos dias ocorre a temperatura máxima?
(b) Quando ocorre o dia mais frio?

Analisando a função trigonométrica $f(t) = 55+35sen(2\pi(\frac{t-90}{365}))$, observa-se que o máximo ocorre quando $sen(2\pi(\frac{t-90}{365})) = 1$ e o mínimo quando $sen(2\pi(\frac{t-90}{365})) = -1$, pois a função trigonométrica é limitada. Assim,

$$sen(2\pi(\frac{t-90}{365})) = k, \ \ k = 1 \ e \ -1$$

$$2\pi(\frac{t-90}{365}) = arcsenk$$
$$t = \frac{365}{2\pi}arcsenk + 90$$

$k = 1 \Rightarrow t = 181.25$
$k = -1 \Rightarrow t = 363.75$

(a) Aproximadamente depois de 181 dias.
(b) O dia mais frio ocorre aproximadamente depois de 364 dias.

37. Um modelo presa-predador consiste de duas espécies, x e y, onde x preda y. Uma solução típica para tal modelo é da forma $x(t) = 10 + 2sen(t + \frac{\pi}{2})$, $y(t) = 20 + 5cos(t + \frac{\pi}{2})$.
(a) Encontrar máximo e/ou mínimo para x(t) e y(t).

As funções x(t) e y(t) são funções trigonométricas e atingem seus máximos quando $sen(t + \frac{\pi}{2}) = 1$ e $cos(t + \frac{\pi}{2}) = 1$. Da mesma forma, os mínimos são atingidos quando $sen(t + \frac{\pi}{2}) = -1$ e $cos(t + \frac{\pi}{2}) = -1$. Assim,

$$\begin{array}{ll} x_{máx} = 12 & y_{máx} = 25 \\ x_{min} = 8 & y_{min} = 15 \end{array}$$

38. Uma ilha é habitada por uma população de lebres, sendo esta população representada por $P(t) = 300 + 120sen(\pi(\frac{2+t}{5}))$, t medido em anos.
(a) O tamanho populacional oscila? Por quê?
(b) Qual o tempo entre os dois máximos?
(c) Para $0 < t < 10$ quando ocorre o mínimo da população

(a) Sim, pois a função P(t) é uma função trigonométrica que é periódica e oscila.

(b) Os máximos ocorrem quando $sen(\pi(\frac{2+t}{5})) = 1$, assim:

$sen(\pi(\frac{2+t}{5})) = 1 \Rightarrow \pi(\frac{2+t}{5}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t = \frac{1}{2} + 10k,\ k\ inteiro$

Como t representa o número de anos $t \geq 0$ e k= 0, 1, 2,...

$k = 0 \Rightarrow t = 0.5$
$k = 1 \Rightarrow t = 10.5$
Assim, $\Delta t = 10$ anos

(c) Os mínimos ocorrem quando $sen(\pi(\frac{2+t}{5})) = -1$, assim:

$sen(\pi(\frac{2+t}{5})) = -1 \Rightarrow t = \frac{11}{2} + 10k,\ k\ inteiro$

$k = 0 \Rightarrow t = 5.5$
$k = 1 \Rightarrow t = 15.5$

O mínimo ocorre para $t = 5.5$ anos, ou seja, 5 anos e 6 meses.

Desigualdades

39. Sr. Samuel recebe uma comissão mensal de 20% sobre todas as vendas acima de R$1000,00. Se ele deseja que sua comissão mensal seja maior que R$500,00, quanto ele deve vender em um mês?

Seja x as vendas em reais durante o mês.

$$\begin{gathered} 0,20(x - 1000) > 500 \\ 0,20x - 200 > 500 \\ 0,20x > 700 \\ x > 3500 \end{gathered}$$

Assim, as vendas devem ser superiores a R$3500,00.

40. Após estudos chegou-se a conclusão que para se ter um mínimo de conforto em ambientes fechados cada pessoa necessita de $120m^3$ de ar. Assim um certo centro de convenção quer restringir o número de pessoas numa sala de conferência para atingir esta meta. Se a sala tem 45 m de comprimento 30 m de largura e 10 m de altura, qual o número máximo de pessoas admitidas na sala?

Se x denota o número de pessoas na sala e o volume total é dado por $V = (45)(30)(10) = 13500m^3$. Temos:

$$\tfrac{13500}{x} \geq 120$$

$$\tfrac{13500}{120} \geq x$$

$$x \leq 112,5$$

Assim, o número máximo é de 112 pessoas na sala de conferência.

41. A pressão sanguínea de uma pessoa é dada por $P(t) = 105 + 12sen(5t)$, onde t é dado em segundos.
(a) Achar a pressão máxima.
(b) Achar a pressão mínima.

Desenvolveremos a função $P(t) = 105 + 12sen(5t)$, partindo de $-1 \leq sen(5t) \leq 1$. Assim,

$$\begin{gathered}
-1 \leq sen(5t) \leq 1 \\
-12 \leq 12sen(5t) \leq 12 \\
105 - 12 \leq 105 + 12sen(5t) \leq 105 + 12 \\
93 \leq 105 + 12sen(5t) \leq 117 \\
93 \leq P(t) \leq 117
\end{gathered}$$

Assim, obtemos os extremos de P(t) com máximo igual 117 e mínimo igual a 93.

3.2 Limites

1. Ecólogos estudando uma determinada região determinaram que o tamanho de uma determinada planta, $B(x)$, é função do nível de precipitação x, dado por

$$B(x) = \frac{40x}{\sqrt{1+x^2}} + 20$$

.

(a) Calcular $B'(x)$.
(b) Calcular $\lim_{x\to\infty} B'(x)$. Interpretar este resultado.

(a) $B'(x) = \frac{40\sqrt{1+x^2} - 40x^2(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2} = \frac{40}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(b) $\lim_{x\to\infty} B'(x) = 0$
Quando o nível de precipitação x tende a $+\infty$ a taxa de crescimento da planta tende a zero.

2. A população de uma cidade está crescendo de acordo com a função

$$P(t) = \frac{20000}{20 + 40e^{-0,2t}}.$$

(a) Achar a assíntota horizontal.
(b) Interprete o resultado da assíntota horizontal à direita.

Acharemos as assíntotas horizontais calculando os valores limites quando $t \longrightarrow +\infty$ e $t \longrightarrow -\infty$. Assim,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{20000}{20 + 40e^{-0,2t}} = 1000 \ e \ \lim_{t \to -\infty} \frac{20000}{20 + 40e^{-0,2t}} = 0$$

As assíntotas horizontais são as retas y=1000 e y=0.

(b) O limite quando $t \longrightarrow \infty$,nos fala da população após longo período de tempo que irá estabilizar-se em torno do valor $P = 1000$.

3.3 A derivada como uma função

1. Um capacitor de um circuito elétrico é um aparelho para armazenar carga elétrica. Se a quantidade de carga num dado capacitor no instante t é $Q = 3t^2 + 5t + 2$ Coulombs, determine a corrente $I = \frac{ds}{dt}$ no circuito quando $t = 3$.
$Q = 3t^2 + 5t + 2$
$I = \frac{dQ}{dt} = 6t + 5$

$I(3) = 6(3) + 5 = 23A$

2. Duas partículas partem da origem do eixo s no instante $t = 0$ e movem-se ao longo desse eixo, de acordo com as fórmulas $s_1 = t^2 - 6t$ e $s_2 = 8t - t^2$, onde s_1 e s_2 são medidos em metros e t, em segundos.

(a) Quando é que as duas partículas têm a mesma velocidade?

(b) Quais são as velocidades das duas partículas nos instantes em que elas têm a mesma posição?

(a) Calculando a derivada pela razão incremental da função genérica $s_i = at^2 + bt$:

$\frac{ds_i}{dt} = s_i{}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s_i(t+\Delta t) - s_i(t)}{\Delta t}$

$\frac{ds_i}{dt} = s_i'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(t+\Delta t)^2 + b(t+\Delta t) - at^2 - bt}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2at + b + a\Delta t}{\Delta t} = 2at + b$

Assim, se $s_i{}'(t) = v_i(t)$ temos $v_1 = 2t - 6$ e $v_2 = 8 - 2t$
$v_1 = v_2$
$2t - 6 = 8 - 2t$
$4t = 14$
$t = \frac{14}{4} = 3,5s$

(b) Com $s_1 = s_2$ tem-se:

$t^2 - 6t = 8t - t^2$
$2t^2 - 14t = 0$
$t(2t - 14) = 0$
$t \in \{7, 0\}$

$v_1(7) = 8\ m/s \quad v_1(0) = -6\ m/s$

$v_2(7) = -6\ m/s \quad v_2(0) = 8\ m/s$

3. Suponha que um projétil disparado do solo para cima com uma velocidade inicial de v_0 m/s atinja uma altura se s metros em t segundos, onde

$$s = v_0 t - 4,9t^2$$

(a) Calcule a velocidade v num instante t qualquer.

(b) Qual tempo decorre para que o projétil atinja a altura máxima?

(c) Qual é a altura máxima s_m que o projétil atingirá?

(d) Qual é a velocidade do projétil no instante em que atinge o solo?

(e) Qual deve ser a velocidade inicial para que o projétil atinja o solo 15 segundos após o disparo?

(a) $v = \frac{ds}{dt} = v_0 - 9,8t$

(b) Altura máxima implica que $v = 0$. *Assim,* $v(0) = v_0 - 9,8t \Longrightarrow t = \frac{v_0}{9,8}$

(c) $s_m = s(\frac{v_0}{9,8}) = v_0 \frac{v_0}{9,8} - 4,9(\frac{v_0}{9,8})^2 = \frac{v_0^2}{9,8} - 0,05v_0^2$

(d) Tempo de retorno ao solo: $s = vt - 4,9t^2 = 0 \Longrightarrow t_0 = \frac{v_0}{4,9}$ *Logo,* $v(\frac{v_0}{4,9}) = -v_0$

(e) Como calculado em (d), temos: $t_0 = \frac{v_0}{4,9} = 15 \Longrightarrow v_0 = 73,5\ m/s$

4. Uma lâmpada está no topo de um poste de 24 m de altura. Uma bola é largada da mesma altura de um ponto situado a 6 m de distância da lâmpada. Encontre a velocidade com que a sombra da bola se move no chão (a) 1 segundo depois de largada a bola e (b) 2 segundos depois. (c) Qual a interpretação da velocidade quando t tende a infinito.(Pressuponha que a bola cai $s = 4,9t^2$ metros em t segundos.)

Considere a figura (12), onde $x(t)$ é a sombra da bola no instante t, na qual por semelhança de triângulos obtemos a relação,

$$\frac{24}{24 - 4,9t^2} = \frac{x}{x - 6}$$

De onde encontramos $x = \frac{29,39}{t^2}$. *Derivando esta equação em relação ao tempo t, encontramos*

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{-58,77}{t^3}$$

Assim,

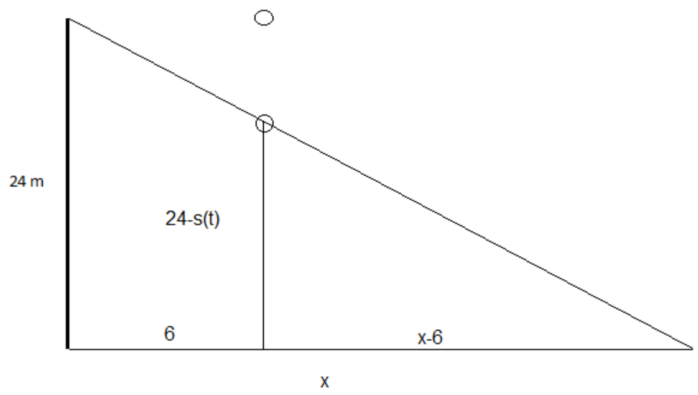

Figura 12: Triângulos semelhantes

$$\frac{dx}{dt}(1) = -58,77m/s \quad e \quad \frac{dx}{dt}(2) = -7,35m/s$$

(c) Quando $t \longrightarrow 0$, temos a velocidade tendendo para infinito. Observa-se que a velocidade da sombra decresce conforme o tempo transcorre.

5. Durante os primeiros 50 dias seguintes ao início de um surto de gripe num colégio o número N(t) de estudantes infectados após t dias é dado pela função $N(t) = 25t - \frac{t^2}{2}$, $0 \leq t \leq 50$.
(a) Fazer o gráfico.
(b) Achar a inclinação da reta tangente em t = 1.
(c) Quando o número de infectados será máximo e qual o número de infectados nesse instante?

(a)

(b)A inclinação da reta pode ser encontrada pelo valor da derivada de N(t) no ponto t=1. Assim,

$$\frac{dN}{dt} = 25 - t \Rightarrow \frac{dN(1)}{dt} = 24$$

(c) De acordo com o gráfico, observa-se que o ponto de máximo ocorre em $t = 24$ dias e é de 312 estudantes infectados.

6. A lei de Beer-Lambert relaciona a absorção de luz passando por um material, com a concentração e a espessura do mesmo. Se I_0 e I denotam, respectivamente, a intensidade de luz de um particular comprimento de onda antes e depois de passar pelo material, e se x denota o comprimento do caminho a ser seguido pelo feixe de luz através do material, admitamos que
$$log_{10}(\frac{I}{I_0}) = kx,$$
onde k é constante dependente do material
(a) Encontrar I(x) e então derivar esta função .

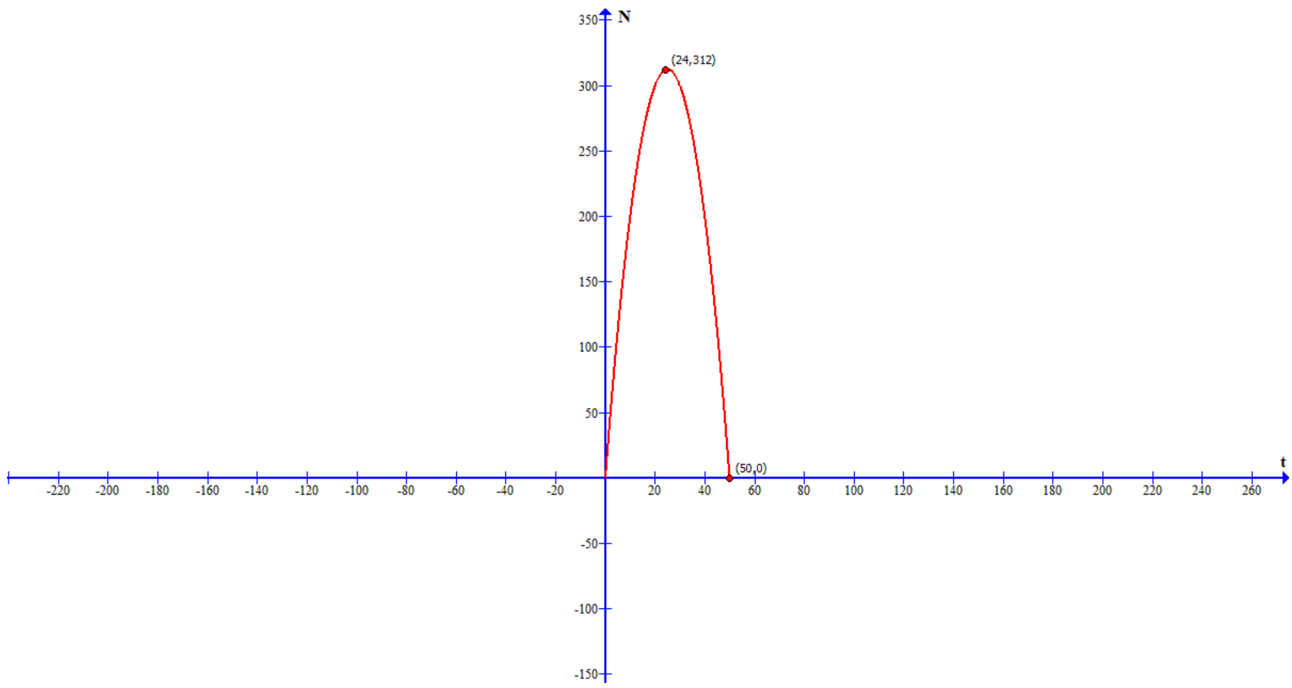

Figura 13: $N(t) = 25t - \frac{t^2}{2}$, $0 \leq t \leq 50$

(a) Encontrando I(x):

$$log_{10}(\frac{I}{I_0}) = kx$$
$$\frac{I}{I_0} = 10^{kx}$$
$$I(x) = I_0 10^{kx}$$

Derivando I(x):

$$I'(x) = I_0 10^{kx}(ln10)k = I_0 k(10^{kx})ln10$$

3.4 Crescimento e decrescimento de funções

1. Uma cidade é atingida por uma epidemia de gripe. O departamento de saúde pública da prefeitura registra que t dias após o início da epidemia o número de cidadãos infectados é

$$N(t) = 20000 + 20t^2 - 2t^3,\ t > 0$$

(a) Em que intervalo a epidemia cresce?
(b) Em que intervalo a epidemia decresce?

