UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
CAMPUS DE SÃO CARLOS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS
I.C.M.S.C.

Reparametrização ortogonal em testes de sobrevivência acelerados com uma distribuição exponencial usando o modelo de potência e dados com censuras de tipo II

RODRIGUES, J.; LOUZADA NETO, F.

Nº 7

Relatório Técnicos do ICMSC - USP

ISSN 0103-2509

Reparametrização ortogonal em testes de sobrevivência acelerados com uma distribuição exponencial usando o modelo de potência e dados com censuras de tipo II

RODRIGUES, J.; LOUZADA NETO, F.

Nº 7

São Carlos (SP)

1990

REPARAMETRIZAÇÃO ORTOGONAL EM TESTES DE SOBREVIVÊNCIA ACELERADOS COM UMA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL USANDO O MODELO DE POTÊNCIA E DADOS COM CENSURAS DE TIPO II

Josemar Rodrigues
ICMSC-USP, C.P. 668
13.560 - São Carlos, S.P.

Francisco Louzada Neto
DEs-UFSCar, C.P. 676
13.560 - São Carlos, S.P.

RESUMO

Considerando o Modelo de Potência $\theta_i = \alpha/V_i^{\beta}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ sobre k níveis de stress V, uma Distribuição Exponencial com média θ_i para o tempo de sobrevivência e assumindo um esquema de censuras de tipo II, estudamos o efeito da Reparametrização Ortogonal (Cox & Reid, 1987) adotada para o parâmetro β na inferência de θ_1 sobre o nível de stress usual V_1 e mostramos que a função de verossimilhança maximizada para θ_1 é invariante sobre esse tipo de reparametrização. Também apresentamos um exemplo numérico com dados gerados.

Termos Importantes: Testes de Sobrevivência Acelerados, Modelo de Potência, Distribuição Exponencial, Função de Verossimilhança Maximizada, Reparametrização Ortogonal.

1. INTRODUÇÃO

Usualmente, para minimizar o tempo e o custo de experimentação com um certo componente, as indústrias usam k níveis de stress para estimar o tempo médio de falha θ_i sobre o i-ésimo nível de stress, $i=1,2,\ldots,k$. Em particular, estimar o tempo médio de falha θ_1, sobre o nível de stress usual.

Seja $T > 0$ uma variável aleatória denotando o tempo de sobrevivência de um componente com uma distribuição exponencial com f.d.p. dada por:

$$f(t,\lambda_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i t} \tag{1}$$

onde $\lambda_i > 0$ e $t > 0$.

O parâmetro λ_i denota a taxa constante de falhas sobre um nível de stress V_i, $i=1,2,\ldots,k$.

O tempo médio de falha sobre o stress V_i é dado por:

$$\theta_i = \frac{1}{\lambda_i} \tag{2}$$

e assumimos o Modelo de Potência dado por:

$$\theta_i = \frac{\alpha}{V_i^{\beta}} \tag{3}$$

onde $\alpha > 0$ e $-\infty < \beta < \infty$, são parâmetros desconhecidos.

Uma aplicação desse modelo com capacitores é dada por Levenbach (1957).

Com k níveis de stress e um esquema de censuras de tipo II para os dados, isto é, colocamos n_i unidades no início de cada teste para cada nível de stress V_i e o experimento termina quando observamos r_i falhas. Daí, temos $t_{(1)i} < t_{(2)i} < \ldots < t_{(r_i)i}$: observações ordenadas não-censuradas iguais a $t_{r_i i}$, $i=1,2,\ldots,k$.

Mann, Schapper e Singpurwalla (1974) determinam os Estimadores de Máxima Verossimilhança de α e β, a partir dos quais, fazem inferências sobre θ_i, em particular, sobre θ_i. Achcar e Dias (1990) apresentam uma análise Bayesiana do modelo de potência assumindo uma densidade a priori de Jeffreys para α e β e usam o método de Laplace para integrais para achar a densidade a posteriori marginal para θ_1.

Neste trabalho, substituindo α por θ_1 na função de verossimilhança para α e β, determinamos diretamente o Estimador de Máxima Verossimilhança para θ_1. Também, estudamos o efeito da Reparametrização Ortogonal (Cox & Reid, 1987) adotada para o parâmetro β na inferência de θ_1 e comparamos a Função de Verossimilhança Maximizada para θ_1 na parametrização original com a Função de Verossimilhança Maximizada para θ_1 na parametrização ortogonal.

