UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Algèbres de Clifford sur un corps de caractéristique 2

ARTIBANO MICALI; ORLANDO E. VILLAMAYOR

Nº 88

NOTAS

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

ISSN 0103-2577

Algèbres de Clifford sur un corps de caractéristique 2

ARTIBANO MICALI; ORLANDO E. VILLAMAYOR

Nº 88

N O T A S D O I C M S C

Sao Carlos

Set./1991

Algèbres de Clifford sur un Corps de Caractéristique 2

Artibano MICALI (*)
Département des Sciences Mathématiques
Université de Montpellier II
Place Eugène Bataillon
34095 Montellier, France

et

Orlando E. VILLAMAYOR
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

Cet article est, dans une certaine mesure, une suite de [2] dans lequel nous avons exposé la théorie des formes quadratiques en caractéristique 2. Nous montrons ici, quitte à étendre convenablement le corps de base, que toute algèbre de Clifford d'une forme singulière sur un corps de caractéristique 2 est isomorphe, en tant qu'algèbre, à une algèbre extérieure. De plus, ces algèbres n'ont d'autres idempotents que 0 et 1.

This paper is a continuation of [2] and we show, essentially, that every Clifford algebra of a singular quadratic form over a field of characteristic 2 is isomorphic, as algebra, to an exterior algebra. This exterior algebra is constructed over a convenient field extension of the base field. Finally, these Clifford algebras have no idempotents different from 0 and 1.

1. Définitions.

Soient K un anneau commutatif à élément unité, M un K-module, $f : M \to K$ une forme quadratique sur M et $b_f : M \times M \to K, (x,y) \mapsto f(x+y) - f(x) - f(y)$ la forme K-bilinéaire symétrique associée à f. Un K-module M muni d'une forme quadratique f est appelé un *espace quadratique* ou *module quadratique* et est noté (M,f). On notera $C_K(M,f)$ son algèbre de Clifford qui est une K-algèbre associative à èlément unité et graduée sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Le symbole $\perp$ désigne la *somme orthogonale* d'espaces quadratiques et $\hat{\otimes}_K$ désignera le *produit tensoriel gradué* d'algèbres graduées sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On sait que C_K est un foncteur covariant défini dans la catégorie des espaces quadratiques sur K à valeurs dans celle des K-algèbres associatives à élément unité et graduées sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. De plus, C_K transforme la somme orthogonale en le produit tensoriel gradué ou, plus simplement, somme en somme. Notons, finalement, que $b_f(x,x) = 2f(x)$ pour tout x dans M donc si K est un anneau de caractéristique 2 ou si 2 est nul dans K, on a $b_f(x,x) = 0$ pour tout x dans M. Ceci nous conduit à la définition suivante: on dira que $f : M \to K$ est une *forme quadratique additive* si $b_f = 0$, ce que revient à dire que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, quels que soient x, y dans M. Pour plus de renseignements sur la théorie des formes quadratiques et les algèbres de Clifford, on renvoie à [1].

(*) Partially supported by FAPESP (Proc. 91/0462-3), CAPES (N. Ref. DAI. :723/91) and ICMSC-USP-São Carlos, Brazil.

2. Le Théorème Principal.

On sait (cf. [2]) que si K est un corps commutatif de caractéristique 2 et (V,f) un K-espace quadratique où V est un K-espace vectoriel de dimension finie et $f: V \to K$ est une forme quadratique, alors l'espace quadratique (V,f) admet une décomposition orthogonale sous la forme $(V,f) = (V_1, f_1)\perp(V_2, f_2)\perp(V_3, f_3)$ où $f_1 : V_1 \to K$ est une forme quadratique non dégénérée et, en particulier, l'espace vectoriel V_1 est de dimension paire, $f_2 : V_2 \to K$ est une forme quadratique additive et anisotrope et $f_3 : V_3 \to K$ est la forme quadratique nulle. Il s'ensuit un isomorphisne d'algèbres graduées sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, C_K(V,f) \approx C_K(V_1, f_1) \hat{\otimes}_K C_K(V_2, f_2) \hat{\otimes}_K C_K(V_3, f_3)$. Or, on sait que $C_K(V_1, f_1)$ est une K-algèbre simple au sens gradué et que $C_K(V_3, f_3) \approx \Lambda_K(V_3)$ est l'algèbre extérieure de l'espace vectoriel V_3 car $f_3 = 0$. Donc, sur un corps commutatif de caractéristique 2, l'unique algèbre de Clifford dont nous avons à déterminer la structure est celle d'un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique additive et anisotrope. On a le résultat suivant:

Theòrème 2.1 Soient K *un corps commutatif de caractéristique* 2 *et* (V,f) *un* K- *espace quadratique où* V *est un* K- *espace vectoriel de dimension finie* n *et* $f : V \to K$ *est une forme quadratique additive et anisotrope. Il existe alors une extension purement inséparable* L *de* K *de dimension* $2^s, 1 \leq s \leq n$, *telle que* $C_K(V,f) \approx \Lambda_L(L^{n-s})$, *isomorphisme de* K- *algèbres.*

En effet, notons $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de V sur K et supposons que les s premiers vecteurs de cette base, avec $s \leq n$, verifient les conditions: $a_1 = f(e_1)$ n'est pas un carré dans le corps $K, a_2 = f(e_2)$ n'est pas un carré dans le corps $K_1 = K[X]/(x^2 - a_1), \ldots, a_s = f(e_s)$ n'est pas un carré dans le corps $K_{s-1} = K_{s-2}[X]/(X^2 - a_{s-1})$ donc aussi $K_s = K_{s-1}[X]/(X^2 - a_s)$ est un corps et, de plus, K_i est une extension purement inséparable de $K_{i-1} (i = 1, \ldots, s)$ de degré 2 avec $K_0 = K$. Donc K_s est une extension purement inséparable de K de degré 2^s.

Considérons maintenant la décomposition orthogonale $(V,f) = (Ke_1, f)\perp(V_1, f)$ où V_1 est le sous-K-espace vectoriel de V engendré para $\{e_2, \ldots, e_n\}$. Il en résulte un isomorphisme de K-algèbres graduées sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, C_K(V,f) \approx C_K(Ke_1, f) \hat{\otimes}_K C_K(V_1, f) = K_1 \otimes_K C_K(V_1, f) \approx C_{K_1}(K_1 \otimes_K V_1, f_1)$ où $f_1 : K_1 \otimes_K V_1 \to K_1$ est l'extension de la forme quadratique $f : V_1 \to K$ via l'extension des scalaires $K \to K_1$. De même, on considère la décomposition orthogonale $(K_1 \otimes_K V_1, f_1) = (K_1(1 \otimes e_2), f_1)\perp(V_2, f_1)$ où V_2 est le sous-$-K_1$ - espace vectoriel de $K_1 \otimes_K V_1$ engendré par $\{1 \otimes e_3, \ldots, 1 \otimes e_n\}$ d' où un isomorphisme de K_1- algèbres graduées sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, C_{K_1}(K_1 \otimes_K V_1, f_1) \approx C_{K_1}(K_1(1 \otimes e_2), f_1) \hat{\otimes}_{K_1} C_{K_1}(V_2, f_1) \approx K_2 \otimes_{K_1} C_{K_1}(V_2, f_1) \approx C_{K_2}(K_2 \otimes_{K_1} V_2, f_2)$ où $f_2 : K_2 \otimes_{K_1} V_2 \to K_2$ est l'extension de la forme quadratique $f_1 : K_1 \otimes_K V_1 \to K_1$ via l'extension des scalaires $K_1 \to K_2$. Notons que $K_1 \otimes_K V_1$ est naturellement isomorphe à un sous-K_1-espace vectoriel de $K_1 \otimes_K V$ et, de même, $K_2 \otimes_{K_1} V_2$ à un sous-K_2-espace vectoriel de $K_2 \otimes_K V_1$ et aussi de $K_2 \otimes_K V$. En suivant ce procéde on arrive à $C_K(V,f) \approx C_{K_s}(K_s \otimes_{K_{s-1}} V_s, f_s)$

