

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
ISSN 0103-2577

**Comparação entre as Abordagens Bayesiana e Clássica
do Problema de Inferência com Modelo de Crescimento
Populacional de Richards**

Selene Loibel
João Bosco Ribeiro do Val
Marinho G. Andrade

Nº 68

NOTAS

Série Estatística



São Carlos – SP
Dez./2001

Comparação Entre as Abordagens Bayesiana e Clássica do Problema de Inferência com Modelo de Crescimento Populacional de Richards

Selene Loibel

João Bosco Ribeiro do Val

DT / FEEC / UNICAMP

CP.6101, 13081-970 - Campinas - SP

Marinho G. Andrade

SCE/ ICMC / USP

CP. 668 - 13560-970 - São Carlos - SP

Resumo

Entre os modelos de crescimento populacional o modelo de Richards é apresentado como uma generalização dos modelos logístico e Gompertz. No entanto na maioria dos trabalhos encontrados na literatura os dois casos particulares são mais utilizados devido à dificuldade de se fazer inferência dos parâmetros do modelo não linear de Richards. Neste trabalho mostramos que o modelo de Richards pode ser interpretado como um modelo logístico quando aplicamos aos dados a transformação de potência de Box e Cox. Outra consideração importante para os modelos de crescimento populacional é sobre a natureza aleatória dos parâmetros desses modelos. Esse fato torna de fundamental importância a abordagem Bayesiana do problema de inferência dos parâmetros desses modelos.

Este trabalho apresenta uma abordagem Bayesiana para o problema de inferência de parâmetros do modelo de crescimento populacional de Richards. As estimativas Bayesianas foram obtidas combinando-se algoritmos de MCMC (amostrador de Gibbs e Metropolis-Hastings) e os resultados obtidos foram comparados com as estimativas clássicas de máxima verossimilhança. Devido às particularidades do modelo de Richards, como a não linearidade, foi necessário considerar a função de verossimilhança profile no cálculo das estimativas clássicas. Os resultados apresentados aqui mostram que a abordagem Bayesiana é adequada, viável e precisa para tratar o problema de inferência dos parâmetros do modelo de crescimento populacional de Richards.

Palavras-chave: Modelo de Richards, Inferência Bayesiana, Simulação de Monte Carlo em cadeias de Markov (MCMC), Modelos de crescimento populacional, Função de verossimilhança profile, Transformação de Box e Cox.

1. Modelos de Crescimento Populacional

A avaliação da viabilidade de uma população animal é um procedimento importante no esforço para minimizar o impacto de ações humanas sobre essas populações. Existem vários indicadores para a viabilidade de uma população. Entre eles podemos citar: 1) Probabilidade de extinção; 2) Probabilidade de sobrevivência por um determinado período de tempo; 3) Tempo esperado até extinção; 4) Probabilidade de colapso prematuro, isto é, probabilidade do tamanho de uma população pequena ficar menor ainda (irrecuperável) antes que cresça (ou se recupere). O cálculo de todos estes indicadores de viabilidade de uma população só pode ser feito conhecendo-se o tamanho inicial e a taxa de crescimento da população e portanto este cálculo depende da inferência dos parâmetros do modelo de crescimento adotado.

Existem muitos processos (físicos, químicos e biológicos) responsáveis pela dinâmica de uma população animal. Para que seja possível modelar matematicamente tal dinâmica é preciso entender alguns conceitos ecológicos importantes tais como o conceito de interação (Petriere, 1992). Conhecendo este conceito sabemos que as populações se relacionam para persistirem e portanto tendem a aumentar de tamanho. A partir disto surgiu o primeiro modelo matemático de crescimento proposto por Malthus em 1798. Este é o modelo mais simples para o crescimento populacional pois considera uma taxa de crescimento constante (não dependente do tamanho da população): $r = b - m$, onde b é a taxa de natalidade e m é a taxa de mortalidade específicas da população estudada. Denotando por N_t o número de indivíduos na população no tempo t , a equação proposta por Malthus para o crescimento populacional é da dada por:

$$\frac{d\ln(N_t)}{dt} = r \quad (1)$$

Se $r > 0$ a população cresce exponencialmente para o infinito e se $r < 0$ tem-se a extinção da população. O modelo (1) não é adequado para situações reais pois além de considerar uma taxa constante de crescimento, que leva a um crescimento ilimitado, não considera a aleatoriedade dos processos naturais. A sobrevivência ou extinção de espécies animais cujas populações estão ameaçadas é inerentemente estocástica, ou seja, o crescimento de uma população inevitavelmente apresenta flutuações estocásticas provocadas por inúmeras causas imprevisíveis. A variabilidade devida à fatores ambientais (abióticos) pode ser introduzida no modelo por um processo estocástico. Além disso é razoável supor que o crescimento depende do tamanho da população, ou seja, a taxa de crescimento não é simplesmente a diferença entre as taxas de natalidade e mortalidade mas é uma função do tamanho da população naquele período de tempo. A forma geral dos modelos com taxa de crescimento dependendo do tamanho da população e que considera o efeito das condições ambientais é escrita de forma mais apropriada como:

$$\ln(N_t) - \ln(N_{t_0}) = \int_{t_0}^t r(N_s) ds + \int_{t_0}^t \sigma(N_s) dW_s \quad (2)$$

onde W_t é um processo de Wiener (W_t é normalmente distribuído com incrementos independentes). Assim se $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ então $W_{t_2} - W_{t_1}$ é estatisticamente independente de $W_{t_4} - W_{t_3}$, portanto

$$W_{t_j} - W_{t_i} \sim N(0, |t_j - t_i|) \quad (3)$$

A equação (2) pode ser escrita de forma aproximada como:

$$\ln(N_{t+1}) - \ln(N_t) = r(N_t) + \sigma(N_t)(W_{t+1} - W_t) \quad (4)$$

Assumindo que $\sigma(N_s) = \sigma$ é constante e denotando por $\epsilon_t = W_{t+1} - W_t$, então ϵ_t é um ruído branco com $E(\epsilon_t) = 0$, $E(\epsilon_t^2) = \tau^{-1}$, ($\tau = 1/\sigma^2 > 0$) e $E(\epsilon_t, \epsilon_{t+k}) = 0$, $k \neq 0$. Também podemos escrever esta forma geral como:

$$N_{t+1} = N_t \exp\{r(N_t) + \epsilon_t\} \quad (5)$$

O modelo de Richards é um modelo do tipo (5) com uma taxa de crescimento $r(N_t)$ proposta por Richards (Richards, 1959). Este modelo que é uma generalização dos modelo logístico e Gompertz inicialmente era usado para o crescimento do animal (peso \times idade) e depois para o crescimento populacional (Fitzhugh, 1974). Na maioria dos trabalhos encontrados na literatura os dois casos particulares são mais utilizados devido às dificuldades de se fazer inferência dos parâmetros do modelo não linear de Richards (Ludwig, 1996, 1999).

O uso da teoria assintótica e a abordagem clássica do problema de inferência dos parâmetros do modelo de Richards apresenta algumas dificuldades devido ao mal condicionamento da matriz de informação de Fisher associada ao modelo. Neste trabalho mostramos que o modelo de Richards pode ser interpretado como um modelo logístico quando aplicamos aos dados a transformação de potência de Box e Cox (Box e Cox, 1964) e essa interpretação leva ao uso do método de máxima verossimilhança profile (Barndorff-Nielsen e Cox, 1994) tornando viável a inferência dos parâmetros. Outra consideração importante para os modelos de crescimento populacional é sobre a natureza aleatória dos parâmetros desses modelos. Esse fato torna de fundamental importância a abordagem Bayesiana do problema de inferência dos parâmetros destes modelos. Este trabalho apresenta uma abordagem Bayesiana para o problema de inferência de parâmetros do modelo de Richards. As estimativas Bayesianas foram obtidas combinando-se algoritmos de MCMC como o amostrador de Gibbs e o Metropolis-Hastings (Gilks et al, 1996) e os resultados obtidos foram comparados com as estimativas de máxima verossimilhança profile.

2. Modelo de Richards

Podemos escrever o modelo de Richards na forma discreta como a seguir. Considerando um processo aleatório para representar a variabilidade devida a fatores ambientais, denotada por ϵ_t ,

$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{\frac{\rho}{q} \left[1 - \left(\frac{N_t}{K}\right)^q\right]\right\} \exp\{\epsilon_t\} \quad (6)$$

Observando a equação em (6) vemos que a taxa de crescimento de Richards é dada por

$$r(N_t) = \frac{\rho}{q} \left[1 - \left(\frac{N_t}{K}\right)^q\right] \quad (7)$$

O parâmetro ρ representa a chamada taxa de crescimento intrínseca da população e não depende do tamanho da população, ou seja, ela é simplesmente a diferença entre as taxas de natalidade e mortalidade daquela população em questão: $\rho = d - m$.

