UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Sobre a ordem de convergência para as equações integrais de Volterra de segunda espécie tipo Abel com soluções não suaves

LEONARDO S. GUILLERMO FELIPE

NEIDE M. BERTOLDI FRANCO

Nº 14

NOTAS

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

ISSN - 0103-2577

Sobre a ordem de convergência para as equações integrais de Volterra de segunda espécie tipo Abel com soluções não suaves

LEONARDO S. GUILLERMO FELIPE

NEIDE M. BERTOLDI FRANCO

Nº 14

N O T A S D O I C M S C
Série Computação

São Carlos
Set. / 1994

SOBRE A ORDEM DE CONVERGÊNCIA PARA AS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA DE SEGUNDA ESPÉCIE TIPO ABEL COM SOLUÇÕES NÃO SUAVES.

LEONARDO S. GUILLERMO FELIPE.

NEIDE M. BERTOLDI FRANCO.

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP.

13560 São Carlos-São Paulo.

RESUMO

Neste trabalho consideramos a ordem de convergência por colocação para as equações integrais de Volterra de segunda espécie com núcleo fracamente singular. Estas equações, em geral, possuem soluções que tem derivadas singulares em $t=0$; obtendo, consequentemente, taxa de convergência pequena. Mostraremos que é possivel obter ordem de convergência ótima, usando malha não uniforme apropriada. O espaçamento dos nós é definido pelo comportamento da solução exata na origem. Resultados numéricos são dados.

1. INTRODUÇÃO.

Discutiremos a solução numérica por colocação para as equações integrais de Volterra de segunda espécie com núcleo fracamente singular,

$$y(t)=g(t)+\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\, k(t,s,y(s))ds, \quad 0\le t\le T, \quad 0<\alpha<1, \qquad (1.1)$$

onde g e k são funções dadas de valor real e suficientemente suaves sobre $[0,T]$ e $S\times\mathbb{R}$ ($S:=\{(t,s):0\le s\le t\le T\}$), respectivamente.

Cameron e McKee [7] consideraram a discretização da equação (1.1) e derivaram um resultado de convergência ótima sob a hipótese que a solução exata y é suave sobre [0,T]. Em muitos problemas que aparecem na prática, a solução de (1.1) não é suave em t=0; e isso pode ser demonstrado (ver, por exemplo, Brunner e Houwen [4]) que se as funções g e k satisfazem $g \in C^m[0,T]$ e $k \in C^m(S)$, então y pode ser expresso como,

$$y(t)=g(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(t;\alpha)t^{n(1-\alpha)}, \quad t\in[0,T]$$

onde $\psi_n \in C^m[0,T]$. Deste modo $y'(t)$ é descontinua quando $t \to 0^+$; e neste caso a ordem de convergência é $(1-\alpha)$ conforme veremos na Seção 3 deste trabalho. Dado que a ordem de convergência é pequena, nosso objetivo é procurar ordem ótima de convergência.

2. A EQUAÇÃO DE COLOCAÇÃO. (Blom e Brunner [3]).

O método numérico a ser analisado é chamado de colocação no espaço polinomial spline,

$$S_{m-1}^{(-1)}(Z_N):=\{u: u(t)\big|_{t\in\sigma_n}:=u_n(t)\in P_{m-1},\ 0\le n\le N-1\},$$

associado com a malha dada Δ_N do intervalo [0,T], onde

$$\Delta_N:\ 0=t_0<t_1<\dots<t_N=T,\quad N\ge 1.$$

Aqui, P_{m-1} é o espaço dos polinômios reais de grau não maior a m-1 ($m\ge1$). Definimos, $\sigma_0:=[t_0,t_1]$, $\sigma_n:=(t_n,t_{n+1}]$, $(1\le n\le N-1)$; $Z_N:=\{t_n: 1\le n\le N-1\}$ (isto é, o conjunto dos pontos interiores da malha Δ_N). Além disso, $h:=\max\{h_n: 0\le n\le N-1\}$ e $\bar{h}:=\min\{h_n: 0\le n\le N-1\}$, onde $h_n:=t_{n+1}-t_n$; a quantidade h é chamada o diâmetro da malha Δ_N.

Uma sequência de malhas para [0,T] é chamada **quase-uniforme**, se existe uma constante finita $\gamma\ge1$ independente de N tal que, $h/\bar{h}\le\gamma$.

Uma sequência de malhas para [0,T] definida por,

$$t_n:=\left(\frac{n}{N}\right)^r T,\quad 0\le n\le N-1\quad (N\ge 2),\tag{2.1}$$

é chamada de malha graduada; onde $r\in\mathbb{R}$ é dado por $r=m/(1-\alpha)$. Assumiremos que $r\ge 1$. As propriedades para este tipo de malha podem ser vistas em Brunner e Houwen [6].

