

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

A sobrejetividade de q_* e um processo de
redução de componentes singulares

P. PORTO JR.; W. MOTTA JR.

Nº 103

NOTAS



Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

ISSN - 0103-2577

A sobrejetividade de q_* e um processo de
redução de componenetes singulares

P. PORTO JR.; W. MOTTA JR.

Nº 103

N O T A S D O I C M S C

São Carlos (SP)

fev./ 92

ERRATA.

- página 8 , Observação 3.2 , acrescentar: Considerando-se M 1-conexa e W_f superfície mergulhada (via \bar{f}) em \mathbb{R}^2 , por...
- página 10 , substituir a definição do conjunto B por:
 $B = \{f / f \in S(M, \mathbb{R}^2) \text{ com } M \in A \text{ e } W_f \text{ é uma superfície } \bar{f}\text{-mergulha em } \mathbb{R}^2\}$

A Sobrejetividade de q_* e um Processo de Redução de Componentes Singulares

P. Porto Jr.*

Departamento de Matemática
ICMSC-USP, Caixa Postal 668
13560 - São Carlos - SP - Brasil

W. Motta Jr. **

Departamento de Matemática
CCET-UFMS, Caixa Postal 649
79069 - Campo Grande - MS - Brasil

RESUMO: Dada uma aplicação estável $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ com M uma 4-variedade diferenciável, fechada, conexa e orientada, associe-se a f a sua fatorização de Stein (W_f, q_f, \bar{f}) . Prova-se que q_{f} induz epimorfismo entre os grupos fundamentais $\pi_1(M)$ e $\pi_1(W_f)$. Com restrições sobre M e sobre as configurações locais de W_f , via deformações locais, pode-se cancelar componentes do conjunto singular de f e obter informações sobre a topologia de M .*

PALAVRAS CHAVES: Aplicações Estáveis; Fatorização de Stein; Homotopia; Componentes Singulares.

1 Introdução

Considerando-se uma aplicação estável f de uma 4-variedade diferenciável M , fechada, conexa e orientada, com f assumindo valores em \mathbb{R}^2 , pode-se associar a esta uma terna (W_f, q_f, \bar{f}) denominada fatorização de Stein. Em [P-F] encontram-se todas as configurações locais para W_f . Pode-se mostrar que $q_{f*} : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(W_f)$ é

* e ** Trabalham parcialmente auxiliados pelo CNPq.

epimorfismo. Supondo que M , além das condições acima, seja 1-conexa e tenha característica de Euler par, então pela sobrejetividade de q_f , e por deformações locais (“homotopias quase-estáveis”) pode-se eliminar cúspides e algumas configurações locais de W_f . Supondo-se uma condição (ver (5.2)) que não permite surgimento de cruzamentos de q_f -imagem de componentes singulares, e, estabelecendo-se uma relação (via deformações locais estabelecidas por homotopias) entre aplicações $M \mapsto \mathbb{R}^2$ (M fixada arbitrariamente) nas condições acima, pode-se com algumas restrições sobre as q_f^{-1} -superfícies e os tipos de componentes singulares das configurações de W_f , cancelar componentes singulares e obter informações sobre a topologia da variedade domínio (ver (5.4) e (5.5)).

Agradecimentos: Gostaríamos de agradecer aos professores C. Biasi e M.A.S. Ruas do ICMSC-USP, e, L.E. Mata Lorenzo da Universidade Simon Bolivar (Venezuela) pelas discussões e sugestões apresentadas.

2 Aplicações Estáveis e suas Fatorizações de Stein

No que se segue, M denota uma 4-variedade diferenciável (C^∞), conexa, fechada (compacta e sem bordo) e orientada. E, denota-se por $S(M, \mathbb{R}^2)$ o conjunto das aplicações estáveis de M com valores no plano.

Definição 2.1 *Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita estável se para cada ponto singular p em M existirem sistemas de coordenadas locais (μ, x, y_1, y_2) e (U, Y) centrados em p e $f(p)$ respectivamente através dos quais f se expressa localmente por:*

- (i) $(u, x, y_1, y_2) \longrightarrow (\mu, x^2 + y_1^2 + y_2^2)$ (dobras definidas ou pontos de $S_0(f)$).
- (ii) $(u, x, y_1, y_2) \longrightarrow (u, x^2 - \sum_{i=1}^{\lambda} y_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^2 y_i^2)$ (dobras indefinidas ou pontos de $S_1(f)$).
- (iii) $(u, x, y_1, y_2) \longrightarrow (\mu, \pm \mu x \pm x^3 - \sum_{i=1}^{\lambda} y_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^2 y_i^2)$ (cúspides ou pontos de $C(f)$).

f deve ainda satisfazer as seguintes condições globais:

- (iv) $f^{-1}(f(p)) \cap S(f) = \{p\}$, sempre que $p \in C(f)$, sendo que $S(f)$ denota o conjunto singular de f .
- (v) $f|_{S(f)-C(f)}$ é uma imersão com interseções normais.

