NOTAS DE AULA

TRANSFORMAÇÕES

Cláudio Martins Mendes

Segundo Semestre de 2005

Sumário

Capítulo 1

Transformações

1.1 Transformações

Definição 1.1.1. *Sejam $A \subset R^m$ e $B \subset R^n$. Uma* transformação *de A em B é uma correspondência que associa a cada elemento de A um único elemento de B.*

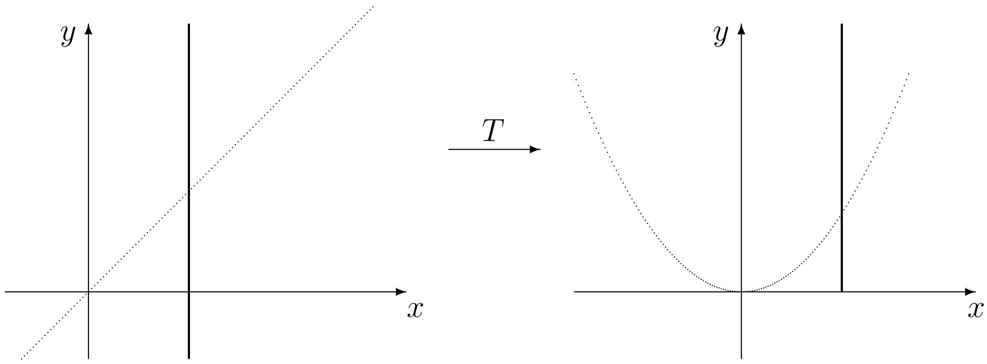
Notação:

$$T : A \to B \qquad \text{ou} \qquad A \xrightarrow{T} B$$

Exemplos:

(1) $T : R^2 \to R^2$

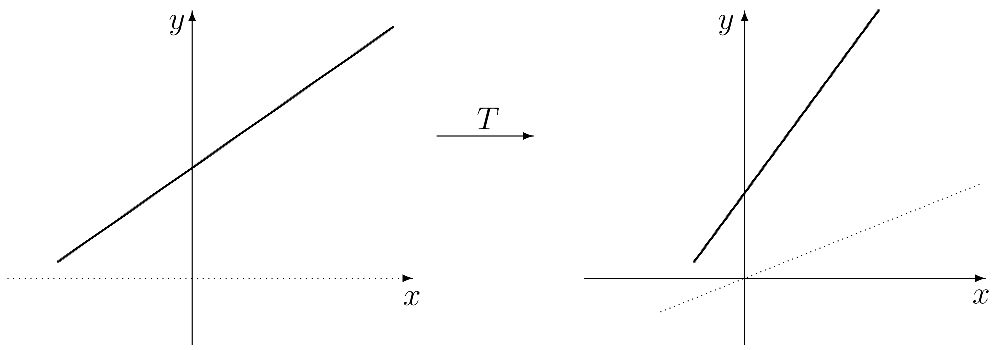
$T(x, y) = (x, y^2)$

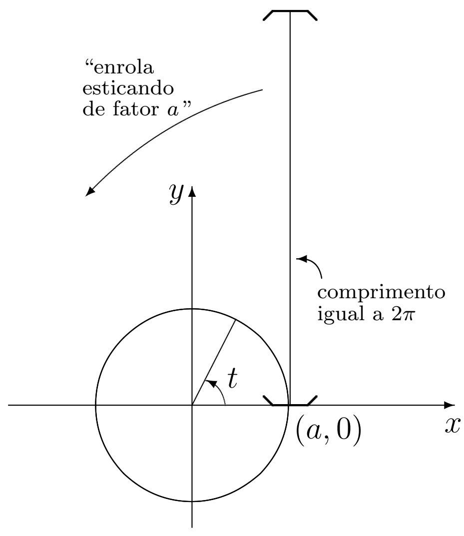


(2) $T : R^2 \to R^2$

$T(x,y) = (2x\,,\, x+2y)$

T leva retas em retas





(3) $T : R^2 \to R^2$

$T(x,y) = (\text{sen } x\,,\, \cos xy\,,\, e^x)$

(4) $T : [0, 2\pi] \;\to\; R^2$

$t \;\to\; (\,a\cos t\,,\, a \text{ sen } t\,)$

(5) Transformação de Kelvin

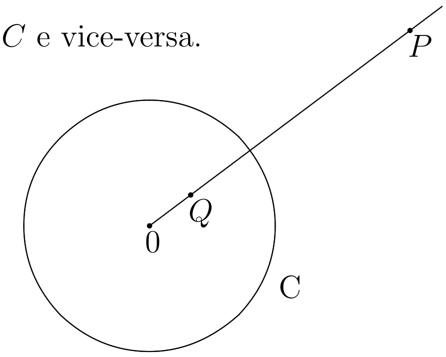
Seja $C = \{(x,y) \in R^2 \;/\; x^2 + y^2 = 1\}$.

Dado $P \neq 0$, sua imagem $f(P)$ é o ponto Q sobre o raio OP, tal que

$\| \overrightarrow{OP} \| \cdot \| \overrightarrow{OQ} \| = 1\,.$

O "exterior" de C é levado no "interior" de C e vice-versa.

Ela deixa invariante os pontos de C.



Ainda $\|P\| \to \infty \implies f(P) \to 0$

$P \to 0 \implies \|f(P)\| \to \infty$

Seja $P = (x, y)$. Vamos determinar as coordenadas de Q.

Temos que $\overrightarrow{OQ} = k \cdot \overrightarrow{OP}$, $k > 0$ e que

$$\| \overrightarrow{OQ} \| = \frac{1}{\| \overrightarrow{OP} \|}\ , \quad P \neq 0\,.$$

Assim: $\| \overrightarrow{OQ} \| = k \| \overrightarrow{OP} \|$.

Logo, $\dfrac{1}{\| \overrightarrow{OP} \|} = k \| \overrightarrow{OP} \| \iff \dfrac{1}{k} = \| \overrightarrow{OP} \|^2 = x^2 + y^2$.

Então:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}\,(x, y).$$

Mostre que $f \circ f = \mathrm{Id}_{R^2 - \{0\}}$, isto é, $f = f^{-1}$ (f é auto inversível).

Calcule $f(S)$ onde $S = \{(x, y) \in R^2 \ / \ (x - 3)^2 + y^2 = 1\}$.

Registramos aqui que esta transformação tem a propriedade de levar circunferências em circunferências ou retas. (Veja alguns exemplos).

— ◦ — ◦ — ◦ — ◦ — ◦ — ◦ — ◦ — ◦ —

A cada transformação $T : A \subset R^m \to B \subset R^n$ correspondem n funções $T_i : A \subset R^m \to R$, $i = 1, \ldots, n$, que são as funções coordenadas $[T(P) = (T_1(P), \ldots, T_n(P))]$. Reciprocamente, dadas n funções $T_i : A \subset R^m \to R$, a elas fica associada uma transformação $T : A \subset R^m \to R^n$, cujas funções coordenadas são as T_i.