$N'(t) = 40t - 6t^2$

Analisando-se a função $N'(t) = 40t - 6t^2$, *encontra-se como raízes* $t = 0$ *e* $t = \frac{20}{3}$. *O gráfico de* $N'(t)$ *é uma parábola com concavidade para baixo.*

(a) Se $0 < t < \frac{20}{3} \Rightarrow N'(t) > 0 \Rightarrow N(t)$ *cresce*
(b) Se $t > \frac{20}{3} \Rightarrow N'(t) < 0 \Rightarrow N(t)$ *decresce*

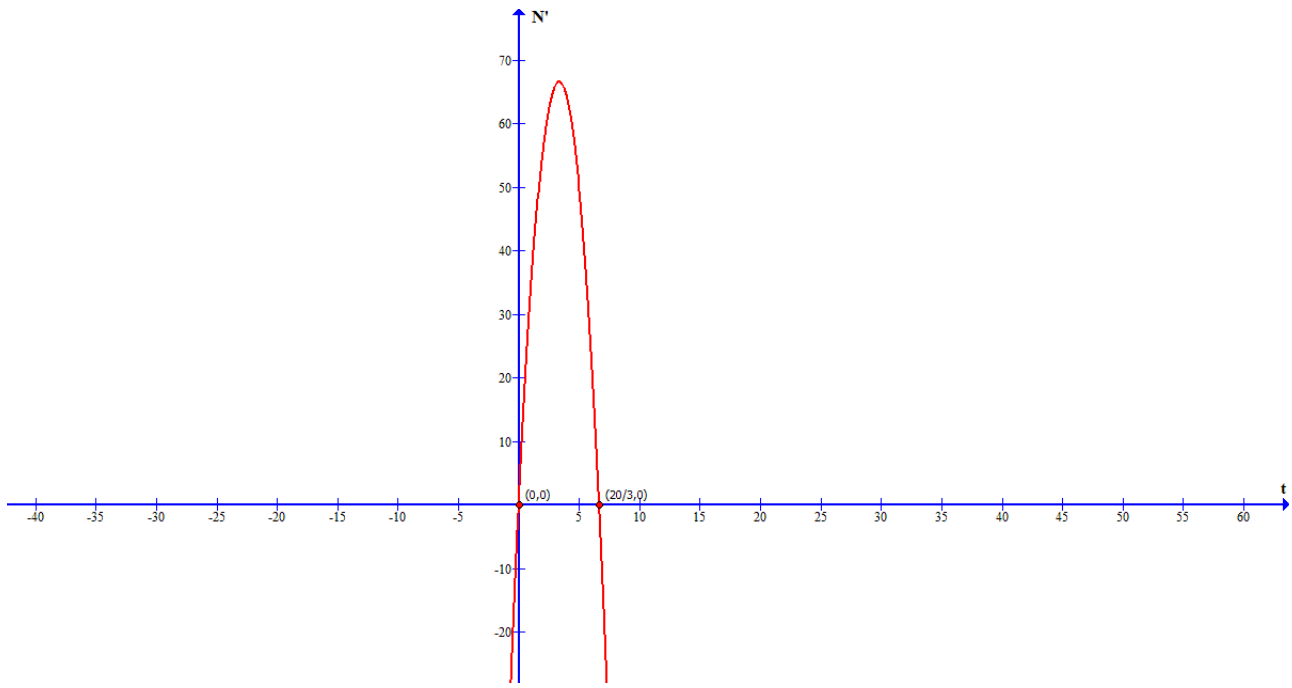

Figura 14: $N'(t) = 40t - 6t^2$

2. Demógrafos predizem que a população de uma certa região urbana é modelada por

$$P(t) = \frac{kt}{100 + t^2},$$

$t > 0$, para os próximos 20 anos, onde k é uma constante positiva.
(a) Em qual intervalo de tempo P(t) cresce?
(b) Em qual intervalo de tempo P(t) decresce?

Sabe-se que:

Se $P'(t) > 0$ *para* t *num intervalo* $I \Rightarrow P(t)$ *cresceemI*
SeP'(t)¡0paratnumintervaloI $\Rightarrow P(t)$ *decresceemI*

P'(t)=100k-kt$^2 \frac{}{(100+t^2)^2}$

Como k *é constante e maior que 0, basta analisar o sinal da função* $f(t) = 100 - t^2$ *para* $t > 0$.

Se $0 \leq t < 10 \Rightarrow f(t) > 0 \Rightarrow P'(t) > 0 \Rightarrow P(t)$ *cresce*
Se $t > 10 \Rightarrow f(t) < 0 \Rightarrow P'(t) < 0 \Rightarrow P(t)$ *decresce*

3. *Uma população N(t) é composta de pessoas imunes a uma epidemia, I(t), e de pessoas suscetíveis, S(t), ie,*

$$N(t) = I(t) + S(t),$$

I(t) inclui aqueles que contraíram a doença e aqueles que não podem contraí-la. Se a taxa de crescimento do número de suscetíveis é de 20 pessoas por dia, e que a taxa de

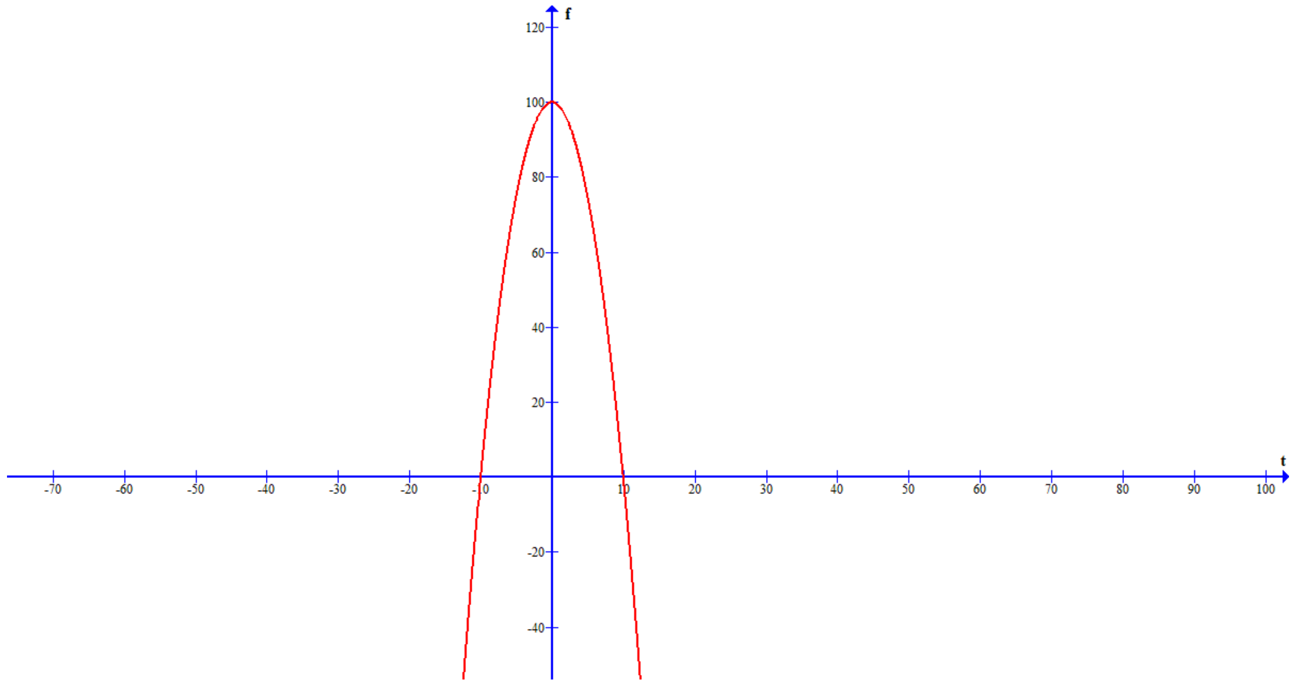

Figura 15: $f(t) = 100 - t^2$

crescimento do número de imunes é de 24 pessoas por dia, qual a taxa que a população está crescendo?

Queremos analisar o crscimento da população N(t), assim um aumento em S(t) é uma taxa negativa e I(t) é uma taxa positiva. Derivando ambos os lados da equação $N(t) = I(t) + S(t)$ *obtemos:*

$$N'(t) = I'(t) + S'(t) = 24 - 20 = +4$$

Assim, a taxa de crescimento é de 4 pessoas por dia.

4. *A função*

$$L(t) = a + b(1 - e^{-ct})$$

é usada para modelar o tamanho de crianças como função do tempo em anos, onde a, b e c sao constantes positivas não nulas.
(a) Calcular $L'(t)$*. Interpretar a resposta dada.*
(b) L(t) tem ponto de máximo?
(c) Calcular $L''(t)$*. Interpretar a resposta dada.*
(d) Mostrar que $L'' < 0$ *se* $b > 0$.
(e) O que ocorre se $t \longrightarrow \infty$*?*

(a) $L'(t) = bce^{-ct}$*. Representa a taxa de crescimento da criança no instante t.*

(b) $L'(t) = bce^{-ct} \neq 0, \ \forall t$*. Assim, a função L(t) não tem máximo entre* $(0, \infty)$.

(c) Derivada segunda: $L''(t) = -bc^2e^{-ct}$*. Se* $b > 0 \Rightarrow L''(t) = -bc^2e^{-ct} < 0, \ \forall t$*. Ou*

seja, a taxa de crescimento da criança durante os anos vai diminuindo conforme ela vai crescendo, o que corresponde com o normalmente observado. Porém, se $b < 0 \Rightarrow L''(t) = -bc^2e^{-ct} > 0,\ \forall t$ *o que corresponde ao efeito contrário.*

(d) O sinal de $L''(t) = -bc^2e^{-ct}$ *depende exclusivamente de b. Assim, se* $b > 0 \Rightarrow L''(t) = -bc^2e^{-ct} < 0,\ \forall t$*. Isto é, a velocidade de crescimento é decrescente, durante a vida a velocidade com que crescemos decresce.*

3.5 Máximos e mínimos

Preâmbulo

1) Máximos e mínimos em intervalos limitados: Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Suponhamos $f(x)$ derivável em $]a, b[$, assim se $f(x_0)$ é ponto de máximo de $f(x)$, então x_0 é extremidade de $[a, b]$ ou $x_0 \in]a, b[$ e $f'(x_0) = 0$. Logo, basta compararmos os valores que $f(x)$ assume nas extremidades com os assumidos nos pontos críticos.

2) Máximos e mínimos locais em intervalos abertos: Sejam f(x) uma função que admite derivada de segunda ordem contínua no intervalo aberto I e $x_0 \in I$.
a) $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0$ é ponto de mínimo local.
b) $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow x_0$ é ponto de máximo local.

3) Máximos e mínimos em intervalos não limitados: No caso de intervalos não limitados como $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ ou $]-\infty, +\infty[$, deve-se avaliar e comparar os valores das situações possíveis: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$, $k \in \Re$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $f(x_0)$, tal que x_0 é ponto crítico do intervalo.

1. Um jardim retangular de $50m^2$ de área deve ser protegido contra animais. Se um lado do jardim já está protegido por uma parede de celeiro, quais as dimensões da cerca de menor perímetro que cumprirá esse papel?

   A figura (16) introduz uma notação conveniente para tratarmos com a área do jardim e o comprimento total da cerca.

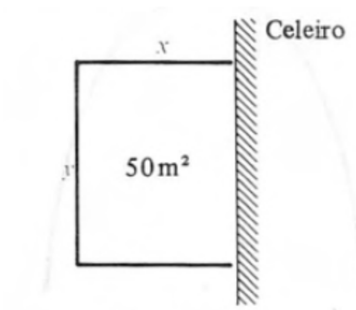

Figura 16: Jardim retangular

Denotamos por L o comprimento da cerca. Queremos minimizar

$$L = 2x + y$$

sujeito a restrição

$$xy = 50$$

Assim,

$$y = \frac{50}{x} \Longrightarrow L = 2x + \frac{50}{x} \Longrightarrow \frac{dL}{dx} = 2 - \frac{50}{x^2} \Longrightarrow \frac{d^2L}{dx^2} = \frac{100}{x^3}$$

Igualando-se a 0,

$$2 - \frac{50}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 = 25 \Longrightarrow x = 5.$$

Logo, $\frac{d^2L(5)}{dx^2} > 0$ *e x=5 é ponto de mínimo de L(x).*

Retornando a $y = \frac{50}{x} = \frac{50}{5} = 10$

Logo, o jardim com a menor cerca tem 5 m de largura e 10 m de comprimento.

2. Um arame de comprimento L é cortado em dois pedaços, sendo um dobrado em forma de quadrado e o outro em forma de círculo. Como devemos cortar o arame para que a soma das áreas englobadas pelos dois pedaços seja:

   (a) Máxima?

   (b) Mínima?

   Denotamos por x o lado do quadrado e r o raio do círculo, como ilustrado na figura (17).

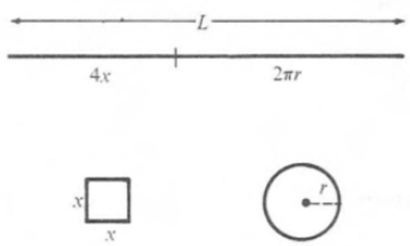

Figura 17: Ilustração do problema

a soma das áreas será

$$A = x^2 + \pi r^2, \tag{1}$$

onde x e r são relacionados por

$$4x + 2\pi r = L. \tag{2}$$

Usando (2) expressamos r em termos de x,

$$r = \frac{1}{2\pi}(L - 4x),$$

onde $r \geq 0$ o que implica em $0 \leq x \leq \frac{L}{4}$. Usamos essa expressão para exprimirmos A em termos apenas de x.

$$A = x^2 + \pi \frac{1}{4\pi^2}(L-4x)^2 = x^2 + \frac{1}{4\pi}(L-4x)^2, x \in [0, \frac{L}{4}] \tag{3}$$

Procuramos pontos $x_0, x_1 \in (0, \frac{L}{4})$ tais que

$$A(x_0) \leq A(x) \leq A(x_1), \forall x \in [0, \frac{L}{4}].$$

Se tais pontos estiverem em $(0, \frac{L}{4})$ estes serão pontos críticos de $A(x)$, já que serão extremos locais. Se não estes estarão na fronteira.

Os pontos críticos de $A(x)$ sobre $(0, \frac{L}{4})$ são tais que $A'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{4+\pi}$

Logo,analisando os pontos 0,$\frac{L}{4+\pi}$ e $\frac{L}{4}$ temos,
$A(0) = \frac{L^2}{4\pi}$
$A(\frac{L}{4+\pi}) = \frac{L^2}{(4+\pi)^2}(1 + \frac{\pi}{4})$
$A(\frac{L}{4}) = \frac{L^2}{16}$

(a) A área será máxima quando x=0, ou seja, todo o arame deve ser usado para o círculo.
(b) A área será mínima quando $x = \frac{L}{4+\pi}$. Nota-se que a área mínima é atingida quando o diâmetro da circunferência é igual ao lado do quadrado, pois

$$2r = \frac{1}{\pi}(L-4x) = \frac{1}{\pi}\frac{\pi L}{4+\pi} = \frac{L}{4+\pi}$$

3. Ao preço de R\$ 1,50 um vendedor ambulante pode vender 500 unidades de uma certa mercadoria que custa 70 centavos cada. Para cada centavo que o vendedor baixa no preço, a quantidade de unidades vendidas pode aumentar de 25. Que preço de venda maximizará o lucro?

   Façamos x denotar o número de unidades monetárias que o vendedor baixa no preço; o lucro na venda de cada mercadoria será $1,50 - 0,70 - x = 80 - x$ centavos, e a quantidade vendida será $500 + 25x$. O lucro total é, portanto:

   $$P = (80 - x)(500 + 25x) = 40000 + 1500x - 25x^2.$$

   Buscamos o valor máximo de P procurando seu ponto crítico.

   $$\frac{dP}{dx} = 1500 - 50x = 0, \quad 50x = 1500, \quad x = 30.$$

   O preço de venda mais vantajoso é, portanto, R\$ *1,20*

4. Mostre que o quadrado tem a maior área dentre todos os retângulos inscritos numa dada circunferência $x^2 + y^2 = a^2$.

   Sejam L e l os lados do retângulo inscrito na circunferência de raio a. A área do retângulo é dada por $A = lL$ e do Teorema de Pitágoras temos $L^2 + l^2 = 4a^2$ Assim,

   $$A = lL = l\sqrt{4a^2 - l^2}$$

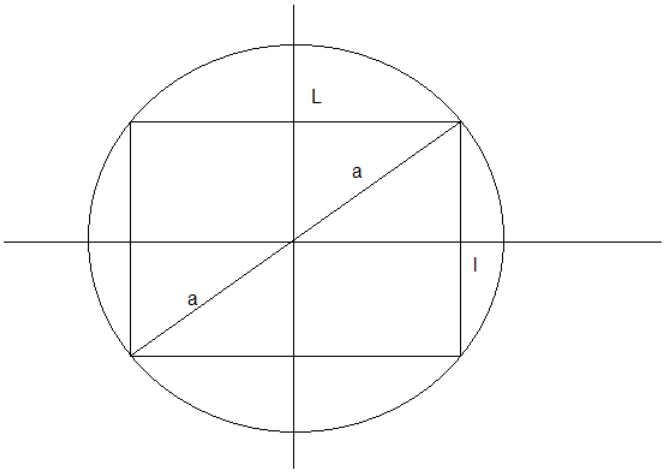

Figura 18: Ilustração do problema

Para $l^2 \leq 4a^2$ *e como* $l \geq 0, 0 \leq l \leq 2a$. *O valor de l que maximiza A neste intervalo também maximiza* A^2

$$A^2 = 4a^2l^2 - l^4 = f(l)$$

Assim A(l) será máxima no intervalo [0,2a] se l=0, l=2a ou l= ponto crítico de f(l).

$$\frac{df}{dl} = 8a^2l - 4l^3 = 0 \Longrightarrow l = 0, \quad l = a\sqrt{2} \quad e \quad l = -a\sqrt{2}$$

Comparando os valores de A para $l \in \{0, a\sqrt{2}, 2a\}$ *teremos que* $l = a\sqrt{2}$ *e como* $L^2 + l^2 = 4a^2 \Longrightarrow L = a\sqrt{2}$

Ou seja, L=l e o retângulo com área máxima inscrito em uma circunferência é um quadrado.

5. Ao meio-dia , um barco A está a 50 milhas ao norte de um barco B, dirigindo-se para o Sul a 16 mi/h. O barco B está indo para Oeste a 12 mi/h. Em que instante eles ficarão o mais próximo possível e qual é a distâcia mínima entre eles?

   Seja d a distância em linha reta entre os barcos A e B. Os catetos do triângulo retângulo podem ser representados como observa-se na figura (19).

