



I.C.M.S.C.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
CAMPUS DE SÃO CARLOS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

Um método de pontos interiores com mudança  
de escala para programação linear com res-  
trições canalizadas

ARENALES, M.N.; BALBO, A.R.

nº 66

Notas do ICMSC - USP

Um método de pontos interiores com mudança  
de escala para programação linear com res-  
trições canalizadas

ARENALES, M.N.; BALBO, A.R.

nº 66

São Carlos (SP)

1990

UM MÉTODO DE PONTOS INTERIORES COM MUDANÇA DE ESCALA  
PARA PROGRAMAÇÃO LINEAR COM RESTRIÇÕES CANALIZADAS

MARCOS N. ARENALES  
DEPTO. CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA  
ICMSC/USP - C.P. 668  
13560 - SÃO CARLOS - S.P.

ANTONIO R. BALBO  
DEPTO. DE MATEMÁTICA  
UNESP - C.P. 473  
17033 - BAURU - S.P.

**Resumo:** O algoritmo desenvolvido por Adler/Karmarkar/Resende/Veiga (1986), o qual explora a estrutura das restrições no formato  $Ax \leq b$  tem se mostrado o mais promissor algoritmo de pontos interiores com mudança de escala. Neste trabalho damos uma interpretação geométrica para as direções adotadas e estendemos o método para estruturas de restrições canalizadas:  $d \leq Ax \leq e$ .

**Abstract:** The algorithm developed by Adler/Karmarkar/Resende/Veiga (1986) exploring the frame of the constraints in the format  $Ax \leq b$  has showed as the most promising scaling interior points algorithm. In this paper we provide a geometric interpretation for the used directions and an extension of the method to interval linear programming:  $\min c^T x$ , subject to  $d \leq Ax \leq e$ .

## 1 - INTRODUÇÃO

Métodos de pontos interiores com mudança de escala para programação linear têm sido objeto de muita atenção nos últimos anos. Um trabalho, em especial, que tem anunciado os melhores resultados computacionais é devido a Adler e outros (1986), o qual explora a estrutura das restrições no formato  $Ax \leq b$ .

Neste trabalho enfocamos o algoritmo básico de Adler e outros. Mostramos que as direções usadas pelo método podem ser obtidas por minimizar a função objetivo linear do problema num elipsóide inteiramente contido na região de factibilidade, o qual depende diretamente da proximidade com a fronteira. Esta nova dedução do método, além de permitir uma interessante interpretação geométrica, permite prontamente a extensão do método para o caso de restrições canalizadas, ou seja, um método para resolver o problema:

$$\begin{aligned} \min c^t x \\ \text{sujeito a: } d \leq Ax \leq e, \end{aligned}$$

sem o artifício de duplicar restrições. Tal extensão não é óbvia seguindo a dedução algébrica apresentada por Adler e outros.

Uma vez que a estrutura de restrições canalizadas tem muitas aplicações práticas, é importante que um método seja hábil para tratá-la diretamente sem a necessidade de colocá-la na forma padrão, pois isto, em geral, torna o método ineficiente. É interessante salientar que o método simplex pode explorar esta estrutura e a maneira mais adequada é abordando o problema dual, o qual tem restrições de igualdade e função objetivo linear por partes (Arenales(1984)).

## 2 - O ALGORITMO DE ADLER/KARMAKAR/RESENDE/VEIGA

Nesta secção revemos o método apresentado por Adler e outros, seguindo um procedimento basicamente algébrico, em oposição à secção seguinte quando o mesmo método é deduzido com uma abordagem

mais geométrica.

Consideremos o programa linear na seguinte formatação:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a:} \quad & Ax \leq b, \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{posto}(A) = n$ . Introduzindo-se as variáveis de folga temos:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a:} \quad & Ax + Iz = b \\ & z \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Seja  $\bar{x}$  um ponto interior, ou seja:  $A\bar{x} < b$  (logo  $\bar{z} = b - A\bar{x} > 0$ ) e considere a matriz diagonal formada pelas variáveis de folga:

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{z}_m \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 \\ \vdots \\ \bar{z}_m \end{bmatrix}$$

