

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN - 0103-2577

**TÓPICOS TEÓRICOS E
COMPUTACIONAIS EM ESCOAMENTO
DE FLUIDOS
(Edição Revisada)**

**VALDEMIR G. FERREIRA
ODERSON DIAS DE MELLO
JEFFERSON NASCIMENTO DE OLIVEIRA
ARMANDO DE OLIVEIRA FORTUNA**

Nº 39

**NOTAS DO ICMC
Série Computação**

São Carlos
Mar./1999

ÍNDICE

1 - INTRODUÇÃO	1
2 - VETORES, TENSORES E NOTAÇÕES.....	3
2.1 - DEFINIÇÕES	3
2.2 - ÁLGEBRA COM TENSORES	5
2.3 - OPERAÇÕES COM DERIVADAS	6
2.4 - IDENTIDADES VETORIAIS E OS TEOREMAS DE GAUSS E STOKES.....	8
3 - TENSÕES NOS FLUIDOS.....	10
3.1 - O TENSOR DAS TENSÕES	10
3.2 - A PRESSÃO E O TENSOR DAS TENSÕES VISCOSAS	13
4 - A CINEMÁTICA DO MOVIMENTO DE UM FLUIDO.....	15
4.1 - DESCRIÇÕES LAGRANGEANA E EULERIANA	15
4.2 - A DECOMPOSIÇÃO DO MOVIMENTO.....	18
4.3 - A DILATAÇÃO	21
5 - PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO DE MASSA, MOMENTO E ENERGIA.....	23
5.1 - O TEOREMA DE TRANSPORTE DE REYNOLDS	23
5.2 - EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE	25
5.3 - A EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DO FLUIDO.....	26
5.4 - EQUAÇÃO DA ENERGIA.....	28
6 - FLUIDOS NEWTONIANOS E AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES	31
6.1 - LEI DE VISCOSIDADE DE NEWTON E LEI DE FOURIER.....	31
6.2 - AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES.....	34
7 - CONDIÇÕES DE FRONTEIRA E NÚMERO DE REYNOLDS	37
8 - TRATAMENTO NUMÉRICO DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS.....	40
8.1 - UM MÉTODO DE DISCRETIZAÇÃO.....	42
8.2 - APLICAÇÃO: O PROBLEMA DO DEGRAU	45
8.3 - RESULTADOS NUMÉRICOS	45
9 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	47
10 - APÊNDICE.....	49

1 - INTRODUÇÃO

A dinâmica dos fluidos descreve o movimento de gases e líquidos e seus efeitos sobre as fronteiras. Qualquer escoamento de um fluido é governado pelas equações de Navier-Stokes, as quais constituem um sistema de Equações Diferenciais Parciais (EDP), não lineares, e derivadas dos três princípios básicos da física: o princípio da conservação da massa, o princípio da conservação da quantidade de movimento e o princípio da conservação de energia.

O conjunto de EDP resultante dos três princípios fundamentais não constitui um sistema fechado, no sentido de que há mais incógnitas que equações. O fechamento dessa equações tornou-se possível quando pesquisadores de visão abrangente tais como Navier, Stokes, Von Karman, Reynolds, Prandtl e muitos outros desenvolveram hipóteses simplificadoras segundo uma associação teórico-prática, onde a experimentação e o formalismo matemático se complementaram.

De maneira geral, os escoamentos dos fluidos podem ser classificados em dois grandes grupos: os compressíveis e os incompressíveis. No primeiro grupo as variações na densidade do fluido são importantes durante a evolução do movimento e, nos fluidos incompressíveis estas variações são desprezíveis. Formalmente, nos escoamentos incompressíveis, diferente dos compressíveis, a equação que descreve a conservação de massa possui a derivada temporal explícita.

Atualmente uma das principais áreas de pesquisa em Matemática Aplicada e Computacional é a simulação de modelos matemáticos descritos por EDP. Em situações práticas, freqüentemente as equações governantes são complexas e em geral, não é possível encontrar soluções analíticas. Surge então a necessidade do tratamento numérico das equações do modelo.

Tanto do ponto de vista teórico como prático, o estudo de métodos numéricos para a solução de EDP teve um intenso período de atividade durante os últimos quarenta anos. Isso se deveu ao aperfeiçoamento de técnicas numéricas juntamente com o rápido avanço tecnológico dos computadores. Muitas equações presentes em engenharia e aplicações industriais, anteriormente intratáveis, são agora resolvidas de maneira eficiente.

O método de diferenças finitas, largamente utilizado hoje em dia, reduz sistemas contínuos em discretos em uma região preestabelecida. A técnica consiste em cobrir a região de interesse por uma malha, onde as derivadas são aproximadas localmente por quocientes de diferenças e a solução do esquema resultante aproxima-se do valor teórico. Historicamente, aproximações por diferenças finitas foram usadas provavelmente pela primeira vez em meados de 1770. Euler propôs um esquema simples para resolver o problema do valor inicial $x = f(x, t)$, $x(0)$ conhecido.

Para sistemas bidimensionais, a primeira aplicação computacional de esquemas de diferenças foi realizada por Runge em 1908, estudando a equação de Poisson. Paralelamente Richardson desenvolveu pesquisas nesta área e, em 1910 publicou trabalhos sobre a aplicação de métodos iterativos para a solução de problemas de equilíbrio. Em 1918 Liebmann, considerando a aproximação por diferenças finitas resolveu numericamente a equação de Laplace e aperfeiçoou métodos iterativos para a solução de sistemas lineares provenientes de suas discretizações.

Os propósitos dessas notas são descrever de modo geral os fundamentos da dinâmica dos fluidos e apresentar uma simulação de um escoamento em regime laminar, usando a metodologia de diferenças finitas

2 - VETORES, TENSORES E NOTAÇÕES

O propósito desta seção é apresentar resultados do cálculo diferencial e integral e a notação usualmente empregada em mecânica dos fluidos. Os resultados mais importantes são os teoremas de Gauss e de Stokes. As notações usuais são as simbólica e indicial. A notação simbólica é essencialmente a do cálculo vetorial. Os detalhes desta apresentação podem ser encontrados em [17].

2.1 - Definições

Três quantidades escalares v_i ($i=1,2,3$) são as componentes de um vetor v se, sob uma rotação de eixos coordenados, as componentes de v transformam-se segundo a expressão

$$v_j = c_{ij} v_i, i = 1, 2, 3,$$

onde $c_{ij} = \cos(x_i, x_j)$ são os cossenos diretores dos eixos x_i e x_j .

Empregamos a notação v_i ($i=1,2,3$) para representar, além das componentes do vetor, o próprio vetor v .

Um tensor pode ser interpretado como uma generalização de um vetor. Um tensor de segunda ordem é definido através de nove componentes escalares as quais variam, sob a rotação dos eixos coordenados, segundo a fórmula

$$T_{i'j'} = c_{k'i'} c_{ij'} T_{kl}, \quad i', j' = 1, 2, 3.$$

A quantidade

$$\sum_{i=1}^3 l_i u_i = l_1 u_1 + l_2 u_2 + l_3 u_3$$

na notação de Einstein é simplesmente $l_i u_i$.

Freqüentemente em mecânica dos fluidos aparecem tensores de segunda ordem que são representados por uma matriz de ordem três. Por exemplo, o delta de Kronecker δ_{ij} pode ser visto como um tensor de segunda ordem e representado pela matriz identidade. Uma exceção é o tensor alternante ε de terceira ordem definido por

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk = 123, 231, 312 \\ 0 & \text{para qualquer repetição de índices} \\ -1 & \text{se } ijk = 321, 213, 132. \end{cases}$$

Algumas propriedades de ε são fundamentais para obter certos resultados importantes e alguns exemplos são:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij},$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik},$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj},$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}.$$

Um tensor T é simétrico se $T_{ij} = T_{ji}$ e anti-simétrico se $T_{ij} = -T_{ji}$. Dado um tensor T_{ij} podemos escrever

$$T_{ij} = \frac{1}{2}T_{ij} + \frac{1}{2}T_{ij} + \frac{1}{2}T_{ji} - \frac{1}{2}T_{ji} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}).$$

Os tensores definidos por $T_{(ij)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ e $T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ são simétricos e anti-simétricos, respectivamente.

2.2 - Álgebra com Tensores

Em um sistema com n eixos ortogonais, o produto escalar b de dois vetores u e v é denotado por $u \cdot v$ e definido como

$$b = u_i v_i.$$

O produto vetorial w de dois vetores u e v é denotado por $u \times v$ (ou $u \wedge v$) e definido como

$$w_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k.$$

É importante lembrar que em notação simbólica a ordem dos termos do produto vetorial é importante, uma vez que $u \times v = -v \times u$.

O produto escalar a de dois tensores T e S é denotado por $T : S$ e definido como

$$a = T_{ij} S_{ji}.$$

O produto tensorial T de dois vetores u e v é denotado por uv e definido como

$$T_{ij} = u_i v_j = v_j u_i.$$

Vale salientar que a ordem uv , em notação simbólica, é importante.

O processo chamado contração em i e j é simplesmente o traço do tensor T_{ij} , isto é,

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}.$$

Por exemplo, a contração de δ_{ij} é 3 e a contração de ε_{ijk} , sobre quaisquer dois índices, é sempre nula.

2.3 - Operações com Derivadas

Operações envolvendo derivadas aparecem freqüentemente em mecânica de fluidos. Sejam $\phi = \phi(x_i) = \phi(x_1, x_2, x_3)$ uma função escalar, $v_i = v_i(x_i) = v_i(x_1, x_2, x_3)$ uma função vetorial e $T_{ij} = T_{ij}(x_i) = T_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ uma função tensorial. Do cálculo diferencial, a diferencial de ϕ é

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i = \partial_i \phi dx_i,$$

ou em notação simbólica

$$d\phi = \nabla\phi \cdot dx .$$

Lembrando que as componentes de vetores e tensores são funções escalares, e tomando $\phi = v_i$ ou T_{ij} teremos

$$dv_i = \partial_j v_i dx_j ,$$

$$dT_{ij} = \partial_k T_{ij} dx_k ,$$

ou em notação simbólica

$$dv = \nabla v \cdot dx = \text{grad}v \cdot dx ,$$

$$dT = \nabla T \cdot dx = \text{grad}T \cdot dx .$$

As derivadas presentes nas relações anteriores são chamadas gradientes. Se o processo de contração é feito sobre um gradiente, o resultado é chamado divergência. Por exemplo, a divergência de um vetor é $\partial_i v_i$ (ou $\nabla \cdot v$) e a divergência de um tensor é $\partial_i T_{ij}$ (ou $\nabla \cdot T$). No gradiente de um vetor v , podemos selecionar termos para formar uma função vetorial chamada de curl ou rot definida por

$$s = \text{curl } v = \text{rot } v = \nabla \times v$$

e em notação indicial, onde i é o índice livre, temos

$$s_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k .$$

É comum em leis físicas aparecerem derivadas de segunda ordem. Por exemplo, a divergência do gradiente de uma função escalar é

$$\partial_i \partial_i \phi, \nabla \cdot (\nabla \phi), \text{div}(\text{grad} \phi) \text{ ou } \nabla^2 \phi .$$

A representação anterior é chamada de Laplaciano de ϕ . É comum também usar o símbolo ∇^2 para representar $\nabla \cdot (\nabla v)$, onde v é um vetor.

2.4 - Identidades Vetoriais e os Teoremas de Gauss e Stokes

Existem uma variedade de identidades vetoriais que são freqüentemente utilizadas em mecânica dos fluidos para derivar resultados importantes. Essas identidades podem facilmente ser comprovadas usando a notação indicial. As mais importantes são:

$$\nabla^2 F \equiv \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla \times (\nabla \times F) \quad (\text{a})$$

$$(\nabla \cdot \nabla) F \equiv \nabla \frac{F^2}{2} - F \times (\nabla \times F) \quad (\text{b})$$

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (\text{c})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0 \quad (\text{d})$$

$$\nabla \cdot (\phi F) = \phi(\nabla \cdot F) + F \cdot \nabla \phi \quad (\text{e})$$

Equações 1

onde F é uma função vetorial e ϕ uma função escalar.

Existem também dois teoremas fundamentais do cálculo integral largamente utilizados em mecânica dos fluidos: o teorema de Gauss ou divergência e o teorema de Stokes. O teorema de Gauss afirma que se $T_{jkl} \dots(x_i)$ for uma função escalar, vetorial ou tensorial, vale que

$$\int_v \partial_i (T_{jkl} \dots) dv = \int_S n_i T_{jkl} \dots ds ,$$

onde v é uma região e S é a superfície limitando v . O teorema de Stokes afirma que

$$\int_S n_i \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k ds = \int_L t_i v_i ds .$$

Quando v_k representa a velocidade do fluido, a integral de linha é a circulação Γ e o vetor $w_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k$ é chamado de vorticidade.

3 - TENSÕES NOS FLUIDOS

O conceito de tensão é a maneira pela qual a mecânica do contínuo especifica as interações entre as várias partes contidas num volume material. Entretanto, em um contínuo mesmo o menor volume contém um grande número de partículas e torna-se difícil tratar as interações através do conceito de partícula material. Assim, consideramos um corpo ocupando uma região espacial Ω num dado tempo t .

3.1 - O Tensor das Tensões

Consideramos S uma superfície fechada dentro do corpo Ω , e as interações das partículas fora de S com aquelas dentro de S . Essas interações podem ser de duas espécies: uma devido à ação de forças que agem à distância, tais como as forças gravitacionais e eletromagnéticas; outra devido às forças que atuam diretamente na fronteira de S . As forças que atuam à distância são chamadas de forças externas ou forças volumétricas e são especificadas durante o movimento do fluido; já as que agem na fronteira de S são chamadas de forças de superfície ou forças de contato. Para descrever as forças de superfície, consideramos um elemento de superfície de área δA sobre S . A Figura 1 ilustra essa situação.

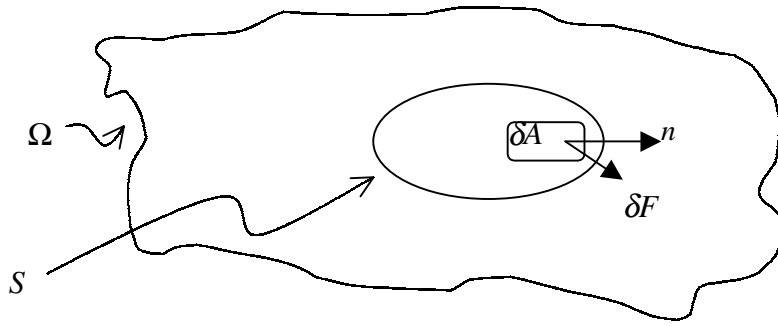


Figura 1: Tensor

Em qualquer ponto de δA podemos especificar o vetor normal exterior n à δA , e também distinguir os dois lados de δA segundo a direção de n . O lado em que n aponta é tomado como sendo o lado positivo de δA e consideramos as partículas materiais que estão sobre este lado. As partículas de fluido exercem uma força δF sobre o lado negativo de δA que depende da posição, do tamanho de δA e da orientação da normal. Se $\delta F / \delta A$ tende a um valor finito quando $\delta A \rightarrow 0$, então o vetor tensão ou vetor tração é definido como

$$t = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta A}.$$

Equação 2

O vetor t representa a força por unidade de área atuante sobre a superfície S .