A aproximação para y é um elemento $u\in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ tal que,

$$u(t)=g(t)+\int_0^t (t-s)^{-\alpha}k(t,s,u(s))ds,\ \text{para todo } t\in X(N),$$

onde $X(N):=\bigcup_{n=0}^{N-1} X_n$ com $X_n:=\{t_{n,j}:=t_n+c_jh_n\ :0\le c_1<\ldots<c_m\le 1\}$, onde $\{c_j\}$ $(1\le j\le m)$ são os parâmetros de colocação.

Para mostrar o caráter recursivo do método, a solução exata y de (1.1) é aproximada por um elemento $u\in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ satisfazendo a equação integral dada sobre X(N); isto é,

$$u_n(t_{n,j})=F_n(u;t_{n,j})+$$

$$+h_n^{1-\alpha}\int_0^{c_j}(c_j-v)^{-\alpha}k(t_{n,j},t_n+vh_n,u_n(t_n+vh_n))dv$$

$$1\le j\le m\tag{2.2}$$

onde,

$$F_n(u;t_{n,j}):=g(t_{n,j})+\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(t_{n,j}-s)^{-\alpha}k(t_{n,j},s,u_i(s))ds,$$

$$0\le n\le N-1.$$

Para escrever a equação (2.2) em forma compacta, definimos

$$\Phi_{n,i}^{(j)}[u_i;\alpha]:=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\left[\frac{t_{n,j}-t_i}{h_i}-v\right]^{-\alpha}k(t_{n,j},t_i+vh_i,u_i(t_i+vh_i))dv & 0\le i\le n-1;\ (1\le j\le m)\\[2ex] \displaystyle\int_0^{c_j}(c_j-v)^{-\alpha}k(t_{n,j},t_n+vh_n,u_n(t_n+vh_n))dv & i=n;\ (1\le j\le m)\end{cases}\tag{2.3}$$

Com esta notação a equação (2.2) assume a seguinte forma,

$$u_n(t_{n,j})=g(t_{n,j})+h_n^{1-\alpha}\,\Phi^{(j)}_{n,n}[u_n;\alpha]+\sum_{l=0}^{n-1}h_l^{1-\alpha}\,\Phi^{(j)}_{n,l}[u_l;\alpha],$$

$$1\le j\le m;\quad 0\le n\le N-1 \qquad (2.4)$$

A equação (2.2) ou (2.4) é chamada equação de colocação exata; e esta representa uma sequência de N sistemas de equações algébricas em $\mathbb{R}^m$ para as componentes dos vetores $Y_n=(Y_{n,1},\ldots,Y_{n,m})^T$, onde $Y_{n,j}:=u_n(t_{n,j})$. Depois de calcular Y_n, a aproximação u em σ_n é determinada por,

$$u_n(t_n+vh_n):=\sum_{j=1}^{m}Y_{n,j}\,L_j(v),\qquad t_n+vh_n\in\sigma_n,$$

onde L_j denota o j-ésimo polinômio fundamental de Lagrange associado com os m-parâmetros de colocação $\{c_j\}$; isto é,

$$L_j(v):=\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\frac{v-c_k}{c_j-c_k}\qquad 1\le j\le m.$$

TEOREMA 2.1.

Se g e k são funções continuas, então uma escolha especial dos parâmetros de colocação, $0=c_1<c_2<\ldots<c_{m-1}<c_m=1$, fornece uma aproximação u que é continua em [0,T]; isto é, $u\in S^{(0)}_{m-1}(Z_N):=S^{(-1)}_{m-1}(Z_N)\cap C([0,T])$.

Demonstração.

A prova deste resultado é análoga a prova dada em Guillermo [8] para equações integrais de Volterra com núcleo regular.

3. RESULTADOS DE CONVERGÊNCIA.

Teorema 3.1.

Sejam as funções g e k em (1.1) pertencentes a $C^m[0,T]$ e $C^m(S)$ respectivamente, com $m\ge1$, e suponha que nenhuma das funções é identicamente nula. Então existe $\underline{h}>0$ tal que a equação de colocação (2.4) define, para cada $h\in(0,\underline{h})$, uma única aproximação $u\in S^{(-1)}_{m-1}(Z_N)$. O erro induzido por esta aproximação satisfaz, para qualquer escolha dos parâmetros de colocação $\{c_j\}$ com $0\le c_1<\ldots<c_m\le1$, e para toda sequência de malha quase-uniforme,

$$\|e\|_\infty=\|y-u\|_\infty=O(N^{-(1-\alpha)}).$$

O expoente $1-\alpha$ é o melhor possível, no sentido de que este não pode ser sustituído por qualquer número maior que $1-\alpha$.