   Pelo Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 12^2t^2 + (50 - 16t)^2 = 400t^2 - 1600t + 2500 = f(t)$$

   Derivando e igualando a zero:

$$\frac{df}{dt} = 800t - 1600, \quad \frac{df}{dt} = 800t - 1600 = 0, \quad t = 2$$

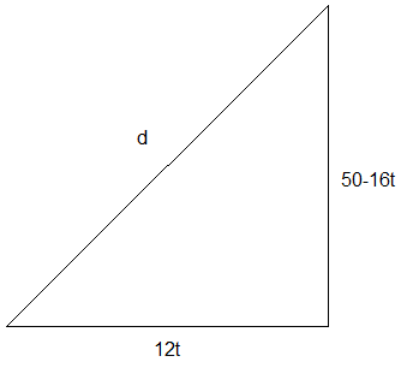

Figura 19: Distância d entre os barcos

A função f(t) é uma função quadrática com concavidade para cima, assim o valor encontrado $t = 2$ *h é ponto de mínimo.Agora descobrimos o valor de* $d = f(t)$,

$$d(2) = \sqrt{400(2^2) - 1600(2) + 2500} = \sqrt{900} = 30 \quad milhas/h$$

Ou seja, às 14:00h $d = 30$ *milhas.*

6. Um retângulo tem área de $32cm^2$. Quais são suas dimensões se a distância de um vértice ao ponto médio de um lado não-adjacente é a menor possível?

   Consideremos o ponto médio de um cateto não adjacente de coordenadas $(\frac{x}{2}, y)$. *Assim, o quadrado da distância do vértice* $(0,0)$ *a* $(\frac{x}{2}, y)$ *será* $d^2 = \frac{x^2}{4} + y^2$.

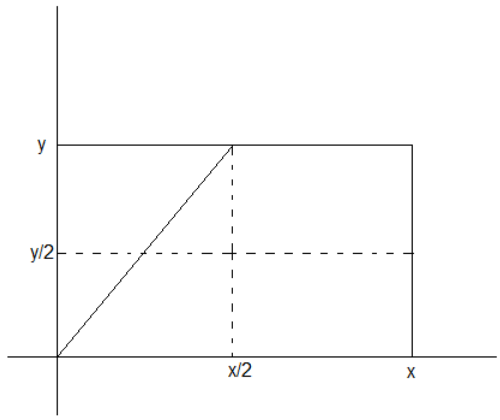

Figura 20: Ilustração do problema

Como $xy = 32$ *temos* $y = \frac{32}{x}$ *e portanto temos* $f(x) = d(x)^2 = \frac{x^2}{4} + y^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{32^2}{x^2}$

Buscando pontos críticos de f

$$\frac{df}{dx} = \frac{x}{2} - \frac{2(32^2)}{x^3} = 0, \quad x \neq 0 \Longrightarrow x^4 - 4(32^2) = 0 \Longrightarrow x = 8$$

Analisando o valor da derivada segunda em x=8,

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{2} - 2(32^2)(\frac{-3x^2}{x^6}) = \frac{1}{2} + \frac{6(32^2)}{x^4} > 0, \forall x \in \Re \Longrightarrow \textit{Ponto} \quad \textit{de} \quad \textit{mínimo}!$$

Assim, $x = 8$ *cm e* $y = \frac{32}{8} = 4$ *cm são as dimensões do retângulo.*

7. Um fabricante de latas de conservas de formato cilíndrico recebe um pedido muito grande de latas com determinado volume V_0. Quais as dimensões que minimizarão a área total da superfície de uma lata como esta e, portanto, a quantidade de metal necessário para fabricá-la?

   Sendo r e h, respectivamente, o raio da base e a altura de uma lata cilíndrica seu volume é

$$V_0 = \pi r^2 h \tag{4}$$

   e a área total da superfície é

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \tag{5}$$

   Devemos minimizar A, que é uma função de duas variáveis, notando que a equação (4) relaciona essas variáveis. Logo, resolvendo (4) para h, $h = \frac{V_0}{\pi r^2}$ *e substituímos em (5) para expressar A como função só de r,*

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{V_0}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}, r > 0 \tag{6}$$

   Observemos que $\lim_{r \to 0^+} A(r) = \infty$. *Assim, buscamos* $r > 0$ *que minimize A(r). r deve ser um ponto crítico de A(r) e portanto*

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2V_0}{r^2} = 0, \quad 2V_0 = 4\pi r^3 \Longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$$

   Note que $\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4V_0}{r} > 0$ *para* $r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$

   Logo $r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$ *minimiza A(r). A lata terá as seguintes dimensões* $r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$ *e* $h = 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$

8. Determine a razão entre a altura e o diâmetro da base do cilindro de volume máximo que pode ser inscrito numa esfera de raio R.

   Esboçando um cilindro inscrito na esfera e colocando os dados como indicados na figura vemos que o volume do cilindro será

$$V = 2\pi x^2 y \tag{7}$$

$$\textit{onde} \quad x^2 + y^2 = R^2 \tag{8}$$

   Visualizando os casos extremos, percebemos que V é pequeno quando x está perto de zero

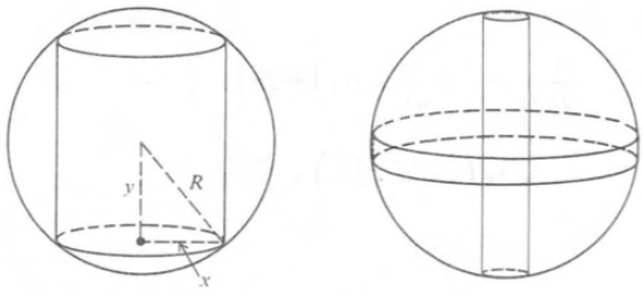

Figura 21: Cilíndro inscrito na esfera

e também quando x está perto de R, e assim entre esses extremos existe uma posição de volume máximo. Para achá-la, usamos (8) em (7).

$$V = 2\pi y(R^2 - y^2) = 2\pi(R^2y - y^3), \quad \textit{onde} \quad 0 \leq y \leq R$$

Buscamos os pontos críticos de $V(y)$, temos

$$\frac{dV}{dy} = 2\pi(R^2 - 3y^2) = 0$$

o que nos dá

$$y = \frac{R}{\sqrt{3}} \quad e \quad \textit{consequentemente} \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}}R.$$

Como $V(0) = V(R) = 0$ este será o ponto de máximo de V e a razão entre a altura e o diâmetro da base deste cilindro é portanto,

$$\frac{2y}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

9. Um raio de luz parte de um ponto A a um ponto P de um espelho plano sendo então refletido e passando pelo ponto B (ver figura). O raio de luz segue o caminho mais curto APB. Medidas acuradas mostram que o ângulo do raio incidente α e o ângulo do raio refletido β são iguais. Demonstre este fato.

   Considere que o ponto P assuma várias posições no espelho, sendo cada posição determinada por um valor de x. Desejamos minimizar o comprimento L do percurso como uma função de x. A partir da figura, fica claro que essa função tem a seguinte expressão:

$$L = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2} = (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + [b^2 + (c - x)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Buscamos x tal que,

$$\frac{dL(x)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0 \tag{9}$$

Logo,

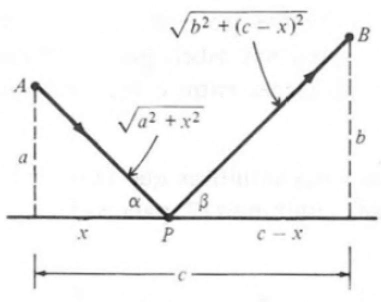

Figura 22: Raio de luz refletido

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}, \tag{10}$$

ou equivalente

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{c-x} \quad \Longrightarrow \sqrt{(\frac{a}{x})^2+1} = \sqrt{(\frac{b}{c-x})^2+1}$$

Como $0 \leq x \leq c$ *temos* $\frac{a}{x} = \frac{b}{c-x} \Longrightarrow x = \frac{ac}{b+a}$

Interpretando esse resultado temos que $\frac{a}{x} = \tan(\alpha)$ *e* $\frac{b}{c-x} = \tan(\beta) \Longrightarrow \tan(\alpha) = \tan(\beta)$

Onde $\alpha > 0, \beta < \frac{\pi}{2}$. *Como* $\tan(\Theta)$ *é injetiva neste intervalo, concluímos que* $\alpha = \beta$.

10. O raio de luz refletido do exercício anterior tem o percurso em um único meio a uma velocidade constante. No entanto, em meios diferentes (ar, água, vidro), a luz tem velocidades diferentes. Se um raio de luz passa do ar para a água, ele é refratado passando a uma direção mais próxima da perdendicular à interface. O percurso APB, nitidamente, não é mais o caminho mais curto de A a B. Em 1621 o cientista holândes Snell descobriu empiricamente que o caminho real do raio de luz é o que satisfaz a relação

$$\frac{sen\alpha}{sen\beta} = constante, \tag{11}$$

onde essa constante é independente das posições A e B. Esse fato é chamado Lei de refração de Snell. Prove a Lei de Snell, partindo do pressuposto de que o raio de luz percorre um caminho de A a B de modo a minimizar o tempo total de percurso.

De acordo com o diagrama acima, se a velocidade da luz no ar é v_a *e na água é* v_w, *então o tempo total de percurso* T *é o tempo da luz percorrer o ar mais o tempo da luz percorrer a água. Isto é,*

$$T = \frac{D}{V} = \frac{1}{v_a}(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{v_w}[b^2+(c-x)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq x \leq c.$$

Se calcularmos a derivada dessa função e observarmos o seu significado em termos da figura (23),obteremos

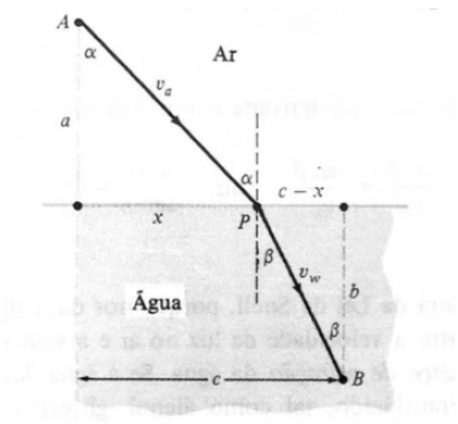

Figura 23: Lei de refração de Snell

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{v_a}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{v-w}\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

$$= \frac{sen\alpha}{v_a} - \frac{sen\beta}{v_w} \qquad (12)$$

Para obter o T mínimo igualamos essa derivada a zero, obtendo

$$\frac{sen\alpha}{v_a} = \frac{sen\beta}{v_w} \qquad (13)$$

Essa é a forma mais reveladora da Lei de Snell, porque nos dá significado físico da constante à direita de (11): é a razão entre a velocidade da luz no ar e a velocidade (menor) da luz na água. Essa constante chama-se índice de refração da água. Se a água dessa experiência for substituída por qualquer outro meio translúcido, tal como álcool, glicerina ou vidro, então a constante terá um valor numérico diferente que será o índice de refração do meio em questão.

11. Um espião é deixado por um submarino para ser embarcado em um bote a 2 milhas de um ponto P numa praia reta com direção Norte-Sul. Ele precisa chegar a uma casa ma praia a 6 milhas ao norte de P. Remando ele percorre 3 mi/h e, andando, 5 mi/h. Sua intenção é remar em direção a um certo ponto Q e depois andar o resto do caminho.

    (a) A que distância ao norte de P ele deve desembarcar para chegar à casa no menor tempo possível?

    (b) Qual a duração da viagem?

    (c) Quanto tempo a mais ele gastará se remar diretamente a P e depois andar para a casa?

    (a) Seja Q um ponto qualquer na praia ao norte de P de tal forma que $\bar{PQ} = x$ *onde* $0 \leq x \leq 6$. *Assim, o tempo total para se chegar na casa pode ser expresso como função de x por,*

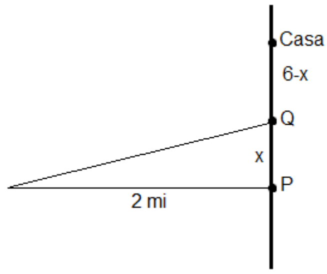

Figura 24: Ilustração do problema

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{6-x}{5}$$

Procurando o ponto crítico

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5} = 0$$

Encontramos $x = \frac{3}{2} = 1,5$ *mi ao norte de P. Como* $T(0) = 1,87h$, $T(6) = 2,11h$ *e* $T(1,5) = 1,73h$ *o menor tempo ocorre em* $x = 1,5$.

(b) A duração é de $T(1,5) = 1,73h$.

(c) Se o espião remar diretamente a P e depois andar para a casa, o que equivale a $x = 0$, *gastará um tempo total dado por* $t = \frac{2}{3} + \frac{6}{5} = 1,87\ h$. *Assim, a diferença será de 0,14h equivalente a 8 min e 24 s.*

12. A função lucro L, definida por $L(x)$, é o lucro da produção, marketing e venda de x unidades de uma mercadoria. $L(x)$ é representado por $L(x)) = R(x) - C(x)$, com $R(x) = 90x - x^2$ a renda e $C(x) = 50 + 30x$ o custo. Encontre a função lucro, seus valores em L(20), L(30), L(50) e encontre seu valor máximo.

    A função lucro será :

    $$L(x) = R(x) - C(x) = (90x - x^2) - (50 + 30x) = -x^2 + 60x - 50$$

    Substituindo os valores correspondentes em x: $L(20) = 750 \quad L(30) = 850 \quad e \quad L(50) = 450$

    Procuramos os pontos críticos de L(x),

    $$\frac{dL}{dx} = -2x + 60 = 0 \Longrightarrow x = 30$$

    A função lucro é uma parábola com um ponto de máximo. O lucro máximo ocorre em x=30 unidades e é de R$850,00.

13. (a) Suponha que um fabricante possa vender x bicicletas por ano ao preço de $p = 3000 - 0,1x$ reais cada uma e que o custo para ele produzir x bicicletas seja $C(x) = 600000 + 750x$ reais. Para obter lucro máximo, qual deve ser sua produção e a que preço o fabricante deve vender cada bicicleta?
(b) Se o governo cobra do fabricante um imposto de 250 reais por cada bicicleta comercializada e os outros aspectos da situação não se alteram, qual parcela do imposto ele mesmo deve absorver e qual deve repassar aos consumidores para continuar tendo lucro máximo?

(a) Seja a função lucro $L(x) = p(x)x - C(x)$, sendo $p(x)x = R(x)$ a receita anual e $C(x)$ o custo anual.

$$L(x) = (3000 - 0,1x)x - (600000 + 750x) = -0,1x^2 + 2250x - 600000$$

Procuramos os pontos críticos de L(x),

$$\frac{dL}{dx} = -0,2x + 2250 = 0 \Longrightarrow x = \frac{2250}{0,2} = 11250 \quad \textit{bicicletas}$$

Assim, o preço será $p(11250) = 3000 - 0,1(11250) = 1875$ reais

(b) Novo custo $C(x) = 600000 + 750x + I(x)$, com $I(x) = 250x$ o imposto pago por cada bicicleta produzida.

$$L(x) = (3000 - 0,1x)x - (600000 + 750x + I(x)) = -0,1x^2 + 2000x - 600000$$

Procuramos os pontos críticos de L(x),

$$\frac{dL}{dx} = -0,2x + 2000 = 0 \Longrightarrow x = 10000$$

O novo preço será $p(10000) = 2000$ reais. Assim, $\Delta p = 2000 - 1875 = 125$ reais, exatamente 50% de 250. O vendedor deve absorver 50% e repassar o resto para os clientes.

14. Se a receita marginal de produzir x unidades de um certo bem é $40 - \frac{1}{60}x^2$ reais por unidade e custo marginal é $10 + \frac{1}{60}x^2$ reais por unidade, quantas unidades devem ser produzidas para maximizar o lucro?

Seja a receita marginal $\frac{dR}{dx} = 40 - \frac{x^2}{60}$ e custo marginal $\frac{dC}{dx} = 10 + \frac{x^2}{60}$.
O lucro é dado por $L(x) = R(x) - C(x)$. Procurando os pontos críticos de $L(x)$,

$$\frac{dL}{dx} = \frac{dR}{dx} - \frac{dC}{dx} = 0$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dC}{dx}$$

$$40 - \frac{x^2}{60} = 10 + \frac{x^2}{60}$$

$$x^2 = 30^2$$

$$x = 30 \quad (x > 0)$$

Assim, deve-se produzir 30 unidades.

15. A proprietária de um restaurante considera que seus fregueses bebem 540 caixas de um certo vinho por ano. Os gastos de encomendas são 10 reais e os custos de transporte são 3 reais por caixa por ano. Quantas caixas ela deve encomendar de cada vez?

   Temos $\frac{540}{x}$ *encomendas. Assim, o custo total das encomendas em um ano é dado por,*

$$C(x) = (10 + 3x)\frac{540}{x} = \frac{5400}{x} + 1620$$

   Como $\frac{dC}{dx} = -\frac{5400}{x^2} = 0$ *somente quando* x *tende ao infinito. Concluímos que deve-se fazer uma única encomenda de 540 caixas.*

16. Um impressor concordou em imprimir 135000 cópias de um pequeno cartão de propaganda. Ele gasta 12 reais por hora com o funcionamento da prensa, que produz 600 impressões por hora. Em cada impressão são impressos n cartões, onde n é o número de eletrotipos (cópias metálicas de coleção de tipos) usados na impressão. Cada eletrotipo custa para ele 3 reais. Quantos eletrotipos deve ele usar em sua prensa para minimizar o custo do trabalho?

   Número de horas para imprimir os 135000 cartões:

$$\frac{135000}{600n}$$

   Logo, o custo de produção dos 135000 cartões será $C(n) = 12\frac{225}{n} + 3n$. *Procuramos os pontos críticos de C(n), assim*

$$\frac{dC}{dn} = -\frac{2700}{n^2} + 3 = 0 \Longrightarrow n = 30$$

   Logo, temos que utilizar n=30 eletrotipos para minimizar os custos.

17. O nível de anti-ácido no estômago de uma pessoa t minutos após a ingestão de um comprimido anti-ácido é dado por $f(t) = \frac{6t}{t^2+2t+1}$.
   (a) Em que tempo t ocorre o nível máximo do anti-ácido?