Definição 1.1.2. *Sejam* $T : A \subset R^m \to R^n$ *e* $P_0 \in R^n$ *um ponto de acumulação de* A. *Então,* $\lim\limits_{P \to P_0} T(P) = L = (L_1, \ldots, L_n)$ *se, e somente se,* $\lim\limits_{P \to P_0} T_i(P) = L_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Exemplos:

1. $T : R^2 \to R^2$

   $T(x,y) = (2x+1\,,\, xy^2)$

   $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} T(x,y) = (\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} 2x+1\,,\, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy^2) = (1,0)$

2. $G : R^2 - \{(0,0)\} \to R^3$

   $G(x,y) = \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\,,\, x\,,\, x+y\right)$

   $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} G(x,y)$

Definição 1.1.3. $T : A \subset R^m \to R^n$ *é contínua em P_0 se as funções coordenadas $T_i : A \subset R^m \to R$ forem contínuas em P_0.*

Exemplos:

1. A transformação do exemplo (1) anterior é contínua em $(0,0)$.

2. A transformação do exemplo (2) anterior não é contínua em $(0,0)$ (nem está definida em $(0,0)$).

3. $T : R^2 \to R^2$

$$T(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\, xy\right) & ,\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ (1,\ 0) & ,\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   T não é contínua em $(0,0)$.

Definição 1.1.4. T é diferenciável em P_0 *se, e somente se, as suas funções coordenadas o forem. Além disso, definimos:*

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}(P_0) = \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_i}(P_0)\,,\, \frac{\partial T_2}{\partial x_i}(P_0)\,,\ldots,\, \frac{\partial T_n}{\partial x_i}(P_0)\right)$$

Exemplo:

$T(x,y) = (x^3, y^2)$

$P_0 = (0,1)$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,1) = \left(\frac{\partial x^3}{\partial x}(0,1)\ ,\ \frac{\partial y^2}{\partial x}(0,1)\right) = (0,0)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(0,1) = \left(\frac{\partial x^3}{\partial y}(0,1)\ ,\ \frac{\partial y^2}{\partial y}(0,1)\right) = (0,2)$$

Composição de Transformações:

Sejam $U \subset R^m$, $V \subset R^n$ e $W \subset R^p$ e $T : U \to V$, $G : V \to W$.

Podemos então definir a transformação $G \circ T : U \to W$, dada por:

$$(G \circ T)(P) = G(T(P))\,, \quad \forall\ P \in U\,.$$

Destacamos aqui a seguinte propriedade da composição:

$$U \ \xrightarrow{T}\ V \ \xrightarrow{G}\ W \ \xrightarrow{H}\ K$$

$(H \circ G) \circ T = H \circ (G \circ T)$.

Transformação Inversa

Seja $T : A \to B$. Diz-se que T tem **inversa** se existir uma transformação $G : B \to A$, tal que:

$$G \circ T = I_A \qquad \text{e} \qquad T \circ G = I_B\ .$$

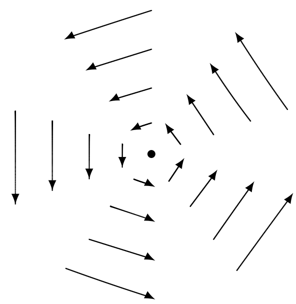
1.1.1 Campos Vetoriais

Em muitas aplicações está associado a cada ponto P de uma certa região, um único vetor tendo origem em P. A totalidade de tais vetores é chamada campo vetorial.

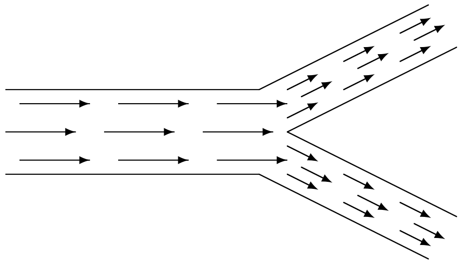
Exemplos:

(1) Campo de velocidade determinado pela rotação em torno de um ponto fixo.

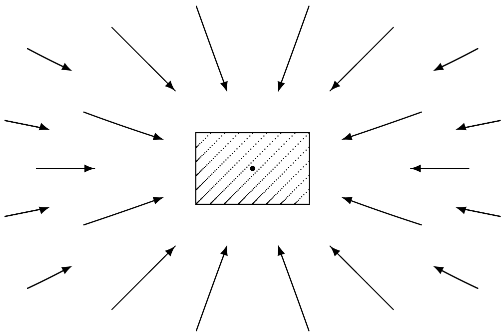
A cada ponto corresponde um vetor-velocidade.



(2) Campo de velocidade determinado pelo movimento de um fluido.



(3) Campo de forças (campo elétrico, campo gravitacional, etc.) - os vetores representam a força exercida pelo campo sobre uma unidade de carga ou de massa.



Observação: Desenhamos acima apenas alguns poucos vetores dos campos. É importante lembrar que a todo ponto da região está associado um vetor. Nas ilustrações acima assumimos serem os vetores independentes do tempo. Campos com esta propriedade são chamados campos de vetores steady ou estacionário.

Se introduzirmos um sistema retangular de coordenadas, então o vetor associado a $P = (x, y, z)$ pode ser denotado por $T(x, y, z)$:

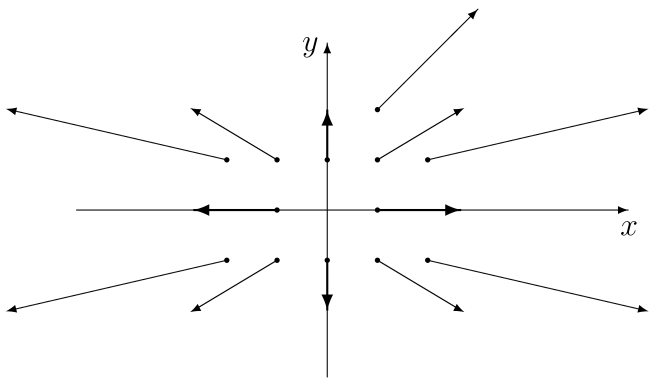
$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T_1(x,y,z)\vec{i} + T_2(x,y,z)\vec{j} + T_3(x,y,z)\vec{k} = \\ &= (T_1(x,y,z), T_2(x,y,z), T_3(x,y,z)) \,. \end{aligned}$$

Reciprocamente, toda equação deste tipo determina um campo vetorial.

Logo: todo campo vetorial, no espaço, pode ser definido por uma transformação $T : R^3 \to R^3$ (se os vetores dependerem do tempo, então teremos $G : R^4 \to R^3$).