2. UMA ANÁLISE CONSIDERANDO OS PARÂMETROS ORIGINAIS θ_1 E β

Considerando a f.d.p. (1), o modelo de potência (3) e dados com esquema de censuras de tipo II, a função de verossimilhança para α e β sobre cada nível de stress V_i é da

da por:

$$L_i(\alpha,\beta) = \frac{V_i^{r_i\beta}}{\alpha^{r_i}} \exp\{-A_i \frac{V_i^\beta}{\alpha}\} \tag{4}$$

onde $A_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ji} + (n_i - r_i) t_{r_i i}$, $i=1,2,\ldots,k$.

Como estamos interessados em θ_1, de (3), obtemos a expressão de α sobre o nível de stress V_1, dada por:

$$\alpha = \theta_1 V_1^\beta \tag{5}$$

A função de verossimilhança para θ_1 e β sobre cada stress V_i é dada por:

$$L_i(\theta_1,\beta) = \frac{1}{\theta_1^{r_i}} (\frac{V_i}{V_1})^{r_i\beta} \exp\{ -\frac{A_i}{\theta_1} (\frac{V_i}{V_1})^\beta \} \tag{6}$$

Dessa forma, a Função Log-Verossimilhança para θ_1 e β, considerando-se dados de k níveis de stress $V_1, V_2, \ldots, V_k$, escolhidos aleatoriamente é dada por:

$$\ell(\theta_1,\beta) = -r\log(\theta_1) + \beta \sum_{i=1}^{k} r_i \log(\frac{V_i}{V_1}) - \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^{k} A_i (\frac{V_i}{V_1})^\beta \tag{7}$$

onde $r = \sum_{i=1}^{k} r_i$: número total de falhas observadas.

Determinando as derivadas, $\partial\ell(\theta_1,\beta)/\partial\theta_1$ e $\partial\ell(\theta_1,\beta)/\partial\beta$

e igualando-as a zero, obtemos os Estimadores de Máxima Verossimilhança para θ_1 e β, dados por:

$$\hat{\theta}_1 = \sum_{i=1}^{k} A_i \left(\frac{V_i}{V_1}\right)^{\beta} \tag{8a}$$

e $\hat{\beta}$ é a solução da equação:

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \log\left(\frac{V_i}{V_1}\right) = \frac{r}{\sum_{i=1}^{k} A_i \left(\frac{V_i}{V_1}\right)^{\beta}} \sum_{i=1}^{k} A_i \left(\frac{V_i}{V_1}\right)^{\beta} \log\left(\frac{V_i}{V_1}\right) \tag{8b}$$

Para resolver (8b), usar método interativo.

A Matriz de Informação de Fisher para θ_1 e β é dada por:

$$I(\theta_1,\beta) = r \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta_1^2} & -\frac{1}{\theta_1} E[\log(\frac{V}{V_1})] \\ -\frac{1}{\theta_1} E[\log(\frac{V}{V_1})] & E[\log^2(\frac{V}{V_1})] \end{bmatrix} \tag{9}$$

onde $E[\log(\frac{V}{V_1})] = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{k} r_i \log(\frac{V_i}{V_1})$ e $E[\log^2(\frac{V}{V_1})] = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{k} r_i \log^2(\frac{V_i}{V_1})$.

Para construir Intervalos de Confiança para θ_1 e β, usualmente, considera-se a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\theta}_1$ e β, dada por:

$$(\hat{\theta}_1,\beta) \overset{a}{\sim} N\{(\theta_1,\beta);\ I^{-1}(\theta_1,\beta)\} \tag{10}$$

onde:

$$I^{-1}(\theta_1,\beta) = \frac{r}{\Delta}\begin{bmatrix} E[\log^2(\frac{V}{V_1})] & \frac{1}{\theta_1}E[\log(\frac{V}{V_1})] \\ \frac{1}{\theta_1}E[\log(\frac{V}{V_1})] & -\frac{1}{\theta_1^2} \end{bmatrix}$$

e $\Delta = \frac{r^2}{\theta_1^2}\,\mathrm{Var}[\log(\frac{V}{V_1})]$.

Também,

$$\hat{\theta}_1 \overset{a}{\sim} N\{\theta_1;\ \frac{\theta_1^2}{r} f\} \tag{11}$$

onde $f = \dfrac{E[\log^2 \frac{V}{V_1}]}{\mathrm{Var}[\log(\frac{V}{V_1})]}$, e um Intervalo de Confiança a $100(1-\alpha^*)\%$ para θ_1 é dado por:

$$\{\hat{\theta}_1 \pm Z\alpha^*/2\ \hat{\theta}_1 \sqrt{\frac{f}{r}}\} \tag{12}$$

3. A REPARAMETRIZAÇÃO ORTOGONAL PARA O PARÂMETRO β

Como discutido por Cox & Reid (1987) a parametrização ortogonal é uma parametrização que diagonaliza a Matriz de Informação de Fisher (9). Assim, transforma-se os parâmetros originais θ_1 e β no modelo (7) para os parâmetros ortogonais θ_1 e λ. O parâmetro λ é obtido resolvendo-se a equação diferencial

$$\theta_1 d\, \partial\beta = b\, \partial\theta_1 \tag{13}$$

onde $b = E[\log(\frac{V}{V_1})]$ e $d = E[\log^2(\frac{V}{V_1})]$.

