ISSN - 0103-2577

Anneaux de Witt et extensions de Galois

IRES DIAS ; ARTIBANO MICALI

Nº 93

NOTAS DO ICMSC

São Carlos

Set./91

Anneaux de Witt et Extensions de Galois

Ires DIAS
Departamento de Matemática
ICMSC-USP, C.P. 668
13560, São Carlos, SP
Brasil

Artibano MICALI (*)
Département des Sciences Mathématiques
Université de Montpellier II
Place Eugène Bataillon
34095 Montellier, France

Abstract

The aim of this paper is to study the behaviour of Witt rings by Galois extensions in the case where the base ring is a LG-ring. This question was quoted by M. Knebusch, A. Rosenberg and R. Ware for bilinear Witt ring (cf. [6], Proposition 5.11) in the semilocal case and by R. Baeza (cf. [1], Chapter V, Theorem 11.1) also in the semilocal case for both bilinear and quadratic Witt rings. But it seems to us that Baeza's proof presents a gap and we give here a solution in the case of LG-rings.

Le but de cet article est d'étudier le comportement des anneaux de Witt par des extensions de Galois dans le cas où l'anneau de base est un LG-anneau. Cette question a été étudiée par M. Knebusch, A. Rosenberg et R. Ware pour l'anneau de Witt bilinéaire et par R. Baeza pour les anneaux de Witt bilinéaire et quadratique dans le cas où l'anneau de base est semi-local.

1 Préliminaires.

Soit A un anneau commutatif à élément unité et désignons par $W(A)$ l'anneau de Witt bilinéaire de A et par $W_q(A)$ l'anneau de Witt quadratique de A (cf. [1]). Si A^* désigne le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau A, on sait que A^*/A^{*2} est un 2-groupe, c'est à dire, un groupe abélien où tout élément est d'ordre 2. Il s'ensuit que si $p \geq 3$ est un nombre premier, l'algèbre $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[A^*/A^{*2}]$ du groupe A^*/A^{*2} à coefficients dans le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un anneau régulier au sens de Von Neumann (cf. [5], Theorem 26 of Part II). On sait qu'il existe un morphisme surjectif d'anneaux $\mathbf{Z}[A^*/A^{*2}] \rightarrow W(A)$ (cf. [3]) donc par tensorisation ce morphisme nous fournit un morphisme surjectif d'anneaux $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[A^*/A^{*2}] \rightarrow W(A)/pW(A)$, ce qui nous montre que l'anneau $W(A)/pW(A)$ est aussi regulier au sens de Von Neumann. Or, un anneau commutatif de Von Neummann n'a pas d'élément nilpotent autre que 0, d'où Nil $(W(A)/pW(A)) = \{0\}$, où Nil désigne le nilradical (cf. [2], Chapter II, §2.6). Ce résultat nous suggère le lemme suivant:

(*) Supported by FAPESP (Proc. 91/0462-3), CAPES (N. Ref. DAI. :723/91) and ICMSC-USP-São Carlos, Brazil.

Lemme 1.1. *Soient A un anneau commutatif à élément unité et $p \geq 1$ un nombre impair. Si* Nil $(W(A)/pW(A)) = \{0\}$, *alors* Nil $(W_q(A)/pW_q(A)) = \{0\}$.

En effet, considérons le morphisme d'anneaux $\beta : W_q(A) \rightarrow W(A)$ défini par $x \mapsto b_x$, où b_x désigne la forme bilinéaire symétrique associée à x. Si $\pi : W(A) \rightarrow W(A)/pW(A)$ désigne le morphisme canonique, on a Ker $(\pi \circ \beta) \supset Ker(\beta) + pW_q(A)$ avec $8Ker(\beta) = 0$. Montrons que, en fait, on a ici l'égalité $Ker(\pi \circ \beta) = Ker(\beta) + pW_q(A)$. En effet, il existe des entiers r, s dans $\mathbf{Z}$ tels que $8r + ps = 1$, donc si $x \in Ker(\pi \circ \beta)$ on a $\beta(x) \in pW(A)$, c'est à dire, il existe $z \in W(A)$ tel que $\beta(x) = pz$ et la relation $z = 8rz + psz$ nous dit que $z \in Im(\beta)$, car $8z = b_{E_8} \otimes z = \beta(E_8 \otimes z), E_8$ étant la *matrice de Milnor* (cf. [1], page 21). Il existe ainsi un élément $x' \in W_q(A)$ tel que $z = \beta(x')$, à savoir, $x' = rE_8 \otimes z + sx$. L'assertion ci - dessus s'ensuit.