Exemplos:

(1) $f(x, y) = 2x\vec{i} + y\vec{j} = (2x, y)$



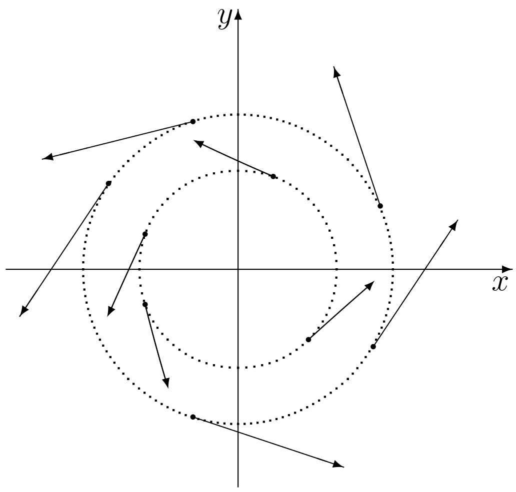
(2) Descreva o campo vetorial:

$F(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j} = (-y, x)$

Seja $P = (x,y)$

$\langle\, F(P)\,,\, O\vec{P}\,\rangle = 0$, logo $F(x,y)$ está sempre ortogonal ao vetor (x,y), e assim, é tangente ao círculo de centro na origem e raio $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Ainda

$$\|F(x,y)\| = \sqrt{y^2+x^2} = r\,.$$



Compare com o campo de velocidades dado no exemplo anterior.

(3) Descreva o campo vetorial:

$$T(x,y,z) = \frac{c}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z);\ c<0,\ (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

Observe que o sentido de $T(x,y,z)$ é contrário ao de (x,y,z).

$$\begin{aligned}\|T(x,y,z)\| &= \frac{|c|}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} = \\ &= \frac{|c|}{x^2+y^2+z^2}\,.\end{aligned}$$

Assim, o módulo de $T(x,y,z)$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância de 0 até o ponto (x,y,z).

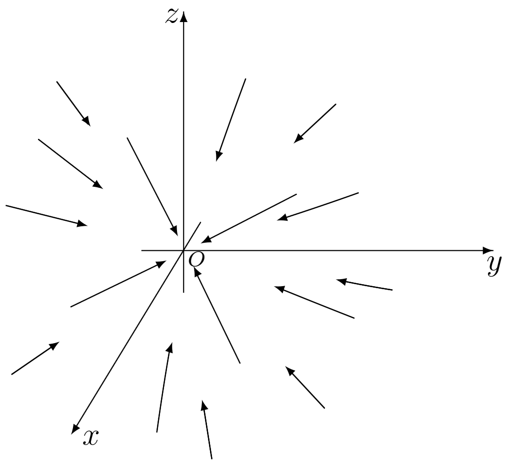
Estes tipos de campos ocorrem em muitas aplicações. Vejamos, por exemplo:

Se uma partícula de massa M está colocada na origem, então a força de atração gravitacional sobre uma partícula de massa unitária colocada em $P = (x, y, z)$ é de módulo

$$\frac{g\,M}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Então:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \frac{g\,M}{(x^2+y^2+z^2)} \cdot -\left(\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right) = \\ &= -\frac{g\,M}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z). \end{aligned}$$



Um importante tipo de campo vetorial é o que se obtém usando o gradiente de uma função escalar f de duas ou três variáveis.

$$\nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\vec{i} + f_y(x,y,z)\vec{j} + f_z(x,y,z)\vec{k}\,.$$

Se um campo vetorial F é o gradiente de um campo escalar f , isto é,

$$F(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)\ ,$$

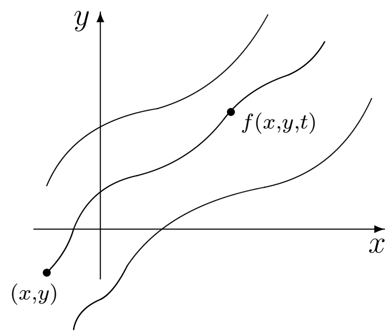
então F é chamado um campo vetorial conservativo e $f(x,y,z)$ é chamado o potencial em (x,y,z). A função f é chamada a função potencial de F .

1.1.2 Fluxos

Uma transformação $f : R^3 \to R^2$ pode ser interpretada como um fluxo 2 dimensional da seguinte maneira:

Um ponto $(x, y, t) \in R^3$ é levado pela f num ponto $(x', y') = f(x, y, t) \in R^2$, onde (x, y) é visto como a posição da partícula no R^2, no instante $t = 0$, e $f(x, y, t)$ é a posição da mesma partícula depois de um tempo t.

Tomando (x, y) fixo e deixando t variar, obtemos uma curva chamada a trajetória do fluxo.

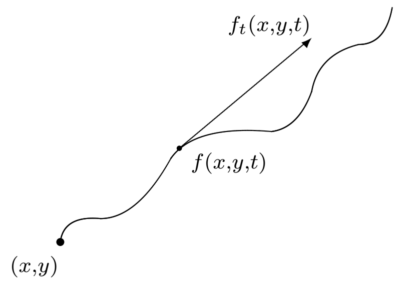


A família de todas as trajetórias determinada por f dá a representação geométrica do fluxo.

Os vetores tangentes $f_t(x, y, t)$ para cada $\boldsymbol{t}$ **fixado** formam um campo vetorial chamado o campo de velocidade do fluxo **no tempo** $\boldsymbol{t}$.

Se o campo de velocidades de um fluxo é independente de t, então o fluxo é chamado de steady ou estacionário.

Conforme mostra o exemplo a seguir, um fluxo estacionário não é necessariamente um fluxo para o qual a função $f_t(x, y, t)$ independe de t. Veja ainda o exercício (2) a seguir.



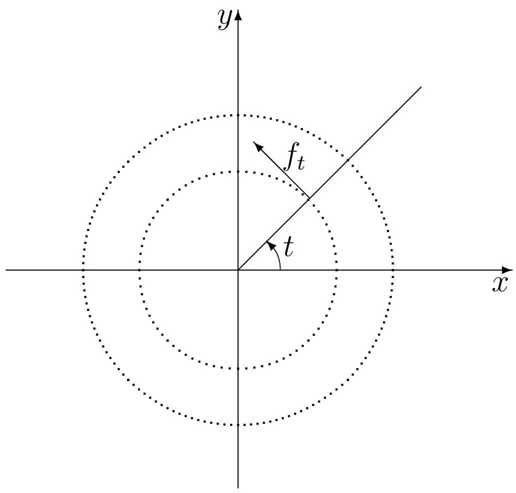
Exemplo: Considere $f(x, y, t) = (x \cos t - y \text{ sen } t\,,\ x \text{ sen } t + y \cos t)$.

Podemos entender $f(x, y, t)$ como sendo:

$$f(x,y,t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\text{sen } t \\ \text{sen } t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

que é a rotação em torno da origem de um ângulo t, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, para cada t fixado.