Esta diferencial determina uma transformação um-a um,

$$\lambda = \beta - \frac{b}{d} \log\theta_1 \tag{14}$$

Então, a função log-verossimilhança na nova parametrização é dada por:

$$\ell^{\perp}(\theta_1,\lambda) = -r\log(\theta_1) + rb[\lambda + \frac{b}{d}\log(\theta_1)] - \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^{k} A_i (\frac{V_i}{V_1})^{\lambda + \frac{b}{d}\log(\theta_1)} \tag{15}$$

Para um valor θ_1 fixo, diferenciando (15) com respeito a λ e igualando a zero, obtemos:

$$\hat{\beta}(\theta_1) = \frac{b}{d} \log(\theta_1) + \hat{\lambda}(\theta_1) \tag{16}$$

Daí, observa-se que a função log-verossimilhança maximizada para θ_1 na parametrização original $\ell(\theta_1, \hat{\beta}_{\theta_1})$ coincide com a Função Log-Verossimilhança Maximizada na parametrização ortogonal $\ell(\theta_1, \hat{\lambda}_{\theta_1})$, isto é,

$$\ell(\theta_1, \hat{\beta}_{\theta_1}) \doteq \ell(\theta_1, \hat{\lambda}_{\theta_1}) \tag{17}$$

Também, para um λ fixo, diferenciando (15) com respeito a θ_1 e igualando a zero, obtemos:

$$\hat{\theta}_1^* = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{k} A_i \left(\frac{V_i}{V_1}\right)^{\lambda + \frac{b}{d}\log(\theta_1)} \tag{18}$$

Substituindo λ por $\hat{\lambda}$, obtemos:

$$\hat{\theta}_1^* = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{k} A_i \left(\frac{V_i}{V_1}\right)^{\hat{\beta}} \tag{19}$$

onde $\hat{\beta}$ é o Estimador de Máxima Verossimilhança de β, dado pela solução da equação (8b), e notamos que (8a) coincide com (19).

A Matriz de Informação de Fisher para θ_1 e λ é dada por:

$$I(\theta_1,\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{r}{\theta_1^2}\left\{1 - \frac{E^2[\log(\frac{V}{V_1})]}{E[\log^2(\frac{V}{V_1})]}\right\} & 0 \\ 0 & \frac{1}{rE[\log^2(\frac{V}{V_1})]} \end{bmatrix} \tag{20}$$

e os parâmetros θ_1 e λ são ortogonais.

Denotando a variância assintótica de θ_1 na parametrização original por $Var_{ASS}(\theta_1)$ e a variância assintótica para θ_1 na parametrização ortogonal por $Var^1_{ASS}(\theta_1)$, temos que,

$$Var_{ASS}(\theta_1) = Var^1_{ASS}(\theta_1) = \frac{\theta_1^2}{r\{1 - \frac{E^2[\log(\frac{V}{V_1})]}{E[\log^2(\frac{V}{V_1})]}\}} \qquad (21)$$

e um Intervalo de Confiança Assintótico a $100(1-\alpha^*)\%$ para θ_1 na parametrização ortogonal é dado por (12).

4. UM EXEMPLO

Considere os dados gerados usando o modelo de potência (3) para cinco níveis de stress com $\alpha = 500$ e $\beta = 0,8$ que são dados na Tabela 1, determinados por Achcar e Dias (1990).

TABELA 1 - Dados Gerados com $\alpha = 500$ e $\beta = 0,8$.

i	V_i	θ_i	n_i	r_i	OBSERVAÇÕES NÃO CENSURADAS
1	10	79.24	30	5	6, 8, 10, 12, 14
2	20	45.52	30	8	4, 5, 5, 6, 8, 8, 9, 10
3	30	32,90	30	12	2,3,3,5,6,7,7,8,8,9,10,17
4	40	26,14	30	18	3, 3, 4, 5, 6, 6, 8, 9,10, 10,12,12,13,14,14,14,15,24
5	50	21,87	30	22	2, 3, 4, 5, 5, 8, 8, 8, 9,10,12, 13,14,14,15,18,18,18,19,20,20,27

Na Figura 1, do gráfico da função de verossimilhança maximizada para θ_1 na parametrização original e ortogonal, observa-se a coincidência das duas curvaturas.

