

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Row-métodos de quarta ordem para problemas de
valor inicial do tipo "Stiff"

FERREIRA, V.G.; ANDRADE, C.M.F.de

Nº 70

NOTAS



Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

ISSN 0103-2577

Row-métodos de quarta ordem para problemas de
valor inicial do tipo "Stiff"

FERREIRA, V.G.; ANDRADE, C.M.F.de

Nº 70

N O T A S D O I C M S C

São Carlos (SP)

1990

ROW-MÉTODOS DE QUARTA ORDEM PARA
PROBLEMAS DE VALOR INICIAL DO TIPO "STIFF"

Valdemir G. Ferreira
Univ. Est. Paulista-UNESP
Depto de Matemática
C.P. 473
CEP 17.033 Bauru-SP

Célia M. F. de Andrade
Inst. de Ciênc. Mat.-USP
Depto Computação
C.P. 668
CEP 13.560 São Carlos-SP

Resumo

Apresentamos a classe dos métodos de Rosenbrock-Wanner, abreviadamente ROW-métodos, para resolver problemas de valor inicial "stiff". Atenção especial é dada à construção de métodos A-estáveis de quarta ordem e quatro estágios com apenas três parâmetros livres. Como resultado conseguimos um particular método, que denominamos ROW44, o qual é A-estável. Experimentos numéricos comprovam tal propriedade.

Todos os resultados apresentados são obtidos usando como ferramenta teórica a teoria dos grafos, ao estilo de J.C. Butcher.

1. Introdução

Consideramos o problema de valor inicial

$$y'(x) = f(y(x)), \quad y(a) = y_0, \quad (1.1)$$

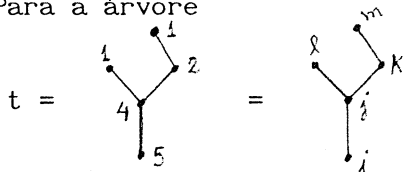
onde $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Em [Kaps-Wanner, 81], são tratados os ROW-métodos A-estáveis, para resolver (1.1) do tipo "stiff", com a propriedade do número de estágios ser mínimo. Isto pode causar instabilidade se os parâmetros do método não forem escolhidos adequadamente. O presente trabalho apresenta, na seção 6, a construção de ROW-métodos A-estáveis de quarta ordem, não explorada por Kaps e Wanner, com número de parâmetros livres reduzido.

2. Preliminares

Esta seção contém definições e resultados, principalmente de teoria dos grafos, os quais serão utilizados no desenvolvimento das seções seguintes. Seguiremos a notação adotada em [Hairer,87]. Assim, τ denotará a árvore com um único vértice, a letra A denotará o conjunto de todas as árvores e AN o conjunto das árvores nomeadas (incluindo a árvore vazia \emptyset) tais que, ao longo de cada arco, os nomes estejam na ordem crescente. $\Gamma(t)$ será a densidade da árvore t e podemos calculá-la associando, inicialmente, o valor 1 a todos os vértices terminais e o valor $1+i$ aos não terminais, onde i é a soma dos inteiros associados aos sucessores do vértice de valor $1+i$. $\Gamma(t)$ será, então o produto dos inteiros associados a cada vértice da árvore.

Exemplo 2.1: Para a árvore



$$\Gamma(t) = 5.4.2.1.$$

Definição 2.2: Um vértice x de uma árvore t é dito simples-ramificado se desse vértice parte no máximo um arco. Caso desse vértice parta mais que um arco, ele será chamado de múltiplo-ramificado.

Exemplo 2.3: Para a árvore do exemplo 2.1, os vértices i, k, l e m são simples-ramificados e o vértice j é múltiplo-ramificado.

Definição 2.4: Para cada inteiro i , ($1 \leq i \leq s$), e para $t \in A$ definimos

$$\psi_i(\tau) = 1$$

$$\psi_i(t) = \begin{cases} \sum_{j_1, \dots, j_m}^{i-1} \alpha_{ij_1} \dots \alpha_{ij_m} \psi_{j_1}(t_1) \dots \psi_{j_m}(t_m); & t = [t_1 \dots t_m], m > 1 \\ \sum_{j=1}^i \beta'_{ij} \psi_j(t_1); & t = [t_1], \end{cases}$$

onde α_{ij} e β'_{ij} são fatores associados aos arcos da árvore t .