   Obtemos os pontos críticos da função:

$$\frac{df(x)}{dt} = \frac{6(t^2+2t+1) - 6t(2t+2)}{(t^2+2t+1)^2} = 0$$
$$-t^2 + 1 = 0$$
$$t^2 = 1 \Rightarrow t = 1 \text{ e } t = -1$$

   Como $t \geq 0$, *pois t representa o tempo em minutos, interessa-nos apenas t=1 que é ponto de máximo uma vez que* $f''(1) < 0$. *Assim,* $f(1) = 1.5$ *e o nível de anti-ácido máximo ocorre após 1 minuto.*

18. Observações feitas por botânicos suportam a tese que a razão de sobrevivência de seedlings nas vizinhanças de uma árvore mãe é proporcional ao produto da densidade de sementes no chão e sua probabilidade de sobrevivência de ser comido por herbívoros. A densidade de herbívoros tende a decrescer à medida que a distância da árvore mãe aumenta já que a densidade de comida decresce. Seja x a distância em metros do tronco da

árvore mãe. Os resultados de amostragem indicam que a densidade de sementes no chão para $0 \leq x \leq 10$ é dado por $d(x) = \frac{1}{1+(0,2x)^2}$ e a probabilidade de sobrevivência de não ser comido por herbívoros é $p(x) = 0,1x$.
(a) Para que distância a razão de sobrevivência é máxima?

Seja RS: razão de sobrevivência

$RS = kd(x)p(x) = k\frac{1}{1+(0.2x)^2}0.1x = f(x)$, *k constante de proporcionalidade*

Procurando os pontos críticos de f(x):

$$f'(x) = \frac{0.1k(1+(0.2x)^2)-k0.1x2(0.2x)0.2}{(1+(0.2x)^2)^2} = 0$$
$$0.1 + 4 * 10^{-3}x^2 - 8 * 10^{-3}x^2 = 0$$
$$x^2 = \frac{100}{4} \Rightarrow x = \pm 5$$

Como $0 \leq x \leq 10 \Rightarrow x = 5\ m$

19. Um certo tipo de faisão foi introduzido numa ilha norte americana e o número de indivíduos é dado por, $P(t) = 10 + \frac{100t}{t^2+9}$, $t > 0$.
(a) Calcular $P'(t)$.
(b) Inicialmente a população cresce ou decresce?
(c) Podemos especular sobre um eventual tamanho populacional?

(a) $P'(t) = \frac{100(t^2+9)-100t(2t)}{(t^2+9)^2} = \frac{900-100t^2}{(t^2+9)^2}$

(b) $t = 0 \Rightarrow P'(0) = \frac{900}{81} > 0 \Rightarrow P(t)$ *cresce inicialmente*

(c) Procurando os pontos críticos:

$P'(t) = \frac{900-100t^2}{(t^2+9)^2} = 0 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 3$

Como $t > 0$ *interessa-nos saber o comportamento da função em t=3. Assim, analisaremos os valores das derivadas primeira e segunda no ponto t=3.*

$P''(t) = \frac{200t^3-5400t}{(t^2+9)^3} \Rightarrow P''(3) < 0$

O que nos leva a concluir que em t=3 ocorre um máximo, com $P(3) = \frac{80}{3} = 26.67$ *indivíduos.*

20. A população de uma certa cidade é prevista ser de $P(t) = 100000 + 48t^{\frac{3}{2}} - 4t^2$ pessoas t anos após 1985. Em que ano a população atingirá seu máximo?

Encontraremos os pontos críticos da função.

$P'(t) = 72\sqrt{t} - 8t = 0 \Rightarrow t^2 - 81\,|t| = 0$

Como $t \geq 0 \Rightarrow t(t-81) = 0 \Rightarrow t = 0$ *e* $t = 81$

$P(0) = 100000$ e $P(81) = 108748$

Sendo $P''(t) = \frac{36}{\sqrt{t}} - 8$ e $P''(81) = -4 < 0 \Rightarrow t = 81$ é ponto de máximo. Ou seja, a população atingirá seu máximo em 2066.

21. Quando uma pessoa tosse, a traquéia se contrai. Sejam r_0 o raio da traquéia, r o raio da traquéia durante a tosse, P pressão do ar na traquéia durante a tosse e v velocidade do ar na traquéia durante a tosse. Use os seguintes princípios de fluxo de fluídos para determinar quanto a traquéia deve se contrair, ou seja, determine r, de modo que ocorra a maior velocidade de ar (condição mais favorável para limpeza de pulmões e da traquéia).
$\Rightarrow r_0 = r = aP$, $a > 0$ constante. Experimentalmente, observa-se que durante a tosse a diminuição do raio da traquéia é aproximadamente proporcional à pressão do ar na traquéia.
$\Rightarrow v = bP\pi r^2$, $b > 0$ constante. Pela teoria de fluídos, a velocidade do ar pela traquéia é proporcional ao produto da pressão do ar e a área da seção da traquéia. Considerar que a traquéia seja um círculo, então a área é πr^2.

$\Delta r = aP$, $a > 0$, Δr é a variação do raio da traquéia.

$r = r_0 - \Delta r \Rightarrow r = r_0 - aP$

Utilizando $v = bP\pi r^2 \Rightarrow v(r) = \frac{b}{a}r_0\pi r^2 - \frac{b}{a}\pi r^3$

Pontos críticos de v(r):

$v'(r) = \frac{b}{a}r_0\pi 2r - \frac{b}{a}\pi 3r^2 = 0$
$r(2r_0 - 3r) = 0 \Rightarrow r = 0$ *e* $r = \frac{2}{3}r_0$

Utilizando $r = \frac{2}{3}r_0$ obtemos:

$v''(r) = \frac{b}{a}r_0\pi 2 - \frac{b}{a}\pi 6r \Rightarrow v''(\frac{2}{3}r_0) = -\frac{2br_0\pi}{a} < 0 \Rightarrow$ *Ponto de máximo*

Assim, em $r = \frac{2}{3}r_0$ a velocidade é máxima.

22. A população de uma certa cidade é prevista ser de $P(t) = 100000(1 + 5t)e^{-0{,}005t}$ em t anos. Quando a população atingirá seu máximo?

Encontraremos os pontos críticos de P(t) igualando sua derivada primeira a zero e o que eles representam analisando o sinal de sua derivada segunda em cada t crítico.

$P'(t) = 100000(4.995e^{-0.005t} - 0.025te^{-0.005t})$
e
$P''(t) = 100000(-0.049975e^{-0.005t} + 1.25 * 10^{-4}te^{-0.005t})$

Ponto crítico: $P'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{4.995}{0.025} = 199.8$

Analisando em t=199.8 : $P''(199.8) = -920.602 < 0 \Rightarrow$ A população atinge seu máximo em t=199.8 anos

23. A função

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

é chamada de função de densidade de probabilidade normal. A constante σ é dita desvio-padrão para a curva normal.
(a) Mostrar que o máximo de f(x) ocorre em x = 0 e que os pontos de inflexão ocorrem em $x = \pm\sigma$.
(b) Construir o gráfico

(a) Procurando os pontos críticos de f(x):

$f'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}(\frac{-x}{\sigma^2})e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 0 \Rightarrow$ *Ponto crítico em x=0*

$f''(x) = \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(\frac{x^2}{\sigma^2} - 1)e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$f''(0) = \frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} < 0 \Rightarrow x = 0$ *é ponto de máximo de f(x).*

Encontra-se os pontos de inflexão igualando-se a derivada segunda a zero.

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sigma$ *(Pontos de inflexão)*

(b)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

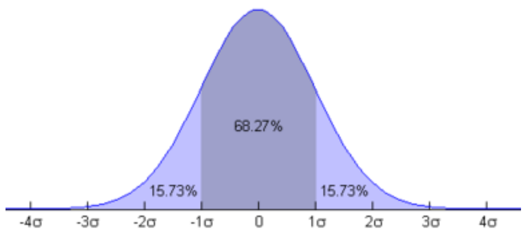

Figura 25: Função densidade de probabilidade normal

24. Pesquisadores interessados em modelar a razão na qual animais crescem têm usado o seguinte modelo $y = t + sen\frac{\pi t}{4} + B$, onde y é a altura em cm, B é a altura ao nascer, t é dado em meses.
(a) Achar os valores máximo e mínimo da razão de crescimento, $\frac{dy}{dt}$, e os tempos em que elas ocorrem no primeiro ano de vida.

Seja a razão de crescimento igual a $R(t) = \frac{dy}{dt}$, *assim:*

$R(t) = 1 + \frac{\pi}{4} cos(\frac{t\pi}{4})$

$R'(t) = -\frac{\pi^2}{16} sen(\frac{t\pi}{4})$

$R''(t) = \frac{-\pi^3}{64} cos(\frac{t\pi}{4})$

Pontos críticos:

$R'(t) = -\frac{\pi^2}{16} sen(\frac{t\pi}{4}) = 0 \Rightarrow t = 4k,\ k\ inteiro$

Primeiros 12 meses: $0 \leq t \leq 12 \Rightarrow t = 0, 4, 8\ e\ 12$

$R(0) = 1 + \frac{\pi}{4} = 1.78$

$R(4) = 1 - \frac{\pi}{4} = 0.215$

$R(8) = 1 + \frac{\pi}{4} = 1.78$

$R(12) = 1 - \frac{\pi}{4} = 0.215$

Máximo R=1.78 ($R''(0) < 0$) e mínimo R=0.215 ($R''(4) > 0$). Assim, ocorrem dois máximos e dois mínimos em 12 meses.

25. Um certo lago pode suportar uma população máxima de 20000 peixes. Se há poucos peixes no lago, a taxa de crescimento populacional será proporcional ao produto da população existente pela diferença da população existente a partir de 20000. Para que população a taxa de crescimento será máxima?

    Seja P(t) a população de peixes no tempo t. A taxa de crescimento populacional será:

    $P'(t) = kP(20000 - P) = f(P) = -kP^2 + 20000kP$, *k constante de proporcionalidade*

    f(P) é uma equação do segundo grau com um ponto máximo dado por:

    $f'(P) = -2kP + 20000k = 0 \Rightarrow P = 10000$

    Para uma população de 10000 peixes a taxa de crescimento será máxima.

26. Cinquenta animais ameaçados de extinção são colocados numa reserva. Decorridos t anos a população x desses animais é estimada em $x(t) = 50\frac{t^2+6t+30}{t^2+30}$. Em que instante essa população animal atinge seu máximo? Quanto ele vale?

    A função $x(t) = 50\frac{t^2+6t+30}{t^2+30}$ *apresenta o gráfico a seguir:*
    Derivando x(t):

    $x'(t) = \frac{9000-300t^2}{(t^2+30)^2}$

    $x''(t) = \frac{-54000t+600t^3}{(t^2+30)^3}$

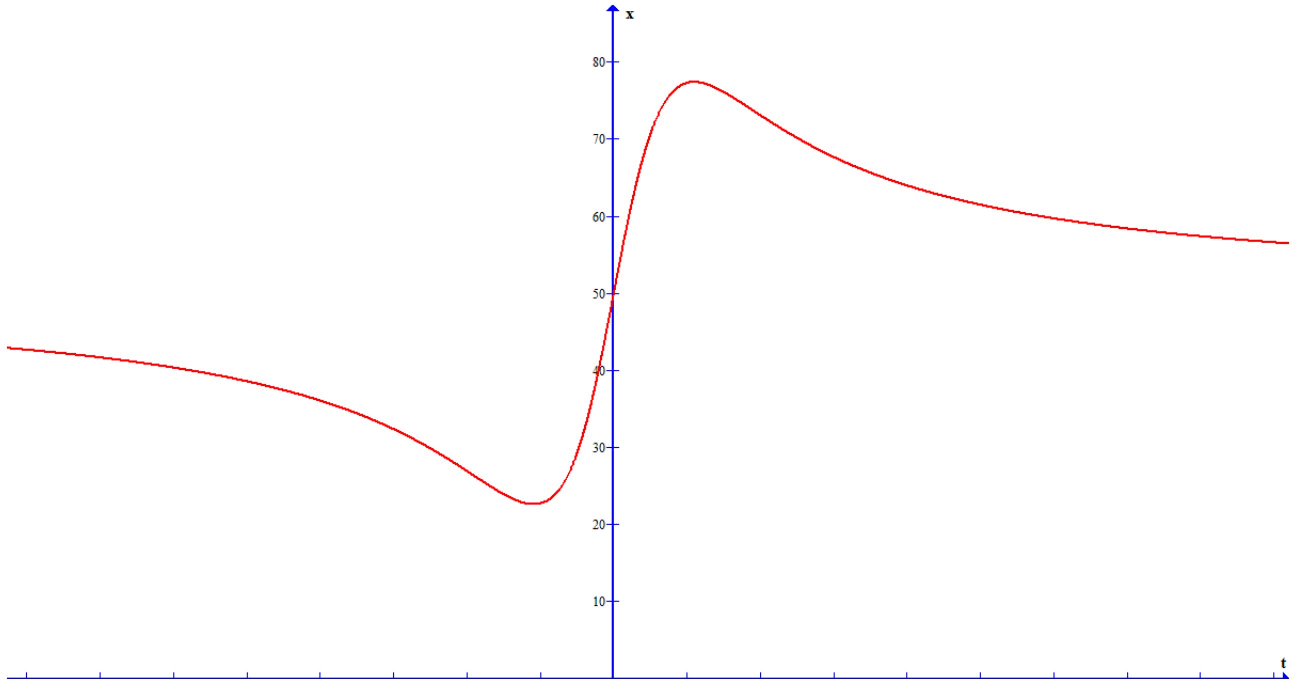

Figura 26: $x(t) = 50(\frac{t^2+6t+30}{t^2+30})$

Pontos críticos:

$x'(t) = \frac{9000-300t^2}{(t^2+30)^2} = 0 \Rightarrow t \pm \sqrt{30} \cong \pm 5.48$

Máximo: $x(\sqrt{30}) = 77.39 \;\; \Leftarrow (x''(\sqrt{30}) < 0)$
Mínimo: $x(-\sqrt{30}) = 22.61 \;\; \Leftarrow (x''(-\sqrt{30}) > 0)$

3.6 Taxas relacionadas

1. Um grande balão esférico de borracha está sendo cheio de gás a uma taxa constante de $8m^3/s$. Calcule com que velocidade o raio r do balão cresce:

   (a) Quando $r = 2$ m;

   (b) Quando $r = 4$ m.

   Considere um balão esférico de raio r e volume V. O volume do balão é dado pela fórmula

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{14}$$

   Temos que $\frac{dV}{dt} = 8$ *e precisamos achar* $\frac{dr}{dt}$ *para dois valores específicos de r. V e r são ambas variáveis dependentes, tendo o tempo t como variável independente. Com isto em mente, é natural introduzir as taxas de variação de V e r, derivando (14) em relação a t,*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \tag{15}$$

   onde a regra da cadeia foi aplicada. Segue-se de (15) que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt} = \frac{2}{\pi r^2}$$

pois $\frac{dV}{dt} = 8$. *No caso (a), temos, portanto,*

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi} = 0,16 \quad m/min,$$

e no caso (b),

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8\pi} = 0,04 \quad m/min.$$

2. Uma escada de 13 m está apoiada em uma parede. A base da escada esá sendo empurrada no sentido contrário ao da parede, a uma taxa constante de 6 m/min. Qual velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo, encostado à parede, quando a base da escada está a 5m da parede?

   O diagrama da situação ilustra o problema. Usamos letras para representar as quantidades que estão variando.

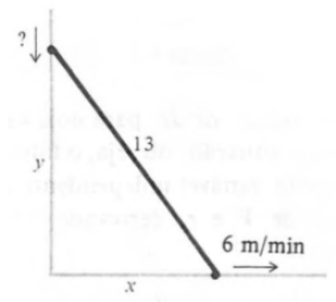

Figura 27: Situação

$$\frac{dx}{dt} = 6 \qquad -\frac{dy}{dt} = ? \quad quando \quad x = 5$$

O uso do sinal negativo aqui pode ser melhor entendido pensando em $\frac{dy}{dt}$ *como a taxa com que y está crescendo, e* $-\frac{dy}{dt}$ *como a taxa com que y está decrescendo. O problema pede o segundo caso.Conhecemos uma derivada em relação ao tempo e queremos achar a outra. Logo, procuramos uma equação ligando x e y da qual possamos obter uma segunda equação relacionando suas taxas de variação. Pela figura obtemos:*

$$x^2 + y^2 = 169 \tag{16}$$

Derivando essa expressão em relação a t,

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \quad ou \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

e portanto

$$-\frac{dy}{dt} = \frac{6x}{y}, \tag{17}$$

visto que $\frac{dx}{dt} = 6$. *Finalmente, a equação (16) revela que* $y = 12$ *quando* $x = 5$*; logo, (17) nos leva a concluir que*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6(5)}{12} = 2,5m/min$$

3. Um tanque em forma de cone com o vértice para baixo mede 12 m de altura e tem no topo um diâmetro de 12m. Bombea-se água à taxa de $4m^3$/min. Ache a taxa com que o nível da água sobe (a) quando tem 2 m de profundidade e (b) quando a água tem 8 m de profundidade.

   Como no exercício anterior, analisamos a figura com o propósito de visualizar a situação e estabelecer a notação. Nosso passo seguinte é usar essa notação para fixar, como se segue, o que é dado e o que estamos procurando:

$$\frac{dV}{dt} = 4, \quad \frac{dx}{dt} =? \quad quando \quad x = 2 \quad e \quad x = 8.$$

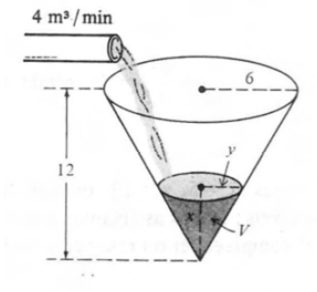

Figura 28: Situação problema

O volume variável da água no tanque tem a forma de um cone; logo, nosso ponto de partida é a fórmula

$$V = \frac{4}{3}\pi y^2 x. \tag{18}$$

As únicas variáveis dependentes que nos interessam são V e x; logo, queremos eliminar a variável y. Da figura usando triângulos semelhantes, vemos que

$$\frac{y}{x} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad ou \quad y = \frac{1}{2}x \tag{19}$$

e, substituindo em (18), obtemos

$$V = \frac{\pi}{12}x^3 \tag{20}$$

Introduzimos as taxas de variação derivando (20) com relação a t, o que leva a

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}x^2\frac{dx}{dt} \tag{21}$$

visto que $\frac{dV}{dt} = 4$. *Dessa fórmula obtemos, para x=2,*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4}{\pi} \cong 1,27m/min$$

e, para x=8,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4\pi} \cong 0,08m/min$$

4. Uma pedra lançada numa lagoa provoca uma série de ondulações concêntricas. Se o raio r da onda exterior cresce uniformemente à taxa de 1,8 m/s, determine a taxa com que a área de água pertubada está crescendo (a) quando $r = 3$ m e (b) quando $r = 6$ m.