Observação 2.2 (a) Quando $\lambda \in \{0, 2\}$ ($\lambda = 1$) o ponto cuspidal correspondente é chamado definido (indefinido).

- (b) Uma aplicação f tal que $S(f) \equiv S_0(f)$ é dita *genérica especial*.
- (c) O conjunto singular $S(f)$ é uma subvariedade fechada 1-dimensional de M , e, portanto se expressa como uma reunião finita e disjunta de curvas difeomorfas a S^1 . Os subconjuntos $S_0(f)$ e $S_1(f)$ são abertos em $S(f)$, os quais são círculos ou arcos abertos em cujas extremidades se encontram os pontos de $C(f)$.
- (d) $C(f)$ é discreto em $S(f)$, sendo que as cúspides definidas separam arcos de $S_0(f)$ de arcos de $S_1(f)$, enquanto as cúspides indefinidas tem arcos de $S_1(f)$ de ambos os seus lados. Portanto, o número de cúspides definidas de cada componente conexa de $S(f)$ é sempre par, e, estas sempre podem ser canceladas (ver [L]).

Considerando-se $f \in S(M, \mathbb{R}^2)$, esta induz em M uma relação de equivalência definida por:

dados $p, p' \in M$, $p \sim p'$ se e somente se $f(p) = f(p') = r$ e p, p' estão na mesma componente conexa de $f^{-1}(r)$.

O quociente M/\sim denota-se por W_f , e, a aplicação quociente $M \rightarrow W_f$ denota-se por q_f (ou simplesmente q). A comutatividade do diagrama abaixo define $\bar{f} : W_f \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\
 q_f \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\
 W_f & &
 \end{array}$$

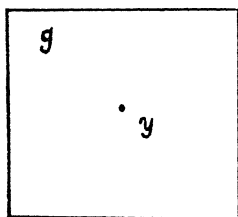
Definição 2.3 Chamamos (W_f, q_f, \bar{f}) , ou simplesmente W_f , de fatorização de Stein associada a f .

Observação 2.4 (a) Se $p \in S(f)$ então $q^{-1}(q(p)) \cap S(f)$ tem no máximo dois pontos singulares. Quando $q(p) = q(p')$ tais pontos singulares estão em $S_1(f)$ e denominam-se pontos duplos. E quando p é o único ponto na q^{-1} -imagem de $q(p)$ este denomina-se simples.

(b) Dada uma aplicação contínua f entre espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$, pode-se definir analogamente a fatorização de Stein W_f associada a f . Quando X e Y forem métricos e X compacto pode-se provar que W_f é métrico compacto (ver [M.L-1]).

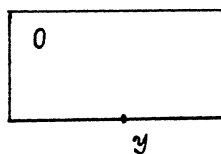
(c) Quando f é genérica especial pode-se introduzir estrutura diferenciável em W_f tornando-a uma superfície compacta, orientada e com bordo difeomorfo a $S(f)$, sendo $\bar{f} : W_f \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma imersão e $q_f : S(f) \rightarrow \partial W_f$ um difeomorfismo (ver [P-F]).

Observação 2.5 No trabalho de Porto-Furuya, em [P-F], para uma aplicação estável f nas condições acima obtém-se todas as configurações locais admissíveis para W_f , cujos 10 modelos básicos são dados por:



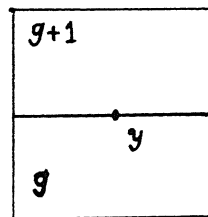
$y = q(p)$ com
 $q^{-1}(y) \cap S(f) = \emptyset$

figura 1



$y = q(p)$ com
 $p \in S_0(f)$

figura 2



$y = q(p)$ com
 $p \in S_1(f)$ (simples)

figura 3

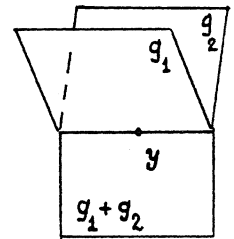
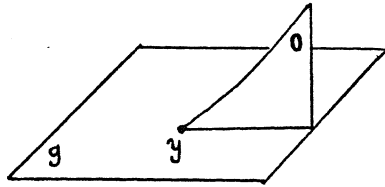
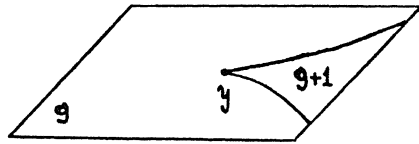