Dada $t \in A$ podemos obter $\psi_i(t)$ diretamente do diagrama da árvore t : à raiz de t associamos o nome i e para os demais vértices associamos j, k, \dots . Para cada arco escrevemos, no sentido do arco orientado, o fator β'_{xy} - caso o vértice x seja simples-ramificado - ou o fator α_{xy} - caso x seja múltiplo-ramificado. $\psi_i(t)$ será então a soma em j, k, \dots , dos produtos dos fatores $\alpha_{xy} \beta'_{xy}$.

Exemplo 2.5: Para a árvore do exemplo 2.1, $\psi_i(t)$ tem a forma

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^i \beta'_{ij} \left[\sum_{l=1}^{j-1} \alpha_{jl} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{jk} \left[\sum_{m=1}^k \beta'_{km} \right] \right] \right].$$

Associando aos arcos terminais de t , $t \in A$, os fatores

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \quad \text{e} \quad \beta'_i = \sum_{j=1}^i \beta'_{ij}, \quad (2.1)$$

podemos expressar $\psi_i(t)$ numa forma mais compacta. Assim, $\psi_i(t)$ do exemplo 2.5 torna-se

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^i \beta'_{ij} \alpha_j \left[\sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{jk} \beta'_k \right] = \sum \beta'_{ij} \alpha_j \alpha_{jk} \beta'_k.$$

Definição 2.6: Para uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a diferencial elementar, de f com respeito a $t \in A$, $F_f(t)$ é definida, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, por

$$\begin{aligned} F_f(\emptyset)(y) &= y; \quad F_f(\tau)(y) = f(y) \\ F_f(t)(y) &= f^{(r)}(y) \cdot (F_f(t_1)(y), \dots, F_f(t_r)(y)), \end{aligned}$$

onde $t = [t_1 \dots t_r]$.

Definição 2.7: Seja $a: A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função arbitrária. Uma série de Butcher com coeficientes $a(t)$ é definida por

$$B(a, y) = \sum_{t \in AN} \frac{h^{r(t)}}{r(t)!} a(t) F_f(t)(y),$$

onde $r(t)$ é o número de vértices da árvore t .

3. A estrutura geral dos ROW-métodos

Seja y_n uma aproximação para $y(x_n)$, onde $y(x)$ satisfaz (1.1). Dado um tamanho de passo h , $h>0$, um ROW-método de s estágios tem a forma a seguir, apresentada por [Dekker-Verwer,84; pag. 231]:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad (n \geq 0) \quad (3.1)$$

$$E = (I - \gamma h f'(y_n))^{-1}, \quad (3.2)$$

$$k_i = E \left[f(y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j) + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} k_j \right], \quad (1 \leq i \leq s), \quad (3.3)$$

onde as constantes reais a_{ij} , b_i , c_{ij} e γ distinguem diferentes processos deste tipo. A fórmula (3.2) requer o cálculo da matriz jacobiana de f e a fórmula (3.3) consiste em uma seqüência de s sistemas lineares, os quais nos permitem obter os vetores k_i . Observamos ainda que todas as equações que aparecem em (3.3) têm a mesma matriz E , e portanto necessitamos de apenas uma decomposição LU a cada passo de integração.

