UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
ISSN 0103-2569

ASPECTOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS DA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS 2D

FERNANDO PACANELLI MARTINS
RAFAEL ALVES BONFIM DE QUEIROZ

Nº 312

RELATÓRIOS TÉCNICOS

São Carlos – SP
Dez./2007

Aspectos teóricos e computacionais da simulação numérica de escoamentos incompressíveis 2D

Fernando Pacanelli Martins
Rafael Alves Bonfim de Queiroz

Universidade de São Paulo
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Laboratório de Computação de Alto Desempenho
Av. Trabalhador São-Carlense, 400 - Centro
Caixa Postal: 668 - CEP: 13560-970 - São Carlos - SP
Fone: 55 (16) 3373-9700 - Fax: 55 (16) 3371-2238

e-mail:{fmartins,bonfim}@icmc.usp.br

Resumo. Buscamos, neste trabalho, resolver numericamente as equações que modelam os escoamentos incompressíveis 2D para fluidos newtonianos, desprezando eventuais variações de temperatura, bem como os efeitos dessas variações. Com isso, as equações empregadas passam a ser a da conservação da massa e as da conservação do momento nas direções x e y. Estas podem ser escritas em várias formulações ou acoplamentos, matematicamente equivalentes entre si, sendo que, aqui, dois foram considerados para a geração de resultados numéricos: acoplamento pressão-velocidade e acoplamento corrente-vorticidade. Antes disso, porém, descrevemos o método numérico empregado na resolução do conjunto acoplado de EDPs que fazem parte de cada formulação - desenvolvemos os métodos MAC, em sua versão SOLA, para o acoplamento pressão-velocidade e apresentamos o procedimento geral de solução para o acoplamento corrente-vorticidade. Outro aspecto aqui considerado diz respeito ao conveniente tratamento das condições de fronteira que devem ser utilizadas, dependendo da porção do domínio considerada (fronteiras rígidas, periódicas, de simetria, de entrada de fluido, de saída de fluido e o cuidado especial que deve ser tomado com eventuais "quinas" em fronteiras rígidas), as quais se tornam bem mais fáceis de tratar pela versão SOLA do método MAC. Finalmente, uma vasta quantidade de resultados numéricos para problemas "clássicos" é apresentada.

Palavras-chave. escoamentos incompressíveis 2D, equações Navier-Stokes, método MAC, método SOLA, acoplamento pressão-velocidade, acoplamento corrente-vorticidade, *InnerFlow 2D*, simulação numérica.

Sumário

1 Introdução às equações governantes **4**

2 Formulações para as equações de Navier-Stokes **7**
2.1 Introdução 7
2.2 Acoplamento pressão-velocidade 8
2.3 Acoplamento corrente-vorticidade 10
2.4 Acoplamento vorticidade-velocidade 13

3 Integradores temporais **15**

4 Solução numérica das equações de Navier-Stokes pelo acoplamento pressão-velocidade **20**
4.1 Introdução 20
4.2 O método MAC 21
4.3 Condições de estabilidade para o método MAC 23
4.4 O método SOLA 25
4.5 Equivalência entre os métodos MAC e SOLA 32

5 Tratamento das condições de fronteira **37**

6 Metodologia geral de solução numérica das equações de Navier-Stokes pelo acoplamento corrente-vorticidade **41**

7 Resultados numéricos **43**
7.1 O simulador *InnerFlow 2D* em desenvolvimento 43
7.2 Problema 1: canal 45
7.3 Problema 2: deslizamento da tampa em uma caixa 52
7.3.1 Resultados via solução do método SOLA 52
7.3.2 Resultados via solução do acoplamento corrente-vorticidade 59
7.4 Problema 3: degrau em um tubo 66
7.5 Problema 4: canal com obstáculo 71
7.6 Problema 5: gargalo em um tubo 76

8 Trabalhos futuros **81**

Lista de Figuras

4.1 Indexação das grandezas discretas na malha deslocada. Na ilustração, mostramos a célula $C_{i,j}$, onde, embora todas as grandezas sejam indexadas com o mesmo par ordenado de índices, as propriedades são avaliadas em locais distintos. 21

5.1 Velocidades adjacentes a uma quina, onde as células cinzas fazem parte da parede rígida. Com o intuito de tornar a velocidade nula no ponto da quina, a velocidade adjacente na parede rígida (que deve ser nula) é modificada quando os termos F^n e G^n são, respectivamente, calculados. 40

7.1 Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 1, método SOLA, Re = 100). 46
7.2 Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 1, método SOLA, Re = 100). 47
7.3 Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 1, método SOLA, Re = 500). 48
7.4 Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 1, método SOLA, Re = 500). 49
7.5 Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 1, método SOLA, Re = 1000). 50
7.6 Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 1, método SOLA, Re = 1000). . . . 51
7.7 Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 2, método SOLA, Re = 100). 53
7.8 Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 2, método SOLA, Re = 100). 54
7.9 Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 2, método SOLA, Re = 500). 55
7.10 Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 2, método SOLA, Re = 500). 56
7.11 Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 2, método SOLA, Re = 1000). 57
7.12 Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 2, método SOLA, Re = 1000). . . . 58

7.13 Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a velocidade (Problema 2, acoplamento pressão-velocidade, Re = 100). 60
7.14 Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 2, acoplamento pressão-velocidade, Re = 100). 61
7.15 Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a velocidade (Problema 2, acoplamento pressão-velocidade, Re = 500). 62
7.16 Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 2, acoplamento pressão-velocidade, Re = 500). 63
7.17 Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a velocidade (Problema 2, acoplamento pressão-velocidade, Re = 1000). 64
7.18 Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 2, acoplamento pressão-velocidade, Re = 1000). 65
7.19 Domínio de solução do problema do degrau em um tubo. 66
7.20 Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 3, método SOLA, Re = 100). 67
7.21 Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 3, método SOLA, Re = 100). 68
7.22 Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 3, método SOLA, Re = 500). 69
7.23 Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 3, método SOLA, Re = 500). 70
7.24 Domínio de solução do problema do canal com obstáculo. 71
7.25 Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 4, método SOLA, Re = 100). 72
7.26 Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 4, método SOLA, Re = 100). 73
7.27 Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 4, método SOLA, Re = 500). 74
7.28 Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 4, método SOLA, Re = 500). 75
7.29 Domínio de solução do problema do gargalo em um tubo. 76
7.30 Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 5, método SOLA, Re = 100). 77
7.31 Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 5, método SOLA, Re = 100). 78
7.32 Ilustrações do resultado numérico obtido para a pressão e as linhas de corrente (Problema 5, método SOLA, Re = 500). 79
7.33 Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 5, método SOLA, Re = 500). 80

Capítulo 1

Introdução às equações governantes

As equações que modelam um escoamento bidimensional, sem superfícies livres, viscoso, incompressível (sem variações na densidade no fluido, a qual é uma constante que chamaremos de ρ_0) e tal que eventuais variações de temperaturas possam ser consideradas "pequenas" o suficiente para que alterações na densidade e na viscosidade do fluido possam ser consideradas desprezíveis são dadas, na forma adimensional e conservativa, por

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ u_t + \left(u^2\right)_x + (vu)_y = -p_x + \frac{1}{Fr} g^x + \frac{1}{Re}\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \\ v_t + (uv)_x + \left(v^2\right)_y = -p_y + \frac{1}{Fr} g^y + \frac{1}{Re}\left(v_{xx} + v_{yy}\right) \end{cases} \tag{1.1}$$

onde as grandezas adimensionais $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ e $p = p(x, y, t)$ são, respectivamente, as componentes da velocidade, ao longo das direções x e y, e a pressão sobre o elemento de fluido localizado na posição (x, y) no instante t. Já os termos $g^x = g^x(x, y, t)$, $g^y = g^y(x, y, t)$ devem ser compreendidos como as componentes, ao longo das direções x e y, respectivamente, de uma aceleração adimensional, ocasionada por uma força de campo, que afeta o elemento de fluido localizado na posição (x, y) no instante t.

A primeira equação em (1.1) estabelece a conservação da massa, também sendo chamada de equação da continuidade, enquanto que as duas seguintes são as equações de Navier-Stokes propriamente ditas, simplificadas para o tipo de escoamento que estamos considerando (incompressível e newtoniano), e especificam, respectivamente, a conservação do momento ao longo das direções x e y. Neste trabalho, por simplicidade de comunicação, o conjunto de EDPs dado em (1.1) será chamado, indistintamente, de equações de Navier-Stokes.

O processo de adimensionalização só é possível pela especificação de valores de referência L_0, V_0, ρ_0, t_0, para, respectivamente, o comprimento, a velocidade, a densidade e o tempo. Com isso, as grandezas adimensionais se relacionam com

as grandezas dimensionais associadas (que aqui recebem o índice $*$) da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
x &= \tfrac{x^*}{L_0}, & y &= \tfrac{y^*}{L_0}, \\
u &= \tfrac{u^*}{V_0}, & v &= \tfrac{v^*}{V_0}, \\
t &= \tfrac{t^* V_0}{L_0}, & p &= \tfrac{p^*}{\rho_0 V_0^2}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Observamos, também, que no conjunto de equações adimensionalizadas surgem duas constantes, a serem dadas por

$$Re = \frac{\rho_0 V_0 L_0}{\mu} = \frac{V_0 L_0}{\nu} \tag{1.3}$$

e

$$Fr = \frac{V_0^2}{g L_0}, \tag{1.4}$$

sendo, respectivamente, os números de Reynolds (Re) e Froude (Fr), onde μ é o coeficiente de viscosidade dinâmica ou molecular e ν é o coeficiente de viscosidade cinemática do fluido. Já g faz referência a uma intensidade característica de uma aceleração associada a uma força de campo que atinge o escoamento como um todo[1].

Podemos notar, então, que o número de Reynolds fornece a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas ou difusivas que operam no escoamento, isto é, a razão entre os processos de convecção e de difusão. Assim, quando $Re > 1$, temos um escoamento onde o transporte convectivo é mais intenso que o transporte difusivo, ao passo que, quando $Re < 1$, o processo difusivo é mais intenso que o convectivo. Dessa forma, a magnitude do número de Reynolds indica a importância, para o escoamento, das forças inerciais (associadas aos termos convectivos), quando $Re > 1$, e das forças viscosas (associadas aos termos difusivos), quando $Re < 1$. Aliás, nos casos em que $Re >> 1$, as forças viscosas são importantes apenas na região da camada limite, devido a condição de não deslizamento do fluido junto às superfícies sólidas.

De forma análoga, o número de Froude nos fornece a razão entre as forças inerciais e as forças de campo, sendo útil para caracterizar escoamentos nos quais forças de campo tem papel importante, como, por exemplo, a força gravitacional em um escoamento com superfícies livres.

A importância da forma adimensional das equações reside no conceito de similaridade de escoamentos, isto é, escoamentos em geometrias idênticas, a menos da escala. Assim, com as equações que regem o movimento do fluido sendo escritas na forma adimensional, dado que dois escoamentos ocorrem em geometrias similares, eles possuirão as mesmas constantes adimensionais (no caso, mesmos números de Reynolds e de Froude) que caracterizam o escoamento

[1] Na maioria dos casos, g é considerada como sendo a aceleração da gravidade, e daí a utilização desta letra para especificar a aceleração ocasionada por uma força de campo.

(diferindo, é claro, na especificação dos valores de referência para cada variável). Dessa forma, as respectivas grandezas dimensionais são obtidas multiplicando os valores adimensionais pelos parâmetros de referência dimensionais relevantes, conforme estabelece as relações dadas em (1.2).

Devido a esse fato, muitos resultados de simulações e testes com modelos em escala reduzida são diretamente aplicáveis aos objetos em tamanho real e geometricamente similares, desde que o mesmo tipo de escoamento esteja envolvido e que as constantes adimensionais do escoamento sobre o modelo sejam as mesmas que a do escoamento sobre o objeto real. Com isso, os escoamentos passam a ser caracterizados pelos valores das constantes adimensionais ao invés de parâmetros específicos de cada problema.

Apenas para ilustrar o poder do processo de adimensionalização, desde que as constantes adimensionais sejam as mesmas, faz-se possível simular o escoamento de água ao redor de um submarino utilizando um túnel de vento (isso é viável desde que baixas velocidades estejam envolvidas, de forma que o escoamento de ar em torno do modelo do submarino colocado no túnel de vento também possa ser considerado incompressível, como a água).

Capítulo 2

Formulações para as equações de Navier-Stokes

2.1 Introdução

Analisando o conjunto de EDPs dado em (1.1) do ponto de vista físico, podemos classificar seus termos da seguinte maneira, onde empregamos a forma não conservativa[1]:

$$\begin{cases} \underbrace{u_t}_{termo\ transiente} + \underbrace{uu_x + vu_y}_{termo\ convectivo} = - \underbrace{p_x}_{gradiente\ pressão} + \frac{1}{Fr} \underbrace{g^x}_{aceleração\ de\ campo} + \\ \cdots + \frac{1}{Re} \underbrace{(u_{xx} + u_{yy})}_{termo\ viscoso} \\ \\ \underbrace{v_t}_{termo\ transiente} + \underbrace{uv_x + vv_y}_{termo\ convectivo} = - \underbrace{p_y}_{gradiente\ pressão} + \frac{1}{Fr} \underbrace{g^y}_{aceleração\ de\ campo} + \\ \cdots + \frac{1}{Re} \underbrace{(v_{xx} + v_{yy})}_{termo\ viscoso} \\ \\ \underbrace{u_x + v_y}_{divergente\ ou\ dilatação} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Matematicamente, temos a existência de três equações relacionando o comportamento de três funções incógnitas que marcham com o tempo: $u = u(x, y, t)$,

[1] Uma vez exigida a necessidade da solução satisfazer a conservação da massa, podemos passar facilmente da forma conservativa para a forma não-conservativa das equações de Navier-Stokes, bastando expandir as derivadas presentes no termo convectivo das equações de conservação do momento. Obviamente, o procedimento contrário também é imediato.

$v = v(x, y, t)$ e $p = p(x, y, t)$. As duas equações associadas à conservação do momento podem, então, ser empregadas para integrarmos no tempo cada uma das componentes da velocidade, devido a presença de um termo transiente associado a elas. No entanto, de imediato, tais equações não indicam como a pressão varia no tempo, restando também a equação da conservação da massa, que deve ser satisfeita.

Assim, embora tenhamos três funções incógnitas em um conjunto de três equações, não está explícito em (2.1) como podemos montar um esquema numérico que marche no tempo e seja capaz de aproximar as três funções desconhecidas, já que não conseguimos enxergar um modo de satisfazer a equação de conservação da massa e muito menos uma maneira de aproveitar essa equação para alguma coisa. Desse modo, faz-se necessário rescrever as equações de Navier-Stokes de uma maneira mais conveniente à implantação de um método numérico. A esta maneira de rescrever tais equações e/ou encontrar relações adicionais implicitas a esse conjunto de EDPs damos o nome de formulação.

No que segue, apresentamos três formulações que nos fornecem alternativas para a resolução do impasse acima explanado.

2.2 Acoplamento pressão-velocidade

Uma primeira formulação, bastante direta, que será chamada de *acoplamento pressão-velocidade*, tenta encontrar uma relação adicional a partir das equações (1.1) que seja capaz de nos informar a ligação existente entre a conservação da massa, o campo de pressão a ser estabelecido e as equações de conservação do momento. Com isso, esperamos encontrar o campo de pressões que, calculado a cada instante de tempo, permita às componentes da velocidade, atualizadas a partir da respectiva equação de conservação do momento, satisfazer a equação da continuidade.

Assim, calculando a derivada parcial com relação a x em ambos os membros da equação relativa à conservação do momento ao longo da direção x, obtemos

$$(u_t)_x + \left(u^2\right)_{xx} + (vu)_{yx} = -p_{xx} + \frac{1}{Fr}\left(g^x\right)_x + \frac{1}{Re}\left(u_{xx} + u_{yy}\right)_x, \tag{2.2}$$

ou, equivalentemente,

$$(u_x)_t + \left(u^2\right)_{xx} + (uv)_{xy} = -p_{xx} + \frac{1}{Fr}\left(g^x\right)_x + \frac{1}{Re}\left(u_{xx} + u_{yy}\right)_x. \tag{2.3}$$

Do mesmo modo, calculando a derivada parcial com relação a y em ambos os membros da equação relativa à conservação do momento ao longo da direção y, segue que

$$(v_t)_y + (uv)_{xy} + \left(v^2\right)_{yy} = -p_{yy} + \frac{1}{Fr}\left(g^y\right)_y + \frac{1}{Re}\left(v_{xx} + v_{yy}\right)_y, \tag{2.4}$$

ou, equivalentemente,

$$(v_y)_t + (uv)_{xy} + \left(v^2\right)_{yy} = -p_{yy} + \frac{1}{Fr}\left(g^y\right)_y + \frac{1}{Re}\left(v_{xx} + v_{yy}\right)_y. \tag{2.5}$$

Logo, somando as equações (2.3) e (2.5), conseguimos

$$
\begin{aligned}
&(u_x + v_y)_t + \left(u^2\right)_{xx} + \left(v^2\right)_{yy} + 2\,(uv)_{xy} = \\
&= -\left(p_{xx} + p_{yy}\right) + \frac{1}{Fr}\left[(g^x)_x + (g^y)_y\right] + \frac{1}{Re}\left[(u_{xx} + u_{yy})_x + (v_{xx} + v_{yy})_y\right].
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Mas, observe que

$$
(u_{xx} + u_{yy})_x + (v_{xx} + v_{yy})_y = D_{xx} + D_{yy}, \tag{2.7}
$$

onde

$$
D = u_x + u_y \tag{2.8}
$$

é a dilatação ou divergente, conforme já havíamos especificado.

Assim, a equação (2.6) pode ser rescrita de forma a evidenciar uma equação de Poisson para a pressão, a ser dada por

$$
p_{xx} + p_{yy} = T(x, y), \tag{2.9}
$$

onde

$$
T(x,y) = -\left[\left(u^2\right)_{xx} + \left(v^2\right)_{yy} + 2\,(uv)_{xy}\right] + \frac{1}{Fr}\left[(g^x)_x + (g^y)_y\right] + \frac{1}{Re}\left[D_{xx} + D_{yy}\right]. \tag{2.10}
$$

Repare que, na obtenção da equação de Poisson para a pressão, o termo envolvendo a derivada temporal na equação (2.6) foi desprezado por corresponder ao primeiro membro da equação da continuidade, sendo, portanto, nulo. Por outro lado, o termo que é multiplicado pelo inverso do número de Reynolds também envolve a dilatação, e, pela conservação da massa, é *exatamente* nulo. Apesar disso, esse segundo termo foi mantido, ao passo que o primeiro foi eliminado, restando a pergunta de: por que esse tratamento diferenciado?

Inicialmente, a exclusão do termo envolvendo a derivada temporal na equação (2.6) ocorre, justamente, para que se possa aproveitar a equação da continuidade de alguma maneira, já que ela relaciona dois termos que, conforme foi inicialmente apontado, não são problemáticos, uma vez que sabemos a variação temporal das componentes da velocidade a partir das equações de conservação do momento. A incógnita problemática era justamente a pressão e, a fim de resolver esse impasse, já foi dito que o objetivo nesta formulação era utilizar a equação da continuidade para a obtenção de uma equação que nos fornecesse um campo de pressão conveniente, a partir do qual as componentes da velocidade, atualizadas pela respectivas equações de conservação do momento, satisfizessem a conservação da massa. Portanto, foi exatamente isso que fizemos e conseguimos, resultando em (2.9).

Quanto ao termo multiplicado pelo inverso do número de Reynolds no termo fonte da equação (2.9), ele também é exatamente nulo, sendo por este motivo que ele é preservado, e não cancelado! Perceba bem, estamos dizendo que ele é exatamente nulo, porém, quando da solução numérica, a dilatação real de cada

célula na malha nunca será nula, devido a presença de erros de arredondamento. Tais erros de arredondamento originam fontes e sorvedouros de massa dentro da região de escoamento, e uma eventual eliminação do termo em questão faria com que tais efeitos não fossem vistos pelo processo numérico, de forma que, eventualmente, poderíamos destruir a solução numérica do escoamento.

Em outras palavras, a manutenção da expressão

$$\frac{1}{Re}\left[D_{xx} + D_{yy}\right] \tag{2.11}$$

no termo fonte da equação de Poisson faz com sejam levados em conta, no seu processo de solução numérica, os erros introduzidos no cálculo do campo de velocidades, devido à própria solução numérica da equação de Poisson em níveis de tempo anteriores. Como esses erros fazem com que, $D \neq 0$, ambos os termos na parcela do termo fonte considerada serão, em geral, não nulos, e contribuem para estabilizar o cálculo da solução numérica.

Portanto, para escoamentos incompressíveis, a obtenção do campo de pressão se dá a partir da equação (2.9), sendo tal que permite calcular um campo de velocidades que satisfaz, simultaneamente, as equações de conservação da massa e de conservação do momento, dentro dos limites dos erros de discretização das equações e de arredondamentos nos cálculos.

Finalmente, ressaltamos que o grande inconveniente dessa formulação acaba sendo a necessidade de se resolver uma equação de Poisson para estabelecer o campo de pressões do escoamento em um dado instante de tempo. Numericamente, isto se torna com muita folga a etapa mais cara do processo computacional que visa resolver as equações de Navier-Stokes[2]. A extensão para o caso 3D é análoga, sendo esta a formulação menos cara quando se trata de problemas tridimensionais.

2.3 Acoplamento corrente-vorticidade

Uma outra formulação possível às equações (2.1) é obtida pela introdução das funções de corrente $\psi = \psi(x, y, t)$ e de vorticidade $\omega = \omega(x, y, t)$, que devem satisfazer, respectivamente

$$\begin{cases} u = \psi_y \\ v = -\psi_x \end{cases} \tag{2.12}$$

e

$$\omega = u_y - v_x. \tag{2.13}$$

Note que as linhas de ψ constante, no domínio da solução, são linhas de corrente, paralelas ao escoamento. Com isso, não deve haver escoamento de fluido ou fluxo entre tais linhas, ou seja, uma partícula de fluido localizada sobre uma determinada linha de corrente deve permanecer nessa mesma linha de corrente durante todo o escoamento. Por outro lado, a vorticidade está

[2]Conforme ficará claro, nenhuma das formulações aqui apresentadas será capaz de se livrar do inconveniente de exigir a solução de, pelo menos, uma equação de Poisson.

associada ao movimento rotacional do fluido, sendo uma medida da rotação do fluido em torno de um dado ponto.

Para escrevermos as equações (2.1) nessa formulação, repare que, derivando a equação de conservação do momento ao longo da direção x com relação a y, obtemos

$$(u_t)_y + u_y u_x + u u_{xy} + v_y u_y + v u_{yy} = -p_{xy} + \frac{1}{Fr}(g^x)_y + \frac{1}{Re}(u_{xx} + u_{yy})_y\,, \quad (2.14)$$

ou melhor,

$$(u_y)_t + u_y u_x + u u_{xy} + v_y u_y + v u_{yy} = -p_{xy} + \frac{1}{Fr}(g^x)_y + \frac{1}{Re}(u_{xx} + u_{yy})_y\,. \quad (2.15)$$

Do mesmo modo, derivando a equação de conservação do momento ao longo da direção y com relação a x, obtemos

$$(v_t)_x + u_x v_x + u v_{xx} + v_x v_y + v v_{yx} = -p_{yx} + \frac{1}{Fr}(g^y)_x + \frac{1}{Re}(v_{xx} + v_{yy})_x \quad (2.16)$$

ou melhor

$$(v_x)_t + v_x u_x + u v_{xx} + v_x v_y + v v_{yx} = -p_{xy} + \frac{1}{Fr}(g^y)_x + \frac{1}{Re}(v_{xx} + v_{yy})_x\,. \quad (2.17)$$

Com isso, subtraindo a equação (2.3) da equação (2.5), segue que

$$\begin{aligned}(u_y - v_x)_t + (u_y - v_x)\,u_x + (u_y - v_x)\,v_y + u\,(u_y - v_x)_x + v\,(u_y - v_x)_y = \\ = \frac{1}{Fr}\left[(g^x)_y - (g^y)_x\right] + \frac{1}{Re}\left[(u_y - v_x)_{xx} + (u_y - v_x)_{yy}\right], \quad (2.18)\end{aligned}$$

mas, pela equação da continuidade,

$$(u_y - v_x)\,u_x + (u_y - v_x)\,v_y = \omega u_x + \omega v_y = \omega\,(u_x + v_y) = 0, \quad (2.19)$$

e lembrando a definição da função de vorticidade (2.13), obtemos

$$\omega_t + u\omega_x + v\omega_y = \frac{1}{Fr}\left[(g^x)_y - (g^y)_x\right] + \frac{1}{Re}(\omega_{xx} + \omega_{yy})\,, \quad (2.20)$$

que é uma equação para o transporte da vorticidade[3].

Por outro lado, substituindo as duas relações que definem a função de corrente em (2.12) na definição da função de vorticidade (2.13), notamos que devemos ter

$$\omega = u_y - v_x = (\psi_y)_y - (-\psi_x)_x\,, \quad (2.21)$$

isto é,

$$\psi_{yy} + \psi_{xx} = \omega, \quad (2.22)$$

[3]Repare que, a menos do termo fonte adicional presente em (2.20), relacionado às forças de campo que agem sobre o escoamento, esta nada mais é que uma equação de convecção-difusão para a vorticidade.

que é uma equação de Poisson para a função de corrente, a qual tem como termo fonte a função de vorticidade.

Perceba que, da forma como foi definida a função de corrente, a conservação da massa estará sempre garantida pelo campo de velocidades, pois,

$$u_x + u_y = (\psi_y)_x + (-\psi_x)_y = \psi_{xy} - \psi_{xy} = 0. \tag{2.23}$$

Portanto, conseguimos rescrever as equações de Navier-Stokes (2.1), pela introdução das funções de corrente e de vorticidade, através das seguintes relações interdependentes,

$$\begin{cases} u = \psi_y \\ v = -\psi_x \\ \omega = u_y - v_x \\ \omega_t + u\omega_x + v\omega_y = \frac{1}{Fr}\left[(g^x)_y - (g^y)_x\right] + \frac{1}{Re}\left(\omega_{xx} + \omega_{yy}\right) \\ \psi_{yy} + \psi_{xx} = \omega, \end{cases} \tag{2.24}$$

as quais, do ponto de vista numérico, são as mais atraentes possíveis, pelo menos para o caso 2D[4], pois:

- dispensam qualquer tipo de tratamento especial para a pressão, que pôde ser eliminada das equações representativas do acoplamento;
- a equação da continuidade fica sempre automaticamente garantida;
- a equação de Poisson para a função de corrente em (2.24) é bem mais simples que a equação de Poisson para a pressão obtida no acoplamento pressão-velocidade;
- a equação do transporte de vorticidade, juntamente com as demais equações que permitem a obtenção do campo de velocidade em (2.24), são, do ponto de vista estrutural, bem mais simples que as equações de conservação do momento, utilizadas para a atualização do campo de velocidade no acoplamento pressão-velocidade.