Demonstração. Pode ser encontrada em Brunner [5].

Como pode-se observar, no Teorema 3.1, a taxa de convergência é menor que 1. Nossa preocupação agora é como obter ordem ótima de convergência ?

Uma maneira de construir aproximação por colocação de ordem elevada, usando malha uniforme ou quase-uniforme, é obtido mudando o espaço dos polinômios splines para o **espaço não polinomial spline**. Os elementos deste novo espaço refletem o comportamento da solução exata da equação (1.1) próximo de $t=0$ (ver por exemplo Brunner [4]). A desvantagem deste método é que a dimensão deste novo espaço é significativamente maior que a dimensão de $S^{(-1)}_{m-1}(Z_N)(=Nm)$. Uma outra alternativa pode ser considerada: colocação no espaço polinomial spline $S^{(-1)}_{m-1}(Z_N)$ usando malha graduada. A motivação para o uso de malha graduada na aproximação de funções não suaves da forma $f(t)=t^{\beta}(\beta>0)$ em $[0,1]$ por polinômios splines foi dada por Rice [10]. Esta idéia foi subsequentemente adaptada para gerar aproximações de ordem elevada para métodos de Galerkin, integração produto e colocação por splines para a solução de equações integrais de Fredholm de segunda espécie com núcleo fracamente singular, ver por exemplo Schneider [12], Vainikko e Uba [13] e Graham [9].

Agora apresentamos o Teorema de convergência ótima, assim

Teorema 3.2.

Sejam as funções g e k em (1.1) de clase $C^m(I)$ e $C^m(S)$ respectivamente ($m\geq 1$), e assuma que nenhuma das funções é identicamente nula. Se $\Delta_N^{(r)}$ é a malha graduada definida por (2.1), então a correspondente equação de colocação (2.4) define para todo N suficientemente grande, uma única aproximação $u\in S^{(-1)}_{m-1}(Z_N)$. O erro induzido por esta aproximação satisfaz,

$$\| e \|_{\infty} = O(N^{-m}),$$

e, isto é verdade para todos os parâmetros de colocação $\{c_j\}$ satisfazendo $0\leq c_1<\ldots<c_m\leq 1$.

Demonstração. Pode ser encontrada em Brunner [5].

4. DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE COLOCAÇÃO.

Temos assumido que as integrais em (2.3) podem ser resolvidas exatamente. Nos problemas que aparecem na prática, muitas vezes não é possível resolver estas integrais ém forma exata. Neste caso, temos que aproximá-las por processos de quadraturas apropriadas. Consideremos então, fórmulas de quadratura do tipo integração produto,

$$\hat{\Phi}^{(j)}_{n,i}[\hat{u}_i;\alpha]:=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=1}^{\mu_1} W^{(n,i)}_{j,l}(\alpha)\; k(t_{n,j},t_i+d_l h_i,u_i(t_i+d_l h_i)), & 0\le i\le n-1\\[2ex] \displaystyle\sum_{l=1}^{\mu_0} W_{j,l}(\alpha)\; k(t_{n,j},t_n+d_{j,l}h_n,u_n(t_n+d_{j,l}h_n)), & i=n\end{cases} \tag{4.1}$$

Os parâmetros caracterizando as abscissas de quadratura em (4.1) são da forma

$$0\le d_1<\ldots<d_{\mu_1}\le 1 \quad \text{e} \quad 0\le d_{j,1}<\ldots<d_{j,\mu_0}\le c_j \qquad (j=1,\ldots,m)$$

onde μ_0 e μ_1 são inteiros (dados) maiores ou iguais a 1 (usualmente, $\mu_0\le m$, $\mu_1\le m$). Além disso, os pesos de quadratura em (4.1) são dados por,

$$W^{(n,i)}_{j,l}(\alpha) = \int_0^1\left(\frac{t_{n,j}-t_i}{h_i} - v\right)^{-\alpha} \lambda_l(v)dv, \qquad i=0,\ldots,n-1$$
$$j=1,\ldots m;\; l=1,\ldots,\mu_1 \tag{4.2}$$

$$W_{j,l}(\alpha) = \int_0^{c_j}(c_j-v)^{-\alpha}\, \lambda_{j,l}(v)dv, \qquad j=1,\ldots,m;\quad l=1,\ldots,\mu_0 \tag{4.3}$$

onde $\lambda_l(v)$ e $\lambda_{j,l}(v)$ são, respectivamente, os polinômios fundamentais de Lagrange associados com os parâmetros de quadratura; isto é,

$$\lambda_l(v):=\prod_{\substack{k=1\\k\ne l}}^{\mu_1}\frac{v-d_k}{d_l-d_k}, \tag{4.4}$$

$$\lambda_{j,l}(v):=\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{\mu_0}\frac{v-d_{j,k}}{d_{j,l}-d_{j,k}},\tag{4.5}$$