Na definição de um ROW-método, colocando

$$g_i = h(k_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} k_j), \quad \gamma = \gamma_{ii}, \quad (1 \leq i \leq s)$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_{ik} (\delta_{kj} - c_{kj}) / \gamma, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik} (\delta_{kj} - c_{kj}),$$

$$b_j = \sum_{k=1}^s \mu_k (\delta_{kj} - c_{kj}), \quad (1 \leq i, j \leq s),$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker, obtemos a formulação equivalente:

$$\begin{cases} u_i = y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} g_j, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} g_i = hf(u_i) + hf'(y_n) \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} g_j, \quad (1 \leq i \leq s) \end{cases} \quad (3.5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^s \mu_i g_i. \quad (3.6)$$

4. As condições de ordem

Consideramos um ROW-método qualquer e suponhamos que f , dada em (1.1), seja suficientemente diferenciável. Em analogia às condições de ordem para os métodos de Runge-Kutta, apresentadas em [Hairer, 87; pag. 247], nós podemos expressar, após cálculos algébricos exaustivos, as funções de h , dadas em (3.4)-(3.5)-(3.6), como séries de Butcher, cujos coeficientes são definidos por:

$$u_i(\emptyset) = 1, \quad u_i(t) = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} g_j(t), \quad (t \neq \emptyset) \quad (4.1)$$

$$g_i(\emptyset) = 0, \quad g_i(\tau) = 1, \quad g_i(t) = r(t)u_i(t_1) \dots u_i(t_m) + \begin{cases} 0 & \text{se } t = [t_1 \dots t_m], \quad m > 1 \\ r(t) \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} g_j(t_1) & \text{se } t = [t_1], \end{cases} \quad (4.2)$$

$$y_{n+1}(\emptyset) = 1, \quad y_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^s \mu_i g_i(t). \quad (4.3)$$

Para simplificar os coeficientes (4.1)-(4.2)-(4.3) e escrever as expressões $\psi_i(t)$, dadas na definição 2.4, com índices variando de 1 até s vamos colocar

$$\alpha_{ij} = 0; \quad j \geq i, \quad \gamma_{ij} = 0; \quad j > i, \quad \beta'_{ij} = \alpha_{ij} + \gamma_{ij},$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \beta'_{ij}, & i > j \\ 0, & i \leq j \end{cases}, \quad \beta'_{ii} = \gamma_{ii} = \gamma, \quad \forall i. \quad (4.4)$$

Levando em conta as simplificações (4.4) e substituindo as expressões (4.1) e (4.2) em (4.3) obtemos, para qualquer árvore $t \neq \emptyset$, os coeficientes da série (3.6) como:

$$y_{n+1}(t) = \Gamma(t) \sum_{i=1}^s \mu_i \psi_i(t), \quad (4.5)$$

onde $\Gamma(t)$ é a densidade de t .

Observando que a solução verdadeira $y(x_n+h)$, de (1.1), é uma série de Butcher com coeficientes $y(t)=1, \forall t \in A$, e utilizando o teorema 306A de [Butcher,87; pag. 167] estabelecemos o resultado a seguir, o qual exprime as condições de ordem para os ROW-métodos.

Teorema 4.1: Uma condição necessária e suficiente para que um ROW-método tenha ordem $p, p \geq 1$, é que

$$y_{n+1}(t) = 1, \forall t \in A; r(t) \leq p,$$









ou equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^s \mu_i \psi_i(t) = 1/\Gamma(t), \forall t \in A; r(t) \leq p. \quad (4.6)$$

As condições (4.6) correspondem a um sistema nos parâmetros do método com $\#\{t \in A; r(t) \leq p\}$ equações não lineares. Usando (4.4) e transpondo todos os termos que contém o fator γ para o lado direito de (4.6), obtemos as condições de ordem simplificadas para os ROW-métodos.

A tabela 1, que vem a seguir, exhibe as condições de ordem simplificadas para métodos de quarta ordem.