O parâmetro K é o nível de saturação da população, que é o tamanho limite para a população a partir do qual a taxa de crescimento torna-se decrescente. Este nível é imposto pelo meio (basicamente por escassez de alimento e espaço).

O parâmetro q também representa um fator intrínseco da população. No caso em que o modelo é usado para o peso dos animais, este fator está relacionado com o metabolismo dos animais o que facilita a interpretação. No caso de crescimento populacional este parâmetro descreve a forma como a taxa $r(N_t)$ diminui quando N_t aumenta, ou seja, se $q > 1$ temos uma queda suave, se $q < 1$ temos uma queda mais rápida e se $q = 1$ a queda é linear.

A taxa de Richards pode ser considerada geral porque variando o valor do parâmetro q temos uma infinidade de modelos. Para simplificar, podemos escrever a taxa de Richards na forma:

$$r(N_t) = \alpha_0 + \alpha_1 N_t^q \quad (8)$$

com $\alpha_0 = \frac{\rho}{q}$ e $\alpha_1 = \frac{-\rho}{qK^q}$. Assim temos com este modelo $K = \left(\frac{-\alpha_0}{\alpha_1}\right)^{1/q}$ e $\rho = q\alpha_0$

Nota 1: Modelos Logístico e Gompertz

O modelo de Richards tem, como casos particulares, dois modelos muito usados nestes estudos: O modelo logístico e o modelo Gompertz. O modelo logístico equivale ao modelo Richards com $q = 1$ e o modelo Gompertz é obtido quando consideramos o limite da taxa de crescimento Richards (7) quando $q \rightarrow 0$.

Modelo Logístico: Com $q = 1$ em (7) podemos escrever a taxa de crescimento logística:

$$r(N_t) = \rho \left[1 - \frac{N_t}{K}\right] \quad (9)$$

Esta taxa pode ser escrita na forma linear:

$$r(N_t) = \alpha_0 + \alpha_1 N_t \quad (10)$$

com $\alpha_0 = \rho$ e $\alpha_1 = -\frac{\rho}{K} \Rightarrow K = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1}$

Modelo Gompertz: A taxa de crescimento Gompertz é obtida considerando o limite da taxa de crescimento Richards (7) quando $q \rightarrow 0$, então temos:

$$\lim_{q \rightarrow 0} r(N_t) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\rho}{q} \left[1 - \left(\frac{N_t}{K}\right)^q\right] = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\rho}{q} \left[1 - \exp\left\{q \ln\left(\frac{N_t}{K}\right)\right\}\right]$$

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos a taxa Gompertz:

$$\lim_{q \rightarrow 0} r(N_t) = \lim_{q \rightarrow 0} \left[-\rho \ln\left(\frac{N_t}{K}\right) \exp\left\{q \ln\left(\frac{N_t}{K}\right)\right\}\right] = -\rho \ln\left(\frac{N_t}{K}\right)$$

Assim como a taxa logística, a taxa Gompertz é escrita na forma linear:

$$r(N_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(N_t) \quad (11)$$

com $\alpha_0 = \rho \ln(K)$ e $\alpha_1 = -\rho \Rightarrow K = \exp\left\{\frac{-\alpha_0}{\alpha_1}\right\}$

3. Transformação de Box e Cox e o Modelo de Richards

O cálculo de estimadores clássicos (mínimos quadrados ou máxima verossimilhança) para os parâmetros do modelo de Richards apresenta diversas dificuldades. Um problema encontrado é que o uso de métodos numéricos (Newton, quase-Newton etc) para maximizar a função de verossimilhança não é possível pois a matriz hessiana (matriz das derivadas segundas da função) para

esse modelo, pode ser singular. Para contornar esta dificuldade vamos interpretar o modelo de Richards como um modelo logístico quando aplicamos aos dados a transformação de Box e Cox (Box e Cox, 1964). Neste caso propomos o cálculo dos estimadores de máxima verossimilhança profile (Barndorff-Nielsen e Cox, 1994) para os parâmetros do modelo de Richards, onde o parâmetro de forma q coincide com o parâmetro da transformação de potência de Box e Cox. Para verificar essa coincidência vamos considerar a transformação de Box e Cox dada por:

$$N_t^{(q)} = \begin{cases} N_t^q, & q > 0 \\ \ln(N_t), & q = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Então o modelo logístico para os dados transformados tem a seguinte forma:

$$N_{t+1}^q = N_t^q \exp\left\{\rho\left(1 - \frac{N_t^q}{K_L}\right)\right\} \exp\{z_t\}, \quad q > 0 \quad (13)$$

Elevando ambos os lados da equação (13) à potência $1/q$, chegamos ao modelo de Richards dado em (7):

$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{\frac{\rho}{q}\left[1 - \left(\frac{N_t}{K_R}\right)^q\right]\right\} \exp\{\epsilon_t\}, \quad q > 0 \quad (14)$$

considerando em (14) $K_R = K_L^{1/q}$ e o ruído $\epsilon_t = z_t/q$.

Para fazer inferência dos parâmetros do modelo (13) é conveniente adotar a notação $N_t^{(q)} = N_t^q$, $q > 0$, e escrever o modelo logístico para $N_t^{(q)}$, dado por:

$$N_{t+1}^{(q)} = N_t^{(q)} \exp\left\{\rho\left[1 - \frac{N_t^{(q)}}{K_L}\right]\right\} \exp\{z_t\} \quad (15)$$

Fazendo $y_t^{(q)} = \ln(N_{t+1}^{(q)}/N_t^{(q)})$, temos a equação (15) escrita na forma de um modelo linear:

$$y_t^{(q)} = \alpha_0 + \alpha_1 N_t^{(q)} + z_t \quad (16)$$

onde $\alpha_0 = \rho$, $\alpha_1 = -\frac{\rho}{K_L}$ e z_t representa um ruído normalmente distribuído com: $E(z_t) = 0$, $E(z_t^2) = \tau_0^{-1}$ e $E(z_t z_{t+k}) = 0$ para $k \neq 0$.

4. Função de Verossimilhança Profile (FVP)

Para estimar os parâmetros do modelo Richards com a transformação de Box e Cox utilizando a FVP, vamos considerar a equação (16) do modelo logístico:

$$y_t^{(q)} = \alpha_0 + \alpha_1 N_t^{(q)} + z_t$$

Com o modelo escrito nessa forma não temos dificuldades para estimar α_0 e α_1 para valores fixos de q e assim podemos encontrar uma estimativa \hat{q} para q que maximiza a FVP. Com as estimativas dos parâmetros $\hat{\alpha}_0$ e $\hat{\alpha}_1$ podemos calcular estimativas dos parâmetros ρ e K usando as relações:

$$\hat{\rho} = \hat{\alpha}_0 \quad \text{e} \quad \hat{K} = \left(-\frac{\hat{\alpha}_0}{\hat{\alpha}_1}\right)^{1/\hat{q}} \quad (17)$$

Como $z_t \sim \text{Normal}(0, \tau_0^{-1})$, a função densidade de $Y_t^{(q)}|N_t^{(q)}$ é Normal com média $\alpha_0 + \alpha_1 N_t^{(q)}$ e variância $\text{var}(z_t) = \tau_0^{-1}$, de forma que:

$$P(Y_t^{(q)}|N_t^{(q)}) = \left(\frac{\tau_0}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\tau_0}{2}(y_t^{(q)} - \alpha_0 - \alpha_1 N_t^{(q)})^2\right\} \quad (18)$$

Como estamos interessados em calcular os valores que maximizam a função de verossimilhança dos dados originais, determinamos esta função considerando o jacobiano da transformação. Temos que se $N_t^{(q)} = N_t^q$, então:

$$P(N_{t+1}|N_t) = P(N_{t+1}^{(q)}|N_t^{(q)}) \left| \frac{dN_{t+1}^{(q)}}{dN_{t+1}} \right| = P(N_{t+1}^{(q)}|N_t^{(q)}) q N_{t+1}^{q-1} \quad (19)$$

