

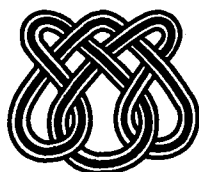
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**CONFIABILIDADE DE REDES: UM
ENFOQUE BAYESIANO**

**SANDRA CRISTINA DE OLIVEIRA
JORGE ALBERTO ACHCAR**

Nº 57

NOTAS



Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN - 0103-2577

**CONFIABILIDADE DE REDES: UM
ENFOQUE BAYESIANO**

**SANDRA CRISTINA DE OLIVEIRA
JORGE ALBERTO ACHCAR**

Nº 57

**NOTAS DO ICM C
Série Estatística**

**São Carlos
Set./1999**

CONFIABILIDADE DE REDES: UM ENFOQUE BAYESIANO

Sandra Cristina de OLIVEIRA*, Jorge Alberto ACHCAR*

RESUMO: Neste artigo, apresentamos uma análise Bayesiana para confiabilidade de sistemas de redes usando métodos de simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov. Assumimos diferentes densidades a priori para as confiabilidades dos componentes individuais, com o objetivo de obtermos sumários de interesse. A metodologia é exemplificada considerando um caso especial de sistema complexo composto por nove componentes. Consideramos ainda confiabilidade de redes do tipo k -out-of- m para a qual ilustramos um exemplo numérico.

PALAVRAS-CHAVE: Confiabilidade de Redes, Análise Bayesiana, Métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov.

1. Introdução

Assumindo uma rede com n componentes, definimos $X_i(t)$ como uma variável indicadora para o funcionamento do i -ésimo componente, $i = 1, \dots, n$ e $X(t)$ como uma variável indicadora para o funcionamento do sistema. Assim, $X_i(t) = 1(0)$ se o i -ésimo componente está funcionando (ou não) e $X(t) = 1(0)$, se o sistema está funcionando (ou não) num dado tempo $t > 0$.

* Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo - USP, 13560-970, São Carlos, S.P., Brasil.

A confiabilidade esperada do i -ésimo componente é dada por $p_i(t) = P\{X_i(t) = 1\}$ e a confiabilidade esperada do sistema é dada por $p(t) = P\{X(t) = 1\}$. A confiabilidade esperada do sistema é expressa por uma função $h(\underline{p})$, $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$, das confiabilidades dos componentes individuais dependendo da estrutura do sistema: série, paralelo ou qualquer outra configuração geral.

Para um sistema em série temos:

$$p(t) = h(\underline{p}) = P\{X(t) = 1\} = P\{X_1(t) = 1, \dots, X_n(t) = 1\} = \prod_{i=1}^n p_i \quad (1)$$

e para um sistema em paralelo,

$$\begin{aligned} p(t) = h(\underline{p}) &= P\{X(t) = 1\} = 1 - P\{X(t) = 0\} = \\ &= 1 - P\{X_1(t) = 0, \dots, X_n(t) = 0\} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i). \end{aligned} \quad (2)$$

Considerando um caso especial de sistema de rede complexo composto por nove componentes, temos:

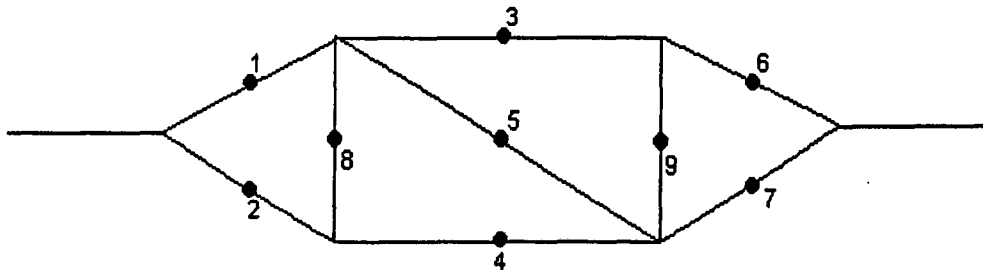


Figura 1 - Sistema de rede com nove componentes.

O cálculo da confiabilidade do sistema da Figura 1 não é trivial, porém, utilizando o lema da decomposição pivotal (Barlow & Proschan, 1981) podemos obter bons resultados.

Seja $X(t) = \phi(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9)$. Realizando todas as combinações possíveis, obtemos a confiabilidade do sistema como uma função das confiabilidades dos componentes individuais p_i (Oliveira, 1999).

Para obtermos sumários a posteriori de interesse usamos métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) baseado nos algoritmos de Gibbs Sampling (Gelfand & Smith, 1994) e Metropolis Hastings (Chib & Greenberg, 1995). O uso de métodos MCMC em análise Bayesiana de confiabilidade de redes tem sido explorada por vários autores (ver, por exemplo: Achcar, 1998).

2. Análise Bayesiana para sistemas de redes

2.1 Função de verossimilhança para \underline{p}

Assumindo que, para os n componentes de um sistema de rede, temos o conjunto de dados $D = \{(n_i, x_i); i = 1, \dots, n\}$, onde n_i réplicas do i -ésimo componente são testadas em um dado tempo t e x_i é o número de réplicas do i -ésimo componente que sobrevivem ao teste. A função de verossimilhança para $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$ é dada por:

$$L(\underline{p}) = \prod_{i=1}^n \binom{n_i}{x_i} p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i}, \quad 0 < p_i < 1. \quad (3)$$

2.2 Distribuição conjunta a priori para \underline{p}

Assumindo independência a priori para os parâmetros, podemos considerar uma distribuição conjunta a priori para \underline{p} dada pelo produto de distribuições Beta,

$$\pi_1(\underline{p}) \propto \prod_{i=1}^n p_i^{a_i - 1} (1 - p_i)^{b_i - 1} \quad (4)$$

onde $0 < p_i < 1$, a_i e b_i são constantes conhecidas.

Normalmente a suposição de independência a priori para \underline{p} pode não ser razoável. Lynn, Singpurwalla e Smith (1995) propõem algumas distribuições a priori para sistemas de rede assumindo dependência a priori, o que é mais realístico nas aplicações.

Uma destas distribuições (Chen & Singpurwalla, 1996) considera seqüências permutáveis de p_i 's e componentes altamente confiáveis, sendo dada por:

$$\pi_2(\underline{p}) = \begin{cases} \alpha^n \left\{ \prod_{i=1}^n (1 - p_i) \right\}^{\alpha-1} \ln\left(\frac{1}{1-p_{(1)}^*}\right), & \text{se } \alpha = (n-1)^{-1} \\ \alpha^n \left\{ \prod_{i=1}^n (1 - p_i) \right\}^{\alpha-1} \left\{ \frac{1-(1-p_{(1)}^*)^{1-(n-1)\alpha}}{1-(n-1)\alpha} \right\}, & \text{se } \alpha \neq (n-1)^{-1} \end{cases} \quad (5)$$

onde $p_{(1)}^* = \min(p_1, \dots, p_n)$.

Quando temos seqüências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos, ou seja, os componentes são aproximadamente os mesmos (de Finetti, 1972) consideramos, para o caso bivariado, a distribuição a priori dada por:

$$\pi_3(p_1, p_2 | \theta_{12}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\theta_{12}(p_1 - p_2)^2] \right\} \quad (6)$$

onde θ_{12} é um parâmetro que indica a forma das distribuições marginais de p_i , $i = 1, 2$ e da correlação entre p_1 e p_2 .

Para o caso trivariado e multivariado temos, respectivamente:

$$\pi_3(p_1, p_2, p_3 | \bullet) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{13}(p_1 - p_3)^2 + \theta_{23}(p_2 - p_3)^2] \right\} \quad (7)$$

$$\pi_3(p_1, \dots, p_n | \bullet) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q \right\} \quad (8)$$

onde Q é um polinômio de grau dois em p_1, \dots, p_n .

Para componentes não muito confiáveis nem idênticos, uma outra distribuição a priori é proposta por Lee (1993). No caso bivariado, dado $\underline{\theta} = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, w_{12})$, a distribuição conjunta a priori para p_1 e p_2 é dada por:

$$\pi_4(p_1, p_2 | \underline{\theta}) = \pi(p_1 | \underline{\theta}) \pi(p_2 | \underline{\theta}) \{1 + R_{12}(p_1, p_2)\} \quad (9)$$

onde $R_{12}(p_1, p_2) = w_{12} \phi(p_1) \phi(p_2)$, $\phi(p_i) = p_i - \mu_i$, $\mu_i = E(p_i)$ e $\pi(p_i | \underline{\theta})$ é a distribuição marginal Beta para p_i , com parâmetros α_i e β_i , $i = 1, 2$. O parâmetro w_{12} indica a intensidade da relação entre p_1 e p_2 , com $w_{12} = 0$ denotando independência.

A extensão para dimensão n envolve um alargamento apropriado de $\underline{\theta}$ no sentido de abranger todas as dependências possíveis. A distribuição é dada por:

$$\pi_4(p_1, \dots, p_n | \theta) = \prod_{i=1}^n \pi(p_i | \theta) \{1 + R_{12\dots n}(p_1, \dots, p_n)\} \quad (10)$$

onde $R_{12\dots n}(\bullet)$ segue o modelo de $R_{12}(\bullet)$ dado anteriormente.