figura 4



$y = q(p)$ com p cúspide definida

figura 5



$y = q(p)$ com p cúspide indefinida

figura 6

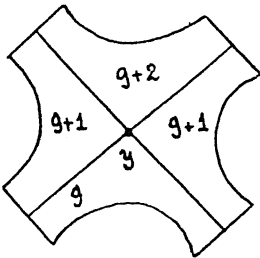


figura 7

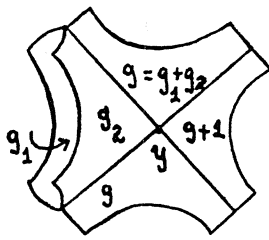


figura 8

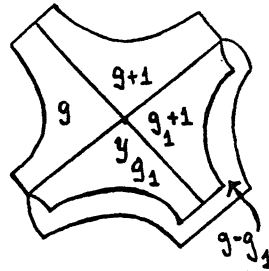


figura 9

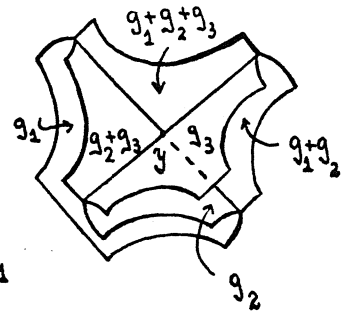


figura 10

$y = q(p) = q(p')$, $p, p' \in S_1(f)$ são duplos

Onde g_1, g_2, g_3 e g representam o genus de q^{-1} -imagem de pontos nas respectivas regiões.

Lema 2.6 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ estável.*

Então, W_f é um poliedro bidimensional.

Prova: Todos os 10 modelos apresentados acima são naturalmente triangularizáveis. Como W_f pode ser coberto por um número finito de tais modelos, pode-se refinar

as triangularizações locais subdividindo os complexos simpliciais correspondentes ao longo de algum simplexo 1-dimensional. Desta forma obtém-se uma triangularização global de W_f . \square

3 A Sobrejetividade de q_*

Sejam $f \in S(M, \mathbb{R}^2)$ e W_f a fatorização de Stein associada a f . Nestas condições segue-se que:

Teorema 3.1 $q_f : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(W_f)$ é epimorfismo.

Prova: Por (2.6) segue-se que W_f é um poliedro (complexo simplicial) bidimensional. Consideremos então (K, ϕ) uma triangularização, ou seja, K é um complexo simplicial bidimensional e $\phi : |K| \rightarrow W_f$ é um homeomorfismo, sendo $|K| = \bigcup_{s \in K} s$ espaço topológico subjacente a K e s são os simplexos de K . Sem perda de generalidade podemos assumir que os 1-simplexos desta triangularização sejam de um dos tipos abaixo:

- (a) completamente contidos em $W_f - q(S(f))$ com exceção de no máximo 1 vértice;
- (b) completamente contidos em arcos de pontos de dobras definidas com exceção de no máximo 1 vértice;
- (c) completamente contidos em arcos de pontos de dobras indefinidas com exceção de no máximo 1-vértice.

Consideremos uma aplicação contínua e arbitrária $\mu : S^1 \rightarrow W_f$; se encontrarmos $\beta : S^1 \rightarrow M$ contínua tal que $q_f \circ \beta \sim \mu$, segue-se o resultado. Vamos construir tal β , para tanto considera-se os passos:

1º passo) Constrói-se uma aproximação simplicial ψ de μ nas condições abaixo.

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\mu} & W_f \\ \tilde{\phi} \downarrow & & \downarrow \phi \end{array}$$

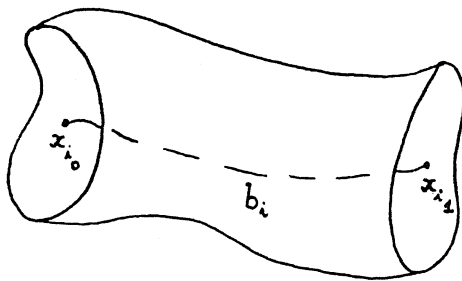
Seja $|\tilde{K}| \dashrightarrow |K|$, $(\tilde{K}, \tilde{\phi})$ uma triangularização de S^1 , assim a menos de homeomorfismos $\mu : |\tilde{K}| \rightarrow |K|$. Pelo teorema da aproximação simplicial (veja por exemplo [R]) existe $\psi : Sd^n \tilde{K} \rightarrow K$ aproximação simplicial de μ para algum inteiro $n \geq 1$, sendo SdA subdivisão baricêntrica de A onde $Sd^n A = Sd(Sd^{n-1} A)$ e $Sd^0 A = A$. Como ψ é aproximação simplicial de μ temos $|\psi| \sim \mu$. Chamemos