Mas de acordo com (16), temos:

$$P(N_{t+1}^{(q)}|N_t^{(q)}) = P(Y_t^{(q)}|N_t^{(q)}) \left| \frac{dY_t^{(q)}}{dN_{t+1}^{(q)}} \right|$$

Com $P(Y_t^{(q)}|N_t^{(q)})$ dado em (18) e $Y_t^{(q)} = \ln\left(\frac{N_{t+1}^{(q)}}{N_t^{(q)}}\right)$ temos que a densidade $P(N_{t+1}^{(q)}|N_t^{(q)})$ é dada por:

$$P(N_{t+1}^{(q)}|N_t^{(q)}) = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}(y_t^{(q)} - \alpha_0 - \alpha_1 N_t^{(q)})^2\right\} \frac{1}{N_{t+1}^q} \quad (20)$$

Finalmente, podemos escrever a densidade condicional $P(N_{t+1}|N_t)$ como:

$$P(N_{t+1}|N_t) = \left(\frac{\tau_0}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\tau_0}{2}(y_t^{(q)} - \alpha_0 - \alpha_1 N_t^{(q)})^2\right\} \frac{1}{N_{t+1}^q} q N_{t+1}^{q-1} \quad (21)$$

Em notação matricial, temos o vetor de observações denotado por $\underline{D} = (N_1, \dots, N_n)$, os vetores dos dados transformados $\underline{Y}^{(q)} = (y_1^{(q)}, \dots, y_n^{(q)})'$, $\underline{N}^{(q)} = (N_1^{(q)}, \dots, N_n^{(q)})'$ com $q > 0$ e o vetor de parâmetros $\underline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)$. A função de verossimilhança é dada por:

$$L(q, \underline{\alpha}, \tau | \underline{D}) = \left(\frac{\tau_0}{2\pi}\right)^{(n-1)/2} \exp\left\{-\frac{\tau_0}{2}(\underline{Y}^{(q)} - \underline{X}^{(q)}\underline{\alpha})'(\underline{Y}^{(q)} - \underline{X}^{(q)}\underline{\alpha})\right\} \frac{q^{n-1}}{\prod_{t=1}^{n-1} N_{t+1}} \quad (22)$$

$$\text{com } \underline{X}^{(q)} = \begin{pmatrix} 1 & N_1^{(q)} \\ \cdot & \cdot \\ 1 & N_n^{(q)} \end{pmatrix} = [\underline{1} \quad \underline{N}^{(q)}]$$

Os valores de $\underline{\alpha}$ e τ que maximizam a função (22) são os mesmos que maximizam o logaritmo dessa função, então denotando $l(q, \underline{\alpha}, \tau_0 | \underline{D}) = \ln[L(q, \underline{\alpha}, \tau_0 | \underline{D})]$, temos:

$$l(q, \underline{\alpha}, \tau_0 | \underline{D}) = \frac{(n-1)}{2} [\ln(\tau_0) - \ln(2\pi)] - \frac{\tau_0}{2} (\underline{Y}^{(q)} - \underline{X}^{(q)} \underline{\alpha})' (\underline{Y}^{(q)} - \underline{X}^{(q)} \underline{\alpha}) + \\ + (n-1) \ln(q) - \sum_{t=1}^{n-1} \ln(N_{t+1}) \quad (23)$$

Para o cálculo das estimativas dos parâmetros $\underline{\alpha}$, τ_0 e q considerar (23) como a função de verossimilhança profile que denotamos por $l_p(q | \underline{D}) = l(q, \hat{\underline{\alpha}}_q, \hat{\tau}_{0q} | \underline{D})$, onde $\hat{\underline{\alpha}}_q$ e $\hat{\tau}_{0q}$ são as estimativas de máxima verossimilhança de $\underline{\alpha}$ e τ_0 para q fixo. Calculando $l_p(q | \underline{D})$ para os valores de q em um intervalo $[a, b]$ podemos calcular o máximo da função e assim identificar a estimativa de máxima verossimilhança \hat{q} para q . Além disso podemos calcular um intervalo de confiança para q de acordo com a relação:

$$2[l_p(\hat{q}) - l_p(q)] \rightarrow \chi_{\nu_q}^2 \quad (24)$$

onde ν_q é o número de componentes independentes em q . Maiores detalhes sobre este método podem ser encontrados em Barndoff et ali., 1994.

5. Cálculo de Intervalos de Confiança para os Parâmetros ρ , K e τ

Considerar o vetor de parâmetros $\underline{\gamma} = (\alpha_1, \alpha_2, \tau_0, q_0)$ e a relação com o vetor de parâmetros de interesse $\underline{\theta} = (\rho, K, \tau, q)$ dada por $\alpha_1 = \frac{\rho}{q}$, $\alpha_2 = \frac{-\rho}{qK^q}$, $\tau_0 = \frac{\tau}{q^2}$, $q_0 = q$. Podemos calcular os intervalos de confiança para $\underline{\theta}_q = (\rho_q, K_q, \tau_q)$ usando a propriedade de normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança profile $\hat{\underline{\theta}}_q \sim Normal[\underline{\theta}_q, I_q^{-1}(\hat{\underline{\theta}}_q)]$ onde $I_q(\hat{\underline{\theta}}_q)$ é a matriz de informação de Fisher observada para $\underline{\theta}$ dado q .

Denotando por $I(\hat{\underline{\gamma}})$ a matriz de informação de Fisher observada para os parâmetros $\underline{\gamma}$, e $I(\hat{\underline{\theta}})$ a matriz de informação de Fisher para $\underline{\theta}$ podemos calcular $I(\hat{\underline{\theta}})$ usando o jacobiano da transformação dado pela matriz $J_{\underline{\gamma}\underline{\theta}}$ e a relação (25).

$$I(\hat{\underline{\theta}}) = J'_{\underline{\gamma}\underline{\theta}} I(\hat{\underline{\gamma}}) J_{\underline{\gamma}\underline{\theta}} = \begin{pmatrix} I_{\hat{\theta}_q \hat{\theta}_q} & I_{\hat{\theta}_q q} \\ I_{q \hat{\theta}_q} & I_{qq} \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$J_{\underline{\gamma}\underline{\theta}} = \frac{\partial \underline{\gamma}}{\partial \underline{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{q} & 0 & 0 & \frac{-\rho}{q^2} \\ \frac{-1}{qK^q} & \frac{\rho}{K^{q+1}} & 0 & \frac{\rho}{q^2 K^q} + \frac{\rho \ln(K)}{q K^q} \\ 0 & 0 & \frac{1}{q^2} & \frac{-2\tau}{q^3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Devido ao mal condicionamento da matriz não é possível calcular $I^{-1}(\hat{\underline{\theta}})$ diretamente mas podemos usar a relação $\hat{V}(\hat{\underline{\theta}}_q) = [I_{\hat{\theta}_q \hat{\theta}_q} - I_{\hat{\theta}_q q} I_{qq}^{-1} I'_{\hat{\theta}_q q}]^{-1}$ para o cálculo aproximado da variância estimada para $\underline{\theta}_q$ (Seber, 1989).

Nota 2: As dificuldades da Inferência Clássica

Uma dificuldade que apresentamos no uso desses métodos é que as amostras, nos estudos de crescimento de populações animais (excluindo insetos), geralmente são pequenas e isto impossibilita o uso da teoria assintótica, ou seja, não podemos considerar a propriedade assintótica de normalidade dos estimadores de máxima verossimilhança e também dos estimadores de máxima verossimilhança profile. Este fato empobrece a inferência uma vez que temos apenas estimativas pontuais para os parâmetros. Uma alternativa é o uso da inferência bayesiana, que também é justificado pelo fato de que os parâmetros dos modelos de crescimento populacional são variáveis aleatórias.