3. Inferência Bayesiana

Considerando os algoritmos de Gibbs Sampling e Metropolis-Hastings, geramos amostras para obtermos inferências para as confiabilidades dos componentes individuais $p_i(t)$ e para a confiabilidade do sistema de rede $p(t)$. Um estimador de Bayes de p_i com respeito à função de perda quadrática é dado por:

$$E(p_i | D) = \int p_i \pi(p_i | D) dp_i \quad (11)$$

Seja $p_i^{(r,s)}$, $i = 1, \dots, n$ os valores obtidos para p_i na r -ésima replicação e s -ésima iteração, onde R e S são, respectivamente, o número total de simulações (ou cadeias) e o número de iterações do algoritmo. Então, (11) pode ser dado pela estimativa de Monte Carlo

$$\hat{p}_i = \frac{4}{RS} \sum_{r=1}^R \sum_{s=\frac{S}{4}+1}^S p_i^{(r,s)} \quad (12)$$

Uma estimativa de Monte Carlo para a confiabilidade do sistema de rede $h(p)$ com respeito à função de perda quadrática, é dada por:

$$\hat{h}(p) = \frac{4}{RS} \sum_{r=1}^R \sum_{s=\frac{S}{4}+1}^S h(p_1^{(r,s)}, \dots, p_n^{(r,s)}) \quad (13)$$

4. Análise Bayesiana para o sistema da Figura 1

Considerando o sistema de rede complexo com nove componentes (Figura 1) e o conjunto de dados $D = \{(n_i, x_i) = (12, 11); (10, 8); (7, 5); (14, 12); (18, 12); (20, 18); (18, 17); (9, 6); (15, 12)\}$ $i = 1, \dots, 9$ onde n_i é o número de réplicas do i -ésimo componente que são testadas em um dado tempo t e x_i denota o número de réplicas que sobrevivem ao teste.

Através da programação realizada no software Matlab versão 4.2b, com o objetivo de obtermos amostras representativas das distribuições de interesse e de realizarmos inferências via simulação, geramos 5 cadeias com 2000 iterações em cada. Desprezamos as 500 primeiras iterações e com as restantes, de cada cadeia, construímos uma amostra tomando valores espaçados de 15 em 15, totalizando 500 dados. O critério de convergência para a verificação de que os valores gerados são mesmo pontos amostrais da distribuição desejada é o proposto por Gelman e Rubin (1992).

De acordo com os dados, os estimadores de Monte Carlo obtidos para $E(p_i|D)$ e os intervalos de credibilidade (95%) para $p_i, i = 1, \dots, 9$ são dados pela Tabela 1 e pela Tabela 2. respectivamente.

Tabela 1 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i|D), i = 1, \dots, 9$.
Distribuição a priori

	$\pi_1(\underline{p})$	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\widehat{E}(p_1 D)$	0.9152	0.9182	0.8350	0.8520
$\widehat{E}(p_2 D)$	0.8104	0.8058	0.8090	0.7511
$\widehat{E}(p_3 D)$	0.7432	0.7499	0.7224	0.6949
$\widehat{E}(p_4 D)$	0.8607	0.8594	0.7818	0.8137
$\widehat{E}(p_5 D)$	0.6829	0.6776	0.6737	0.6594
$\widehat{E}(p_6 D)$	0.8990	0.8996	0.8794	0.8630
$\widehat{E}(p_7 D)$	0.9415	0.9381	0.9014	0.9077
$\widehat{E}(p_8 D)$	0.6955	0.6959	0.6964	0.6325
$\widehat{E}(p_9 D)$	0.8068	0.8137	0.7462	0.7648

Tabela 2 - Intervalos de credibilidade (95 %) para $p_i, i = 1, \dots, 9$.
Distribuição a priori

	$\pi_1(\underline{p})$	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
p_1	0.7213;0.9969	0.7465;0.9965	0.6364;0.9778	0.6701;0.9760
p_2	0.5450;0.9702	0.5356;0.9737	0.6221;0.9393	0.4828;0.9350
p_3	0.4238;0.9579	0.4372;0.9567	0.4925;0.9040	0.3815;0.9207
p_4	0.6548;0.9795	0.6526;0.9795	0.5833;0.9355	0.5746;0.9524
p_5	0.4656;0.8669	0.4294;0.8558	0.4801;0.8362	0.4413;0.8464
p_6	0.7436;0.9861	0.7540;0.9828	0.7592;0.9725	0.6851;0.9700
p_7	0.8047;0.9978	0.7881;0.9984	0.7724;0.9857	0.7690;0.9899
p_8	0.4024;0.9173	0.4189;0.9377	0.4829;0.8760	0.3206;0.8763
p_9	0.5888;0.9532	0.6022;0.9576	0.5405;0.9003	0.5593;0.9237

A Tabela 3 mostra as estimativas para $E(p(t) | D)$, ou seja, a média a posteriori para a confiabilidade do sistema da Figura 1 e os intervalos de credibilidade (95%) para $p(t)$.

Tabela 3 - Estimadores de Bayes para a confiabilidade do sistema da Figura 1.

Distribuição a priori

	$\pi_1(\underline{p})$	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\widehat{E}(p(t) D)$	0.9571	0.9567	0.9130	0.9110
$IC(95\%) p(t)$	0.8861;0.9912	0.8809;0.9927	0.8239;0.9744	0.8040;0.9698

Para o caso de independência a priori entre os parâmetros consideramos $a_i = 1.125$ e $b_i = 0.125$. As distribuições marginais a posteriori para p_i são dadas por:

$$\pi_1(p_i | D) \propto p_i^{1.125+x_i-1} (1-p_i)^{n_i-x_i-0.125-1}, \quad i = 1, \dots, 9 \quad (14)$$

ou seja,

$$p_i | D \sim \text{Beta} [1.125 + x_i, n_i - x_i - 0.125], \quad i = 1, \dots, 9.$$

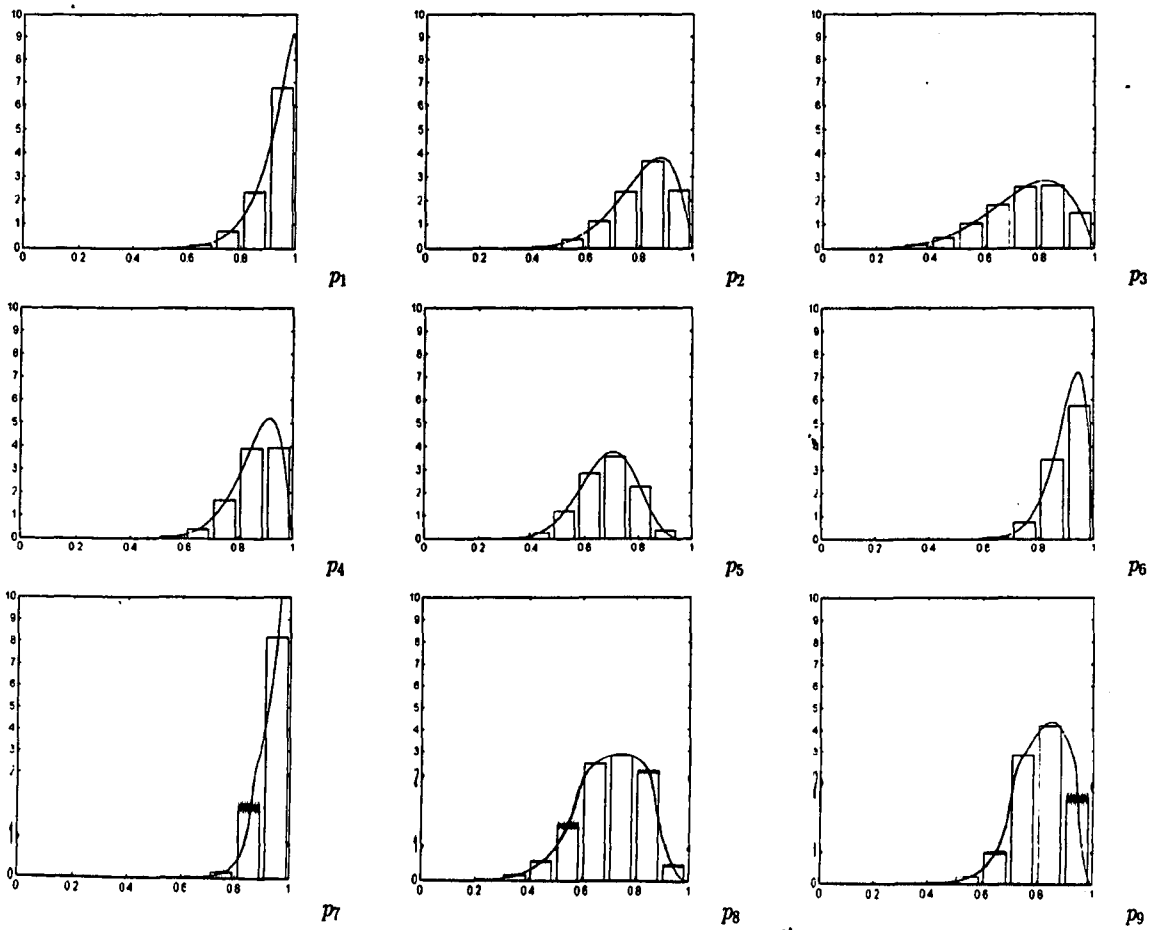


Figura 2 - Distribuições marginais a posteriori para $p_i, i = 1, \dots, 9$ assumindo $\pi_1(\underline{p})$.

Para seqüências permutáveis e componentes altamente confiáveis, a distribuição conjunta a posteriori para \underline{p} (ver (5)) é dada por:

$$\pi_2(\underline{p} | D) = [1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-8\alpha}] \prod_{i=1}^9 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i + \alpha - x_i - 1} \quad (15)$$

onde $p_{(1)}^* = \min(p_1, \dots, p_9)$. Assumindo $\alpha = 0.1$, garantimos que os valores de p_i tendam a ser grandes. As distribuições condicionais usadas para gerarmos amostras de (15) via algoritmos de Gibbs Sampling com Metropolis-Hastings são dadas por:

$$\pi_2(p_i | p_{(i)}, D) \propto p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i + \alpha - x_i - 1} \phi(\underline{p}), i = 1, \dots, 9 \quad (16)$$

onde $\phi(\underline{p}) = \exp\{\log[1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-8\alpha}]\}$ e $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_9)$.