$\mu' : S^1 \rightarrow W_f$ o correspondente à $|\psi|$ a menos de homeomorfismos. Por outro lado, $|\psi|$ pode ser obtida como uma soma de um número finito de caminhos simples acarretando que μ' também é obtido como soma finita de caminhos simples $a_i : [0, 1] \rightarrow W_f$, $i = 1, \dots, r$, onde $a_i([0, 1])$ é 1-simplexo de W_f nas condições (a), (b) ou (c) acima.

2º passo) Com as considerações acima, $q_f^{-1}(a_i[0, 1])$ é conexo por caminhos.

De fato, $a_i[0, 1]$ é compacto e conexo em W_f daí segue-se que $q_f^{-1}(a_i[0, 1])$ é métrico, conexo e compacto (ver obs. (2.4)-(d)). Agora, a decomposição de M em fibrados descrita em [F] mostra que $q_f^{-1}(a_i[0, 1])$ é homeomorfa a um espaço localmente conexo. Portanto, segue o desejado.

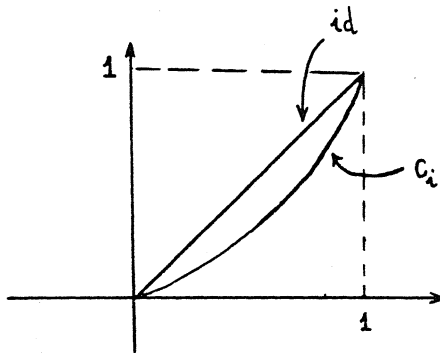
Em $q_f^{-1}(a_i[0, 1])$ considere-se os pontos $x_i, \in q_f^{-1}(a_i(j))$, $j \in \{0, 1\}$.



Logo, existe caminho $b_i : [0, 1] \rightarrow q_f^{-1}(a_i[0, 1])$ com $b_i(0) = x_{i_0}$ e $b_i(1) = x_{i_1}$. Agora, $q_f \circ b_i$ é caminho em W_f com $q_f \circ b_i(j) = a_i(j)$, $j \in \{0, 1\}$.

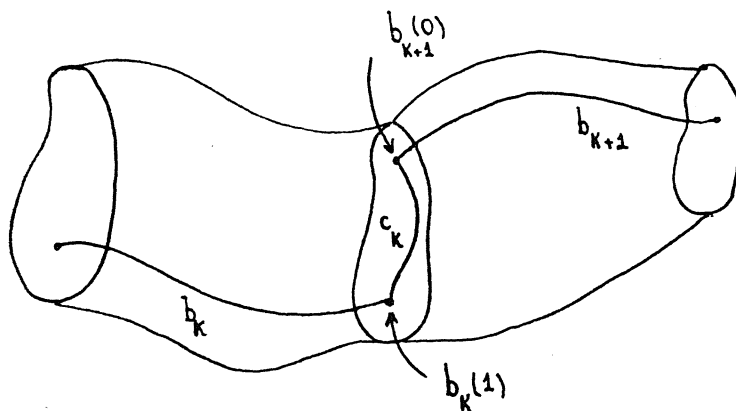
3º passo) $q_f \circ b_i \sim a_i$ rel $\{0, 1\}$.

De fato, a_i é homeomorfismo sobre sua imagem, daí podemos escrever $q_f \circ b_i = a_i \circ c_i$, onde $c_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é definido por $c_i = a_i^{-1} \circ q_f \circ b_i$ com $c_i(0) = 0$ e $c_i(1) = 1$.



Como $c_i \sim id \text{ rel } \{0,1\}$ segue que $q_f \circ b_i \sim a_i \text{ rel } \{0,1\}$.

4º passo) Constrói-se β colando-se nas fibras os caminhos b_i .



Tomando-se os caminhos $b_i, i = 1, \dots, r$, em M com $q_f \circ b_i \sim a_i \text{ rel } \{0,1\}$, se $b_1(1) = b_{i+1}(0)$ toma-se o caminho $b_i \cdot b_{i+1}$. Por outro lado, se para algum k , $b_k(1) \neq b_{k+1}(0)$ (ou $b_r(1) \neq b_1(0)$) então como $b_k(1)$ e $b_{k+1}(0)$ estão na mesma q -fibra que por sua vez é conexa por caminhos (ver [F]), podemos tomar c_k nesta q -fibra de forma a obter-se o caminho $b_k \cdot c_k \cdot b_{k+1}$. Destas justaposições obtém-se $\beta : S^1 \mapsto M$ nas condições requeridas. \square

Observação 3.2 Considerando-se M 1-conexo, por (3.1) e o teorema de classificação de superfícies, segue-se que W_f é difeomorfa ao 2-disco D^2 . Assim, as configurações descritas nas figuras (4), (5), (8), (9) e (10) encontradas em (2.5) não podem comparecer em W_f .