Note que se redefinirmos as variáveis de folga por:

$$w = \bar{Z}^{-1} z, \quad \bar{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{z}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\bar{z}_m} \end{bmatrix}$$

a solução  $\bar{z}$  é então transformada em  $e = (1, \dots, 1)^T$ . Esta mudança de variável é particularmente interessante pois  $\bar{z}_1$  próximo a zero é transformado em 1, ou seja, a solução factível  $(\bar{x}, \bar{z})$  é transformada em  $(\bar{x}, e)$ . Assim teremos o seguinte problema equivalente a (2):

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a:} \quad & Ax + \bar{Z} w = b \\ & w \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Determinação da direção:

Para melhorarmos a solução  $\bar{x}$ , o problema (3) terá papel central na determinação da direção adotada. Para isto, introduziremos agora as direções factíveis a serem adotadas, as quais denotamos por:

$$d = \begin{bmatrix} d_x \\ d_w \end{bmatrix}.$$

Note que uma direção factível para o problema (3) deve

pertencer ao núcleo de  $(A, \bar{Z})$ , ou seja,

$$Ad_x + \bar{Z} d_w = 0 \Rightarrow d_w = -\bar{Z}^{-1} Ad_x. \quad (4)$$

Note de (4) que  $d_w$  a ser escolhida adiante deve pertencer ao espaço imagem de  $[\bar{Z}^{-1}A]$ , caso contrário uma direção ineficaz seria gerada (a estratégia normal dos métodos de pontos interiores é a de projetar o gradiente da função objetivo com respeito às variáveis que sofreram mudança de escala, no espaço das direções factíveis). Admitindo que  $d_w \in \text{Im}[\bar{Z}^{-1}A]$ , podemos expressar  $d_x$  em função de  $d_w$  usando-se a seguinte estratégia:

$$\begin{aligned} \bar{Z}^{-1} Ad_x + d_w &= 0 \Rightarrow \\ A^T \bar{Z}^{-1} (\bar{Z}^{-1} Ad_x + d_w) &= 0 \Rightarrow \\ d_x &= - [A^T \bar{Z}^{-2} A]^{-1} A^T \bar{Z}^{-1} d_w. \end{aligned} \quad (5)$$

Mostra-se facilmente que a matriz  $[A^T \bar{Z}^{-2} A]$  é definida positiva, uma vez que  $\text{posto}(A) = n$ . ( Caso  $d_w \notin \text{Im}[\bar{Z}^{-1}A]$ , tal manipulação no sistema (4) fornece  $d_x$  como solução quadrados mínimos (B.Noble(1969), pg.142) ). Para que  $d_x$  seja uma direção de descida, isto é,

$$c^T (\bar{x} + \epsilon d_x) < c^T \bar{x},$$

devemos ter  $c^T d_x < 0$ .

Então

$$c^T d_x = - \{c^T [A^T \bar{Z}^{-2} A]^{-1} A^T \bar{Z}^{-1}\} d_w = - \{\bar{Z}^{-1} A [A^T \bar{Z}^{-2} A]^{-1} c\}^T d_w$$

tem o valor mais negativo quando:

$$d_w = \bar{Z}^{-1} A [A^T \bar{Z}^{-2} A]^{-1} c. \quad (6)$$

Note que (6) é uma escolha possível para  $d_w$  pois pertence ao espaço imagem de  $[\bar{Z}^{-1}A]$ . Substituindo (6) em (5) obtemos:

$$d_x = - [A^T \bar{Z}^{-2} A]^{-1} c, \quad (7)$$

a qual é a direção a ser usada.

**Determinação do passo:**

A nova solução a ser adotada é dada por:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} d_x \\ d_z \end{bmatrix},$$

onde  $d_z = -Ad_x$  ( direção factível para o problema (2) ).

Para preservarmos  $\bar{x} + \epsilon d_x$  no interior da região de factibilidade, devemos ter:

$$\bar{z} + \epsilon d_z > 0 \Rightarrow \epsilon < - [ \bar{z}_1 / (d_z)_1 ] \text{ se } (d_z)_1 < 0.$$

Portanto calculamos o valor limite:

$$\alpha = \min \{ - [ \bar{z}_1 / (d_z)_1 ] \text{ se } (d_z)_1 < 0 \}$$

e uma heurística adotada para a escolha do passo é:  $\epsilon = 0.95 \alpha$ .