6. Inferência Bayesiana para o Modelo Richards

A abordagem Bayesiana é mais adequada para este tipo de problema uma vez que os parâmetros de interesse ρ e K são variáveis aleatórias e também pelo fato de que esses estudos contam com poucas observações. Para destacar que, nesta abordagem, os parâmetros são variáveis aleatórias vamos substituir o nome do vetor de parâmetros $\underline{\alpha}$ por $\underline{\beta}$. Para fazer a inferência Bayesiana dos parâmetros do modelo de Richards propomos a utilização do método de simulação de Monte Carlo em cadeias de Markov (Gilks et al, 1996), utilizamos especificamente o algoritmo amostrador de Gibbs (Gelfand e Smith, 1990) em conjunto com o algoritmo Metropolis-Hasting (Chib e Greenberg, 1995). Para encontrar a densidade a posteriori conjunta dos parâmetros do modelo vamos reescrever a função de verossimilhança dada em (23) como:

$$L(q, \underline{\beta}, \tau_0 | \underline{D}) = \left(\frac{\tau_0}{2\pi} \right)^{(n-1)/2} \exp \left\{ - \frac{\tau_0}{2} (B_q(\underline{\beta}) + C_q) \right\} \frac{q^{n-1}}{\prod_{t=1}^{n-1} N_{t+1}} \quad (27)$$

onde $B_q(\underline{\beta}) = (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_q)(X^{(q)'} X^{(q)})(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_q)$, $C_q = (Y^{(q)} - X^{(q)} \hat{\underline{\beta}}_q)' (Y^{(q)} - X^{(q)} \hat{\underline{\beta}}_q)$ e $\hat{\underline{\beta}}_q$ é o estimador de mínimos quadrados de $\underline{\beta}$ para q fixo.

A abordagem bayesiana combina a função de verossimilhança com uma função densidade de probabilidade conjunta dos parâmetros, que chamamos densidade a priori. Esta densidade é baseada em informações fornecidas, a priori, por especialistas da área em questão (no caso ecologistas, biólogos etc).

Usando a fórmula de Bayes podemos combinar essas funções e assim obter a chamada densidade conjunta a posteriori para os parâmetros, denotada por $\pi(q, \underline{\beta}, \tau_0 | \underline{D})$. A partir da densidade conjunta a posteriori podemos obter as densidades marginais a posteriori e, com estas, calcular as estimativas de cada parâmetro.

Na falta de informações a priori podemos construir uma densidade a priori não informativa. Neste trabalho optamos pelo uso da densidade a priori não informativa de Jeffreys (Box e Tiao, 1974). A densidade conjunta a priori para $q, \underline{\beta}, \tau_0$ é dada por:

$$\pi_0(q, \underline{\beta}, \tau_0) \propto \pi_1(\underline{\beta}, \tau_0 | q) \pi_2(q) \quad (28)$$

onde $\pi_1(\underline{\beta}, \tau_0 | q) \propto \frac{1}{\tau_0}$ é a priori não informativa de Jeffreys e $\pi_2(q)$ é uma constante com $0 < a \leq q \leq b$.

Podemos escrever a densidade conjunta a posteriori, combinando a função de verossimilhança (27) com a densidade conjunta a priori (28):

$$\pi(q, \underline{\beta}, \tau_0 | \underline{D}) \propto \tau_0^{\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\tau_0}{2}[C_q + (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_q)(X^{(q)'} X^{(q)})(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_q)]\right\} q^{n-1} \quad (29)$$

O estimador bayesiano do vetor de parâmetros $\underline{\gamma} = (q, \underline{\beta}, \tau_0)$ é aquele que minimiza o valor esperado a posteriori de uma função perda denotado por $E_\pi[u(\underline{\gamma}, \hat{\underline{\gamma}})]$. Se consideramos a função de perda quadrática temos $\hat{\underline{\gamma}} = E_\pi[\underline{\gamma}]$. O cálculo deste valor esperado com relação à densidade a posteriori (29) só pode ser feito por aproximação numérica e portanto usamos os algoritmos amostrador de Gibbs e Metropolis-Hastings. Para a aplicação desses algoritmos é necessário o cálculo das densidades condicionais a posteriori.

As densidades condicionais a posteriori $\pi(\tau_0 | q, \underline{\beta}, \underline{D})$ e $\pi(\underline{\beta} | q, \underline{D})$ podem ser obtidas diretamente de (29) e são dadas por:

$$\pi(\tau_0 | q, \underline{\beta}, \underline{D}) \propto \tau_0^{\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\tau_0}{2}[C_q + (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_q)(X^{(q)'} X^{(q)})(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_q)]\right\} \quad (30)$$

$$\tau_0 | q, \underline{\beta}, \underline{D} \sim \text{Gama}\left[\frac{n}{2}, \frac{1}{2}[B_q(\underline{\beta}) + C_q]\right]$$

$$\pi(\underline{\beta} | q, \tau_0, \underline{D}) \propto \exp\left\{-\frac{\tau_0}{2}(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_q)(X^{(q)'} X^{(q)})(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_q)\right\} \quad (31)$$

$$\underline{\beta} | q, \tau_0, \underline{D} \sim \text{Normal}\left[\hat{\underline{\beta}}_q, (X^{(q)'} X^{(q)})^{-1}\right]$$

A falta de informação a priori sobre o parâmetro q dificulta a escolha de um núcleo de transição para gerar amostras desse parâmetro no algoritmo Metropolis-Hastings. Supondo que $0 < a \leq q \leq b$, uma alternativa é fazer a reparametrização a seguir:

$$\phi_q = \log\left(\frac{q-a}{b-q}\right) \quad (32)$$

onde temos que $\phi_q = -\infty$ se $q = a$ e $\phi_q = +\infty$ se $q = b$. Considerando ϕ com uma densidade a priori Normal com média $(a+b)/2$ e variância ξ^2 , podemos usar esta densidade como núcleo de transição, no algoritmo Metropolis-Hastings, para gerar amostras de ϕ_q . Então podemos escrever a densidade condicional de ϕ_q como:

$$\pi(\phi_q | \tau_0, \underline{\beta}, \underline{D}) \propto N((a+b)/2, \xi^2) \psi(\tau_0, \underline{\beta}, q, \underline{D}) \quad (33)$$

com

$$\psi(\tau_0, \underline{\beta}, q, \underline{D}) = \exp\left\{-\frac{\tau_0}{2}[C_q + (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_q)(X^{(q)'} X^{(q)})(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_q)]\right\} q^{n-1} \quad (34)$$

A amostra do parâmetro q pode ser obtida com os valores gerados de ϕ usando a inversa da transformação (32) dada por $q = (a + be^\phi)/(1 + e^\phi)$. As amostras geradas com essas densidades

condicionais através dos algoritmos de simulação de Monte Carlo (amostrador de Gibbs e Metropolis-Hastings) podem ser usadas para construir amostras das densidades marginais a posteriori dos parâmetros de interesse ρ e K usando a relação (8) e $\tau = \tau_0/q^2$. Com elas temos condições de avaliar o comportamento dos parâmetros com estimativas pontuais, intervalos de credibilidade, histogramas e outras estatísticas de interesse como a moda a posteriori, por exemplo. A convergência dos algoritmos pode ser avaliada com o critério de convergência de Gelman e Rubin (Gelman e Rubin, 1992).

Nota 3. Inferência Bayesiana para os Modelos Logístico e Gompertz

No caso dos modelos logístico e Gompertz é possível calcular diretamente as densidades marginais a posteriori de $\underline{\beta}$ e τ e assim obter os estimadores Bayesianos correspondentes de ρ e K através das relações dadas na Nota 1. Para verificar essa particularidade desses modelos vamos considerar a função de verossimilhança para o modelo geral de regressão linear $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \epsilon_t$ e os resíduos $\epsilon_t = y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t$ i.i.d. Normal $(0, \tau^{-1})$.

$$L(\underline{\beta}, \tau | \underline{D}) = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}\left[C + (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})(X'X)(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})\right]\right\} \quad (35)$$

onde $C = (Y - X\hat{\underline{\beta}})'(Y - X\hat{\underline{\beta}})$.