Considerando agora um ponto o no corpo Ω e o elemento da área δA normal à direção x_1 , como indica a Figura 2.

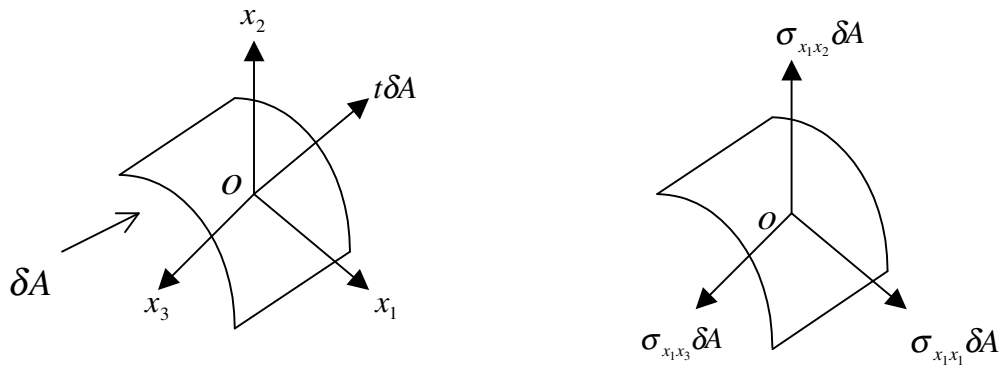


Figura 2: Decomposição da tração

A força $t\delta A$ pode ser decomposta em componentes ao longo das direções x_1 , x_2 e x_3 . Assim, as componentes da força por unidade de área são chamadas de tensões diretas $\sigma_{x_1x_1}$, e tensões de cisalhamento $\sigma_{x_1x_3}$ e $\sigma_{x_1x_2}$. No caso de tensões de cisalhamento o primeiro sufixo denota a direção da normal à área δA e o segundo representa a direção de resolução. Neste ponto fazemos a hipótese de que o tensor das tensões é simétrico, isto é $\sigma_{x_1x_2} = \sigma_{x_2x_1}$, etc. Os detalhes dessa hipótese podem ser encontrados em [3]. Se as componentes do tensor das tensões sobre a face normal a n são σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) então, as componentes t_i de t estão relacionadas às componentes de σ através da decomposição

$$t_i = \sigma_{ij} n_j,$$

Equação 3

onde n_j são as componentes do vetor normal exterior.

3.2 - A Pressão e o Tensor das Tensões Viscosas

A pressão termodinâmica tem, conceitualmente, uma origem diferente das forças de superfície dadas na Equação 3. As forças de superfície são forças mecânicas enquanto que a pressão termodinâmica é uma função do estado termodinâmico, isto é

$$P_t = P_t(e, \rho),$$

onde e é a energia interna e ρ a densidade. Devido a esta ambigüidade é necessário relacionar as tensões diretas à pressão termodinâmica.

Para tratar esta questão é comum separar o tensor das tensões em duas partes:

$$\sigma_{ij} = -P_t \delta_{ij} + \tau_{ij},$$

Equação 4

onde o tensor τ_{ij} é chamado tensor das tensões viscosas. Quando o fluido não está em movimento devemos ter que a tensão direta é a mesma da pressão termodinâmica e, isto acarreta que o tensor das tensões viscosas deve ser nulo. Em geral a tensão direta, ao contrário da pressão, pode assumir diferentes valores para diferentes direções do vetor n_i e é comum tomar a média das tensões diretas para definir a pressão mecânica:

$$P_m = -\frac{1}{3} \sigma_{ii}.$$

Equação 5

Em um fluido incompressível não há pressão termodinâmica, mas sim a pressão mecânica. Portanto, quando tratamos os fluidos incompressíveis, a variável pressão é sempre interpretada como pressão mecânica. Esta é a chamada hipótese de Stokes, isto é

$$P_t = P_m = -\frac{1}{3}\sigma_{ii}.$$

4 - A CINEMÁTICA DO MOVIMENTO DE UM FLUIDO

A cinemática é caracterizada pelo próprio movimento do fluido e sem levar em conta as forças envolvidas.

4.1 - Descrições Lagrangeana e Euleriana

Formalmente, o movimento de um fluido pode ser descrito através de uma transformação. Suponhamos que em um dado instante de tempo olhamos para o fluido e observamos que uma determinada partícula está numa posição ξ_i e num tempo posterior a mesma partícula está numa posição x_i . Sem perda de generalidade, podemos tomar o primeiro instante como sendo $t = 0$ e, se o tempo posterior for t dizemos que x_i é uma função de t e da posição inicial ξ_i , isto é

$$x_i = x_i(\xi_i, t).$$

Equação 6

As coordenadas iniciais ξ_i da partícula são chamadas de coordenadas materiais ou coordenadas Lagrangeanas, e as coordenadas x_i são as coordenadas espaciais ou coordenadas Eulerianas. Assumimos que o movimento é uma função contínua e que a Equação 6 possa ser invertida para recuperar as coordenadas materiais da partícula material que no tempo t está na posição x_i , isto é,

$$\xi_i = \xi_i(x_i, t).$$

Equação 7

Fisicamente, o movimento contínuo significa que as partículas que estão nas vizinhanças de uma dada partícula material continuarão em suas vizinhanças no transcorrer do movimento.

A Equação 6 pode ser vista como uma equação paramétrica de uma curva no espaço, tendo t como parâmetro, e é chamada de caminho da partícula material. Qualquer propriedade do fluido pode ser acompanhada ao longo do caminho da partícula. Por exemplo, a densidade (massa por unidade de volume de uma substância), nas vizinhanças de uma partícula é uma função $\rho = \rho(\xi_i, t)$, e é esta a densidade que um observador veria se estivesse "colado" à partícula material. A descrição material da variação de alguma propriedade $F(\xi_i, t)$ pode ser vista na descrição espacial $F(x_i, t)$ usando a Equação 7, isto é,

$$F(x_i, t) = F[\xi_i(x_i, t), t].$$

Equação 8

Fisicamente, a Equação 8 diz que o valor da propriedade no tempo t e na posição x_i , é o valor apropriado para a partícula material que se encontra em x_i e no tempo t .

Associados às descrições anteriores, existem duas derivadas à considerar: a derivada com respeito ao tempo mantendo x_i constante

$\frac{\partial}{\partial t} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{x_i}$; e a derivada com respeito ao tempo mantendo ξ_i constante (a

derivada total) $\frac{d}{dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\xi_i}$. Assim, $\frac{\partial F}{\partial t}$ é a taxa de variação de F quando observada em um ponto x_i fixado, enquanto $\frac{dF}{dt}$ é a taxa de variação observada quando seguimos o movimento do fluido. Na literatura a derivada total é conhecida como derivada material ou substantiva, sendo denotada por D/Dt . Em particular, se $F = x_i$ é a posição da partícula teremos

$$\frac{Dx_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} x_i(\xi_i, t) = v_i.$$

Equação 9

A Equação 9 permite estabelecer a conexão entre as duas derivadas anteriores. De fato,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} F(\xi_i, t) = \frac{\partial}{\partial t} F[x_i(\xi_i, t), t] = \partial_i F \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)_{\xi_i} + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{x_i} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_i \partial_i F,$$

ou em notação simbólica,

$$\frac{d(F)}{dt} = \frac{D(F)}{Dt} \equiv \frac{\partial(F)}{\partial t} + (V \cdot \nabla)(F).$$

Equação 10

O primeiro termo do lado direito da Equação 10 é a variação local de F e o segundo termo é a variação convectiva em F .

A partir da descrição material $x_i(\xi_i, t)$ do movimento, temos um campo de vetores definido pela Equação 9, isto é,

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = v_i(x_i, t).$$

O escoamento é chamado estacionário se as componentes do campo de velocidades não dependem do tempo. As trajetórias do campo serão as linhas de corrente e são soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_i, t).$$

A descrição Lagrangeana do movimento do fluido é usualmente muito difícil e é raramente empregada em mecânica dos fluidos. Entretanto, se empregarmos a velocidade como a principal variável dependente, ao invés da posição, podemos em geral determinar o escoamento. A descrição Euleriana é muito mais útil, pois as leis físicas escritas nesta forma não contém o vetor posição, e a velocidade aparece naturalmente como a principal variável dependente.

4.2 - A Decomposição do Movimento

Nesta seção vamos descrever a decomposição do movimento local do fluido em modos elementares. Seja uma partícula material principal denotada por um ponto P . Seja P' uma outra partícula material e suficientemente próxima de P como mostra a Figura 3.

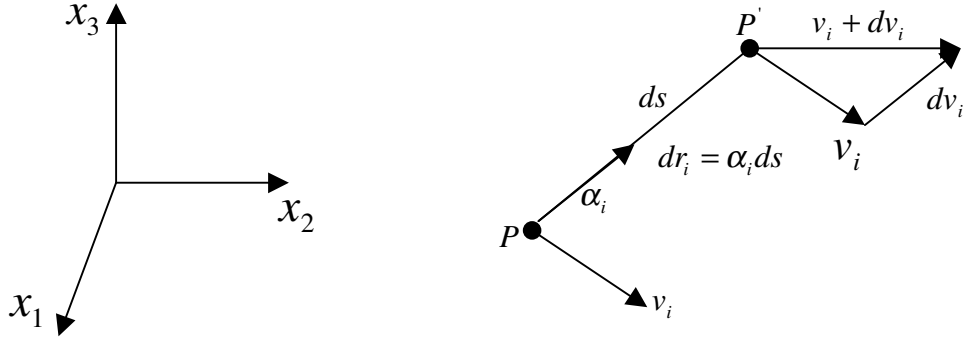


Figura 3: Movimento relativo de partículas vizinhas.

O vetor posição de P' relativo a P é dr_i e pode ser representado por um vetor unitário α_i e uma distância ds . Após um tempo infinitesimal, P e P' estarão em novas posições: P experimentou uma velocidade local v_i ; P' experimentou uma velocidade $v_i + dv_i$. Após a partícula P mover-se com velocidade de translação, P' pode ser considerada como a partícula material principal. A descrição anterior só é válida no limite quando a distância entre P e P' é suficientemente pequena.

Os movimentos de P e P' podem ser decompostos em três movimentos distintos: uma translação de corpo sólido, uma rotação de corpo sólido e uma deformação. O movimento de translação é simplesmente a velocidade do próprio P e os outros movimentos estão contidos em dv_i , a velocidade de P' relativa a P . O incremento de velocidade é dado por

$$dv_j = \partial_i v_j dr_i,$$

onde $\partial_i v_j$ é o tensor gradiente de velocidade e que pode ser decomposto numa parte simétrica e numa anti-simétrica

$$dv_j = (\partial_{(i}v_{j)} + \partial_{[i}v_{j]}) dr_i.$$

Equação 11

A parte simétrica indica o movimento de deformação de P' em relação a P e é dada por

$$dv_j^{(d)} \equiv \partial_{(i}v_{j)} dr_i,$$

Equação 12

e a parte anti-simétrica está associada ao movimento de rotação de P' em torno de P e é dada por

$$dv_j^{(r)} \equiv \partial_{[i}v_{j]} dr_i.$$

Equação 13

Os tensores presentes na Equação 12 e na Equação 13 são de fundamental importância em mecânica dos fluidos. A velocidade total de deformação dada na Equação 12 é proporcional a parte simétrica do gradiente de velocidade; e o tensor $\partial_{(i}v_{j)}$ é conhecido na literatura como tensor taxa de deformação e é usualmente denotado por $\partial_{(i}v_{j)} = s_{ij} = \varepsilon_{ij} = \dot{\gamma}_{ij} = \text{def } v$. A parte anti-simétrica $\partial_{[i}v_{j]}$ é responsável pelo movimento de rotação e as componentes de $\partial_{[i}v_{j]}$ podem ser expressas em forma de um vetor $\omega = \nabla \times V$ chamado vorticidade. Em cada ponto do escoamento existe uma vorticidade e algumas vezes a solução das equações de campo é formulada usando a vorticidade como principal variável dependente. Neste ponto é importante distinguir os termos vorticidade e

vórtice: vorticidade é uma propriedade do escoamento, enquanto a palavra vórtice é empregada para descrever algum tipo de redemoinho ou turbilhão.

4.3 - A Dilatação

Quando uma partícula material está em movimento com o fluido, seu tamanho e sua forma podem variar e, é importante saber quando o seu volume está variando. Por exemplo, se uma partícula está expandindo ou contraindo ela realiza trabalho sobre as outras partículas ou vice-versa.

Quando o sistema de coordenada é mudado das coordenadas materiais ξ_i para as coordenadas x_i , o elemento de volume varia de acordo com

$$dV = \frac{\partial(x_i)}{\partial(\xi_i)} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = J dV_0,$$

Equação 14

onde J é o Jacobiano da transformação.

Se imaginarmos ξ_i como coordenadas cartesianas em $t=0$ então, $d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ é o volume dV_0 de um paralelepípedo elementar. Quando este paralelepípedo está em movimento com o fluido ele pode distorcer e variar o seu volume tal que, em algum tempo t , ele encontra-se em alguma vizinhança do ponto $x_i = x_i(\xi_i, t)$. A Figura 4 ilustra esta situação.

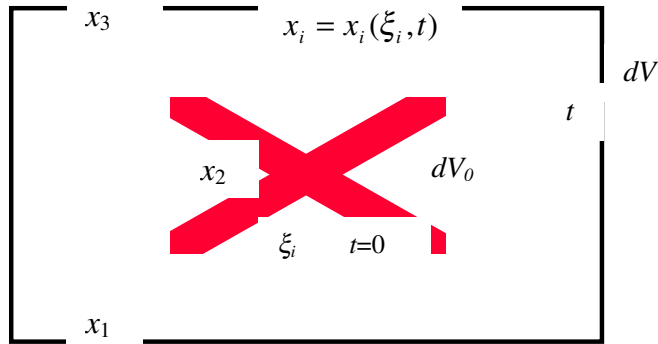


Figura 4: Variação de um paralelepípedo elementar.