Desta maneira, usando as aproximações (4.1) na equação de colocação (2.4) obtemos a equação de colocação discretizada completa,

$$\hat{u}_n(t_{n,j})=g(t_{n,j})+h_n^{1-\alpha}\,\hat{\Phi}^{(j)}_{n,n}[\hat{u}_n;\alpha]+\sum_{l=0}^{n-1}h_l^{1-\alpha}\,\hat{\Phi}^{(j)}_{n,l}[\hat{u}_l;\alpha],$$

$$j=1,\ldots,m \qquad (n=0,\ldots,N-1).\tag{4.6}$$

A equação (4.6) determina, para toda malha com diâmetro de malha suficientemente pequeno, uma única aproximação $\hat{u}\in S^{(-1)}_{m-1}(Z_N)$.

Devido aos erros introduzidos na aproximação das integrais (2.3) por (4.1), $\hat{u}$ será distinta da solução u de (2.4). Desde que, sobre o subintervalo σ_n a aproximação $\hat{u}$ é dada por

$$\hat{u}_n(t_n+vh_n)=\sum_{j=1}^{m}\hat{Y}_{n,j}\,L_j(v),\quad t_n+vh_n\in\sigma_n,\tag{4.7}$$

onde $\hat{Y}_{n,j}:=\hat{u}_n(t_{n,j})$, (4.6) constitui uma sequência de N sistemas de equações algébricas para os vetores $\hat{Y}_n:=(\hat{Y}_{n,1},\ldots,\hat{Y}_{n,m})^T\in\mathbb{R}^m$, $n=0,\ldots,N-1$. Uma vez que $\hat{Y}_n$ é determinado, (4.7) permitirá a avaliação de $\hat{u}$ em σ_n.

Agora, desejamos procurar a ordem de convergência da aproximação $\hat{u}$ por colocação. Sejam então $\hat{e}:=y-\hat{u}$ e $\varepsilon:=u-\hat{u}$, onde u e $\hat{u}$ denotam, respectivamente, as soluções de (2.4) e (4.6). Desde que $\hat{e}=(y-u)+(u-\hat{u})$, temos que

$$\|\hat{e}\|_\infty\le\|e\|_\infty+\|\varepsilon\|_\infty\tag{4.8}$$

A ordem de $\|e\|_\infty$ em (4.8) é dado pelo Teorema 3.2 e a ordem da perturbação ε (devido a discretização completa de (2.4) por integração numérica) dependerá essencialmente da escolha de μ_0 e μ_1 em (4.1), conforme será mostrado no Teorema 4.1.

Antes apresentaremos dois Lemas que serão úteis na prova do

Teorema 4.1.

Lema 4.1.

Os pesos de quadratura $\{W_{j,l}^{(n,i)}(\alpha)\}$ definidos por (4.2) satisfazem

$$|W_{j,l}^{(n,i)}(\alpha)| \leq W(\alpha)\ (n-i)^{-\alpha}, \quad j=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,\mu_1\ ;\ (i<n)$$

onde a constante $W(\alpha)$ é dada por,

$$W(\alpha):=\frac{2^{\alpha}}{1-\alpha}\,\Lambda_1, \text{ para sequências de malha graduada.}$$

Aqui, Λ_1 denota a constante de Lebesgue (ver Rivlin [11]) associada aos parâmetros de quadratura $\{d_1,\ldots,d_{\mu_1}\}$.

Demonstração. Ver Guillermo [8].

Lema 4.2.

Com as hipóteses do Teorema 3.2 , temos

$$\sum_{i=0}^{n} h_i^{1-\alpha}\ \|r_{n,i}\|_1 = O(N^{-\mu}), \qquad n=0,\ldots,N-1$$

onde $\mu:=\min(\mu_0+1-\alpha,\ \mu_1)$.

Demonstração. Pode ser encontrada em Brunner [5]

Teorema 4.1.

Sejam g e k em (1.1) m-vezes continuamente diferenciáveis em seus respectivos domínios. Assuma que u e $\hat{u}$ (elementos de $S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$) denotam as soluções de (2.4) e (4.6) respectivamente, onde as fórmulas de quadratura (4.1) foram usadas. Então, para sequêcias de malha graduada (definição 2.1), $\varepsilon:=u-\hat{u}$ satisfaz,

$$\|\varepsilon\|_{\infty} = O(N^{-\mu}),$$

onde $\mu:=\min(\mu_0+1-\alpha\ ,\mu_1)$.