Considerar a densidade a priori não informativa de Jeffreys (Box e Tiao, 1974) dada por:

$$\pi_0(\underline{\beta}, \tau) \propto \frac{1}{\tau} \quad (36)$$

A densidade conjunta a posteriori é obtida combinando a função de verossimilhança (35) e a densidade conjunta a priori dada em (36). Assim temos:

$$\pi(\underline{\beta}, \tau | \underline{D}) \propto \pi_0(\underline{\beta}, \tau) L(\underline{\beta}, \tau | \underline{D}) \propto \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}\left[C + (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})(X'X)(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})\right]\right\} \quad (37)$$

Para calcular a densidade marginal a posteriori de τ , basta integrar a densidade conjunta com relação a $\underline{\beta}$ e temos:

$$\pi(\tau | \underline{D}) = \int \pi(\underline{\beta}, \tau | \underline{D}) d\underline{\beta} = \int \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}\left[C + (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})(X'X)(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})\right]\right\} d\underline{\beta}$$

$$\pi(\tau | \underline{D}) = \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}C\right\} \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi|(X'X)|^{-1/2}}}$$

$$\pi(\tau | \underline{D}) \propto \tau^{\frac{n+1}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}C\right\} \sim \text{Gama}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{C}{2}\right) \quad (38)$$

Da mesma forma, para calcular a densidade marginal a posteriori de $\underline{\beta}$, integrando a densidade conjunta a posteriori (37) com relação a τ , temos:

$$\pi(\underline{\beta} | \underline{D}) = \int \pi(\underline{\beta}, \tau | \underline{D}) d\tau = \int \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}\left[C + (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})(X'X)(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})\right]\right\} d\tau$$

$$\pi(\underline{\beta} | D) \propto \frac{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}{\left[C + (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})(X'X)(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}) \right]^{\frac{n}{2}}} \propto \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{c} (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})(X'X)(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}) \right]^{\frac{n}{2}}} \quad (39)$$

Portanto a densidade marginal a posteriori de τ é a densidade Gama $\left(\frac{n+1}{2}, \frac{C}{2}\right)$ e a densidade marginal a posteriori para $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ é a densidade t-Student bivariada centrada em $\hat{\underline{\beta}}$, com matriz de precisão $C^{-1}(X'X)$ e $(n-2)$ graus de liberdade. Com estas densidades marginais a posteriori podemos calcular estimativas dos parâmetros dos modelos lineares como o Gompertz e o logístico.

7. Aplicação

Para avaliar o desempenho da técnica de máxima verossimilhança profile (MVP) e também da abordagem Bayesiana, utilizamos dois conjuntos de dados: a *amostra 1* gerada com um modelo logístico ($q = 1$) e a *amostra 2* gerada com o modelo de Richards ($q = 0.6$).

As amostras utilizadas foram extraídas de um conjunto de 5000 valores gerados com os parâmetros populacionais $K = 9000$ e $\rho = 0.7$ e em cada caso foram considerados somente os últimos 1000 valores gerados, evitando assim o efeito do tamanho inicial da população dado no instante $t = 0$.

As amostras geradas são apresentadas em escala de $N_t/1000$, nas Figuras 1(a) e 1(b) a seguir:

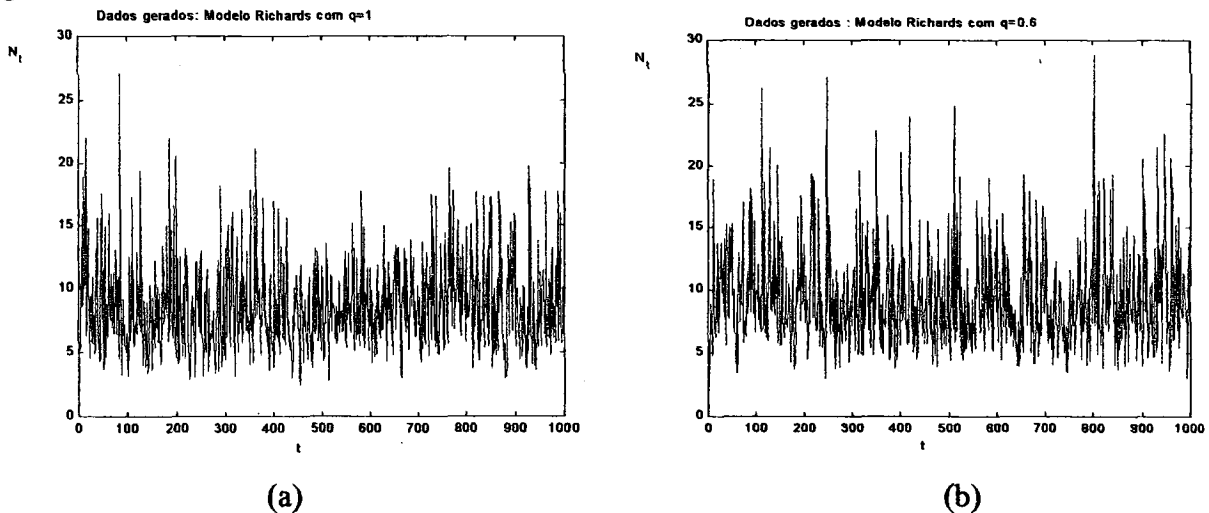
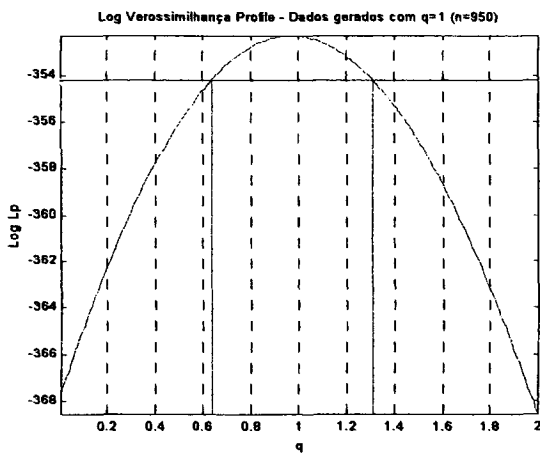


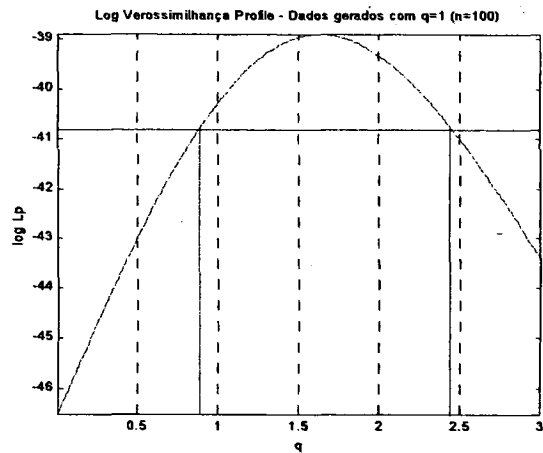
Figura 1. Simulação de uma população animal com $K = 9000$ e $\rho = 0.7$ sendo
 (a) *amostra 1*: gerada com modelo logístico ($q = 1$) e
 (b) *amostra 2*: gerada com modelo Richards ($q = 0.6$)

Para comparar os dois métodos de inferência em função do tamanho das amostras, aplicamos as duas técnicas para estimar os parâmetros considerando amostras grandes, com $n = 950$ observações e amostras pequenas, com $n = 100$ observações, extraídas de cada uma das amostras geradas.

Nas Figuras 2(a) e 2(b) temos os gráficos do logaritmo das funções de verossimilhança profile nos quais podemos observar os intervalos com 95% de confiança (I.C. 95%) para q , para a amostra 1 quando consideramos $n = 950$ e $n = 100$ observações respectivamente.



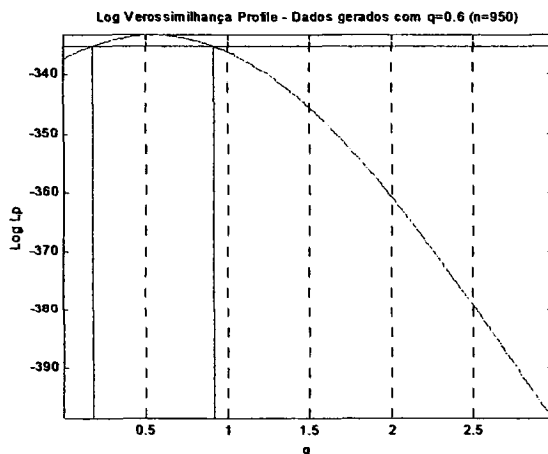
(a) I.C. para $q \in (0.64; 1.31)$



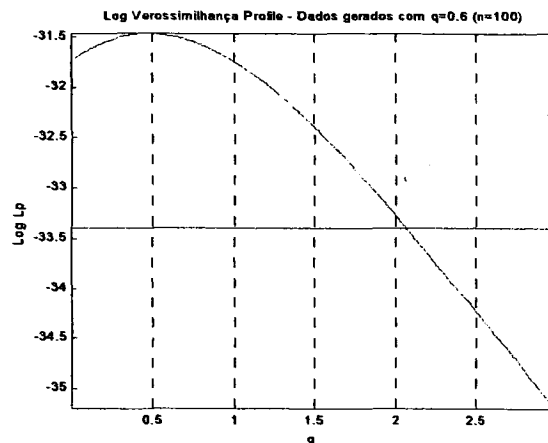
(b) I.C. para $q \in (0.89; 2.45)$

Figura 2. Log Verossimilhança profile para a amostra 1 com I.C. 95% para q com: (a) $n = 950$ e (b) $n = 100$ observações.