Caso  $d_z \geq 0$ , então o problema (1) não tem solução ótima finita, uma vez que  $d_x$  é direção de descida ( a matriz  $[AZ^{-2}A]^T$  é definida positiva ) e  $\epsilon$  pode ser arbitrariamente grande.

**Algoritmo:**

Após as considerações anteriores podemos enunciar o seguinte algoritmo:

Encontre  $x^0$  tal que  $Ax^0 < b$  e  $z^0 = b - Ax^0$ ,  $k = 0$ .

Enquanto um critério de parada não for satisfeito, faça:

Calcule a direção:

$$d_x = - [A^T Z_k^{-2} A]^{-1} c, \text{ onde } Z_k = \text{diag}[z_1^k, \dots, z_m^k],$$

$$d_z = -Ad_x.$$

Calcule o passo:

$$\alpha = \min \left\{ - \frac{z_1^k}{(d_z)_1}, (d_z)_i < 0, i=1, \dots, m \right\},$$

$$\epsilon = 0.95 \alpha.$$

Atualize a solução:

$$x^{k+1} = x^k + \epsilon d_x,$$

$$z^{k+1} = z^k + \epsilon d_z,$$

$$k \leftarrow k + 1.$$

Um processo para determinar uma solução inicial  $x^0$  é discutido em Adler e outros; e um critério de parada utilizado foi:

"Se

$$| c^T x^{k+1} - c^T x^k | / \max\{ 1, | c^T x^k | \} < \text{tol},$$

então o processo iterativo é interrompido, onde tol é uma tolerância positiva e pequena escolhida a priori."

### 3 - UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Nesta secção deduzimos o método da secção anterior com uma motivação basicamente geométrica. Esta visão do método permitirá facilmente estendê-lo para problemas cujas restrições são canalizadas.

Denominamos o conjunto das soluções factíveis do problema (1) por:

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b \}.$$

Considere a transformação afim,  $T: S \rightarrow (\mathbb{R}^+)^m$ , que associa cada  $x \in S$  as variáveis de folgas das restrições de (1):

$$z = T(x) = b - Ax.$$

A seguir apresentamos algumas propriedades da transformação T.

P1: T é injetiva.

Prova: Se  $T(x^1) = T(x^2) \Rightarrow b - Ax^1 = b - Ax^2 \Rightarrow A(x^1 - x^2) = 0$ .

Como posto (A) = n, segue que  $x^1 = x^2$ .  $\square$

Note que a transformação T não é sobrejetora (supondo  $m > n$ ), isto é, existe  $z \in (\mathbb{R}^+)^m$  tal que  $z \neq T(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Entretanto, se restringirmos o contra-domínio de T temos:

P2:  $T: S \rightarrow \text{Im}(T)$  é bijetora.

Assim, para qualquer que seja x factível, existe um único  $z \in$



$\text{Im}(T)$  tal que  $T(x) = z$  e vice-versa, para qualquer que seja  $z \in \text{Im}(T)$ , existe um único  $x$  factível tal que  $z = T(x)$ .

P3: Se estendermos o domínio e contra-domínio de  $T$ :  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , então  $\text{Im}(T) = \text{Im}(A) + \{b\}$ , onde  $\text{Im}(A)$  é o sub-espaço gerado pelas colunas da matriz  $A$ .

Ou seja,  $\text{Im}(T)$ , chamado sub-espaço afim, é a translação do sub-espaço  $\text{Im}(A)$  pelo vetor  $b$ . A prova desta propriedade segue diretamente da definição de  $T$ .

P4: Sejam  $z^1 = T(x^1)$  e  $z^2 = T(x^2)$ . Então  $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$  se e somente se  $z = T(x) = \lambda z^1 + (1 - \lambda)z^2$ .

Prova: Suponha que  $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ , então

$$\begin{aligned} z = T(x) &= b - A(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \pm \lambda b \\ &= \lambda b + (1 - \lambda)b - \lambda Ax^1 - (1 - \lambda)Ax^2 \\ &= \lambda(b - Ax^1) + (1 - \lambda)(b - Ax^2) \\ &= \lambda z^1 + (1 - \lambda)z^2. \end{aligned}$$

Suponha agora que  $z = T(x) = \lambda z^1 + (1 - \lambda)z^2$ , então

$$\begin{aligned} T(x) &= \lambda z^1 + (1 - \lambda)z^2 \\ &= \lambda T(x^1) + (1 - \lambda)T(x^2) \\ &= \lambda(b - Ax^1) + (1 - \lambda)(b - Ax^2) \\ &= T(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2), \end{aligned}$$

e devido a  $T$  ser injetiva segue que

$$x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2. \quad \square$$

**Corolário:** Pontos extremos e arestas de  $S$ , correspondem respectivamente a pontos extremos e arestas de  $\text{Im}(T)$ .