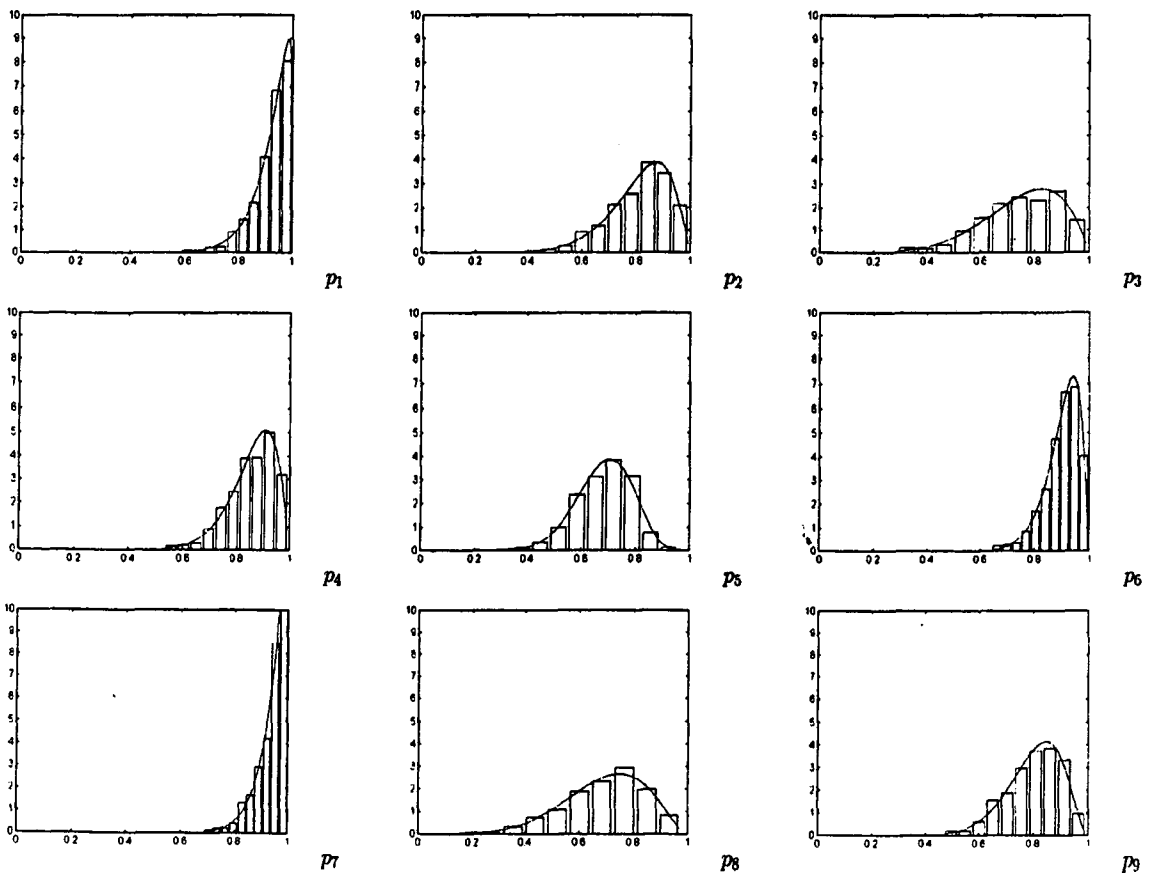


Figura 3 - Distribuições marginais a posteriori para $p_i, i = 1, \dots, 9$ assumindo $\pi_2(\underline{p})$.

Para o caso de seqüências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos, assumimos a situação onde p_1 é semelhante a p_2 , p_3 semelhante a p_4 , p_6 semelhante a p_7 e p_8 semelhante a p_9 , com valores representando correlações altamente positivas entre os parâmetros dados por $\theta_{12} = \theta_{67} = 100$, $\theta_{34} = \theta_{89} = 50$ e os restantes próximos de zero, exceto $\theta_{35} = \theta_{45} = 10$. Portanto, a distribuição conjunta a posteriori para \underline{p} (ver (7) e (8)) é dada por:

$$\pi_3(\underline{p} | D) \propto \left[\prod_{i=1}^9 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{34}(p_3 - p_4)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 + \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 + \theta_{89}(p_8 - p_9)^2 \right] \right\} \quad (17)$$

e as distribuições condicionais requeridas para o algoritmo de Metropolis-Hastings por:

$$\begin{aligned} p_1 | p(1), D &\propto p_1^{x_1} (1 - p_1)^{n_1 - x_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{12} (p_1 - p_2)^2 \right\} \\ p_2 | p(2), D &\propto p_2^{x_2} (1 - p_2)^{n_2 - x_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{12} (p_1 - p_2)^2 \right\} \\ p_3 | p(3), D &\propto p_3^{x_3} (1 - p_3)^{n_3 - x_3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{34} (p_3 - p_4)^2 + \theta_{35} (p_3 - p_5)^2 \right] \right\} \\ p_4 | p(4), D &\propto p_4^{x_4} (1 - p_4)^{n_4 - x_4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{34} (p_3 - p_4)^2 + \theta_{45} (p_4 - p_5)^2 \right] \right\} \\ p_5 | p(5), D &\propto p_5^{x_5} (1 - p_5)^{n_5 - x_5} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{35} (p_3 - p_5)^2 + \theta_{45} (p_4 - p_5)^2 \right] \right\} \\ p_6 | p(6), D &\propto p_6^{x_6} (1 - p_6)^{n_6 - x_6} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{67} (p_6 - p_7)^2 \right\} \\ p_7 | p(7), D &\propto p_7^{x_7} (1 - p_7)^{n_7 - x_7} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{67} (p_6 - p_7)^2 \right\} \\ p_8 | p(8), D &\propto p_8^{x_8} (1 - p_8)^{n_8 - x_8} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{89} (p_8 - p_9)^2 \right\} \\ p_9 | p(9), D &\propto p_9^{x_9} (1 - p_9)^{n_9 - x_9} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{89} (p_8 - p_9)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

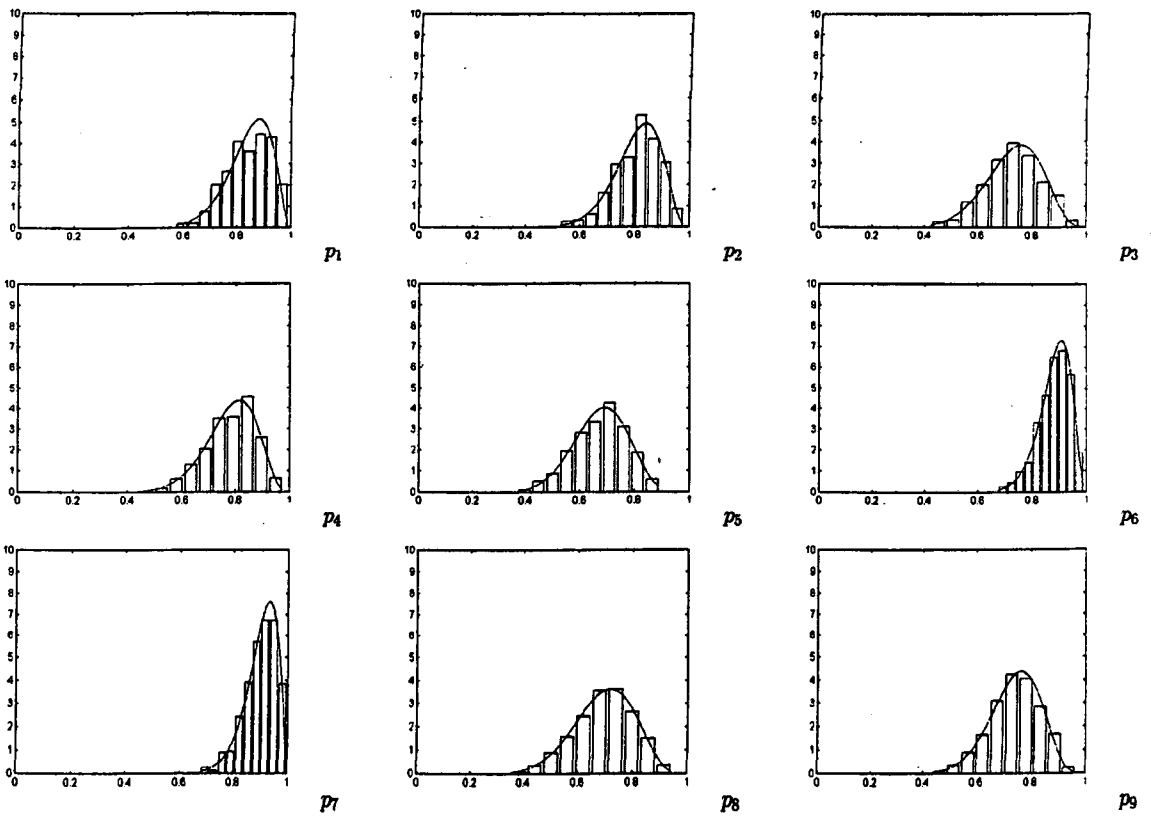


Figura 4 - Distribuições marginais a posteriori para $p_i, i = 1, \dots, 9$ assumindo $\pi_3(\underline{p})$

Para componentes não muito confiáveis nem idênticos, assumimos distribuições marginais uniformes $(0, 1)$ para p_i dado $\underline{\theta}$, $w_{12} = w_{34} = w_{67} = w_{89} = 2$, que correspondem às correlações positivas entre p_1 e p_2 , entre p_3 e p_4 , entre p_6 e p_7 e entre p_8 e p_9 . Assumimos, também, $w_{34} = w_{35} = w_{45} = 1$ e todas as outras dependências como zero. Então, a distribuição conjunta a posteriori para \underline{p} (ver (10)) é dada por:

$$\pi_4(\underline{p} | D) \propto \prod_{i=1}^9 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \psi(\underline{p}), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{onde } \psi(\underline{p}) = & 1 + w_{12} \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \left(p_2 - \frac{1}{2}\right) + w_{34} \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) + \\ & + w_{35} \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) \left(p_5 - \frac{1}{2}\right) + w_{45} \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) \left(p_5 - \frac{1}{2}\right) + w_{67} \left(p_6 - \frac{1}{2}\right) \left(p_7 - \frac{1}{2}\right) + \\ & + w_{89} \left(p_8 - \frac{1}{2}\right) \left(p_9 - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Logo, as distribuições condicionais a posteriori são dadas por:

$$\pi_4(p_i | p_{(i)}, D) \propto \prod_{i=1}^9 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \psi(\underline{p}), i = 1, \dots, 9 \quad (20)$$

onde $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_9)$. Podemos observar que os p_i s são gerados via algoritmo de Metropolis-Hastings cujo núcleo é uma distribuição Beta com parâmetros $x_i + 1$ e $n_i - x_i + 1$.