Tabela 1: Condições de ordem 4

número	árvore	r(t)	condição
1		1	$\sum \mu_i = 1$
2		2	$\sum \mu_i \beta_i = (1/2) - \gamma = P_2$
3		3	$\sum \mu_i \alpha_i^2 = 1/3$
4		3	$\sum \mu_i \beta_{ij} \beta_j = (1/6) - \gamma + \gamma^2 = P_4$
5		4	$\sum \mu_i \alpha_i^3 = 1/4$
6		4	$\sum \mu_i \alpha_i \alpha_{ij} \beta_j = (1/8) - \gamma/3 = P_6$
7		4	$\sum \mu_i \beta_{ij} \alpha_j^2 = (1/12) - \gamma/3 = P_7$
8		4	$\sum \mu_i \beta_{ij} \beta_{jk} \beta_k = (1/24) - (\gamma/2) + (3\gamma^2/2) - \gamma^3 = P_8$

Com o fim de simplificar a resolução do sistema (4.6), usaremos as hipóteses simplificadoras apresentadas em [Butcher,87; pag. 194-197], as quais são definidas para os ROW-métodos como:

$$\sum_{j=1}^s \alpha_{ij} \beta_j = \alpha_i ((\alpha_i/2) - \gamma), \quad (2 \leq i \leq s), \quad (4.7)$$

$$\sum_{i=1}^s \mu_i \beta_{ij} = \mu_j (1 - \alpha_j - \gamma), \quad (1 \leq j \leq s). \quad (4.8)$$

5. Estudo da A-estabilidade

O conceito da A-estabilidade, apropriado para problemas "stiff", está intimamente relacionado com o problema teste

$$y'(x) = \lambda y(x), \quad \lambda \in \mathbb{C}; \quad y(x_n) = y_n. \quad (5.1)$$

Quando aplicamos um ROW-método, na forma (3.4)-(3.5)-(3.6), ao problema (5.1) obtemos:

$$y_{n+1} = R(z)y_n, \quad z=h\lambda,$$

com

$$R(z) = 1 + \sum_{i=1}^s \left(\frac{z}{1-\gamma z} \right)^i \mu^T B^{i-1} e, \quad (5.2)$$

onde B é uma matriz triangular inferior com elementos β_{ij} , $\mu^T = (\mu_1, \dots, \mu_s)$ e $e^T = (1, \dots, 1)$.

A função $R: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida em (5.2), é chamada função de estabilidade do ROW-método, e tal método será chamado absolutamente estável em $z \in \mathbb{C}$, se, para este z ,

$$|R(z)| \leq 1. \quad (5.3)$$

Quando o semi-plano esquerdo, dos complexos, estiver contido na região determinada por (5.3), o método será dito A-estável.

A estabilidade absoluta de um ROW-método está completamente determinada pelas propriedades da função de estabilidade R . De fato, se a ordem de um ROW-método é ao menos s , então $R(z)$ pode ser escrita, segundo [Verwer-et al, 83], como:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \left[\sum_{j=0}^s z^j \sum_{i=0}^j \binom{s}{i} \frac{(-\gamma)^i}{(j-i)!} \right] / (1-\gamma z)^s. \quad (5.4)$$

Assim, a A-estabilidade depende exclusivamente do fator γ .

A partir de (5.4) podemos ver que para $\gamma \leq 0$ o método não pode ser A-estável. Pelo princípio do módulo máximo, afirmamos que o método será A-estável se, e somente se,

$$|R(iy)| \leq 1, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$E(y) = |Q(iy)|^2 - |P(iy)|^2 \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

No caso $s=4$ como é apontado em [Kaps-Rentrop, 79], após cálculos algébricos exaustivos, (5.5) transforma-se em

$$E(y) = A_1(\gamma)y^8 + A_2(\gamma)y^6,$$

onde

$$A_1(\gamma) = 8\gamma^7 - 22\gamma^6 + \frac{76\gamma^5}{3} - \frac{173\gamma^4}{12} + \frac{13\gamma^3}{3} - \frac{25\gamma^2}{36} + \frac{\gamma}{18} - \frac{1}{576},$$

$$A_2(\gamma) = -8\gamma^5 + 17\gamma^4 - \frac{32\gamma^3}{3} + \frac{17\gamma^2}{6} - \frac{\gamma}{3} + \frac{1}{72}.$$

Assim, a A-estabilidade estará assegurada se, e somente se,

$A_1(\gamma) \geq 0$ e $A_2(\gamma) \geq 0$, ou seja,

$$\gamma \in [0.39434, 1.28058] \quad (5.6)$$

6. Construção de métodos de quarta ordem

A construção de ROW-métodos A-estáveis de quarta ordem com cinco parâmetros livres é apresentada em [Kaps-Rentrop, 79]. Este elevado número de condições dificulta, na prática, a obtenção de tais métodos. Com o objetivo de obter ROW-métodos com aceitáveis propriedades computacionais e minimizar o número de parâmetros livres, pela imposição de (4.6), apresentamos a seguir um procedimento detalhado, o qual permite-nos determinar ROW-métodos A-estáveis com apenas três parâmetros livres.