Assim, a trajetória de um ponto (x, y) é o círculo de raio $\sqrt{x^2 + y^2}$, com centro na origem.



Temos:

$f_t(x, y, t) = (-x \text{ sen } t - y \cos t\,,\, x \cos t - y \text{ sen } t)$

ou seja:

$$f_t(x, y, t) = \begin{bmatrix} -\text{sen } t & -\cos t \\ \cos t & -\text{sen } t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Para calcular $f_t(x, y, t)$ em termos das coordenadas de posição $(x', y') = f(x, y, t)$, podemos resolver a equação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\text{sen } t \\ \text{sen } t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

para (x, y) e encontrar:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Então:

$$f_t(x, y, t) = \begin{bmatrix} -\text{sen } t & -\cos t \\ \cos t & -\text{sen } t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y' \\ x' \end{bmatrix}$$

Assim, o campo de velocidade v é dado por $v(x', y') = (-y', x')$, que independe do tempo. Logo, o fluxo é estacionário.

Fazemos sempre uma hipótese básica sobre um fluxo:

Duas partículas não podem ocupar a mesma posição ao mesmo tempo, isto é:

Se $f(x, y, t) = f(\overline{x}, \overline{y}, t)$, então $(x, y) = (\overline{x}, \overline{y})$.

Tal hipótese não implica em dizer que as trajetórias não se interceptam.

Uma transformação T do tipo $R^4 \xrightarrow{T} R^3$ pode ser usada para descrever um fluxo 3-dimensional.

Exemplo:

1. Considere o fluxo 2-dimensional

$$f(x,y,t) = \begin{bmatrix} x & + & t \\ y & + & t^2 \end{bmatrix} \quad , \quad t \geq 0$$

a) Desenhe as trajetórias do fluxo que começam em $(x,y) = (0,0),\ (0,1)$ e $(1,1)$.

b) Para $t = 1$, desenhe os vetores-velocidades nos pontos $f(x,y,1)$, com (x,y) sendo $(0,0),\ (0,1)$ e $(1,1)$.

c) Mostre que o fluxo não é estacionário.

a) trajetória de $(0,0)$:

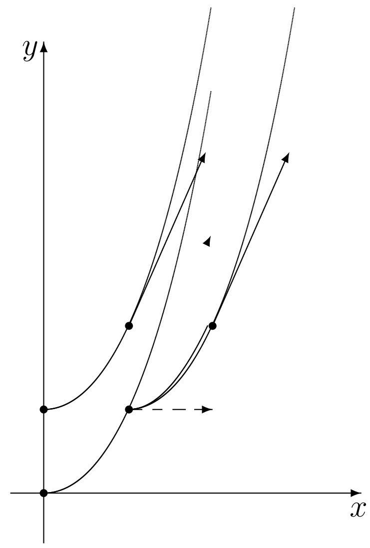
$$f(0,0,t) \ = \ \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$$

trajetória de $(0,1)$:

$$f(0,1,t) \ = \ \begin{bmatrix} t \\ 1+t^2 \end{bmatrix}$$

trajetória de $(1,1)$:

$$f(1,1,t) \ = \ \begin{bmatrix} 1+t \\ 1+t^2 \end{bmatrix}$$



b) $$f_t(x,y,t) \ = \ \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix}$$

c) Consideremos $f(0,0,1) = (1,1)$ e $f_t(0,0,1) = (1,2)$.

Ainda: $f(1,1,0) = (1,1)$ e $f_t(1,1,0) = (1,0)$.

Logo, o fluxo não é estacionário.

Observação: Imaginemos uma sala com um ventilador funcionando. Isto dá origem a um deslocamento de ar pela sala. Se o ventilador permanece fixo o fluxo é steady ou estacionário. Se o ventilador oscila o fluxo não é steady ou estacionário.

Exercícios propostos:

1. Considere o fluxo

$$f(x,y,t) \;=\; \begin{bmatrix} (t^2+1)x \\ (t^2+1)y \end{bmatrix} \quad , \quad t \geq 0$$

   a) Desenhe as trajetórias que começam em $(x,y) = (0,0), (1,1)$, etc. Qual é o tipo das trajetórias?

   b) Para $t = 1$, desenhe os vetores-velocidades nos pontos $f(x,y,1)$ com (x,y) sendo $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$.

   c) Mostre que o fluxo não é estacionário.

2. Considere o fluxo

$$f(x,y,t) \;=\; \begin{bmatrix} (t+1)x \\ (t+y \end{bmatrix} \quad , \quad t \geq 0$$

   a) Desenhe as trajetórias que começam em $(x,y) = (0,0), (1,1)$ e $(1,0)$.

   b) Para $t = 1$, desenhe os vetores-velocidades nos pontos $f(x,y,1)$ com $(x,y) = (0,0)$, $(1,1)$ e $(1,0)$.

   c) Observe que f_t não depende de t, mas que apesar disto o fluxo não é steady. (**Sugestão:** desenhe a trajetória que começa em $(2,2)$).

1.1.3 Transformações Lineares

Consideremos $T : R^2 \to R^2$ definida por

$$T(x,y) = (ax+by\,,\; cx+dy) \qquad (*)$$

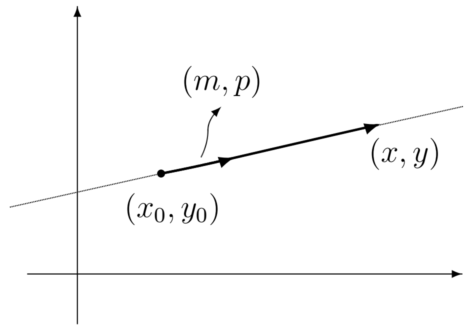
onde a, b, c, d são fixos.

T transforma retas em retas.

De fato:

Os pontos $P = (x,y)$ de uma reta satisfazem as equações paramétricas:

$(x, y) - (x_0, y_0) = \lambda(m, p)$



$$(1) \quad \begin{cases} x = \lambda m + x_0 \\ y = \lambda p + y_0 \end{cases}$$

$$(z, w) = T(x, y) = (\, a(\lambda m + x_0) + b(\lambda p + y_0),\ c(\lambda m + x_0) + d(\lambda p + y_0)\,)$$

Portanto,

$$(2) \begin{cases} z = (am + bp)\lambda + (ax_0 + by_0) \\ w = (cm + dp)\lambda + (cx_0 + dy_0) \end{cases}$$

que são equações paramétricas de uma reta.

Por esta razão, uma transformação do tipo $(*)$ é chamada uma transformação linear.