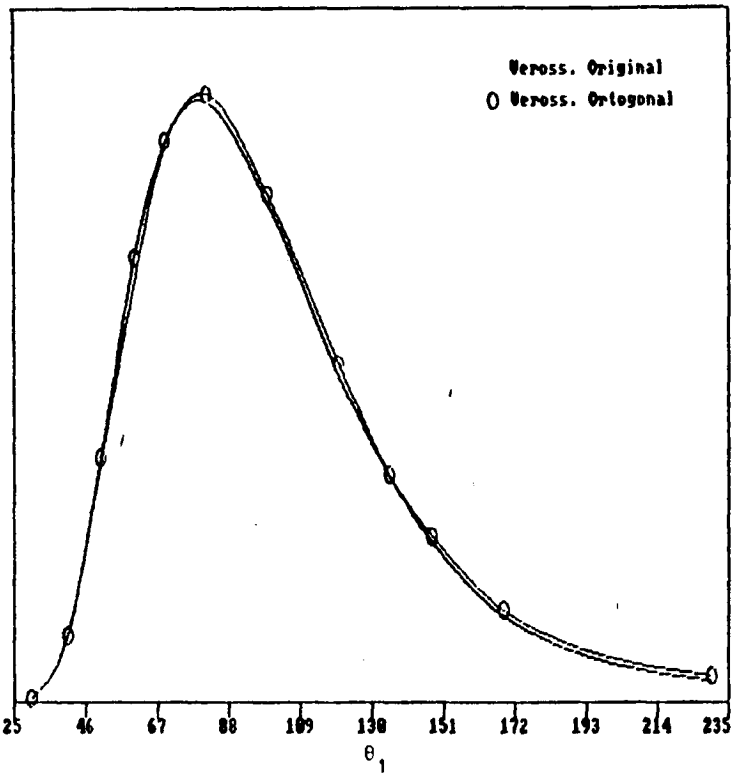

FIGURA 1 - Funções de Verossimilhança Maximizadas para θ_1 nas Parametrizações Original e Ortogonal.

Considerando-se a parametrização original e os Estimadores de Máxima Verossimilhança (8a) e (8b), obtemos: $\hat{\beta}$ = = 0,7994 e $\hat{\theta}_1$ = 79,4228. Usando (12), um Intervalo de Confiança a 90% para θ_1 é dado por: (33,6202; 125,2357). Na pa

rametrização ortogonal, considerando (18) e (19), obtemos o Estimador de Máxima Verossimilhança $\hat{\theta}_1^* = 79,4228$ coincidente com $\hat{\theta}_1$ obtido de (8a) e um Intervalo de Confiança a 90% para θ_1 é exatamente igual ao Intervalo de Confiança a 90% para θ_1 obtido na parametrização original.

O fato é que observando-se a Figura 2, do gráfico dos contornos da Função de Verossimilhança para θ_1 e β - na parametrização original - não se nota uma forma elíptica, implicando que uma aproximação Normal Assintótica para os Estimadores de Máxima Verossimilhança $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\beta}$ não é boa. Já, na Figura 3, dos contornos da Função de Verossimilhança para θ_1 e λ - na parametrização ortogonal - observa-se uma forma, relativamente, mais elíptica, sugerindo uma aproximação Normal Assintótica relativamente melhor. Além disso, a maior influência da Reparametrização Ortogonal (Cox & Reid, 1987) é observada para parâmetro ortogonal e não para θ_1.

De fato, através da Reparametrização Ortogonal (Cox & Reid, 1987) adotada para o parâmetro β, conclui-se que não é preciso a preocupação com a influência do parâmetro β na inferência sobre θ_1, e trabalhar diretamente na parametrização original é uma boa estratégia. Esse tipo de reparametrização se torna interessante quando queremos estudar o comportamento conjunto dos parâmetros uma vez que impõe uma grande mudança na curvatura da Função de Verossimilhança para os parâmetros (ver Figuras 2 e 3).