Apesar dessas vantagens, o fato da distribuição de pressão não ser calculado nessa formulação não pode ser considerado uma vantagem absoluta, pois, o conhecimento de tal variável pode ser necessário em determinadas aplicações. Neste caso, ainda a partir desta formulação, o cálculo da pressão pode ser feito adicionando a esse acoplamento a equação de Poisson para a pressão obtida em (2.9).

[4] O custo computacional da extensão dessa formulação para problemas tridimensionais não é competitivo perante o acoplamento pressão-velocidade. No acoplamento corrente-vorticidade para problemas 3D, em vez de uma função escalar ψ passamos a ter um vetor potencial Ψ que possui três componentes. Da mesma forma, a função de vorticidade também deixa de ser escalar, de forma que passamos a lidar com ω^x, ω^y, ω^z, que nos dão uma medida da rotação do fluido, respectivamente, ao longo dos planos de x, y, z constantes. Portanto, a extensão do acoplamento corrente-vorticidade para o caso 3D passa a exigir a solução numérica de três equações de Poisson e de três equações de convecção-difusão a cada instante de tempo (além, é claro, de algumas EDPs adicionais que permitem a atualização do campo de velocidade), o que se torna bastante caro em termos computacionais.

2.4 Acoplamento vorticidade-velocidade

Uma terceira forma de escrever as equações (2.1) é utilizando somente as variáveis vorticidade e velocidade, originando o que aqui chamamos de *acoplamento vorticidade-velocidade*.

Nesta técnica, voltamos a empregar a equação para o transporte da vorticidade, dada em (2.20). Além dessa equação, duas equações de Poisson, uma para cada componente da velocidade são estabelecidas.

Com efeito, derivando parcialmente a definição de função de vorticidade, dada em (2.13), com relação a x, obtemos

$$\omega_x = (u_y)_x - (v_x)_x \,, \tag{2.25}$$

ou melhor,

$$\omega_x = (u_x)_y - v_{xx} \tag{2.26}$$

a partir de onde, lembrando que a equação da continuidade especifica

$$u_x = -v_y, \tag{2.27}$$

alcançamos

$$v_{xx} + v_{yy} = -\omega_x. \tag{2.28}$$

De forma análoga, derivando parcialmente a definição de função de vorticidade, dada em (2.13), agora com relação a y , obtemos

$$\omega_y = (u_y)_y - (v_x)_y \,, \tag{2.29}$$

ou melhor,

$$\omega_y = u_{yy} - (v_y)_x \,. \tag{2.30}$$

Novamente, recorrendo à equação da continuidade, encontramos

$$u_{xx} + u_{yy} = \omega_y. \tag{2.31}$$

Portanto, o conjunto de EDPs que compõem o acoplamento vorticidade-velocidade é dado por

$$\begin{cases} \omega_t + u\omega_x + v\omega_y = \frac{1}{Fr}\left[(g^x)_y - (g^y)_x\right] + \frac{1}{Re}\left(\omega_{xx} + \omega_{yy}\right) \\ v_{xx} + v_{xx} = -\omega_x \\ u_{xx} + u_{yy} = \omega_y, \end{cases} \tag{2.32}$$

onde, mais uma vez, conseguimos eliminar o tratamento especial que devia ser dado à pressão, já que eliminamos tal função da formulação. Tal formulação nos indica como a função de vorticidade avança no tempo, para, a seguir, reger um campo de velocidade que satisfaz uma configuração de equilíbrio, expressa nas equações de Poisson, o qual deve ser coerente com a vorticidade naquele instante de tempo.

Certamente, das três formulações aqui abordadas para as equações de Navier-Stokes, esta é a que requer um tratamento numérico mais simples, pois, exige a

solução de, apenas, equações clássicas (para as quais existe uma ampla variedade de métodos numéricos) e envolve um número mínimo de variáveis, compatível com o número de equações disponível. Porém, a solução numérica de duas equações de Poisson é algo que possui um custo computacional relevante[5]. Por tais motivos, as equações que compõem essa formulação não serão utilizadas para a obtenção de resultados numéricos neste trabalho.

[5]Resolver uma equação de Poisson a cada instante de tempo, para determinar uma configuração de equilíbrio para uma váriavel já é caro. Sendo assim, o que dizer então da necessidade de resolver duas equações desse tipo, conforme propõem esta formulação?

Capítulo 3

Integradores temporais

Quando estamos interessados apenas no *estado estacionário*[1] que um escoamento deve alcançar, isto é, no campo de velocidade e distribuição de pressão estacionada, a utilização de uma aproximação de primeira ordem para o termo transiente é suficiente para o objetivo almejado.

Por outro lado, se queremos determinar o instante em que a solução numérica atinge o estado estacionário[2] ou analisar o desenvolvimento temporal de um dado escoamento, pode ser necessário investir em melhores aproximações numéricas para o termo transiente da EDP.

Conforme já deve ser de conhecimento do leitor, cada um dos termos presentes em uma EDP exige discretizações especiais, próprias a ele, as quais são influenciadas pela função que desempenham no processo físico real. Este tratamento distinto a cada termo é uma condição necessária para que a solução numérica calculada possa fazer uma boa "mímica" da solução fisicamente relevante ao problema que esta sendo resolvido.

Assim, para o termo transiente de uma EDP esta realidade não poderia ser diferente. Desse modo, considere uma EDP, com função incógnita $\xi = \xi(x, y, t)$, sendo escrita de forma a enfatizar a evolução da solução com o tempo, ou seja

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = f(x, y, t, \xi), \tag{3.1}$$

onde a função $f = f(x, y, t, \xi)$ deve abranger todos os demais termos da EDP[3].

[1] Definimos como o estado estacionário da solução numérica de uma EDP à configuração de solução que ocorre a partir de um determinado instante de tempo, a partir do qual a variação temporal da solução pode ser considerada desprezível. Ressaltamos que não é toda EDP que apresenta um estado estacionário para sua solução. Em muitos casos, a solução pode apresentar um comportamento periódico, que se repete indefinidamente após um dado intervalo de tempo.

[2] Do ponto de vista numérico, o estado estacionário para a solução de uma EDP (que modela um problema cuja solução física admite um estado estacionário) pode não existir, devido aos erros de arredondamento oriundos da aritmética computacional finita. Assim, dizemos que o estado estacionário da solução numérica de uma EDP foi atingido quando as variações dessa solução com o passar do tempo for menor que uma dada tolerância especificada.

[3] Note que $\xi = \xi\,(x, y, t)$ pode perfeitamente ser uma função que assume valores vetoriais,

Sabe-se, pela ocorrência de diversos casos clássicos na literatura, que aplicar as mesmas técnicas de aproximação usadas para derivadas espaciais no termo transiente nem sempre resulta em métodos convergentes, e, quando resulta, isto se dá invariavelmente pela alteração da discretização dos demais termos da EDP, originando estratégias de discretização específicas demais para serem generalizadas a equações semelhantes de mesmo caráter.

Assim, supondo que já tenhamos escolhido uma forma de discretização para os termos da EDP englobados pela função $f = f(x, y, t, \xi)$, nosso intuito aqui é escolher uma discretização adequada ao termo transiente que tenha grande chance de funcionar independentemente da discretização escolhida para os termos que compõem $f = f(x, y, t, \xi)$. Esta, obviamente, não é uma tarefa simples para ser realizada, e, muito menos, fácil, de forma que qualquer escolha tomada possa ser justificada previamente (antes de exibir resultados adequados) por completo.

A experiência mostra, porém, que o melhor modo de "ler" a equação (3.1) se dá imaginando que a solução $\xi = \xi(x, y, t)$ em um dado instante de tempo avança para um instante de tempo seguinte apenas pela atuação da variável temporal, o que constitui uma hipótese bastante plausível! Isto, de certa forma equivale tratar (3.1) como se x e y fossem apenas parâmetros para ξ, a qual avança no tempo sendo considerada apenas uma função do próprio tempo (ou seja, é como se tivéssemos $\xi = \xi(t)$). Em outras palavras, isto significa "enxergar uma EDO" em (3.1).

Com isso, temos agora "argumentos físicos" para generalizar métodos utilizados na solução numérica de EDOs para a integração do termo transiente de uma EDP. Assim, dispondo de uma aproximação $F = F(t, \xi)$ para $f = f(t, \xi)$ sobre o domínio espacial[4], resta apresentarmos alternativas para a integração numérica de (3.1). Com esse intuito, podemos empregar as seguintes técnicas:

Euler Explícito de ordem 1 (EE) :

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n + (\Delta t)\, F\left(t_n, \xi_i^n\right). \tag{3.2}$$

Euler Implícito de ordem 1 (EI) :

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n + (\Delta t)\, F\left(t_{n+1}, \xi_i^{n+1}\right). \tag{3.3}$$

Runge - Kutta de ordem 2 (RK 2) :

$$\begin{cases} \xi_i^{n+\frac{1}{2}} = \xi_i^n + \frac{(\Delta t)}{2} F\left(t_n, \xi_i^n\right), \\ \xi_i^{n+1} = \xi_i^n + (\Delta t)\, F\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \xi_i^{n+\frac{1}{2}}\right). \end{cases} \tag{3.4}$$

caso em que, ao invés de uma única EDP passaríamos a ter um sistema de EDPs acopladas.

[4]Note que, para enfatizar a atuação do tempo na integração do termo transiente, omitimos as variáveis independentes de natureza espacial nas funções $F = F(t, \xi)$ e $f = f(t, \xi)$, ficando subentendido que tais funções atuam em cada um dos pontos do domínio espacial.

Runge - Kutta de ordem 4 (RK 4) :

$$\begin{cases} \xi_i^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^*} = \xi_i^n + \frac{(\Delta t)}{2} k_1, \ k_1 = F\left(t_n, \xi_i^n\right), \\ \xi_i^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{**}} = \xi_i^n + \frac{(\Delta t)}{2} k_2, \ k_2 = F\left(t_{\left(n+\frac{1}{2}\right)^*}, \xi_i^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^*}\right), \\ \xi_i^{(n+1)^*} = \xi_i^n + (\Delta t) k_3, \ k_3 = F\left(t_{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{**}}, \xi_i^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{**}}\right), \\ \xi_i^{(n+1)^*} = \xi_i^n + \frac{(\Delta t)}{6}\left[k_1 + 2\left(k_2 + k_3\right) + k_4\right], \ k_4 = F\left(t_{(n+1)^*}, \xi_i^{(n+1)^*}\right). \end{cases} \tag{3.5}$$

Adams - Bashforth de 2 passos (AB 2) :

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n + \frac{(\Delta t)}{2}\left[3F\left(t_n, \xi_i^n\right) - F\left(t_{n-1}, \xi_i^{n-1}\right)\right]. \tag{3.6}$$

Adams - Bashforth de 3 passos (AB 3) :

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n + \frac{(\Delta t)}{12}\left[23F\left(t_n, \xi_i^n\right) - 16F\left(t_{n-1}, \xi_i^{n-1}\right) + 5F\left(t_{n-2}, \xi_i^{n-2}\right)\right]. \tag{3.7}$$

Adams - Bashforth de 4 passos (AB 4) :

$$\begin{aligned} \xi_i^{n+1} &= \xi_i^n + \frac{(\Delta t)}{24}\left[55F\left(t_n, \xi_i^n\right) - 59F\left(t_{n-1}, \xi_i^{n-1}\right) + 37F\left(t_{n-2}, \xi_i^{n-2}\right) - \cdots \right. \\ \cdots &\left. - 9F\left(t_{n-3}, \xi_i^{n-3}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Adams - Bashforth de 5 passos (AB 5) :

$$\begin{aligned} \xi_i^{n+1} = \xi_i^n + \frac{(\Delta t)}{720}\left[1901F\left(t_n, \xi_i^n\right) - 2774F\left(t_{n-1}, \xi_i^{n-1}\right)\right] + \cdots \\ \cdots + \frac{(\Delta t)}{720}\left[2616F\left(t_{n-2}, \xi_i^{n-2}\right) - 1274F\left(t_{n-3}, \xi_i^{n-3}\right) + 251F\left(t_{n-4}, \xi_i^{n-4}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Adams - Moulton de 2 passos (AM 2) :

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n + \frac{(\Delta t)}{12}\left[5F\left(t_{n+1}, \xi_i^{n+1}\right) + 8F\left(t_n, \xi_i^n\right) - F\left(t_{n-1}, \xi_i^{n-1}\right)\right]. \tag{3.10}$$

Adams - Moulton de 3 passos (AM 3) :

$$\begin{aligned} \xi_i^{n+1} &= \xi_i^n + \frac{(\Delta t)}{24}\left[9F\left(t_{n+1}, \xi_i^{n+1}\right) + 19F\left(t_n, \xi_i^n\right) - 5F\left(t_{n-1}, \xi_i^{n-1}\right) + \cdots \right. \\ \cdots &\left. + F\left(t_{n-2}, \xi_i^{n-2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Adams - Moulton de 4 passos (AM 4) :

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n + \frac{(\Delta t)}{720}[251F\left(t_{n+1}, \xi_i^{n+1}\right)] + \frac{(\Delta t)}{720}\left[646F\left(t_n, \xi_i^n\right) - \cdots\right.$$
$$\left.\cdots - 264F\left(t_{n-1}, \xi_i^{n-1}\right) + 106F\left(t_{n-2}, \xi_i^{n-2}\right) - 19F\left(t_{n-3}, \xi_i^{n-3}\right)\right]. \quad (3.12)$$

Previsor - Corretor de ordem 3 (PC 3) :

$$\begin{cases} \xi_i^{(n+1)^*} = \xi_i^n + \frac{(\Delta t)}{12}\left[23F\left(t_n, \xi_i^n\right) - 16F\left(t_{n-1}, \xi_i^{n-1}\right) + 5F\left(t_{n-2}, \xi_i^{n-2}\right)\right], \\ \xi_i^{n+1} = \xi_i^n + \frac{(\Delta t)}{12}\left[5F\left(t_{(n+1)^*}, \xi_i^{(n+1)^*}\right) + 8F\left(t_n, \xi_i^n\right) - F\left(t_{n-1}, \xi_i^{n-1}\right)\right]. \end{cases} \quad (3.13)$$

Previsor - Corretor de ordem 4 (PC 4) :

$$\begin{cases} \xi_i^{(n+1)^*} = \xi_i^n + \frac{(\Delta t)}{720}\left[1901F\left(t_n, \xi_i^n\right) - 2774F\left(t_{n-1}, \xi_i^{n-1}\right)\right] + \cdots \\ + \frac{(\Delta t)}{720}\left[2616F\left(t_{n-2}, \xi_i^{n-2}\right) - 1274F\left(t_{n-3}, \xi_i^{n-3}\right) + 251F\left(t_{n-4}, \xi_i^{n-4}\right)\right] \\ \xi_i^{n+1} = \xi_i^n + \frac{(\Delta t)}{24}\left[9F\left(t_{(n+1)^*}, \xi_i^{(n+1)^*}\right) + 19F\left(t_n, \xi_i^n\right) \cdots - \right. \\ \left. \cdots - 5F\left(t_{n-1}, \xi_i^{n-1}\right) + F\left(t_{n-2}, \xi_i^{n-2}\right)\right]. \end{cases} \quad (3.14)$$

Lembramos que, no caso de métodos de mais de um nível, as condições de partida devem ser calculadas por métodos que exijam menos níveis que o método inicialmente desejado, e isso com uma precisão coerente. Simplesmente utilizar um método de baixa precisão para obter valores de partida para um de maior precisão, certamente, fornecerá a este útimo dados imprecisos, que diminuirão, assim, seu desempenho[5]. Dessa forma, temos, basicamente, as seguintes possibilidades para a obtenção dos valores de partida:

- tomar estes valores a partir da solução exata: embora fosse o ideal a nível de precisão, nem sempre ela está disponível (se estivesse, não seria necessário utilizar um esquema numérico para aproximá-la);
- utilizar um método de ordem mais alta e de apenas um nível: é uma possibilidade concreta em várias ocasiões, mas, a medida que aumentamos a ordem da aproximação, o número de níveis utilizados também costuma aumentar, tornando tal alternativa inviável em alguns casos;
- utilizar um método de nível único com ordem mais baixa, mas, com um passo temporal reduzido: certamente, é essa a opção mais viável para um caso geral, com a redução no passo temporal sendo indicada pela discrepância de precisão entre o esquema utilizado para calcular os valores de partida e o esquema empregado para utilizar tais valores.

[5]Em outras palavras, condições de partida pouco precisas acabarão propagando erros que tornarão inútil a alta precisão do esquema adotado: não adianta empregar um esquema de alta ordem com mais de um nível se as condições de partida utilizadas não forem suficientemente precisas!

Por fim, lembramos que a aplicação das estratégias de discretização do termo transiente aqui apresentadas, obviamente, exige uma análise mais profunda sobre questões como a consistência e a estabilidade do método numérico resultante, a qual só pode ser realizada no momento em que a aproximação $F = F(t, \xi)$ para $f = f(t, \xi)$ é especificada (ou seja, quando especificamos a discretização dos demais termos da EDP).

Capítulo 4

Solução numérica das equações de Navier-Stokes pelo acoplamento pressão-velocidade

4.1 Introdução

Além do artifício algébrico empregado para a obtenção de uma equação de Poisson para a pressão (a qual nos fornece a distribuição de pressão sobre o domínio espacial que determina o cálculo de um campo de velocidade, a partir das equações de conservação do momento, que satisfaz a equação da continuidade), alguns outros "malabarismos" se fazem necessários para a obtenção de um método numérico que resolva as equações de Navier-Stokes por essa formulação.

Tais "malabarismos" dizem respeito, em especial, à malha que deve ser empregada no processo de solução numérica. Para evitar que a discretização das equações diferenciais envolvidas nessa formulação crie um conjunto de equações a diferenças desacopladas entre si, bem como evitar a utilização de métodos de primeira ordem para a aproximação da pressão, faz-se imprescindível a utilização do conceito de malha deslocada, na qual grandezas distintas são avaliadas em posições diferentes da célula computacional[4].

Assim, dada uma célula da malha, as velocidades são avaliadas nas respectivas faces normais, ao passo que a pressão é avaliada sempre no centro da célula, conforme ilustra a Figura 4.1.

Recomendamos fortemente ao leitor que se familiarize bem com esse tipo de célula antes de seguir para o estudo dos métodos numéricos que trabalham com essa malha, os quais serão apresentados a seguir. Um bom exercício pode ser encontrar a indexação das grandezas nas demais faces da célula $C_{i,j}$, bem como

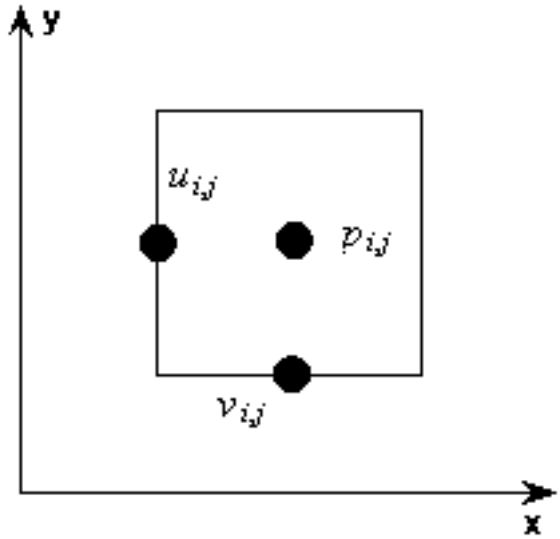


Figura 4.1: Indexação das grandezas discretas na malha deslocada. Na ilustração, mostramos a célula $C_{i,j}$, onde, embora todas as grandezas sejam indexadas com o mesmo par ordenado de índices, as propriedades são avaliadas em locais distintos.

nas células adjacentes, onde observamos que as células adjacentes à célula $C_{i,j}$ pelas faces norte, oeste, sul e leste são, respectivamente, $C_{i,j+1}$, $C_{i-1,j}$, $C_{i,j-1}$, $C_{i+1,j}$.

4.2 O método MAC

Sem dúvidas, este é o esquema numérico que busca resolver as equações do acoplamento pressão-velocidade da maneira mais direta possível, realizando, literalmente, uma "mímica" discreta com as mesmas justificativas associadas à construção da formulação da qual toma emprestadas as equações diferenciais que resolve.

O método MAC (*Mark And Cell*) foi inicialmente desenvolvido para o tratamento de escoamentos com superfícies livres, nos quais partículas marcadoras (*markers*) são consideradas para dar a localização da superfície livre do fluido. Neste trabalho, porém, estamos interessados apenas em escoamentos confinados, nos quais o fluido preenche todas as células do domínio computacional, sendo, portanto, dispensada a existência de partículas marcadoras.

A aproximação do termo transiente no método MAC é baseada no método de Euler explícito. Assim, todos os termos que envolvem derivadas parciais

espaciais de velocidades sendo discretizados no nível de tempo n, de forma que, após a aplicação do integrador temporal, determinamos o campo de velocidade no nível temporal $(n+1)$. Algebricamente, a aproximação para a derivada temporal adotada significa que,

$$u_t|_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^{n}}{\Delta t} + O(\Delta t) \tag{4.1}$$

e

$$v_t|_{i,j+1} = \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j+1}^{n}}{\Delta t} + O(\Delta t). \tag{4.2}$$

Com isso, a discretização adotada para as equações de conservação do momento, respectivamente, ao longo das direções x e y, são dadas por

$$\begin{aligned} u_{i+1,j}^{n+1} &= u_{i+1,j}^{n} + (\Delta t)\left[-convx_{i+1,j}^{n} + extx_{i+1,j}^{n} + viscx_{i+1,j}^{n}\right] - \cdots \\ \cdots &- (\Delta t)\frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} = F_{i+1,j}^{n} - (\Delta t)\frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \end{aligned} \tag{4.3}$$

e

$$\begin{aligned} v_{i,j+1}^{n+1} &= v_{i,j+1}^{n} + (\Delta t)\left[-convy_{i,j+1}^{n} + exty_{i,j+1}^{n} + viscy_{i,j+1}^{n}\right] - \cdots \\ \cdots &- (\Delta t)\frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} = G_{i,j+1}^{n} - (\Delta t)\frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\Delta y}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Observamos que em (4.3) e em (4.4) os termos chamados de *convx*, *convx*, *extx*, *exty*, *viscx*, *viscy* deixam em aberto a discretização que será adotada, respectivamente, para os termos convectivos, termos fontes associados a forças de campo e termos viscosos, com o sufixo x ou y fazendo referência à equação em que o termo aparece (equação de conservação do momento ao longo da direção x empresta o sufixo x, enquanto que a equação de conservação do momento ao longo da direção y empresta o sufixo y). Pode, assim, haver, inclusive, tratamentos distintos para estes termos em cada uma das direções do domínio espacial (ou seja, em cada uma das equações).

Salientamos também que a discretização adotada para a pressão, devido ao fato da malha ser deslocada, é uma diferença centrada de segunda ordem.

Além disso, os valores da pressão que são utilizados já estão no nível de tempo $(n+1)$ e são estabelecidos de forma que as velocidades atualizadas no nível de tempo $(n+1)$ satisfaçam a equação de conservação da massa [1].

Com efeito, se desejamos que as velocidades calculadas no nível de tempo $(n+1)$ satisfaçam a equação da continuidade na célula $C_{i,j}$, deveremos impor

$$u_x|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} + v_y|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \approx \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} = 0, \tag{4.5}$$

[1] Note a semelhança do discurso que justifica esta passagem da construção do método MAC com a argumentação realizada na construção do acoplamento pressão velocidade (mais especificamente, quando foi obtida a equação de Poisson para a pressão). Definitivamente, o método MAC simplesmente discretiza as idéias já obtidas para a obtenção das equações diferenciais que constituem esta formulação.

onde, utilizando as expressões (4.3) e (4.4), obtemos a equação

$$\begin{aligned} & \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x^2)} + \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y^2)} = \cdots \\ = & \frac{1}{(\Delta t)} \left(\frac{F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n}{\Delta y} \right), \end{aligned} \tag{4.6}$$

que aparenta ser, a primeira vista, uma versão discreta de uma equação de Poisson para a pressão. Mas, na verdade, (4.6) é mais do que uma versão discreta de uma equação de Poisson para a pressão: é a discretização da equação (2.9), onde chamamos a atenção do termo fonte de ambas apresentarem os mesmos termos associados.

Portanto, pelo método MAC, supondo que temos o campo de velocidade e a distribuição de pressão no nível temporal n, a determinação dos mesmos no nível temporal $(n+1)$ segue a seguinte sequência:

1. calculamos o termo fonte da equação de Poisson (4.6) em todas as células do domínio computacional;

2. resolvemos a equação de Poisson;

3. uma vez obtido a distribuição de pressão sobre todas as células do domínio no nível de tempo $(n+1)$, atualizamos as velocidades, através das expressões (4.3) e (4.4), do nível de tempo n para o $(n+1)$.

4.3 Condições de estabilidade para o método MAC

A obtenção de condições de estabilidade para esquemas numéricos voltados a EDPs não-lineares é um problema difícil de ser tratado analiticamente.

O que costuma ser feito, então, é a linearização da EDP, pela majoração de alguns termos (de forma a remover a não-linearidade) para, em seguida, aplicar os critérios de estabilidade usuais de esquemas numéricos para EDPs lineares (podem ser empregados tanto o critério da matriz como o critério de von Neumann, sendo adotado aquele que fornecer a condição de estabilidade mais restritiva). Apesar desse procedimento não ter uma justificativa teórica muito rigorosa, funciona muito bem na prática[2].