   Seja $A = \pi r^2$ *a área da circunferência de raio r. Assim, sua derivada é dada por,*

   $$\frac{dA}{dt} = \pi 2r\frac{dr}{dt}$$

   Substituindo $\frac{dr}{dt} = 1,8$ *m/s na equação anterior, obtemos* $\frac{dA}{dt}(r) = 3,6\pi r$. *Assim,*

   $$\frac{dA}{dt}(3) = 33,9m^2/s \quad e \quad \frac{dA}{dt}(6) = 67,82m^2/s$$

5. Uma grande bola de neve esférica está se derretendo à taxa de $0,06\pi m^3/h$. No momento em que está com 76 cm de diâmetro, determine (a) a velocidade com que o raio está variando e (b) a velocidade com que a área da superfície está variando.

   Seja o volume e a área da esfera dados por, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ *e* $A = 4\pi r^2$ *respectivamente. Derivando V e A em relação ao tempo obtemos:*

   $$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \quad e \quad \frac{dA}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt}$$

   (a) Substituindo $\frac{dV}{dt} = -0,06\pi m^3/h$ *e* $r = 0,34m$ *na equação da esquerda obtemos* $\frac{dr}{dt} = -0,104m/h$

   (b) Utilizando o resultado anterior de $\frac{dr}{dt} = -0,104m/h$ *obtemos* $\frac{dA}{dt} = -0,993m^2/h$

6. Um menino empina um papagaio a 24 m de altura e o vento sopra horizontalmente distanciando-o do menino a 6 m/s. Com que velocidade o menino solta a linha quando o papagaio está 30 m longe dele?

   A distância do menino até o papagaio representada por L, a altura de 24 m do papagaio e e a distância do menino até o ponto logo abaixo da posição do papagaio formam um triângulo retângulo, da qual se retira a seguinte relação:

$$L^2 = x^2 + 24^2$$

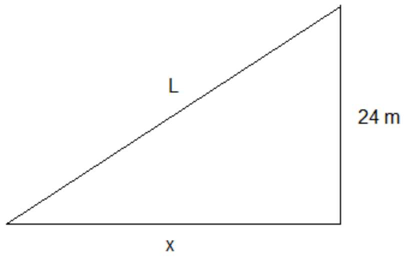

Figura 29: Situação

Derivando em relação ao tempo ambos os lados da equação obtemos:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{x}{L}\frac{dx}{dt}$$

Sabendo que $\frac{dx}{dt} = 6$ m/s *tem-se* $\frac{dL}{dt} = \frac{6x}{L}$. *Agora, basta substituirmos* $L = 30m$ *e* $x = 18m$ *e obtemos*

$$\frac{dL}{dt} = 3,6m/s$$

7. Um barco está sendo puxado para o cais por meio de um cabo com uma extremidade atada na proa do barco e a outra passando através de um anel fixo no cais num ponto situado a 1,5 m acima do nível da proa do barco. Se o cabo está sendo puxado a uma taxa de 1,2 m/s com que velocidade o barco se move na água quando já foram puxados 3,9 m de cabo?

   Seja x a distância horizontal do barco ao cais, L o comprimento da corda que liga a borda do cais ao barco e 1,5 m a altura da borda do cais. Como observado na figura (30). Assim, pelo Teorema de Pitágoras, podemos obter a relação $L^2 = 1,5^2 + x^2$. *Derivando ambos os lados em relação ao tempo obtemos:*

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \quad ou \quad L\frac{dL}{dt} = xV_b$$

   Sendo V_b *a velocidade do barco. Quando L=3,9 m encontramos x=3,6 m da relação de Pitágoras. Assim, substituindo na equação* $L\frac{dL}{dt} = xV_b$ *obtemos:*

$$V_b = 1,3m/s$$

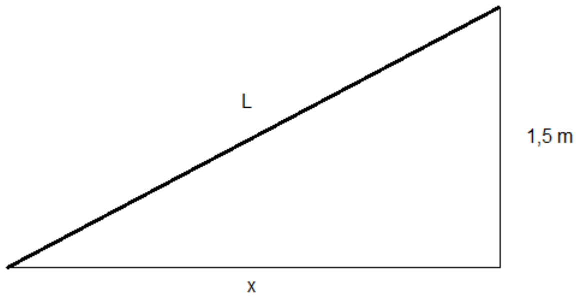

Figura 30: Situação

8. A maioria dos gases obedece à Lei de Boyle: numa amostra de gás mantida a uma temperatura constante enquanto está sendo comprimida por um pistão num cilindro, sua pressão p e seu volume V estão relacionados pela equação $pV = c$, onde c é uma constante. Ache $\frac{dp}{dt}$ em termos de p e $\frac{dV}{dt}$.

   Temos temperatura e c contantes. Derivando a relação $pV = c$ em relação ao tempo obtemos:

$$\frac{dp}{dt}V + p\frac{dV}{dt} = 0 \quad ou \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{p}{V}\frac{dV}{dt}$$

   Substituímos agora $\frac{p}{c}$ por $\frac{1}{V}$ que é obtida de $pV = c$ e encontramos

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p^2}{c}\frac{dV}{dt}$$

9. Num certo instante, uma amostra de gás que obedece à Lei de Boyle ocupa um volume de $1000m^3$ a uma pressão de $10N/m^2$. Se esse gás está sendo comprimido isotermicamente à taxa d $12m^3/min$, ache a taxa com que a pressão está crescendo no instante em que o volume é $600m^3$.

   Da relação de Boyle $pV = c$ com c constante, conhecendo $V_0 = 1000m^3$, $p_0 = 10N/m^2$ e $V_f = 600m^3$ obtemos p_f.

$$p_0V_0 = p_fV_f \Longrightarrow p_f = \frac{50}{3}N/m^2$$

   Derivando a equação $pV = c$ em relação ao tempo obtemos:

$$\frac{dp}{dt}V + p\frac{dV}{dt} = 0$$

   Na qual substituimos $\frac{dV}{dt} = -12m^3/min$, $V_f = 600m^3$ e $p_f = \frac{50}{3}N/m^2$ obtendo:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{3}\frac{N}{m^2min}$$

10. Se uma bolinha de naftalina evapora a uma taxa proporcional à área de sua superfície, mostre que seu raio decresce a uma taxa constante.

    A bolinha de naftalina evapora a uma taxa proporcional à área de sua superfície, assim

    $$\frac{dV}{dt} = kA = k4\pi r^2$$

    com k constante e r o raio da bolinha esférica. O volume da esfera é representado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, derivando ambos os lados da equação em relação ao tempo e substituindo $\frac{dV}{dt}$ na primeira equação obtemos:

    $$\frac{dV}{dt} = k4\pi r^2 = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \Longrightarrow k = \frac{dr}{dt} \quad constante$$

11. Uma escada com 6 m de comprimento está apoiada em uma parede de 3,6 m de altura, num ponto abaixo de sua extremidade. Sua base está sendo puxada de modo a se afastar da parede a uma taxa constante de 1,5 m/min. Ache a velocidade com que o topo da escada está se aproximando do chão (a) quando ele está a 1,5m do topo da parede e (b) quando atinge o topo da parede.

    A altura h do ponto de apoio da escada na parede, o comprimento de 6 m da escada e a distância x de seu apoio no solo formam um triângulo retângulo, do qual obtemos a relação:

    $$6^2 = x^2 + h^2$$

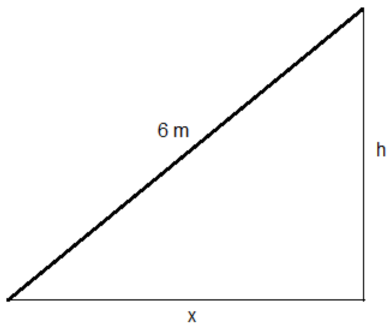

Figura 31: Situação

Derivando a relação acima em relação ao tempo, obtemos a equação $\frac{dh}{dt} = V = -\frac{x}{h}\frac{dx}{dt}$.

Em cada caso encontramos a posição x correspondente a cada altura h e substituímos a velocidade da base da escada (V_b) com o sinal adequado.

(a) $h = 2,1m$ implica $x = 5,62m$ e com V_b=1,5 m/min obtemos $V = -4,01m/min$

(b) $h = 3,6m$ implica $x = 4,8m$ e com V_b=-1,5 m/min obtemos $V = 2m/min$

12. Um ponto se move na circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ de tal modo que a componente x de sua velocidade é $\frac{dx}{dt} = -y$. Ache $\frac{dy}{dt}$ e determine se o sentido do movimento é horário ou anti-horário.

    Considere um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais com origem exatamente sobre o centro da circunferência. x e y representam as posições do ponto sobre a circunferência de raio a. Do Teorema de Pitágoras temos:

    $$x^2 + y^2 = a^2$$

    Derivando a equação acima em relação ao tempo obtemos:

    $$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

    Substituindo $\frac{dx}{dt} = -y$ na equação acima encontramos $\frac{dy}{dt} = x$. Analisando o ponto sobre o primeiro quadrante, quando temos $x > 0$ e $y > 0$ concluímos que o ponto move-se no sentido anti-horário.

13. Um procedimento clínico comum para se estudar o metabolismo do cálcio em pessoas (a razão na qual o corpo assimila e usa o cálcio) é injetar cálcio quimicamente marcado na corrente sanguínea e então medir quão rapidamente este cálcio é removido do sangue. Suponhamos t dado em dias contado após a injeção de cálcio marcado, A a quantidade restante de cálcio marcado no sangue dado por $A = t^{-\frac{3}{2}}$, $t \geq 0,5$.
    (a) Quão rápido está o corpo removendo cálcio do sangue quanto t = 1?

    A taxa de remoção é dado por $A'(t)$. Assim,

    $A'(t) = -\frac{3}{2}t^{-\frac{5}{2}}$

    $A'(1) = -\frac{3}{2}(1)^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2}$ *quantidade/dia*

14. Suponha que o peso em gramas de um tumor canceroso no tempo t é $w(t) = 0,1t^2$, onde t é medido em semanas. Qual a razão de crescimento do tumor, em gramas por semana, quando t = 5?

    A taxa de crescimento do tumor é dado por:

    $w'(t) = 0.2t$

    $w'(5) = 0.2(5) = 1$ *g/semana. O tumor cresce a uma taxa de 1 g por semana na quinta semana.*

3.7 Integral indefinida

1. O custo fixo de produção de uma empresa é de $R\$800,00$. O custo marginal é dado por $C'(x) = 0.03x^2 - 0.12x + 5$. Ache a função custo total.

   O custo marginal $C'(x)$ é a derivada da função custo total $C(x)$. Assim, para encontrar $C(x)$ integramos a função custo marginal.

   $C(x) = \int (0.03x^2 - 0.12x + 5)dx$
   $C(x) = 0.03 \int x^2 dx - 0.12 \int x dx + 5 \int dx$
   $C(x) = \frac{0.03}{3}x^3 - \frac{0.12}{2}x^2 + 5x + k$
   $C(x) = 0.01x^3 - 0.06x^2 + 5x + k$

   Inicialmente em $x = 0$ a empresa possui um custo fixo de $R\$800,00$.

   $800 = 0.01(0)^3 - 0.06(0)^2 + 50(0) + k \Rightarrow k = 800$

   $C(x) = 0.01x^3 - 0.06x^2 + 5x + 800$

2. O lucro marginal de uma empresa para um determinado item é dada pela equação $L'(x) = 20 - 0.6x^2$, na qual x é o número de itens vendidos. O lucro quando dois itens são vendidos é de $R\$4.20$. Encontre a equação do lucro total.

   O lucro marginal $L'(x)$ é a derivada da função lucro total $L(x)$. Assim, para encontrar $L(x)$ integramos a função lucro marginal.

   $L(x) = \int (20 - 0.6x^2)dx$
   $L(x) = 20x - 0.6\frac{x^3}{3} + k$
   $L(x) = 20x - 0.2x^3 + k$

   Em $x = 2$ a empresa possui um lucro de $R\$4.20$.

   $4.20 = 20(4.20) - 0.2(4.20)^3 + k \Rightarrow k = -34.2$

   $L(x) = 20x - 0.2x^3 - 34.2$

3. Uma empresa, observando sua produção e vendas, encontrou seu lucro marginal $L'(X) = 28 - 0.09x^2$ quando x unidades de determinado produto são vendidas. A empresa sofre uma perda de $R\$500,00$ quando nenhuma unidade é vendida. Assim, encontre a função lucro.

   O lucro marginal $L'(x)$ é a derivada da função lucro total $L(x)$. Assim, para encontrar $L(x)$ integramos a função lucro marginal.

   $L(x) = \int (28 - 0.09x^2)dx$
   $L(x) = 28x - 0.03x^3 + k$

   Em $x = 0$ a empresa sofre uma perda de $R\$500.00$.

$-500 = 28(0) - 0.03(0)^3 + k \Rightarrow k = -500$

$L(x) = 28x - 0.03x^3 - 500$

4. O custo médio total de produção de um determinado item é dado por $\bar{C}'(x) = \frac{1}{4} - \frac{17}{x^2}$, na qual x é o número de unidades produzidas.
(a) Encontre a função custo médio $\bar{C}(x)$, sabendo que $\bar{C}(4) = 57$.
(b) Encontre a função custo total $C(x)$.

(a) O custo médio marginal $\bar{C}'(x)$ é a derivada da função custo médio total $\bar{C}(x)$. Assim, para encontrar $\bar{C}(x)$ integramos a função custo médio marginal.

$\bar{C}(x) = \int (\frac{1}{4} - \frac{17}{x^2})dx$
$\bar{C}(x) = \frac{x}{4} + \frac{17}{x} + k$

Em $x = 4$ temos $\bar{C}(4) = 57$.

$57 = 1\frac{17}{4} + k \Rightarrow k = \frac{207}{4}$

$\bar{C}(x) = \frac{x}{4} + \frac{17}{x} + \frac{207}{4}$

(b) O custo total é dado por $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow C(x) = x\bar{C}(x)$. Logo,

$C(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{207}{4}x + 17$

5. A inclinação da reta tangente a uma curva em qualquer ponto é dado por $3x^2 + 5$. Encontre a equação da curva se ela contém o ponto $(3, 8)$.

Seja $f(x)$ a curva, logo:

$f(x) = \int (3x^2 + 5)dx = x^3 + 5x + k$

Em $f(3) = 27 + 15 + k = 8 \Rightarrow k = -34$

$f(x) = x^3 + 5x - 34$

6. Um poço de petróleo extrai petróleo a uma taxa de $R'(t) = 70 + 4.5t - 0.5t^2$, t em horas. Encontre a fórmula para a produção total após t horas.

$R(t) = \int R'(t)dt$
$R(t) = \int (70 + 4.5t - 0.5t^2)dt$
$R(t) = 70t + \frac{4.5}{2}t^2 - \frac{0.5}{3}t^3 + k$

Em $R(0) = 0 \Rightarrow k = 0$

$R(t) = 70t + \frac{4.5}{2}t^2 - \frac{0.5}{3}t^3$

7. A função velocidade de um determinado veículo é dada por $v(t) = t^2 - 2t + 4$, t em segundos. Encontre a função posição $s(t)$, sendo que em $s(0) = 0$.

$s(t) = \int v(t)dt$
$s(t) = \int (t^2 - 2t + 4)dt$
$s(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 4t + k$

Em $s(0) = 0 \Rightarrow k = 0$

$s(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 4t$

8. A função aceleração de um determinado veículo é dada por $a(t) = 4 - 66t$, t em segundos. Encontre a função velocidade $v(t)$, sendo que em $v(0) = 0$.

   $v(t) = \int a(t)dt$
   $v(t) = \int (4 - 66t)dt$
   $v(t) = 4t - 33t^2 + k$

   Em $v(0) = 0 \Rightarrow k = 0$

   $v(t) = 4t - 33t^2$

9. O tempo de parada de um veículo é dado resolvendo-se a equação diferencial $\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -fW$, na qual W é o peso do veículo, f o coeficiente de fricção, g a constante gravitacional, x a distância percorrida e t o tempo.
   (a) Determine a função velocidade.
   (b) Determine o tempo que o veículo demora para parar.
   (c) Determine a função deslocamento.
   (e) Determine a distância percorrida pelo veículo até parar.

   (a) Sendo $a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt}$ *e* $a = -fg$ *temos:*

   $v(t) = \int a(t)dt = \int (-fg)dt$
   $v(t) = -fgt + k$

   $v(0) = 0 + k = v_0$
   Logo, $v(t) = -fgt + v_0$

   (b) Procuramos t quando $v(t) = 0$*, assim*

   $v(t) = -fgt + v_0 = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{fg}$

   (c) Integramos a função velocidade para obter a função deslocamento, impondo a condição de que em $t = 0$, $x = 0$.

   $x(t) = \int v(t)dt = -fg\frac{t^2}{2} + v_0t + k \; x(0) = k = 0 \Rightarrow x(t) = v_0t - fg\frac{t^2}{2}$

   (d) Encontraremos $x(\frac{v_0}{fg})$*, assim* $x(\frac{v_0}{fg}) = \frac{{v_0}^2}{2fg}$

10. Se uma reação química ocorre a um volume constante a entalpia é dada por $\Delta H = \int C_v dt$, na qual C_v é definida como capacidade térmica a volume constante. Se $C_v = 2t^2 + 3t + 7$ encontre ΔH.