Podemos reescrever (*) como:

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

Vamos interpretar a linearidade da transformação T em termos de vetores:

$$(z, w) = T(x, y) = x(a, c) + y(b, d)$$

As equações (1) podem ser escritas:

$$(x, y) = \lambda(m, p) + (x_0, y_0)$$

As equações (2) podem ser escritas:

$$(z, w) = T(x, y) = \lambda T(m, p) + T(x_0, y_0)$$

Então:

$$T(\lambda(m, p) + (x_0, y_0)) = \lambda T(m, p) + T(x_0, y_0)$$

Fazendo $\vec{u} = (m, p)$ e $\vec{v} = (x_0, y_0)$, temos:

$$T(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \ ,$$

equação que exprime a linearidade da transformação T, como costumamos introduzir esse conceito em Álgebra Linear.

Tomemos os vetores:

$\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$

$$[T]_{\vec{e_i}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Sabemos, da Álgebra Linear, que T admite inversa se, e somente se, $[T]_{\vec{e_i}}$ é inversível, isto é, $ad - bc \neq 0$.

Ainda, a inversa G é tal que $[G]_{\vec{e_i}} = [T]_{\vec{e_i}}^{-1}$ ou seja:

$$[G]_{\vec{e_i}} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Assim

$$G(z, w) = \left(\frac{dz - bw}{ad - bc} \ , \ \frac{aw - cz}{ad - bc} \right)$$

—— / / —— / / ——

Matriz Jacobiana

Consideremos

$F : R^2 \to R^2$

$F(x, y) = (F_1(x, y) \ , \ F_2(x, y))$

diferenciável em $(0, 0)$ com $F(0, 0) = (0, 0)$.

Assim, $F_1(x, y)$ e $F_2(x, y)$ são diferenciáveis em $(0, 0)$.

Tomemos a aplicação linear $R^2 \to R$ dada por:

$$(x,y) \mapsto F_{1_x}(0,0) \cdot x + F_{1_y}(0,0) \cdot y \ .$$

Já foi comentado ser esta uma aplicação linear que "aproxima bem" a função $F_1(x,y)$ numa vizinhança de $(0,0)$. [Veja diferenciabilidade].

Analogamente, podemos considerar:

$$(x,y) \mapsto F_{2_x}(0,0) \cdot x + F_{2_y}(0,0) \cdot y \ .$$

É de se esperar (o que de fato acontece) que a transformação linear L

$$(x,y) \xrightarrow{L} \big(F_{1_x}(0,0) \cdot x + F_{1_y}(0,0) \cdot y \ , \ F_{2_x}(0,0) \cdot x + F_{2_y}(0,0) \cdot y\big)$$

"aproxima bem" $F(x,y)$ numa vizinhança de $(0,0)$.

Calculando a matriz de L em relação à base $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$, temos:

$$[L]_{\vec{e}_i} \ = \begin{bmatrix} F_{1_x}(0,0) & F_{1_y}(0,0) \\ \\ F_{2_x}(0,0) & F_{2_y}(0,0) \end{bmatrix}$$

que recebe o nome de **matriz jacobiana** de F em $(0,0)$.

Definição Geral:

Seja $F : A \subset R^m \to R^n$ uma transformação diferenciável em A, com as coordenadas $(F_1, \ldots, F_n)$. Por definição, as n funções $F_i : A \subset R^n \to R$ são diferenciáveis em A, e assim, existem todas as derivadas parciais das $F_{i's}$ em A. A matriz:

$$JF(P) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\ (P)\right) \ = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\ (P) & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}\ (P) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m}\ (P) \\ \\ \vdots & & & \\ \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}\ (P) & & \cdots\cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_m}\ (P) \end{bmatrix}_{n \times m}$$

é chamada **matriz jacobiana** de F em $P \in A$.

Exemplo:

$F : R^2 \to R^3$

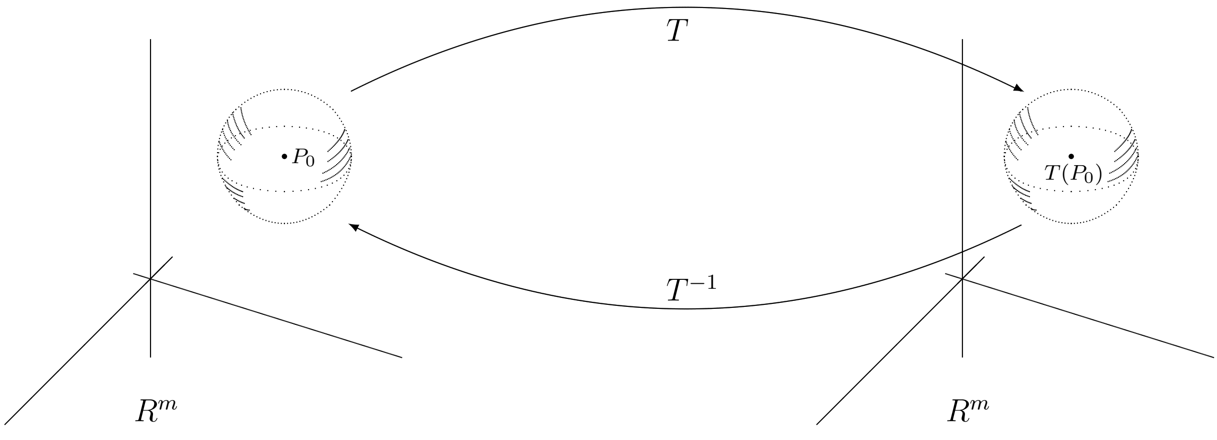
$(x, y) \to (x^2 y\,,\ x + y^2\,,\ y)$

$$JF(x,y) \ = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & 2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2 Teorema da Função Inversa

Se temos $T : U \subset R^m \to R^m$ e sabemos que $JT(P_0)$ é uma matriz inversível, então sabemos que uma transformação linear que "aproxima bem" T em uma vizinhança de P_0 é inversível. O que poderíamos esperar de T?

Teorema 1.2.1 (Teorema da Função Inversa). *Seja* $T = (T_1, \ldots, T_m) : U \subset R^m \to R^m$*, onde* U *é aberto e* T *é de classe* C^k $(k \geq 1)$*. Seja* $P_0 \in U$*, tal que* $\det JT(P_0) \neq 0$*. Então existem vizinhanças* V *de* P_0 *e* W *de* $T(P_0)$*, tais que* $T : V \to W$ *é inversível e a sua inversa é de classe* C^k*.*



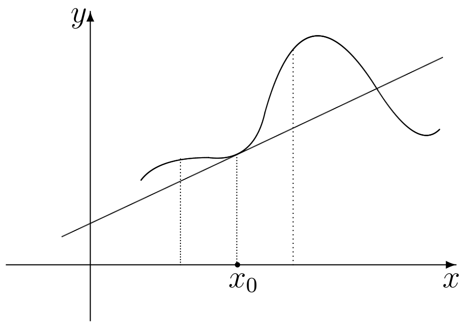
Exemplos:

1. Consideremos $f : R \to R$, f de classe C^1.

   Seja $x_0 \in R$, tal que $f'(x_0) \neq 0$.