Impondo (4.6) obtemos um sistema com 8 equações (ver tabela 1) para encontrar os parâmetros do método. Para simplificar a resolução de tal sistema, faremos uso de (4.7) e (4.8). Além disso para eliminar 6 dos nove parâmetros livres, usamos as condições de ordem para as árvores de cinco vértices:



$$\sum \mu_i \alpha_i^4 = 1/5, \quad (6.1)$$



$$\sum \mu_i \beta_{ij} \alpha_j^3 = (1/20) - \gamma/4 = P_{14}, \quad (6.2)$$



$$\sum \mu_i \beta_{ij} \beta_{jk} \alpha_k^2 = (1/60) - (\gamma/6) + \gamma^2/3 = P_{16}. \quad (6.3)$$

Procedimento 6.1:

1. Podemos escolher, convenientemente, γ , α_3 e α_{42} como parâmetros livres, onde γ pertence ao intervalo de estabilidade (5.6).
2. Obtemos $\alpha_2 = 2\gamma$ e $\alpha_4 = 1 - \gamma$ a partir de (4.7), com $i=2$, e (4.8), com $j=4$, respectivamente.
3. Obtemos $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ a partir do sistema linear determinado pelas equações 1, 3, 5 (da tabela 1) e (6.1).

4. Colocando $x_k = \sum_{i=k+1}^4 \mu_i \beta_{ik}$, ($2 \leq k \leq 3$), as equações 7 e (6.2) levam-nos ao sistema:

$$\begin{pmatrix} \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_7 \\ P_{14} \end{pmatrix},$$

o qual permite-nos calcular $\beta_{43} = x_3 / \mu_4$.

5. A equação (6.3) nos dá $\beta_{32} = P_{16} / \mu_4 \beta_{43} \alpha_2^2$. Daí, levando-se em conta a definição de x_2 , tiramos que $\beta_{42} = (x_2 - \mu_3 \beta_{32}) / \mu_4$.

6. As equações 8, 4 e 2 (tabela 1) e as definições de x_2 e x_3 , nos permitem determinar β_2, β_3 e β_4 através do sistema:

$$\begin{pmatrix} x_3 \beta_{32} & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_8 \\ P_4 \\ P_2 \end{pmatrix}.$$

7. A equação (4.7), com $i=3,4$, leva-nos ao cálculo de

$$\alpha_{32} = \alpha_3 ((\alpha_3/2) - \gamma) / \beta_2$$

$$\alpha_{43} = (\alpha_4 (\alpha_4/2 - \gamma) - \alpha_{42} \beta_2) / \beta_3.$$

8. Finalmente, obtemos α_{31} , α_{41} , β_{31} e β_{41} a partir de (2.1).

Após uma variedade de testes numéricos para a escolha dos três parâmetros livres chegamos aos seguintes valores:

$$\gamma=0.395, \alpha_3=0.6 \text{ e } \alpha_{42}=-0.1.$$

O parâmetro γ foi escolhido respeitando o intervalo de estabilidade (5.6) e α_3 e α_{42} foram obtidos com o objetivo de minimizar o erro de truncamento local principal. Ao método particular determinado pela escolha acima nós chamamos de ROW44 e os coeficientes restantes, na forma (3.1)-(3.2)-(3.3), estão listados na tabela 2.