Antes, porém, de apresentarmos uma restrição de estabilidade para o método MAC, devemos exibir as discretizações que serão empregadas no tratamento dos termos convectivos e viscosos neste trabalho, as quais são dadas por:

[2]Lembramos também que, devido a não linearidade do problema, a equivalência de Lax não mais pode ser empregada para certificar que um esquema estável e consistente apresentará uma solução que converge para a solução exata a medida que a malha é refinada. Apesar disso, vale observar que a consistência e a estabilidade são, sempre, duas condições necessárias para que um método numérico possa convergir para a solução exata da EDP.

$$convx^n_{i+1,j} = \frac{\left(u^2\right)^n_{i+\frac{3}{2},j} - \left(u^2\right)^n_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{(uv)^n_{i+1,j+\frac{1}{2}} - (uv)^n_{i+1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \tag{4.7}$$

$$convy^n_{i,j+1} = \frac{(uv)^n_{i+\frac{1}{2},j+1} - (uv)^n_{i-\frac{1}{2},j+1}}{\Delta x} + \frac{\left(v^2\right)^n_{i,j+\frac{3}{2}} - \left(v^2\right)^n_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \tag{4.8}$$

$$viscx^n_{i+1,j} = \frac{1}{Re}\left[\frac{u^n_{i,j} - 2u^n_{i+1,j} + u^n_{i+2,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u^n_{i+1,j-1} - 2u^n_{i+1,j} + u^n_{i+1,j+1}}{(\Delta y)^2}\right], \tag{4.9}$$

$$viscy^n_{i,j+1} = \frac{1}{Re}\left[\frac{v^n_{i-1,j} - 2v^n_{i,j} + v^n_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{v^n_{i,j} - 2v^n_{i,j+1} + v^n_{i,j+2}}{(\Delta y)^2}\right]. \tag{4.10}$$

Note que os termos viscosos têm suas derivadas de segunda ordem sendo aproximadas por diferenças centradas de segunda ordem.

Já no tratamento dos termos convectivos aparecem índices fracionários, de forma que os pontos indexados não estão na malha. O valor da solução nesses pontos "intermediários" aos pontos da malha são obtidos por interpolação, sendo a estratégia de interpolação empregada o que costumeiramente se chama de *esquema convectivo*.

O esquema convectivo aqui adotado toma o valor da solução numérica em pontos de índice fracionário sendo aproximada por média aritmética simples do valor da solução nos dois pontos vizinhos da malha onde a grandeza está definida. Assim, as grandezas que aparecem elevadas ao quadrado são aproximadas como o quadrado da média, e não como uma média do quadrado das grandezas em pontos vizinhos. Desse modo, é fácil notar que tal estratégia resultará em uma aproximação por diferenças centradas de segunda ordem para os termos convectivos[3].

No que diz respeito a critérios de estabilidade, a primeira restrição vem da condição CFL, pela qual devemos impedir que a solução viaje por mais de uma célula durante um passo temporal. Com isso, tendo em vista o processo de convecção, podemos estipular a seguinte restrição para o incremento no tempo,

$$\Delta t < mín\left(\frac{\Delta x}{|u|}, \frac{\Delta y}{|v|}\right), \tag{4.11}$$

a qual sempre deve ser satisfeita, independentemente do esquema convectivo adotado.

[3]Portanto, pela estratégia de discretização adotada, tanto para as derivadas espaciais como para a derivada temporal, é bastante intuitivo notar que o método criado será consistente, com segunda ordem de precisão no espaço e primeira ordem no tempo.

De forma análoga à definição da condição CFL, também devemos exigir que o processo de difusão nunca supere o espaço ocupado por uma célula durante um passo temporal, o que equivale a exigir

$$\Delta t < \frac{Re}{2\left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right]}, \tag{4.12}$$

sendo esta uma restrição sempre presente quando os termos viscosos são discretizados por diferenças centradas de segunda ordem.

Além disso, devido a estratégia convectiva escolhida, ganhamos um restrição adicional, que limita o passo temporal em função do número de Reynolds e do campo de velocidade, da seguinte forma:

$$\Delta t < \frac{2}{Re} mín\left(\frac{1}{u^2}, \frac{1}{v^2}\right). \tag{4.13}$$

Note que, por (4.13), o passo temporal adotado deve ser cada vez menor conforme aumentamos o número de Reynolds, o que evidencia que nossa estratégia de discretização para o termo convectivo, por diferenças centradas, gera uma restrição de estabilidade, envolvendo a marcha no tempo:

- excelente para escoamentos com baixo número de Reynolds;
- tanto mais severa conforme maior tomamos o número de Reynolds;
- impossível de ser satisfeita no caso de um escoamento invíscido.

4.4 O método SOLA

Vimos que, no método MAC, uma distribuição de pressão no nível de tempo $(n+1)$ é calculada, via a resolução de uma equação de Poisson para a pressão, de tal modo a fazer com que as velocidades ao longo de cada uma das direções do domínio espacial, atualizadas do nível temporal n para o $(n+1)$, através das equações (4.3) e (4.4), possam satisfazer a equação da continuidade.

Por sua vez, o método SOLA faz algo conceitualmente semelhante, diferindo do método MAC pelo instante e jeito que resolve a equação de Poisson, sendo tal resolução embutida no próprio procedimento de atualização do campo de velocidade do nível n para o $(n+1)$.

Assim, em vez de calcular diretamente a pressão no nível de tempo $(n+1)$ para todas as células do domínio computacional cheias de fluido, conforme executa o MAC, o esquema SOLA adota um procedimento iterativo de correções δp para a pressão, o qual é responsável por atualizá-la do nível de tempo n para o $(n+1)$. Nesse processo de correções, a pressão em uma célula é aumentada caso haja um fluxo líquido de massa para dentro da célula, sendo diminuída no caso de existir um fluxo líquido de massa para fora da célula.

O sentido do fluxo líquido de massa na célula $C_{i,j}$ pode ser determinado pelo cálculo do divergente no centro da célula. Fisicamente, o divergente nos dá a dilatação $D_{i,j}$ da célula, que é dada por

$$D_{i,j} = u_x|_{i+\frac{1}{2},j} + v_y|_{i,j+\frac{1}{2}} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y}. \tag{4.14}$$

É bastante intuitivo notar, sendo esta observação facilitada ainda mais quando atentamos para a discretização da dilatação $D_{i,j}$, dada em (4.14), que $D_{i,j} > 0$ representa um fluxo resultante de massa que deixa a célula $C_{i,j}$, ao passo que $D_{i,j} < 0$ representa um fluxo resultante de massa que entra na célula $C_{i,j}$.

Assim, é fisicamente plausível que, para garantir a equação da continuidade[4], conforme $D_{i,j} > 0$ ou $D_{i,j} < 0$, devemos, respectivamente, diminuir ou aumentar a pressão na célula $C_{i,j}$, devendo este ser um procedimento iterativo, pois, quando ajustamos a pressão em uma célula, todas as células vizinhas são afetadas, uma vez que é a diferença de pressão entre células adjacentes que define o fluxo de massa entre elas. Dessa maneira, o procedimento iterativo deve ser executado até que a dilatação em cada célula do domínio esteja abaixo de uma tolerância ε especificada[5].

Portanto, levando em conta a diferença da natureza do processo de cálculo da pressão com relação ao esquema MAC, as equações de conservação do momento ao longo das direções x e y têm suas discretizações no método SOLA dadas, respectivamente, por

$$u_{i+1,j}^{n+1} = F_{i+1,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{p_{i+1,j}^{n} - p_{i,j}^{n}}{\Delta x} \tag{4.15}$$

e

$$v_{i,j+1}^{n+1} = G_{i,j+1}^{n} - (\Delta t)\,\frac{p_{i,j+1}^{n} - p_{i,j}^{n}}{\Delta y}, \tag{4.16}$$

onde, da mesma forma que no método MAC, continuamos tendo

$$F_{i+1,j}^{n} = u_{i+1,j}^{n} + (\Delta t)\left[-convx_{i+1,j}^{n} + extx_{i+1,j}^{n} + viscx_{i+1,j}^{n}\right] \tag{4.17}$$

e

$$G_{i,j+1}^{n} = u_{i,j+1}^{n} + (\Delta t)\left[-convy_{i,j+1}^{n} + exty_{i,j+1}^{n} + viscy_{i,j+1}^{n}\right]. \tag{4.18}$$

Aqui, chamamos a atenção para o campo de velocidade no nível temporal $(n+1)$ estabelecido pelas relações (4.15) e (4.16) ainda não necessariamente

[4]Repare que, se $D_{i,j} > 0$, já temos um fluxo de massa resultante deixando a célula, de forma que um incremento na pressão apenas intensificaria o fluxo de massa existente, deixando a equação da continuidade cada vez mais longe de ser satisfeita. Da mesma forma, se $D_{i,j} < 0$, existe um fluxo de massa resultante entrando na célula, de forma que um decréscimo na pressão apenas intensificaria o fluxo de massa que já existe, o qual também deixaria a equação da continuidade cada vez mais longe de ser satisfeita.

[5]Idealmente, tais iterações deveriam parar de ser executadas apenas quando toda célula $C_{i,j}$ do domínio da solução satisfizesse $D_{i,j} = 0$. No entanto, devido a erros que são introduzidos tanto pela discretização das equações como pela aritmética finita da máquina, o máximo que podemos exigir é uma condição de parada para esse processo iterativo da forma $D_{i,j} < \varepsilon$, para toda célula $C_{i,j}$. Na prática, costuma-se adotar $\varepsilon = 10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

satisfazer a equação da continuidade. Assim, como não temos a garantia de que a dilatação em cada célula, calculada a partir deste campo de velocidade, será nula, devemos corrigir iterativamente as velocidades $u_{i+1,j}^{n+1}$ e $v_{i,j+1}^{n+1}$ em cada interface atualizável, isto é, onde as condições de fronteira não especificam um valor fixo para a velocidade normal.

De forma a garantir que o divergente de cada célula seja nulo, observamos que, para uma célula $C_{i,j}$ na qual suas quatro faces deve ter o valor da velocidade normal atualizado, temos

$$u_{i,j}^{n+1} = F_{i,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{p_{i,j}^{n} - p_{i-1,j}^{n}}{\Delta x}, \tag{4.19}$$

$$u_{i+1,j}^{n+1} = F_{i+1,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{p_{i+1,j}^{n} - p_{i,j}^{n}}{\Delta x}, \tag{4.20}$$

$$v_{i,j}^{n+1} = G_{i,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{p_{i,j}^{n} - p_{i,j-1}^{n}}{\Delta y}, \tag{4.21}$$

$$v_{i,j+1}^{n+1} = G_{i,j+1}^{n} - (\Delta t)\,\frac{p_{i,j+1}^{n} - p_{i,j}^{n}}{\Delta y}. \tag{4.22}$$

Assim, considerando um método iterativo que utiliza uma correção $\delta p_{i,j}$ para a pressão na célula $C_{i,j}$ a fim de obter $D_{i,j} = 0$, teremos, para cada interface dessa célula,

$$^{(k+1)}u_{i,j}^{n+1} =^{(k)} u_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}u_{i,j} = F_{i,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{\left(^{(k)}p_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}p_{i,j}\right) -^{(k)} p_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x}, \tag{4.23}$$

$$^{(k+1)}u_{i+1,j}^{n+1} =^{(k)} u_{i+1,j}^{n+1} + \delta^{(k)}u_{i+1,j} = F_{i+1,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{^{(k)}p_{i+1,j}^{n+1} - \left(^{(k)}p_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}p_{i,j}\right)}{\Delta x}, \tag{4.24}$$

$$^{(k+1)}v_{i,j}^{n+1} =^{(k)} v_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}v_{i,j} = G_{i,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{\left(^{(k)}p_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}p_{i,j}\right) -^{(k)} p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y}, \tag{4.25}$$

$$^{(k+1)}v_{i,j+1}^{n+1} =^{(k)} v_{i,j+1}^{n+1} + \delta^{(k)}v_{i,j+1} = G_{i,j+1}^{n} - (\Delta t)\,\frac{^{(k)}p_{i,j+1}^{n+1} - \left(^{(k)}p_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}p_{i,j}\right)}{\Delta y}, \tag{4.26}$$

onde $\delta^{(k)}u_{i,j}$, $\delta^{(k)}u_{i+1,j}$, $\delta^{(k)}v_{i,j}$ e $\delta^{(k)}v_{i,j+1}$ são, respectivamente, variações na velocidade normal às faces oeste, leste, sul e norte ocasionadas pela variação de pressão $\delta^{(k)}p_{i,j}$ na célula $C_{i,j}$, onde o índice (k) no canto superior esquerdo de cada variável esta associado ao número da iteração.

O valor de cada variável que serve de condição de partida para o processo

iterativo que está sendo definido são tomados da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
{}^{(0)}p_{i,j}^{n+1} &= p_{i,j}^{n}, && (4.27)\\
{}^{(0)}u_{i,j}^{n+1} &= F_{i,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{p_{i,j}^{n} - p_{i-1,j}^{n}}{\Delta x}, && (4.28)\\
{}^{(0)}u_{i+1,j}^{n+1} &= F_{i+1,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{p_{i+1,j}^{n} - p_{i,j}^{n}}{\Delta x}, && (4.29)\\
{}^{(0)}v_{i,j}^{n+1} &= G_{i,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{p_{i,j}^{n} - p_{i,j-1}^{n}}{\Delta y}, && (4.30)\\
{}^{(0)}v_{i,j+1}^{n+1} &= G_{i,j+1}^{n} - (\Delta t)\,\frac{p_{i,j+1}^{n} - p_{i,j}^{n}}{\Delta y}. && (4.31)
\end{aligned}
$$

Com isso, segue das relações estabelecidas que o conjunto de correções para a velocidade em função da correção $\delta^{(k)}p_{i,j}$ para a pressão na célula $C_{i,j}$ é dado por

$$
\begin{aligned}
\delta^{(k)}u_{i,j} &= -\,(\Delta t)\,\frac{\delta^{(k)}p_{i,j}}{\Delta x}, && (4.32)\\
\delta^{(k)}u_{i+1,j} &= +\,(\Delta t)\,\frac{\delta^{(k)}p_{i,j}}{\Delta x}, && (4.33)\\
\delta^{(k)}v_{i,j} &= -\,(\Delta t)\,\frac{\delta^{(k)}p_{i,j}}{\Delta y}, && (4.34)\\
\delta^{(k)}v_{i,j+1} &= +\,(\Delta t)\,\frac{\delta^{(k)}p_{i,j}}{\Delta y}. && (4.35)
\end{aligned}
$$

Resta, portanto, encontrar qual deve ser a correção $\delta^{(k)}p_{i,j}$ na célula $C_{i,j}$ no estágio k do processo iterativo. Para isso, devemos impor que as componentes da velocidade corrigidas no nível de tempo $(n+1)$ tornem ${}^{(k)}D_{i,j}^{n+1}$ igual a zero, ou seja,

$$
\begin{aligned}
{}^{(k+1)}D_{i,j}^{n+1} &= \frac{{}^{(k+1)}u_{i+1,j}^{n+1} - {}^{(k+1)}u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{{}^{(k+1)}v_{i,j+1}^{n+1} - {}^{(k+1)}v_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} =\\
&= \frac{\left({}^{(k)}u_{i+1,j}^{n} + \delta^{(k)}u_{i+1,j}\right) - \left({}^{(k)}u_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}u_{i,j}\right)}{\Delta x} + \cdots\\
\cdots &+ \frac{\left({}^{(k)}v_{i,j+1}^{n+1} + \delta^{(k)}v_{i,j+1}\right) - \left({}^{(k)}v_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}v_{i,j}\right)}{\Delta y} = 0,
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

equação essa que, a partir da especificação da correção para a velocidade normal em cada face da célula $C_{i,j}$, origina

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left({}^{(k)}u_{i+1,j}^{n} + (\Delta t)\,\frac{\delta^{(k)}p_{i,j}}{\Delta x}\right) - \left({}^{(k)}u_{i,j}^{n+1} - (\Delta t)\,\frac{\delta^{(k)}p_{i,j}}{\Delta x}\right)}{\Delta x} + \cdots\\
&\cdots + \frac{\left({}^{(k)}v_{i,j+1}^{n+1} + (\Delta t)\,\frac{\delta^{(k)}p_{i,j}}{\Delta y}\right) - \left({}^{(k)}v_{i,j}^{n+1} - (\Delta t)\,\frac{\delta^{(k)}p_{i,j}}{\Delta y}\right)}{\Delta y} = 0,
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

ou, equivalentemente,

$$ {}^{(k)}D_{i,j}^{n+1} + 2\left(\Delta t\right)\delta^{(k)}p_{i,j}\left[\frac{1}{\left(\Delta x\right)^2} + \frac{1}{\left(\Delta y\right)^2}\right] = 0. \tag{4.38} $$

Portanto, temos que

$$ \delta^{(k)}p_{i,j} = -\frac{{}^{(k)}D_{i,j}^{n+1}}{2\left(\Delta t\right)\left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right]} \tag{4.39} $$

indica qual deve ser a correção $\delta^{(k)}p_{i,j}$ para a pressão ${}^{(k)}p_{i,j}$ na célula $C_{i,j}$ que torna ${}^{(k+1)}D_{i,j}^{n+1} = 0$.

Chamamos a atenção do leitor para a coerência existente entre a motivação física que foi dada para esta abordagem e a equação (4.39). Com efeito, repare que

$$ {}^{(k)}D_{i,j}^{n+1} > 0 \Longrightarrow \delta^{(k)}p_{i,j} < 0, \tag{4.40} $$

ao passo que

$$ {}^{(k)}D_{i,j}^{n+1} < 0 \Longrightarrow \delta^{(k)}p_{i,j} > 0, \tag{4.41} $$

conforme já era esperado para que a aplicação do processo iterativo pudesse corrigir o campo de velocidade de forma que ele pudesse satisfazer a equação da continuidade ao final das iterações.

Assim, uma vez determinada a correção $\delta^{(k)}p_{i,j}$, a pressão ${}^{(k)}p_{i,j}$ na respectiva célula é ajustada pelo processo iterativo da seguinte forma:

$$ {}^{(k+1)}p_{i,j} = {}^{(k)}p_{i,j} + \delta^{(k)}p_{i,j}. \tag{4.42} $$

A convergência do processo iterativo que foi definido pode ser acelerada se multiplicarmos a correção da pressão por um parâmetro de relaxação β_o, o qual nos permite rescrever a equação (4.39) como

$$ \delta^{(k)}p_{i,j} = -\beta_o\frac{{}^{(k)}D_{i,j}^{n+1}}{2\left(\Delta t\right)\left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right]}. \tag{4.43} $$

Para que o processo iterativo possa convergir, devemos ter $0 < \beta_o < 2$, com o valor ótimo para esse parâmetro (o qual induz a um menor número de iterações) satisfazendo $1 < \beta_o < 2$. Aliás, só é possível determinar o valor ótimo para o parâmetro de relaxação β_o analiticamente em situações bastante específicas. Na prática, o que se costuma fazer é determinar o parâmetro de relaxação ótimo de forma experimental, realizando alguns testes. Também, já que é possível alterar tal parâmetro no decorrer das várias edições iterativas que ocorrem durante a solução numérica pelo método SOLA, faz-se possível adotar um parâmetro de relaxação adaptativo, que varia de acordo com o número de iterações realizadas

a cada aplicação do processo iterativo até o critério de parada ter sido satisfeito[6]. De forma geral, para um grande leque de problemas costuma-se adotar $\beta_o \approx 1.7$, sendo este valor um pouco alto quando existem fortes distorções no escoamento, conforme destaca [1].

Outro fato que merece citação diz respeito aos valores finais obtidos para a pressão após cada nível temporal. Nas equações de Navier-Stokes temos uma relação que envolve apenas o gradiente da pressão, e assim, a menos que a pressão em determinado(s) ponto(s) do domínio seja conhecida[7] (situação na qual, por razões óbvias, ela não deve ser corrigida pelo processo iterativo nesses locais onde ela é pré-estabelecida), ela deve ser normalizada após o final do processo iterativo com o intuito de que seus valores não venham, eventualmente, a crescer indefinidamente[8], bem como dar um significado físico para a grandeza que foi calculada.

De fato, fisicamente, podemos dizer que a pressão "depende" de um "referencial", sendo comum no cotidiano adotar a pressão atmosférica ao nível do mar como esse "referencial". Da mesma forma, no processo de normalização da pressão obtida após o procedimento iterativo, o valor da pressão em uma dada célula (que pode ser escolhida arbitrariamente, conforme seja conveniente) passa a ser tomada como a pressão de referência. Assim, tal valor de referência é subtraido da pressão de cada uma das células do domínio, de forma que, ao final desse processo, a pressão na célula de referência adotada será sempre zero.

Salientamos também que, no processo iterativo que o método SOLA realiza para o cálculo da distribuição de pressão e correção das velocidades, de forma a satisfazer a equação da continuidade, a velocidade normal nas faces deve ser atualizada apenas onde não existe um valor previamente especificado. As interfaces de cada célula para as quais já existe um valor pré-estabelecido, devido

[6]Outra coisa bastante interessante na aplicação de um procedimento iterativo é a tentativa de estimar o número de iterações que deverão ser realizadas, de forma a evitar uma checagem desnecessária do critério de parada em circunstância em que seja "óbvio" que ele ainda não está satisfeito. Apenas para exemplificar, no critério de parada para o processo iterativo aqui definido devemos exigir que $\left|{}^{(k)}D_{i,j}^{n+1}\right|$, para toda célula $C_{i,j}$ do domínio da solução, seja menor que uma determinada tolerância especificada ou que um número mínimo de iterações sejam realizadas. Calcular a dilatação de todas as células a cada iteração para checar se o critério de parada já está satisfeito acaba gerando um custo computacional relativamente alto durante uma simulação completa, sendo bem mais interessante realizar uma certa quantidade de iterações antes de testar o critério de parada. Assim, quanto melhor for a estimativa do número de iterações que serão necessárias para satisfazer a condição de parada, menos testes desnecessários são realizados. Inclusive, dependendo das dimensões e parâmetros do problema, pode sair mais barato executar algumas iterações "desnecesárias" e testar a condição de parada uma única vez do que realizar insistentemente o teste de parada para que nenhuma iteração "extra" seja realizada.

[7]Cuidados adicionais devem ser tomados quando especificamos a pressão em algum ponto ou em alguma região do domínio, pois, se esta condição auxiliar não for plausível e fisicamente compatível com as demais condições auxiliares, podemos deixar de ter um problema bem-posto, com "os números" produzidos pelo método numérico se tornando desprovidos de real significado físico.

[8]Ainda que a pressão não seja normalizada, o valor obtido para o campo de velocidade deverá estar correto, pois depende apenas do gradiente de pressão, e não de valores específicos da pressão em algum ponto do domínio. Apesar disso, do ponto de vista numérico é mais seguro realizar tal normalização (ainda que não estejamos interessados nessa grandeza).

a considerações físicas do problema, nunca devem ser corrigidas, de forma que devemos ignorar as respectivas expressões de atualização para as componentes da velocidade nas mesmas[9].

Aliás, quando percorremos o domínio computacional no processo iterativo, observamos que toda interface (menos as não atualizáveis) são atualizadas duas vezes, devido a correção na pressão nas duas células que são adjacentes à mesma. Com isso, é conveniente definir para o processo iterativo que a primeira atualização da velocidade na interface leva a velocidade normal à mesma do estágio (k) para o estágio $\left(k+\frac{1}{2}\right)$ e a segunda, da mesma forma, do estágio $\left(k+\frac{1}{2}\right)$ para o estágio $(k+1)$. Dessa forma, supondo que o domínio computacional seja percorrido variando i para cada valor de j fixado, para todos os índices i e j tais que a célula $C_{i,j}$ esteja no domínio da solução, devemos considerar

$$
{}^{(k+1)}u_{i,j}^{n+1} = {}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\, u_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)} u_{i,j}, \tag{4.44}
$$

$$
{}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}u_{i+1,j}^{n+1} = {}^{(k)}\, u_{i+1,j}^{n+1} + \delta^{(k)} u_{i+1,j}, \tag{4.45}
$$

$$
{}^{(k+1)}v_{i,j}^{n+1} = {}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\, v_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)} v_{i,j}, \tag{4.46}
$$

$$
{}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}v_{i,j+1}^{n+1} = {}^{(k)}\, v_{i,j+1}^{n+1} + \delta^{(k)} v_{i,j+1}. \tag{4.47}
$$

Portanto, o procedimento de solução baseado no método SOLA, que atualiza o campo de velocidade e a distribuição de pressão do nível temporal n para o nível $(n+1)$ pode ser descrito através das seguintes etapas:

- a partir do valor da solução no nível de tempo n, estabeleça

$$
{}^{(0)}p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^{n}, \tag{4.48}
$$

$$
{}^{(0)}u_{i,j}^{n+1} = F_{i,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{p_{i,j}^{n} - p_{i-1,j}^{n}}{\Delta x}, \tag{4.49}
$$

$$
{}^{(0)}u_{i+1,j}^{n+1} = F_{i+1,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{p_{i+1,j}^{n} - p_{i,j}^{n}}{\Delta x}, \tag{4.50}
$$

$$
{}^{(0)}v_{i,j}^{n+1} = G_{i,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{p_{i,j}^{n} - p_{i,j-1}^{n}}{\Delta y}, \tag{4.51}
$$

$$
{}^{(0)}v_{i,j+1}^{n+1} = G_{i,j+1}^{n} - (\Delta t)\,\frac{p_{i,j+1}^{n} - p_{i,j}^{n}}{\Delta y}; \tag{4.52}
$$

- andando por todo domínio da solução, determine, para cada célula $C_{i,j}$,

[9] Fórmulas especiais para a correção da velocidade em células onde mais de uma interface não deve ter o valor da velocidade corrigido (pelo fato do mesmo já ter sido especificado) podem ser desenvolvidas. Apesar disso, tais formulações são ignoradas na prática, devido ao fato de introduzirem um custo computacional muito grande (devido a necessidade de checagem, para cada célula, das quais são suas interfaces atualizáveis) se comparado ao pequeno benefício em precisão que acarretam[4].

1. o valor da correção da pressão na célula através de

$$\delta^{(k)}p_{i,j} = -\beta_o \frac{{}^{(k)}D_{i,j}^{n+1}}{2\left(\Delta t\right)\left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right]}. \tag{4.53}$$

2. determine o valor da pressão corrigido para este estágio da iteração, ou seja,

$${}^{(k+1)}p_{i,j} = {}^{(k)}p_{i,j} + \delta^{(k)}p_{i,j}. \tag{4.54}$$

3. atualiza o valor da velocidade normal nas interfaces atualizáveis da célula utilizando

$$\begin{aligned}
{}^{(k+1)}u_{i,j}^{n+1} &= {}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}u_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}u_{i,j}, && (4.55)\\
{}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}u_{i+1,j}^{n+1} &= {}^{(k)}u_{i+1,j}^{n+1} + \delta^{(k)}u_{i+1,j}, && (4.56)\\
{}^{(k+1)}v_{i,j}^{n+1} &= {}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}v_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}v_{i,j}, && (4.57)\\
{}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}v_{i,j+1}^{n+1} &= {}^{(k)}v_{i,j+1}^{n+1} + \delta^{(k)}v_{i,j+1}. && (4.58)
\end{aligned}$$

realizando este procedimento até que o módulo da dilatação máxima nas células do domínio seja menor que uma tolerância $\varepsilon > 0$ prescrita e que um número mínimo de iterações $n \in \mathbb{N}^*$ tenha sido realizado - ou seja, o processo iterativo só termina quando temos simultaneamente satisfeitas as condições

$$\left(\left|{}^{(k)}D_{i,j}^{n+1}\right| < \varepsilon\right) \wedge (k > n)\,; \tag{4.59}$$

- encerrado o processo iterativo, normalize a pressão em todas as células a partir de um valor de referência para a pressão estabelecido (tal valor de referência deve ser o valor da pressão em uma célula arbitrária e pré-fixada do domínio computacional);

- após estas etapas, o valor final da velocidade e da pressão já estão no nível temporal $(n+1)$.