Pela Equação 14 o volume do paralelepípedo é $dV = JdV_0$, e, portanto

$$J = \frac{dV}{dV_0}$$

é chamado de dilatação ou expansão. Admitindo que a Equação 6 seja invertida para obter a Equação 7, e vice-versa, isto é equivalente a exigir que nem J e nem J^{-1} sejam nulos. É interessante saber como a dilatação varia quando seguimos o movimento do fluido. Para tratar esta questão devemos calcular a derivada material $\frac{DJ}{Dt}$. Pode-se demonstrar que vale a identidade de Euler

$$\frac{D(\ln J)}{Dt} = \nabla \cdot V,$$

Equação 15

onde fica evidente que para um escoamento incompressível $\nabla \cdot V = 0$.

5 - PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO DE MASSA, MOMENTO E ENERGIA

Em mecânica do contínuo existem principalmente três princípios dinâmicos independentes: a conservação de massa, a conservação de momento e a conservação de energia. O princípio de conservação de massa afirma que em um volume material a massa é constante, ou equivalentemente, a taxa de variação da massa é nula no volume. O princípio da conservação do momento afirma que a taxa de variação do momento linear de um volume material é igual a força resultante atuando sobre o volume. Finalmente, o princípio de conservação de energia é fundamentalmente a primeira lei da termodinâmica; ele afirma que a taxa de variação da energia num volume material é igual aos trabalhos realizados por forças externas sobre o volume, menos a taxa de perda de calor.

5.1 - O teorema de transporte de Reynolds

As leis físicas são formuladas na descrição Lagrangeana e nós precisamos dessas leis na descrição Euleriana. Essa transformação é feita através de um importante teorema cinemático, derivado da identidade de Euler (Equação 15) chamado teorema de Reynolds. O teorema não trata da variação de um volume material infinitesimal mas sim de um volume material variando no tempo.

Seja $F = F(x_i, t)$ uma função qualquer (escalar, vetorial ou tensorial), representando alguma propriedade física do fluido. Se $V = V(t)$ é um volume material movendo-se com o fluido então, a função

$$G = G(t) = \int_{V(t)} F(x_i, t) dV$$

é uma função do tempo e sua derivada material pode ser calculada. De fato, usando a transformação dada na Equação 6, o fato de que $dV = JdV_o$ e a identidade de Euler (Equação 15) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{DG(t)}{Dt} &= \frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(x_i, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{V_o} F[x_i(\xi_i, t), t] J dV_o \\ &= \int_{V_o} \left[\frac{dF}{dt} J + F \frac{dJ}{dt} \right] dV_o = \int_{V_o} \left[\frac{dF}{dt} + F \frac{d(\ln J)}{dt} \right] J dV_o \\ &= \int_{V_o} \left[\frac{dF}{dt} + F(\nabla \cdot V) \right] J dV_o = \int_{V(t)} \left[\frac{dF}{dt} + F(\nabla \cdot V) \right] dV \end{aligned}$$

Portanto, o teorema de transporte de Reynolds é

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(x_i, t) dV = \int_{V(t)} \left[\frac{dF}{dt} + F(\nabla \cdot V) \right] dV .$$

Equação 16

Lembrando da derivada material (Equação 10) e da identidade vetorial (Equação 1(e)), a Equação 16 pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(x_i, t) dV &= \int_{V(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t} + V \cdot \nabla F + F(\nabla \cdot V) \right] dV = \\ &= \int_{V(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (FV) \right] dV \end{aligned}$$

Equação 17

Aplicando o teorema de Gauss na Equação 17 obtemos também

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(x_i, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dV + \int_{S(t)} F v \cdot n ds,$$

Equação 18

onde $S(t)$ é a superfície móvel envolvendo o volume $V(t)$.

Fisicamente, este teorema diz que a taxa de variação da integral de F num volume material móvel é a integral da variação local de F mais o fluxo da propriedade F através da superfície S envolvendo $V(t)$.

5.2 - Equação da Continuidade

Seja $\rho = \rho(x_i, t)$ a massa por unidade de volume de uma partícula de fluido na posição x_i ($i=1,2,3$) e no tempo t . A massa total num volume material qualquer V é dada por

$$m = \int_V \rho(x_i, t) dV$$

Equação 19

Tomando $F = \rho$ na Equação 16 teremos

$$\frac{dm}{dt} = \int_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot V) \right] dV = 0.$$

Equação 20

Sendo V arbitrário segue que

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot V) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0.$$

Equação 21

Esta equação é chamada equação da continuidade. Em particular, quando o escoamento é incompressível (ρ constante) a equação da continuidade se reduz a

$$\nabla \cdot V = 0$$

Equação 22

ou em notação de Einstein $\partial_i v_i = 0$ e neste caso o movimento é chamado de isocórico e o campo de velocidade v é dito solenoidal.

5.3 - A equação do movimento do fluido

O momento linear de um fluido dv é por definição $\rho v dv$. Fazendo na Equação 18 $F = \rho v$ e usando o teorema da divergência obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho v_i dV &= \int_{V(t)} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \rho v_i v_j n_j ds = \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \partial_j (\rho v_i v_j) dV \end{aligned}$$

Equação 23

Pelo princípio da conservação do momento, a força resultante atuando sobre um volume material é igual à Equação 23,

$$\int_{V(t)} \left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \partial_j(\rho v_i v_j) \right] dV = \int_{V(t)} \rho F_i dV + \int_{S(t)} t_i ds,$$

Equação 24

onde F_i são as forças volumétricas e t_i as forças de superfície. Usando a Equação 3 e o teorema da divergência, a Equação 24 fica:

$$\int_{V(t)} \left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \partial_j(\rho v_i v_j) - \rho F_i - \partial_i \sigma_{ij} \right] dV = 0$$

Desde que $V(t)$ é arbitrário, segue que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_j v_i) = \rho F_i + \partial_i \sigma_{ij}$$

Equação 25

Usando a Equação 4, a Equação 25 fica

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_j v_i) = \rho F_i - \partial_i P + \partial_j \tau_{ji}$$

Equação 26

ou em notação simbólica

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \nabla \cdot (\rho V V) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho F$$

Equação 27

A Equação 27 é a equação do movimento (ou momento) na forma diferencial e conservativa, e em conjunto com a equação da continuidade são as principais equações diferenciais parciais da mecânica dos fluidos. Podemos também interpretar a equação do movimento do ponto de vista de Lagrange, simplesmente efetuando as diferenciações do lado esquerdo da Equação 27 e identificando a derivada material. O resultado final é a forma não conservativa.

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\partial_i P + \partial_j \tau_{ji} + \rho F_i$$

Equação 28

A Equação 28 é análoga a segunda lei de Newton para uma partícula do contínuo. Ela afirma que a massa por unidade de volume ρ vezes a aceleração (Dv_i / Dt) da partícula material é a força resultante aplicada sobre a partícula do fluido.

5.4 - Equação da energia

Aplicando o princípio da conservação de energia, o teorema do transporte de Reynolds também pode ser usado para derivar a equação da energia. Os detalhes podem ser vistos em [20], sendo que o resultado final é na forma conservativa é

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] + \partial_i \left[\rho v_i \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] = -\partial_i q_i + \partial_i (\sigma_{ij} v_j) + \rho v_i F_i$$

Equação 29

ou a notação simbólica e na forma não conservativa é

$$\rho \frac{D}{Dt} \left[e + \frac{1}{2} v^2 \right] = -\nabla \cdot q + \nabla \cdot (\sigma \cdot v) + \rho v \cdot F$$

A Equação 29 pode ser separada em duas equações: a equação da energia cinética e a equação da energia térmica. A equação da energia cinética é obtida a partir da equação do momento e sua forma final é

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{1}{2} v^2 \right) + \partial_i \left(\rho v_i \frac{1}{2} v^2 \right) = -v_i \partial_i p + v_i \partial_j \tau_{ji} + \rho v_i F_i$$

Equação 30

A equação da energia térmica é obtida subtraindo a Equação 30 da Equação 29 e o resultado final é

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \partial_i (\rho v_i e) = -p \partial_i v_i + \tau_{ji} \partial_j v_i - \partial_i q_i$$

Equação 31

Nas Equações 29, 30 e 31, $\rho(e + v^2/2)$ é a energia total da partícula material e q_i é o fluxo de calor.

A equação da energia tendo a temperatura como variável dependente, também pode ser derivada facilmente; o resultado (ver [31] para detalhes) é

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \Phi ,$$

Equação 32

onde c_v é o calor específico, k é a condutividade térmica e ϕ é chamada função de dissipação.

6 - FLUIDOS NEWTONIANOS E AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Todo os processos contínuos que ocorrem num fluido são governados pelas equações, derivadas dos três princípios básicos, 29, 21 e 26. Essas equações não constituem um sistema fechado de equações, no sentido que existem mais incógnitas que equações. Para fechar o conjunto devemos fornecer informações adicionais sobre a natureza do fluido. A lei de viscosidade de Newton que relaciona o tensor das tensões viscosas com a deformação e a lei de Fourier que relaciona o fluxo de calor com o gradiente de temperatura, fornecem as equações adicionais (constitutivas) para o fechamento.

6.1 - Lei de viscosidade de Newton e Lei de Fourier

O ponto de partida é assumir que o tensor σ_{ij} é uma função do estado termodinâmico local e do gradiente de velocidade

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\rho, e, \partial_k v_e)$$

A forma mais simples para a relação acima é uma função linear do gradiente de velocidade, cujos coeficientes dependem do estado termodinâmico

$$\sigma_{ij} = a_1 \delta_{ij} + a_2 \partial_k v_k \delta_{ij} + a_3 \partial_{(i} v_{j)}$$

Equação 33

Podemos fixar a_1 argumentando que quando não há movimento do fluido, a Equação 33 deve reproduzir a pressão termodinâmica. Assim, $a_i = -P_i$ e os coeficientes a_2 e a_3 são usualmente denotados como λ e 2μ , respectivamente. Esses coeficientes são chamados de segundo e primeiro coeficientes de viscosidade, respectivamente.

Usando a Equação 8 e a equação da continuidade podemos escrever a Equação 33 como

$$P_i - P_m = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \partial_k v_k = - \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}.$$

Desde que o segundo termo da Equação 33 é nulo em escoamentos incompressíveis, o segundo coeficiente de viscosidade λ desempenha um papel secundário nesses escoamentos. Entretanto, em escoamentos compressíveis λ tem muita importância. Pela hipótese de Stokes devemos ter $P_i = P_m$ e portanto, $\lambda = -2\mu/3$. Assim, a hipótese de Stokes é tomada como uma das características dos fluidos Newtonianos. Com essas idéias em mente, a Equação 33 fica

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu\partial_k v_k \delta_{ij} + 2\mu\partial_{(i} v_{j)},$$

Equação 34

onde μ é usualmente conhecido como coeficiente de viscosidade dinâmica ou molecular. Esta é a essência da lei de viscosidade de Newton. Comparando a Equação 34 com a Equação 4, o tensor das tensões viscosas fica

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3}\mu\partial_k v_k \delta_{ij} + 2\mu\partial_{(i} v_{j)}$$

e para escoamentos incompressíveis teremos

$$\tau_{ij} = 2\mu\partial_{(i} v_{j)}$$

Resumindo, a lei da viscosidade de Newton para escoamentos incompressíveis é

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\partial_{(i} v_{j)}$$

Equação 35

Fisicamente, a Equação 35 nos diz que o tensor das tensões é proporcional a deformação, onde a constante de proporcionalidade contém o coeficiente de viscosidade molecular. É interessante observar que a Equação 35 não é uma lei física e sim uma mera aproximação para o comportamento de muitos fluidos.

Em resumo, a lei de viscosidade de Newton implica que um fluido tem as seguintes propriedades:

- i) as tensões são proporcionais às deformações;
- ii) o tensor das tensões é simétrico e
- iii) vale a hipótese de Stokes. Fluidos que satisfazem estas propriedades são chamados de fluidos Newtonianos.

A formulação de lei de Fourier para a condução de calor é semelhante à viscosidade de Newton. O fluxo de calor é uma função do gradiente de temperatura

$$q_i = a_i + b_{ij} \partial_j T$$

Quando o gradiente de temperatura é nulo, q_i também deve ser nulo e portanto $a_i = 0$. A lei de Fourier assume que $b_{ij} = -k\delta_{ij}$ é um tensor de condutividade. Assim teremos

$$q_i = -k\partial_j T$$

Equação 36

6.2 - As equações de Navier-Stokes

A equação da continuidade, a equação do movimento como a lei da viscosidade de Newton e a equação da energia com lei de Fourier para o fluxo de calor são conhecidas na literatura como as equações de Navier-Stokes. Em coordenadas cartesianas estas equações são encontradas pela substituição do tensor das tensões, na Equação 26 e a substituição da Equação 36 na equação da energia, tendo a temperatura como variável dependente. Essas equações para um fluido newtoniano e incompressível são:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \rho F \quad (\text{a})$$

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \Phi \quad (\text{b})$$

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (\text{c})$$

Equações 37

É comum aparecer na literatura o termo equação de Navier-Stokes com propriedades constantes, para enfatizar que nas Equações 37(a) e 37(b) os coeficientes de transporte ρ , μ e c_v são aproximadamente constantes. Neste caso as Equações 37(a) e 37(c) podem ser desacopladas da equação de temperatura (Equação 37(b)). Existem situações em que a temperatura é sempre constante durante o movimento, nestes casos a Equação 37(b) não é considerada e tais escoamentos são chamados de isotérmicos.

As equações de Navier-Stokes modelam qualquer escoamento viscoso, e matematicamente elas constituem um sistema de equações diferenciais a derivadas parciais não lineares, nas variáveis v_i , P e T como variáveis dependentes. Os termos de mais alta ordem nestas equações, que aparecem devido aos efeitos viscosos são lineares e de segunda ordem, enquanto os termos convectivos são não lineares e de primeira ordem. Por estas razões estas equações são também chamadas quase lineares.

Qualquer conjunto de equações diferenciais parciais de segunda ordem pode ser classificado como elíptico, parabólico ou hiperbólico, sendo que as equações de Navier-Stokes exibem todos os três tipos de comportamento. Até hoje não se conhece soluções analíticas para um escoamento viscoso e arbitrário, assim costuma-se adotar o tratamento numérico que se mostra muito promissor. O termo “dinâmica dos fluidos

computacional” é usado para resolver escoamentos governados por estas equações via métodos numéricos e em um computador.

Para finalizar esta seção, exibiremos as equações governantes de um escoamento incompressível e isotérmico, em coordenadas cartesianas e na forma conservativa. Seja $P = P_m/\rho$ e $\nu = \mu/\rho$ o coeficiente de viscosidade cinemática. As equações de Navier-Stokes em 3D e em notação usual são :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F_x \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + F_y \quad (\text{b})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial wu}{\partial x} + \frac{\partial wv}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + F_z \quad (\text{c})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{d})$$

Equações 38

As equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas e esféricas podem ser encontradas facilmente na literatura, por exemplo em [1].