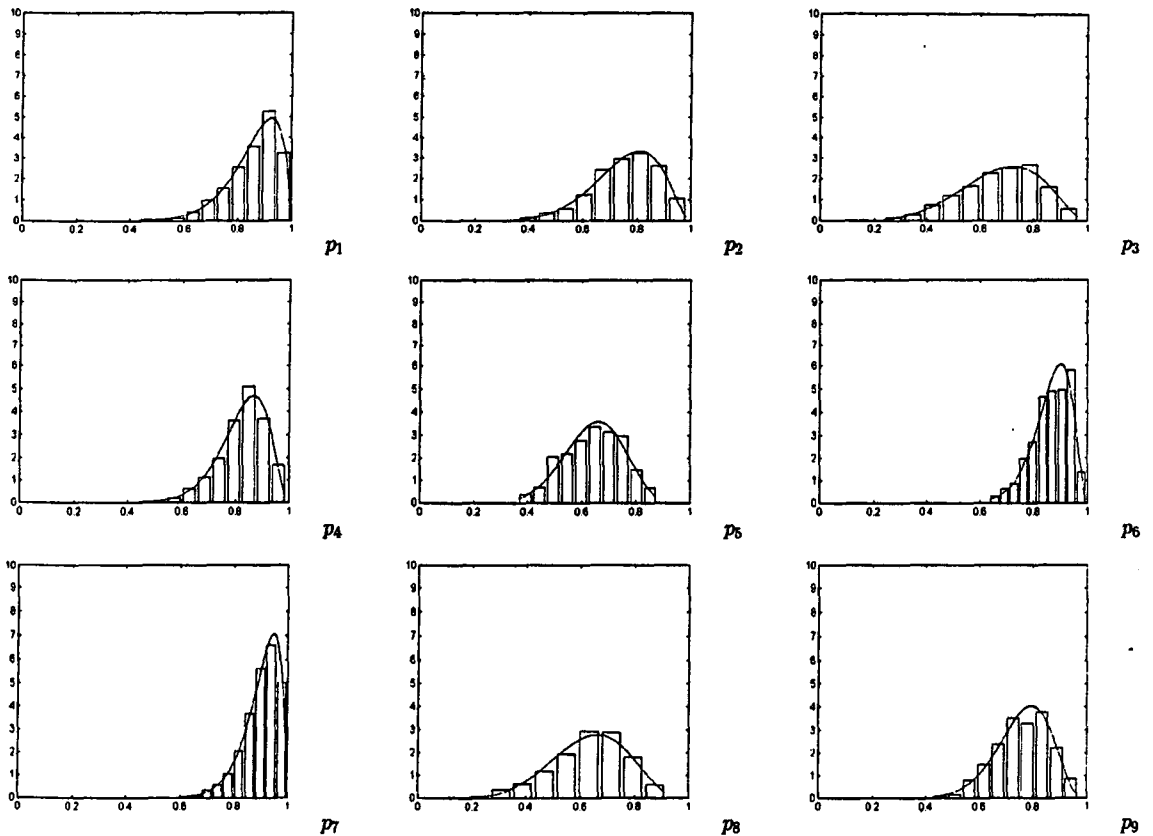


Figura 5 - Distribuições marginais a posteriori para $p_i, i = 1, \dots, 9$ assumindo $\pi_4(\underline{p})$.

5. Análise Bayesiana hierárquica para o sistema da Figura 1

Considerando o sistema complexo da Figura 1 e o conjunto de dados D associados à função de verossimilhança dada em (3), estruturamos o problema incorporando no modelo relações probabilísticas a respeito dos parâmetros e dos hiperparâmetros através de distribuições a priori hierárquicas.

5.1 Distribuição a priori hierárquica para \underline{p}

5.1.1 Seqüências permutáveis e componentes altamente confiáveis

Para o caso de seqüências permutáveis e componentes altamente confiáveis, a distribuição conjunta a priori de \underline{p} (ver (5)) é dada por:

$$\pi_2(\underline{p} | \alpha) = \alpha^9 \left\{ \prod_{i=1}^9 (1 - p_i) \right\}^{\alpha-1} \left\{ \frac{1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-8\alpha}}{1-8\alpha} \right\}$$

onde $p_{(1)}^* = \min(p_1, \dots, p_9)$.

Seja

$$\pi_2(\underline{p}, \alpha) = \pi_2(\underline{p} | \alpha) \pi_0(\alpha) \quad (21)$$

onde $\pi_0(\alpha) \propto \alpha^{a-1} e^{-b\alpha}$, $\alpha > 0$ e a, b são conhecidos, ou seja, $\alpha \sim \text{Gama}(a, b)$. Então,

$$\pi_2(\underline{p}, \alpha) \propto \alpha^{9+\alpha-1} e^{-b\alpha} \left\{ \prod_{i=1}^9 (1 - p_i) \right\}^{\alpha-1} \left\{ \frac{1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-8\alpha}}{1-8\alpha} \right\}. \quad (22)$$

Portanto, a distribuição conjunta a posteriori é dada por:

$$\pi_2(\underline{p}, \alpha | D) \propto \alpha^{9+\alpha-1} e^{-b\alpha} \left\{ \prod_{i=1}^9 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i + \alpha - 1} \right\} \left\{ \frac{1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-8\alpha}}{1-8\alpha} \right\} \quad (23)$$

e, a partir de (23), obtemos as distribuições condicionais dadas por:

$$\begin{aligned} \pi_2(p_i | p_{(i)}, \alpha, D) &\propto p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i + \alpha - 1} \phi_1(\underline{p}), \quad i = 1, \dots, 9 \\ \pi_2(\alpha | \underline{p}, D) &\propto \alpha^{a-1} e^{-b\alpha} \phi_2(\underline{p}) \end{aligned} \quad (24)$$

onde $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_9)$ e

$$\phi_1(\underline{p}) = \exp \{ \log [1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-8\alpha}] \}$$

$$\phi_2(\underline{p}) = \exp \left\{ 9 \log \alpha + \left[\sum_{i=1}^9 (n_i - x_i + \alpha - 1) \log(1 - p_i) \right] + \right.$$

$$\left. + \log [1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-8\alpha}] - \log(1 - 8\alpha) \right\}.$$

Assumindo $a = 100$ e $b = 1000$, de maneira que continuemos a garantir que os valores de p_i tendam a ser grandes e, utilizando as mesmas condições de programação descritas nas seções 3 e 4, construímos uma amostra com o objetivo de obtermos os sumários a posteriori de interesse.

Tabela 4 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i | D)$ e $E(\alpha | D)$, $i = 1, \dots, 9$.

$\pi_2(\underline{p})$

	Modelo não hierárquico	Modelo hierárquico
$\hat{E}(p_1 D)$	0.9182	0.9237
$\hat{E}(p_2 D)$	0.8058	0.8106
$\hat{E}(p_3 D)$	0.7499	0.7438
$\hat{E}(p_4 D)$	0.8594	0.8692
$\hat{E}(p_5 D)$	0.6776	0.6863
$\hat{E}(p_6 D)$	0.8996	0.9029
$\hat{E}(p_7 D)$	0.9381	0.9439
$\hat{E}(p_8 D)$	0.6959	0.7001
$\hat{E}(p_9 D)$	0.8137	0.8073
$\hat{E}(\alpha D)$	-	0.0998

Tabela 5 - Intervalos de credibilidade (95 %) para p_i e α , $i = 1, \dots, 9$.

$\pi_2(\underline{p})$

	Modelo não hierárquico	Modelo hierárquico
p_1	0.7465;0.9965	0.7249;0.9975
p_2	0.5356;0.9737	0.5442;0.9706
p_3	0.4372;0.9567	0.3996;0.9616
p_4	0.6526;0.9795	0.6692;0.9789
p_5	0.4294;0.8558	0.4474;0.8644
p_6	0.7540;0.9828	0.7560;0.9865
p_7	0.7881;0.9984	0.8262;0.9972
p_8	0.4189;0.9377	0.3925;0.9323
p_9	0.6022;0.9576	0.5986;0.9536
α	-	0.0818;0.1202

5.1.2 Seqüências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos

Para seqüências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos, considerando a situação descrita anteriormente, assumimos:

$$\begin{aligned} \theta_{12} &\sim \text{Normal}(100, 16) & \theta_{67} &\sim \text{Normal}(100, 16) \\ \theta_{34} &\sim \text{Normal}(50, 9) & \theta_{89} &\sim \text{Normal}(50, 9) \\ \theta_{35} &\sim \text{Normal}(10, 4) & \theta_{45} &\sim \text{Normal}(10, 4) \end{aligned}$$

e os demais iguais a zero.