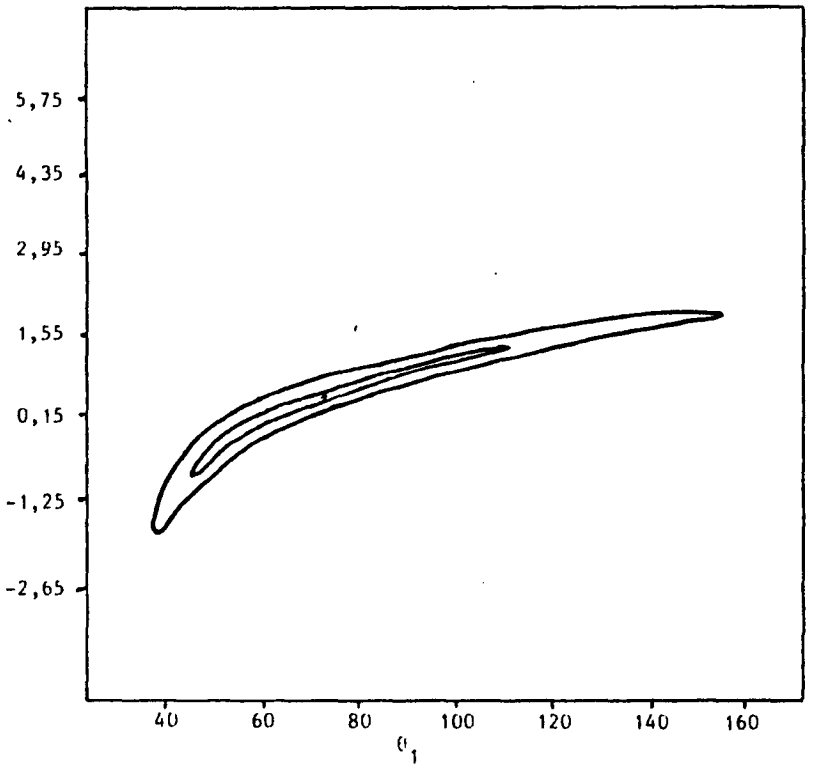

FIGURA 2 - Contornos da Função de Verossimilhança para θ_1 e Γ - na Parametrização Original.

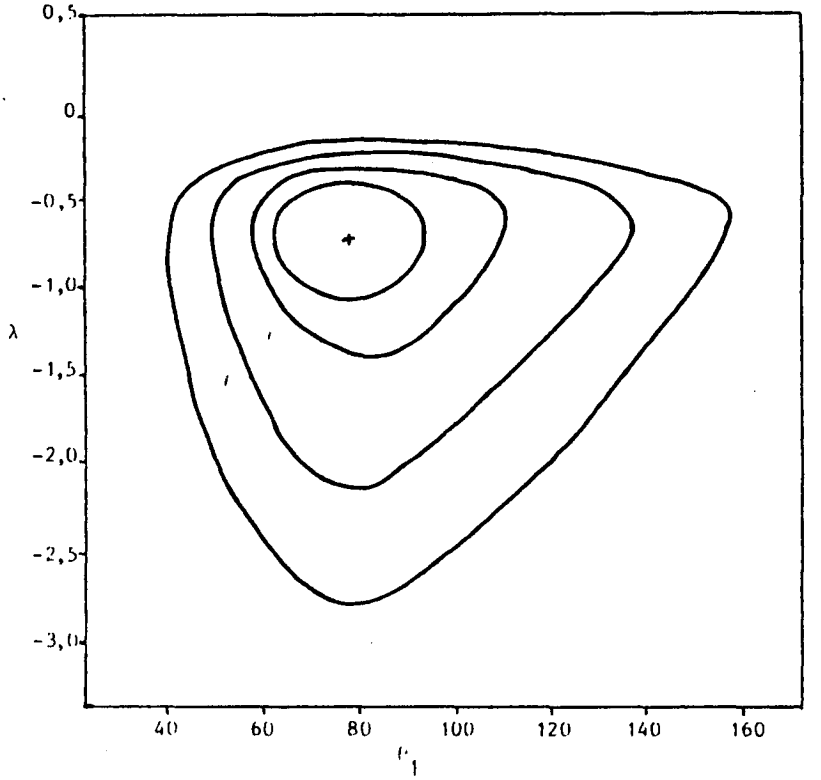

FIGURA 3 - Contornos da Função de Verossimilhança para θ_1 e λ - na Parametrização Ortogonal.

REFERÊNCIAS

. ACHCAR, J.A. e DIAS, T.C.M. (1990). Accelerated Life Tests with an Exponential Distribution: A Bayesian Approach with the Power Rule Model and Type II Censured Data, Notas do ICMSC-USP, nº 67.

. COX, D.R. & REID, N. (1987). Parameter Orthogonality and Approximate Conditional Inference, Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, 49, 1-39.

. LEVENBACH, G.J. (1957). Accelerated Life Testing of Capacitors, IRE Transactions, nº 10, 9-20.

. MANN, N.R.; SHAFFER, R.E. & SINGPURWALLA (1974). Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data, Wiley.