4.5 Equivalência entre os métodos MAC e SOLA

A semelhança existente entre os métodos MAC e SOLA vai além do simples fato de empregarem a mesma formulação das equações de Navier-Stokes para a obtenção de uma solução numérica. Na verdade, o método SOLA se constitui em um caso especial do método MAC que se origina quando o sistema linear obtido pela discretização da equação de Poisson, o qual é dado em (4.6), é resolvido através do método iterativo PSOR[10].

[10] Também chamado de SOR pontual ou SOR por ponto.

Com efeito, sendo o termo fonte da equação de Poisson (2.9) discretizado pelo método MAC por

$$f_{i,j} = \frac{1}{(\Delta t)} \left(\frac{F^n_{i+1,j} - F^n_{i,j}}{\Delta x} + \frac{G^n_{i,j+1} - G^n_{i,j}}{\Delta y} \right), \tag{4.60}$$

temos que a aplicação do método iterativo PSOR para a resolução do sistema linear estabelecido em (4.6) é dada por

$$\begin{aligned} {}^{(k+1)}p^{n+1}_{i,j} = (1-\beta_o)^{(k)} p^{n+1}_{i,j} + \frac{\beta_o}{2\left[1+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2\right]} \Big\{ {}^{(k)}p^{n+1}_{i+1,j} + {}^{(k+1)} p^{n+1}_{i-1,j} + \cdots \\ \cdots + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 \left[{}^{(k)}p^{n+1}_{i,j+1} + {}^{(k+1)} p^{n+1}_{i,j-1} \right] - (\Delta x)^2 f_{i,j} \Big\}, \end{aligned} \tag{4.61}$$

onde estamos supondo que percorremos todas as células do domínio computacional variando i para cada valor de j fixado, para todos os índices i e j tais que a célula $C_{i,j}$ esteja no domínio da solução. Além disso, o parâmetro β_o é o parâmetro de relaxação do método SOR, sendo o mesmo parâmetro de relaxação que foi introduzido "misteriosamente" durante o processo iterativo que construímos no método SOLA.

Perceba que o método SOR aplicado a este problema pode ter sua expressão rescrita como

$$\begin{aligned} {}^{(k+1)}p^{n+1}_{i,j} = {}^{(k)} p^{n+1}_{i,j} + \frac{\beta_o}{2\left[1+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2\right]} \left[{}^{(k)}p^{n+1}_{i+1,j} - 2{}^{(k)}p^{n+1}_{i,j} + {}^{(k+1)} p^{n+1}_{i-1,j} \right] + \ldots \\ \ldots + \frac{\beta_o}{2\left[1+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2\right]} \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 \left[{}^{(k)}p^{n+1}_{i,j+1} - 2{}^{(k)}p^{n+1}_{i,j} + {}^{(k+1)} p^{n+1}_{i,j-1} \right] - \frac{\beta_o (\Delta x)^2 f_{i,j}}{2\left[1+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2\right]}, \end{aligned} \tag{4.62}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned} {}^{(k+1)}p^{n+1}_{i,j} = {}^{(k)} p^{n+1}_{i,j} + \frac{\beta_o}{2\left[1+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2\right]} \left[\frac{{}^{(k)}p^{n+1}_{i+1,j} - 2{}^{(k)}p^{n+1}_{i,j} + {}^{(k+1)} p^{n+1}_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right] + \ldots \\ \ldots + \frac{\beta_o (\Delta x)^2}{2\left[1+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2\right]} \left[\frac{{}^{(k)}p^{n+1}_{i,j+1} - 2{}^{(k)}p^{n+1}_{i,j} + {}^{(k+1)} p^{n+1}_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right] - \frac{\beta_o (\Delta x)^2}{2\left[1+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2\right]} f_{i,j}, \end{aligned} \tag{4.63}$$

mas, como

$$\frac{\beta_o (\Delta x)^2}{2\left[1+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2\right]} = \frac{\beta_o}{2\left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right]}, \tag{4.64}$$

segue que

$$
{}^{(k+1)}p_{i,j}^{n+1} = {}^{(k)}p_{i,j}^{n+1} + \frac{\beta_o}{2\left[\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}\right]}\left[\frac{{}^{(k)}p_{i+1,j}^{n+1} - 2\,{}^{(k)}p_{i,j}^{n+1} + {}^{(k+1)}p_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\right] + \ldots
$$

$$
\ldots + \frac{\beta_o}{2\left[\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}\right]}\left[\frac{{}^{(k)}p_{i,j+1}^{n+1} - 2\,{}^{(k)}p_{i,j}^{n+1} + {}^{(k+1)}p_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}\right] - \frac{\beta_o}{2\left[\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}\right]} f_{i,j}. \tag{4.65}
$$

Dessa forma, empregando (4.60), a expressão (4.65) pode ser rescrita, equivalentemente, como

$$
{}^{(k+1)}p_{i,j}^{n+1} = {}^{(k)}p_{i,j}^{n+1} - \frac{\beta_o}{2\,(\Delta t)\left[\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}\right]}\left\{\left[\frac{F_{i+1,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{{}^{(k)}p_{i+1,j}^{n+1} - {}^{(k)}p_{i,j}^{n+1}}{(\Delta x)}}{(\Delta x)}\right]\right.
$$

$$
\left.\ldots - \left[\frac{F_{i,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{{}^{(k)}p_{i,j}^{n+1} - {}^{(k+1)}p_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)}}{(\Delta x)}\right]\right\} - \frac{\beta_o}{2\,(\Delta t)\left[\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}\right]}\ldots
$$

$$
\ldots\left\{\left[\frac{G_{i,j+1}^{n} - (\Delta t)\,\frac{{}^{(k)}p_{i,j+1}^{n+1} - {}^{(k)}p_{i,j}^{n+1}}{(\Delta y)}}{(\Delta y)}\right] - \left[\frac{G_{i,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{{}^{(k)}p_{i,j}^{n+1} - {}^{(k+1)}p_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)}}{(\Delta y)}\right]\right\}, \tag{4.66}
$$

o que justifica estabelecer o valor da velocidade normal nas faces da célula $C_{i,j}$, em função do nível (k) da iteração, através de

$$
{}^{(k+\frac{1}{2})}u_{i,j}^{n+1} = F_{i,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{{}^{(k)}p_{i,j}^{n+1} - {}^{(k+1)}p_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x}, \tag{4.67}
$$

$$
{}^{(k)}u_{i+1,j}^{n+1} = F_{i+1,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{{}^{(k)}p_{i+1,j}^{n+1} - {}^{(k)}p_{i,j}^{n+1}}{\Delta x}, \tag{4.68}
$$

$$
{}^{(k+\frac{1}{2})}v_{i,j}^{n+1} = G_{i,j}^{n} - (\Delta t)\,\frac{{}^{(k)}p_{i,j}^{n+1} - {}^{(k+1)}p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y}, \tag{4.69}
$$

$$
{}^{(k)}v_{i,j+1}^{n+1} = G_{i,j+1}^{n} - (\Delta t)\,\frac{{}^{(k)}p_{i,j+1}^{n+1} - {}^{(k)}p_{i,j}^{n+1}}{\Delta y}, \tag{4.70}
$$

onde os níveis de iteração fracionários aparecem devido ao fato de toda interface atualizável ser atualizada duas vezes, por meio da aplicação do processo iterativo nas duas células que a determinam. Logo, devemos ter

$$
{}^{(k+1)}p_{i,j}^{n+1} = {}^{(k)}p_{i,j}^{n+1} - \frac{\beta_o}{2\,(\Delta t)\left[\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}\right]}\left(\frac{{}^{(k)}u_{i+1,j}^{n+1} - {}^{(k+\frac{1}{2})}u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \right.
$$

$$
\left.\ldots + \frac{{}^{(k)}v_{i,j+1}^{n+1} - {}^{(k+\frac{1}{2})}v_{i,j}^{n+1}}{\Delta y}\right), \tag{4.71}
$$

mas, como

$$
{}^{(k)}D_{i,j}^{n+1} = \frac{{}^{(k)}u_{i+1,j}^{n+1} - {}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{{}^{(k)}v_{i,j+1}^{n+1} - {}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}v_{i,j}^{n+1}}{\Delta y}, \tag{4.72}
$$

vem que, definindo a correção aplicada à pressão no estágio (k) desse processo iterativo como

$$
\delta^{(k)}p_{i,j} = -\beta_o \frac{{}^{(k)}D_{i,j}^{n+1}}{2\left(\Delta t\right)\left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right]}, \tag{4.73}
$$

conseguimos

$$
{}^{(k+1)}p_{i,j}^{n+1} = {}^{(k)}p_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}p_{i,j}. \tag{4.74}
$$

Na verdade, isto acarreta que, para o processo de atualização da velocidade normal em cada interface da célula $C_{i,j}$,

$$
{}^{(k+1)}u_{i,j}^{n+1} = {}^{(k)}u_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}u_{i,j} = F_{i,j}^{n} - \left(\Delta t\right)\frac{\left({}^{(k)}p_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}p_{i,j}\right) - {}^{(k)}p_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x}, \tag{4.75}
$$

$$
{}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}u_{i+1,j}^{n+1} = {}^{(k)}u_{i+1,j}^{n+1} + \delta^{(k)}u_{i+1,j} = F_{i+1,j}^{n} - \left(\Delta t\right)\frac{{}^{(k)}p_{i+1,j}^{n+1} - \left({}^{(k)}p_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}p_{i,j}\right)}{\Delta x}, \tag{4.76}
$$

$$
{}^{(k+1)}v_{i,j}^{n+1} = {}^{(k)}v_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}v_{i,j} = G_{i,j}^{n} - \left(\Delta t\right)\frac{\left({}^{(k)}p_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}p_{i,j}\right) - {}^{(k)}p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y}, \tag{4.77}
$$

$$
{}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}v_{i,j+1}^{n+1} = {}^{(k)}v_{i,j+1}^{n+1} + \delta^{(k)}v_{i,j+1} = G_{i,j+1}^{n} - \left(\Delta t\right)\frac{{}^{(k)}p_{i,j+1}^{n+1} - \left({}^{(k)}p_{i,j}^{n+1} + \delta^{(k)}p_{i,j}\right)}{\Delta y}, \tag{4.78}
$$

em que, a partir do momento que eliminamos os termos $F_{i,j}^{n}$, $F_{i+1,j}^{n}, G_{i,j}^{n}, G_{i,j+1}^{n}$, encontramos

$$
\begin{aligned}
\delta^{(k)}u_{i,j} &= -\left(\Delta t\right)\frac{\delta^{(k)}p_{i,j}}{\Delta x}, && (4.79)\\
\delta^{(k)}u_{i+1,j} &= +\left(\Delta t\right)\frac{\delta^{(k)}p_{i,j}}{\Delta x}, && (4.80)\\
\delta^{(k)}v_{i,j} &= -\left(\Delta t\right)\frac{\delta^{(k)}p_{i,j}}{\Delta y}, && (4.81)\\
\delta^{(k)}v_{i,j+1} &= +\left(\Delta t\right)\frac{\delta^{(k)}p_{i,j}}{\Delta y}. && (4.82)
\end{aligned}
$$

Portanto, verificamos que o método SOLA é uma variante do método MAC, obtida quando utilizamos o método iterativo PSOR para resolver o sistema linear obtido a partir da discretização (4.6) da equação de Poisson (2.9) referente ao acomplamento pressão-velocidade.

Apesar do SOLA ser um caso particular de uma abordagem mais geral, que é o MAC, tal simplificação introduz muitas facilidades, principalmente no tratamento das condições de fronteira. Isso se dá porque, no esquema SOLA, não

mais se faz necessário o cálculo (ou mesmo a obtenção de expressões especiais) para os termos $F^n_{i,j}$, $F^n_{i+1,j}, G^n_{i,j}, G^n_{i,j+1}$ sobre fronteiras[11], conforme exige o esquema MAC no processo de discretização do termo fonte da equação de Poisson para a pressão. Além disso, não mais se faz necessário o estabelecimento de condições de fronteira "artificiais" ou numéricas para a pressão fora do domínio de cálculo onde a solução está definida. No que segue, abordaremos o tratamento das condições de fronteira físicas possíveis, visando a implementação do método SOLA.

[11]Repare que, dependendo do estêncil computacional associado à abordagem de discretização para os termos convectivos e viscosos, calcular $F^n_{i,j}$, $F^n_{i+1,j}, G^n_{i,j}, G^n_{i,j+1}$ sobre fronteiras pode exigir valores que estão além do domínio da solução e das especificações de contorno, o que torna tal cálculo bastante delicado.

Capítulo 5

Tratamento das condições de fronteira

Desenvolvemos, até aqui, os aspectos teóricos e numéricos que nos permitirão a simulação computacional de escoamentos incompressíveis de um fluido newtoniano em uma região fechada, onde o fluido deve ocupar todo o domínio da solução[1]. Com isso, existem, basicamente, cinco tipos de fronteiras relevantes que devem ser consideradas:

- regiões de entrada de fluido (*inflow*);
- regiões de saída de fluido (*outflow*);
- paredes rígidas com deslizamento (*free-slip walls*);
- paredes rígidas sem deslizamento (*no-slip walls*);
- fronteiras periódicas.

Por simplicidade, consideramos aqui que as fronteiras físicas sempre coincidem com a interface das células adjacentes a elas, o que evita a necessidade de implantação de um sistema generalizado de coordenadas curvilíneas e o trabalho com equações modificadas.

Desse modo, para a aplicação de um método numérico, faz-se conveniente associar a cada célula do domínio um *flag* que indica o tipo de fronteira da qual a célula faz parte. Com esse tratamento, a aplicação de condições de fronteira se resume ao estabelecimento de valores apropriados da solução em cada um dos tipos de células existentes, de modo que, com isso, estamos induzindo a prescrição de valores para a velocidade normal e tangencial nas fronteiras[2].

[1] Fica evidente, portanto, que não estamos interessados, nesta oportunidade, no tratamento de escoamentos com superfícies livres.

[2] Note que, da hipótese pela qual as fronteiras coincidem com as faces das células adjacentes ao contorno físico, a prescrição de velocidades normal nas fonteiras é imediata. Já para

Em se tratando de escoamentos incompressíveis, devemos cuidar, por exemplo, para que não façamos que entre mais fluido na região de escoamento, através das células de *inflow*, do que as células de *outflow* conseguirão eliminar[3], o que pode ser estabelecido inserindo uma fronteira na qual temos a entrada de fluido sem colocar uma outra fronteira pela qual o fluido possa sair, ou ainda, estabelecendo valores fixos que a velocidade deve satisfazer no *outflow*[4]. Provavelmente, condições de contorno numéricas advindas de condições de contorno físicas que não sejam consistentes proporcionarão aberrações numéricas na mesma proporção que tal problema se constitui em uma aberração física. De forma genérica, o que queremos dizer com esse exemplo é que as condições de contorno ao procedimento numérico deverão ser coerentes com condições plausíveis a um problema físico real.

Portanto, os casos a serem considerados no tratamento de condições de fronteira são, basicamente:

- células de injeção de fluido - *inflow*: nestas células especificamos os valores das velocidades normal e tangencial de acordo com as considerações físicas do problema a ser simulado;

- células de paredes rígidas com deslizamento tangencial: este tipo de célula é utilizada para a demarcação de fronteiras de simetria para o escoamento no ambiente físico onde o escoamento ocorre, e assim, como não deve haver fluxo de massa através dessa fronteira, devemos especificar uma velocidade normal nula na mesma; por outro lado, a velocidade tangencial nesse mesmo tipo de fronteira deve ser especificada levando em conta que o campo de velocidade na região "oculta" pelo artifício da fronteira de simetria é, nada mais, que uma reflexão em torno dessa fronteira do campo de velocidade efetivamente calculado, sendo isso suficiente para a especificação da condição de fronteira nas interfaces das células que são normais à fronteira de simetria;

- células de paredes rígidas sem deslizamento tangencial: este tipo de fronteira se refere à inclusão de uma parede rígida e impermeável adjacente à região preenchida pelo fluido; assim, devido à impermeabilidade, a velocidade normal especificada nessa fronteira deve ser nula; já pela condição de não deslizamento do fluido junto a superfícies sólidas, devemos cuidar para que a velocidade tangencial do fluido junto à parede também seja nula, mas, devido a utilização de malha deslocada, isto é conseguido estabelecendo valores para a velocidade paralela à fronteira na região externa ao

o estabelecimento da velocidade tangencial à fronteira torna-se necessário considerar uma "moldura" de células externas ao domínio computacional, de modo que, interpolando o valor prescrito para a velocidade sobre a fronteira a partir dos valores adjacentes (no interior do domínio e na "moldura" de células externa), a velocidade tangencial na fronteira seja a que desejamos prescrever fisicamente.

[3]Esta restrição se dá devido à incompressibilidade do escoamento.

[4]Estabelecer valores arbitrários para a velocidade nas células de *outflow* não é algo impossível, sendo equivalente a colocar um mecanismo de sucção no mesmo. Porém, tal artifício deve ser utilizado, apenas, a partir de considerações físicas plausíveis.

domínio (em função das velocidade paralelas a fronteira, na região interna ao domínio), de forma que interpolando uma curva para tais valores, o valor assumido sobre a fronteira induza a uma velocidade tangencial nula sobre a mesma;

- células de fronteira periódicas: tais fronteiras ocorrem sempre aos pares, de forma que toda informação que deixa o domímio espacial por uma das fronteiras periódicas reentra, simultaneamentente, pela outra fronteira periódica associada à primeira; isso, na verdade, é como se as duas fronteiras periódicas correspondessem a uma única região do domínio, de forma que a informação em uma fronteira (pressão e velocidade) deve ser estabelecida convenientemente a partir de valores das células vizinhas à outra fronteira periódica associada, com o intuito de garantir que o processo de entrada e saída de fluido por elas não ocasione nenhuma defasagem na solução cada vez que a tal fronteira é atravessada por um elemento de fluido;

- células da fronteira de saída do fluido: para tal contorno, embora não exista uma única possibilidade, o intuito é fazer com que as condições estabelecidas permitam uma transição suave de fluido pelas mesmas; assim, utilizando o método SOLA, a maneira que se mostra mais eficaz para conseguir esse efeito consiste em estabelecer a velocidade normal na interface determinada por duas células (uma cheia de fluido e a outra de *outflow*), não calculando diretamente a velocidade normal nesta face pelas expressões que determinam ${}^{(0)}u$ ou ${}^{(0)}v$, mas, tomando tal valor idêntico ao valor calculado para a velocidade normal na face paralela da mesma célula cheia de fluido que é vizinha à célula de *outflow* que está sendo considerada, para, em seguida, deixar o valor da velocidade normal na fronteira de saída relaxar com o processo iterativo (o que é conseguido permitindo que o valor da velocidade normal na fronteira de saída possa ser atualizado pelas iterações que corrigem o campo de velocidade de forma que ele possa satisfazer a equação da continuidade); já a velocidade tangencial na fronteira de saída de fluido é estabelecida igual à velocidade adjacente no interior do fluido, sendo também possível outras abordagens, desde que o valor estabelecido leve em consideração a solução a montante da fronteira de saída.

Outro aspecto pertinente ao tratamento pelas condições de fronteira diz respeito à presença de quinas ou cantos nas fronteiras rígidas sem deslizamento do domínio da solução. Nos cantos, a velocidade nas faces das células adjacentes à quina depende da etapa em que se encontra do cálculo dos termos F^n e G^n.

Assim, de acordo com a Figura 5.1, devemos garantir, localmente, que a velocidade no canto seja nula. Para isso, durante o cálculo de F^n na face A, devemos alterar, apenas para este cálculo, a componente da velocidade na direção x na face B de nula (da condição de fronteira rígida) para $-u$. Analogamente, para o cálculo do termo G^n na face C, também devemos alterar, apenas para este cálculo, a componente da velocidade na direção y na face D de nula (da

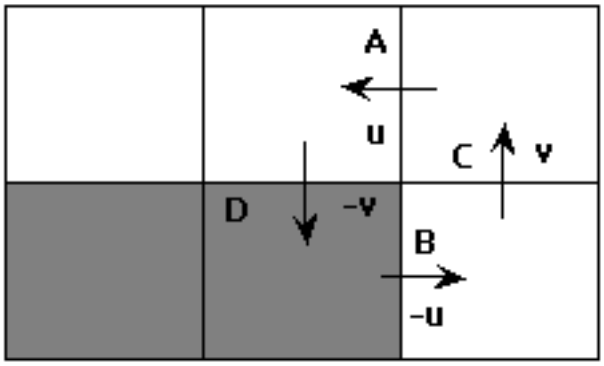


Figura 5.1: Velocidades adjacentes a uma quina, onde as células cinzas fazem parte da parede rígida. Com o intuito de tornar a velocidade nula no ponto da quina, a velocidade adjacente na parede rígida (que deve ser nula) é modificada quando os termos F^n e G^n são, respectivamente, calculados.

condição de fronteira rígida) para $-v$. Sem este conveniente tratamento de eventuais quinas no domínio computacional, acabamos permitindo o que a velocidade no ponto exato da quina não seja nula, o que induz a uma solução numérica não correta.

Capítulo 6

Metodologia geral de solução numérica das equações de Navier-Stokes pelo acoplamento corrente-vorticidade

Muitos são os métodos numéricos que podem ser empregados na solução aproximada das equações de Navier-Stokes pelo acoplamento corrente-vorticidade. Apesar disso, a sistemática geral de solução, que define a sequência a partir da qual cada tarefa é executada não varia. Sendo assim, apresentamos aqui a metodologia geral de solução empregada às equações que compõem tal formulação, deixando em aberto a escolha da discretização para tratar cada etapa do processo.

Salientamos, inicialmente, que as equações que compõem tal acoplamento podem ser tratadas, simplesmente, em uma malha co-localizada, na qual todas as grandezas envolvidas são avaliadas em um mesmo ponto. Tal fato facilita bastante a implementação das condições de fronteira que deverão ser satisfeitas, bem como o emprego de diversos esquemas numéricos. Por exemplo, para a equação do transporte de vorticidade (2.20), podemos empregar, basicamente, qualquer método numérico destinado à clássica equação de convecção-difusão.

Outro elemento de fundamental importância que deve ser considerado diz respeito ao estabelecimento das condições de fronteira para as funções de vorticidade e de corrente, bem como a atualização, a cada instante de tempo de tais condições. O mecanismo que aproxima essas funções nas fronteiras deve levar em consideração aspectos físicos adicionais, dificultando a apresentação de um único mecanismo válido para qualquer situação de fronteira especificada[8].

Assim, os passos a serem executados são, basicamente, os seguintes:

1. definição do domínio físico e da malha associada onde as equações serão resolvidas;

2. entrada do campo de velocidade inicial;

3. especificação das funções de corrente e de vorticidade nos contornos;

4. atualiza-se o valor da vorticidade nos pontos interiores ao domínio, pela resolução numérica da equação

$$\omega_t + u\omega_x + v\omega_y = \frac{1}{Fr}\left[(g^x)_y - (g^y)_x\right] + \frac{1}{Re}\left(\omega_{xx} + \omega_{yy}\right); \tag{6.1}$$

5. resolve-se a equação de Poisson para a função de corrente, onde o termo fonte envolve os valores para a vorticidade recém atualizados:

$$\psi_{yy} + \psi_{xx} = \omega; \tag{6.2}$$

6. atualiza-se o campo de velocidades u e v, empregando

$$\begin{cases} u = \psi_y \\ v = -\psi_x; \end{cases} \tag{6.3}$$

7. atualiza-se a vorticidade nos contornos;

8. retorna-se ao passo (3), repetindo o procedimento subsequente até atingir um estado estacionário ou um instante de tempo desejado.

Capítulo 7

Resultados numéricos

7.1 O simulador *InnerFlow 2D* em desenvolvimento

Para realizar a simulação numérica de um escoamento incompressível de um fluido newtoniano, de acordo com as equações governantes apresentadas neste trabalho, está em desenvolvimento um simulador numérico (o *InnerFlow 2D*, sendo aqui empregada a versão 0.5, finalizada em 04 de novembro de 2007), atualmente baseado apenas na versão SOLA do método MAC. Para início de uma simulação, devem ser fornecidos, simplesmente:

- os parâmetros do escoamento (números de Reynolds, Froude e forças de campo envolvidas);
- os parâmetros numéricos (espaçamento da malha, passo temporal, critério de parada para a solução numérica da equação de Poisson, percentual de deslizamento de fluido nas paredes rígidas, dimensões do domínio físico);
- mapa de fronteiras e obstáculos (especificando a localização de cada tipo de fronteira, bem como dos obstáculos inseridos na região de escoamento).

A definição do mapa de fronteiras pelo usuário se dá através da definição de uma matriz gabarito, que associa a cada célula do domínio computacional um *flag*, que indica a função de cada célula no escoamento. Para isso, é empregada a seguinte legenda:

- **F**: célula cheia de fluido;
- **B**: célula de fronteira rígida, sendo seu tipo, com ou sem deslizamento especificado no parâmetro associado ao percentual de deslizamento na mesma);
- **I**: célula de *inflow*;

- **O**: célula de *outflow*;
- **N**: indica uma célula vazia, pela qual o fluido não escoa por ser interior a um obstáculo.

Uma vez estabelecido tal "gabarito", o programa coloca em listas sequenciais os índices que deverão ser empregados para cada etapa do processo de cálculo da solução numérica. Assim, criamos uma lista para cada célula tipo **F**, onde o processo iterativo de atualização da pressão será efetuado; outras duas listas são utilizadas para indicar, respectivamente, as interfaces das células onde as expressões para o cálculo de ${}^{(0)}u^{n+1}$ e ${}^{(0)}v^{n+1}$ são efetuadas; e assim por diante, para os demais tipos de células e interfaces interessantes ao procedimento numérico.