A distribuição conjunta a priori para \underline{p} (ver (6)) é dada por:

$$\pi_3(\underline{p} \mid \theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{34}(p_3 - p_4)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 + \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 + \theta_{89}(p_8 - p_9)^2\right]\right\}.$$

Seja,

$$\begin{aligned} \pi_3(\underline{p}, \theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89}) &= \pi_3(\underline{p} \mid \theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89}) \times \\ &\times \pi_0(\theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89}). \end{aligned} \quad (25)$$

Assumindo independência a priori entre $\theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}$ e θ_{89} , temos:

$$\begin{aligned} \pi_0(\theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89}) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{32}(\theta_{12} - 100)^2 - \frac{1}{32}(\theta_{67} - 100)^2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{18}(\theta_{34} - 50)^2 - \frac{1}{18}(\theta_{89} - 50)^2 - \frac{1}{8}(\theta_{35} - 10)^2 - \frac{1}{8}(\theta_{45} - 10)^2\right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \pi_3(\underline{p}, \theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89}) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \theta_{34}(p_3 - p_4)^2 + \theta_{89}(p_8 - p_9)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2\right]\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{32}(\theta_{12} - 100)^2 - \frac{1}{32}(\theta_{67} - 100)^2 - \frac{1}{18}(\theta_{34} - 50)^2 - \frac{1}{18}(\theta_{89} - 50)^2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{8}(\theta_{35} - 10)^2 - \frac{1}{8}(\theta_{45} - 10)^2\right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Portanto, de (27) obtemos a distribuição conjunta a posteriori dada por:

$$\begin{aligned} \pi_3(\underline{p}, \theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89} | D) &\propto \left[\prod_{i=1}^9 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{67}(p_6 - p_7)^2 + \theta_{34}(p_3 - p_4)^2 + \theta_{89}(p_8 - p_9)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 \right] \left. \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{32} (\theta_{12} - 100)^2 - \frac{1}{32} (\theta_{67} - 100)^2 - \frac{1}{18} (\theta_{34} - 50)^2 - \right. \\ &- \left. \frac{1}{18} (\theta_{89} - 50)^2 - \frac{1}{8} (\theta_{35} - 10)^2 - \frac{1}{8} (\theta_{45} - 10)^2 \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

e as distribuições condicionais requeridas para o algoritmo de Metropolis-Hastings dadas por:

$$\begin{aligned} p_1 | p_{(1)}, \underline{\theta}, D &\propto p_1^{x_1} (1 - p_1)^{n_1 - x_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{12} (p_1 - p_2)^2 \right\} \\ p_2 | p_{(2)}, \underline{\theta}, D &\propto p_2^{x_2} (1 - p_2)^{n_2 - x_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{12} (p_1 - p_2)^2 \right\} \\ p_3 | p_{(3)}, \underline{\theta}, D &\propto p_3^{x_3} (1 - p_3)^{n_3 - x_3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{34} (p_3 - p_4)^2 + \theta_{35} (p_3 - p_5)^2 \right] \right\} \\ p_4 | p_{(4)}, \underline{\theta}, D &\propto p_4^{x_4} (1 - p_4)^{n_4 - x_4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{34} (p_3 - p_4)^2 + \theta_{45} (p_4 - p_5)^2 \right] \right\} \\ p_5 | p_{(5)}, \underline{\theta}, D &\propto p_5^{x_5} (1 - p_5)^{n_5 - x_5} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{35} (p_3 - p_5)^2 + \theta_{45} (p_4 - p_5)^2 \right] \right\} \\ p_6 | p_{(6)}, \underline{\theta}, D &\propto p_6^{x_6} (1 - p_6)^{n_6 - x_6} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{67} (p_6 - p_7)^2 \right\} \\ p_7 | p_{(7)}, \underline{\theta}, D &\propto p_7^{x_7} (1 - p_7)^{n_7 - x_7} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{67} (p_6 - p_7)^2 \right\} \\ p_8 | p_{(8)}, \underline{\theta}, D &\propto p_8^{x_8} (1 - p_8)^{n_8 - x_8} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{89} (p_8 - p_9)^2 \right\} \\ p_9 | p_{(9)}, \underline{\theta}, D &\propto p_9^{x_9} (1 - p_9)^{n_9 - x_9} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{89} (p_8 - p_9)^2 \right\} \\ \theta_{12} | \underline{p}, \theta_{67}, \theta_{34}, \theta_{89}, \theta_{35}, \theta_{45}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{12} (p_1 - p_2)^2 - \frac{1}{32} (\theta_{12} - 100)^2 \right\} \\ \theta_{67} | \underline{p}, \theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{89}, \theta_{35}, \theta_{45}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{67} (p_6 - p_7)^2 - \frac{1}{32} (\theta_{67} - 100)^2 \right\} \\ \theta_{34} | \underline{p}, \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{89}, \theta_{35}, \theta_{45}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{34} (p_3 - p_4)^2 - \frac{1}{18} (\theta_{34} - 50)^2 \right\} \\ \theta_{89} | \underline{p}, \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{89} (p_8 - p_9)^2 - \frac{1}{18} (\theta_{89} - 50)^2 \right\} \\ \theta_{35} | \underline{p}, \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{34}, \theta_{89}, \theta_{45}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{35} (p_3 - p_5)^2 - \frac{1}{8} (\theta_{35} - 10)^2 \right\} \\ \theta_{45} | \underline{p}, \theta_{12}, \theta_{67}, \theta_{34}, \theta_{89}, \theta_{35}, D &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_{45} (p_4 - p_5)^2 - \frac{1}{8} (\theta_{45} - 10)^2 \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

onde $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_9)$, $\underline{p} = (p_1, \dots, p_9)$ e $\underline{\theta} = (\theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{45}, \theta_{67}, \theta_{89})$.

Tabela 6 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i | D)$, $i = 1, \dots, 9$ e $E(\theta_{12} | D)$, $E(\theta_{67} | D)$, $E(\theta_{34} | D)$, $E(\theta_{89} | D)$, $E(\theta_{35} | D)$ e $E(\theta_{45} | D)$.
 $\pi_3(\underline{p})$

	modelo não hierárquico	modelo hierárquico
$\widehat{E}(p_1 D)$	0.8350	0.8407
$\widehat{E}(p_2 D)$	0.8090	0.8024
$\widehat{E}(p_3 D)$	0.7224	0.7302
$\widehat{E}(p_4 D)$	0.7818	0.7809
$\widehat{E}(p_5 D)$	0.6737	0.6787
$\widehat{E}(p_6 D)$	0.8794	0.8777
$\widehat{E}(p_7 D)$	0.9014	0.8978
$\widehat{E}(p_8 D)$	0.6964	0.6967
$\widehat{E}(p_9 D)$	0.7462	0.7348
$\widehat{E}(\theta_{12} D)$	–	99.8235
$\widehat{E}(\theta_{67} D)$	–	100.1540
$\widehat{E}(\theta_{34} D)$	–	50.2937
$\widehat{E}(\theta_{89} D)$	–	50.0278
$\widehat{E}(\theta_{35} D)$	–	9.9338
$\widehat{E}(\theta_{45} D)$	–	9.8978

Tabela 7 - Intervalos de credibilidade (95 %) para p_i , $i = 1, \dots, 9$ e para θ .
 $\pi_3(\underline{p})$

	modelo não hierárquico	modelo hierárquico
p_1	0.6364;0.9778	0.6723;0.9670
p_2	0.6221;0.9393	0.6259;0.9388
p_3	0.4925;0.9040	0.4984;0.9111
p_4	0.5833;0.9355	0.5932;0.9385
p_5	0.4801;0.8362	0.5109;0.8429
p_6	0.7592;0.9725	0.7442;0.9702
p_7	0.7724;0.9857	0.7657;0.9853
p_8	0.4829;0.8760	0.4774;0.8844
p_9	0.5405;0.9003	0.5339;0.8973
θ_{12}	–	94.3003;105.8196
θ_{67}	–	94.5564;105.6539
θ_{34}	–	46.2810;54.8787
θ_{89}	–	46.9800;52.9151
θ_{35}	–	7.0471;13.1389
θ_{45}	–	6.9554;12.6342

5.1.3 Componentes não muito confiáveis nem idênticos

Para o caso de componentes não muito confiáveis nem idênticos, assumimos:

$$\begin{aligned} w_{12} &\sim \text{Normal}(2, 1) & w_{67} &\sim \text{Normal}(2, 1) \\ w_{34} &\sim \text{Normal}(2, 1) & w_{89} &\sim \text{Normal}(2, 1) \\ w_{35} &\sim \text{Normal}(1, 1) & w_{45} &\sim \text{Normal}(1, 1) \end{aligned}$$

e as demais dependências iguais a zero.

A distribuição conjunta a priori para \underline{p} (ver (7) e (8)) é dada por:

$$\pi_4(\underline{p} \mid w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}) \propto \psi(\underline{p}, \underline{w})$$

onde $\underline{w} = (w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45})$ e $\psi(\underline{p}, \underline{w}) = 1 + w_{12} \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \left(p_2 - \frac{1}{2}\right) +$
 $+ w_{67} \left(p_6 - \frac{1}{2}\right) \left(p_7 - \frac{1}{2}\right) + w_{34} \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) + w_{89} \left(p_8 - \frac{1}{2}\right) \left(p_9 - \frac{1}{2}\right) +$
 $+ w_{35} \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) \left(p_5 - \frac{1}{2}\right) + w_{45} \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) \left(p_5 - \frac{1}{2}\right).$

Seja,

$$\begin{aligned} \pi_4(\underline{p}, \underline{w}) &= \pi_4(\underline{p} \mid w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}) \times \\ &\times \pi_0(w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}). \end{aligned} \quad (30)$$