Nas Figuras 3(a) e 3(b) apresentamos os gráficos do logaritmo das funções de verossimilhança profile para a amostra 2 ($q = 0.6$) e os intervalos de confiança (I.C. 95%) para q , calculados com $n = 950$ e $n = 100$ observações respectivamente.



(a) I.C. para $q:(0.18; 0.92)$



(b) I.C. para $q:(10^{-6}; 2.07)$

Figura 3. Log da verossimilhança profile para amostra 2 com I.C. 95% para q com: (a) $n = 950$ e (b) $n = 100$ observações.

As Tabelas 1, 2, apresentam as estimativas de máxima verossimilhança profile (MVP) e as estimativas Bayesianas obtidas com simulação MCMC para a amostra 1 com $n = 950$ e $n = 100$ observações, respectivamente.

Tabela 1: Amostra 1 com $n = 950$, gerada com $q = 1, \rho = 0.7, K = 9000$ e $\tau = 8$.

	MVP		Bayesiano ^(*)			
	Estimativa	I.C. (95%)	Média	Moda	I.Cred. (95%)	R
τ	8.1187	(7.3733 ; 8.8641)	7.3149	7.2742	(5.6738; 9.2534)	1.0017
q	0.9700	(0.64; 1.31)	1.0491	1.0380	(0.9422; 1.1697)	1.0036
K	8558	(8557.7 ; 8558.3)	8634	8378	(7609 ; 9874)	1.0005
ρ	0.6825	(0.6137 ; 0.7513)	0.6794	0.6825	(0.6537; 0.7042)	1.0023

^(*) A taxa de aceitação no algoritmo Metropolis-Hastings para o parâmetro q foi 21.52%

Tabela 2: Amostra 1 com $n = 100$, gerada com $q = 1, \rho = 0.7, K = 9000$ e $\tau = 8$

	MVP		Bayesiano ^(*)			
	Estimativa	I.C. (95%)	Média	Moda	I.Cred. (95%)	R
τ	7.6894	(4.0293 ; 11.3495)	5.8273	5.9677	(2.5775; 9.1007)	1.0015
q	1.64	(0.89; 2.45)	1.0524	1.0694	(0.9306; 1.1674)	1.0018
K	9244	(9242.4 ; 9245.6)	9256	8217	(5869 ; 16161)	1.0014
ρ	0.6782	(0.1364 ; 1.22)	0.7528	0.7615	(0.6595; 0.8461)	1.0000

^(*) A taxa de aceitação no algoritmo Metropolis-Hastings para o parâmetro q foi 42.05%

Nas Figuras 4 e 5 apresentamos os histogramas que representam, a menos de uma constante de normalização, as estimativas das densidades a posteriori dos parâmetros do modelo quando consideramos os dados da amostra 1 com $n = 950$ e $n = 100$, respectivamente. Esses histogramas foram construídos com uma amostra dos parâmetros, de tamanho 1000, extraída de uma amostra de tamanho 10000, gerada pelo algoritmo de simulação MCMC, da qual desprezamos os primeiros 5000 valores e selecionamos dos restantes um valor a cada 5 gerados.

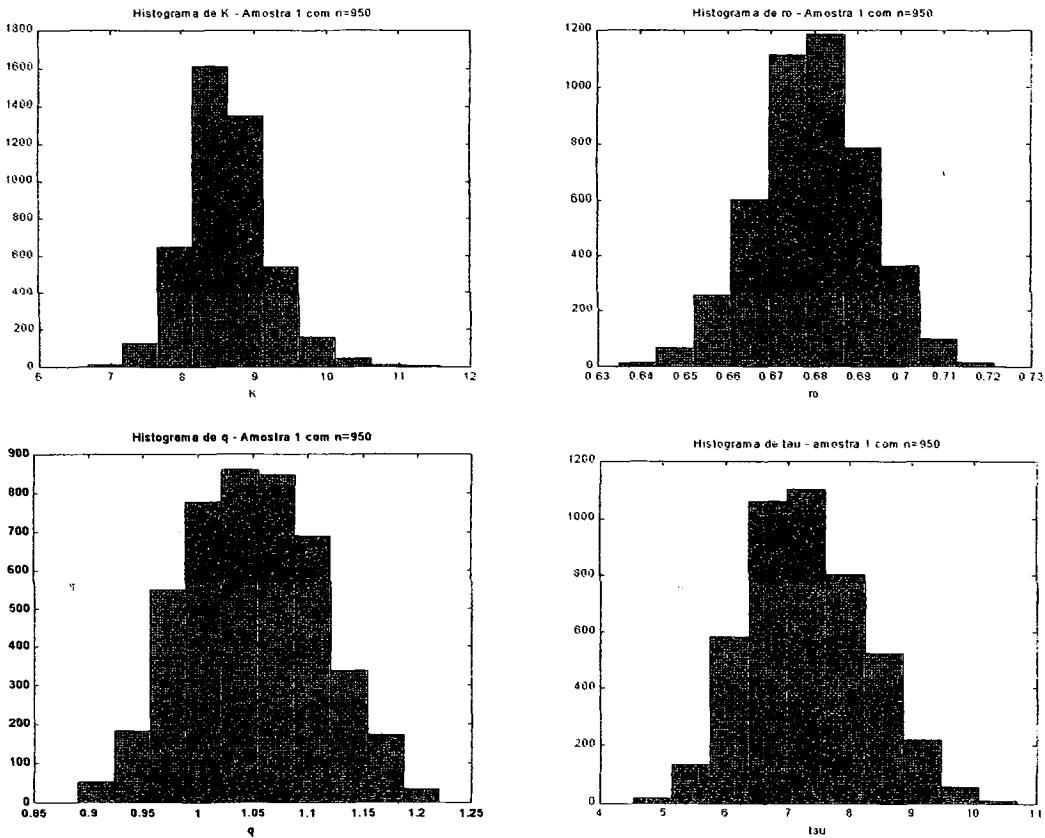


Figura 4. Histogramas dos parâmetros do modelo de Richards para a amostra 1 com $n = 950$.

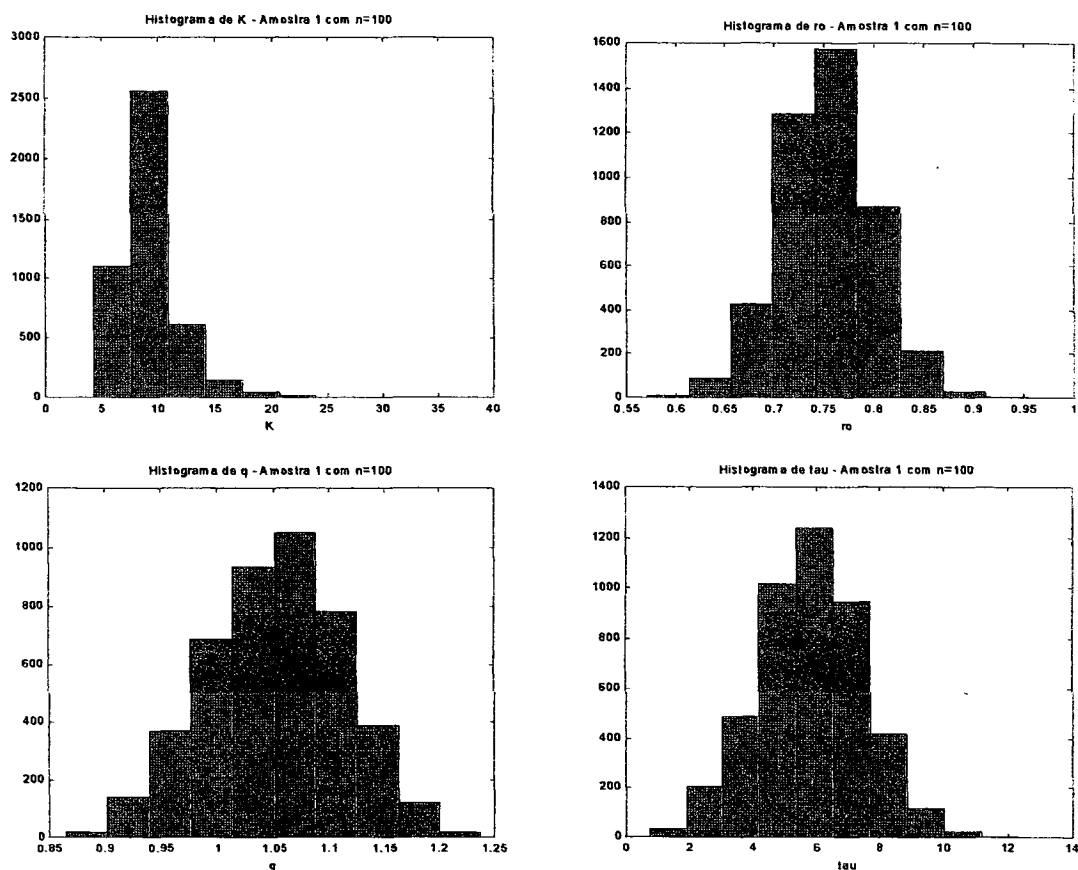


Figura 5. Histogramas dos parâmetros do modelo de Richards para a amostra 1 com $n = 100$.