Prova:

Subtraindo (4.6) de (2.4), e considerando $k(t,s,y)=K(t,s)y$, obtemos

$$\varepsilon_n(t_{n,j})=h_n^{1-\alpha}\,\hat{\Phi}^{(j)}_{n,n}[\varepsilon_n;\alpha]+\sum_{i=0}^{n-1}h_i^{1-\alpha}\,\hat{\Phi}^{(j)}_{n,i}[\varepsilon_i;\alpha]+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}h_i^{1-\alpha}\,E^{(j)}_{n,i}[u_i;\alpha],\quad (1\le j\le m;\ 0\le n\le N-1) \tag{4.9}$$

onde ε_n é a restrição de ε ao subintervalo σ_n, e $E^{(j)}_{n,i}[u_i;\alpha]$ são os erros de quadratura definido por,

$$E^{(j)}_{n,i}[u_i;\alpha]:=\Phi^{(j)}_{n,i}[u_i;\alpha]-\hat{\Phi}^{(j)}_{n,i}[\hat{u}_i;\alpha],\qquad 0\le n\le N-1.$$

Desde que $\varepsilon_n\in P_{m-1}$, podemos escrever,

$$\varepsilon_n(t_n+vh_n)=\sum_{l=1}^{m}L_l(v)\,\varepsilon_n(t_{n,l}),\qquad t_n+vh_n\in\sigma_n \tag{4.10}$$

onde $L_l(v)$ representa o l-ésimo polinômio fundamental de Lagrange para os parâmetros de colocação. Os termos $\hat{\Phi}^{(j)}_{n,i}[\varepsilon_i;\alpha]$ em (4.9) são deste modo da seguinte forma,

$$\hat{\Phi}^{(j)}_{n,i}[\varepsilon_i;\alpha]=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{\mu_1}W^{(n,i)}_{j,s}(\alpha)\;k_{n,j}(t_i+d_sh_i)\;L_l(d_s)\right]\varepsilon_i(t_{i,l}), & 0\le i\le n-1\\[2ex] \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{\mu_0}W_{j,s}(\alpha)\;k_{n,j}(t_n+d_{j,s}h_n)L_l(d_{j,s})\right]\varepsilon_n(t_{n,l}), & i=n\end{cases}$$

$$(1\le j\le m)$$

onde $k_{n,j}(.)=k(t_{n,j},\ .)$.

Seja agora $Q_{n,i}(\alpha)$ $(0\le i\le n\le N-1)$ a matriz quadrada de ordem m, cujos elementos são,

$$q^{(n,i)}_{j,l}(\alpha)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{s=1}^{\mu_1}W^{(n,i)}_{j,s}(\alpha)\;k_{n,j}(t_i+d_sh_i)\;L_l(d_s), & 0\le i\le n-1\\[2ex] \displaystyle\sum_{s=1}^{\mu_0}W_{j,s}(\alpha)\;k_{n,j}(t_n+d_{j,s}h_n)\;L_l(d_{j,s}), & i=n\end{cases} \tag{4.11}$$

$$(1\le j,\ l\le m)$$

e defina os vetores,

$$r_{n,l}:=\left[E^{(1)}_{n,l}[u_l;\alpha],\ldots,E^{(m)}_{n,l}[u_l;\alpha]\right]^T \quad e \quad \eta:=\left[\varepsilon_l(t_{l,1}),\ldots,\varepsilon_l(t_{l,m})\right]^T$$

Com esta notação a equação (4.9) assume a seguinte forma,

$$\left[I_m-h_n^{1-\alpha}Q_{n,n}(\alpha)\right]\eta_n=\sum_{l=0}^{n-1}h_l^{1-\alpha}\,Q_{n,l}(\alpha)\eta_l+\sum_{l=0}^{n}h_l^{1-\alpha}\,r_{n,l}, \tag{4.12}$$

onde I_m é a matriz identidade. Consideremos primeiro a matriz multiplicada por η_n :desde que os elementos da matriz $Q_{n,n}(\alpha)$ são limitados (isto segue da limitação do núcleo $K(t,s)$ e dos pesos de quadratura (4.3)), e desde que $h_n\le h=\mathcal{O}(N^{-1}), n=0,\ldots,N-1$; existe uma constante finita Q'_0 não dependendo de h, tal que, para todo N suficientemente grande,

$$\|(I_m-h_n^{(1-\alpha)}Q_{n,n}(\alpha))^{-1}\|_1\le Q'_0,\qquad n=0,\ldots,N-1. \tag{4.13}$$