Tabela 2: Coeficientes do método ROW44

a_{ij}	c_{ij}	b_i
$a_{21}=0.79000000100$	$c_{21}=7.2154975300$	$b_1=-2.8394122600$
$a_{31}=0.72864497700$	$c_{31}=6.2929833600$	$b_2=8.79258666000$
$a_{32}=-0.0156588174$	$c_{32}=0.1142599730$	$b_3=23.5084328000$
$a_{41}=0.77658862200$	$c_{41}=6.3804434600$	$b_4=-31.012509500$
$a_{42}=-0.1101830120$	$c_{42}=0.3683204420$	-
$a_{43}=0.08912143300$	$c_{43}=-0.238234831$	-

7. Resultados numéricos

Consideramos o sistema "stiff" com elevada razão de "stiffness", o qual foi extraído de [Barcelos,82; pag. 74],

$$\begin{cases} y_1' = -2000.5y_1 + 999.75y_2 + 1000.25, & y_1(0)=0 \\ y_2' = y_1 - y_2, & y_2(0)=-2, \end{cases} \quad (7.1)$$

cuja solução exata é

$$y_1(x) = -1.49998875\exp(-0.5x) + 0.499875\exp(-2000.5x) + 1$$

$$y_2(x) = -2.99975\exp(-0.5x) - 0.00025\exp(-2000.5x) + 1.$$

As tabelas 3,4 e 5 apresentam a solução numérica de (7.1), no intervalo [0,1], usando o método ROW44, bem como a solução verdadeira e o erro absoluto nos pontos $x=0.1$, $x=0.5$ e $x=1.0$, para vários valores de h .

Tabela 3: Resultados numéricos usando ROW44 com $h=0.1$

x	solução exata	solução numérica	erro abs
0.1	$\begin{pmatrix} -0.4268335D+0.0 \\ -0.1853450D+0.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.39919020D-0.1 \\ -0.1853672D+0.1 \end{pmatrix}$	0.46675252D+0.0
0.5	$\begin{pmatrix} -0.1681924D+0.0 \\ -0.1336208D+0.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.18627583D+0.0 \\ -0.1336349D+0.1 \end{pmatrix}$	0.35446823D+0.0
1.0	$\begin{pmatrix} 0.90210810D-0.1 \\ -0.8194403D+0.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.34148346D+0.0 \\ -0.8195340D+0.0 \end{pmatrix}$	0.25127265D+0.0

Tabela 4: Resultados numéricos usando ROW44 com $h=0.01$

x	solução exata	solução numérica	erro abs
0.1	$\begin{bmatrix} -0.4268335D+0.0 \\ -0.1853450D+0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.4257960D+0.0 \\ -0.1853440D+0.1 \end{bmatrix}$	0.10375000D-02
0.5	$\begin{bmatrix} -0.1681924D+0.0 \\ -0.1336208D+0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.1680441D+0.0 \\ -0.1336172D+0.1 \end{bmatrix}$	0.14830000D-03
1.0	$\begin{bmatrix} 0.90210810D-0.1 \\ -0.8194403D+0.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.90272690D-0.1 \\ -0.8194096D+0.0 \end{bmatrix}$	0.61880000D-04

Tabela 5: Resultados numéricos usando ROW44 com $h=0.001$

x	solução exata	solução numérica	erro abs
0.1	$\begin{bmatrix} -0.4268335D+0.0 \\ -0.1853450D+0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.4266129D+0.0 \\ -0.1853439D+0.1 \end{bmatrix}$	0.22060000D-03
0.5	$\begin{bmatrix} -0.1681924D+0.0 \\ -0.1336208D+0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.1680440D+0.0 \\ -0.1336172D+0.1 \end{bmatrix}$	0.14840000D-03
1.0	$\begin{bmatrix} 0.90210810D-0.1 \\ -0.8194403D+0.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.90272850D-0.1 \\ -0.8194093D+0.0 \end{bmatrix}$	0.62040000D-04

Como podemos observar, pelas tabelas 3, 4 e 5, o método manteve-se A-estável no intervalo $[0,1]$ com os vários valores do tamanho do passo.