Soit maintenant $x \in W_q(A)$ tel que $x^m \in pW_q(A)$ pour un entier $m \geq 1$ convenable. Comme Nil $(W(A)/pW(A)) = \{0\}$, on a $x \in Ker(\pi \circ \beta)$, donc $x = x_0 + x_1$ avec $x_0 \in Ker(\beta)$ et $x_1 \in pW_q(A)$, d'où $8x = 8x_1 \in pW_q(A)$ et comme les nombres entiers 8 et p sont premiers entr'eux, nécessairement $x \in pW_q(A)$. Ceci nous montre que $Nil(W_q(A)/pW_q(A)) = \{0\}$.

Notons que il n'est pas vrai que, en général, pour un nombre impair $p \geq 3$, les anneaux $W(A)/pW(A)$ et $W_q(A)/pW_q(A)$ soient sans éléments nilpotents autres que 0.

Exemple 1.2. Si $p \geq 3$ est un nombre premier, pour tout entier $m \geq 1$ le nombre p^m est impair et il est évident que l'anneau quotient $W_q(\mathbb{R})/p^m W_q(\mathbb{R}) = W(\mathbb{R})/p^m W(\mathbb{R}) = \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$ a un nilradical non nul pour $m \geq 2$. Ceci nous montre que le Lemme 11.6, Chapitre V de [1] est en défaut pour un nombre $p \geq 3$ impair.

2 Où l'anneau de base devient un LG-anneau.

Nous rappelons, tout d'abord, que un anneau commutatif A à élément unité est dit un *LG-anneau* s'il vérifie le *principle local-global* suivant: tout polynôme $f \in A[X_1, \ldots, X_n]$ qui représente un élément inversible dans l'anneau local $A_{\mathcal{P}}$ pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ de A, représente aussi un élément inversible dans A. Tout anneau local ou semi-local est un LG-anneau, si A est un LG-anneau, il en est de même de l'anneau des séries formelles $A[[X]]$, tout anneau régulier ou sens de Von Neumann et commutatif est un LG-anneau (cf. [3]).

Soit donc A un LG-anneau et désignons par $< a >$ l'image d'un élément a dans A^* via le morphisme canonique de groupes abéliens $A^* \rightarrow A^*/A^{*2}$. On sait (cf. [3], Chapitre III, Théorème 1.3.) que l'anneau de Witt bilinéaire $W(A)$ (resp. l'anneau de Witt quadratique $W_q(A)$) est additivement engendré par les symboles $< a >$ pair a parcourant A^* (resp. si $2 \in A^*$).

De même, si $[1,b]$ désigne l'espace quadratique binaire avec $1-4b \in A^*$, on sait (cf. [3], Chapitre II, Théoréme 4.4.) que le groupe de Witt quadratique $W_q(A)$ est additivement engendré par les symboles $< a > \otimes[1,b]$ si $2 \notin A^*$. Le lemme suivant se démontre comme dans [1], Chapitre V, Lemme 11.5:

Lemme 2.1. *Si* A *est un* LG-*anneau, tout élément x dans $W(A)$ (resp. dans $W_q(A)$) vérifie une relation de la forme*

$$x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \ldots + c_r x^r = 0$$

où $c_i \in \mathbf{Z}$ $(r \leq i \leq m)$.

Rappelons que si A est un anneau commutatif à élément unité et $A \to B$ une extension de Galois de A de groupe G, alors G opère sur l'anneau $W_q(B)$ comme suit. Pour chaque A-antomorphisme $g \in G$ de B, on a un automorphisme $g^* : W_q(B) \to W_q(B)$ (resp. $g^* : W(B) \to W(B)$) qui est l'identité sur $W_q(A)$ (resp. $W(A)$). De façon explicite, si (E,q) est un B-espace quadratique on définit $g(E,q) = (E^g, q^g)$ où $E^g = E$ en tant que groupe abélien, sa strucutre de B-module étant définie par $c \bullet x = g^{-1}(c)x$ pour c parcourant B et x parcourant E^g, la forme quadratique $q^g : E \to B$ étant définie par $q^g(x) = g(q(x))$ pour tout x dans E^g. De même, pour tout espace bilinéaire (E,b), on définit (E^g, b^g) de façon analogue. Le lemme suivant est bieu connu (cf. [1], Chapitre V, 11.4):

Lemme 2.2.*Soient A un anneau commutatif à élément et $A \to B$ une extension de Galois de A de groupe* G. *Si $i^* : W(A) \to W(B)$ et $i^* : W_q(A) \to W_q(B)$ désignent l'extension de $i : A \to B$ aux anneax de Witt et $[A : B]$ le degré de l' extension $A \to B$, on a*

$$[B:A]\; W(B)^G \subset i^*(W(A)) \quad \textit{et} \quad [B:A]\; W_q(B)^G \subset i^*(W_q(A)).$$

Par la suite, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 2.3. *Soient A un* LG-*anneau et B une extension de Galois de A de groupe G et de degré impair. Alors $W(A) = W(B)^G$ et $W_q(A) = W_q(B)^G$.*

On remarque, tout d'abord, que si A est un LG-anneau et si B est une extension de Galois de A alors B est aussi un LG-anneau. En effet, si B est une extension de Galois de A alors B est un A-module projectif de type fini donc un A-module libve de type fini (cf. [7]) et ceci entraî*ne* que B est entier sur A donc B est un LG-anneau (cf. [4]).