O Lema 4.1 nos permite derivar limitantes superiores para as normas $\|Q_{n,l}(\alpha)\|_1$. Por (4.11) achamos que,

$$\|Q_{n,l}(\alpha)\|_1=\max\left\{\sum_{j=1}^{m}|q_{j,l}^{(n,l)}(\alpha)|:\ l=1,\ldots,m\right\}\le Q(\alpha)(n-l)^{-\alpha},$$
$$l=0,\ldots,n-1.\ (n\le N-1)$$

com a constante $Q(\alpha)$ dependendo do limite superior K_0 para $|K(t,s)|$ e da constante de Lebesgue Λ_1. De (4.12), usando (4.13) e a estimativa para $\|Q_{n,l}(\alpha)\|$, obtemos

$$\|\eta_n\|_1\le Q_0h^{1-\alpha}\sum_{l=0}^{n-1}(n-l)^{-\alpha}\|\eta_l\|_1+Q'_0\sum_{l=0}^{n}h_l^{1-\alpha}\|r_{n,l}\|_1, \tag{4.14}$$

com $Q_0:=Q'_0Q(\alpha)$. A expressão (4.14) é a desigualdade de Gronwall discreta generalizada desejada; segue que, a ordem das normas $\|\eta_n\|_1$ serão dadas pela ordem das expressões $\sum_{l=0}^{n}h_l^{1-\alpha}\|r_{n,l}\|_1$, conforme foi mostrado no Lema 4.2. Desde que o diâmetro h satisfaz $h=\mathcal{O}(N^{-1})$, segue que $\|\eta_n\|_1=\mathcal{O}(N^{-\mu})$. Além disso, (4.10) implica,

$$\varepsilon_n(t_n+vh_n)\le\sum_{l=1}^{m}|L_l(v)|\ |\varepsilon_n(t_{n,l})|\le\Lambda_1\|\eta_n\|_1=\mathcal{O}(N^{-\mu}),$$

uniformemente para $t_n+vh_n\in\sigma_n$ e $n=0,\dots,N-1$ (quando $h\to 0^+$, com $Nh\le rT$). Isto é equivalente a afirmação dada no Teorema 4.1. □

Agora podemos derivar um resultado sobre a ordem de convergência da aproximação $\hat{u}$ definida pela equação de colocação discretizada completa (4.6); assim,

<u>Corolário 4.1.</u>

Sejam g e k em (1.1) satisfazendo as condições estabelecidas no Teorema 4.1. Suponha que as fórmulas de quadratura (4.1) usadas para obter a equação de colocação discretizada completa (4.6) correspondem a:

$$\mu_0=\mu_1=m,\qquad d_l=c_l,\qquad d_{j,l}=c_{j,l}=c_jc_l\qquad (j,l=1,\dots,m) \tag{4.15}$$

com pesos de quadratura dados por (4.2) e (4.3). Então a aproximação por colocação resultante $\hat{u}\in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ conduz ao erro $\hat{e}:=y-\hat{u}$ satisfazendo,

$$\|\hat{e}\|_\infty = O(N^{-m}),$$

considerando malha graduada definida em (2.1).

<u>Demonstração.</u>

Usando (4.8), Teorema 3.2 e Teorema 4.1 (com $\mu=m$), obtemos

$$\|\hat{e}\|_\infty \le \|e\|_\infty + \|\varepsilon\|_\infty = O(N^{-m}) + O(N^{-m}) = O(N^{-m}).\ \square$$

Antes de apresentar um exemplo, reescreveremos (4.1) tendo em consideração (4.15). Usando (4.7), a expressão (4.1) assume a seguinte forma,

$$\hat{\Phi}_{n,i}^{(j)}[\hat{u}_i;\alpha]=\begin{cases}\sum_{l=1}^{m} W_{j,l}^{(n,i)}(\alpha)\ k(t_{n,j},t_{i,l},\hat{Y}_{i,l}), & 0\le i\le n-1\\[2ex] \sum_{l=1}^{m} W_{j,l}(\alpha)k(t_{n,j},t_n+c_jc_lh_n,\ \sum_{s=1}^{m}L_s(c_jc_l)\hat{Y}_{n,s}), & i=n\end{cases} \tag{4.16}$$

onde os pesos de quadratura são,

$$W_{j,l}^{(n,l)}(\alpha) = \int_0^1 \left[\frac{t_{n,j}-t_l}{h_l} - v\right]^{-\alpha} L_l(v)dv, \qquad l=0,\ldots,n-1$$
$$(j,l=1,\ldots m) \qquad (4.17)$$

$$W_{j,l}(\alpha) = c_j^{1-\alpha} \int_0^1 (1-v)^{-\alpha} L_l(v)dv, \quad (j,l=1,\ldots,m) \qquad (4.18)$$

5. EXEMPLO NUMÉRICO.

Consideremos a seguinte equação integral,

$$y(t)= 1+\int_0^t \lambda(t-s)^{-\alpha}y(s)ds, \qquad t\in I:=[0,1]; \quad 0<\alpha<1 \qquad (5.1)$$

A solução exata de (5.1) é dada por (ver Bakke e Jackiewicz [2])

$y(t)= E_{1-\alpha}(\lambda\Gamma(1-\alpha)t^{1-\alpha})$, $t\in I$; onde,

$E_\beta(z):= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+n\beta)}$ denota a função Mittag-Leffler e Γ é a função gamma (ver Abramowitz e Stegun [1]).