Como f' é contínua, existe uma vizinhança de x_0 onde f' assume o mesmo sinal de $f'(x_0)$ (conservação do sinal). Logo, a função é estritamente crescente (ou decrescente) em uma vizinhança de x_0 , e assim admite uma inversa local.

Observe que temos ainda, assegurado pelo teorema, que a inversa é de classe C^1 .



2. Consideremos $T : R^2 \to R^2$, dada por $T(x, y) = (e^x \cos y \ , \ e^x \text{sen } y)$

   Notemos que

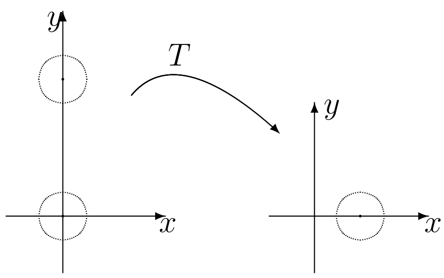
$$\det JT(x,y) \ = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ & \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{bmatrix} = \ e^{2x} \neq 0 \ , \ \forall (x,y) \in R^2 \, .$$

   Portanto, $\forall \, (x, y) \in R^2$, existem vizinhanças onde T é inversível.

   Observe que T não é globalmente inversível, uma vez que não é biunívoca.

$$(0,\ 0) \ \stackrel{T}{\longmapsto} \ (1,0)$$

$$(0, 2\pi) \ \stackrel{T}{\longmapsto} \ (1,0)$$



3. Considere $T : R^2 \to R^2$, dada por $T(x, y) = (2xy \, , \, x^2 - y^2)$. Mostre que:

   (a) T não admite inversa global.

   (b) T admite inversa local, exceto numa vizinhança da origem (cuidado com o seu argumento !).

1.3 Teorema da Função Implícita

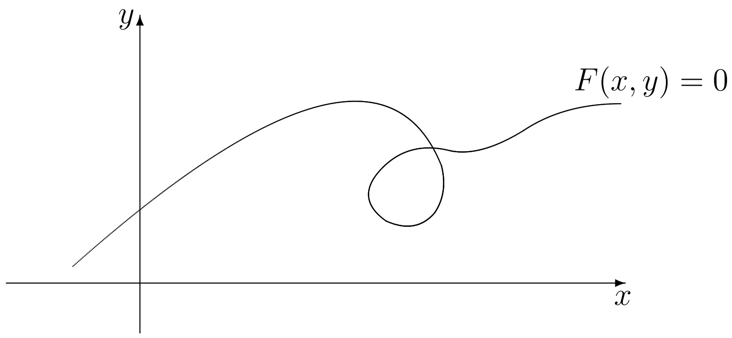
É freqüente a representação de curvas sob a forma $F(x,y)=0$, em vez de $y=f(x)$.

Exemplos:

reta: $ax+by+c=0$

elipse: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Dada a curva $F(x,y)=0$, para se obter $y=f(x)$ devemos "resolver" a equação $F(x,y)=0$ em relação a y. Em alguns casos, a solução pode ser determinada em termos de funções elementares. Em outros casos, a solução pode ser aproximada. É preferível, entretanto, operar não com a forma resolvida da equação ou com a aproximação obtida, mas sim deduzir as conclusões sobre a solução, estudando a própria função $F(x,y)$.



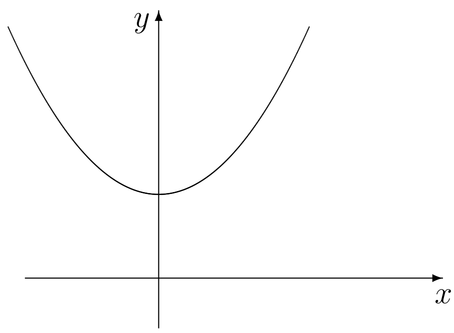
Exemplos:

1. $F(x,y)=x^2-y+1$

   $x^2-y+1=0 \iff y=x^2+1$

   A função $y=f(x)=x^2+1$ está definida

   implicitamente por $F(x,y)=x^2-y+1=0$.



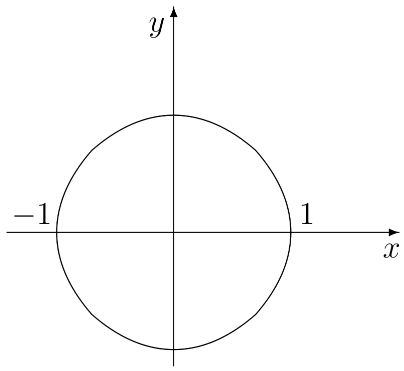
2. $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ define implicitamente

$y = \sqrt{1-x^2}$ ou

$y = -\sqrt{1-x^2}$

com $|x| \leq 1$.



Observe que **não** temos uma função $y = f(x)$, tal que o conjunto de pontos $(x, f(x))$ seja igual ao conjunto de pontos que satisfazem $F(x,y) = 0$.

3. $F(x,y) = x^2 + y^2 + 1$

   $x^2 + y^2 + 1 = 0$ não é satisfeita para nenhum valor real.

4. $F(x,y) = x^2 + y^2$

   $x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$

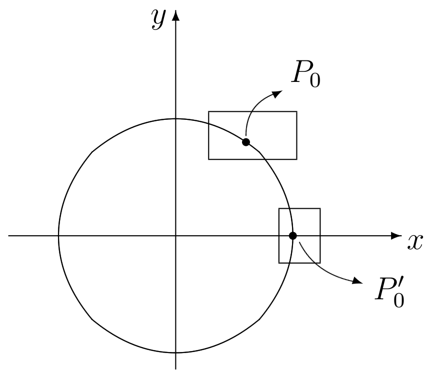
5. $F(x,y) = x\cos(xy) + 1$

   $x\cos(xy) + 1 = 0$ será que define y como função de x em algum intervalo?

Observação: Em alguns casos, como no exemplo 2, apesar de não existir $y = f(x)$ "globalmente", se nos restringirmos a uma conveniente vizinhança de um ponto P_0, conforme o ponto, podemos obter funções.

Na figura, podemos observar que é possível obter uma função $y = f(x)$ numa vizinhança de $P_0 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, porém tal função não existe em nenhuma vizinhança de $P_0' = (1,0)$.

Veja que em uma vizinhança de $P_0' = (1,0)$, é possível obter $x = g(y)$.



Exercício:

1. Tente esboçar o aspecto local de uma curva que passa por P_0, tal que em nenhuma vizinhança de P_0 possa ser possível obter $y = f(x)$ ou $x = g(y)$.