4 Transições Geométricas em W_f

Estamos interessados agora em considerar “homotopias quase-estáveis” entre particulares aplicações em $S(M, \mathbb{R}^2)$, descrevendo as possíveis transições que ocorrem nas fatorizações de Stein ao longo destas homotopias.

Definição 4.1 Sejam $f, g \in S(M, \mathbb{R}^2)$, diz-se que estas aplicações são “quase-estavelmente homotópicas” quando existir uma homotopia diferenciável $H : M \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo:

$$(a) \ H(x,0) = f(x) \text{ e } H(x,1) = g(x), \forall x \in M;$$

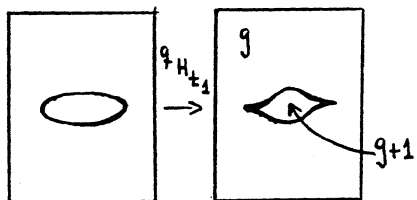
(b) existem finitos pontos de bifurcação de H , ou seja, existem finitos $t_0 \in [0, 1]$ tais que $H_{t_0} : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ deixa de ser estável.

Observação 4.2 Quando a homotopia H ligando duas aplicações estáveis não possui ponto de bifurcação (isto é, o caminho descrito por H está na mesma componente conexa de $S(M, \mathbb{R}^2)$) então W_{H_t} é invariante (ver [M.L-2]). Assim, o estudo das transições de W_{H_t} se reduz à análise destes elementos em torno de pontos de bifurcação de H .

Um interessante estudo das transições de W_{F_t} , com $F : N \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma homotopia π -estável (isto é, além das condições (a) e (b) de (4.1) pode-se dar formas normais para as singularidades de H_{t_0} quando t_0 é ponto de bifurcação de F), e, sendo N 3-variedade fechada e orientada, pode ser encontrado em [M.L-2]. Em correspondência com tais transições, no caso 4-dimensional pode-se descrever também as modificações que surgem em W_{H_t} quando existem pontos de bifurcação de H . Abaixo encontra-se a descrição geométrica destas transições de W_{H_t} quando o germe da homotopia H é do tipo "Lips" ou "Beck to Beck" (com as restrições impostas em §5 estas são as únicas descrições que irão nos interessar para a continuidade do trabalho, assim omite-se as demais descrições).

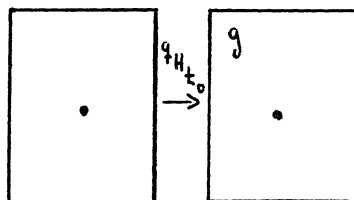
Considera-se t_0 ponto bifurcação de H então tem-se que:

$$\text{Lips : } H(u, x, y_1, y_2, t) = (u, x^3 + u^2x + y_1^2 \pm y_2^2 + xt)$$



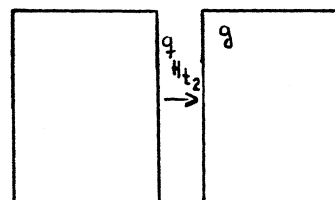
$S(H_{t_1}), t_1 < 0$
é elipse com dois pontos
cuspidais indefinidos

figura 11



$S(H_{t_0})$ é um
único ponto

figura 12



$S(H_{t_2}) = \phi, t_2 > 0$

figura 13



Beak to Beak : $H(u, x, y_1, y_2, t) = (u, x^3 - u^2x + y_1^2 \pm y_2^2 + xt)$

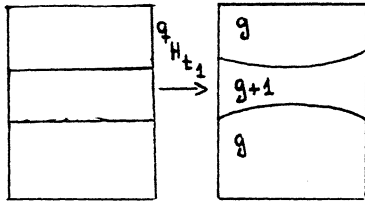


figura 14

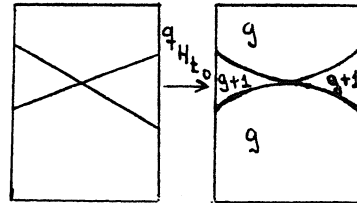


figura 15

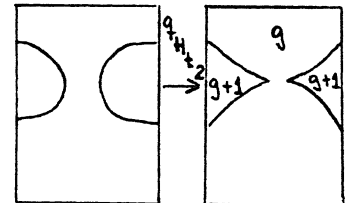


figura 16

$S(H_{t_2}), t_2 > 0$ possui duas cúspides indefinidas e canceláveis (ver [L])

5 Redução de Componentes Singulares

Seja $\varphi : S \rightarrow N$ uma imersão com interseções normais, onde S é uma união disjunta e finita de círculos e N é uma superfície fechada e conexa com $H_1(N, \mathbb{Z}_2) = 0$. Denota-se por A_φ o conjunto de auto interseções (ou lugar dos pontos múltiplos) de φ .