Para $0<\alpha<1$ obtemos a seguinte solução não suave,

$y(t)= 1+\frac{\lambda}{1-\alpha}\, t^{1-\alpha}$ + termos suaves. Portanto,

$y'(t)= \mathcal{O}(t^{-\alpha})$ quando $t \to 0^+$; enquanto que $y(t)$ é suave em $(0,1]$.

A equação integral (5.1) foi resolvida numericamente para $\lambda=-1$ e $\alpha\in\{1/3,1/2\}$ por colocação em $S_1^{(-1)}(Z_N)$ (de onde $m=2$), usando como parâmetros de colocação os pontos de Gauss-Legendre,

$c_1=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$, $c_2=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$. Os pesos de quadratura (4.17) e (4.18) são

$$W_{j,1}^{(n,l)}(\alpha)= b(\alpha)\left\{\left[\frac{t_{n,j}-t_l}{h_l}\right]^{1-\alpha}\left[(2-\alpha)c_2-\frac{t_{n,j}-t_l}{h_l}\right] -\right.$$
$$\left. -\left[\frac{t_{n,j}-t_{l+1}}{h_l}\right]^{1-\alpha}(2-\alpha)(c_2-1)-\frac{t_{n,j}-t_{l+1}}{h_l}\right\},$$

$$W^{(n,i)}_{j,2}(\alpha)= b(\alpha)\left\{\left[\frac{t_{n,j}-t_i}{h_i} \right]^{1-\alpha}\left[\frac{t_{n,j}-t_i}{h_i} -(2-\alpha)c_1\right] - \left[\frac{t_{n,j}-t_{i+1}}{h_i}\right]^{1-\alpha} \left[\frac{t_{n,j}-t_{i+1}}{h_i} -(2-\alpha)(c_1-1)\right]\right\},$$

$$j=1,2;\ (0\le i\le n-1)$$

$$W_{j,1}(\alpha)= b(\alpha)c_j^{1-\alpha}\ [(2-\alpha)c_2-1],$$

$$W_{j,2}(\alpha)= b(\alpha)c_j^{1-\alpha}\ [1-(2-\alpha)c_1];\quad j=1,2$$

onde, $b(\alpha):= \dfrac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)(c_2-c_1)}$.

A correspondente equação de colocação discretizada completa (4.6) é,

$$\hat{Y}_{n,j} = \tilde{F}_n(t_{n,j})+ h_n^{1-\alpha} \Big\{W_{j,1}(\alpha)\ k\Big[t_{n,j},t_n+c_jc_1h_n,L_1(c_jc_1)\hat{Y}_{n,1}+L_2(c_jc_1)\hat{Y}_{n,2}\Big]+W_{j,2}(\alpha)\ k\Big[t_{n,j},t_n+c_jc_2h_n,L_1(c_jc_2)\hat{Y}_{n,1}+L_2(c_jc_2)\hat{Y}_{n,2}\Big]\Big\},\quad j=1,2;\quad n=0,1,\dots,N-1,$$

onde,

$$\tilde{F}_n(t_{n,j}):= g(t_{n,j})+ \sum_{i=0}^{n-1}h_i^{1-\alpha} \Big\{W^{(n,i)}_{j,1}(\alpha)\ k(t_{n,j},t_{i,1},\hat{Y}_{i,1})+ W^{(n,i)}_{j,2}(\alpha)\ k(t_{n,j},t_{i,2},\hat{Y}_{i,2})\Big\},$$

com, $L_1(v)=\dfrac{c_2-v}{c_2-c_1}$ e $L_2(v)=\dfrac{v-c_1}{c_2-c_1}$.

A Tabela 5.1 mostra, para cada N, os erros máximos em $\bar{Z}_N$, e observamos que a ordem de convergência da aproximação por colocação é $O(N^{-2})$ com r=2/(1-α).

TABELA 5.1

N	(α=1/3, r=3)	(α=1/2, r=4)
5	9.70 E-03	1.49 E-02
10	2.74 E-03	4.81 E-03
20	7.19 E-04	1.45 E-03

6. CONCLUSÕES.

A aproximação por colocação $u \in S_{m-1}^{(-1)}(Z_N)$ para a solução exata da equação integral de Volterra de segunda espécie com núcleo fracamente singular, bem como resultados de convergência foram apresentados. Se $g \in C^m[0,T]$ e $k \in C^m(S)$, a solução exata y da equação integral (1.1) é m-vezes continuamente diferenciável em (0,T]. Em t=0 suas derivadas são, em geral, não limitadas. Como consequência disso, a aproximação por colocação tem ordem de convergência $O(N^{-(1-\alpha)})$.