O teorema que estabelece as condições suficientes para a existência das funções implícitas dando, ao mesmo tempo, a regra para derivá-las, é o seguinte:

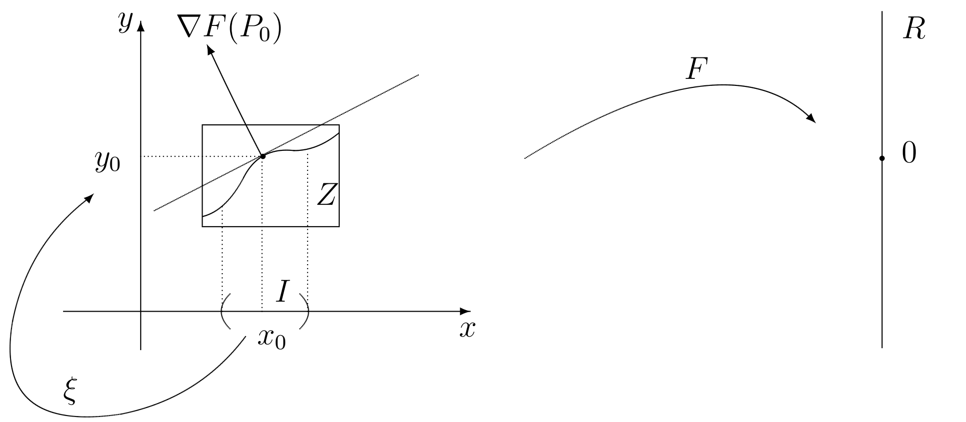
Teorema 1.3.1 (Teorema das Funções Implícitas). *Seja $F : A \subset R^2 \to R$ onde A é aberto e F é de classe C^k $(k \geq 1)$ em A. Se F se anula em $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ e $F_y(P_0) \neq 0$, então existe um intervalo aberto I contendo x_0 e um aberto $Z \subset A$, $P_0 \in Z$ com a seguinte propriedade:*

Para cada $x \in I$ existe um único $\xi(x) \in R$ tal que $(x, \xi(x)) \in Z$ e $F(x, \xi(x)) = 0$.

A aplicação $\xi : I \to R$ assim definida é de classe C^k e sua derivada é dada por:

$$\xi'(x) = \frac{-F_x(x, \xi(x))}{F_y(x, \xi(x))} \ .$$

Interpretação:



$\nabla F(P_0) = (F_x(P_0)\,,\, F_y(P_0))$ - normal à curva de nível $F(x, y) = 0$ que passa por P_0.
Como $F_y(P_0) \neq 0$, então $\nabla F(P_0)$ <u>nunca</u> é do tipo $\longrightarrow$ ("horizontal")

Exercícios resolvidos

1. Mostre que existe um intervalo I contendo $x_0 = 2$, no qual está definida a função $y = \xi(x)$ satisfazendo $x^2 + xy + y^2 = 7$ com $\xi(2) = 1$.

Resolução:

Definimos

$$F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 7\,.$$

Observemos que F é de classe C^∞ em R^2.

$$F(2,1) = 0 \quad \text{e} \quad F_y(2,1) = 4 \neq 0\,.$$

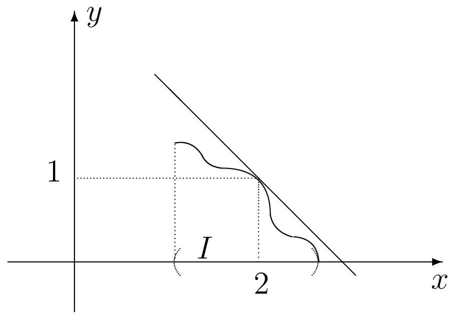
Pelo Teorema anterior, existe um intervalo I contendo $x_0 = 2$ e uma função $y = \xi(x)$, tais que:

$x^2 + x\xi(x) + (\xi(x))^2 = 7\,, \quad \forall\, x \in I\,.$

Ainda: $\xi(2) = 1$, ξ é de classe C^∞ e

$\xi'(x) = \dfrac{-F_x(x\,,\,\xi(x))}{F_y(x\,,\,\xi(x))}\,.$

Em particular, $\xi'(2) = -\dfrac{5}{4}\,.$



2. Mostre que existe um intervalo aberto contendo o ponto $x_0 = 1$, no qual está definida uma função $y = f(x)$, diferenciável em x_0, satisfazendo: $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$ e $x\cos(xf(x)) = 0$. Calcule $f'(1)$.

   Resolução:

   Definimos $F(x,y) = x\cos(xy)$.

   Observemos que F é de classe C^∞ em R^2.

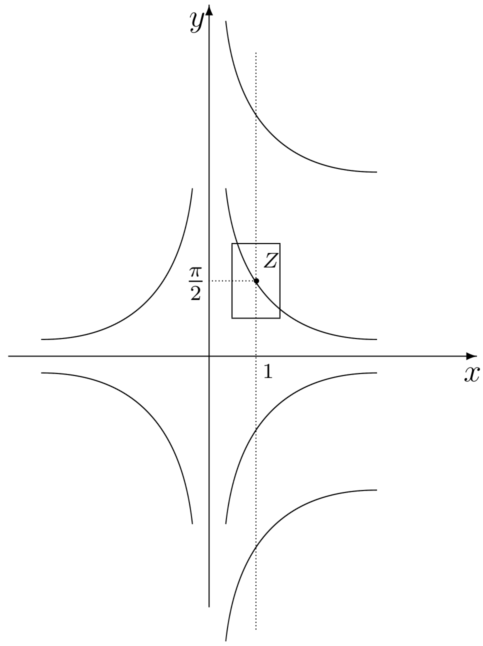
   $F\left(1\,,\,\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad F_y\left(1\,,\,\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 0\,.$

Pelo Teorema anterior existe um intervalo aberto I contendo $x_0 = 1$ e uma função $y = f(x)$, tal que

$$x\cos(xf(x)) = 0\,.$$

Ainda: $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$, f é de classe C^∞ em I e

$$f'(1) = \frac{-F_x(1\,,\,\frac{\pi}{2})}{F_y(1\,,\,\frac{\pi}{2})} = -\,\frac{\pi}{2}$$



Exercício proposto

Mostre que $F(x,y) = xy + \ln(xy) = 1$ define implicitamente y como função de x em uma vizinhança do ponto $P_0 = (1,1)$.

— ◦ – ◦ – ◦ – ◦ – ◦ – ◦ – ◦ – ◦ —

Observação 1: Se temos $F(x,\xi(x)) = 0$ com ξ diferenciável em $x \in I$, então, pela Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned} 0 &= F_x(x\,,\,\xi(x)) + F_y(x\,,\,\xi(x))\frac{d\xi}{dx}(x) \implies \\ \implies \frac{d\xi}{dx}(x) &= \frac{-F_x(x\,,\,\xi(x))}{F_y(x\,,\,\xi(x))}\,. \end{aligned}$$

Observação 2: Se $F_y(P_0) \neq 0$, então podemos tirar y como função de x e garantir que a função é diferenciável no ponto. Se $F_y(P_0) = 0$, o teorema não pode ser aplicado.