**Definição:** Se  $x + \lambda r \in S$ ,  $\forall \lambda \geq 0$  com  $x$  factível, dizemos que  $r$  é um raio da região de factibilidade do problema (1).

P5: Se  $r$  é um raio de  $S$  então  $-Ar$  é um raio de  $T(S)$  e  $Ar \leq 0$ .

Prova:  $z = T(x + \lambda r) = b - A(x + \lambda r) = T(x) - \lambda Ar \in T(S)$ ,  
 $\forall \lambda \geq 0$  e portanto  $-Ar$  é um raio de  $T(S)$ . Além disso, desde que  $r$  é um raio de  $S$  segue que  $A(x + \lambda r) \leq b \forall \lambda \geq 0$ . Assim  $\lambda Ar \leq b - Ax$ ,  $\forall \lambda \geq 0$ . Logo  $Ar \leq 0$ . □

interpretação geométrica da transformação T:

Considere  $T: S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^+)^3$

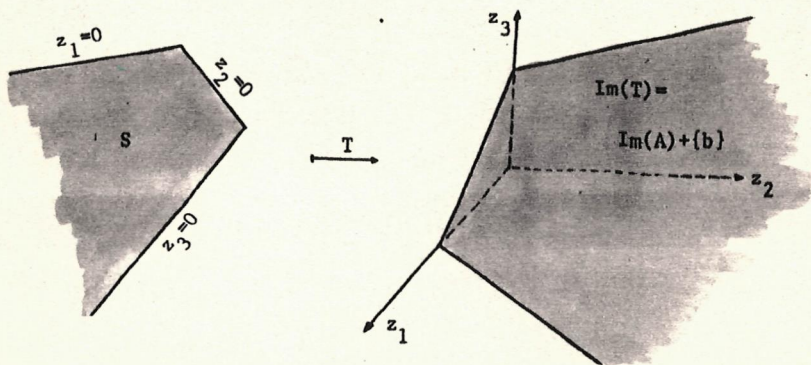


Figura 1

Retornemos ao problema (1).

Suponha conhecido um ponto  $\bar{x} \in \text{int}(S)$  e seja  $V(\bar{x})$  uma vizinhança de  $\bar{x}$  com  $V(\bar{x}) \subset S$ , tal que seja fácil resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T(\bar{x} + u) \\ \text{s.a:} \quad & \bar{x} + u \in V(\bar{x}). \end{aligned} \quad (8)$$

Obs: Se  $\bar{x}$  fosse fronteira,  $\bar{x}$  não estaria no interior de  $V(\bar{x}) \subset S$ .

Seja  $\bar{u}$  uma solução do problema (8), então desde que  $\bar{x}$  é interior de  $S$ , segue que:

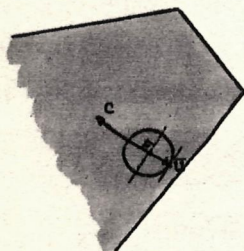
$$c^T(\bar{x} + \bar{u}) < c^T\bar{x} \Rightarrow c^T\bar{u} < 0.$$

Assim vale a proposição:

*Proposição 1:* A solução  $\bar{u}$  do problema (8) é uma direção factível e de descida para o problema (1).

A factibilidade da direção segue do fato de que  $S$  é convexo e  $\bar{x} + \bar{u} \in S$ .