Como a ordem de convergência obtida é pequena, nosso propósito foi procurar ordem ótima para o método numérico considerado. Para isso, consideramos de alguma maneira, o comportamento singular da solução exata próximo de t=0, usando malha graduada. Mas, o preço que tivemos que pagar por conseguir ordem ótima foi caro; pois, usando malha graduada, com N suficientemente grande, nos temos que inicializar o processo recursivo do método com um subintervalo muito pequeno, ver Guillermo [8]. Isso pode criar um sério problema de arredondamento, contaminando possivelmente o subsequente processo recursivo. Esta dificuldade prática apresentada aqui, restringe a aplicabilidade do método e, portanto, consideramos este problema como ponto de partida para a pesquisa de outras alternativas na procura de ordem ótima de convergência.

7. BIBLIOGRAFIA.

[1] Abramowitz, M & Stegun, I.A. : Handbook of mathematical functions. National bureau of standars, applied mathematical series, 55, Washington (Dover, New York), 1970.

[2] Bakke, V.L. & Jackiewicz, Z.: Stability analysis of product θ-methods for Abel integral equations of the second kind. Numer. Math., 48, 127-136, 1986.

[3] Blom, J.G. & Brunner, H.:The numerical solution of nonlinear Volterra integral equations of the second kind by collocation and iterated collocation. SIAM J.Sci.Stat.Comut.8, 806-830, 1987.

[4] Brunner, H.: Nonpolynomial spline collocation for Volterra equations with weakly singular kernels. SIAM J.Numer.Anal., 20, 1106-1119, 1983.

[5] Brunner, H.: The numerical solution of weakly singular Volterra equations by collocation on graded meshes. Math.Comp. 45, 417-437, 1985.

[6] Brunner, H. & Houwen, P.J.:The numerical solution of Volterra equations. CWI Monographs 3 (North-Holland, Amsterdam, 1986).

[7] Cameron R.F. & McKee, S.: Product integration methods for second-kind Abel Integral equations. J.Comp.Appl.Math., 11, 1-10, 1984.

[8] Guillermo, L.: Equações integrais de Volterra de segunda espécie: Solução por colocação polinomial spline. Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP, 1994.

[9] Graham, I.G.: Galerkin methods for second kind integral equations with singularities. Math.Comp., 39, 519-533, 1982.

[10] Rice, J.R.: On the degree of convergence of nonlinear spline approximation. In : Approximation with special emphasis on spline functions (I.J. Schoenberg, Ed.), Academic Press, New

York, 349-365, 1969.

[11] Rivlin, T. J. : An introduction to the approximation of function . Blaisdell Publishing Company, New York, 1969.

[12] Schneider, C. : Product integration for weakly singular integral equations. Math. Comp. 36, 207-213, 1981.

[13] Vainikko, G. & Uba, P.: A piecewise polynomial approximation to the solution of an integral equation with weakly singular kernel. J.Austral.Math.Soc.Ser.B, 22, 431-438, 1981.

NOTAS DO ICMSC

Serie computaçao

Nº 013/94 PIMENTEL, M.G.C. A framework for user-hypertext inte raction

Nº 012/94 TURINE, M.A.S.; MENDES, M.D.C.; NUNES, M.G.V. TEGRAM: a geometry tutoring system based on Tangram

Nº 011/94 SPOLON, R.; SPOLON, R.; SANTANA, M.J.; SANTANA, R.H.C. Desenvolvimento de um gerador de aplicacao para simu lacao de sistemas discretos

Nº 010/94 SAWAKI, J.; MONARD, M.C.; RODRIGUES, S.R. SABNAG: um sistema baseado em conhecimento para suporte aos u suarios da biblioteca NAG

Nº 009/94 NICOLETTI, M.C.; MONARD, M.C. Learning restricted Horn clauses: some considerations on the ij-determination concept

Nº 008/94 TOME, M.F.; DUFFY, B. GENSMAC: a numerical method for solving unsteady non-newtonian free surface flows

Nº 007/94 TOME, M.F.; MCKEE, S. Numerical simulation of viscous fluid: buckling of planar jets

Nº 006/94 MASIERO, P.C.; OLIVEIRA, M.C.F.; GERMANO, F.S.R; PIERRI,G. Authoring and searching in dynamically growing hypertext data bases

Nº 005/94 NICOLETTI, M.C.; MONARD, M.C. Limiting the background knowledge in inductive logic programming

Nº 004/93 NICOLETTI, M.C.; MONARD, M.C. Learning horn clauses using the ILP system GOLEM