où $K_s \otimes_{K_{s-1}} V_s$ est un K_s-espace vectoriel de dimension $n-s$ et $f_s : K_s \otimes_{K_{s-1}} V_s \to K_s$ est une forme quadratique additive telle que pour tout vecteur x de $K_s \otimes_{K_{s-1}} V_s, f_s(x)$ est un carré dans K_s. Encore ici, $K_s \otimes_{K_{s-1}} V_s$ est isomorphe à un sous-K_s-espace vectoriel de $K_s \otimes_K V_{s-1}$ et aussi de $K_s \otimes_K V$. On peut donc écrire $C_{K_s}(K_s \otimes_{K_{s-1}} V_s, f_s) \approx \otimes_{i=s+1}^n C_{K_s}(K_s(1 \otimes e_i), f_s) \approx K_s[e_{s+1}, \dots, e_n]/(e_{s+1}^2 - f_s(1 \otimes e_{s+1}), \dots, e_n^2 - f_s(1 \otimes e_n))$, isomorphismes de K_s-algèbres, où $f_s(1 \otimes e_i) = f(e_i) = b_i^2 (i = s+1, \dots, n)$ avec $b_i \in K_s (i = s+1, \dots, n)$. L'application K_s- linéaire $e_i \mapsto x_i + b_i (i = s+1, \dots, n)$ définit un isomorphisme d'anneaux de polynômes $K_s[e_{s+1}, \dots, e_n] \xrightarrow{\sim} K_s[x_{s+1}, \dots, x_n]$ qui envoie l'idéal engendré par les éléments $e_i^2 - f(e_i)$ sur l'idéal engendré par les éléments x_i^2 d'où l'isomorphisme de K_s-algèbres $C_{K_s}(K_s \otimes_{K_{s-1}} V_s, f_s) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{K_s}(W)$ où W est un K_s-espace vectoriel de dimension $n-s$. Il suffit maintenant de prendre $L = K_s$ d'où l'isomorphisme de K-algèbres $C_K(V, f) \xrightarrow{\sim} \Lambda_L(W)$. Il est évident que cette démonstration ne depend pas de la base choisie pour V, en tant que K-espace vectoriel.

La démonstration du lemme suivant est immédiate:

Lemme 2.2. Soient K *un corps commutatif de caractéristique* 2 *et* (V, f) *un* K-*espace quadratique où* V *est un* K-*espace vectoriel de dimension fimie et* $f : V \to K$ *est une forme quadratique additive. L'algèbre de Clifford* $C_K(V, f)$ *n'a alors d'autres idempotents que* 0 *et* 1.

En effet, il suffit de remarquer que la forme quadratique $f : V \to K$ étant additive et le corps K étant de caractéristique 2, l'algèbre de Clifford $C_K(V, f)$ est commutative.

Corollaire 2.3. Soient A *un anneau local d'idéal maximal* $\mathcal{M}$ *tel que* $2 \in \mathcal{M}$ *et corps résiduel* $K = A/\mathcal{M}$ *et* (M, f) *un* A-*module quadratique où* M *est un* A-*module de type fini et* $f : M \to A$ *une forme quadratique telle que son extension* $f' : M \otimes_A K \to K$ *soit additive. L'algèbre de Clifford* $C_A(M, f)$ *n'a alors d'autres idempotents que* 0 *et* 1.

En effet, si $\{e_1, ..., e_n\}$ est un système minimal de générateurs de M sur A, les monômes $g_i = e_{i_1} \dots e_{i_p}, i = (i_1, \dots, i_p), 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ forment un système minimal de générateurs de $C = C_A(M, f)$ sur A donc si une combinaison linéaire de ces monômes est nulle dans $C \otimes_A K$, tous les coefficients de cette combinaison sont dans $\mathcal{M}$. Ainsi, si $e \in \mathcal{M}C$ est un idempotent de C, on peut écrire $e = \Sigma_i x_i g_i$ (somme finie) avec les x_i dans $\mathcal{M}$ et la condition $e = e^2$ entraîne que $I = \mathcal{M}I$ où I est l'ideal (de type fini) engendrè par les x_i. Le lemme de Nakayama nous dit alors que $I = 0$ donc $e = 0$. Comme la K-algèbre $C \otimes_A K$ n'a d'autres idempotents que 0 et 1, les considérations ci-dessus nons montrent que si $e \in C$ est un idempotent dont l'image dans $C \otimes_A K$ est nulle alors $e = 0$ et si l'image est 1, alors $1 - e$ est un idempotent de C dont l'image dans $C \otimes_A K$ est nulle soit $e = 1$.