O método ROW44 também foi testado num problema "stiff", com razão de "stiffness" da ordem de 10, de [Lambert,73; pag. 229], o qual mostrou-se bem satisfatório com tamanho de passo $h=0.1$.

8. Conclusões

Métodos A-estáveis de quarta ordem e quatro estágios, para resolver problemas "stiff", foram construídos utilizando-se várias hipóteses, as quais reduziram sensivelmente o número de parâmetros livres. Um particular método (ROW44) foi apresentado e aplicado a um problema de valor inicial "stiff", cujo fenômeno de "stiffness" é relativamente acentuado. As tabelas 3, 4 e 5 confirmaram a propriedade da A-estabilidade.

9. Bibliografia

- [Butcher,87]: Butcher, J.C. - The numerical analysis of ordinary differential equations, Runge-Kutta and general linear methods, John Wiley & Sons, 1987.
- [Barcelos,82]: Barcelos, C.A.Z. - Técnicas de correção para a solução numérica de problemas de valor inicial separadamente "stiff", dissertação de mestrado, USP-São Carlos, 1982.
- [Dekker-Verwer,84]: Dekker, K. and Verwer, J.G. - Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations, North-Holland, 1984.
- [Gottwald-Wanner,81]: Gottwald, B.A. and Wanner, G. - A reliable Rosenbrock integrator for stiff differential equations, Computing 26, 355-360, 1981.
- [Hairer,87]: Hairer, E., Nørsett, S. P. and Wanner, G. - Solving ordinary differential equations I, nonstiff problems, Springer-Verlag, 1987.
- [Hairer-Wanner,74]: Hairer, E. and Wanner, G. - On the Butcher group and general multi-value methods, Computing 13, 1-15, 1974.

- [Kaps-Wanner,81]: Kaps, P. and Wanner, G. - A study of Rosenbrock-type methods of high order, Numer. Math. **38**, 279-298, 1981.
- [Kaps-Rentrop,79]: Kaps, P. and Rentrop, P. - Generalized Runge-Kutta methods of order four with stepsize control for stiff ordinary differential equations, Numer. Math. **33**, 55-68, 1979.
- [Lambert,73]: Lambert, J.D. - Computational methods in ordinary differential equations, John Wiley & Sons, 1973.
- [Verwer-et al,83]: Verwer, J.G., Scholz, S., Blom, J. G. and Nool, M. L. - A class of Runge-Kutta-Rosenbrock methods for solving stiff differential equations, ZAMM **63**, 13-20, 1983.

REVISTAS DO ICMS - USP

- Nº 69/90 - MANCERA, P.F. de A.; FRANCO, N.M.B. - Análise de convergência do método trigonométrico de 1ª ordem para equações integrais de Abel de 1ª espécie
- Nº 68/90 - MASIERO, P.C. - Algorithm development through correct transformation
- Nº 67/90 - ACHCAR, J.A.; DIAS, T.C.M. - Accelerated life tests with an exponential distribution: a Bayesian approach with the power rule model and type II censored data
- Nº 66/90 - ARENALES, M.N.; BALBO, A.R. - Um método de pontos interiores com mudanças de escala para programação linear com restrições canalizadas
- Nº 65/90 - BONNECAZE, C. et al. - The tomography from the viewpoint of the topologist
- Nº 64/90 - RODRIGUES, J.; LOUZADA NETO, F. - A note on the orthogonal reparametrization in Bayesian inference for the extreme value distribution
- Nº 63/90 - RODRIGUES, S.R.; MONARD, M.C. - Implementação lógica de um módulo coletor de dados para a construção de sistemas especialistas
- Nº 62/90 - MONARD, M.C.; NICOLETTI, M.C. - Método sintático de prova de teorema algoritmo de Wang
- Nº 61/90 - GIONGO, M.A.; TÁBOAS, P.Z. - Roses play a role in some inverse problems from bifurcation theory
- Nº 60/90 - MORABITO, R.N.; ARENALES, M.N.; ARCARO, V.F. - An and-or-graph representation for two dimensional cutting problems