$\Delta H = \int C_v dt$
$\Delta H = \int (2t^2 + 3t + 7)dt$
$\Delta H = 2\frac{t^3}{3} + 3\frac{t^2}{2} + 7t + k$

Com $\Delta H(0) = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \Delta H = 2\frac{t^3}{3} + 3\frac{t^2}{2} + 7t$

11. Uma partícula desloca-se sobre o eixo x e sabe-se que no instante t, $t \geq 0$, a velocidade é $v(t) = 2t + 1$. Sabe-se, ainda, que no instante $t = 0$ a partícula encontra-se na posição $x = 1$. Determine a posição $x = x(t)$ da partícula no instante t.

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 1 \quad e \quad x(0) = 1$$

$\frac{dx}{dt} = 2t + 1 \Rightarrow x = \int (2t + 1)dt = t^2 + t + k$

Para $k = 1$, *teremos* $x = 1$ *para* $t = 0$. *Assim,* $x(t) = t^2 + t + 1$

12. Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = t + 3$, $t \geq 0$. Sabe-se que, no instante $t = 0$, a partícula encontra-se na posição $x = 2$.
(a) Qual a posição da partícula no instante t?
(b) Determine a posição da partícula no instante $t = 2$.
(c) Determine a aceleração.

(a)
$$\frac{dx}{dt} = t + 3 \quad e \quad x(0) = 2 \quad m$$

$x(t) = \int (t + 3)dt = \frac{t^2}{2} + 3t + k$

Em $x(0) = 2 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x(t) = \frac{t^2}{2} + 3t + 2$

(b) $x(2) = \frac{4}{2} + 6 + 2 = 10 \ m$

(c) $a(t) = \frac{dv}{dt} = 1m/s^2$

13. Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2t - 3$, $t \geq 0$. Sabe-se que no instante $t = 0$ a partícula encontra-se na posição $x = 5$. Determine o instante em que a partícula estará mais próxima da origem.

$x(t) = \int (2t - 3)dt = t^2 - 3t + k$
$x(0) = 5 \Rightarrow k = 5$

Logo, $x(t) = t^2 - 3t + 5$

A partícula estará mais próxima da origem no x_{min}. *Como a função é uma parábola com um ponto de mínimo basta encontrar* t, *tal que* $\frac{dx}{dt} = 0$.

$\frac{dx}{dt} = 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1.5s$

14. Um produtor descobre que o custo marginal é de $3q^2 - 60q + 400 \quad u.m.$ por unidade, quando q unidades do produto são produzidas. O custo total de produzir as primeiras 2 unidades é de $R\$900,00$. Qual é o custo total de produzir as primeiras 5 unidades?

    O custo marginal é a derivada da funçao custo total $C(q)$. Assim temos $C'(q) = 3q^2 - 60q + 400$ e portanto $C(q)$ deve ser a antiderivada (integral) dada por:

    $C(q) = \int C'(q)dq = \int(3q^2 - 60q + 400)dq = q^3 - 30q^2 + 400q + k$

    Sabendo que para 2 unidades o custo é $R\$900,00$ ou seja, $C(2) = 900$, podemos encontrar o valor de k.

    $900 = (2)^3 - 30(2)^2 + 400(2) + k \Rightarrow k = 212$

    Assim, $C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 212$

    Agora podemos descobrir o custo de produçao para as primeiras 5 unidades:

    $C(5) = (5)^3 - 30(5)^2 + 400(5) + 212 \Rightarrow C(5) = 1587.00 \quad u.m.$

15. Estima-se que daqui a x meses a populaçao de uma certa cidade estará variando a uma taxa de $2 + 6\sqrt{x}$ pessoas por mês. A população atual é de 5000. Qual será a população daqui a 9 meses?

    Sendo $P(x)$ a população da cidade daqui a x meses. Então a taxa de variação da população em relação ao tempo é a derivada $P'(x) = 2 + 6\sqrt{x}$.

    Logo, a função população $P(x)$, é a integral de $P'(x)$.

    $P(x) = \int(2 + 6\sqrt{x})dx = 2x + 4x^{\frac{3}{2}} + k$

    Como precisamos determinar k, vamos considerar o fato de que em $x = 0$ a população é de 5000 pessoas.

    Logo, $5000 = 2(0) + 4(0)^{\frac{3}{2}} + k \Rightarrow k = 5000.$

    Sendo assim, em 9 meses teremos uma populaçao de $P(9) = 2(9) + 4(27) + 5000 = 5126$ pessoas.

16. Um varejista recebe uma encomenda de 10000 kg de arroz, que serão consumidos em um período de 5 meses a uma taxa constante de 2000 kg por mês. Se os custos de armazenamento são de 1 centavo por quilograma por mês, quanto o varejista pagará pelos custos de armazenamento nos próximos 5 meses?

    Seja $S(t)$ o custo de armazenamento total (em unidades monetárias (u.m)) durante t meses. Como o arroz é consumido a uma taxa constante de 2000 quilogramas por mês, a *quantidade de arroz no estoque após t meses é de* $10000 - 2000t$. *Considerando os custos de armazenamento de* 1 *centavo por quilograma por mês, a taxa de variação do custo de armazenamento em relação ao tempo é:*

$\frac{dS}{dt} = (custo \quad por \quad kg)(número \quad de \quad kg) = 0.01(10000 - 2000t)$

Logo,

$S(t) = \int(100 - 20t)dt = 100t - 10t^2 + k$

Precisamos descobrir a variável k. Como no instante em que o embarque chega $(t = 0)$ *o custo não existe, então*

$0 = 100(0) - 10(0)^2 + k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow S(t) = 100t - 10t^2$

Após 5 *meses de armazenamento o custo será* $S(5) = 250,00$ *u.m.*

3.8 Integral definida

1. Uma grande cidade é atingida por uma epidemia de gripe e as pessoas ficam doentes a uma taxa de $270t - 9t^2$ pessoas por dia. Aproximadamente quantas pessoas estarão doentes entre o primeiro e 20º dia inclusive?

   Seja N o número de pessoas doentes no período.

   $N = \int_1^{20}(270t - 9t^2)dt = [135t^2 - 3t^3]_1^{20} = 29868$ *pessoas*

2. O número de ingressos vendidos para um evento esportivo em um certo dia é dado por $N(x) = -3x + 150$, no qual x é o número de dias decorridos desde que as vendas começaram. Quantos ingressos são vendidos do segundo até o 40º dia?

   Seja y o número de ingressos vendidos no período.

   $y = \int_2^{40}(-3x + 150)dx = [\frac{-3}{2}x^2 + 150x]_2^{40} = 3306$ *ingressos*

3. Os economistas usam uma distribuição acumulada chamada curva de Lorenz para descrever a distribuição de renda entre as famílias em um dado país. Tipicamente uma curva de Lorenz é definida no intervalo $[0, 1]$, tem extremidades $(0, 0)$ e $(1, 1)$ e é contínua, crescente e côncava para cima. Os pontos sobre essa curva são determinados classificando-se todas a famílias pela renda e então calculando a porcentagem de famílias cuja renda é menor ou igual a uma porcentagem dada da renda total do país. Por exemplo, o ponto $(a/100, b/100)$ está sobre a curva de Lorenz se a% de famílias recebe menos do que ou igual a b% da renda total. A igualdade absoluta da distribição de renda ocorreria se a parte mais baixa a% das famílias recebesse a% da renda e, nesse caso a curva de Lorenz seria a reta $y = x$. A área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$ mede quanto a distribuição de renda difere da igualdade absoluta. O coeficiente de desigualdade é a razão da área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$ para a área sob $y = x$.

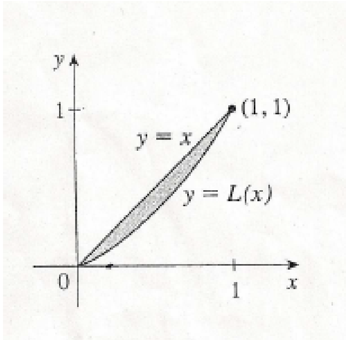

Figura 32: Área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$

(a) Mostre que o coeficiente de desigualdade é o dobro da área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$, isto é, mostre que o coeficiente de desigualdade Cd é definido por $Cd = 2\int_0^1 (x - L(x))dx$
(b) A distribuição de renda para um certo país está representada pela curva de Lorenz definida pela equação $L(x) = \frac{5}{12}x^2 + \frac{7}{12}x$. Qual é a porcentagem da renda total recebida pelas 50% das famílias que recebem menos? Encontre o coeficiente de desigualdade.

(a) A área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$ *é dada por* $\int_0^1 (x - L(x))dx$.

A área abaixo da curva é dada por $\int_0^1 x dx$. *Assim, o coeficiente de desigualdade* Cd *será:*

$Cd = \frac{\int_0^1 (x-L(x))dx}{\int_0^1 x dx}$

$Cd = \frac{\int_0^1 (x-L(x))dx}{\frac{1}{2}}$

$Cd = 2\int_0^1 (x - L(x))dx$

(b) Usando que $L(x) = \frac{5}{12}x^2 + \frac{7}{12}x$ *e que* $L(50\%) = L(0.5)$, *temos*

$L(0.5) = \frac{19}{48} \cong 0.396$

Então o coeficiente de desigualdade Cd *será*

$Cd = 2\int_0^1 (x - L(x))dx = 2\int_0^1 (x - \frac{5}{12}x^2 - \frac{7}{12}x)dx = \frac{5}{36}$

4. Suponha que daqui a x anos, um plano de investimentos estará gerando lucro a uma taxa de $R_1(x) = 50 + x^2$ u.m.(unidades monetárias) por ano, enquanto um segundo plano estará gerando lucro a uma taxa de $R_2(x) = 200 + 5x$ u.m. (unidades monetárias) por ano.
(a) Por quantos anos o segundo plano será mais lucrativo que o primeiro?
(b) Calcule o seu lucro líquido excedente se você investir no segundo plano em vez de no primeiro pelo período de tempo do item (a).

(c) Interprete o lucro excedente no item (b) como uma área entre as curvas.

Para ajudar a visualização da situação, começamos esboçando as curvas $y = R_1(x)$ e $y = R_2(x)$ como mostra a figura:

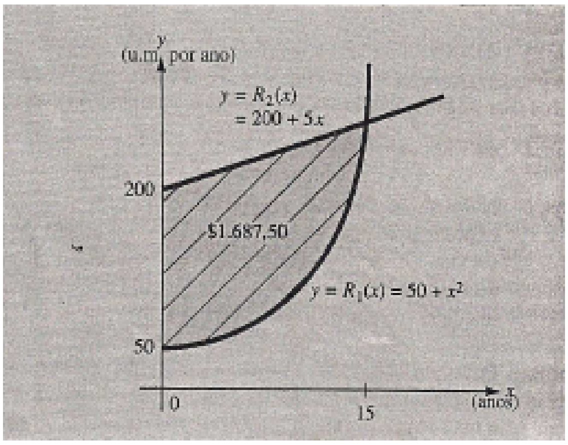

Figura 33: Curvas

(a) Como o gráfico indica a taxa $R_2(x)$ na qual o segundo plano gera lucro é inicialmente maior que a taxa $R_1(x)$ na qual o primeiro plano gera lucro, o segundo plano será mais lucrativo até que $R_1(x) = R_2(x)$, isto é, até que

$50 + x^2 = 200 + 5x$
$x^2 - 5x - 150 = 0$
$(x - 15)(x + 10) = 0$
$x = 15$ *anos (desprezando* $x = -10$*)*

(b) Para $0 \leq x \leq 15$, a taxa na qual o lucro gerado no segundo plano excede o primeiro é de $R_2(x) - R_1(x)$ u.m. por ano. Portanto, o lucro líquido gerado durante o período de 15 anos pelo segundo plano é dada pela integral definida

$\int_0^{15}(R_2(x) - R_1(x))dx = \int_0^{15}(150 + 5x - x^2)dx = 1678.50$

(c) Em termos geométricos, a integral definida que fornece o lucro líquido excedente do item (b) é a área da região sombreada da figura, entre as curvas $y = R_2(x)$ e $y = R_1(x)$ de $x = 0$ até $x = 15$.

5. A respiração é cíclica um ciclo completo que começa pela inalação e acaba pela exalação, durante cerca de 5s. A taxa máxima do fluxo de ar para dentro dos pulmões é e cerca de 0.5 L/s. Isso explica, em parte, por que a função $f(t) = \frac{1}{2}sen(\frac{2\pi}{5})$ tem sido frequentemente usada para modelar a taxa de fluxo de ar para dentro dos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante t.

O volume de ar inalado dentro dos pulmões num tempo t qualquer é:

$V(t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t \frac{1}{2}sen(\frac{2x\pi}{5})dx$

Chamando $u = \frac{2x\pi}{5}$ *temos* $du = \frac{2\pi}{5}dx$, *temos:*

$V(t) = \frac{5}{4\pi} \int_0^t senudu = \frac{5}{4\pi}[-cosu]_0^t$

$V(t) = \frac{-5}{4\pi}cos(\frac{2t\pi}{5}) + 1$ *litros*

6. O método da diluição do contraste é usado para medir a capacidade cardíaca com 6 mg de contraste. As concentrações de contraste, em mg/L, são modeladas por $C(t) = 20t\epsilon^{-0.6t}$, $0 \leq t \leq 10$, na qual t é medido em segundos. Calcule a capacidade cardíaca.

   A capacidade cardíaca é definida como $F = \frac{A}{I}$ *sendo* A *o contraste e* $I = \int_0^t C(t)dt$.

   Calculando a integral:

   $I = \int_0^t C(t)dt = 20 \int_0^{10} t\epsilon^{-0.6t}dt$

   Chamando $u = t$, $du = dt$, $dv = \epsilon^{-0.6t}$ *e* $v = \frac{-\epsilon^{-0.6t}}{0.6}$, *temos*

   $I = 20[\frac{-t}{0.6}\epsilon^{-0.6t} - \frac{1}{0.36}^{-0.6t}]_0^{10} \cong 54.46$

   Logo, a capacidade cardíaca é $F = \frac{A}{I} = \frac{6}{54.46} \cong 0.11$ *L/s ou* 6.6 *L/min.*

7. A Alabama Instruments Company preparou uma linha de montagem para fabricar uma nova calculadora. A taxa de produção dessas calculadoras após semanas é $\frac{dx}{dy} = 5000(1 - \frac{100}{(t+10)^2})$ calculadoras por semana. (Observe que a produção tende a 5000 por semana à medida que passa o tempo, mas a produção inicial é baixa, pois os trabalhadores não estão familiarizados com as novas técnicas.) Ache o número de calculadoras produzidas do começo da terceira semana até o fim da quarta semana.

   O número de calculadoras pode ser encontrado resolvendo:

   $x(4) - x(2) = \int_2^4 5000(1 - \frac{100}{(t+10)^2})dt$
   $x(4) - x(2) = 5000[t + 100(t + 10)^{-1}]_2^4$
   $x(4) - x(2) = 4048$ *calculadoras*

8. Uma empresa possui uma máquina que se deprecia uma taxa contínua $f = f(t)$, onde t é o tempo medido em meses desde seu último recondicionamento. Como cada vez em que a máquina é recondicionada incorre-se em um custo fixo A, a empresa deseja determinar o tempo ótimo T (em meses) entre os recondicionamentos.
   (a) Explique porque $\int_0^1 f(s)ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo T desde o último recondicionamento.
   (b) Seja $C = C(t)$ dado por $C(t) = \frac{1}{t}[A + \int_0^1 f(s)ds]$ o que representa C e por que a empresa quer minimizar C?

   (a) Seja $F(t) = \int_0^t f(s)ds$*.Como* $F'(t) = f(t)$*=taxa de depreciação. Assim,* $F(t)$ *representa a perda do valor no intervalo* $[0, t]$.

(b) $C(t) = \frac{1}{t}(A + \int_0^1 f(s)ds) = A + \frac{F(t)}{t}$*, que representa a média de recondicionamentos por unidade de tempo durante o intervalo* $[0, t]$*, assumindo que só há uma revisão naquele período de tempo. A empresa deseja minimizar a média de recondicionamentos.*

9. O peso de um astronauta (ou, mais precisamente, seu peso terrestre) é a força exercida sobre ele pela gravidade da Terra. À medida que o astronauta se move para cima no espaço, a atração gravitacional da Terra decresce e, portanto, o mesmo acontece com raio de 4000 milhas (cerca de 6400 km), então, um astronauta que pesa 150 libras (cerca de 68 kg) na Terra terá um peso de

$$w(x) = \frac{2.400.000.000}{x^2} lb, \quad x \geq 4000$$

A uma distância de x milhas do centro da Terra. Use essa fórmula para determinar o trabalho em pés-libras necessário para elevar o astronauta a um ponto que está a 800 milhas acima da superfície da Terra.

Como a Terra tem um raio de 4000 *milhas, o astronauta será elevado para um ponto a* 4800 *milhas do centro da Terra. Como* 1 *milha = a* 5280 *pés, o trabalho necessário para elevá-lo é:*

$W = \int_{4000}^{4800} \frac{2.400.000.000}{x^2} dx$
$W = [\frac{-2.400.000.000}{x}]_{4000}^{4800}$
$W = -500000 + 600000$
$W = 100000$ *milhas.lb*
$W = (100000)$*milhas.lb x* 5280 *pés/milhas*
$W = 5.28 * 10^8$ *pés.lb* $\Leftrightarrow$ *(7.16*10*^{8} *Joules)*

10. Água está sendo bombeada de um tanque a uma taxa de $5 - 5\epsilon^{-0.12t}$ litros/minuto, onde t está em minutos a partir do instante em que a bomba foi ligada. Se o tanque continha 1000 litros de água quando a bomba foi ligada, quanta água resta no tanque uma hora depois?

Seja $V(t)$ *o volume de água que é bombeada para fora do tanque. Seja* $V(0) = 1000$ *o volume inicial, ou seja, o volume total do tanque antes de iniciar o bombeamento. Vamos calcular o volume de água que saiu do tanque em* 1 *hora, ou seja,* 60 *minutos:*

$V(60) = \int_0^{60} (5 - 5\epsilon^{-0.12t})dt$
$V(60) = [5t + \frac{5}{0.12}\epsilon^{-012t}]_0^{60}$
$V(60) \cong (300 + 0.031) - (0 + 41.67)$
$V(60) \cong 258.36$ *litros*

Asim, restam aproximadamente 741.63 *litros de água no tanque, já que* $V(0) - V(60) = 1000 - 258.36 = 741.63$ *litros*

11. Encontre os valores presente e futuro de um fluxo de renda constante de $R\$1000,00$ durante um período de 20 anos, supondo que a taxa de juros de 10% é composta continuamente.