Analizando os histogramas das Figuras 4 e 5 notamos que o histograma do parâmetro K apresenta, para a amostra com $n = 100$, uma forte assimetria. Este fato justifica o aumento na amplitude do intervalo de credibilidade (tabelas 1 e 2). Esta diferença deve-se ao fato das estimativas calculadas com uma amostra de tamanho 100 serem menos precisas do que no caso anterior. Os intervalos de confiança para os parâmetros ρ e τ tem amplitude muito grande o que significa que temos pouca informação sobre estes parâmetros com estes intervalos. No caso do parâmetro q vemos que a estimativa bayesiana é mais precisa do que a estimativa de MVP principalmente para a amostra de tamanho 100. Como sabemos da dificuldade de encontrar amostras grandes neste problema concluímos que o uso da abordagem bayesiana é mais adequado do que a abordagem clássica. Observamos que os intervalos de confiança para o parâmetro K são de amplitude pequena mas não incluem o verdadeiro valor do parâmetro e este fato indica que realmente o uso da teoria assintótica não é adequado.

Uma análise similar foi feita para a amostra 2 gerada com o modelo de Richards com $q = 0.6$. As estimativas de máxima verossimilhança profile (MVP) e Bayesianas obtidas com simulação MCMC para a amostra 2 com $n = 950$ e $n = 100$ observações são apresentadas nas Tabelas 3, 4 respectivamente. Resultados similares foram encontrados para estimativas dos parâmetros desse modelo, ou seja, encontramos intervalos de credibilidade com maior amplitude quando temos amostras menores ($n = 100$) refletindo assim a limitação do uso de amostras pequenas na precisão das estimativas.

Tabela 3: *Amostra 2* com $n = 950$, gerada com $q = 0.6$, $\rho = 0.7$, $K = 9000$ e $\tau = 8$.

	MVP		Bayesiano ^(*)			
	Estimativa	I.C. (95%)	Média	Moda	I. Cred (95%)	R
τ	8.4512	(7.6751 ; 9.2273)	8.4216	7.9163	(7.0303; 10.0774)	1.0023
q	0.55	(0.18; 0.92)	0.5992	0.5942	(0.5520; 0.6435)	1.0032
K	8996	(8995.9 ; 8996.1)	9033	8855	(8175 ; 9986)	1.0029
ρ	0.6591	(0.6259 ; 0.6923)	0.6574	0.6589	(0.6424; 0.6726)	1.0005

^(*)A taxa de aceitação no algoritmo Metropolis-Hastings para o parâmetro q foi 25.63%

Tabela 4: *Amostra 2* com $n = 100$, gerada com $q = 0.6$, $\rho = 0.7$, $K = 9000$ e $\tau = 8$.

	MVP		Bayesiano ^(*)			
	Estimativa	I.C. (95%)	Média	Moda	I. Cred. (95%)	R
τ	8.9219	(5.3978 ; 12.4460)	8.2251	8.4647	(4.9591; 11.6078)	0.9994
q	0.48	(10^{-6} ; 2.07)	0.5995	0.6046	(0.5542; 0.6444)	1.0000
K	9516	(9515.5 ; 9516.5)	9732	10263	(6660 ; 14066)	1.0001
ρ	0.5839	(0.4211 ; 0.7467)	0.5864	0.5938	(0.5396; 0.6340)	1.0009

^(*)A taxa de aceitação no algoritmo Metropolis-Hastings para o parâmetro q foi 50.13%

Nas Figura 6 e 7 apresentamos os histogramas que representam, a menos de uma constante de normalização estimativas das densidades a posteriori dos parâmetros do modelo quando consideramos os dados da *amostra 2* com $n = 950$ e $n = 100$, respectivamente. Esses histogramas foram construídos de forma similar ao caso anterior.

A assimetria na forma do histograma do parâmetro K para amostra de tamanho 100 (figura 7) justifica a amplitude do intervalo de credibilidade para este parâmetro. Este fato mostra que apesar do modelo de Richards ter um parâmetro a mais (o parâmetro de forma q) a precisão nas estimativas tem o mesmo comportamento do modelo logístico. No modelo de Richards uma amostra de tamanho $n = 100$, torna as estimativas menos precisas do que no caso anterior e apresenta intervalos de credibilidade mais amplos como podem ser vistos nas Tabelas 3 e 4. Os intervalos de confiança para K têm amplitude pequena mas não contém o verdadeiro valor do parâmetro. Isto também ocorre no intervalo de confiança de ρ com $n = 950$. No caso do parâmetro q observamos que a estimativa bayesiana é mais precisa do que a estimativa de MVP principalmente com a amostra de tamanho 100. Este fato reforça que o uso da abordagem bayesiana é mais adequado para a solução deste problema.

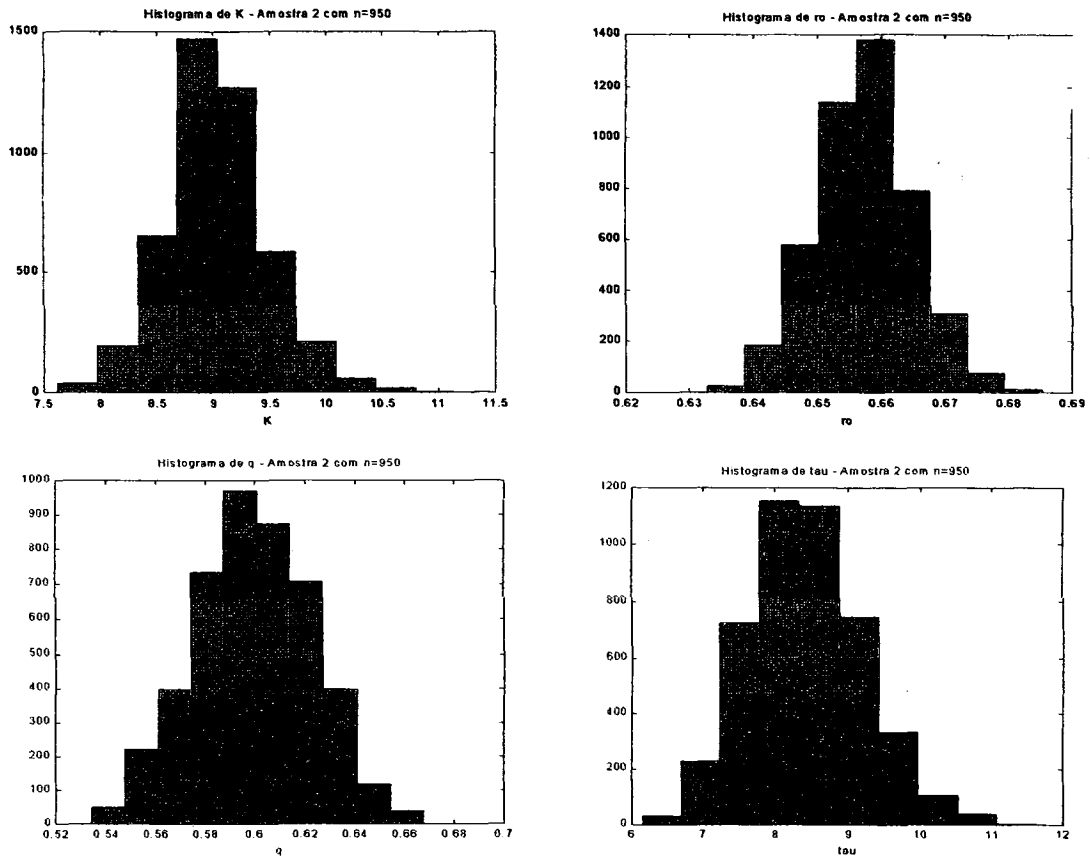


Figura 6. Histogramas dos parâmetros do modelo de Richards para a amostra 2 com $n = 950$.