7 - CONDIÇÕES DE FRONTEIRA E NÚMERO DE REYNOLDS

As equações do movimento discutidas anteriormente requerem condições subsidiárias para definir problemas específicos. Essas condições são chamadas condições de fronteira e são fundamentais para se obter uma solução que tenha sentido físico num problema real. Existem basicamente cinco tipos de condição de fronteira apropriadas e largamente utilizadas: a) condição sobre uma superfície sólida sem deslizamento do fluido; b) condição sobre uma superfície com deslizamento; c) condição sobre uma superfície livre; d) uma condição de entrada de fluido; e) uma condição de saída de fluido. A Figura 5 ilustra algumas dessas condições.

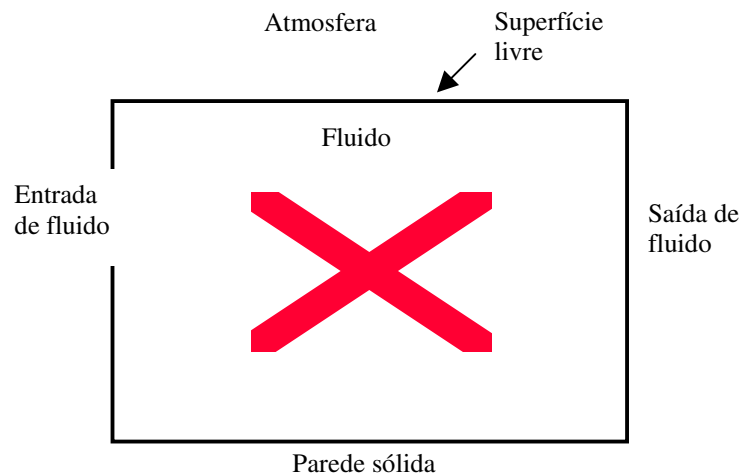


Figura 5: Condição de fronteira.

A condição de fronteira tipo a) significa que o fluido deve ser "colado" à superfície sólida; a condição b) permite que o fluido deslize sobre a superfície e muitas vezes esta condição de fronteira é interpretada como uma superfície de simetria; a condição c) representa uma interface entre o fluido e uma atmosfera; a condição d) requer o conhecimento do escoamento na entrada e a condição e) requer o conhecimento na saída do fluido. É

importante salientar que estas condições de fronteira podem especificar variáveis na fronteira ou especificar as variáveis através de uma equação. Exemplos são as condições de Dirichet, Neumann e Robin. Como exemplo realístico, consideremos a região bidimensional de escoamento como ilustrada na Figura 6.

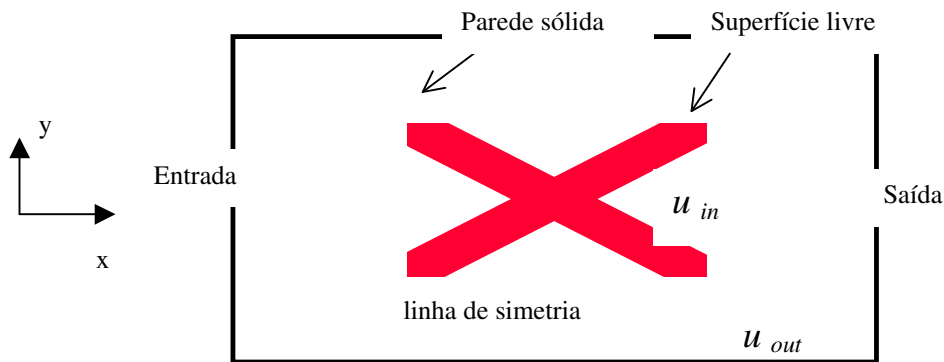


Figura 6: Condições de fronteira para uma região 2D.

Sobre AB conhecemos um perfil de velocidade isto é, u conhecido e $v = 0$; sobre BC devemos ter $u = v = 0$; sobre CD devemos conhecer as tensões na superfície; sobre DE devemos dar as condições de saída do fluido e informar u e v ; sobre AE devemos ter $v = 0$ e $u_{in} = u_{out}$.

Quando adimensionalizamos as equações de Navier-Stokes aparece naturalmente uma grandeza adimensional chamada de número de Reynolds. As equações adimensionais mostram com clareza os efeitos físicos contidos nestas equações, e ainda mais ficam livres de qualquer escolha de unidades. Como exemplo vamos tomar as Equações 38 para o caso bidimensional e sem forças externas. Suponhamos que o escoamento é caracterizado por uma dimensão L , uma velocidade U e uma viscosidade cinemática ν . Definimos as variáveis adimensionais pela transformação

$$u = u^* U; v = v^* U; x = x^* L; y = y^* L; t = t^* L/U; P = p^* U^2$$

Substituindo estas mudanças nas Equações 38 obtemos as formas adimensionais das equações

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{b})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{c})$$

Equações 39

onde $\text{Re} = LU/\nu$ é o número de Reynolds. É evidente que o número de Reynolds mede a importância dos termos devido a viscosidade. Assim, se Re é muito grande podemos desprezar os termos viscosos, obtendo a chamada Equação de Euler. É importante salientar que a natureza das equações para $\text{Re} \rightarrow \infty$ é fundamentalmente diferente do caso $(1/\text{Re}) \rightarrow 0$.

8 - TRATAMENTO NUMÉRICO DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

A introdução dos computadores na ciência resultou numa nova área de atuação dentro da mecânica dos fluidos, chamada dinâmica dos fluidos computacional. Dentro dessa nova linha de trabalho, muitos pesquisadores desenvolveram métodos numéricos para resolver as equações de Navier-Stokes. A contínua melhoria desses métodos, associada à evolução dos computadores, tanto em capacidade de armazenamento quanto em velocidade de processamento, muitos problemas complexos em dinâmica dos fluidos são simulados computacionalmente com razoável precisão. A idéia central dos métodos numéricos é substituir as equações diferenciais parciais da continuidade, momento e energia por aproximações algébricas relacionando um número finito de pontos discretos e sujeitos a certas restrições sobre o espaçamento da malha computacional, o incremento de tempo e número de Reynolds.

A simulação algébrica das equações governantes da dinâmica dos fluidos segue principalmente duas metodologias: diferenças finitas e elementos finitos. A técnica de diferenças finitas (ver por exemplo [25]) aproxima as derivadas presentes nas equações por diferenças finitas sobre pontos discretos, resultando em sistemas de equações algébricas esparsos; enquanto a técnica de elementos finitos (ver por exemplo [19]) modela as próprias funções sobre uma região entre os pontos discretos, resultando num sistema de equações geralmente de banda. Ambas as metodologias são aplicadas com sucesso em escoamentos viscosos, entretanto nos últimos anos a técnica de diferenças finitas adquiriu muita popularidade.

A escolha das variáveis dependentes, a construção da malha sobre o domínio, a escolha do método de discretização e a aplicação adequada das condições de fronteira são requisitos fundamentais para se obter uma simulação de boa qualidade. No caso bidimensional, tomar a função corrente e a vorticidade como variáveis dependentes pode ser conveniente; mas em três dimensões as variáveis u , v , w e p são as mais utilizadas. A construção da malha sobre o domínio de cálculo é crucial para a performance do método numérico a ser utilizado. O método de discretização empregado pode ser explícito ou implícito, sendo que os explícitos sofrem severas restrições de estabilidade numérica; enquanto os implícitos, teoricamente, incondicionalmente estáveis, são mais apropriados. A aplicação adequada das condições de fronteira, fisicamente aceitáveis, é essencial em todos os escoamentos viscosos.

A principal dificuldade na resolução numérica das equações de Navier-Stokes para o caso incompressível é a imposição rigorosa da conservação de massa a cada nível de tempo. Os esquemas numéricos em variáveis primitivas, os quais são preferidos pelas facilidades da imposição das condições de fronteira, apresentam dificuldades na determinação da pressão consistente com o campo de velocidades. Essas dificuldades são superadas pela introdução da equação de Poisson para a pressão, porém resulta em um esforço computacional. Em variáveis primitivas existem duas técnicas amplamente utilizadas: a técnica da compressibilidade artificial de Chorin [5]; e a técnica da equação de Poisson para a pressão de Harlow e Welch [11] e contida no método de MAC (Marker and Cell). Uma descrição detalhada desses métodos é apresentada em [8].

8.1 - Um método de discretização

Com o objetivo de apresentar uma simulação numérica, para o caso bidimensional, de um fluido incompressível e viscoso, nesta seção apresentamos uma modificação do método MAC proposta por Hirt e Cook [16]. O método utiliza a metodologia de diferenças finitas sobre malhas diferenciadas.

As formas adimensionais das equações de Navier-Stokes são dadas pelas Equações 39. A discretização dessas equações é feita sobre malhas diferenciadas, onde a Equação 39(a) é discretizada no ponto $(i + \frac{1}{2}, j, n)$, a Equação 39(b) é discretizada em $(i, j + \frac{1}{2}, n)$ e a Equação 39(c) em (i, j, n) . Um campo de velocidades intermediário, não necessariamente satisfazendo a equação da continuidade, é calculado segundo o esquema explícito:

$$u_{i+1/2,j}^{n+1} = u_{i+1/2,j}^n + \delta t \{ (1/\delta x) [(u_{i,j}^n)^2 + (u_{i+1,j}^n)^2] + (1/\delta y) [(uv)_{i+1/2,j-1/2}^n - (uv)_{i+1/2,j+1/2}^n] + (1/\delta x) (P_{i,j}^n - P_{i+1,j}^n) + (1/\text{Re}) [(1/\delta x)^2 (u_{i+3/2,j}^n - 2u_{i+1/2,j}^n + u_{i-1/2,j}^n) + (1/\delta y)^2 (u_{i+1/2,j+1}^n - 2u_{i+1/2,j}^n + u_{i+1/2,j-1}^n)] \} \quad (a)$$

$$v_{i,j+1/2}^{n+1} = v_{i,j+1/2}^n + \delta t \{ (1/\delta x) [(uv)_{i-1/2,j+1/2}^n - (uv)_{i+1/2,j+1/2}^n] + (1/\delta y) [(v_{i,j}^n)^2 - (v_{i,j+1}^n)^2] + (1/\delta y) (P_{i,j}^n - P_{i,j+1}^n) + (1/\text{Re}) [(1/\delta x)^2 (v_{i+1,j+1/2}^n - 2v_{i,j+1/2}^n + v_{i-1,j+1/2}^n) + (1/\delta y)^2 (v_{i,j+3/2}^n - 2v_{i,j+1/2}^n + u_{i,j-1/2}^n)] \} \quad (b)$$

Equações 40

onde δx é o espaçamento da malha na direção x , δy o espaçamento na direção y e δt o tamanho do passo dado no tempo. Os valores das variáveis em pontos indeterminados nas malhas são calculados como a média aritmética dos valores nas faces das células. Em particular, os valores $(u_{i,j}^n)^2$ e $(v_{i,j}^n)^2$ são aproximados usando a forma ZIP de [11]. As aproximações para

as derivadas temporais foram feitas utilizando diferenças avançadas de 1ª ordem, método de Euler. Os termos convectivos e os gradientes de pressão foram aproximados usando-se diferenças centrais de segunda ordem de precisão e o Laplaciano foi aproximado por diferenças centrais sobre três pontos, também de segunda ordem. Assim, o esquema apresentado nas Equações 40 é de $O(\delta t, \delta x^2, \delta y^2)$.

Desde que os valores de $u_{i+1/2,j}^{n+1}$ e $v_{i,j+1/2}^{n+1}$, em geral, não satisfazem a conservação da massa (Equação 39(c)), um procedimento iterativo para ajustar essas velocidades é empregado: em cada célula a divergência do campo de velocidades é calculada por:

$$D_{i,j}^{n+1} = (1 / \delta x)(u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i-1/2,j}^{n+1}) + (1 / \delta y)(v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j-1/2}^{n+1})$$

Equação 41

onde as derivadas na Equação 39(c) foram aproximadas por diferenças centrais de segunda ordem. Se a magnitude de $D_{i,j}^{n+1}$ for menor que uma tolerância ε preestabelecida o escoamento é localmente incompressível senão, a pressão e as componentes da velocidade são atualizadas de acordo com o processo iterativo:

$$\begin{aligned} \delta p &= -\beta D_{i,j}^{n+1} \\ P_{i,j}^{n+1} &= P_{i,j}^n + \delta p \\ u_{i+1/2,j}^{n+1} &= u_{i+1/2,j}^{n+1} + (\delta t / \delta x) \delta p \\ u_{i-1/2,j}^{n+1} &= u_{i-1/2,j}^{n+1} - (\delta t / \delta x) \delta p \\ v_{i,j+1/2}^{n+1} &= v_{i,j+1/2}^{n+1} + (\delta t / \delta y) \delta p \\ v_{i,j-1/2}^{n+1} &= v_{i,j-1/2}^{n+1} - (\delta t / \delta y) \delta p \end{aligned}$$

Equação 42

onde β é dado por

$$\beta = \beta_0 / \{2\delta t[(1/\delta x)^2 + (1/\delta y)^2]\}$$

e β_0 é um fator de relaxação, em geral $0 < \beta_0 < 2$, para acelerar a convergência, sendo determinado por experimentos numéricos. Uma vez que $|D_{i,j}^{n+1}| < \varepsilon$, para todas as células do domínio, o movimento do fluido é avançado no tempo usando as Equações 40. Adotando um critério de parada sobre as componentes u e v dadas nas Equações 40, obtemos a resposta das equações de campo.

Vimos anteriormente que os métodos explícitos são condicionalmente estáveis e portanto, δt e Re são restritos a certos valores. Pracht em [23] demonstra que o método MAC é inapropriado para escoamentos de baixo Reynolds ($Re \leq 1$) e segundo uma análise de estabilidade linear [13], o tamanho do passo dado no tempo deve satisfazer:

$$\delta t < \min\{\delta x/|u|, \delta y/|v|\} \text{ e } \delta t < 2/(Re \text{ máx}\{u^2, v^2\}).$$

Portanto, para a estabilidade do esquema anterior devemos ter:

$$\delta t = \text{fator} * \min\{2/Re \text{ máx}\{u^2, v^2\}, \delta x/|u|, \delta y/|v|\}$$

Equação 43

onde $0 < \text{fator} < 1$ é um parâmetro escolhido para assegurar que o método trabalhe numa região estável.

8.2 - Aplicação: o problema do degrau

Uma corrente de ar isotérmica e em baixa velocidade, com perfil constante $u=U$, $v=0$ instantaneamente entra na região de escoamento mostrada na Figura 7.