Com as notações acima e extensões naturais dos lemas (2) e (3) obtidos em [B-F] pode-se obter que,

Lema 5.1 *Se $A_\varphi \neq \emptyset$ tem-se que $\beta_0(N - \varphi(S)) \geq 2 \cdot \#S + 1$, onde $\beta_k(X)$ denota o k -ésimo número de Betti de X e $\#S$ é o número de componentes conexas de S .*

Considerando-se agora os conjuntos $A = \{M / M \text{ é } 4\text{-variedade diferenciável, fechada, } 1\text{-conexa e com } x(M) \text{ par}\}$ e $B = \{f / f \in S(M, \mathbb{R}^2) \text{ com } M \in A \text{ fixado arbitrariamente}\}$, para uma aplicação $f \in B$, como $x(M)$ é par, pode-se através de uma homotopia quase-estável cancelar os pontos cuspidais de f , ou seja, pode-se obter uma aplicação $\tilde{f} \in B$ com $C(\tilde{f}) = \emptyset$ (ver [L]). Assim, $\tilde{f}|_{S(\tilde{f})} : S(\tilde{f}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é imersão com interseções normais, $S(\tilde{f})$ é união finita e disjunta de círculos e evidentemente $\beta_0(\mathbb{R}^2 - \tilde{f}_1(S(\tilde{f}))) = \beta_0(S^2 - \tilde{f}_1(S(f)))$.

Definição 5.2 *Uma aplicação $f \in B$ denomina-se trivial se:*

(a) $C(f) = \phi$, isto é, f não tem cúspides;

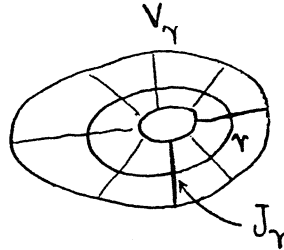
(b) $\beta_0(\mathbb{R}^2 - f|_{S(f)}(S(f))) = \#S(f) + 1$.

Observação 5.3 Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ é trivial segue-se que $S(f)$ não admite pontos duplos. Portanto, como q_f é epimorfismo e M é 1-conexa, as únicas configurações locais possíveis para W_f com f trivial são as descritas pelas figuras (1), (2) e (3) encontradas em (2.5), ou seja, f é uma aplicação com somente dobras definidas, correspondendo ao ∂W_f , e possivelmente dobras indefinidas tais que suas q_f -imagens estão no interior de W_f , e, por (5.1) não se cruzam.

Considerando-se o conjunto $\mathcal{F} = \{f / f \in B \text{ é trivial}\}$, pode-se definir a seguinte relação em \mathcal{F} .

Sejam $f, g \in \mathcal{F}$, $f \sim g$ (“ f e g estão relacionadas”) sempre que pode-se obter g através de deformações, via homotopias quase-estáveis descritas geometricamente pelas figuras (11) a (16), de f .

Finalmente, considerando-se $f \in \mathcal{F}$ e tomando-se $\gamma \in q_f(S(f))$, γ é q -imagem de dobras indefinidas, pode-se tomar $V_\gamma \cong J_\gamma \times \gamma$ vizinhança tubular de γ , com $J_\gamma \cong [-\varepsilon, \varepsilon]$, ε positivo e suficientemente pequeno, $\{0\} \times \gamma \cong \gamma$ e $V_\gamma \cap q(S(f)) = \gamma$.



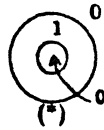
Pode-se dizer (a menos de \tilde{f}) que γ divide \mathbb{R}^2 em uma região limitada e outra ilimitada. Assim, orienta-se J_γ tendo origem $\underline{0}$ na região limitada e extremidade \underline{e} na ilimitada. Então, diz-se que $\gamma \in D_f$ se a superfície $q_f^{-1}(o)$ tem genus maior que $q_f^{-1}(\varepsilon)$ (genus decrescente), e, em caso contrário diz-se que $\gamma \in C_f$ (genus crescente).