Assumindo independência a priori entre $w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}$, temos:

$$\begin{aligned} \pi_0(w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(w_{12} - 2)^2 - \frac{1}{2}(w_{67} - 2)^2 - \frac{1}{2}(w_{34} - 2)^2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2}(w_{89} - 2)^2 - \frac{1}{2}(w_{35} - 1)^2 - \frac{1}{2}(w_{45} - 1)^2\right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \pi_4(\underline{p}, w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}) &\propto \psi(\underline{p}, \underline{w}) \exp\left\{-\frac{1}{2}(w_{12} - 2)^2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2}(w_{67} - 2)^2 - \frac{1}{2}(w_{34} - 2)^2 - \frac{1}{2}(w_{89} - 2)^2 - \frac{1}{2}(w_{35} - 1)^2 - \frac{1}{2}(w_{45} - 1)^2\right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Portanto, de (32) obtemos a distribuição conjunta a posteriori dada por:

$$\pi_4(\underline{p}, w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45} | D) \propto \left[\prod_{i=1}^9 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \right] \psi(\underline{p}, \underline{w}) \times \exp\left\{ -\frac{1}{2}(w_{12} - 2)^2 - \frac{1}{2}(w_{67} - 2)^2 - \frac{1}{2}(w_{34} - 2)^2 - \frac{1}{2}(w_{89} - 2)^2 - \frac{1}{2}(w_{35} - 1)^2 - \frac{1}{2}(w_{45} - 1)^2 \right\} \quad (33)$$

e as distribuições condicionais dadas por:

$$\begin{aligned} p_i | p_{(i)}, \underline{w}, D &\propto p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \psi(\underline{p}, \underline{w}), \quad i = 1, \dots, 9 \\ w_{12} | \underline{p}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}, D &\propto \exp\left\{ -\frac{1}{2}(w_{12} - 2)^2 \right\} \psi(\underline{p}, \underline{w}) \\ w_{67} | \underline{p}, w_{12}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45}, D &\propto \exp\left\{ -\frac{1}{2}(w_{67} - 2)^2 \right\} \psi(\underline{p}, \underline{w}) \\ w_{34} | \underline{p}, w_{12}, w_{67}, w_{89}, w_{35}, w_{45}, D &\propto \exp\left\{ -\frac{1}{2}(w_{34} - 2)^2 \right\} \psi(\underline{p}, \underline{w}) \\ w_{89} | \underline{p}, w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{35}, w_{45}, D &\propto \exp\left\{ -\frac{1}{2}(w_{89} - 2)^2 \right\} \psi(\underline{p}, \underline{w}) \\ w_{35} | \underline{p}, w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{45}, D &\propto \exp\left\{ -\frac{1}{2}(w_{35} - 1)^2 \right\} \psi(\underline{p}, \underline{w}) \\ w_{45} | \underline{p}, w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, D &\propto \exp\left\{ -\frac{1}{2}(w_{45} - 1)^2 \right\} \psi(\underline{p}, \underline{w}) \end{aligned} \quad (34)$$

onde $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_9)$, $\underline{p} = (p_1, \dots, p_9)$ e $\underline{w} = (w_{12}, w_{67}, w_{34}, w_{89}, w_{35}, w_{45})$.

Tabela 8 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i | D)$, $i = 1, \dots, 9$, e $E(w_{12} | D)$, $E(w_{67} | D)$, $E(w_{34} | D)$, $E(w_{89} | D)$, $E(w_{35} | D)$ e $E(w_{45} | D)$.

	$\pi_4(\underline{p})$	
	modelo não hierárquico	modelo hierárquico
$\widehat{E}(p_1 D)$	0.8520	0.8580
$\widehat{E}(p_2 D)$	0.7511	0.7600
$\widehat{E}(p_3 D)$	0.6949	0.6742
$\widehat{E}(p_4 D)$	0.8137	0.8173
$\widehat{E}(p_5 D)$	0.6594	0.6527
$\widehat{E}(p_6 D)$	0.8630	0.8666
$\widehat{E}(p_7 D)$	0.9077	0.8996
$\widehat{E}(p_8 D)$	0.6325	0.6502
$\widehat{E}(p_9 D)$	0.7648	0.7699
$\widehat{E}(w_{12} D)$	-	2.0183
$\widehat{E}(w_{67} D)$	-	2.0481
$\widehat{E}(w_{34} D)$	-	2.0496
$\widehat{E}(w_{89} D)$	-	2.0139
$\widehat{E}(w_{35} D)$	-	0.9911
$\widehat{E}(w_{45} D)$	-	1.0424

Tabela 9 - Intervalos de credibilidade (95 %) para $p_i, i = 1, \dots, 9$ e para w .

$$\pi_4(p)$$

	modelo não hierárquico	modelo hierárquico
p_1	0.6701;0.9760	0.6330;0.9791
p_2	0.4828;0.9350	0.4899;0.9386
p_3	0.3815;0.9207	0.3419;0.9137
p_4	0.5746;0.9524	0.5988;0.9635
p_5	0.4413;0.8464	0.4164;0.8369
p_6	0.6851;0.9700	0.7176;0.9689
p_7	0.7690;0.9899	0.7372;0.9851
p_8	0.3206;0.8763	0.3419;0.8946
p_9	0.5593;0.9237	0.5497;0.9314
w_{12}	—	0.5979;3.3118
w_{67}	—	0.4707;3.5877
w_{34}	—	0.7549;3.3921
w_{89}	—	0.6294;3.3422
w_{35}	—	-0.2844;2.2728
w_{45}	—	-0.4141;2.2449

6. Sistemas k -out-of- m

Supor que S é um sistema com m componentes, de modo que, o sistema funciona se e somente se pelo menos k componentes operam com sucesso. Este sistema é conhecido como um sistema k -out-of- m . Se $k = m$ obtemos sistemas em série e se $k = 1$ obtemos sistemas em paralelo, ou seja, sistemas em série e em paralelo são casos especiais de um sistema k -out-of- m (ver, por exemplo: Martz & Waller, 1982).

Assumir que os tempos de vida dos componentes são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com densidade exponencial

$$f(t, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} \quad (35)$$

onde $0 < \theta < \infty, 0 < t < \infty$.

Considerar um sistema com n_i réplicas para o i -ésimo componente, $i = 1, 2, \dots, m$ sendo testadas separadamente, onde $n = \sum_{i=1}^m n_i$. Se $k = m = 1$, temos um sistema com somente uma unidade e o sistema é conhecido como um sistema "one-unit".

Seja $X_i(t)$ uma variável indicadora para o funcionamento do i -ésimo componente. $i = 1, \dots, m$ num dado tempo $t > 0$. A confiabilidade do i -ésimo componente é dada por $p_i(t) = P\{X_i(t) = 1\}$ e $\{X_i(t) = 1\} \Leftrightarrow \{T_i \geq t\}$, $i = 1, \dots, m$. Assim, $p_i(t) = P\{X_i(t) = 1\} = P\{T_i \geq t\} = R_i(t)$, onde $R_i(t)$ é a confiabilidade em t para o i -ésimo componente. Maiores detalhes podem ser encontrados em Achcar (1992).

6.1 Um exemplo: Sistemas 3-out-of-5

Um sistema 3-out-of-5 que consiste de componentes independentes e exponencialmente idênticos tem um tempo de vida de $t = 45$ horas. Um teste de vida no componente consistiu em testar 10 unidades (réplicas) até que todas falhassem. Os tempos de vida observados (em horas) foram 80, 96, 99, 111, 121, 126, 140, 149, 175 e 203. Portanto, o tempo total sob teste foi $T = 1300$.

Assumir que a confiabilidade do i -ésimo componente em t é dada por $p_i(t) = e^{-\frac{t}{\theta}}$, $t = 45$. Então, $\hat{p}_i(45) = e^{-\frac{45}{\hat{\theta}}}$, onde $\hat{\theta} = \frac{T}{n}$ (EMV do tempo de vida médio).

Logo,

$$\hat{p}_i(45) = \exp\left\{-\frac{45(10)}{1300}\right\} = 0.7074 \quad (36)$$

e a confiabilidade de um sistema 3-out-of-5 é dada por:

$$\begin{aligned} R(t) = & p_1(t) p_2(t) p_3(t) [1 - p_4(t)] [1 - p_5(t)] + p_1(t) p_2(t) p_4(t) [1 - p_3(t)] [1 - p_5(t)] + \\ & + p_1(t) p_3(t) p_4(t) [1 - p_2(t)] [1 - p_5(t)] + p_2(t) p_3(t) p_4(t) [1 - p_1(t)] [1 - p_5(t)] + \\ & + p_1(t) p_2(t) p_5(t) [1 - p_3(t)] [1 - p_4(t)] + p_1(t) p_3(t) p_5(t) [1 - p_2(t)] [1 - p_4(t)] + \\ & + p_2(t) p_3(t) p_5(t) [1 - p_1(t)] [1 - p_4(t)] + p_1(t) p_4(t) p_5(t) [1 - p_2(t)] [1 - p_3(t)] + \\ & + p_2(t) p_4(t) p_5(t) [1 - p_1(t)] [1 - p_3(t)] + p_3(t) p_4(t) p_5(t) [1 - p_1(t)] [1 - p_2(t)] \\ & + p_1(t) p_2(t) p_3(t) p_4(t) [1 - p_5(t)] + p_1(t) p_2(t) p_3(t) p_5(t) [1 - p_4(t)] + \\ & + p_1(t) p_2(t) p_4(t) p_5(t) [1 - p_3(t)] + p_1(t) p_3(t) p_4(t) p_5(t) [1 - p_2(t)] + \\ & + p_2(t) p_3(t) p_4(t) p_5(t) [1 - p_1(t)] + p_1(t) p_2(t) p_3(t) p_4(t) p_5(t) . \end{aligned}$$

(37)

Consideremos, primeiramente, que cada componente $p_i(t)$, $i = 1, \dots, 5$, seja permutável e altamente confiável. Então, as distribuições a priori e a posteriori para \underline{p} são dadas, respectivamente, por:

$$\pi_2(\underline{p}) = \alpha^5 \left\{ \prod_{i=1}^5 (1 - p_i) \right\}^{\alpha-1} \times \left\{ \frac{1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-4\alpha}}{1-4\alpha} \right\} \quad (38)$$

$$\pi_2(\underline{p} | D) \propto \left[1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-4\alpha} \right] \times \prod_{i=1}^5 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i + \alpha - 1} \quad (39)$$

e as distribuições condicionais requeridas para gerar amostras de (39) via algoritmo de Gibbs Sampling com Metropolis-Hastings dadas por:

$$\pi_2(p_i | p_{(i)}, D) \propto p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i + \alpha - x_i - 1} \times \phi(\underline{p}), \quad i = 1, \dots, 5 \quad (40)$$

onde $\phi(\underline{p}) = \exp\{\log[1 - (1 - p_{(1)}^*)^{1-4\alpha}]\}$, $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_5)$ e assumimos $\alpha = 0.2$ (em (40)), de modo que possamos garantir que os valores de p_i tendam a ser grandes.