Exemplos:

(a) $y^3 + x = 0 \quad P_0 = (0,0)$

$F(x,y) = y^3 + x$

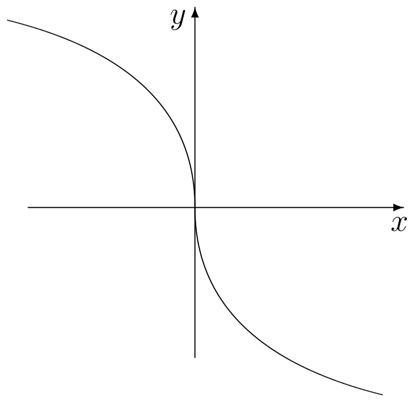
$F_y(x,y) = 3y^2 \quad \therefore \quad F_y(0,0) = 0$

Ainda $\; y^3 + x = 0 \Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{-x}$.

Portanto pode ocorrer que $F_y(P_0) = 0$

e assim mesmo podemos tirar $y = \xi(x)$

(neste exemplo, não diferenciavelmente)

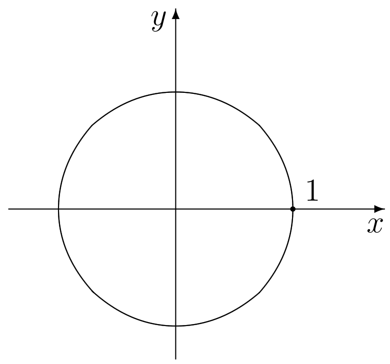


(b) $x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad P_0 = (1,0)$

$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$F_y(1,0) = 0$

Aqui $F_y(1,0) = 0$ e não podemos tirar $y = \xi(x)$.

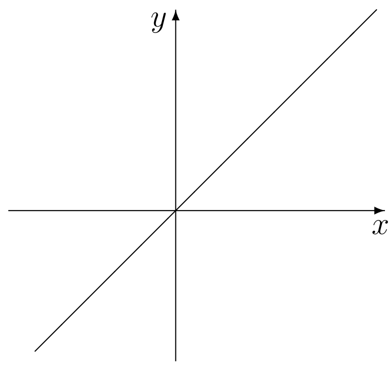


(c) $x^2 - 2xy + y^2 = 0 \quad P_0 = (0,0)$

$F(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

$F_y(0,0) = F_x(0,0) = 0$

mas $\; y = x\,$, diferenciavelmente.



Observação 3: O teorema que acabamos de enunciar pode ser generalizado para $F : U \subset R^m \to R, \;\; m > 2\;$ e, mais ainda, para um sistema de equações considerando $G : U \subset R^m \to R^n$, onde trabalhamos com $G(x_1, \ldots, x_m) = (0, \ldots, 0)$.

Exercícios propostos

1. Descrever a imagem da circunferência $x^2+y^2=r^2$ pela transformação $T(x,y)=\left(\frac{x}{4},y\right)$.

2. Descrever as imagens das retas $x=c$ pela transformação $(x,y)\to(e^x\cos y\,,\,e^x\operatorname{sen} y)$ e fazer gráficos.

3. Mostre que o campo gravitacional é um campo conservativo.

   Sugestão: Considere $f(x,y,z)=\dfrac{gM}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$.

4. Considere o fluxo 2 dimensional: $f(x,y,t)=(x\,e^t\,,\,y\,e^t),\ \ t\geq 0$.

   a) Desenhe as trajetórias do fluxo que começam em $(x,y)=(0,1)$ e $(1,1)$.

   b) Para $t=1$ calcule os vetores velocidades nos pontos $f(x,y,1)$ com $(x,y)=(0,1)$ e $(1,1)$.

   c) Resolva a equação $(x',y')=f(x,y,z)$ para (x,y) em termos de (x',y') e substitua o resultado em $f_t(x,y,z)$ para mostrar que o fluxo determinado por f é estacionário.

5. Desenhe alguns vetores dos campos vetoriais:

   a) $f(x,y)=(1,x)$ para $-1\leq x\leq 2$.

   b) $f(x,y)=(-x,y)$ para $x^2+y^2\leq 4$.

   c) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}\,(1,1)$ para $x^2+y^2\leq 4$.

6. Mostre que $F(x,y)=0$ define uma função implícita $y=f(x)$ em uma vizinhança do ponto (x_0,y_0) e calcule $f'(a)=\frac{dy}{dx}\,(a)$.

   a) $F(x,y)=x^2-xy+y^2-3$ $\qquad (x_0,y_0)=(1,2)$

   b) $F(x,y)=2e^{x+y}-x+y$ $\qquad (x_0,y_0)=(1,-1)$

   c) $F(x,y)=xy-1$ $\qquad (x_0,y_0)=(1,1)$

7. Se $x_0\neq 0$ e $x_0\neq 1$ mostre que se (x,y) está suficientemente próximo de $(x_0,0)$ a equação $\operatorname{sen}(x^2y)-xy=0$ é equivalente a $y=0$.

8. a) Qual é o lugar geométrico dos pontos (x,y) do plano que satisfazem a equação: $y^2+x^2e^y=0$?

b) Idem para a equação $(e^{\operatorname{sen} x} - 1)^2 + (\operatorname{sen} y - 1)^2 = 0$?

c) Estude as equações (a) e (b) de acordo com o Teorema das Funções Implícitas e veja se está tudo bem.

9. Dada a transformação $F : R^2 \to R^2$ definida por $F(u,v) = (u - uv\,,\, uv) = (x,y)$

a) Calcule $F(0,v)$, $\forall\, v \in R$.

b) F é inversível? Justifique.

c) $F_{/R^2 - S}$ onde $S = \{(u,v) \in R^2 \mid u = 0\}$ é inversível ?

Se for, qual a sua inversa

10. Se $F(x,y) = x^2 + y^2 - x^3$ ache a solução $y = f(x)$ de $F(x,y) = 0$:

a) Em uma vizinhança de $(5,10)$.

b) Em uma vizinhança de $(10,-30)$.

c) Observe que $y^2 = x^3 - x^2 \geq 0$. Logo existe uma região do plano onde esta equação não tem solução. Qual é ela?

d) Em que pontos (x_0, y_0) do lugar geométrico $F(x,y) = 0$ nós não temos um intervalo I contendo x_0 tal que $F(x, y(x)) = 0$, $\forall\, x \in I$.

11. A equação de estado de um gás ideal é $p \cdot v = KT$ onde K é uma constante, p, v e T são a pressão, o volume e a temperatura do gás, respectivamente. Verifique que:

$$\frac{\partial p}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1$$

.