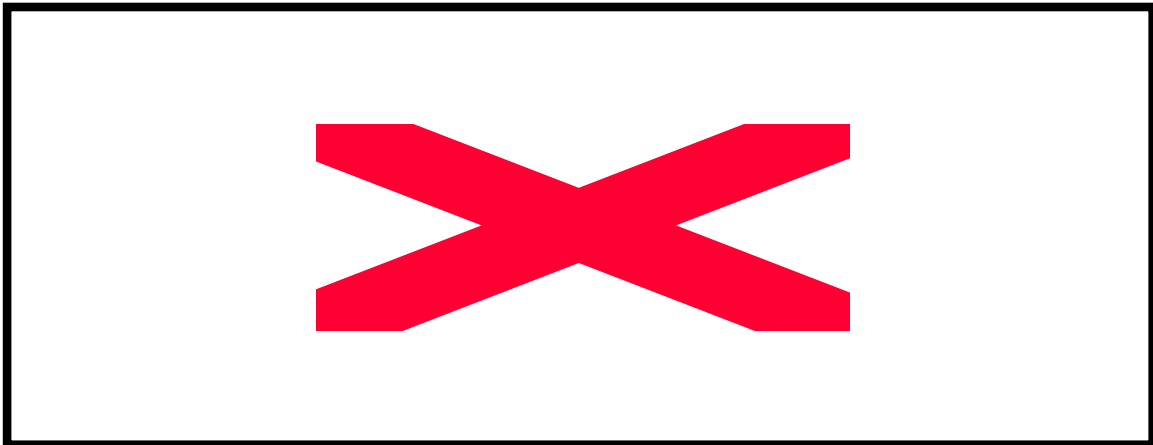


Figura 7: Domínio do escoamento

Para simular o escoamento de ar dentro da região mostrada na Figura 7 nós usamos o método apresentado na seção 8.1. A simulação é caracterizada pelo número de Reynolds e em baixas velocidades. A região CDE é uma zona de recirculação das partículas do fluido e isto é evidenciado nos resultados numéricos apresentados.

8.3 - Resultados numéricos

O escoamento de ar mostrado na Figura 7 foi simulado usando 2100 células (malha 70x30) computacionais e vários números de Reynolds. Um procedimento para calcular o tamanho do passo no tempo foi implementado usando a Equação 43, onde o parâmetro fator foi escolhido como 0.9. As

condições de fronteira utilizadas são aquelas discutidas na seção 7, sendo que na região de saída utilizamos a sugestão de Hirt e Cook [16]. No processo iterativo para a conservação da massa utilizamos $\beta_0 = 1.0$ e $\varepsilon = 10^{-6}$. Para finalizar os processos adotou-se o seguinte critério de convergência: $\text{resíduo} < \text{TOL}$, onde TOL é uma tolerância prefixada e o resíduo é definido como:

$$\begin{aligned} \text{Resíduo} &= |RES U - RES V| \\ RES U &= \sum_{\text{células}} (u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i+1/2,j}^n) \\ RES V &= \sum_{\text{células}} (v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j+1/2}^n) \end{aligned}$$

Após uma série de testes numéricos observamos que o resíduo caiu em 8 ordens de magnitude. Assim adotamos $\text{TOL} = 10^{-4}$ em todos os processos.

Com o número de Reynolds 10, 100 e 200 conseguimos convergência em 706, 9388 e 17741 iterações, respectivamente. A visualização desses resultados juntamente com seu código computacional desenvolvido em Fortran são mostrados no APÊNDICE.

9 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] – ACHERSON, D.J., Elementary fluid dynamics, Claredon Press-Oxford, (1990);
- [2] – ANDERSON, D.A., TANNEHILL, J.C. and PLETCHER, R. H., Computational fluid mechanics and heat transfer, Hemisphere, (1984);
- [3] – ARIS, R., Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics, Dover, (1962);
- [4] – BATCHELOR, G.K., An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press, (1967);
- [5] – CHORIN, A. J., J. Comput. Phys. 2, 12, (1967);
- [6] – DAVIES, A. J., The finite element method: a first approach, Oxford, (1990);
- [7] – DEVILLE, M. O., J. Comput. Phys. 15, 362, (1974);
- [8] – FERREIRA, V. G., AZEVEDO, J. L. F. e CUMINATO, J. A., Métodos numéricos para escoamento incompressível, Notas Didáticas do ICMSC-USP, nº 26, (1997);
- [9] – FLETCHER, C. A. J., Computational techniques for fluid dynamics, Vol. I e II, Springer-Verlag, (1988);
- [10] – HARLOW, F. H. and WELCH, J. E., Phys. Fluids 8, 2182, (1965);
- [11] – HARLOW, F. H., WELCH, J. E. and SHANNON, J. P., The MAC Method, Los Alamos Scientific Lab. Rep. nº LA-3425, (1965);
- [12] – HILDEBRAND, F. B., Introduction to numerical analysis, 2^a ed., McGraw-Hill, (1974);
- [13] – HIRSCH, C., Numerical computation of internal and external flows, Vol. I e II, John-Wiley & Sons, (1990);

- [14] – HIRT, C. W., J. Comput. Phys. 2, 339, (1968);
- [15] – HIRT, C. W. and SHANNON, J. P., J. Comput. Phys. 2, 403, (1968);
- [16] – HIRT, C. W. and COOK, J. L., J. Comput. Phys. 10, 324, (1972);
- [17] – JEFFREYS, M. A. and JEFFREYS, B., Methods of mathematical physics, CAMBRIDGE, 3^a ed., (1956);
- [18] – MARTIN, H. C. and CAREY, G. F., Introduction to finite element analysis, theory and application, McGraw-Hill, (1973);
- [19] – MITCHELL, A. R. and WAIT, R., The finite element method in partial differential equations, John Wiley & Sons, (1977);
- [20] – PANTON, R. L., Incompressible flow, John Wiley & Sons, (1984);
- [21] – PATANKAR, S. V., Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere, (1980);
- [22] – PEYRET, R. and TAYLOR, T. O., Computational methods for fluid flow, Springer-Verlag, (1980);
- [23] – PRACHT, W. E., J. Comput. Phys. 7, 46, (1971);
- [24] – ROACHE, D. J., Computational fluid dynamics, Hermosa Publisher, (1976);
- [25] – SMITH, G. D., Numerical solution of partial differential equations, finite difference methods, Clarendon Press-Oxford, (1985);
- [26] – STEGER, J. L. and KUTLER, P., AIAA J. 15(4), 581, (1977);
- [27] – TOME, M. F. and McKEE, S., J. Comput. Phys. 110, 171, (1994);
- [28] – VIECELLI, J. A., J. Comput. Phys. 4, 543, (1969);
- [29] – VIECELLI, J. A., J. Comput. Phys. 8, 119, (1971);
- [30] – WHITE, F. M., Fluid Mechanics, McGraw-Hill, (1979);
- [31] – WHITE, F. M., Viscous fluid flow, McGraw-Hill, (1991);

10 – APÊNDICE

C.....
C
C
C ESTE PROGRAMA SIMULA O ESCOAMENTO DE AR NUM DEGRAU (BACKWARD-FACING-
. .
C STEP) BIDIMENSIONAL. O ESQUEMA NUMERICO UTILIZADO NESTE CODIGO E .
C UMA MODIFICACAO DO METODO MAC (MARKER-AND-CELL), PARA AS EQUACOES DE .
C NAVIER-STOKES INCOMPRESSIVEIS, PROPOSTA POR C. W. HIRT E J. L. COOK .
C E EXTRAIDO DE JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 10, PP. 324-340 .
C (1972). .
C .
C .

C DEZEMBRO/97 .
C.....
C

PROGRAM BFS

INTEGER I,J,ALFA,N,M,T

REAL*8 DELTAT,DELTAX,DELTAY,RE,L,U0,BETA0,RESIDUO,RESV,RESV

* ,DELTIN,TOL,VISC,FATOR,MAX,MAXU,MAXV,EPS,DX2,DY2

REAL*8 U(-1:150,-1:150),V(-1:150,-1:150),P(0:150,0:150)

* ,UAUX(150,150),VAUX(150,150)

COMMON /BLOCO0/ALFA

COMMON /BLOCO1/N,M

COMMON /BLOCO2/DELTAX,DELTAY

COMMON /BLOCO3/DX2,DY2

OPEN (1,FILE = 'INPUT.DAT',STATUS = 'OLD')

OPEN (2,FILE = 'OUTPUT',STATUS = 'UNKNOWN')

C

C...DEFINICAO DOS PARAMETROS:

C

C EPS - TOLERANCIA PARA A CONSERVACAO DA MASSA;

C BETA0 - FATOR DE RELAXACAO;

C TOL - TOLERANCIA PARA FINALIZAR O PROCESSO;

C VISC - VISCOSIDADE DO FLUIDO;

C

DELTIN - TAMANHO DO TIME-STEP INICIAL.

C

C

DATA EPS,BETA0,TOL,VISC,DELTIN/1.0E-07,1.0,1.0E-06,1.51E-05

* ,1.0E-01/

C

C...DADOS DE ENTRADA:

C

C L - COMPRIMENTO LONGITUDINAL DO DOMINIO;

C N - NUMERO DE CELULAS NA DIRECAO X;

C M - NUMERO DE CELULAS NA DIRECAO Y (PAR);

C ALFA - PARAMETRO QUE CONTROLA A POSICAO DO DEGRAU (RES-

C TRICAO: MAIOR QUE ZERO E MENOR QUE N);

C RE - NUMERO DE REYNOLDS;

C FATOR - VARIAVEL ESCOLHIDA ENTRE 0.0 E 1.0, PARA

C ASSEGURAR QUE O METODO ESTA TRABALHANDO DENTRO

C DE UMA REGIAO ESTAVEL.

C

C

READ(1,*) L,N,M,ALFA,RE,FATOR

DELTAX=L/N

DX2=DELTAX*DELTAX

DELTAY=2.D0/M

DY2=DELTAY*DELTAY

C...U0 - VELOCIDADE DA CORRENTE DE AR QUE CHEGA NO DOMINIO

U0=5.D0*RE*VISC

C

C...CONDICOES INICIAIS

C

T=0

DELTAT=DELTIN

CALL CONDINIC (U,V,P,UAUX,VAUX)

C

C...LOOP PRINCIPAL

C

RESIDUO=10.0D0

DO WHILE (RESIDUO.GE.TOL.OR.T.EQ.50000)

CALL CONTINU (EPS,BETA0,DELTAT,U,V,P)

CALL MAXUVT (U,V,MAX,MAXU,MAXV)

CALL TIMSTEP (RE,FATOR,MAX,MAXU,MAXV,DELTAT)

CALL BC (U,V)

T=T+1

CALL MOMENTOS (RE,DELTAT,U,V,P)

CALL SOMADIF (U,V,UAUX,VAUX,RESU,RESV)

RESIDUO=DABS(RESU-RESV)

WRITE(*,*) T,RESIDUO,DELTAT

END DO

C

C...VARIAVEIS EM POSICOES NAO DISCRETIZADAS

C

C...VARIAVEIS U,V NO CENTRO DA CELULA

```
DO 55 I=0,2*N-2,2
  IF (I.LT.2*ALFA) THEN
    DO 56 J=M,2*M-2,2
      U(I+1,J+1)=0.5D0*(U(I+2,J+1)+U(I,J+1))
56      V(I+1,J+1)=0.5D0*(V(I+1,J+2)+V(I+1,J))
    ELSE
      DO 57 J=0,2*M-2,2
        U(I+1,J+1)=0.5D0*(U(I+2,J+1)+U(I,J+1))
57        V(I+1,J+1)=0.5D0*(V(I+1,J+2)+V(I+1,J))
      ENDIF
55  CONTINUE
```

C...VARIAVEIS U,V,P EM PONTOS DE DISCRETIZACAO (U,V TROCADOS)

```
DO 507 I=0,2*N-2,2
  IF (I.LT.2*ALFA) THEN
    DO 58 J=M,2*M-2,2
      IF (J.LT.2*M-2) THEN
        V(I+2,J+1)=0.5D0*(V(I+3,J+1)+V(I+1,J+1))
        U(I+1,J+2)=0.5D0*(U(I+1,J+3)+U(I+1,J+1))
        P(I+2,J+1)=0.5D0*(P(I+3,J+1)+P(I+1,J+1))
        P(I+1,J+2)=0.5D0*(P(I+1,J+3)+P(I+1,J+1))
      ELSE
        V(I+2,J+1)=0.5D0*(V(I+3,J+1)+V(I+1,J+1))
        P(I+2,J+1)=0.5D0*(P(I+3,J+1)+P(I+1,J+1))
      ENDIF
58  CONTINUE
  ELSEIF (I.GE.2*ALFA.AND.I.LT.2*N-2) THEN
    DO 59 J=0,2*M-2,2
      IF (J.LT.2*M-2) THEN
```

```

V(I+2,J+1)=0.5D0*(V(I+3,J+1)+V(I+1,J+1))
U(I+1,J+2)=0.5D0*(U(I+1,J+3)+U(I+1,J+1))
P(I+2,J+1)=0.5D0*(P(I+3,J+1)+P(I+1,J+1))
P(I+1,J+2)=0.5D0*(P(I+1,J+3)+P(I+1,J+1))
ELSE
V(I+2,J+1)=0.5D0*(V(I+3,J+1)+V(I+1,J+1))
P(I+2,J+1)=0.5D0*(P(I+3,J+1)+P(I+1,J+1))
ENDIF
59 CONTINUE
ELSE
DO 60 J=0,2*M-2,2
IF (J.LT.2*M-2) THEN
U(I+1,J+2)=0.5D0*(U(I+1,J+3)+U(I+1,J+1))
V(I+2,J+1)=V(I+1,J+1)
P(I+1,J+2)=0.5D0*(P(I+1,J+3)+P(I+1,J+1))
ELSE
V(I+2,J+1)=V(I+1,J+1)
ENDIF
60 CONTINUE
ENDIF
507 CONTINUE

```

C...VARIAVEIS NO CANTO SUPERIOR DIREITO DA CELULA

```

DO 61 I=0,2*N-2,2
IF (I.LT.2*ALFA) THEN
DO 62 J=M,2*M-4,2
V(I+2,J+2)=0.5D0*(V(I+3,J+2)+V(I+1,J+2))
U(I+2,J+2)=0.5D0*(U(I+2,J+3)+U(I+2,J+1))
P(I+2,J+2)=0.25D0*(P(I+3,J+2)+P(I+1,J+2)+P(I+2,J+3)
* +P(I+2,J+1))
62 CONTINUE
ELSEIF (I.GE.2*ALFA.AND.I.LT.2*N-2) THEN
DO 63 J=0,2*M-4,2
V(I+2,J+2)=0.5D0*(V(I+3,J+2)+V(I+1,J+2))
U(I+2,J+2)=0.5D0*(U(I+2,J+3)+U(I+2,J+1))
P(I+2,J+2)=0.25D0*(P(I+3,J+2)+P(I+1,J+2)+P(I+2,J+3)
* +P(I+2,J+1))