Assumindo ainda que cada componente $p_i(t)$, $i = 1, \dots, 5$ seja permutável e idêntico ou quase idêntico na situação onde p_1 é semelhante a p_3 , p_2 semelhante a p_4 e p_3 semelhante a p_5 , com $\theta_{13} = \theta_{24} = 100$ e $\theta_{35} = 50$, e os restantes próximos de zero, exceto $\theta_{12} = \theta_{45} = 10$. As distribuições a priori e a posteriori para \underline{p} são dadas, respectivamente, por:

$$\pi_3(\underline{p}) \propto \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{13}(p_1 - p_3)^2 + \theta_{24}(p_2 - p_4)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 \right] \right\} \quad (41)$$

$$\pi_3(\underline{p} | D) \propto \left[\prod_{i=1}^5 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \right] \times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{13}(p_1 - p_3)^2 + \theta_{24}(p_2 - p_4)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 + \theta_{45}(p_4 - p_5)^2 \right] \right\} \quad (42)$$

e as distribuições condicionais requeridas para o algoritmo de Metropolis-Hastings:

$$\begin{aligned} p_1 | p_{(1)}, D &\propto p_1^{x_1} (1 - p_1)^{n_1 - x_1} \times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{13}(p_1 - p_3)^2 \right] \right\} \\ p_2 | p_{(2)}, D &\propto p_2^{x_2} (1 - p_2)^{n_2 - x_2} \times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{12}(p_1 - p_2)^2 + \theta_{24}(p_2 - p_4)^2 \right] \right\} \\ p_3 | p_{(3)}, D &\propto p_3^{x_3} (1 - p_3)^{n_3 - x_3} \times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{13}(p_1 - p_3)^2 + \theta_{35}(p_3 - p_5)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4 | p_{(4)}, D &\propto p_4^{x_4} (1 - p_4)^{n_4 - x_4} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{24} (p_2 - p_4)^2 + \theta_{45} (p_4 - p_5)^2 \right] \right\} \\ p_5 | p_{(5)}, D &\propto p_5^{x_5} (1 - p_5)^{n_5 - x_5} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_{35} (p_3 - p_5)^2 + \theta_{45} (p_4 - p_5)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Assumindo um outro caso onde os componentes $p_i(t)$, $i = 1, \dots, 5$ não são muito confiáveis nem idênticos, consideramos distribuições marginais uniformes $(0, 1)$ para p_i dado $\underline{\theta}$. $w_{13} = w_{24} = w_{35} = 2$, que correspondem às correlações positivas entre p_1 e p_3 , entre p_2 e p_4 e entre p_3 e p_5 . Assumimos, também, $w_{12} = w_{45} = 1$ e os restantes como zero. Portanto, as distribuições a priori e a posteriori para \underline{p} são dadas, respectivamente, por:

$$\pi_4(\underline{p}) \propto \psi(\underline{p}) \quad (44)$$

$$\pi_4(\underline{p} | D) \propto \prod_{i=1}^5 p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \times \psi(\underline{p}) \quad (45)$$

onde $\psi(\underline{p}) = 1 + w_{12} \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \left(p_2 - \frac{1}{2}\right) + w_{13} \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) + w_{24} \left(p_2 - \frac{1}{2}\right) \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) + w_{35} \left(p_3 - \frac{1}{2}\right) \left(p_5 - \frac{1}{2}\right) + w_{45} \left(p_4 - \frac{1}{2}\right) \left(p_5 - \frac{1}{2}\right)$.

As distribuições condicionais a posteriori são dadas por:

$$\pi_4(p_i | p_{(i)}, D) \propto p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \times \psi(\underline{p}), \quad i = 1, \dots, 5 \quad (46)$$

onde $p_{(i)} = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_5)$.

6.2 Ilustração Numérica

Para uma ilustração numérica, geramos 5 conjuntos de dados para os quais consideramos $n_i = 50$ (número de réplicas do i -ésimo componente testadas em $t = 45$) e $\hat{p}_i(45) = 0.7074$, $i = 1, \dots, 5$. Assim, a partir de gerações de "binomiais" obtemos x_i (número de réplicas que sobrevivem ao teste). Os dados obtidos foram $D = \{(n_i, x_i) = (50, 40); (50, 36); (50, 41); (50, 38); (50, 37)\}$, $i = 1, \dots, 5$. onde n_i é o número de réplicas do i -ésimo componente que são testadas em um dado tempo t e x_i denota o número de réplicas que sobrevivem ao teste.

De acordo com os dados e utilizando as mesmas condições de programação descritas nas seções 3 e 4, construímos uma amostra, para a obtenção de sumários a posteriori. Estes sumários estão ilustrados nas Tabelas 10, 11 e 12 a seguir.

Tabela 10 - Estimadores de Monte Carlo para $E(p_i|D)$, $i = 1, \dots, 5$.

Distribuição a priori

	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\widehat{E}(p_1 D)$	0.7981	0.7957	0.7905
$\widehat{E}(p_2 D)$	0.7237	0.7225	0.7134
$\widehat{E}(p_3 D)$	0.8239	0.8041	0.8120
$\widehat{E}(p_4 D)$	0.7608	0.7472	0.7540
$\widehat{E}(p_5 D)$	0.7450	0.7933	0.7336

Tabela 11 - Intervalos de credibilidade (95 %) para p_i , $i = 1, \dots, 5$.

Distribuição a priori

	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
p_1	0.6767;0.8976	0.7033;0.8838	0.6700;0.8906
p_2	0.5808;0.8314	0.6108;0.8186	0.5890;0.8136
p_3	0.7229;0.9128	0.7115;0.9016	0.6970;0.9014
p_4	0.6431;0.8683	0.6376;0.8391	0.6319;0.8563
p_5	0.6078;0.8507	0.6794;0.8844	0.6101;0.8392

Tabela 12 - Estimadores de Bayes para a confiabilidade do sistema 3-out-of-5.

Distribuição a priori

	$\pi_2(\underline{p})$	$\pi_3(\underline{p})$	$\pi_4(\underline{p})$
$\widehat{E}(R(t) D)$	0.9175	0.9191	0.9086
$IC(95\%) R(t)$	0.8605;0.9587	0.8632;0.9580	0.8540;0.9511

Os gráficos que mostram a forma das distribuições marginais a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 5$, considerando a distribuição a priori $\pi_2(\underline{p})$ - componentes permutáveis e altamente confiáveis, $\pi_3(\underline{p})$ - componentes permutáveis e idênticos ou quase idênticos e $\pi_4(\underline{p})$ - componentes não muito confiáveis nem idênticos, são ilustrados pelas figuras a seguir.

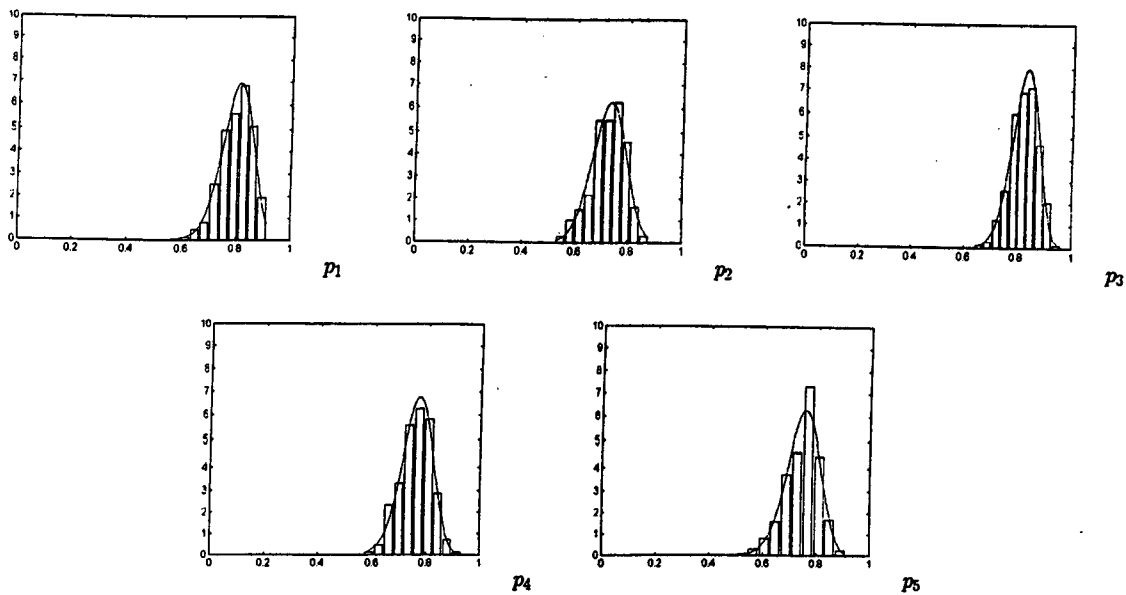


Figura 6 - Distribuições marginais a posteriori para $p_i, i = 1, \dots, 5$ considerando distribuição a priori $\pi_2(\underline{p})$.