O objetivo de utilizarmos tais listas é reduzirmos ao máximo a realização de comparações, durante o processo de cálculo da solução numérica, para determinar qual é o tipo de célula que determinado procedimento deve ser aplicado. Isso tem se mostrado conveniente, pois, o consumo de memória que isso acarreta é mínimo se comparado ao tempo e facilidade para o processamento subsequente que isto gera, devido ao acesso indexado direto aos elementos de tais listas, as quais podem ser percorridas com extrema facilidade quando desejamos varrer o domínio de solução

No presente estágio, embora a modularização de cada tarefa deste programa permita facilmente a adoção de diferentes estratégias de discretização para os termos convectivos e viscosos, a versão atual adota apenas as discretizações apresentadas quando discutimos as condições de estabilidade anteriormente neste trabalho. É com base nesssas discretizações que os resultados numéricos, a seguir, foram confeccionados.

Além desse módulo, que trabalha com a versão SOLA do método MAC, um segundo código, que ainda não foi incorporado ao *InnerFlow* começou a ser desenvolvido. Este novo módulo trabalhará com a solução numérica das equações de Navier-Stokes pelo acoplamento corrente-vorticidade, e, atualmente, está apto apenas para simular o problema da caixa com tampa deslizante. Para este caso, as equações do acoplamento corrente-vorticidade são discretizadas por diferenças centradas para as derivadas espaciais e Euler explícito para a derivada temporal.

O objetivo de tal simulador é facilitar a realização de experimentos numéricos, possibilitando a comparação da solução numérica dos mais variados problemas através dos mais diversos métodos. A grande qualidade do código existente, que permite seu emprego em tais tarefas reside, justamente, na sua flexibilidade, bem como na maneira otimizada de realizar a simulação numérica (a qual esta sendo aprimorada cada vez mais, haja vistas a grande demanda computacional que a solução numérica de uma equação de Poisson a cada passo temporal exige).

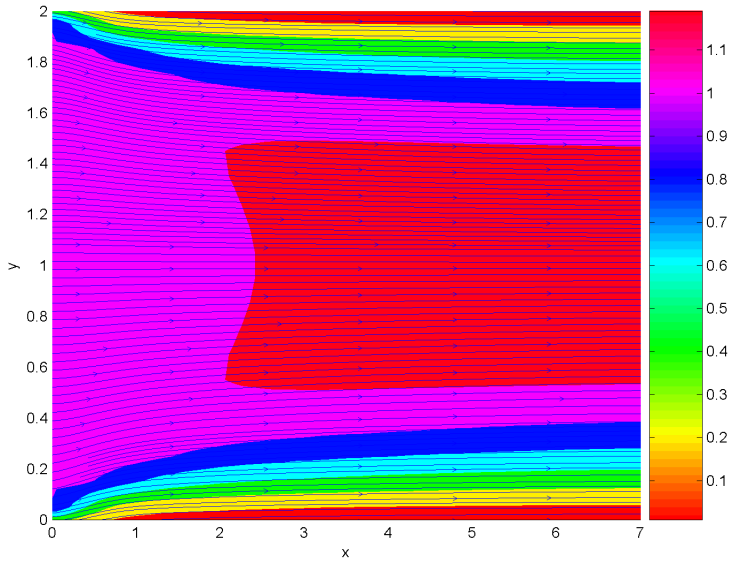
No que segue, vários resultados, obtidos com o código já existente, são apresentados.

7.2 Problema 1: canal

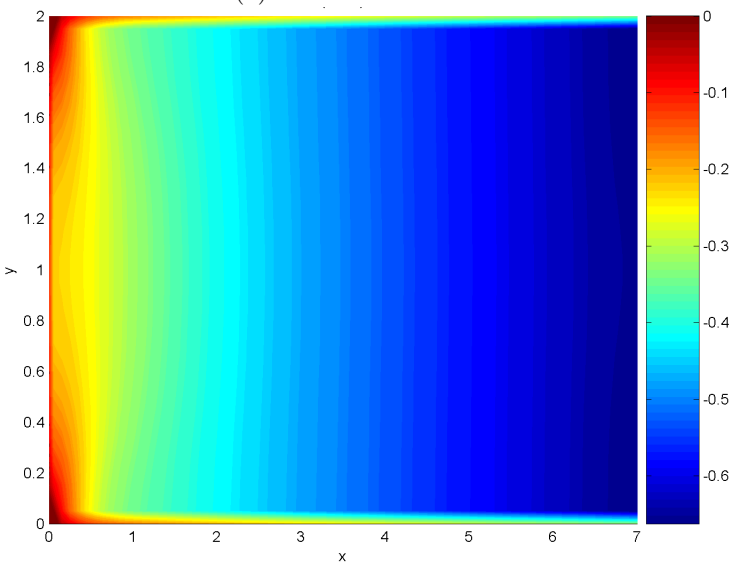
Para este problema, definimos o *inflow*, verticalmente, na extremidade esquerda do domínio x-espacial, colocando o *outflow* no extremo direito do mesmo. A velocidade normal no *inflow* é setada em 1m/s, enquanto que a velocidade tangencial é tomada nula. As fronteiras superiores e inferiores são paredes rígidas onde aplicamos a condição de não deslizamento (isto é, velocidade tangencial nula). Todas as unidades são consideradas no SI.

Apresentamos o resultado da simulação em três testes, que utilizam o método SOLA e os mesmos parâmetros, a menos do número de Reynolds (Re), a qual assume valores 100 (Figura 7.1 e Figura 7.2), 500 (Figura 7.3 e Figura 7.4) e 1000 (Figura 7.5 e Figura 7.6). Os demais parâmetros da simulação computacional são: deslizamento = 0, $\beta_0 = 1.85$, dilatação tolerada = 1e-010, $\delta x = 0.1$, $\delta x = 0.1$, $\delta t = 0.001$, $t = 50$ (Unidades no SI).

Nas ilustrações dos resultados numéricos apresentados, observamos a camada limite ao longo das fronteiras rígidas e a formação de algumas sutis oscilações espúrias quando Re = 1000, ou seja, a viscosidade cinemática é $\nu = 0.001 m^2/s$.

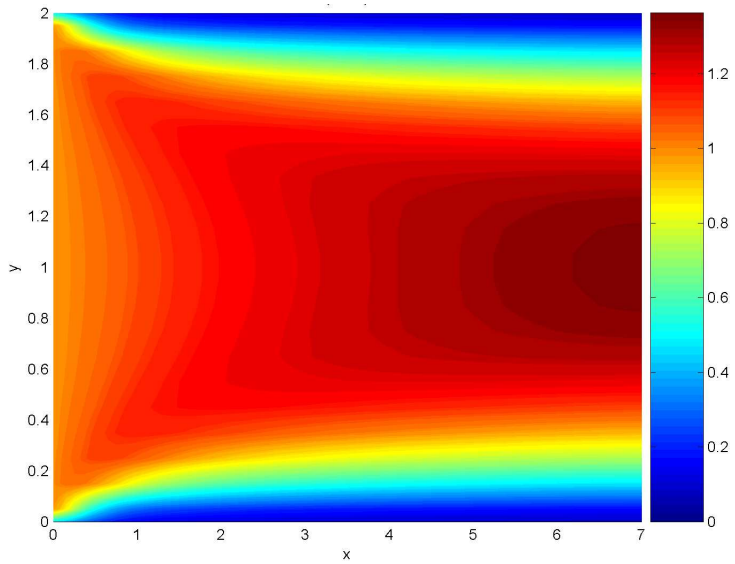


(a)Linhas de Corrente.

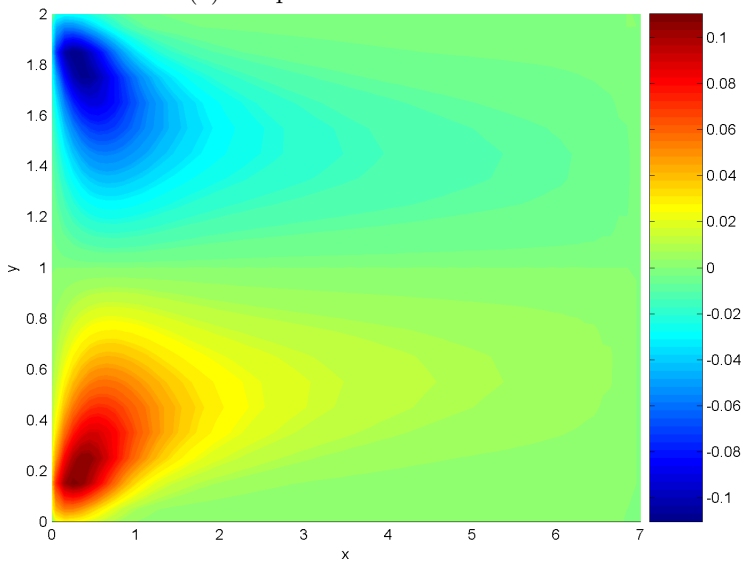


(b)Pressão.

Figura 7.1: Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 1, método SOLA, Re = 100).

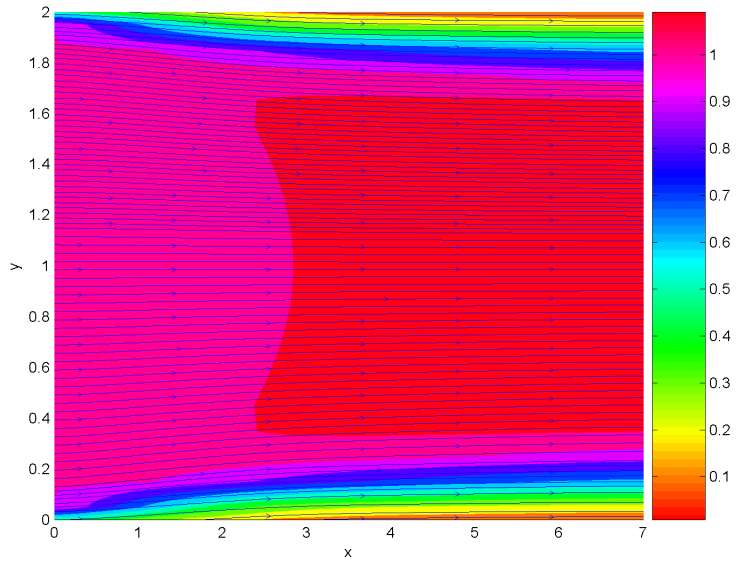


(a)Componente u da velocidade.

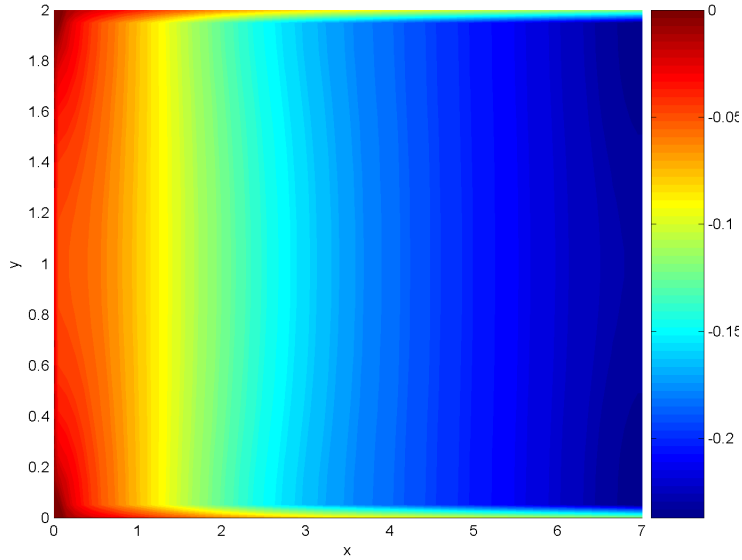


(b)Componente v da velocidade.

Figura 7.2: Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 1, método SOLA, Re = 100).

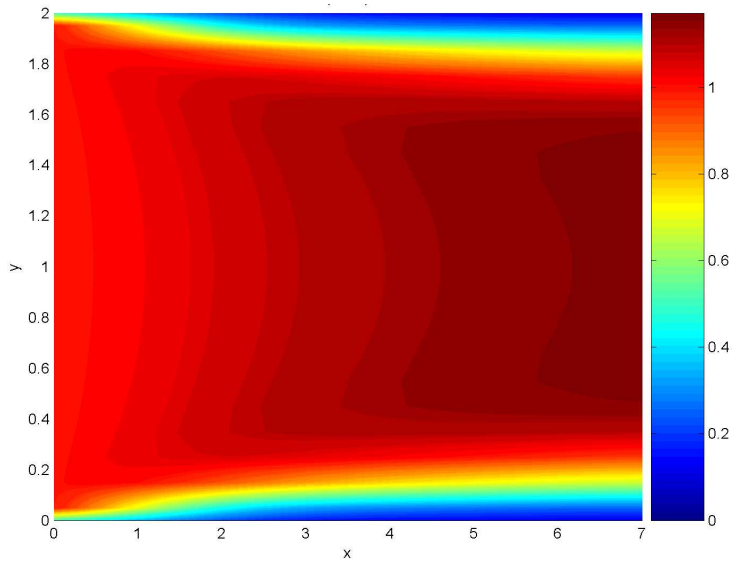


(a)Linhas de Corrente.

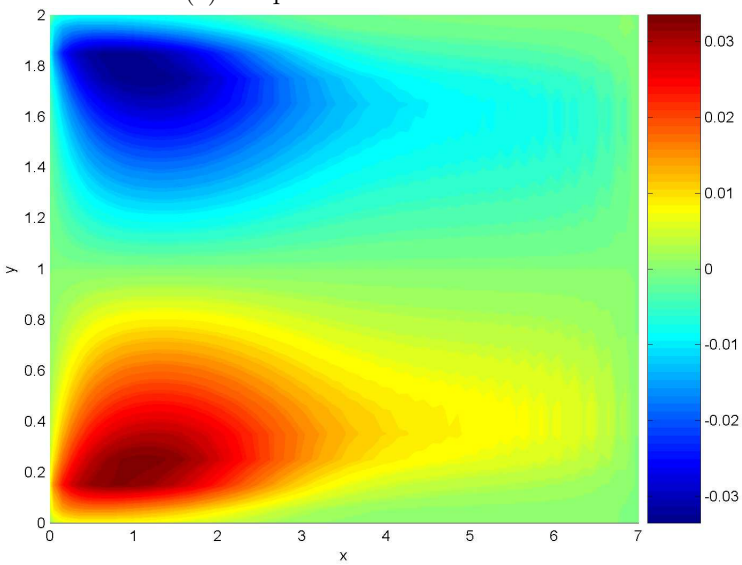


(b)Pressão.

Figura 7.3: Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 1, método SOLA, Re = 500).

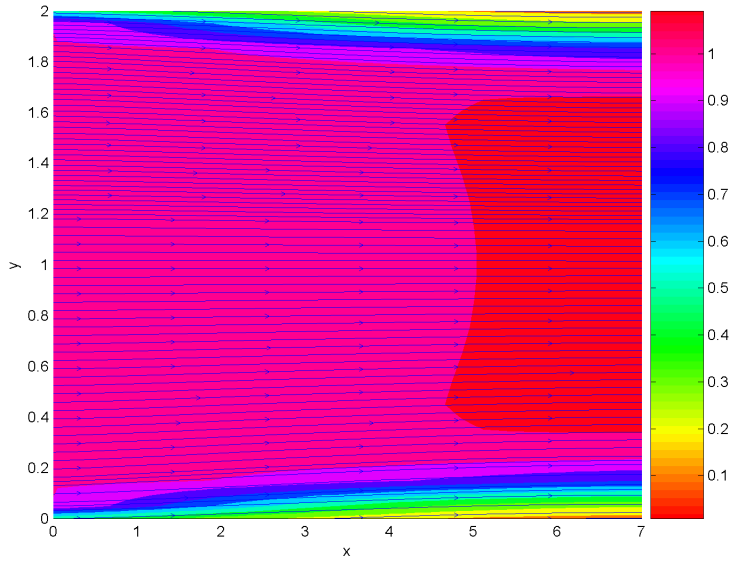


(a)Componente u da velocidade.

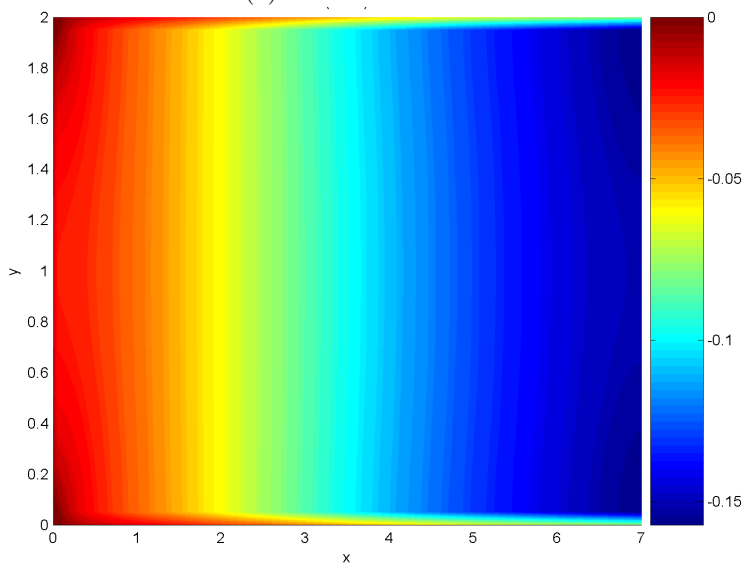


(b)Componente v da velocidade.

Figura 7.4: Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 1, método SOLA, Re = 500).

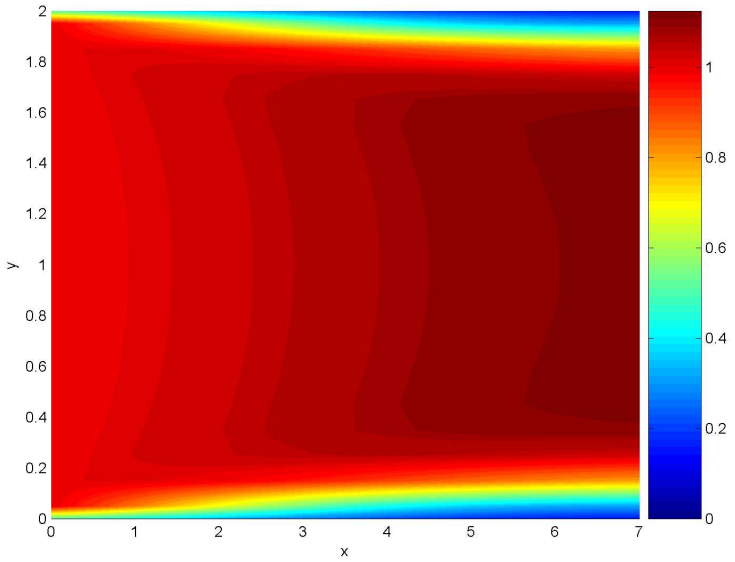


(a)Linhas de Corrente.

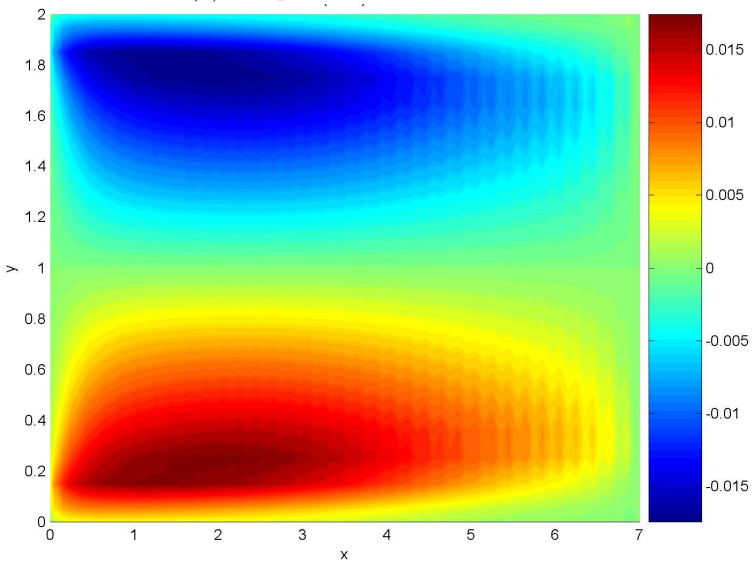


(b)Pressão.

Figura 7.5: Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 1, método SOLA, Re = 1000).



(a)Componente u da velocidade.



(b)Componente v da velocidade.

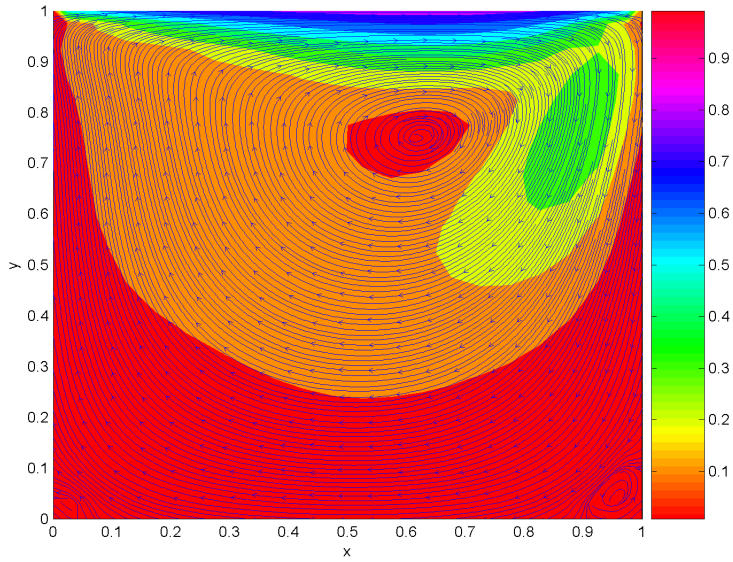
Figura 7.6: Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 1, método SOLA, Re = 1000).

7.3 Problema 2: deslizamento da tampa em uma caixa

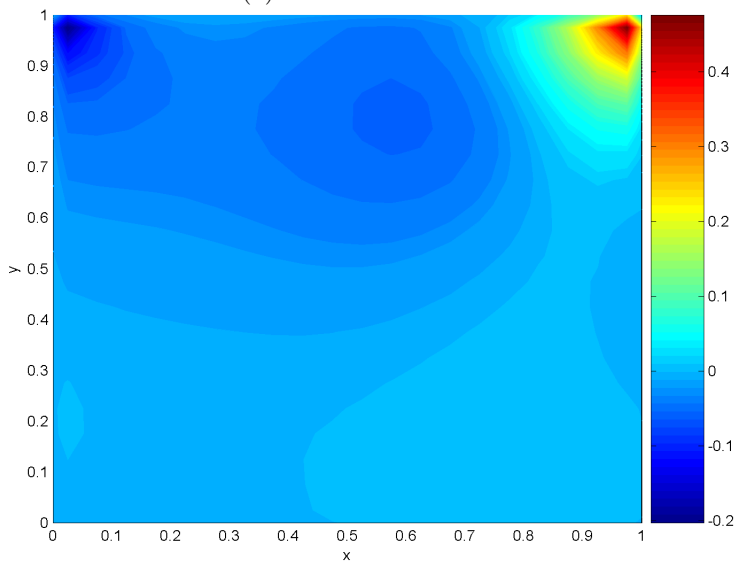
Neste problema consideramos uma caixa cheia de fluido e fazemos sua tampa superior deslizar infinitamente para a direita (é como se colocássemos uma esteira sobre a caixa, com a mesma em contato com o fluido). Para este problema, definimos o *inflow*, horizontalmente, na extremidade superior do domínio y-espacial. A velocidade normal no *inflow* é setada em 0m/s (não existe entrada de fluido na caixa), enquanto que a velocidade tangencial é tomada como 1m/s (velocidade da esteira). As demais fronteiras são paredes rígidas onde aplicamos a condição de não deslizamento (isto é, velocidade tangencial nula). Todas as unidades são consideradas no SI. Nesse problema, aplicamos o método SOLA e o acoplamento vorticidade-função de corrente.

7.3.1 Resultados via solução do método SOLA

Apresentamos o resultado da simulação em três testes, que utilizam os mesmos parâmetros, a menos do número de Reynolds (Re), a qual assume valores 100 (Figura 7.7 e Figura 7.8), 500 (Figura 7.9 e Figura 7.10) e 1000 (Figura 7.11 e Figura 7.12). Os demais parâmetros da simulação computacional são: deslizamento = 0, $\beta_0 = 1.85$, dilatação tolerada = 1e-010, $\delta x = 0.1$, $\delta x = 0.1$, $\delta t = 0.001$, $t = 50$ (Unidades no SI). Notamos que as recirculações se tornam mais intensas conforme diminuimos a viscosidade cinemática, isto é, conforme aumentamos o número de Reynolds.

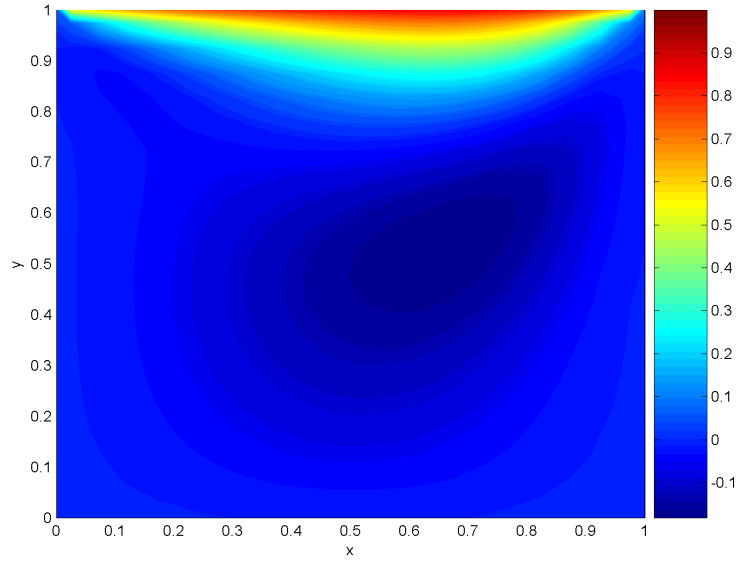


(a)Linhas de Corrente.