```

```

63     CONTINUE
      ELSE
        DO 64 J=0,2*M-4,2
          V(I+2,J+2)=0.5D0*(V(I+2,J+3)+V(I+2,J+1))
64     U(I+2,J+2)=U(I+1,J+2)
      ENDIF
61     CONTINUE

C
C...MONTAGEM DE SAIDA PARA A VISUALIZACAO DO ESCOAMENTO
C
      WRITE(2,*) T,RESIDUO,DELTAT
      WRITE(2,*)"TITLE = "BFG" '
      WRITE(2,*)"VARIABLES = "I","J","U","V","P"
      WRITE(2,*)"ZONE T="INTERNO",I=',2*M-1,',J=',2*N-1,',F=POINT'
      DO 41 I=0,2*ALFA-1
        DO 41 J=0,M-1
          U(I,J)=0.D0
41     V(I,J)=0.D0
      DO 44 I=1,2*N-1
        DO 44 J=1,2*M-1
44     WRITE(2,100) I,J,U(I,J),V(I,J),P(I,J)
100    FORMAT(1X,I3,1X,I3,1X,F10.5,1X,F10.5,1X,F15.5)

      STOP
      END

```

```

C
C...ROTINA PARA AS CONDICAOES INICIAIS
C
      SUBROUTINE CONDINIC (U,V,P,UAUX,VAUX)
      INTEGER I,J,N,M,ALFA

```



```

REAL*8 U(-1:150,-1:150),V(-1:150,-1:150),P(0:150,0:150)
REAL*8 UAUX(150,150),VAUX(150,150)
COMMON /BLOCO0/ALFA
COMMON /BLOCO1/N,M
DO J=M,2*M
  U(0,J)=1.D0
  V(0,J)=0.D0
END DO
DO I=1,2*N
  DO J=0,2*M
    U(I,J)=0.D0
    V(I,J)=0.D0
    P(I,J)=0.D0
  END DO
END DO

DO I=0,2*N-2,2
  DO J=M,2*M-2,2
    UAUX(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)
    VAUX(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)
  END DO
END DO
DO I=2*ALFA,2*N-2,2
  DO J=0,M-2,2
    UAUX(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)
    VAUX(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)
  END DO
END DO

RETURN

END

C
C...CONSERVACAO DA MASSA
C
SUBROUTINE CONTINU (EPS,BETA0,DELTAT,U,V,P)

```

```

REAL *8 BETA0,DELTAT,MAXD,EPS
REAL *8 U(-1:150,-1:150),V(-1:150,-1:150),D(150,150),
*      P(0:150,0:150)
EXTERNAL DILATA,PRESITER

MAXD=10.D0
DO WHILE (MAXD.GT.EPS)
    CALL DILATA (U,V,D,MAXD)
    CALL PRESITER (BETA0,DELTAT,D,U,V,P)
END DO

RETURN
END

C
C....ROTINA PARA AVALIAR OS MAXIMOS DAS QUANTIDADES U, V ,U*U E V*V
C
SUBROUTINE MAXUVT (U,V,MAX,MAXU,MAXV)
INTEGER I,J,M,N
REAL *8 MAX,MAXU,MAXV,U2,V2,AUX1,AUX2
REAL *8 U(-1:150,-1:150),V(-1:150,-1:150)
COMMON /BLOCO1/N,M
MAX=0.D0
MAXU=0.D0
MAXV=0.D0

DO I=0,2*N-2,2

    DO J=0,2*M-2,2
        AUX1=DABS(U(I+2,J+1))
        AUX2=DABS(V(I+1,J+2))
        U2=U(I+2,J+1)*U(I+2,J+1)
        V2=V(I+1,J+2)*V(I+1,J+2)
        IF (AUX1.GT.MAXU) MAXU=AUX1
        IF (AUX2.GT.MAXV) MAXV=AUX2
        IF (U2.GT.MAX) MAX=U2
        IF (V2.GT.MAX) MAX=V2

    END DO
END DO

```

END DO

RETURN

END

C

C...ROTINA PARA O TAMANHO DO PASSO NO TEMPO

C

SUBROUTINE TIMSTEP (RE,FATOR,MAX,MAXU,MAXV,DELTAT)

REAL*8 DELTAX,DELTAY,DELTAT,AUX1,AUX2,AUX3,MIN,

* FATOR,MAXU,MAXV,MAX,RE,AUX4,AUX5,AUX6,AUX7

COMMON /BLOCO2/DELTAX,DELTAY

AUX1=1.D0/MAXU

AUX2=1.D0/MAXV

AUX3=MAX*RE

AUX4=1.D0/AUX3

AUX5=DELTAX*AUX1

AUX6=DELTAY*AUX2

AUX7=2.D0*AUX4

MIN=AUX5

IF (MIN.GT.AUX6) MIN=AUX6

IF (MIN.GT.AUX7) MIN=AUX7

DELTAT=MIN*FATOR

RETURN

END

C

C...ROTINA PARA AS CONDICÕES DE FRONTEIRA (INFLOW,WALL,OUTFLOW)

C

SUBROUTINE BC (U,V)

INTEGER I,J,N,M,ALFA

```
REAL*8 U(-1:150,-1:150),V(-1:150,-1:150)
COMMON /BLOCO0/ALFA
COMMON /BLOCO1/N,M
```

```
C...ENTRADA DO FLUIDO (PERFIL RETO - U0)
```

```
  I=0
  DO 70 J=M,2*M,2
70    V(I-1,J)=(V(I+3,J)-6.D0*V(I+1,J))/3.D0
```

```
C...PAREDE SUPERIOR
```

```
  J=2*M
  DO 10 I=0,2*N,2
10    U(I,J+1)=-U(I,J-1)
```

```
C...SAIDA DO FLUIDO ESPECIFICADA NA ROTINA DOS MOMENTOS
```

```
C...PAREDES INFERIORES E DEGRAU
```

```
  J=M
  DO 50 I=0,2*ALFA-2,2
50    U(I,J-1)=-U(I,J+1)
```

```
  I=2*ALFA
  DO 60 J=0,M-2,2
60    V(I-1,J)=-V(I+1,J)
```

```
  J=0
  DO 61 I=2*ALFA,2*N,2
61    U(I,J-1)=-U(I,J+1)
```

```
  RETURN
```

```
  END
```

```
C
```

```
C...ROTINA QUE ESTIMA AS COMPONENTES DE VELOCIDADE EM PONTOS
```

```
C...DE DISCRETIZACAO, USANDO AS EQUACOES DO MOVIMENTO, SEM
```

```
C...GARANTIR A CONSERVACAO DA MASSA
```

```
C
```

```
  SUBROUTINE MOMENTOS (RE,DELTAT,U,V,P)
```

```

INTEGER I,J,N,M,ALFA
REAL*8 DELTAT,RE
REAL*8 U(-1:150,-1:150),V(-1:150,-1:150),P(0:150,0:150)
COMMON /BLOCO0/ALFA
COMMON /BLOCO1/N,M
EXTERNAL RHSU,RHSV
U(2*ALFA,M-1)=-U(2*ALFA,M+1)
DO I=0,2*ALFA-2,2

```

```

    DO J=M,2*M-2,2
      IF (J.LT.2*M-2) THEN
        CALL RHSU (I,J,DELTAT,RE,U,V,P)
        CALL RHSV (I,J,DELTAT,RE,U,V,P)
      ELSE
        CALL RHSU (I,J,DELTAT,RE,U,V,P)
      ENDIF

```

```

    END DO
  END DO
  U(2*ALFA,M-1)=0.DO

```

```

V(2*ALFA-1,M)=-V(2*ALFA+1,M)
DO I=2*ALFA,2*N-2,2

```

```

    DO J=0,2*M-2,2
      IF (J.LT.2*M-2) THEN
        CALL RHSU (I,J,DELTAT,RE,U,V,P)
        CALL RHSV (I,J,DELTAT,RE,U,V,P)
      ELSE
        CALL RHSU (I,J,DELTAT,RE,U,V,P)
      ENDIF
    END DO
  END DO

```

C...REGIAO DE SAIDA DO FLUIDO

```

          DO 7 J=1,2*M-1,2
7          U(2*N,J)=U(2*N-2,J)
          DO 11 J=2,2*M-2,2
11         V(2*N-1,J)=V(2*N-3,J)

```

```

V(2*ALFA-1,M)=0.D0

```

```

RETURN

```

```

END

```

```

C

```

```

C...ROTINA PARA DEFINIR O RESIDUO

```

```

C

```

```

SUBROUTINE SOMADIF (U,V,UAUX,VAUX,RESU,RESV)

```

```

INTEGER I,J,N,M,ALFA

```

```

REAL*8 RESU,RESV

```

```

REAL*8 U(-1:150,-1:150),UAUX(150,150)

```

```

REAL*8 V(-1:150,-1:150),VAUX(150,150)

```

```

COMMON /BLOCO0/ALFA

```

```

COMMON /BLOCO1/N,M

```

```

RESU=0.D0

```

```

RESV=0.D0

```

```

DO I=0,2*N-2,2

```

```

  DO J=M,2*M-2,2

```

```

    RESU=RESU+DABS(U(I+2,J+1)-UAUX(I+2,J+1))

```

```

    RESV=RESV+DABS(V(I+1,J+2)-VAUX(I+1,J+2))

```

```

  END DO

```

```

END DO

```

```

DO I=2*ALFA,2*N-2,2

```

```

  DO J=0,M-2,2

```

```

    RESU=RESU+DABS(U(I+2,J+1)-UAUX(I+2,J+1))

```

```

    RESV=RESV+DABS(V(I+1,J+2)-VAUX(I+1,J+2))

```

```

  END DO

```

```

END DO

```

```

DO I=0,2*N-2,2

```

```

  DO J=M,2*M-2,2

```

```

    UAUX(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)

```

```

    VAUX(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)

```

```

  END DO

```

```

END DO
DO I=2*ALFA,2*N-2,2
  DO J=0,M-2,2
    UAUX(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)
    VAUX(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)
  END DO
END DO
RETURN
END

```

C

C...ROTINA PARA EQUACAO DE MOMENTO-X

C

```

SUBROUTINE RHSU (I,J,DELTAT,RE,U,V,P)
INTEGER I,J
REAL*8 DELTAT,DELTAX,DELTAY,RE,DX2,DY2,DX,DY,DXX,DYY,REE
REAL*8 U(-1:150,-1:150),V(-1:150,-1:150),P(0:150,0:150)
COMMON /BLOCO2/DELTAX,DELTAY
COMMON /BLOCO3/DX2,DY2
DX=1.D0/DELTAX
DY=1.D0/DELTAY
DXX=1.D0/DX2
DYY=1.D0/DY2
REE=1.D0/RE

```

C...PONTOS INDETERMINADOS NA MALHA

```

U(I+2,J)=0.5D0*(U(I+2,J+1)+U(I+2,J-1))
V(I+2,J)=0.5D0*(V(I+3,J)+V(I+1,J))
U(I+2,J+2)=0.5D0*(U(I+2,J+3)+U(I+2,J+1))
V(I+2,J+2)=0.5D0*(V(I+3,J+2)+V(I+1,J+2))

```

C...MOMENTO-X

```

U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+DELTAT*(DX*(U(I,J+1)*U(I+2,J+1)
*      -U(I+2,J+1)*U(I+4,J+1))+DY*(U(I+2,J)*V(I+2,J)
*      -U(I+2,J+2)*V(I+2,J+2))+DX*(P(I+1,J+1)
*
*      -P(I+3,J+1))+REE*(DXX*(U(I+4,J+1)-2.D0

```

```

*      *U(I+2,J+1)+U(I,J+1))+DYY*(U(I+2,J+3)-2.D0
*      *U(I+2,J+1)+U(I+2,J-1))))

```

RETURN

END

C

C...ROTINA PARA A EQUACAO DE MOMENTO-Y

C

```

SUBROUTINE RHSV(I,J,DELTAT,RE,U,V,P)
INTEGER I,J
REAL*8 DELTAT,DELTAX,DELTAY,RE,DX2,DY2,DX,DY,DXX,DYY,REE
REAL*8 U(-1:150,-1:150),V(-1:150,-1:150),P(0:150,0:150)
COMMON /BLOCO2/DELTAX,DELTAY
COMMON /BLOCO3/DX2,DY2
DX=1.D0/DELTAX
DY=1.D0/DELTAY
DXX=1.D0/DX2
DYY=1.D0/DY2
REE=1.D0/RE

```

C...PONTOS INDETERMINADOS NA MALHA

```

U(I,J+2)=0.5D0*(U(I,J+3)+U(I,J+1))
V(I,J+2)=0.5D0*(V(I-1,J+2)+V(I+1,J+2))
U(I+2,J+2)=0.5D0*(U(I+2,J+3)+U(I+2,J+1))
V(I+2,J+2)=0.5D0*(V(I+3,J+2)+V(I+1,J+2))

```

C...MOMENTO-Y

```

V(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)+DELTAT*(DY*(V(I+1,J)*V(I+1,J+2)
*      -V(I+1,J+2)*V(I+1,J+4))+DX*(U(I,J+2)*V(I,J+2)
*      -U(I+2,J+2)*V(I+2,J+2))+DY*(P(I+1,J+1)
*      -P(I+1,J+3))+REE*(DXX*(V(I+3,J+2)-2.D0
*      *V(I+1,J+2)+V(I-1,J+2))+DYY*(V(I+1,J+4)-2.D0
*      *V(I+1,J+2)+V(I+1,J))))

```


RETURN

END

C

C...ROTINA PARA CALCULAR A DILATAÇÃO NA CELULA

C

SUBROUTINE DILATA (U,V,D,MAXD)

INTEGER I,J,N,M,ALFA

REAL*8 DELTAX,DELTAY,MAXD,DX,DY,AUX

REAL*8 U(-1:150,-1:150),V(-1:150,-1:150),D(150,150)

COMMON /BLOCO0/ALFA

COMMON /BLOCO1/N,M

COMMON /BLOCO2/DELTAX,DELTAY

MAXD=0.D0

DX=1.D0/DELTAX

DY=1.D0/DELTAY

DO I=0,2*N-2,2

DO J=M,2*M-2,2

D(I+1,J+1)=DX*(U(I+2,J+1)-U(I,J+1))+

* DY*(V(I+1,J+2)-V(I+1,J))

AUX=DABS(D(I+1,J+1))

IF(MAXD.LT.AUX) MAXD=AUX

END DO

END DO

DO I=2*ALFA,2*N-2,2

DO J=0,M-2,2

D(I+1,J+1)=DX*(U(I+2,J+1)-U(I,J+1))+

* DY*(V(I+1,J+2)-V(I+1,J))