O valor presente $P(t)$ *é encontrado utilizando a fórmula* $P(t) = \int_a^b A(t)\epsilon^{it}dt$*,onde* $A(t)$ *é o valor inicial e* i *a taxa de juros.*

O valor presente será:

$P(t) = \int_0^{20} 1000\epsilon^{-0.1t}dt$
$P(t) = 1000[\frac{-\epsilon^{-0.1t}}{0.1}]_0^{20}$
$P(t) = 1000(1-\epsilon^{-2}) \approx 8646.65$ *dólares*

Usando o valor presente de R\$8646.65, segue que:

Valor futuro$=8646.65\epsilon^{0.1(20)} = 63890.58$ *dólares.*

12. Uma colmeia com uma população inicial de 100 abelhas cresce a uma taxa de $n(t)$ abelhas por semana. O que $100 + \int_0^{15} n'(t)dt$ representa?

    $\int_0^{15} n'tdt = n(15) - n(0).$

    Como $n(0)$ *é a população inicial de abelhas, então* $n(0) = 100$.

    Assim, $P(t) = \int_0^{15} n'tdt = n(15) - 100$ *representa o aumento da população de abelhas nas 15 primeiras semanas. Então,*

    $100 + \int_0^{15} n'tdt = n(15)$ *representa a população total de abelhas depois de* 15 *semanas.*

13. Uma população de bactérias tem inicialmente 400 bactérias e cresce a uma taxa de $r(t) = (450268)\epsilon^{1.1256t}$ bactérias por hora. Quantas bactérias existirão após 3 horas?

    A fórmula geral de $r(t)$ *é* $r(t) = a\epsilon^{bt}$. *Neste caso,* $a = 450268$ *e* $b = 1.1256$ *e* $n(t)$ *representa a população de bactérias após t horas. Como* $r(t) = n'(t)$, *então:*

    $n(t) = \int_0^3 r(t)dt = n(3) - n(0)$ *o que expressa a população após* 3 *horas. Sabendo que a população inicial é de* 400, *isto é,* $n(0) = 400$, *temos:*

    $n(3) = 400 + \int_0^3 (450268)\epsilon^{1.1256t}dt \cong 11311877$ *bactérias.*

14. Um verão úmido está causando uma explosão da população de mosquitos em uma cidade turística. O número de mosquitos aumenta a uma taxa estimada de $2200 + 10\epsilon^{0,8t}$ por semana (com t medido em semanas). Em quanto aumenta a população de mosquitos entre a quinta e a nona semana do verão?

    Seja $n(t)$ *o número de mosquitos na semana* t. *Assim, como queremos encontrar o aumento da população entre* $t = 5$ *e* $t = 9$, *temos:*

    $n(9) - n(5) = \int_5^9 (2200 + 10\epsilon^{0.8t})dt$
    $n(9) - n(5) = [2200t + \frac{10}{0.8}\epsilon^{0.8t}]_5^9$
    $n(9) - n(5) \cong 24860$ *mosquitos*

15. A figura abaixo mostra o sistema cardiovascular humano. O sangue retorna do corpo pelas veias, entra no átrio direito do coração e é bombeado para os pulmões pelas artérias pulmonares para a oxigenação. Então volta para o átrio esquerdo por meio das veias

pulmonares e daí circula para o resto do corpo pela aorta. A capacidade cardíaca do coração é o volume de sangue bombeado pelo coração por unidade de tempo, isso é, a taxa de fluxo na aorta.

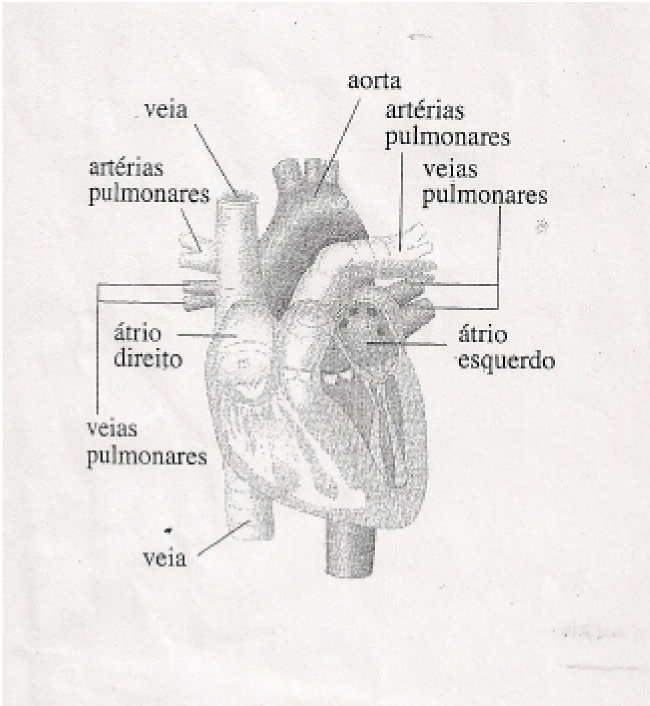

Figura 34: Sistema Cardiovascular

A capacidade cardíaca pode ser definida pela integral

$$F = \frac{A}{\int_0^T C(t)dt}$$

onde A é a quantidade total de contraste e $C(t)$ a concentração deste. Deduza a fórmula da capacidade cardíaca.

O método da diluição do contraste é usado para medir a capacidade cardíaca. O contraste (corante) é injetado no átrio direito e escoa pelo coração para a aorta. Uma sonda inserida na aorta mede a concentração do contraste saída do coração em intervalos regulares de tempo durante um intervalo $[0, T]$, *até que o contraste tenha terminado. Seja* $C(t)$ *a concentração do contraste no instante* T. *Se dividirmos* $[0, T]$ *em subintervalos de igual* Δt, *então a quantidade de contraste que circula pelo ponto de medição durante o subintervalo de* $t = t_{i-1}$ *a* $t = t_i$ *é aproximadamente*

(concentração)(volume)=$C(t_i)(F\Delta t)$. *Em que* F *é a vazão (taxa de escoamento) que estamos tentando determinar.*

Então, a quantidade total de contraste é aproximadamente

$\sum_{i=1}^{n} C(t_i)F\Delta t = F\sum_{i=1}^{n} C(t_i)\Delta t.$

Fazendo $n \to \infty$, calculamos que a quantidade total de contraste é:

$A = F\int_0^T C(t)dt.$

Assim, a capacidade cardíaca é dada por $F = \frac{A}{\int_0^T C(t)dt}$

3.9 Áreas e volumes

1. Calcule a área do conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e pelo gráfico de $f(x) = x^2$.

   Seja A a área:

   $A = \int_0^1 x^2dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}u.a$

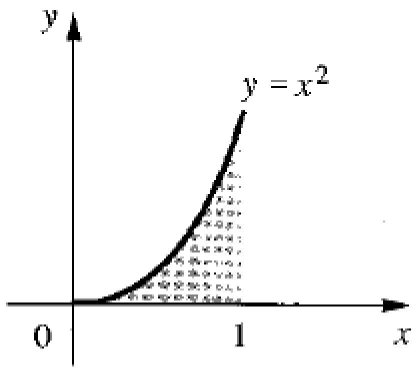

Figura 35: Área

2. Calcule a área do conjunto $A = \{(x, y) \in \Re^2 | 1 \leq x \leq 2 \quad e \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}\}$.

   A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$.

   $A = \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = [-\frac{1}{x}]_1^2 = \frac{1}{2}$

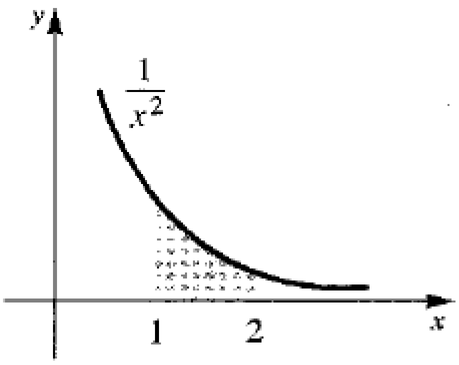

Figura 36: Área

3. Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$.

   $A = -\int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

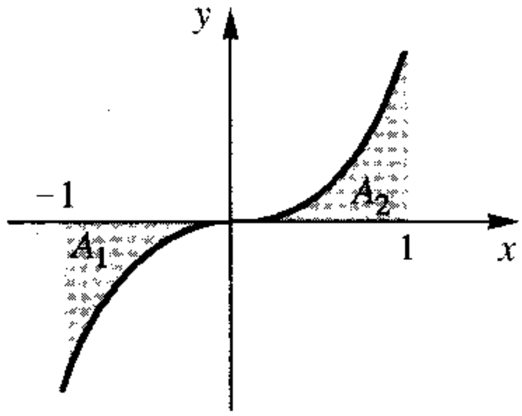

Figura 37: Áreas

4. Calcule a área da região limitada pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 2$ e pelo gráfico de $y = x^2$.

   $A = \int_0^1 (2 - x^2)dx = [2x - \frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{5}{3}$

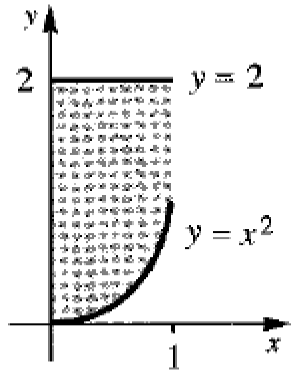

Figura 38: Área

5. Calcule a área do conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.

   $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = [\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$ *u.a.*

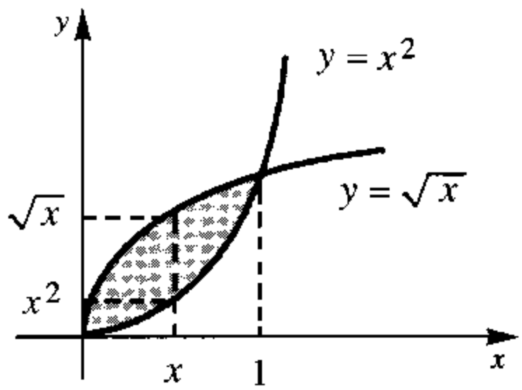

Figura 39: Área

6. Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 2$.

   As curvas $y = x$ e $y = x^2$ interceptam-se nos pontos de abscissas 0 e 1. Então,

   $A = \int_0^1 (x - x^2)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx = [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_0^1 + [\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}]_1^2 = 1$ *u.a.*

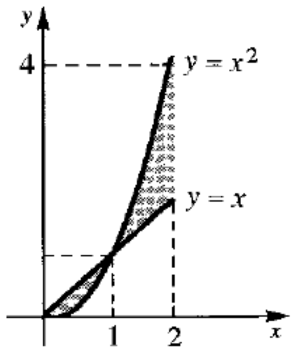

Figura 40: Área

7. Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2 - t$.
(a) Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$. Discuta o resultado encontrado.
(b) Calcule o espaço percorrido entre os instantes 1 e 3.

(a) $x(3) - x(1) = \int_1^3 (2-t)dt = [2t - \frac{t^2}{2}]_1^3 = 0$

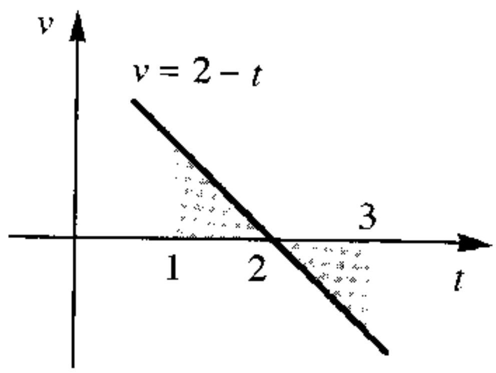

Figura 41: Área

(b) O espaço percorrido entre os instantes $t = 1$ *e* $t = 3$ *é*

$\int_1^3 |2-t|dt = \int_1^2 (2-t)dt - \int_2^3 (2-t)dt = 1$

8. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 1.

Se fizermos a rotação em torno do eixo x*, obteremos o sólido mostrado na figura a baixo. Quando fatiamos pelo ponto* x*, obtemos um disco com raio* $\sqrt{x}$*. A área dessa secção transversal é*

$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$$

O sólido encontra-se entre $x = 0$ *e* $x = 1$*, assim o seu volume é*

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi x dx = [\pi \frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{\pi}{2} u.v.$$

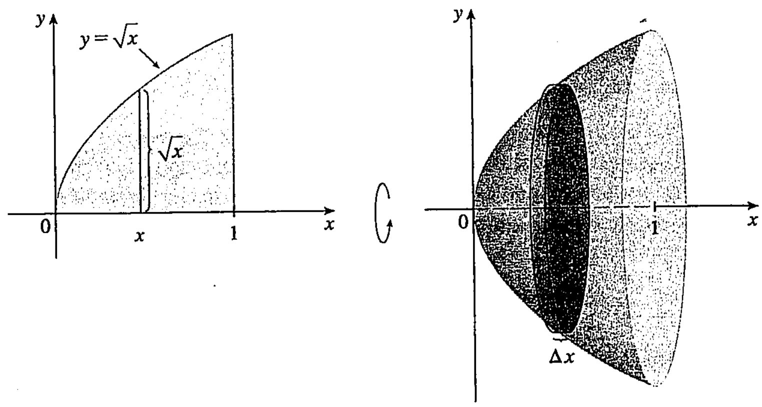

Figura 42: Área e Volume

9. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada por $y = x^3$, $y = 8$, e $x = 0$ em torno do eixo y.

   A região pode ser observada na figura. Como a região é girada em torno do eixo y, faz sentido fatiar o sólido perpendicularmente ao eixo y e, portanto, integrar em relação a y. Se fatiarmos a uma altura y, obteremos um disco circular com raio x, onde $x = \sqrt[3]{y}$. Então, a área da secção transversal em y é

$$A(y) = \pi x^2 = \pi(\sqrt[3]{y})^2 = \pi y^{\frac{2}{3}}$$

   Como o sólido encontra-se entre $y = 0$ e $y = 8$, seu volume é

$$V = \int_0^8 A(y)dy = \int_0^8 \pi y^{\frac{2}{3}} dy = \pi[\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}]_0^8 = \frac{96\pi}{5} u.v.$$

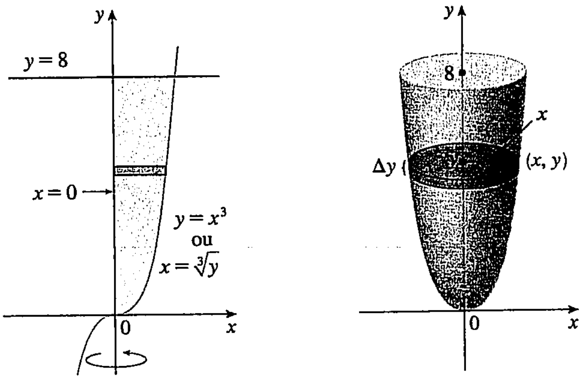

Figura 43: Área e Volume

10. A região R, delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$, é girada ao redor do eixo x. Encontre o volume do sólido resultante.

As curvas $y = x$ *e* $y = x^2$ *se interceptam nos pontos* $(0,0)$ *e* $(1,1)$. *A região entre esses pontos, o sólido de rotação e a secção transversal perpendicular ao eixo x são mostrados na figura. A secção transversal no plano* P_x *tem o formato de um anel com raio interno* x^2 *e raio externo* x*, de modo que calculamos a área da secção transversal subtraindo a área do círculo interno da área do círculo externo:*

$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$

Portanto, temos

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)dx = \pi[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}]_0^1 = \frac{2\pi}{15} u.v.$$

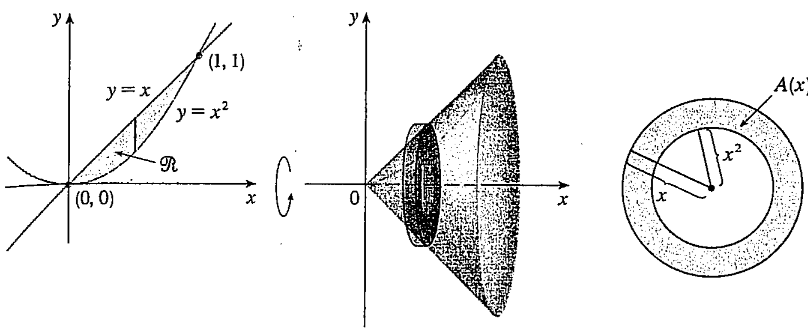

Figura 44: Área e Volume

11. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região R do exercício (10) em torno da reta $x = -1$.

A figura mostra uma secção transversal horizontal. É uma arruela com raio interno $1 + y$ e raio externo $1 + \sqrt{y}$. Assim, a área de secção transversal é

$$A(y) = \pi(R_{externo})^2 - \pi(R_{interno})^2 = \pi(1 + \sqrt(y))^2 - \pi(1 + y)^2$$

O volume é

$$V = \int_0^1 A(y)dy = \pi \int_0^1 [(1 + \sqrt{y})^2 - (1 + y)^2]dy = \frac{\pi}{2}$$

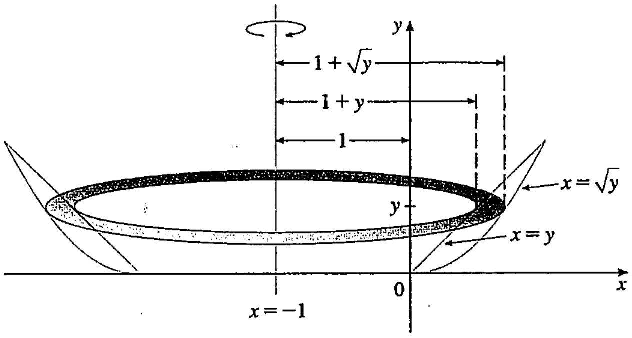

Figura 45: Secção transversal horizontal

3.10 Integrais impróprias

1. Em um experimento psicológico, descobre-se que a proporção de participantes que exigem mais do que t minutos para terminar determinada tarefa é dada por $\int_{t}{}_{+\infty} 0.07\epsilon^{-0.07u}du$.
(a) Encontre a proporção de participantes que precisa de mais de 5 minutos para terminar a tarefa.