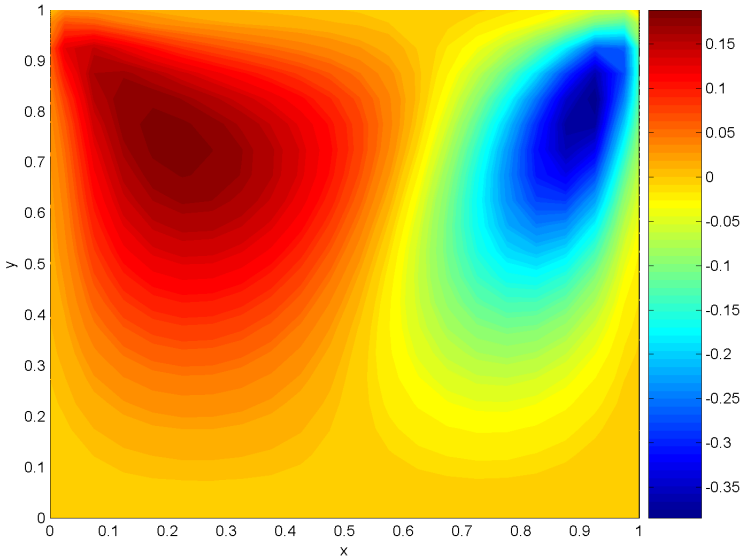


(b)Pressão

Figura 7.7: Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 2, método SOLA, Re = 100).

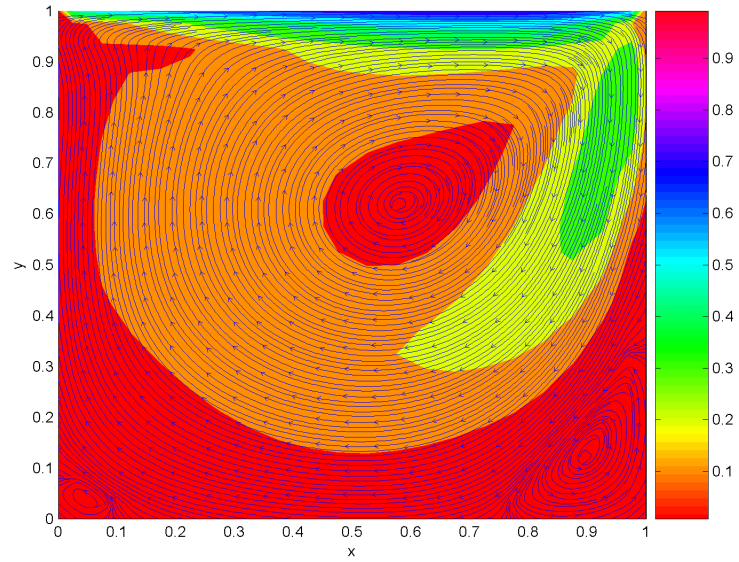


(a)Componente u da velocidade.

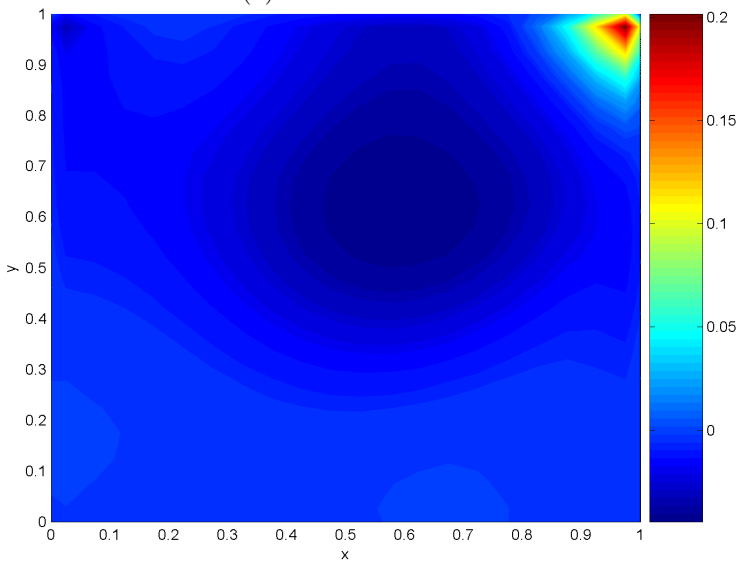


(b)Componente v da velocidade.

Figura 7.8: Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 2, método SOLA, Re = 100).

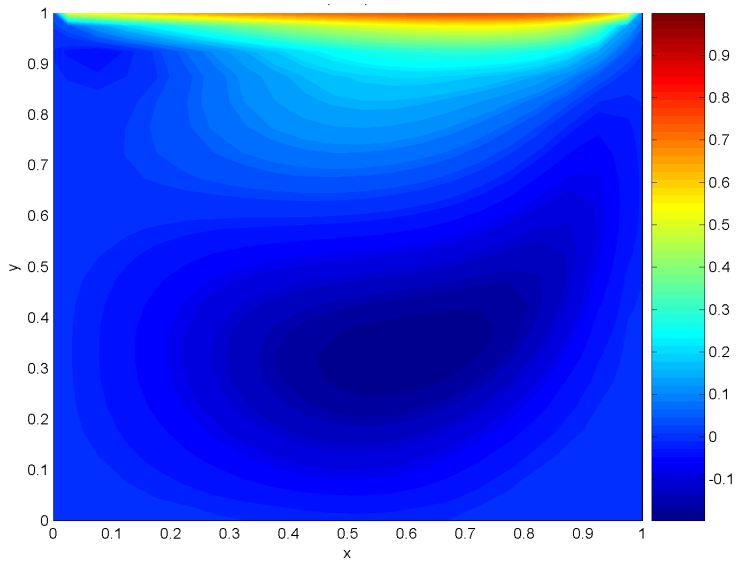


(a)Linhas de Corrente.

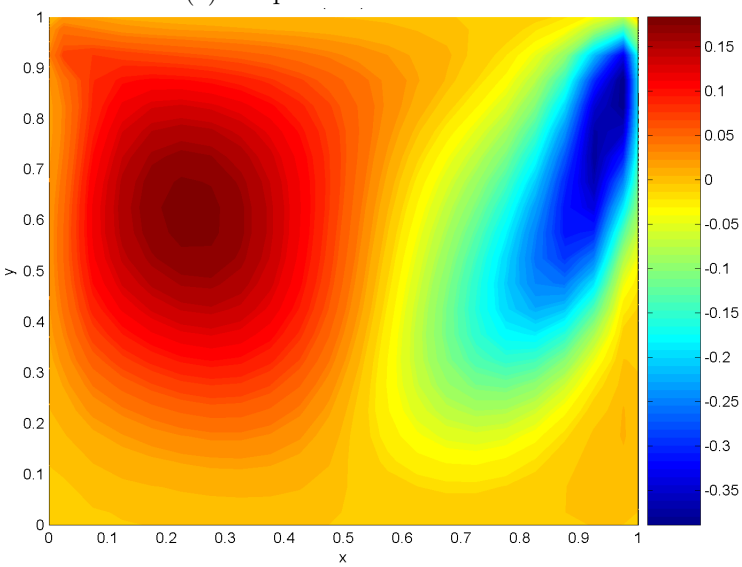


(b)Pressão.

Figura 7.9: Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 2, método SOLA, Re = 500).

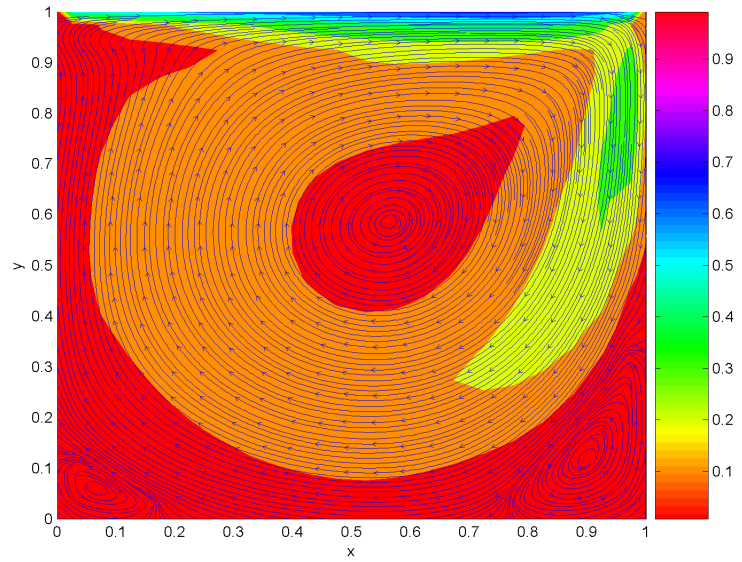


(a)Componente u da velocidade.

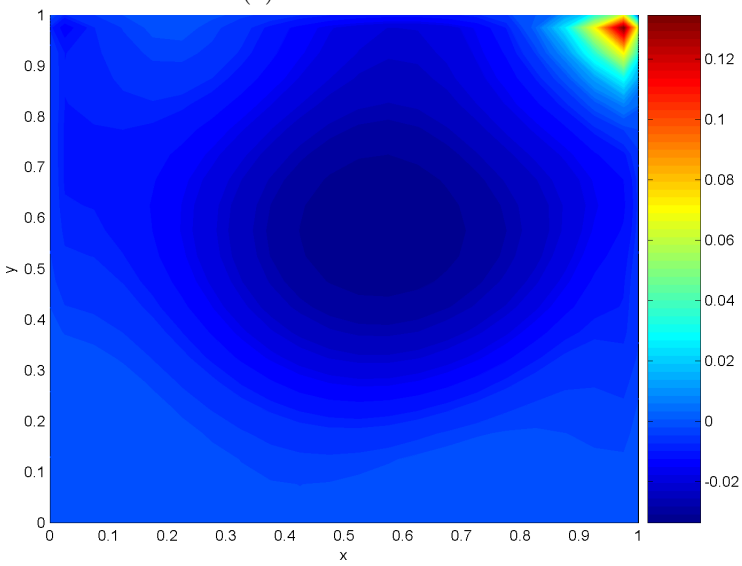


(b)Componente v da velocidade.

Figura 7.10: Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 2, método SOLA, Re = 500).

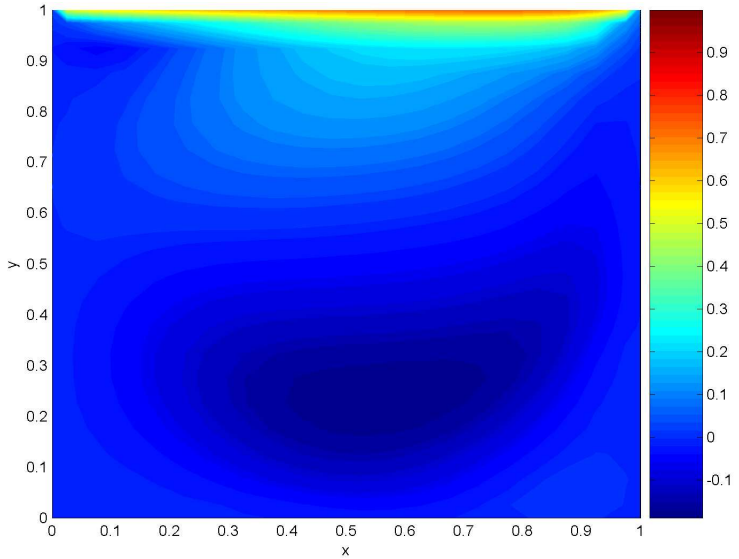


(a)Linhas de Corrente.

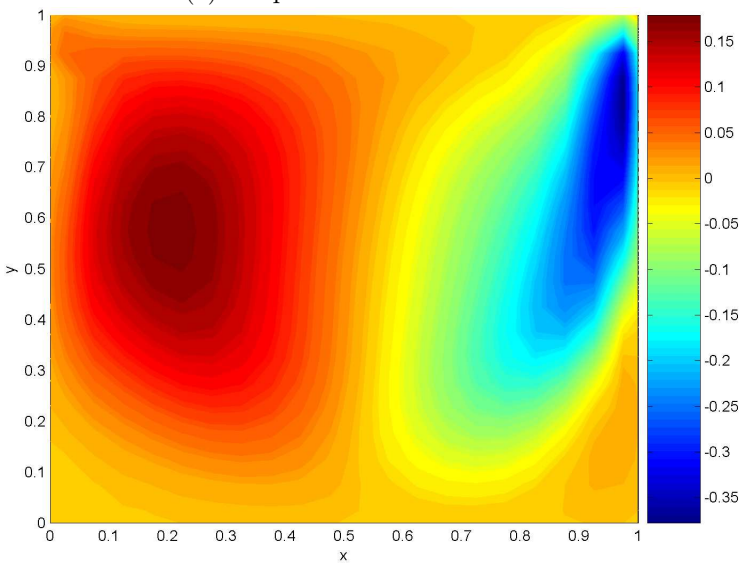


(b)Pressão.

Figura 7.11: Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 2, método SOLA, Re = 1000).



(a)Componente u da velocidade.



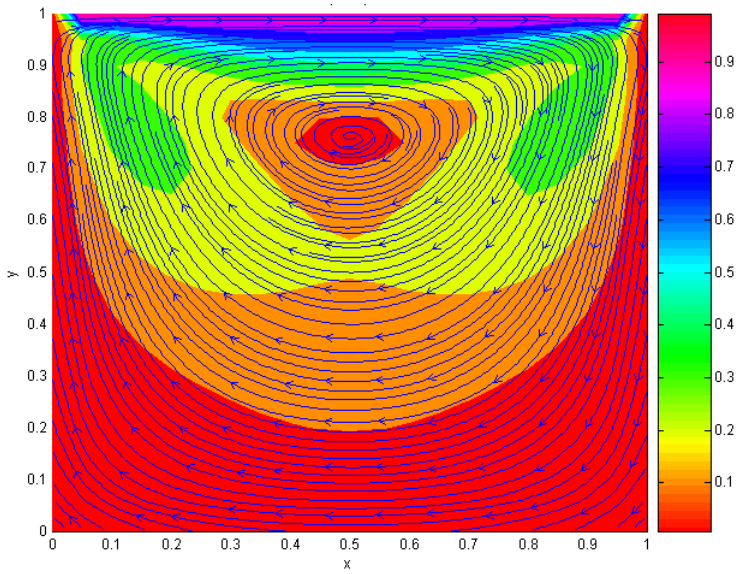
(b)Componente v da velocidade.

Figura 7.12: Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 2, método SOLA, Re = 1000).

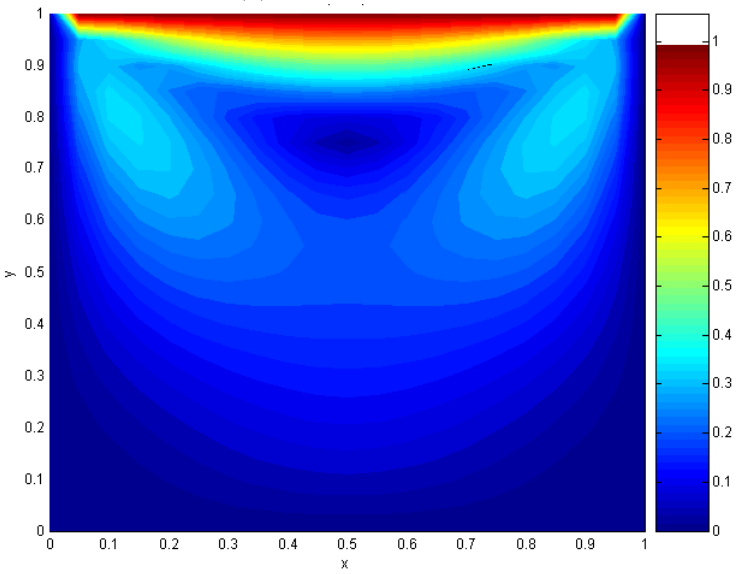
7.3.2 Resultados via solução do acoplamento corrente-vorticidade

Na discretização das EDPs que compõem este acoplamento, para a realização destas simulações, foram empregadas diferenças centradas de segunda ordem para derivadas espaciais e Euler explícito para o termo transiente (verificou-se que discretizações para este termo de ordem mais elevada eram "contaminadas" pela menor ordem da discretização usada nos demais termos). Nas condições de fronteira para a função de vorticidade foram consideradas expansões em série de Taylor a partir da fronteira, sendo que fatores intrínsecos ao problema foram utilizados para simplificar e re-agrupar os termos. Com essas discretizações, no entanto, foi possível constatar na solução numérica uma alta dissipação totalmente espúria (repare que, apesar de três valores distintos para a viscosidade terem sido usados, os resultados são semelhantes, indicando que a dissipação real apresentada pela solução supera a maior das três viscosidades cinemáticas empregadas), eliminando as zonas de recirculação que eram esperadas. Isso fornece fortes indícios de que a solução das equações que compõem esse acoplamento necessitam de métodos menos dissipativos e de maior ordem de precisão para gerarem resultados numéricos satisfatórios. Para exemplificação numérica, tais resultados são apresentados no que segue, os quais servem apenas do ponto de vista da experimentação numérica para exemplificarem os efeitos acima mencionados.

Apresentamos o resultado da simulação em três testes, que utilizam os mesmos parâmetros, a menos do número de Reynolds (Re), a qual assume valores 100 (Figura 7.13 e Figura 7.14), 500 (Figura 7.15 e Figura 7.16) e 1000 (Figura 7.17 e Figura 7.18). Os demais parâmetros da simulação computacional são: deslizamento = 0, $\beta_0 = 1.85$, dilatação tolerada = 1e-010, $\delta x = 0.1$, $\delta x = 0.1$, $\delta t = 0.001$, $t = 50$ (Unidades no SI).

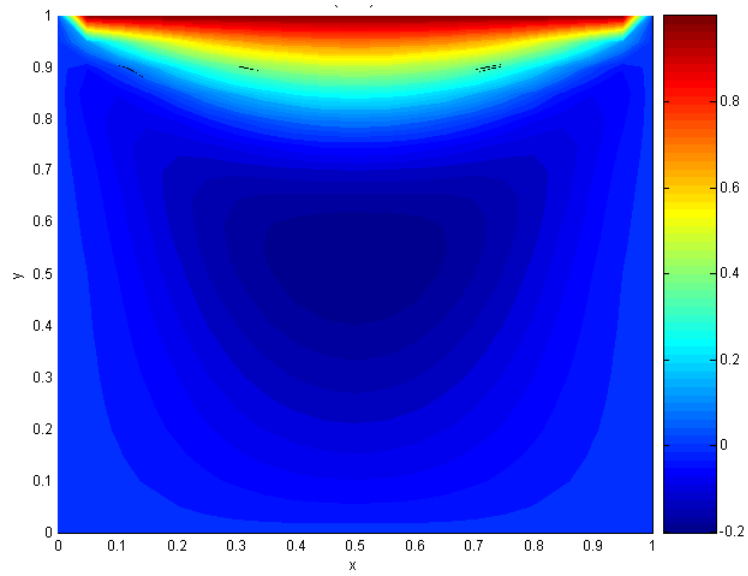


(a)Linhas de Corrente.

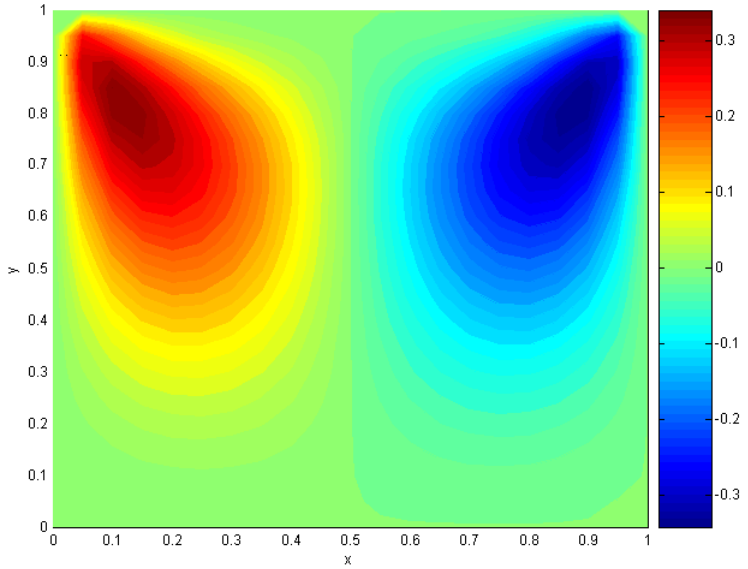


(b)Velocidade.

Figura 7.13: Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a velocidade (Problema 2, acoplamento pressão-velocidade, Re = 100).

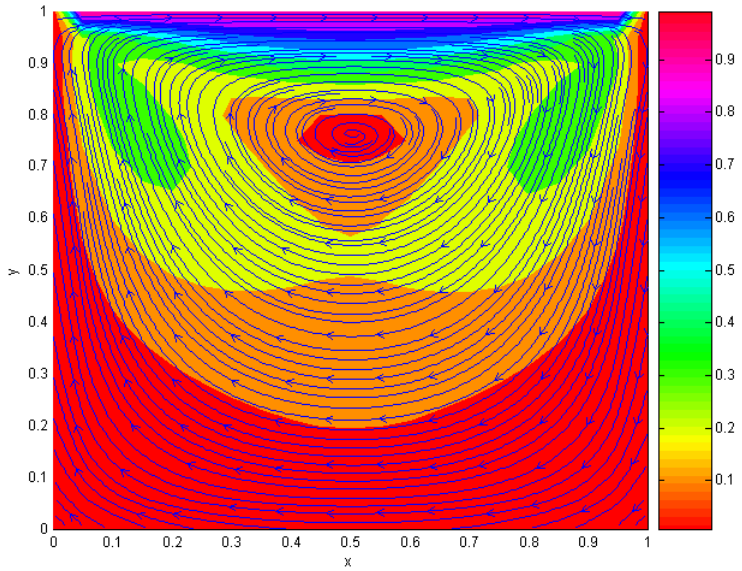


(a)Componente u da velocidade.

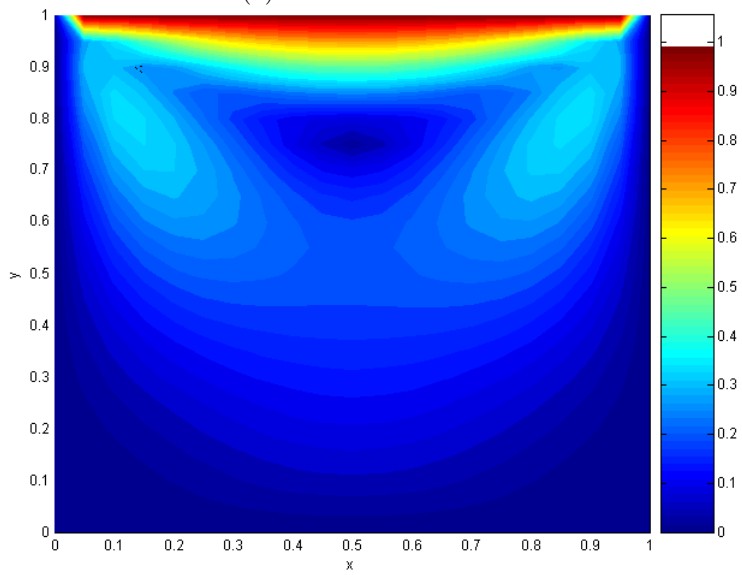


(b)Componente v da velocidade.

Figura 7.14: Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 2, acoplamento pressão-velocidade, Re = 100).

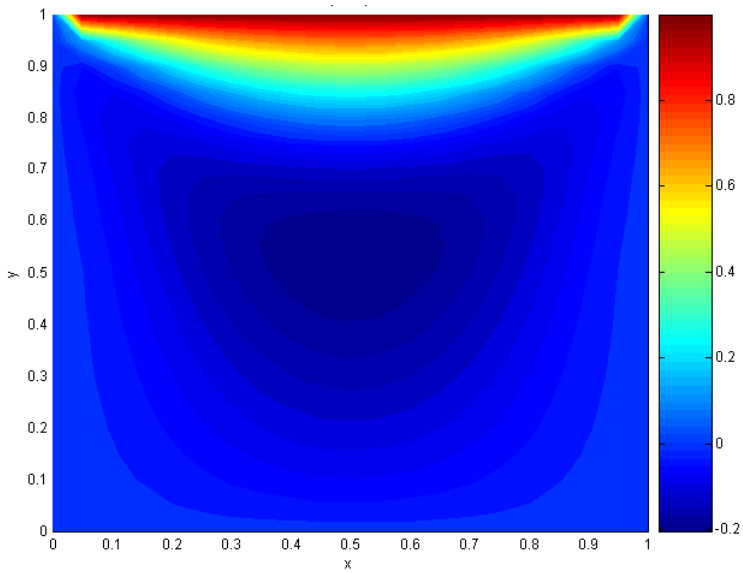


(a)Linhas de Corrente.

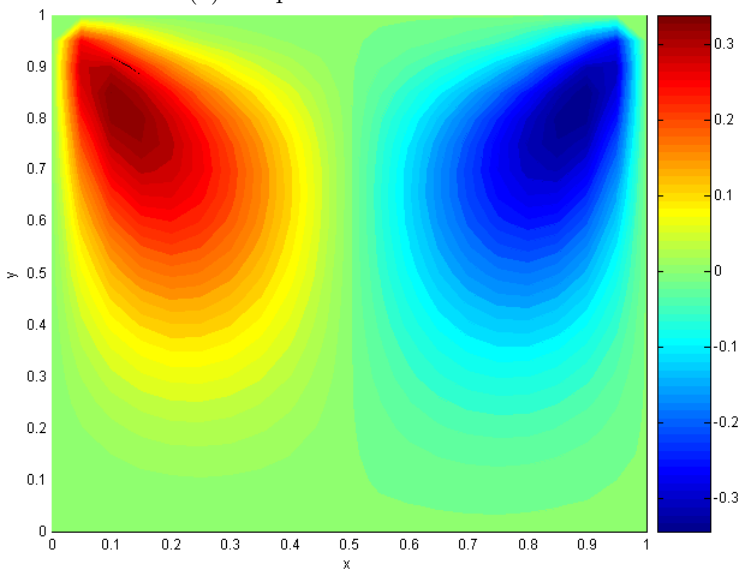


(b)Velocidade.

Figura 7.15: Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a velocidade (Problema 2, acoplamento pressão-velocidade, Re = 500).