AUX=DABS(D(I+1,J+1))

IF(MAXD.LT.AUX) MAXD=AUX

END DO

END DO

RETURN

END

C

C...ROTINA PARA ITERAR NA PRESSAO

C

```
SUBROUTINE PRESITER (BETA0,DELTAT,D,U,V,P)
  INTEGER I,J,N,M,ALFA
  REAL*8 BETA0,DELTAT
  REAL*8 U(-1:150,-1:150),V(-1:150,-1:150),P(0:150,0:150),
*     D(150,150)
  COMMON /BLOCO0/ALFA
  COMMON /BLOCO1/N,M
  EXTERNAL ITERAP
  DO 400 I=0,2*ALFA-2,2
    DO 400 J=M,2*M-2,2
400    CALL ITERAP (I,J,BETA0,DELTAT,D,U,V,P)
    DO 402 I=2*ALFA,2*N-2,2
      DO 402 J=0,2*M-2,2
402    CALL ITERAP (I,J,BETA0,DELTAT,D,U,V,P)
  RETURN
  END
```

C

C...ROTINA PARA AJUSTAR AS VELOCIDADES NAS FACES DA CELULA E A

C...PRESSAO NO CENTRO

C

```
SUBROUTINE ITERAP (I,J,BETA0,DELTAT,D,U,V,P)
  INTEGER I,J,N,M,ALFA
  REAL*8 DELTAX,DELTAY,DELTAT,BETA,BETA0,DELTAP,DX2,DY2,
*     AUXX,AUXY,AUX1,AUX2,DX,DY
  REAL*8 U(-1:150,-1:150),V(-1:150,-1:150),P(0:150,0:150),
*     D(150,150)
  COMMON /BLOCO0/ALFA
  COMMON /BLOCO1/N,M
  COMMON /BLOCO2/DELTAX,DELTAY
  COMMON /BLOCO3/DX2,DY2
  DX=1.D0/DELTAX
  DY=1.D0/DELTAY
```

```

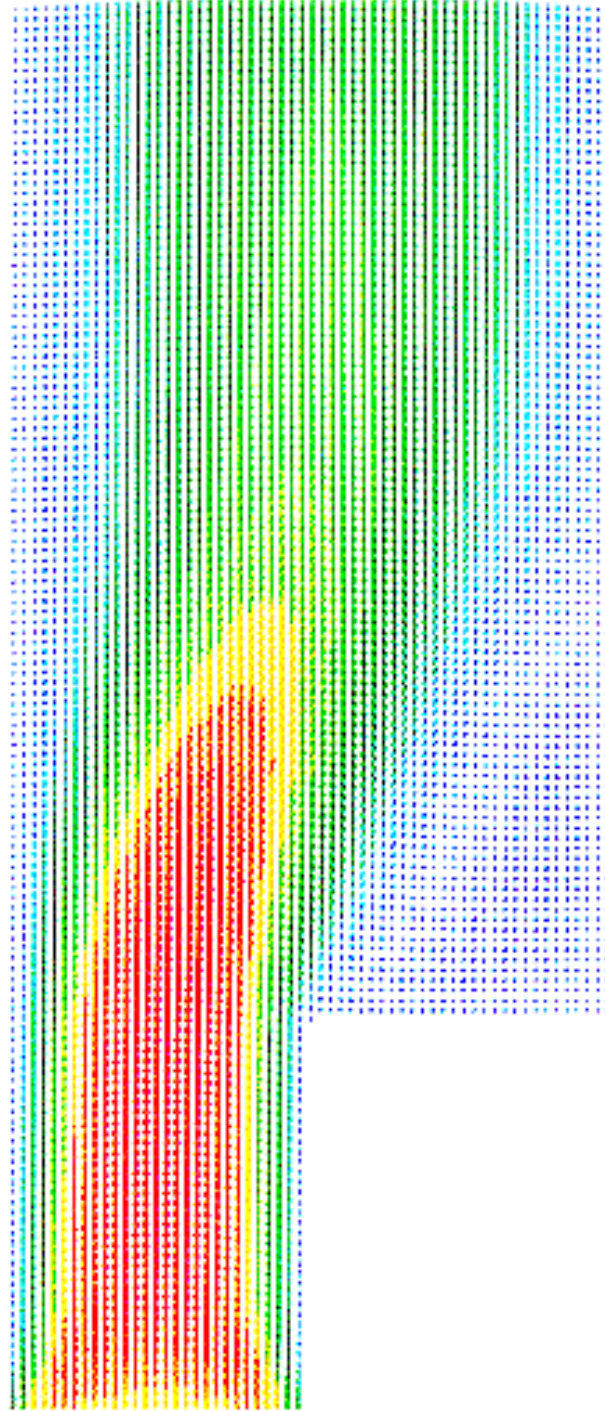
AUX1=1.D0/DX2
AUX2=1.D0/DY2
BETA=BETA0/((2.D0*DELTAT)*(AUX1+AUX2))
DELTAP=-BETA*D(I+1,J+1)
P(I+1,J+1)=P(I+1,J+1)+DELTAP
AUXX=DELTAT*DELTAP*DX
AUXY=DELTAT*DELTAP*DY
IF (I.EQ.0) THEN
  IF (J.EQ.M) THEN
    U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
    V(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)+AUXY
  ELSEIF (J.LT.2*M-2) THEN
    U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
    V(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)+AUXY
    V(I+1,J)=V(I+1,J)-AUXY
  ELSE
    U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
    V(I+1,J)=V(I+1,J)-AUXY
  ENDIF
ELSEIF (I.GT.0.AND.I.LT.2*ALFA) THEN
  IF (J.EQ.M) THEN
    U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
    V(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)+AUXY
    U(I,J+1)=U(I,J+1)-AUXX
  ELSEIF (J.GT.M.AND.J.LT.2*M-2) THEN
    U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
    V(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)+AUXY
    U(I,J+1)=U(I,J+1)-AUXX
    V(I+1,J)=V(I+1,J)-AUXY
  ELSE
    U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
    U(I,J+1)=U(I,J+1)-AUXX
    V(I+1,J)=V(I+1,J)-AUXY
  ENDIF
ELSEIF (I.EQ.2*ALFA) THEN
  IF (J.EQ.0) THEN
    U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
    V(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)+AUXY
  
```

```

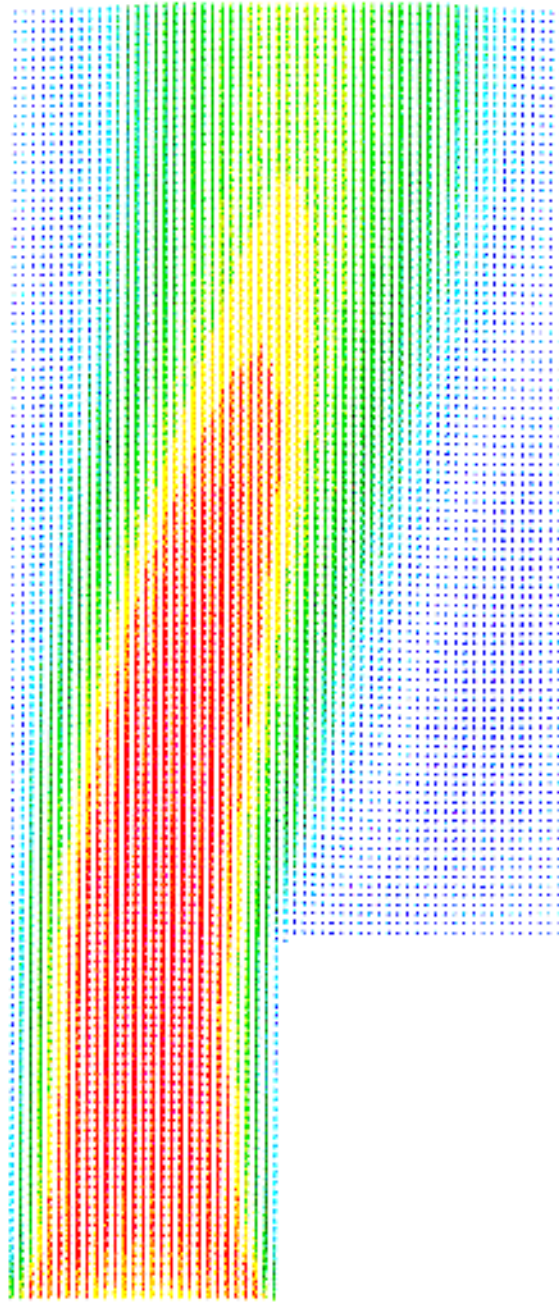
ELSEIF (J.GT.0.AND.J.LT.M) THEN
    U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
    V(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)+AUXY
    V(I+1,J)=V(I+1,J)-AUXY
ELSEIF (J.GE.M.AND.J.LT.2*M-2) THEN
    U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
    V(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)+AUXY
    U(I,J+1)=U(I,J+1)-AUXX
    V(I+1,J)=V(I+1,J)-AUXY
ELSE
    U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
    U(I,J+1)=U(I,J+1)-AUXX
    V(I+1,J)=V(I+1,J)-AUXY
ENDIF
ELSEIF (I.GT.2*ALFA.AND.I.LT.2*N-2) THEN
    IF (J.EQ.0) THEN
        U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
        U(I,J+1)=U(I,J+1)-AUXX
        V(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)+AUXY
    ELSEIF (J.GT.0.AND.J.LT.2*M-2) THEN
        U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
        V(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)+AUXY
        U(I,J+1)=U(I,J+1)-AUXX
        V(I+1,J)=V(I+1,J)-AUXY
    ELSE
        U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
        U(I,J+1)=U(I,J+1)-AUXX
        V(I+1,J)=V(I+1,J)-AUXY
    ENDIF
ELSE
    IF (J.EQ.0) THEN
        U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
        U(I,J+1)=U(I,J+1)-AUXX
        V(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)+AUXY
    ELSEIF (J.GT.0.AND.J.LT.2*M-2) THEN
        U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
        U(I,J+1)=U(I,J+1)-AUXX
        V(I+1,J+2)=V(I+1,J+2)+AUXY
    
```

```
V(I+1,J)=V(I+1,J)-AUXY
ELSE
  U(I+2,J+1)=U(I+2,J+1)+AUXX
  U(I,J+1)=U(I,J+1)-AUXX
  V(I+1,J)=V(I+1,J)-AUXY
ENDIF
ENDIF
RETURN
END
```