Corollaire 2.4. Soient A *un anneau commutatif à élément unité avec* 2 *dans le radical de Jacobson* Rad (A) *de* A *et* (M, f) *un* A-*module quadratique où* M *est un* A-*module de type fini et* $f : M \to A$ *est une forme quadratique dont la forme* A-*bilinéaire symétrique* b_f *prend ses valeurs dans* Rad (A). *Si* $Max(A)$ *est un espace topologique irreductible,* *l'algèbre de Clifford $C_A(M,f)$ n'a d'autres idempotents que* 0 *et* 1.

Notons $C = C_A(M,f)$ et soit e un idempotent de C. Pour tout idéal maximal $\mathcal{M}$ de A, la forme quadratique étendue $f_{\mathcal{M}} : M \otimes_A (A/\mathcal{M}) \to A/\mathcal{M}$ est additive et le corps $A/\mathcal{M}$ étant de caractéristique 2, le lemme 2.2, nous dit que l'algèbre de Clifford $C \otimes_A (A/\mathcal{M})$ n'a d'autres idempotents que 0 et 1. L'image $e_{\mathcal{M}}$ de e dans $C \otimes_A (A/\mathcal{M})$ étant un idempotent, $e_{\mathcal{M}}$ vaut nécessairement 0 ou 1. Posons $I = \{\mathcal{M} | \mathcal{M} \in Max(A), e_{\mathcal{M}} = 0\}$ et $J = \{\mathcal{M} | \mathcal{M} \in Max(A), e_{\mathcal{M}} = 1\}$. On a $I \cap J = \emptyset$ et I et J sont deux ouverts de $Max(A)$ verifiant $Max(A) = I \cup J$. Comme $Max(A)$ est un espace irreductible, on a $Max(A) = I$ ou $Max(A) = J$ donc ou bien $e_{\mathcal{M}} = 0$ pour tout idèal maximal $\mathcal{M}$ de A ou $e_{\mathcal{M}} = 1$ pour tout idèal maximal $\mathcal{M}$ de A. Il s'ensuit que $e = 0$ ou $e = 1$.

Note 2.5. Soient K un corps commutatif de caractéristique 2 et $a \in K$ tel que $a \notin K^2$. Un élément b de K est un carré dans le corps $K_1 = K[X]/(x^2 - a)$ si et seulement si il existe des éléments m, n dans K tels que $b - (mX + n)^2 \in (X^2 - a)$ ou encore, si et seulement si il existe un scalaire $\lambda \in K$ tel que $b - (mX + n)^2 = \lambda(X^2 - a)$, d'où $b = am^2 + n^2$. Or, l'ensemble des expressions de la forme $am^2 + n^2$ avec m et n parcourant K est le sous-corps de K égal à $K_1^2 \cap K$.

Bibliographie

[1] A. MICALI et Ph. REVOY, Modules quadratiques, Bull. Soc. Math. France, Mémoire N. 63 (1979), 144 p.

[2] A. MICALI et O. E. VILLAMAYOR, Formes quadratiques sur un corps de caractéristique 2, Communications in Algebra 17 (1989), 299-314.

N O T A S D O I C M S C

Nº 87/91 - RAPOPORT-CAMPODÓNICO, D.L. - On the construction of Lie-isotopic relativistic stochastic mechanics and Lie-isotopic potential theory from the Lie-isotopic geometry associated to a torsion potential

Nº 86/91 - ACHCAR, J.A. - Inferences for the Birnbaun - Saunders fadigue life model using Bayesian methods

Nº 85/91 - ACHCAR, J.A.; LOUZADA NETO, F. - Accelerated life tests with one stress variable: a Bayesian analysis of the eyring model

Nº 84/90 - RODRIGUES, J. - Bayes predective likelihood function for the accelerated life tests via the orthogonal parameters

Nº 83/90 - RODRIGUES, J. - A Bayesian analysis of the generalized least-square procedure to functional relationship

Nº 82/90 - LIZANA PEÑA, M. - Exponential dichotomy for singularity perturbed linear functional differential equations with small delays

Nº 81/90 - BERGAMASCO, A.P. - Perturbations of globally hipoelliptic operators

Nº 80/90 - MARAR, W.L. - On the image of -simple map-germs from $\mathbf{R}^2$ to $\mathbf{R}^3$

Nº 79/90 - RAPOPORT CAMPODONICO , D.L. - On the stochastic processes associated to the conformal Riemann-Cartan-Weyl structures of the theory of gravitation

Nº 78/90 - CUMINATO, J.A. - On the convergence of a perturbed collocation method for a class of Cauchy integral equations