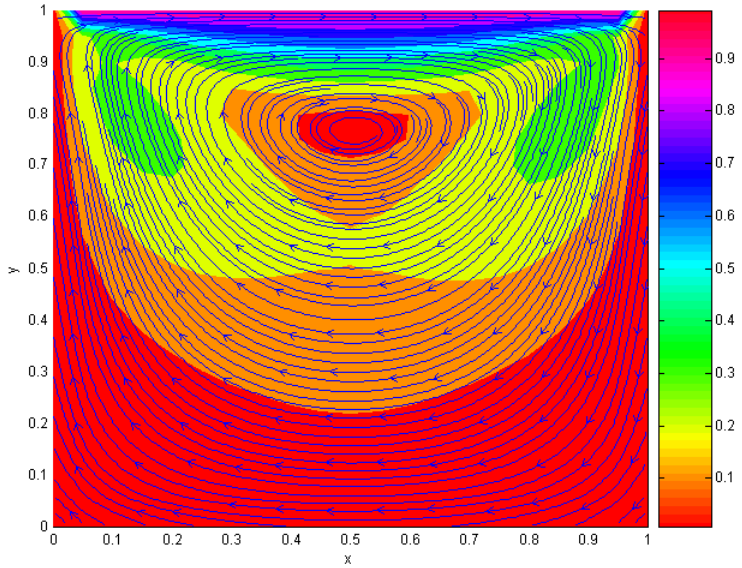


(a)Componente u da velocidade.

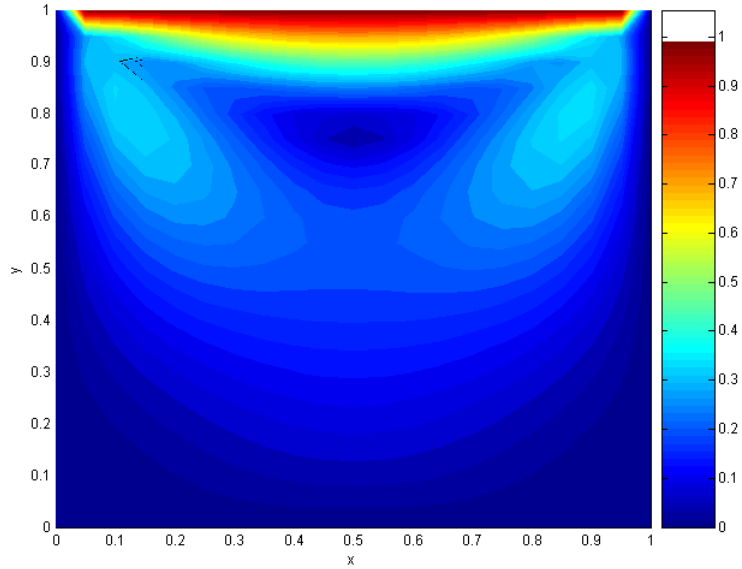


(b)Componente v da velocidade.

Figura 7.16: Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 2, acoplamento pressão-velocidade, Re = 500).

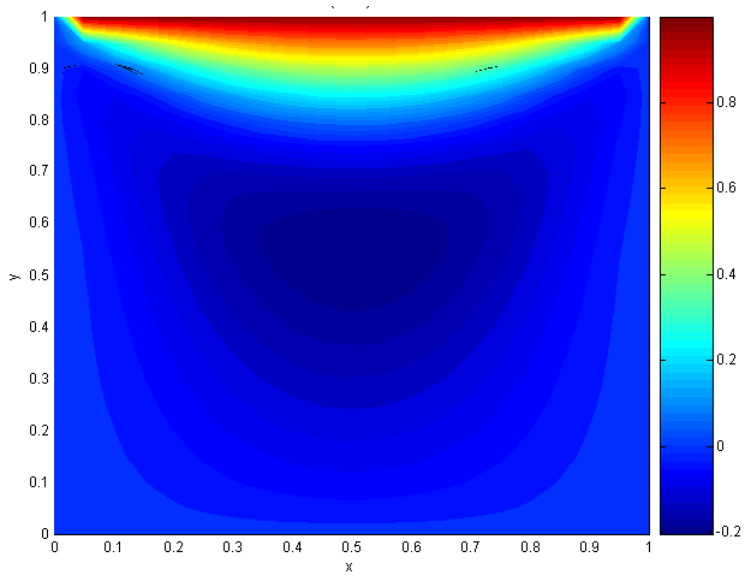


(a)Linhas de Corrente.

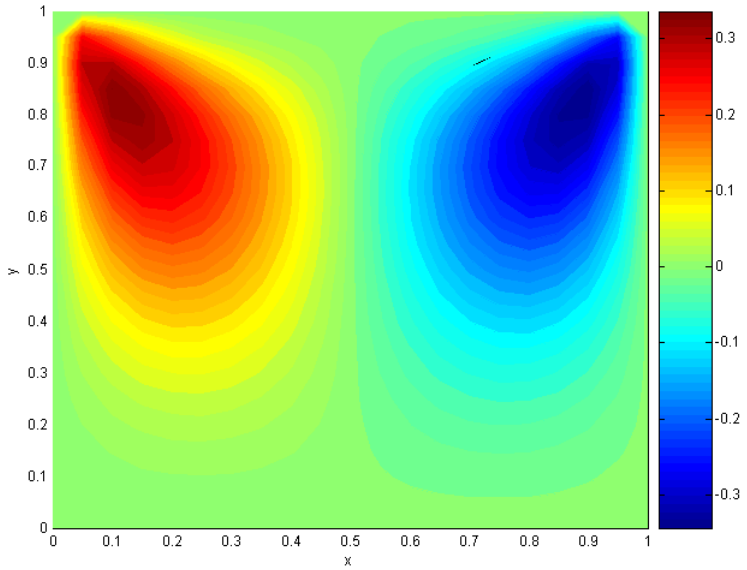


(b)Velocidade.

Figura 7.17: Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a velocidade (Problema 2, acoplamento pressão-velocidade, Re = 1000).



(a)Componente u da velocidade.



(b)Componente v da velocidade.

Figura 7.18: Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 2, acoplamento pressão-velocidade, Re = 1000).

7.4 Problema 3: degrau em um tubo

Para este problema, definimos o *inflow*, verticalmente, na extremidade esquerda do domínio x-espacial, colocando o *outflow* no extremo direito do mesmo. A velocidade normal no *inflow* é setada em 1m/s, enquanto que a velocidade tangencial é tomada nula. As fronteiras superiores, inferiores e do degrau são paredes rígidas onde aplicamos a condição de não deslizamento (isto é, velocidade tangencial nula). Todas as unidades são consideradas no SI.

O estabelecimento do degrau torna o domínio de solução sendo dado pela seguinte ilustração:

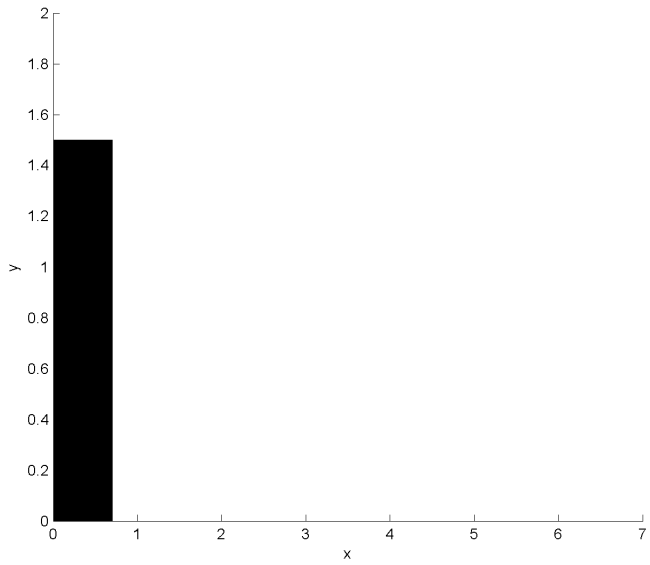
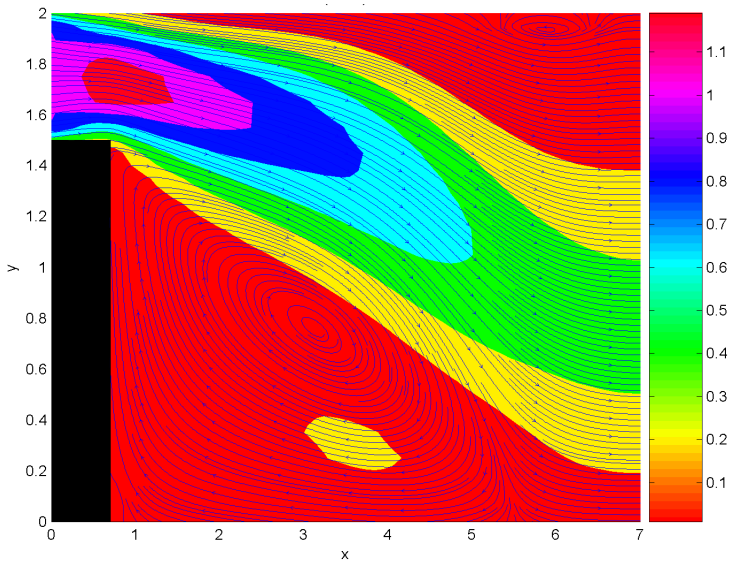
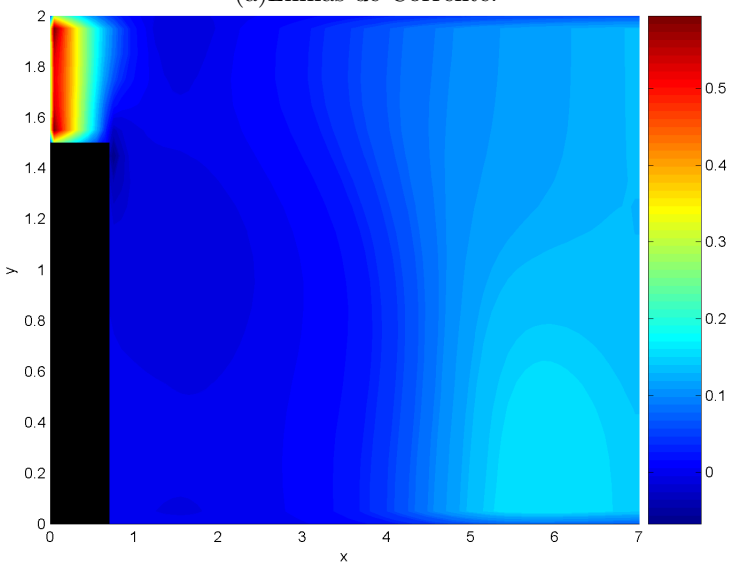


Figura 7.19: Domínio de solução do problema do degrau em um tubo.

Apresentamos o resultado da simulação em dois testes, que utilizam o método SOLA e os mesmos parâmetros, a menos do número de Reynolds, a qual assume valores 100 (Figura 7.20 e Figura 7.21) e 500 (Figura 7.22 e Figura 7.23). Os demais parâmetros da simulação computacional são: deslizamento = 0, $\beta_0 = 1.85$, dilatação tolerada = 1e-010, $\delta x = 0.1$, $\delta x = 0.1$, $\delta t = 0.001$, $t = 50$ (Unidades no SI). Chamamos a atenção do leitor para a zona de recirculação formada após o degrau.

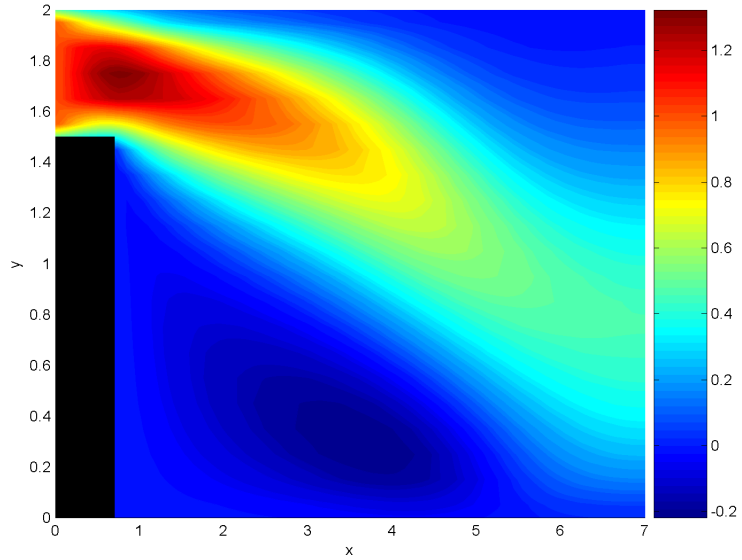


(a)Linhas de Corrente.

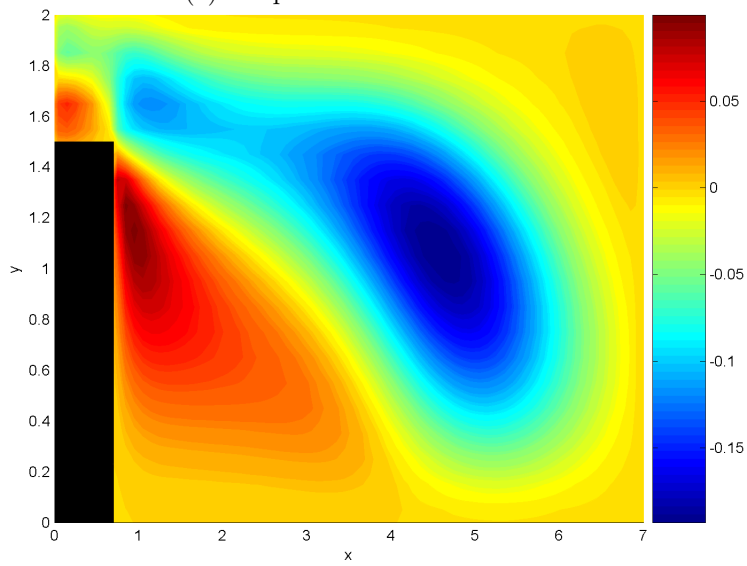


(b)Pressão.

Figura 7.20: Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 3, método SOLA, Re = 100).

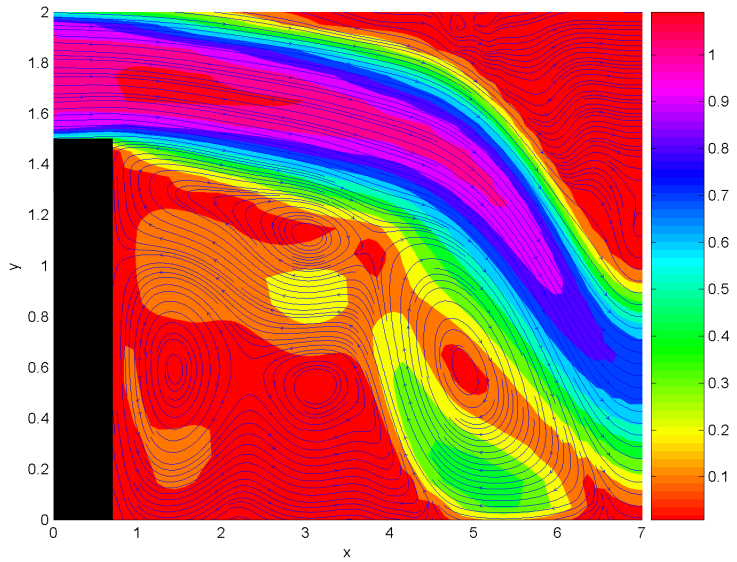


(a)Componente u da velocidade.

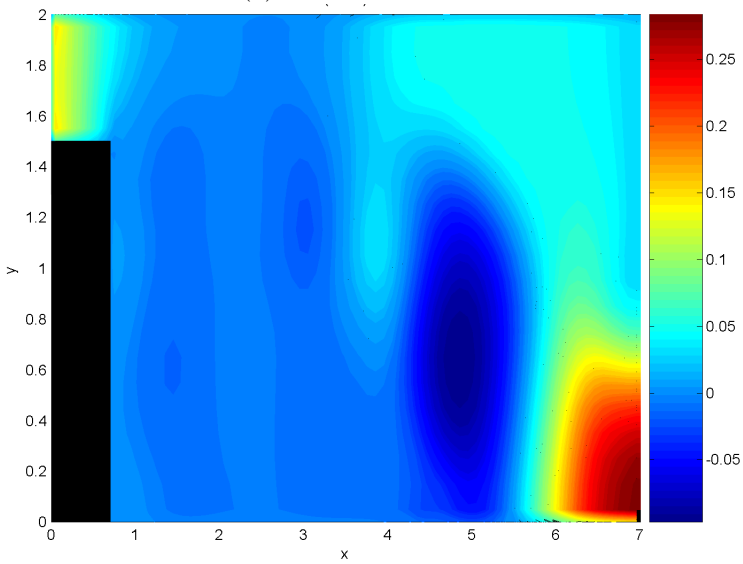


(b)Componente v da velocidade.

Figura 7.21: Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 3, método SOLA, Re = 100).

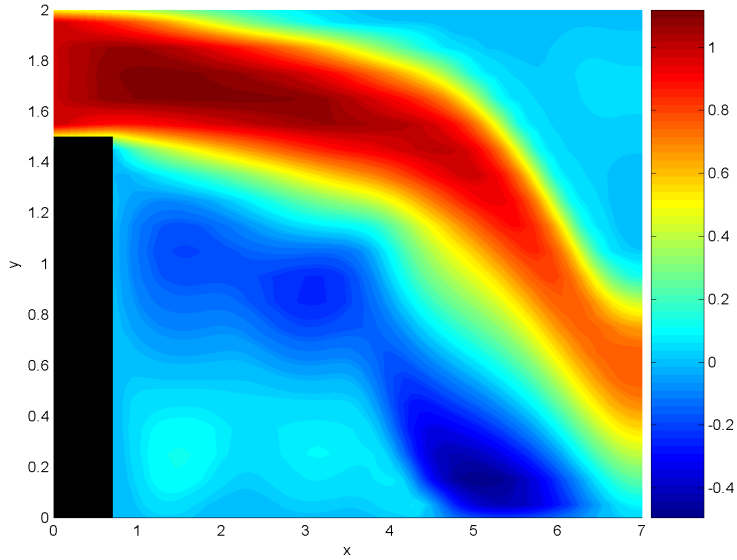


(a)Linhas de Corrente.

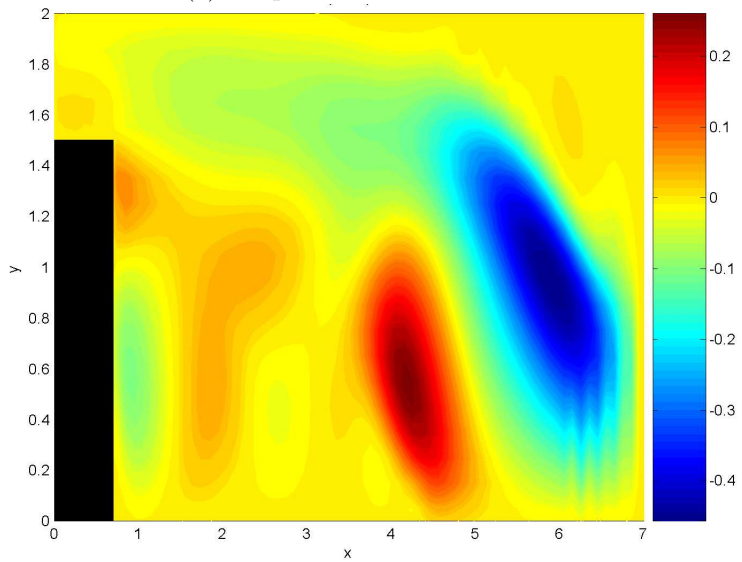


(b)Pressão

Figura 7.22: Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 3, método SOLA, Re = 500).



(a)Componente u da velocidade.



(b)Componente v da velocidade.

Figura 7.23: Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 3, método SOLA, Re = 500).

7.5 Problema 4: canal com obstáculo

Para este problema, definimos o *inflow*, verticalmente, na extremidade esquerda do domínio x-espacial, colocando o *outflow* no extremo direito do mesmo. A velocidade normal no *inflow* é setada em 1m/s, enquanto que a velocidade tangencial é tomada nula. As fronteiras superiores, inferiores e do obstáculo central são paredes rígidas onde aplicamos a condição de não deslizamento (isto é, velocidade tangencial nula). Todas as unidades são consideradas no SI.

O estabelecimento de um obstáculo no interior do canal de escoamento torna o domínio de solução sendo dado pela seguinte ilustração:

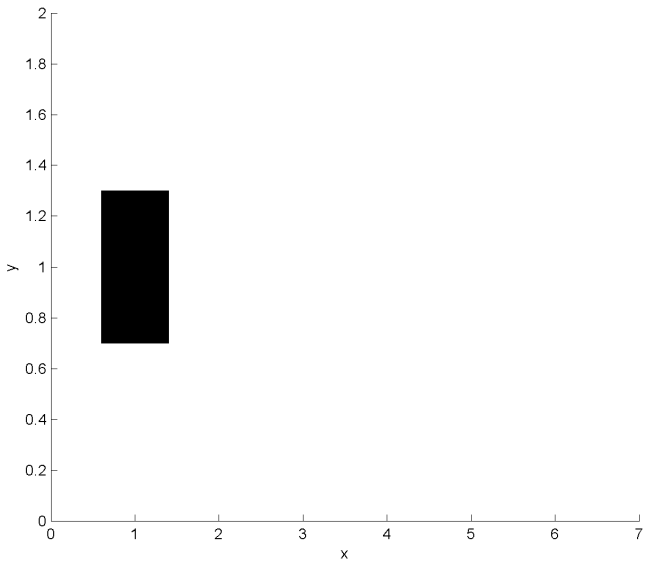
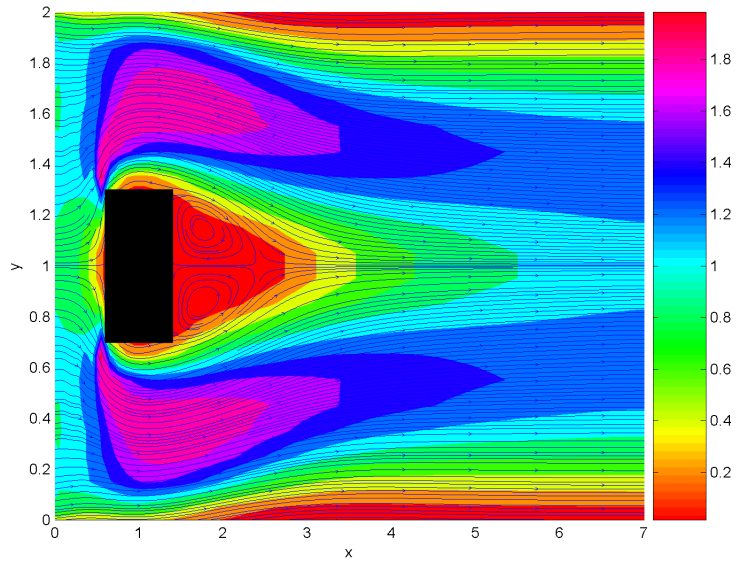
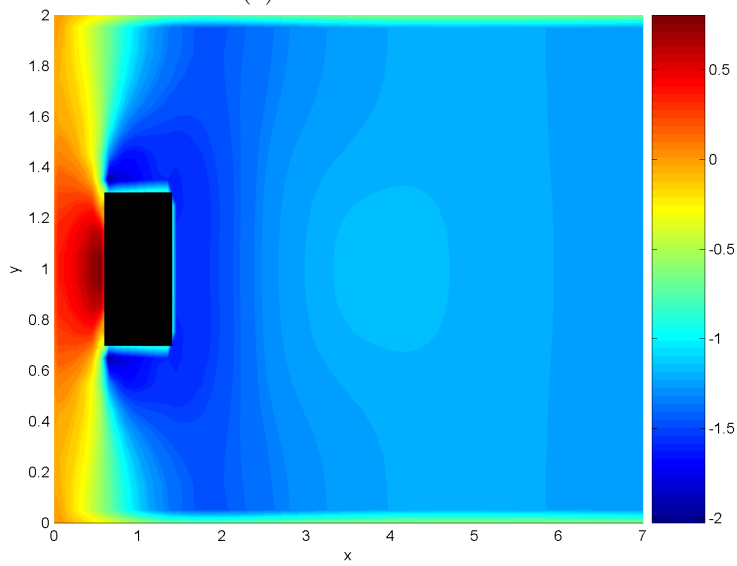


Figura 7.24: Domínio de solução do problema do canal com obstáculo.

Apresentamos o resultado da simulação em dois testes, que utilizam o método SOLA e os mesmos parâmetros, a menos do número de Reynolds, a qual assume valores 100 (Figura 7.25 e Figura 7.26) e 500 (Figura 7.27 e Figura 7.28). Os demais parâmetros da simulação computacional são: deslizamento = 0, $\beta_0 = 1.85$, dilatação tolerada = 1e-010, $\delta x = 0.1$, $\delta x = 0.1$, $\delta t = 0.001$, $t = 50$ (Unidades no SI). Chamamos a atenção do leitor para o grande número de vórtices que se formam no caso em que Re = 500.

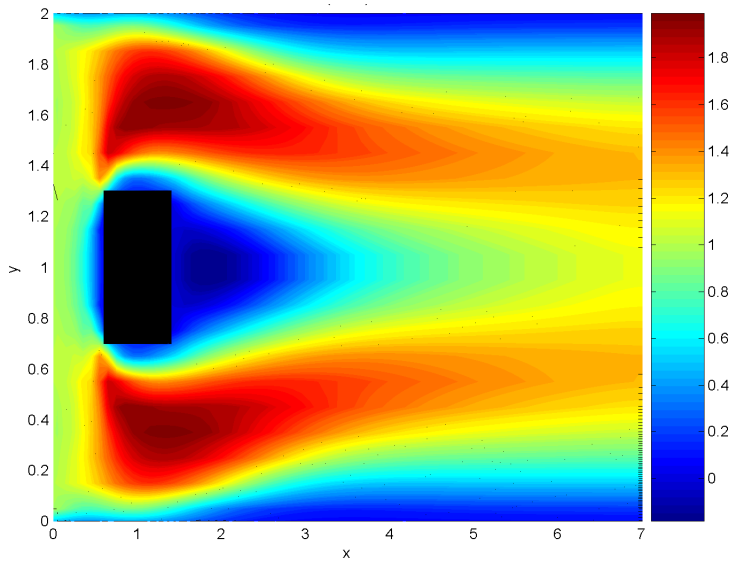


(a)Linhas de Corrente.