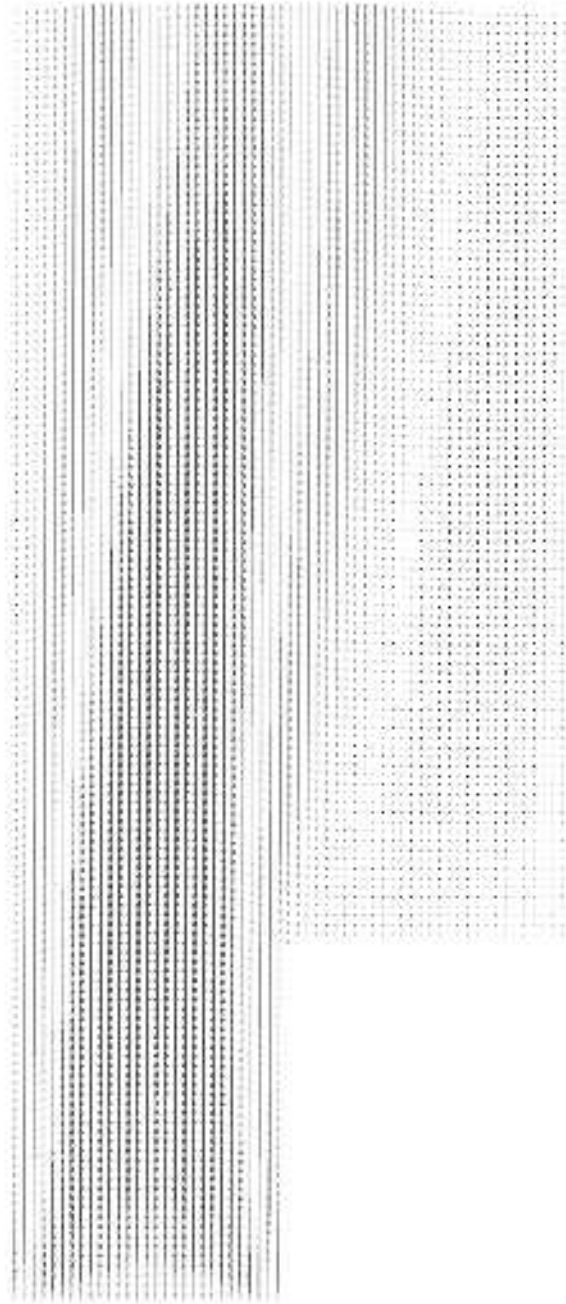
Campo de vetores
Re = 50



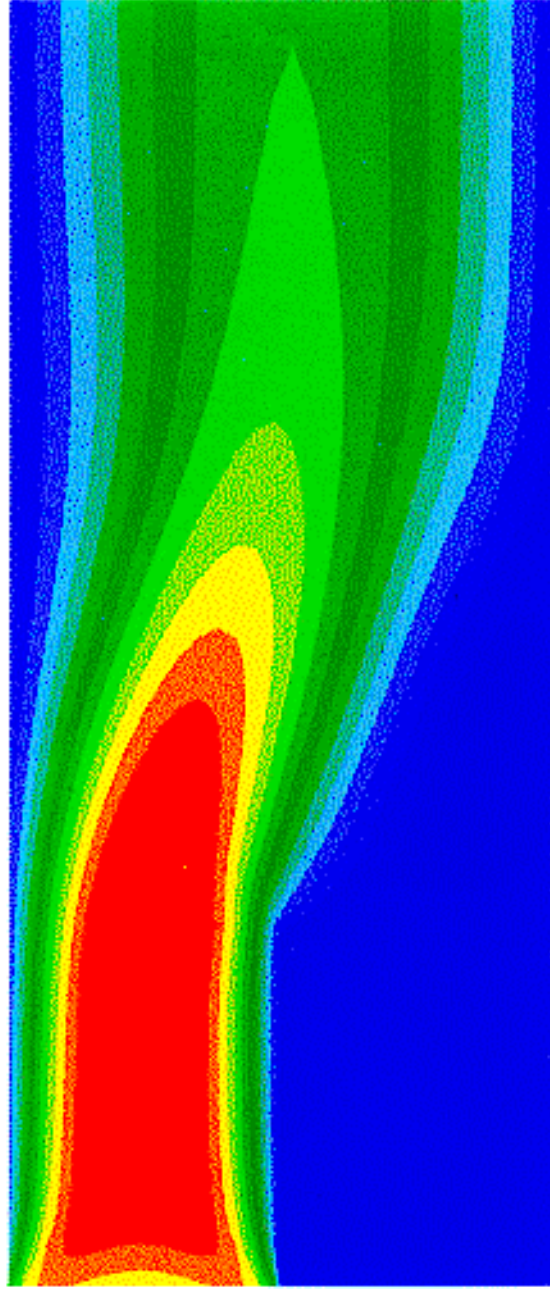
Campo de vetores
Re = 100



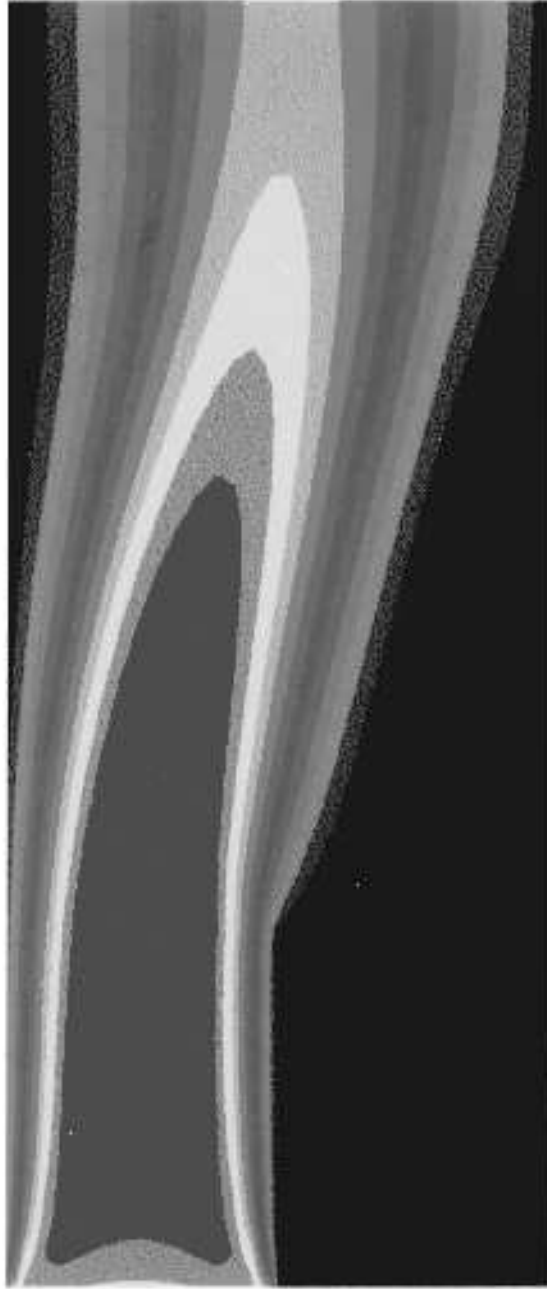
Campo de vetores
Re = 200



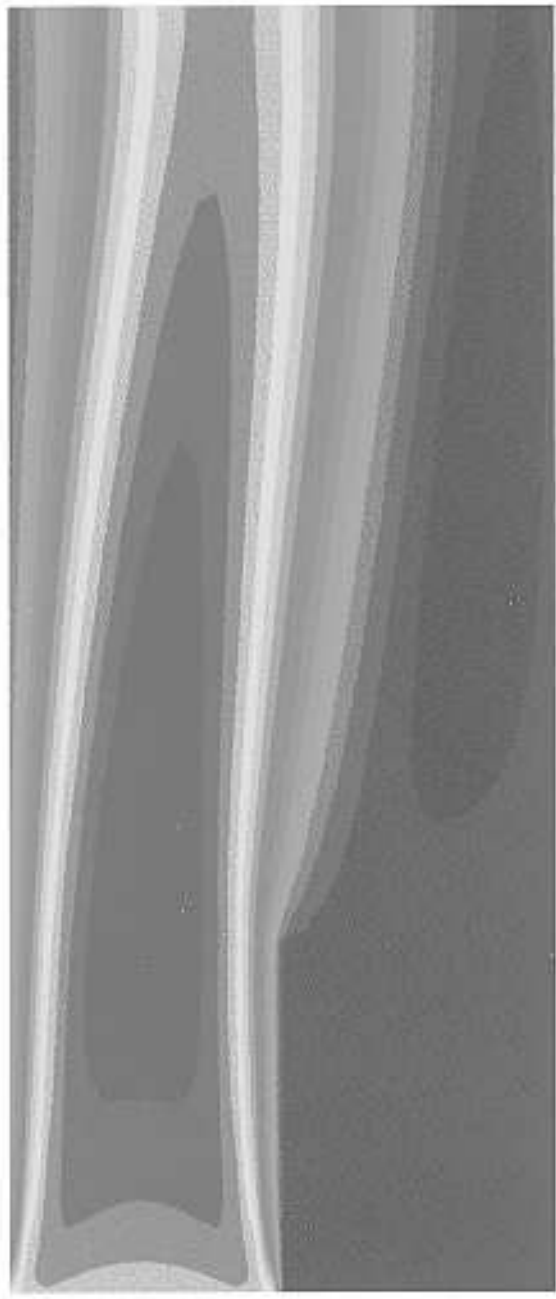
Componente horizontal do vetor velocidade
Re = 50



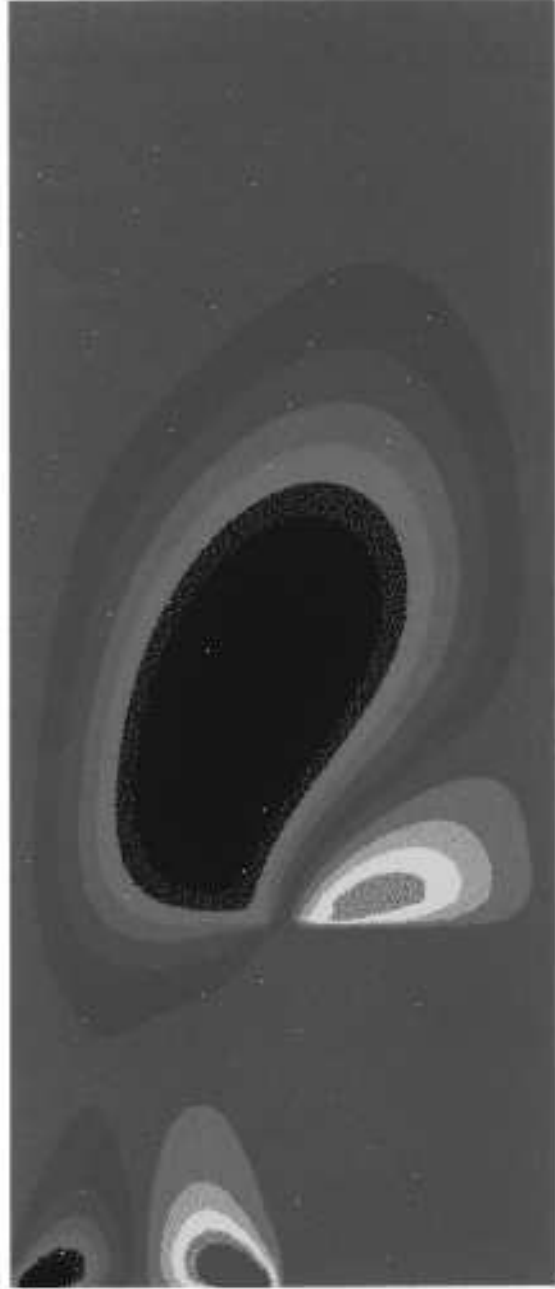
Componente horizontal do vetor velocidade
 $Re = 100$



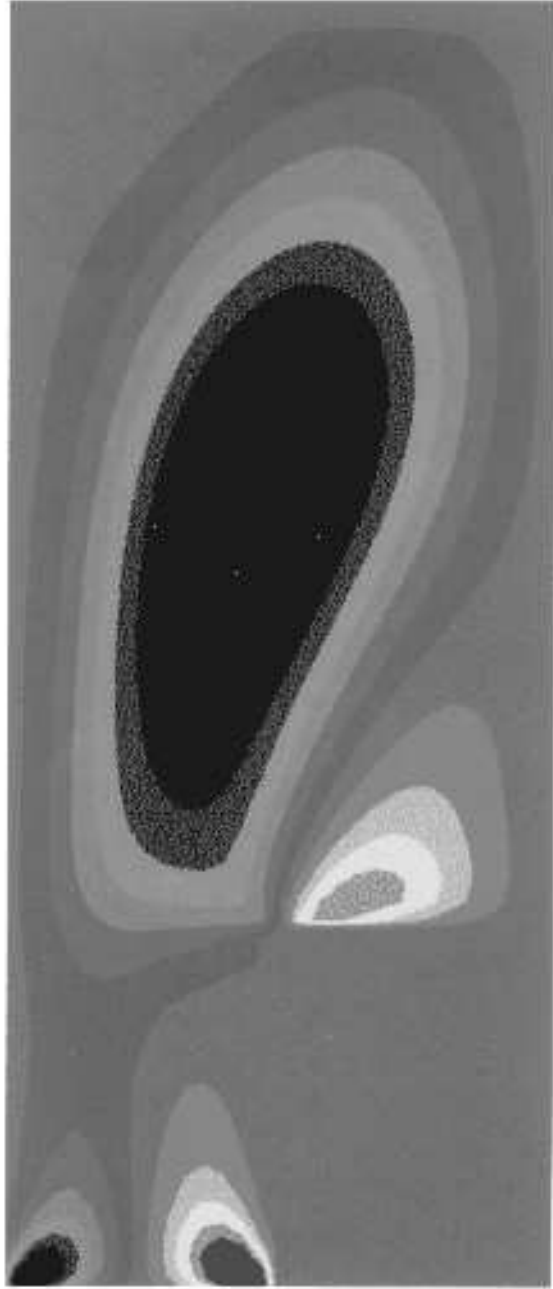
Componente horizontal do vetor velocidade
 $Re = 200$



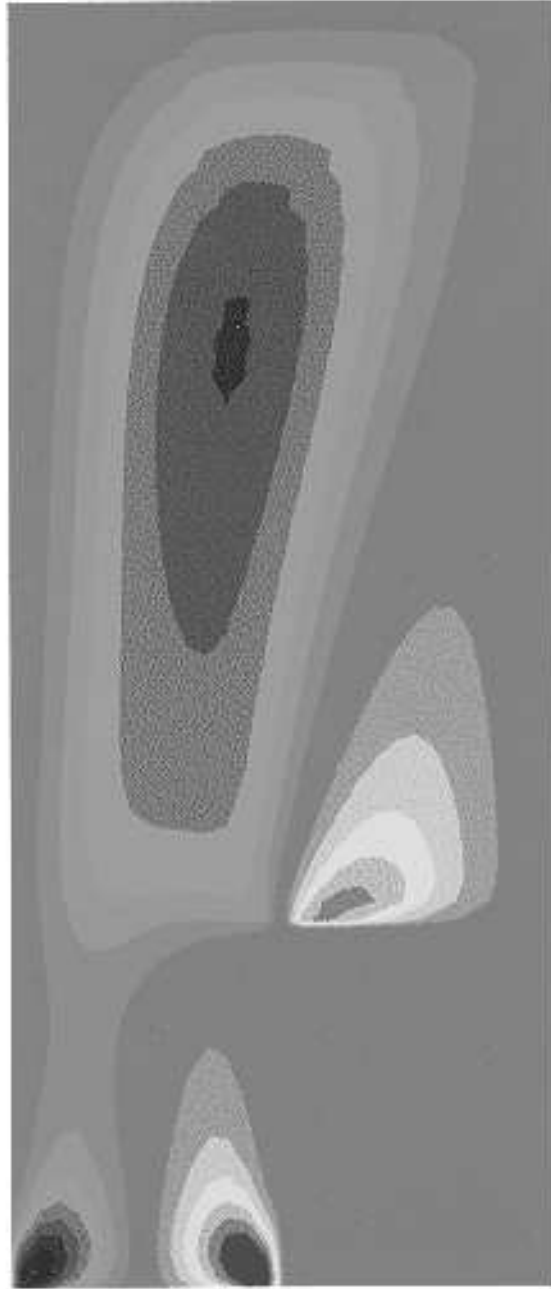
Componente vertical do vetor velocidade
Re = 50



Componente vertical do vetor velocidade
Re = 100



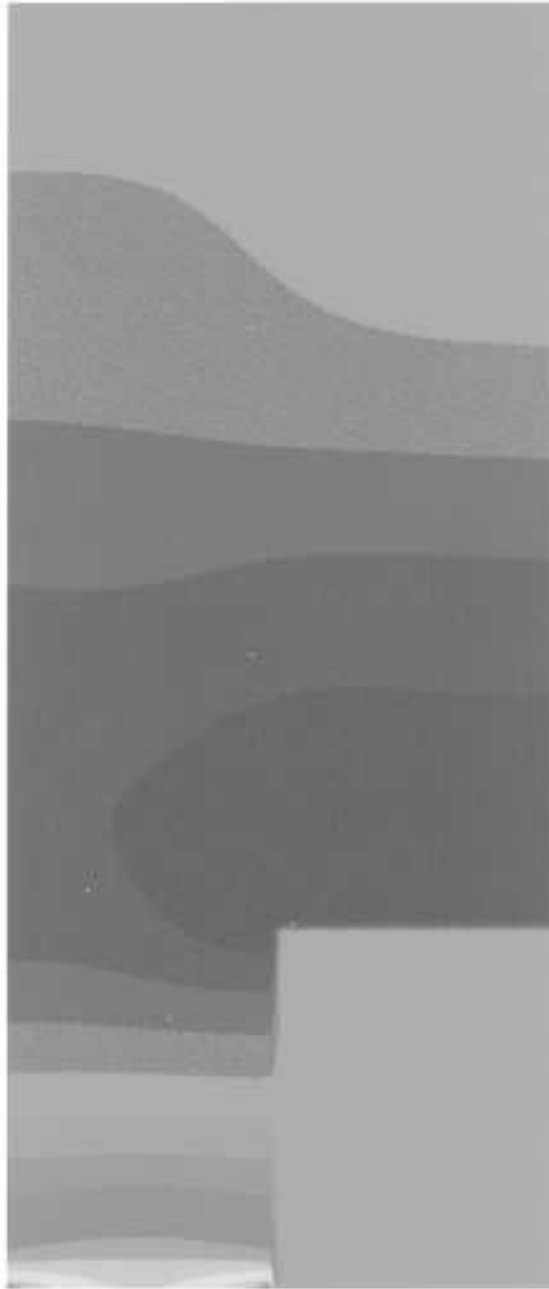
Componente vertical do vetor velocidade
Re = 200



Campo de pressao
Re = 50



Campo de pressão
Re = 100



Campo de pressao
Re = 200