Com as notações acima pode-se estabelecer que,

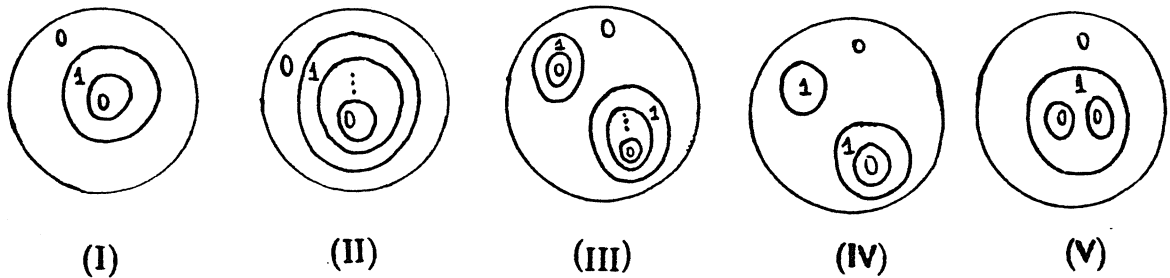
Teorema 5.4 Seja $f \in \mathcal{F}$ com $\#D_f = \#C_f$ e $q_f^{-1}(x)$ é superfície de genus menor ou igual a 1, $\forall x \in W_f - q(S(f))$. Então, M é difeomorfa a S^4 .

Prova: Seja \mathcal{R} componente conexa de $W_f - q(S(f))$ com \mathcal{R} difeomorfa ao 2-disco D^2 . Por um resultado de Kobayashi, em [K], segue-se que $q_f^{-1}(x) \cong S^2$, $\forall x \in \mathcal{R}$.

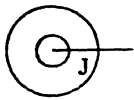
Pelas hipóteses acima pode-se dizer que a configuração (*) é “normal” em W_f :



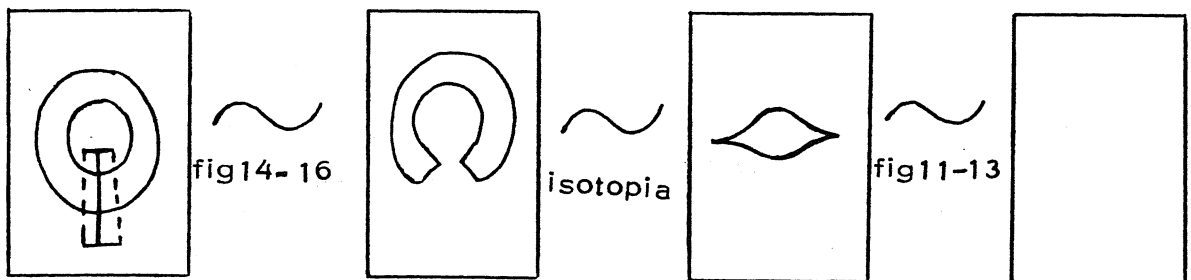
ou seja, por exemplo modelos (I),(II) e (III) descritos abaixo podem ocorrer, enquanto (IV) ou (V) não são permitidos:



Em (*) toma-se $J \cong [-1, 1]$ transversal as q -imagens das componentes de dobras indefinidas.



Por resultado obtido em [K], segue-se que $q^{-1}(J) \cong S^2 \times J$. Assim, pode-se obter $g \in \mathcal{F}$ com $f \sim g$ via deformações de $S(f)$ correspondente as deformações em W_f descritas abaixo:



Portanto, obtém-se $g : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $W_g \cong D^2$, ou seja, g é genérica especial. Assim, pela Proposição (2.6) em [P-F] segue-se que $M \cong S^4$.

Observação 5.5 A utilização de deformações locais (via homotopias) em complexos simpliciais dados pode nos possibilitar obter informações topológicas sobre as varie-

dades que realizam tais complexos. Considerando-se, por exemplo, dois modelos de complexos simpliciais 2-dimensionais como abaixo, pode-se naturalmente perguntar se tais modelos são realizáveis ou não por 3-variedades fechadas e orientadas. Ainda, caso existam realizações como identificam tais variedades?