Comme B est une extension de Galois de A de degré impair, le Théorème 6.9, Chapitre V de [1] (valable pour des LG-anneaux) nons dit que les morphismes naturels $i^* : W(A) \to W(B)$ et $i^* : W_q(A) \to W_q(B)$ sout injectifs. Et si l'on identifie $W(A)$ (resp. $W_q(A)$) à un sous-anneau de $W(B)$ (resp. $W_q(B)$) via i^*, on a aussi $W(A) \subset W(B)^G$ et $W_q(A) \subset W_q(B)^G$. Le lemme 2.1. entraîne que $W(B)^G$ (resp. $W_q(B)^G$) est entier sur

$W(A)$ (resp. $W_q(A)$) et d'après le lemme 2.2., $W(B)^G/W(A)$ et $W_q(B)^G/W_q(A)$ sont des groupes abéliens avec $[B : A]$ - torsion.

Si ces groupes quotients n'étaient pas nuls, ils auraient de la p-torsion pour un entier premier impair $p \geq 3$, ce qui contredit le lemme suivant (cf. [6], Lemme 2.8):

Lemme 2.4. *Soient A et B deux anneaux commutatifs, $A \subset B$ et B entier sur A et $p \geq 2$ un nombre premier.*

(i) *Si* Nil $(B/pB) = \{0\}$ *et si le groupe abélien B/A n'a pas de p-torsion, alors* $\mathrm{Nil}(A/pA) = 0$.

(ii) *Si B n'a pas de p-torsion* et Nil $(A/pA) = 0$, *alors B/A n'a pas de p-torsion.*

Bibliographie

[1] R. Baeza; *Quadratic forms over semilocal rings*, L.N. in Mathematics 655, Springer - Verlag 1978.

[2] N. Bourbaki; *Commutative Algebra*, Hermann, Paris 1972.

[3] I. Dias; *Formas Quadráticas sobre LG-anéis*, thèse de doctorat, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brésil, 1988.

[4] D. Estes and R. Guralnick; *Module equivalences: Local to Global when primitive polynomials represent units*, J. of Algebra 77 (1982),138-157.

[5] I. Kaplansky; *Fields and Rings*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1972.

[6] M. Knebusch, A. Rosenberg and R. Ware; *Signatures on Semilocal Rings*, J. of Algebra 26 (1973), 208-250.

[7] B.R. McDonald and W.C. Waterhouse; *Projective modules over rings with many units*, Proc. of the Amer. Math. Soc. 83 (1981), 455-458.

N O T A S D O I C M S C

Nº 92/91 - RODRIGUES, J. - The Kullback - Leibler approximation of the marginal posterior density: an application to the linear functional model

Nº 91/91 - SCOTT, D.R.;-NUNES, M.G.V. - Focus-driven search for decinding what to say in reply to questions

Nº 90/91 - SOUZA, C.S.; NUNES, M.G.V. - On the role of text generation in knowledge based systems interfaces

Nº 89/91 - MORABITO, R.N.; ARENALES, M.N. - On solving large two-dimensional guillotine cutting problems

Nº 88/91 - MICALI, A.; VILLAMAYOR, O.E. - Algèbres de Clifford sur un corps de caractéristique 2

Nº 87/91 - RAPOPORT-CAMPODÔNICO, D.L. - On the construction of Lie-isotopic relativistic stochastic mechanics and Lie-isotopic potential theory from the Lie-isotopic geometry associated to a torsion potential

Nº 86/91 - ACHCAR, J.A. - Inferences for the Birnbaun-Saunders fadigue life model using Bayesian methods

Nº 85/91 - ACHCAR, J.A.; LOUZADA NETO, F. - Accelaerated life tests with one stress variable : a Bayesian analysis of the eyring model

Nº 84/90 - RODRIGUES, J. - Bayes predective likelihood function for the accelerated life tests via the orthogonal parameters

Nº 83/90 - RODRIGUES, J. - A Bayesian analysis of the generalized least-square procedure to functional relationship

Nº 82/90 - LIZANA PEÑA, M. - Exponential dichotomy for singularity perturbed linear functional differential equations with small delays