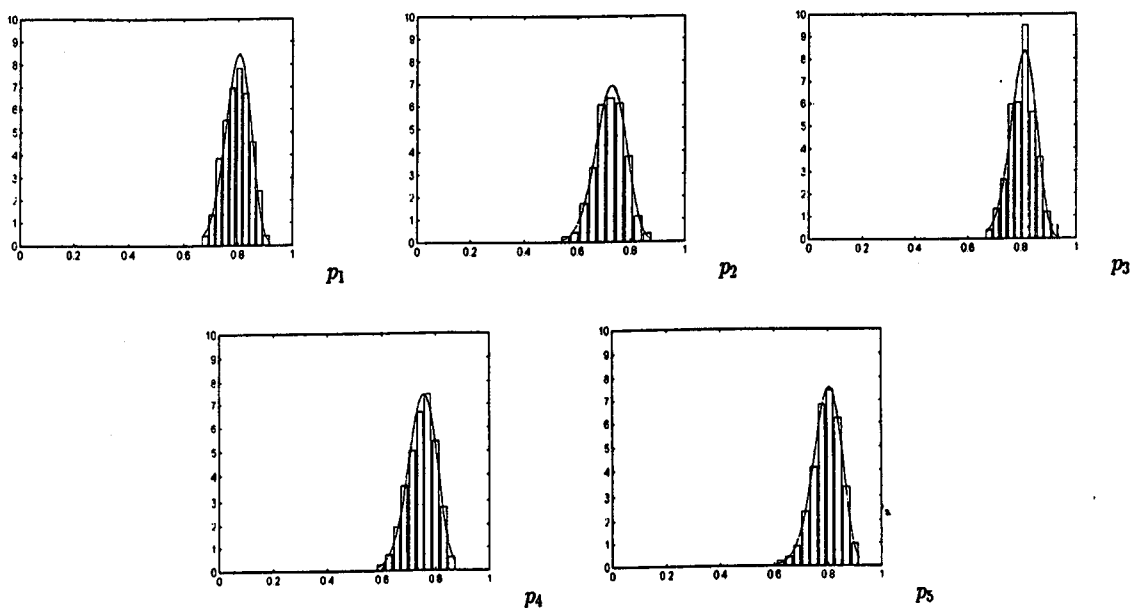


Figura 7 - Distribuições marginais a posteriori para $p_i, i = 1, \dots, 5$ considerando distribuição a priori $\pi_3(\underline{p})$.

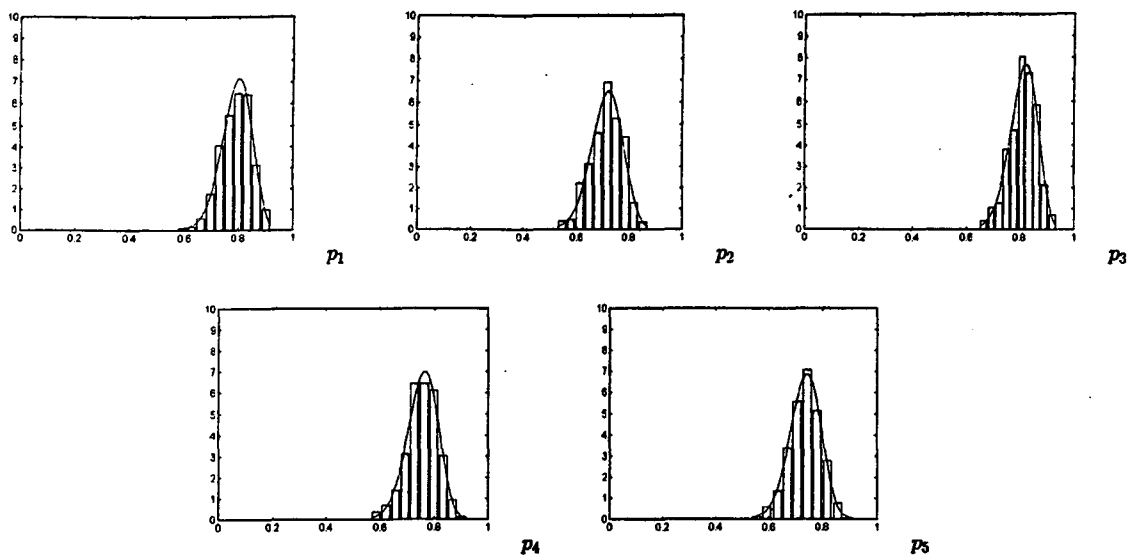


Figura 8 - Distribuições marginais a posteriori para p_i , $i = 1, \dots, 5$ considerando distribuição a priori $\pi_4(\underline{p})$.

7. Algumas conclusões

A análise estatística de modelos usados para avaliar a confiabilidade de redes, em geral, pode ser complicada quando a rede tem muitos componentes ou não é muito precisa usando métodos de inferência clássica. Além disso, informações de especialistas podem ser incorporadas em distribuições a priori envolvendo vários parâmetros. Este fato motiva o uso de métodos Bayesianos em análise da confiabilidade de redes.

O uso de métodos de simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) como os algoritmos de Gibbs Sampling e Metropolis-Hastings, que são de fácil implementação, torna viável e relativamente simples a obtenção de quantidades a posteriori de interesse. Podemos considerar ainda diferentes distribuições a priori para a confiabilidade dos componentes individuais p_i , $i = 1, \dots, n$. Os exemplos apresentados neste artigo ilustram a viabilidade da metodologia proposta.

Para o sistema de rede da Figura 1, observamos que os sumários a posteriori obtidos considerando as distribuições a priori $\pi_1(\underline{p})$ (componentes independentes) e $\pi_2(\underline{p})$ (seqüências permutáveis e componentes altamente confiáveis) estão próximos. Para as distribuições a priori $\pi_3(\underline{p})$ (seqüências permutáveis e componentes idênticos ou quase idênticos) e $\pi_4(\underline{p})$ (componentes não muito confiáveis nem idênticos) também obtivemos resultados próximos, mas, um pouco

inferiores aos de $\pi_1(\underline{p})$ e $\pi_2(\underline{p})$. Além disso, verificamos que o modelo Bayesiano hierárquico e o modelo Bayesiano não hierárquico produziram resultados similares, ou seja, a escolha dos valores para o primeiro modelo foi razoável.

OLIVEIRA, S. C., ACHCAR, J. A. Network reliability systems: a Bayesian approach.

ABSTRACT: In this paper, we present a Bayesian analysis for network reliability systems using Markov Chain Monte Carlo methods. We assume different prior distributions for the individual component reliabilities to obtain the posterior summaries of interest. The proposed method is illustrated considering a special case of network reliability system with nine components. We also consider k -out-of- m reliability systems with a numerical illustration.

KEYWORDS: network reliability systems, Bayesian analysis, MCMC methods.

Referências

- ACHCAR, J.A. "Use of Metropolis-Hastings Algorithm for a Bayesian Analysis of Complex Network Reliability Systems", *Revista Brasileira de Probabilidade e Estatística*, 12, 17-33, 1998.
- ACHCAR, J.A. "Some aspects of reparametrization for inferences of k -out-of- m system reliability in the independent exponential case", *Notas do ICMC - Série Estatística*, nº 121, 1992.
- BARLOW, R.E. ; PROSCHAN, F. "Statistical Theory of Reliability and Life Testing", New York: Holt, Rinehart and Winston, 1981.
- CHEN, J. ; SINGPURWALLA, N. D. "Composite Reliability and its Hierarchical Bayes Estimation", *Journal of the American Statistical Association*, 91, 436 : 1474 - 1484, 1996.
- CHIB, S. ; GREENBERG, E. "Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm", *American Statistician*, 49, 4: 327 - 335, 1995.
- DE FINETTI, B. "Probability, Induction and Statistics", New York : John Wiley, 1972.

- GELFAND, A. E. ; SMITH, A. F. "Sampling - Based Approaches to Calculating Marginal Densities", Journal of the American Statistical Association, 85, 410 : 398 - 409, 1990.
- GELMAN, A. ; RUBIN, D. "Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences". Statistical Science, 7, 457 - 472, 1992.
- LEE, M-L. , T. "Pseudo - Conjugate Multivariate Prior Densities", Technical Report, Harvard Medical School, Channing Laboratory, 1993.
- LYNN, N. ; SINGPURWALLA, N. ; SMITH, A. "Bayesian Assessment of Network Reliability", Manuscript, 1995.
- MARTZ, H.F. ; WALLER, R.A. "Bayesian Reliability Analysis" , New York : John Wiley, 1982.
- OLIVEIRA, S. C. "Uso de Métodos Bayesianos para Confiabilidade de Redes" , Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, São Carlos, 1999.

NOTAS DO ICMC

SÉRIE ESTATÍSTICA

- 056/98 RODRIGUES, J.; CHAVES, J.S. – A note on bayesian exponential regression model with censored data.
- 055/99 RODRIGUES, J.; SILVEIRA, V.D.R. – Bayesian computation for dichotomous variables with classification errors.
- 054/98 ACHCAR, J.A.; FORTULAN, V.C. – Relação entre o uso de hormônio e câncer em mulheres: uma aplicação de meta-análise sob um enfoque bayesiano.
- 053/98 CID, J. E.R.; ACHCAR, J.A. – Bayesian inference for nonhomogeneous poisson processes in software reliability models assuming nonmonotonic intensity functions.
- 052/98 ANDRADE FILHO, M.G; MIZOI, M.F. – Aplicação de MCMC na estimação de máxima verossimilhança para processos AR(p) e MA(q).
- 051/98 RODRIGUES, J. – Bayesian analysis for the accelerated life tests with informative prior distributions obtained from fixed stresses.
- 050/98 ACHCAR, J.A.; ANDRADE, M.G.; LOIBEL, S. - A bayesian analysis for homogeneous poisson processes with change-points.
- 049/98 ACHCAR, J.A; PEREIRA, G.A. - Use of mixture of exponential power distributions for interval-censored survival data in presence of covariates.
- 048/98 CID, J.E.R.; ACHCAR, J.A. - Software reliability considering the superposition of non-homogeneous Poisson processes in the presence of a covariate.
- 047/98 ACHCAR, J.A.; PEREIRA, G.A. - Use of exponential power distributions for mixture models in the presence of covariates.