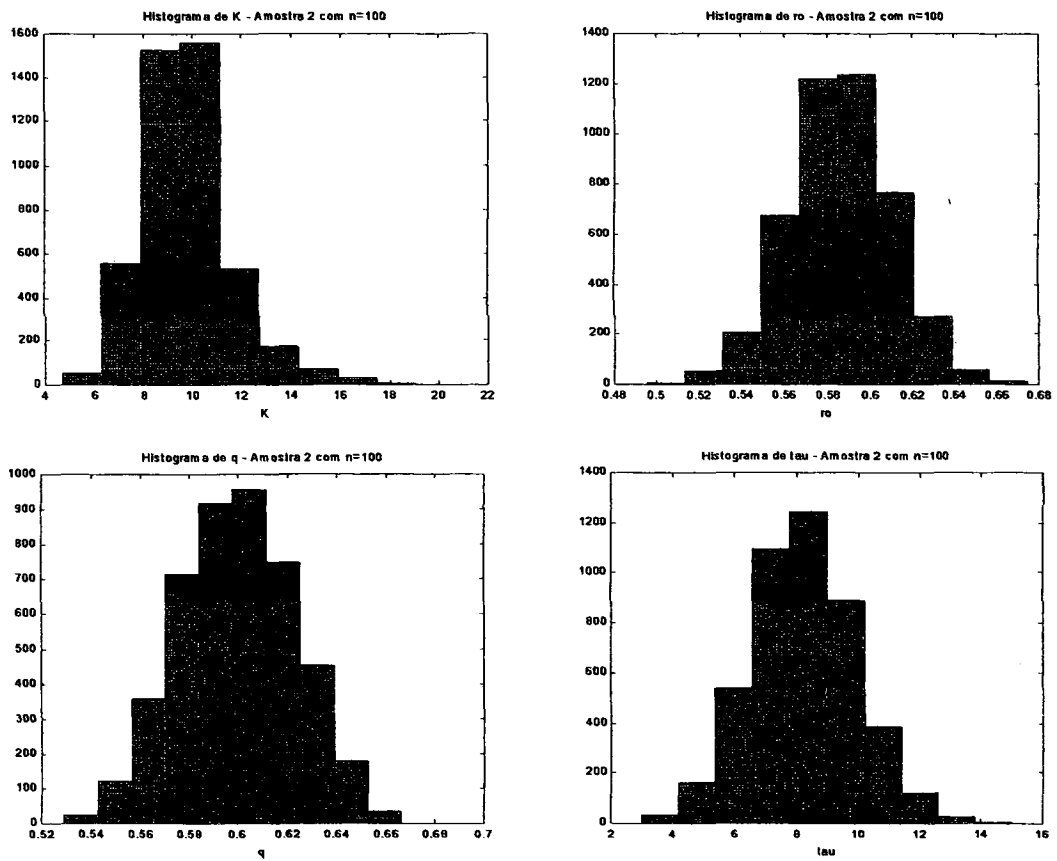


Figura 7. Histogramas dos parâmetros do modelo de Richards para a amostra 2 com $n = 100$.

8. Conclusão

Este trabalho apresenta uma abordagem Bayesiana para inferência dos parâmetros de modelos de crescimento populacionais destacando que o modelo de Richards, visto como uma generalização dos modelos logísticos e de Gompertz, pode ser considerado sob o ponto de vista da transformação de Box e Cox com uso da função de verossimilhança profile. Os resultados apresentados consideram quatro conjuntos de dados, sendo dois destes gerados segundo um modelo logístico resultando em duas amostras de tamanhos $n = 950$ e $n = 100$ e os outros dois gerados segundo um modelo Richards resultando também em duas amostras com 950 e 100 observações. Os parâmetros dos modelos foram então estimados usando a função de verossimilhança profile e a abordagem Bayesiana junto com algoritmos de simulação MCMC.

A comparação dos resultados com relação à precisão das estimativas mostrou que no caso em que o tamanho da amostra é pequeno a estimativa bayesiana do parâmetro de forma do modelo de Richards é mais precisa que a estimativa de MVP. Com relação aos outros parâmetros, concluímos que o cálculo dos intervalos de confiança, que pode ser feito com a teoria assintótica, é praticamente intratável devido à dificuldade no cálculo da matriz de informação de Fisher esperada. Neste caso optamos pelo uso da inversa da matriz de informação de Fisher observada como estimativa da variância dos estimadores, que também só pode ser considerada uma estimativa precisa no caso de amostras grandes. Além disso os resultados mostram que os intervalos de confiança calculados desta forma podem não conter o verdadeiro valor do parâmetro. Este fato nos leva a optar pela abordagem bayesiana deste problema, uma vez que sabemos da dificuldade em encontrar grandes amostras de censo de populações animais.

O modelo de Richards deve ser considerado pelo fato de ser mais geral e portanto mais realista devido à presença de um parâmetro de forma. As dificuldades na inferência dos parâmetros podem ser contornadas com o uso da inferência bayesiana que se mostra viável e precisa para os modelos de crescimento populacional.

7. Referências

- Barndorff-Nielsen, O. E. ; Cox, D. R. (1994). *Inference and Asymptotics*, Chapman & Hall.
- Box ,G. E.; Cox, D. R. (1964). An Analysis of Transformations. *Journal of the Royal Statistic Society*, série B, 6,211-252.
- Box, G. E.; Tiao, G. C. (1973). *Bayesian inference in Statistical Analysis*, New York: Addison-Wesley.
- Chib, S.; Greenberg, E. (1995). Understanding the Metropolis-Hastings algorithm. *American Statistician*, 49,4,327-335.
- Fitzhugh Jr. , H. A. (1974). Analysis of growth curves and strategies for altering their shapes. *Journal of Animal Science*, 42,4, pp.1036-1051
- Gelfand, A. E.; Smith, A. F. M. (1990). Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association*, 85, 398-409.

- Gelman, A. E.; Rubin, D. (1992). Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical Science*, 7, 457-472.
- Gilks, W. R.; Richardson, S.; Spiegelhalter, D. J. (1996). *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman & Hill/CRC.
- Ludwig, D. (1996). Uncertainty and the Assessment of Extinction Probabilities. *Ecological Applications* 6(4): 1067-1076.
- Ludwig, D. (1999). Is it meaningful to estimate a probability of extinction? *Ecology* 80:298-310.
- Malthus, T. R. (1798). *An Essay on the principle of population, as it effects the future improvement of society with remarks on the speculations of Mr. Godwin, Mr. Condorcet and other writers*. J. Johnson, V IX, London.
- Petrere, M. (1992). A ecologia quantitativa. 10º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística - UFRJ
- Richards, J. F. (1959). A flexible growth function for empirical use. *J. Exp. Bot.* 10:290.
- Seber, G. A. F. ; Wild, C. J. (1989). *Nonlinear Regression*. John Wiley & Sons.

NOTAS DO ICMC

SÉRIE ESTATÍSTICA

- 067/2001 ACHCAR, J.A.; BARBOSA, V.F. – Análise bayesiana para dados de sobrevivência com funções de risco em forma de U.
- 066/2001 MAZUCHELI, J.; LOUZADA-NETO, F.; ACHCAR, J.A. – A survival model with a surviving fraction.
- 065/2001 MAZUCHELI, J.; LOUZADA-NETO, F.; ACHCAR, J.A. – Infant mortality model for lifetime data.
- 064/2001 SOUZA, C.N.; ACHCAR, J.A.; MAZUCHELI, J. – Uso de métodos MCMC para análise bayesiana de dados de sobrevivência na presença de covariáveis.
- 063/2001 ACHCAR J.A.; JUNQUEIRA, J.J.G. – Extra-binomial variability: a bayesian approach.
- 062/2000 WRUCK, E.; ACHCAR J.A.; MAZUCHELI, J. – Classification and discrimination for populations with mixture of multivariate normal distributions.
- 061/2000 ANDRADE, M.G.; MEIRA, S.A.; FRAGOSO, M.D.; CARNEIRO, A.A.F.M. – A bayesian approach to the stochastic flood control problem.
- 060/2000 ACHCAR, J.A.; JANEIRO, V. – A bayesian analysis for correlated binary data in the presence of covariates.
- 059/2000 MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J.A.; KASS, R.E. – Regression models for lifetime data with mixture of normal distributions.
- 058/99 ACHCAR, J.A.; FORTULAN, V.C. – Meta analysis: a bayesian approach.