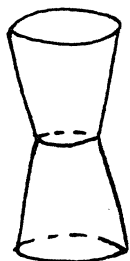


figura 17

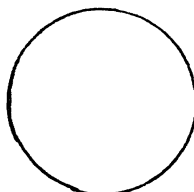
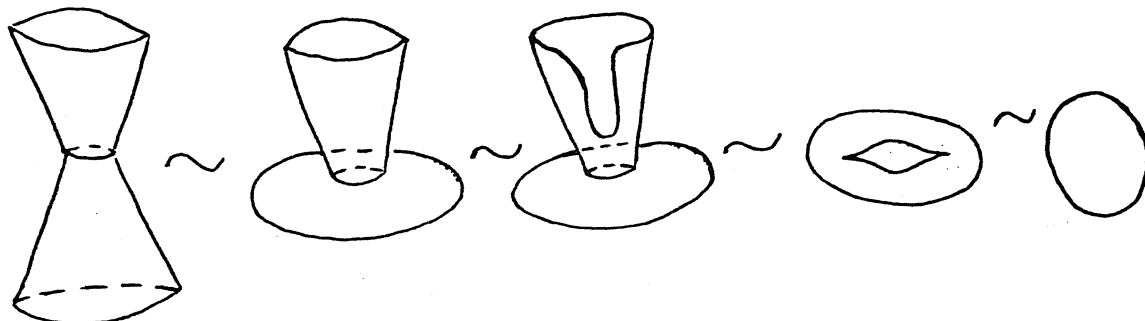


figura 18

Em [M.L-1], Mata-Lorenzo garante a realização de tais modelos por variedades M_1 e M_2 3-dimensionais, fechadas e orientadas, sendo domínio de aplicações estáveis $f_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, ou seja, existem (M_1, f_1) e (M_2, f_2) com W_{f_1} correspondendo a figura 17 e W_{f_2} correspondendo a figura 18. Com resultados de Burlet-de Rham, em [B-R], sabe-se que M_2 é difeomorfa a S^3 . Pode-se demonstrar (ver [P-M]) que através de deformações locais (ver descrição abaixo) a figura 17 também se realiza unicamente por S^3 .



Descrição geométrica das deformações locais em W_{f_1}

Referências

- [B-F] Biasi, C. - Fuster, M. - preprint - "A converse of the Jordan-Brouwer theorem" (a aparecer em Illinois Jornal Math.)
- [F] Furuya, Y. - 1986 - "Sobre aplicações genéricas $M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ", Tese Doutorado, ICMSC-USP.
- [K] Kobayashi, M. - 1990 - "Studying manifolds over simple discriminants", Sûrikaiseikikenkyûsho Kôkyûroku 725: 81-89 (Math. Reviews 91 i)
- [L] Levine, H. - 1965 - "Elimination of cusps", Topology 3 suppl. 2: 263-296.
- [M.L-1] Mata Lorenzo, L. - 1986 - "The Stein Factorization of stable maps and stable arcs of maps from 3-manifolds into the plane", Doctor Thesis, Brandeis University.
- [M.L-2] _____ - 1989 - "Polyhedrons and pi-stable homotopies from 3-manifolds into the plane", Nova Série Boletim SBM, 20, nº 1 : 61-85.
- [M] Milnor, J. - 1965 - "Lectures on h-cobordism theorem", Princeton Univ. Press.
- [P-F] Porto, P. - Furuya, Y. - 1990 - "On special generic maps from closed manifold into the plane", Topology and its Appl., 35: 41-52.
- [P-M] Porto, P. - Motta, W. - preprint - "Realizações de complexos associados a aplicações com dobras".
- [R] Rotman, J. - 1988 - "An introduction to algebraic topology", GTM 119, Springer-Verlag.

NOTAS DO ICMSC

- Nº 102/92 - BIASI, C.; MOTTA, W.; SAEKI, O. - A note on separation properties of codimension-1 immersions with normal crossings
- Nº 101/91 - MANCINI, S.; RUAS, M.A.S. - Bifurcation of generic one parameter families of functions on foliated manifolds
- Nº 100/91 - RUAS; M.A.S.; SAIA, M.J. - The polyhedron of equisingularity of germs of hypersurfaces
- Nº 99/91 - ACHCAR, J.A.; LOUZADA NETO, F. - A Bayesian approach for accelerated life tests considering the Weibull distribution
- Nº 98/91 - CASTINEIRA; M.I.; MONARD, M.C.; NICOLETTI, M.C. - Aprendizado de máquina: descrição e implementação de um algoritmo geral para a construção de árvores de decisão
- Nº 97/91 - DIAS, I.; MICALI, A. - Ordres d'un LG-anneau et idéaux premiers d'un anneau de Witt
- Nº 96/91 - Atas da reunião de singularidades reais e complexas
- Nº 95/91 - NUNES, W.V.L. - On the global well-posedness for the transitional Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces
- Nº 94/91 - ACHCAR, J.A.; ROSALES, O.L.A. - A Bayesian for accelerated life tests assuming an inverse Gaussian distribution
- Nº 93/91 - DIAS, I.; MICALI, A. - Anneaux de Witt et extensions de Galois