$P(u) = \int_t^{+\infty} 0.07\epsilon^{-0.07u}du$
$P(u) = \lim_{b\to+\infty} \int_t^b 0.07\epsilon^{-0.07u}du$
$P(u) = \lim_{b\to+\infty} [\epsilon^{-0.07u}]_5^b$
$P(u) = \lim_{b\to+\infty} \epsilon^{-0.07b} + \epsilon^{-0.07(5)}$

$P(u) \cong 0.70 \Rightarrow 70\%$ *dos pacientes precisam de mais de* 5 *minutos para realizar a tarefa.*

2. Uma substância radioativa decai exponencialmente: a massa no tempo t é $m(t) = m(0)\epsilon^{kt}$, onde $m(0)$ é a massa inicial e k, uma constante negativa. A vida média M de um átomo na substância é:

$$M = k\int_0^{+\infty} t\epsilon^{kt}dt$$

Para o isótopo radiativo de carbono, C^{14}, usado para a datação, o valor de k é $-0,000121$.Calcule a vida média de um átomo de C^{14}.

Vamos calcular a integral $I = \int_0^{+\infty} t\epsilon^{kt}dt$. *Usando o método de integração por partes, chamando* $u = t$ *e* $dv = \epsilon^{kt}dt$, *temos:*

$I = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b t\epsilon^{kt}dt$
$I = \lim_{b\to+\infty} [\frac{t\epsilon^{kt}}{k}]_0^b - \frac{1}{k}\int_0^b \epsilon^{kt}dt$
$I = \lim_{b\to+\infty} [\frac{t\epsilon^{kt}}{k} - \frac{1}{k^2}\epsilon^{kt}]_0^b$
$I = \lim_{b\to+\infty} (\frac{b}{k}\epsilon^{kb} - \frac{1}{k^2}\epsilon^{kb} - \frac{1}{k^2})$
$I = \frac{1}{k^2}$ *usando L'Hospital e considerando* $k < 0$.

Voltando a integral $M = kI$, *temos que*

$M = k\frac{-1}{k^2} = \frac{-1}{k} \cong 8264.5$ *anos*

3. Um paciente de um hospital recebe 5 unidades intravenosas de uma certa droga por hora. A droga é eliminada exponencialmente, de modo que que a fração que permanece no corpo do paciente por t horas é $f(t) = \epsilon^{\frac{-t}{10}}$. Se o tratamento continua indefinidamente, aproximadamente quantas unidades da droga estarão no corpo do paciente a longo prazo?

$N(t)$ é o número de unidades da droga que permanece no corpo do paciente e $r(t) = 5$ é a taxa da droga injetada no paciente por hora. Temos então:

$N(t) = \int_0^{+\infty} 5\epsilon^{\frac{-t}{10}}dt$
$N(t) = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b 5\epsilon^{\frac{-t}{10}}dt$
$N(t) = \lim_{b\to+\infty} -50[\epsilon^{\frac{-t}{10}}]_0^b$
$N(t) = \lim_{b\to+\infty} -50(\epsilon^{\frac{-b}{10}} - 1)$
$N(t) = 50$ *unidades da droga.*

4. Estima-se que, daqui a t anos, uma determinada usina nuclear estará produzindo rejeito radioativo a uma taxa de $f(t) = 400t$ libras por ano. O rejeito decai exponencialmente a uma taxa de 2% ao ano. O que acontecerá com o estoque radioativo da usina a longo prazo?

Para encontrar a quantidade de rejeito radioativo presente após N anos, divida o intervalo de N anos em n subintervalos iguais de comprimento Δt e faça t_j denotar o início do j-ésimo subintervalo. Então, o montante de resíduo produzido durante o j-ésimo subintervalo $\cong 400t_j\Delta t$.

Como o rejeito decai exponencialmente a uma taxa de 2% ao ano, e como há $(N - t_j)$ *anos entre os instantes* $t = t_j$ *e* $t = N$, *temos que o montante de resíduos produzidos durante o j-ésimo subintervalo ainda presente em* $t = N$ *é* $\cong 400t_j\epsilon^{-0.02(N-t)}\Delta t$.

Assim, o montante de resíduos presente em N anos será:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} 400t_j\epsilon^{-0.02(N-t_j)}\Delta t = \int_0^N 400t\epsilon^{-0.02(N-t)}dt$$

O montante de rejeito radioativo presente a longo prazo é o limite desta expressão quando N tende ao infinito. Isto é:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} 400t_j\epsilon^{-0.02(N-t_j)}\Delta t = \lim_{N\to\infty} 400\epsilon^{-0.02N}\int_0^N t\epsilon^{0.02t}dt$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} 400t_j\epsilon^{-0.02(N-t_j)}\Delta t = \lim_{N\to\infty} 400\epsilon^{-0.02N}[50t\epsilon^{0.02t} - 2500\epsilon^{0.02t}]_0^N$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} 400t_j\epsilon^{-0.02(N-t_j)}\Delta t = \lim_{N\to\infty} 400\epsilon^{-0.02N}(50N - 2500 + 2500\epsilon^{-0.02N}) = \infty$$

Isto é, a longo prazo a acumulação de rejeito radioativo da usina crescerá indefinidamente.

5. Uma pessoa deseja fazer uma doação para uma faculdade particular e fará uma retirada de $R\$7000,00$ por ano, perpetuamente, de forma a sustentar a operação do seu centro de computação. Supondo que a taxa de juros anual permanecerá fixa em 10% capitalizados continuamente, quanto deve a pessoa doar a faculdade? Isto é o valor presente da doação?

   Montante gerado durante o j-ésimo subintervalo $\cong 7000\Delta t$. *Valor presente do montante gerado durante j-ésimo subintervalo* $7000\epsilon^{-0.1t_j}\Delta t$.

   Assim, o valor presente da doação no n-ésimo ano será dado por

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} 7000\epsilon^{-0.1t_j}\Delta t = \int_0^N 7000\epsilon^{-0.1t_j}dt$$

   Para encontrar o valor presente da doação total, tome o limite desta integral quando N tende ao infinito. Isto é,

$$V(t) = \lim_{N\to\infty}\int_0^N 7000\epsilon^{-0.1t}dt$$
$$V(t) = \lim_{N\to\infty}[-70000\epsilon^{-0.1t}]_0^N$$
$$V(t) = \lim_{N\to\infty}(-70000\epsilon^{-0.1N} - 1)$$
$$V(t) = 70000 \textit{ dólares.}$$

6. Calcular o trabalho necessário para lançar um satélite de 1000 kg para fora do campo gravitacional. Sabendo que a Lei de Newton da Gravitação Universal afirma que dois corpos com massas m_1 e m_2 atraem um ao outro com uma força de $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, m_1 é a massa da Terra ($m_1 = 5,98 * 10^{24}$kg), m_2 é a massa do satélite ($m_2 = 1000$kg), R é o raio da Terra ($R = 6,37 * 10^6$ m) e G a constante gravitacional ($G = 6,67 * 10^{-11}\ N.m^2/kg$).

   O trabalho é dado por $W = \int_a^b F(t)dt$.

   Neste caso, podemos definir o trabalho W por:

   $W = \int_R^\infty G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr$
   $W = \lim_{t\to\infty} \int_R^t G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr$
   $W = \lim_{t\to\infty} Gm_1m_2(\frac{-1}{t} + \frac{1}{R})$
   $W = \frac{Gm_1m_2}{R}$

   Substituindo os dados do problema temos:

   $W \cong 6.26 * 10^{10}\ J$

7. Suponha que o tempo médio de espera para um cliente ser atendido pelo funcionário da firma para a qual ele está ligando seja 5 minutos.

   (a) Calcule a probabilidade de a ligação ser atendida no primeiro minuto. Sabendo que a densidade de probabilidade é:

$$\text{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se} \quad 0 > x > 1 \\ 0.2\epsilon^{\frac{-t}{5}} & \text{, se} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

   Temos que a média da distribuição exponencial é $\mu = 5$ min, e assim, sabemos que a função densidade de probabilidade é:

   Então a probabilidadae de a ligação ser atendida no primeiro minuto é:

   $P(0 \le T \le 1) = \int_0^1 f(t)dt$

   $P(0 \le T \le 1) = \int_0^1 0.2\epsilon^{\frac{-t}{5}}dt = 0.2(-5)[\epsilon^{\frac{-t}{5}}]_0^1$

   $P(0 \le T \le 1) = 1 - \epsilon^{\frac{-t}{5}} \cong 0.1813$

   Assim, cerca de 18% *das ligações dos clientes são atendidas durante os primeiros minutos.*

   (b) Calcule a probabilidade do consumidor esperar mais que cinco minutos para ser atendido.

   A probabilidade de o consumidor esperar mais de cinco minutos é:

$P(T > 5) = \int_5^{\infty} f(t)dt = \int_5^{\infty} 0.2\epsilon^{\frac{-t}{5}} dt$

$$P(T > 5) = \lim_{x \to \infty} \int_5^x 0.2\epsilon^{\frac{-t}{5}} dt$$

$$P(T > 5) = \lim_{x \to \infty} (\epsilon^{-1} - \epsilon^{\frac{-x}{5}})$$

$P(T > 5) = \frac{1}{\epsilon}$

$P(T > 5) \cong 0.368$

Cerca de 37% *dos consumidores esperam mais que cinco minutos antes de terem sua ligação atendida.*

3.11 Teorema do valor médio para integrais

Preâmbulo

O Teorema do Valor Médio para Integrais estabelece que o valor médio de uma função que varia continuamente é representado por:

Valor médio de f de a até $b = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

1. Suponha que $C(t)$ representa o custo diário para refrigerar sua casa, medido em reais por dia, onde t é o tempo medido em dias e $t = 0$ corresponde a 1º de janeiro de 2001. Interprete $\int_0^{90} C(t)dt$ e $\frac{1}{90-0} \int_0^{90} C(t)dt$.

   As unidades para a integral $\int_0^{90} C(t)dt$ *são (reais/dia) x (dias) = reais. A integral representa o custo total, em reais, para refrigerar a sua casa, durante os* 90 *primeiros dias de* 2001*, isto é, durante os meses de janeiro, fevereiro e março. A segunda expressão é medida em (1/dias)(reais), ou reais por dia, as mesmas unidades de* $C(t)$*. Ela representa o custo médio por dia para refrigerar sua casa durante os* 90 *primeiros dias de* 2001*.*

2. Como atacadista, a Tracey Burr Distribuidores (TBD) recebe um carregamento de 1200 caixas de barras de chocolate a cada 30 dias. A TBD vende o chocolate para varejistas a uma taxa fixa, e t dias depois que um carregamento chega, seu estoque de caixas disponíveis é $I(t) = 1200 - 40t$, $0 \leq t \leq 30$. Qual o estoque diário médio da TBD para 30 dias? Qual será o custo diário de estocagem se o custo de estocagem por caixa é de $R\$0,03$ por dia?

   O estoque diário médio é encontrado resolvendo a integral:

   $E(t) = \frac{1}{T} \int_0^t I(t)dt$
   $E(t) = \frac{1}{30} \int_0^{30} (1200 - 40t)dt$
   $E(t) = \frac{1}{30} [1200t - 20t^2]_0^{30}$
   $E(t) = \frac{1}{30} (36000 - 18000) = 600$ *barras de chocolate*

O custo diário é dado por:

$C(t) = E(t)0.03$
$C(t) = (600)0.03$
$C(t) = 18$ *dólares por dia*

3. Uma engenharia de tráfego monitora o trânsito durante uma hora do horário de pico da tarde. A partir de seus dados, ela estima que, entre as 4 horas e 30 minutos e às 5 horas e 30 minutos a tarde, a taxa $R(t)$ segundo a qual os carros entram em uma certa via expressa é dada pela fórmula $R(t) = 100(1 - 0.0001t^2)$ carros por minuto, onde t é o tempo (em minutos) desde as 4 horas e 30 minutos. Encontre a taxa média, em carros por minuto, segundo a qual os carros entram na via expressa entre as 4 horas e 30 minutos e às 5 horas da tarde.

   Seja $R(t)$ *a taxa dada por* $R(t) = 100(1 - 0.0001t^2)$. *Usando o teorema do valor médio para integrais, temos:*

   $N(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b R(t)dt$, *com* $N(t)$ *a taxa média de carros por minuto.*

   $N(t) = \frac{1}{30-0}\int_0^{30} 100(t - 0.0001t^2)dt$

   $N(t) = \frac{1}{30}100[t - 0.0001\frac{t^3}{3}]_0^{30}$

   $N(t) = \frac{100}{30}(30 - 0.9)$

   $N(t) = 97$ *carros por minuto.*

4. Por várias semanas, o departamento de estradas de rodagem vem registrando a velocidade do tráfego em uma estrada a partir de um certo ponto. Os dados sugerem que, entre as $13h$ e $18h$ de um fim de semana normal, a velocidade do tráfego no ponto é de aproximadamente $S(t) = t^3 - 10.5t^2 + 30t + 20$ milhas por hora, onde t é o número de horas após o meio-dia. Calcule a velocidade média do tráfego entre 13h e as 18h.

   A meta é encontrar o valor médio de $S(t)$ *no intervalo* $1 \leq t \leq 6$. *Então a velocidade média é:*

   $V_m = \frac{1}{6-1}\int_1^6 (t^3 - 10.5t^2 + 30t + 20)dt$

   $V_m = \frac{1}{5}[\frac{1}{4}t^4 - \frac{10.5}{3}t^3 + 15t^2 + 20t]_1^6$

   $V_m = \frac{1}{5}(228 - 31.75)$

   $V_m = 39.25$ *milhas por hora*

5. Após t meses no trabalho, um empregado do correio pode classificar $Q(t) = 700 - 400\epsilon^{-0.5t}$ cartas por hora. Qual a taxa média na qual o funcionário classifica as cartas durante os primeiros 3 meses de trabalho?

$C(2160) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (700 - 400\epsilon^{-0.5t})dt$

$C(2160) = \frac{1}{3-0}\int_0^3 (700 - 400\epsilon^{-0.5t})dt$

$C(2160) = \frac{1}{3}[700 - 400\epsilon^{-0.5t}]_0^3$

$C(2160) = \frac{1}{3}(2100 + 800\epsilon^{-1.5} - (0 + 800))$

$C(2160) \cong \frac{1}{3}(2278.5 - 800)$

$C(2160) \cong 493$ *cartas por hora*

4 Índice Remissivo por Áreas de Aplicação

1. Economia: 3.1.8, 3.1.9, 3.1.10, 3.1.12, 3.5.3, 3.5.12, 3.5.13, 3.5.14, 3.7.1, 3.7.2, 3.7.3, 3.7.4, 3.7.14, 3.8.3, 3.8.4, 3.8.11, 3.10.4, 3.10.5, 3.10.7, 3.11.1, 3.11.2 .

2. Administração: 3.1.3, 3.1.7, 3.1.13, 3.1.39, 3.5.15, 3.5.16, 3.7.16, 3.8.7, 3.8.8 .

3. Matemática: 3.5.4, 3.5.6, 3.5.8, 3.5.23, 3.7.5, 3.9.1, 3.9.2, 3.9.3, 3.9.4, 3.9.5, 3.9.6, 3.9.7, 3.9.8, 3.9.9, 3.9.10, 3.9.11 .

4. Física: 3.1.1, 3.1.2, 3.1.20, 3.1.36, 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4, 3.5.9, 3.5.10, 3.6.9, 3.7.7, 3.7.8, 3.7.11, 3.7.12, 3.7.13, 3.10.6, 3.8.9 .

5. Engenharia: 3.3.6, 3.5.1, 3.5.2, 3.5.5, 3.5.11, 3.6.1, 3.6.2, 3.6.3, 3.6.4, 3.6.7, 3.6.8, 3.6.11, 3.6.12, 3.7.6, 3.7.9, 3.8.10, 3.11.3, 3.11.4, 3.11.5 .

6. Medicina: 3.1.15, 3.1.18, 3.1.23, 3.1.27, 3.1.29, 3.1.32, 3.1.34, 3.1.41, 3.3.5, 3.4.1, 3.4.3, 3.5.17, 3.5.21, 3.6.13, 3.6.14, 3.8.1, 3.8.5, 3.8.6, 3.8.15, 3.10.3 .

7. Química: 3.1.19, 3.1.25, 3.1.26, 3.1.30, 3.1.31, 3.7.10, 3.10.2 .

8. Biologia: 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.11, 3.1.16, 3.1.17, 3.1.21, 3.1.22, 3.1.24, 3.1.33, 3.1.35, 3.1.37, 3.1.38, 3.2.1, 3.4.4, 3.5.18, 3.5.19, 3.5.24, 3.5.25, 3.5.26, 3.8.12, 3.8.13, 3.8.14 .

9. Diversos: 3.1.14, 3.1.28, 3.1.40, 3.2.2, 3.4.2, 3.5.7, 3.5.20, 3.5.22, 3.6.5, 3.6.6, 3.6.10, 3.7.15, 3.8.2, 3.10.1 .

5 Referências

1. GUIDORIZZI, H.L. Um Curso de Cálculo. 5º ed. São Paulo: LTC. 2011. Vol 1.

2. HALLET, D. H. Cálculo de Uma Variável. 3º ed. São Paulo: LTC. 2012.

3. HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. Cálculo-Um Curso Moderno e Suas Aplicações. 6º ed. São Paulo: LTC. 1999. Vol 1.

4. SIMMONS, G. F. Cálculo com Geometria Analítica. 1º ed. São Paulo: McGraw-Hill. 1987. Vol 1.

5. STEWART, J. Cálculo. 6º ed. Brasil: Cengage Learning. 2010. Vol 1.

6. MANCERA, P. F. A. Matemática para Ciências Biológicas. Agosto, 2002.

7. WHIPKEY,K.; WHIPKEY, M. The Power of Calculus. 4º ed. United States of America: John Wiley & Sons, Inc. 1986.