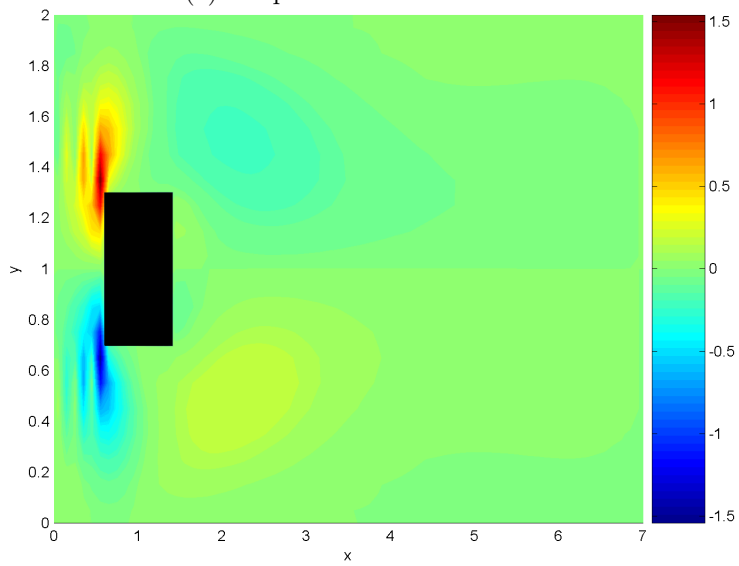


(b)Pressão.

Figura 7.25: Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 4, método SOLA, Re = 100).

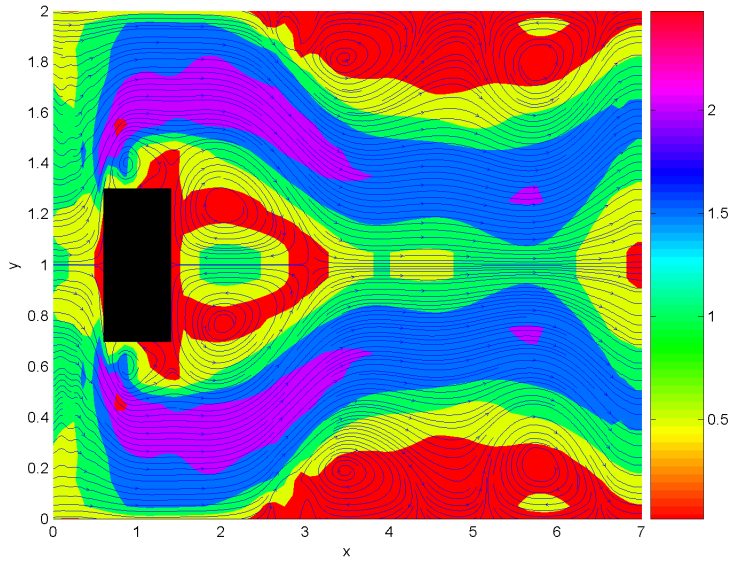


(a)Componente u da velocidade.

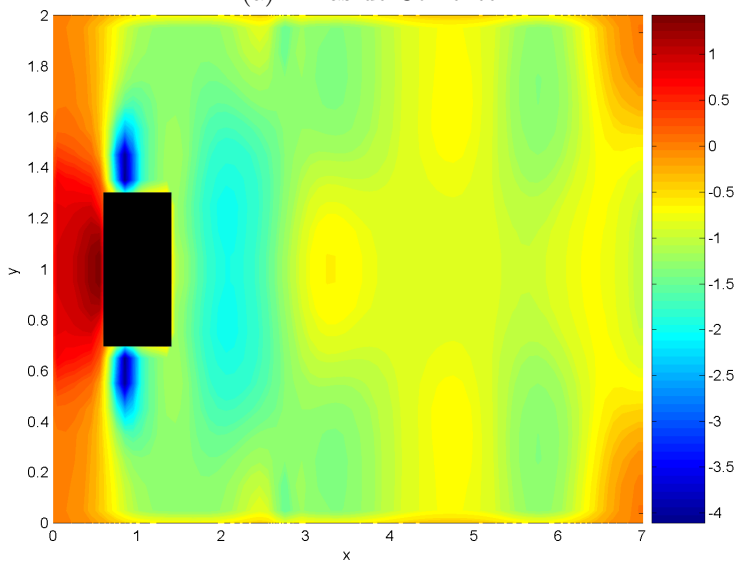


(b)Componente v da velocidade.

Figura 7.26: Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 4, método SOLA, Re = 100).

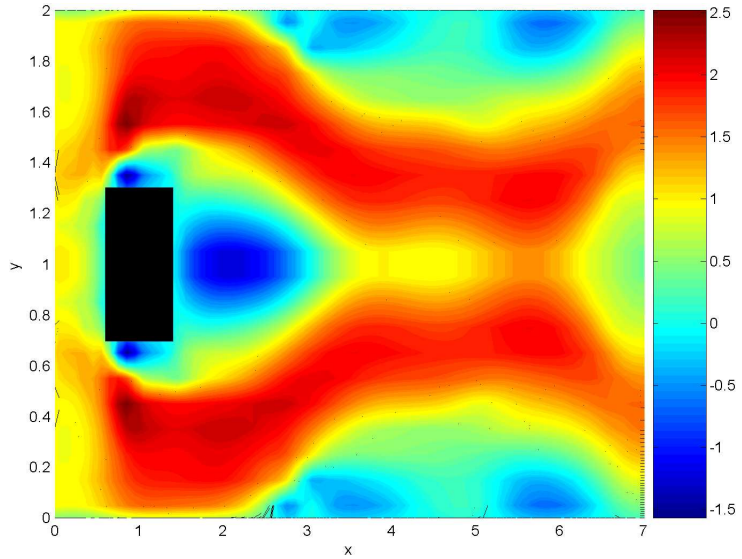


(a)Linhas de Corrente.

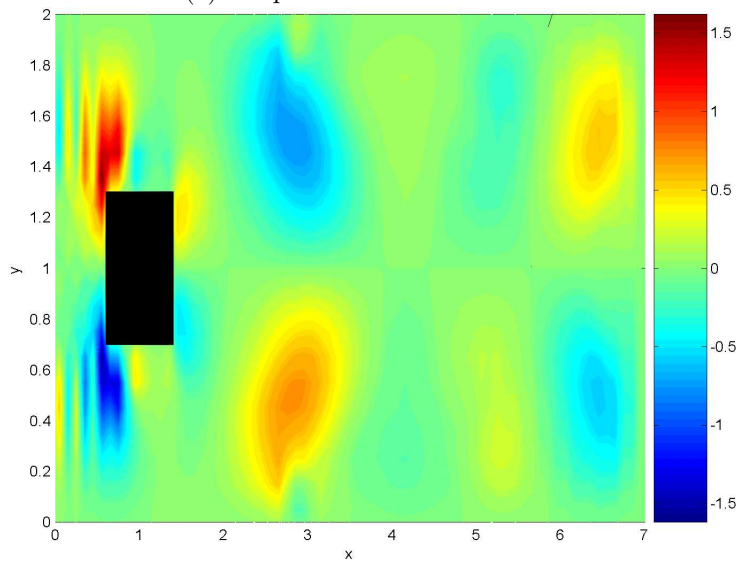


(b)Pressão.

Figura 7.27: Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 4, método SOLA, Re = 500).



(a)Componente u da velocidade.



(b)Componente v da velocidade.

Figura 7.28: Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 4, método SOLA, Re = 500).

7.6 Problema 5: gargalo em um tubo

Para este problema, definimos o *inflow*, verticalmente, na extremidade esquerda do domínio x-espacial, colocando o *outflow* no extremo direito do mesmo. A velocidade normal no *inflow* é setada em 1m/s, enquanto que a velocidade tangencial é tomada nula. As fronteiras superiores, inferiores e do gargalo (estrangulação a montante) são paredes rígidas onde aplicamos a condição de não deslizamento (isto é, velocidade tangencial nula). Todas as unidades são consideradas no SI.

O estabelecimento do gargalo citado torna o domínio de solução sendo dado pela seguinte ilustração:

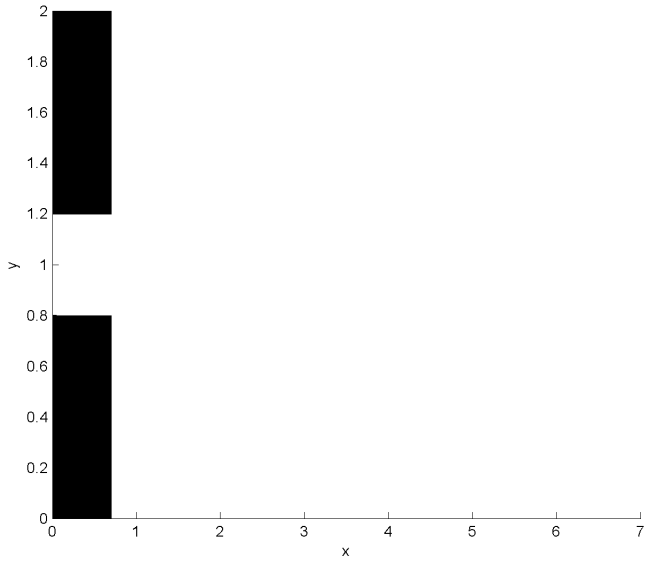
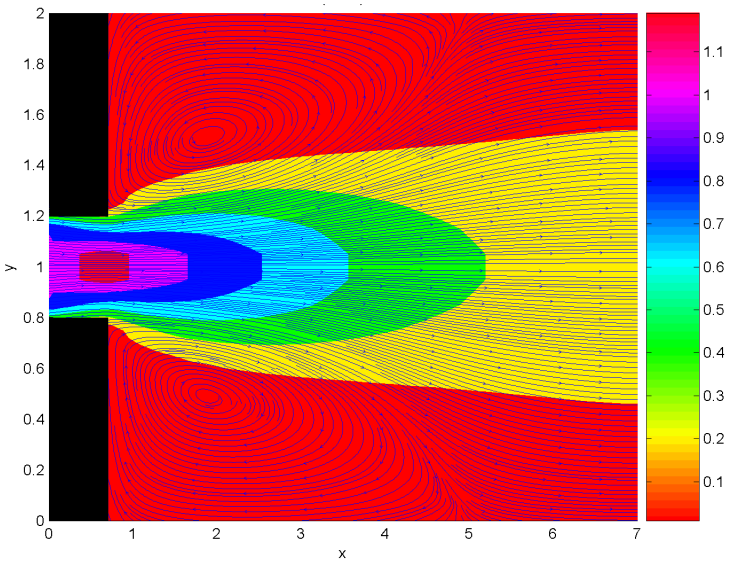
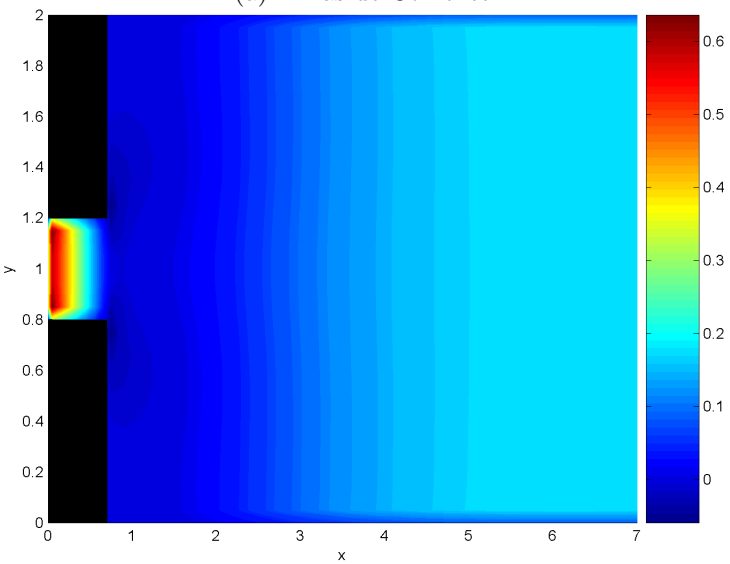


Figura 7.29: Domínio de solução do problema do gargalo em um tubo.

Apresentamos o resultado da simulação em dois testes, que utilizam o método SOLA e os mesmos parâmetros, a menos do número de Reynolds, a qual assume valores 100 (Figura 7.30 e Figura 7.31) e 500 (Figura 7.32 e Figura 7.33). Os demais parâmetros da simulação computacional são: deslizamento = 0, $\beta_0 = 1.85$, dilatação tolerada = 1e-010, $\delta x = 0.1$, $\delta x = 0.1$, $\delta t = 0.001$, $t = 50$ (Unidades no SI). Chamamos a atenção do leitor para a formação de zonas de recirculação após o degrau induzido pelo gargalo.

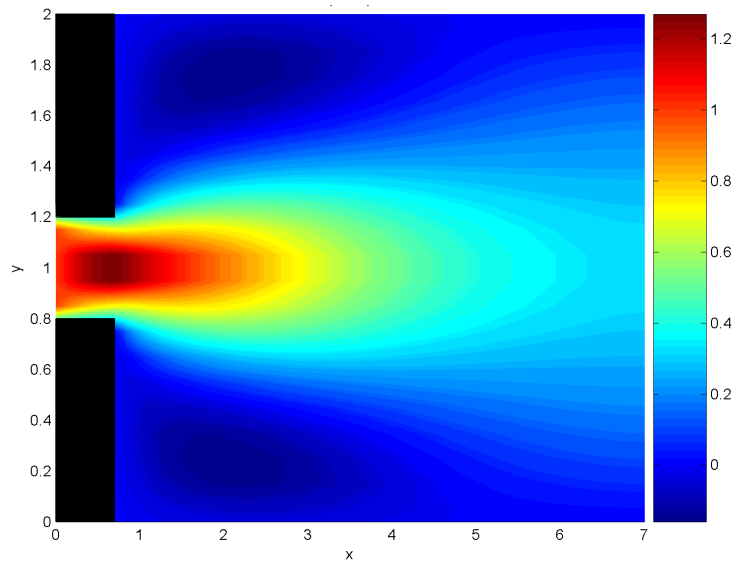


(a)Linhas de Corrente.

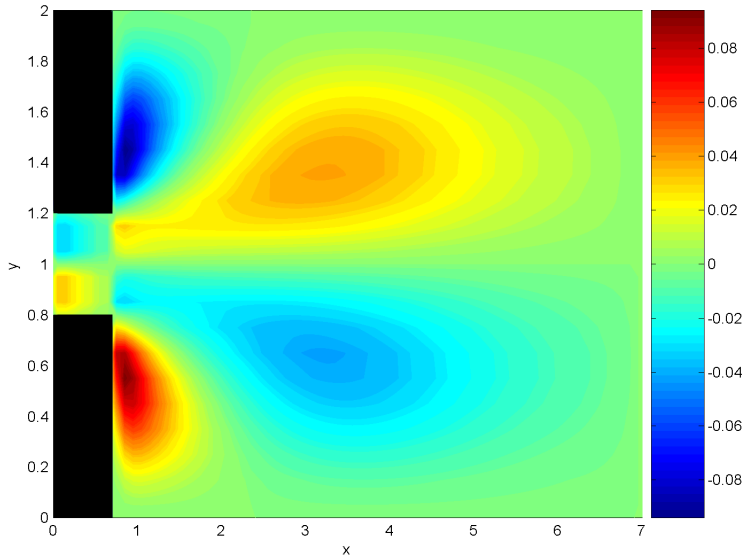


(b)Pressão.

Figura 7.30: Ilustrações das linhas de corrente e do resultado numérico obtido para a pressão (Problema 5, método SOLA, Re = 100).

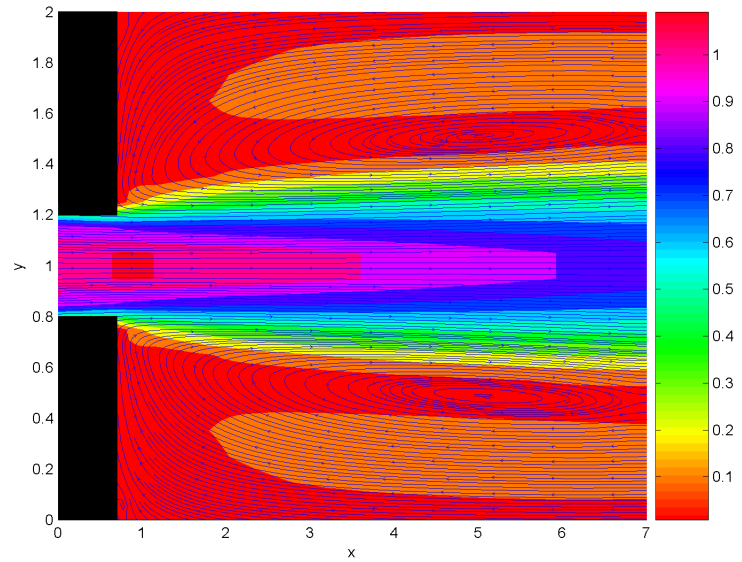


(a)Componente u da velocidade.

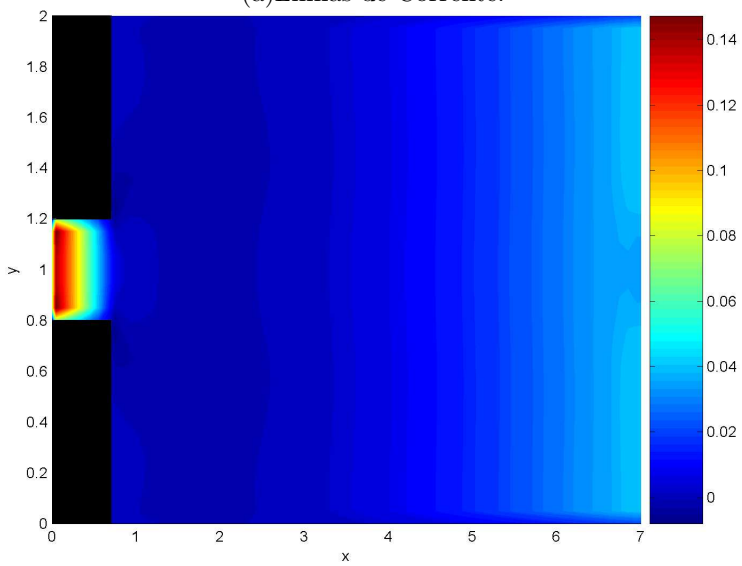


(b)Componente v da velocidade.

Figura 7.31: Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 5, método SOLA, Re = 100).

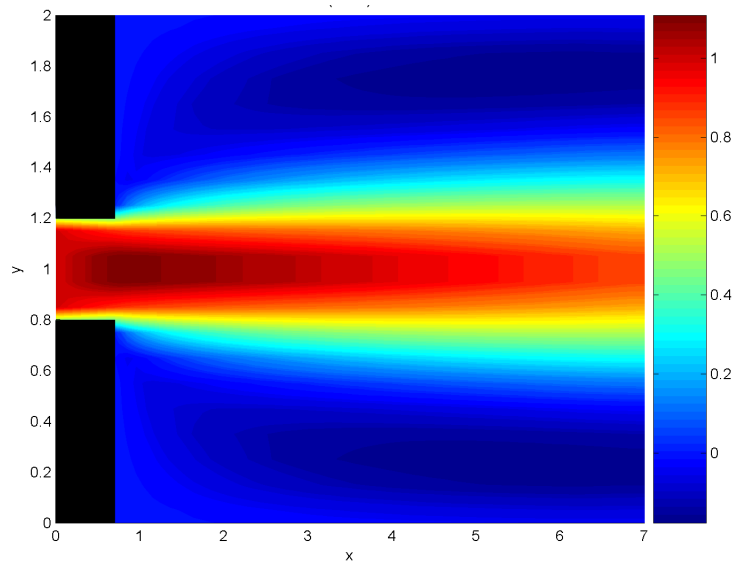


(a)Linhas de Corrente.

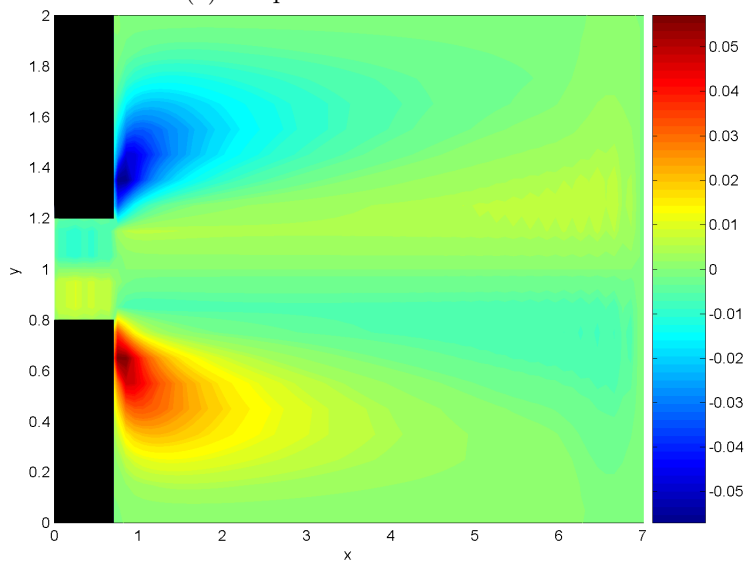


(b)Pressão.

Figura 7.32: Ilustrações do resultado numérico obtido para a pressão e as linhas de corrente (Problema 5, método SOLA, Re = 500).



(a)Componente u da velocidade.



(b)Componente v da velocidade.

Figura 7.33: Ilustrações do resultado numérico obtido para as componentes u e v da velocidade (Problema 5, método SOLA, Re = 500).

Capítulo 8

Trabalhos futuros

Com o intuito de dar sequência e não estagnar os esforços dispensados para a elaboração deste trabalho, pretende-se investir, a longo prazo, no aprimoramento da ferramenta que começou a ser desenvolvida, visando adaptá-la para receber as contribuições advindas dos respectivos trabalhos de mestrado de seus desenvolvedores. Para que isto seja possível, outras tarefas deverão ser, *a priori*, concluídas para a evolução desta ferramenta, as quais, basicamente, fazem menção à(ao):

- criação de uma interface amigável para a definição de parâmetros (versão 0.6);
- implementação de outros métodos de solução, bem como a incorporação ao código da solução por outras formulações (versão 0.7);
- estudo e implementação de estratégias de solução (métodos) para o tratamento da solução pelos acoplamentos corrente-vorticidade e vorticidade-velocidade (versão 0.75);
- implementação de outras estratégias para integração temporal (versão 0.8);
- implementação de novas estratégias para termos convectivos (versão 0.9);
- otimização de todos os procedimentos computacionais envolvidos (versão 0.95).

Feitas tais melhorias, seria bastante interessante e propícia a expansão dessa ferramenta para o tratamento de problemas 3D (versão 1.0), abrindo espaço tanto para o tratamento de superfícies livres (versão 1.5) como de modelos de turbulência (versão 2.0).

As fases de desenvolvimento acima mencionadas foram estabelecidas levando em conta a atual perspectiva de evolução conceitual e funcional da ferramenta. Como, porém, tal evolução envolve um processo dinâmico de aprendizado (por

parte dos autores) e experimentação(por parte da ferramenta), possivelmente, etapas intermediárias adicionais deverão ser tratadas, ocasionando eventuais acréscimos, adaptações e alteração da sequência nas atividades acima elencadas.

Ressaltamos, por fim, que este trabalho (e sua continuação a longo prazo, para não atrapalhar, sob hipótese alguma, o projeto de pesquisa de seus autores no mestrado) não visa, de modo algum, "competir" com o projeto de mestrado de seus autores, mas sim, busca empregar o conhecimento "marginal" adquirido por cada um durante os respectivos trabalhos de mestrado.

Com o termo conhecimento "marginal" fazemos referência a toda informação ou conhecimento que, embora indispensável para qualquer pesquisador de nossa área, acaba sendo omitido na literatura por ser considerado "trivial demais" , quando, na verdade, tal conhecimento só se torna óbvio no instante em que se ganha experiência no assunto. Tal omissão não chega a inviabilizar, mas, torna mais árduo o ingresso na área de novos pesquisadores.

Assim, com intuito de dar nossa parcela de contribuição para amenizar tal problemática, objetivamos adotar tal enfoque, sem perder de vista a possibilidade de consolidar nossos conhecimentos e explorar novos procedimentos numéricos. Isso foi colocado em prática já neste trabalho, que marca o início da criação de uma ferramenta computacional (o simulador em desenvolvimento, atualmente chamado de *InnerFlow 2D*) e de uma literatura auxiliar (envolvendo tópicos teóricos fundamentais, ainda escassos na literatura de língua portuguesa) que possa ser, de alguma forma, útil aos ingressantes nessa fascinante área de pesquisa abrangida pela dinâmica dos fluidos computacional.

Agradecimentos

Os autores Fernando Pacanelli Martins e Rafael Alves Bonfim de Queiroz agradecem à FAPESP pelo suporte financeiro de suas pesquisas no mestrado, respectivamente, através dos processos 06/04336-0 e 06/05910-1. Aproveitamos a oportunidade também para agradecer aos professores Leandro Franco de Souza e Antônio Castelo Filho pelos esclarecimentos durante o desenvolvimento deste trabalho. Agradecemos também aos nossos professores e respectivos orientadores no mestrado, José Alberto Cuminato e Valdemir Garcia Ferreira. Todos professores aqui citados integram o Departamento de Matemática Aplicada e Estatística do Instituto de Ciências Matemáticas e Computação da Universidade de São Paulo.

Referências Bibliográficas

[1] Hirt, C. W., Cook, J. L.: Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain. J. Comput. Phys. **10**, (1972) 324-340.

[2] Ferreira, V. G., Mello O. D., Oliveira, J. N., Fortuna, A. O.: Tópicos teóricos e computacionais em escoamentos de fluidos. Notas do ICMC - Série Computação, n. 39 (1998).

[3] Fletcher, C.A.J.: Computational techniques for fluid dynamics. Vol. I e II. Springer (1991).

[4] Fortuna, A.O.: Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações. EDUSP (2000).

[5] Fox, R. W., McDonald, A. T.: Introdução à Mecânica dos Fluidos. Editora Guanabara Dois, Segunda edição, Rio de Janeiro (1981).

[6] LeVeque,R.J.: Finite volume methods for hyperbolic problems. CUP (2002).

[7] Quarteroni, A., Sacco, R., Saleri, F.: Numerical mathematics. Texts in Apllied Mathematics, n. 37, Springer (2000).

[8] Roache, P. J.: Computational fluid dynamics. Revised printing, Hermosa Publishers (1977).

[9] Smith, G. D.: Numerical solution partial differential equations. 3th Edition. Clarendron Press, Oxford (1985).

[10] Souza, L.F.: Notas de Aula: Introdução à Mecânica dos Fluidos Computacional. ICMC, USP, São Paulo, Brasil (2007).

[11] Takemitsu, N.: Finite difference method to solve incompressible fluid flow. J. Comput. Phys. **61**, (1985) 499-518.