Obs: Se  $V(\bar{x})$  fosse uma bola então a solução do problema (8),  $\bar{u}$ , seria um múltiplo de  $-c$ , ou seja, o problema (8) indicaria a direção oposta do gradiente, independentemente da proximidade de  $\bar{x}$  com a fronteira de  $S$ , conforme ilustra a figura 2.



$$\text{Se } V(\bar{x}) = \{ \bar{x} + u / \|u\|_2 \leq c \},$$

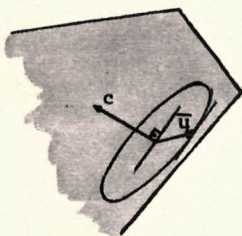
$$\text{então } \bar{u} = -c \frac{c}{\|c\|}.$$

Figura 2

Assim para a sequência:  $x^{k+1} = x^k + \lambda_k u^k$ , com  $x^0 = \bar{x}$  e  $u^k$  solução do problema (8) usando  $V(x^k)$  como bola e  $\lambda_k > 0$ , sendo o passo na direção de  $u^k$ , podemos ter  $\{u^k\} \rightarrow 0$  sem que a sequência  $\{x^k\}$  convirja para a solução ótima.

Como vimos a escolha da bola para  $V(\bar{x})$  não é uma boa escolha, pois a proximidade da fronteira numa direção, obriga que todas outras direções sejam também prejudicadas.

Uma escolha aparentemente mais razoável para  $V(\bar{x})$  seria uma elipse ("bola achatada"), a qual permite "diminuir"  $V(\bar{x})$  numa determinada direção, sem prejuízo de outras, e mantendo o problema (8) fácil de ser resolvido, conforme ilustra a figura 3.



A proximidade de  $\bar{x}$  com a fronteira numa direção, obrigando pequenos movimentos nesta direção, não inibe movimentos maiores em outras direções.

Figura 3

Para explicitarmos  $V(\bar{x})$  desta forma, recorremos ao espaço das variáveis de folga.

Seja  $\bar{z} = T(\bar{x})$ . Pela hipótese de  $\bar{x} \in \text{int}(S)$ , temos  $\bar{z} > 0$ .

Um elipsóide (elipse é um nome reservado para dimensão 2) muito simples, centrado em  $\bar{z}$ , que "pune" apenas as direções dos eixos coordenados para os quais as componentes de  $\bar{z}$  sejam próximas a zero (note que  $\bar{z}_1$  próximo a zero, indica que  $\bar{x}$  se aproxima da restrição  $a_1 x \leq b_1$ ) e está inteiramente contido em  $(\mathbb{R}^+)^m$  é:

$$E_z = \{ z \in \mathbb{R}^m / (z - \bar{z})^T \bar{Z}^{-2} (z - \bar{z}) = 1 \}$$

com  $\bar{Z} = \text{diag} [\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m]$ .

$$(E_z = \{ z \in \mathbb{R}^m : (z_1 - \bar{z}_1)^2 / (\bar{z}_1)^2 + \dots + (z_m - \bar{z}_m)^2 / (\bar{z}_m)^2 = 1 \})$$

Assim,  $\forall z \in E_z$  temos que  $z \in (\mathbb{R}^+)^m$ . Isto não implica contudo que  $z$  pertencente a  $E_z$  seja uma folga factível, isto é, pode acontecer que não exista  $x \in \mathbb{R}^n / z = T(x)$ .

Definimos uma vizinhança de  $\bar{z}$  por:

$$V(\bar{z}) = E_z \cap \text{Im}(T).$$

Uma vizinhança  $V(\bar{x})$  inteiramente contida em  $S$  pode ser obtida tomando-se a imagem inversa de  $V(\bar{z})$  pela transformação  $T$ :

$$V(\bar{x}) = T^{-1}(V(\bar{z})).$$

Para isto basta definir  $z = T(x)$  em  $E_z$ :

$$(T(x) - T(\bar{x}))^T \bar{Z}^{-2} (T(x) - T(\bar{x})) = 1.$$

Como  $T(x) - T(\bar{x}) = (b - Ax) - (b - A\bar{x}) = -A(x - \bar{x})$ , segue:

$$V(\bar{x}) = \{ x \in \mathbb{R}^n / (x - \bar{x})^T [A^T \bar{Z}^{-2} A] (x - \bar{x}) = 1 \}. \quad (9)$$

$V(\bar{x})$  define um elipsóide, porém não trivial, isto é, não tem seus eixos paralelos aos eixos coordenados como em  $E_z$ . Veremos que os autovetores de  $[A^T \bar{Z}^{-2} A]$  definem as direções dos eixos e  $2/\sqrt{\lambda_1}$  a amplitude do  $i$ -ésimo eixo do elipsóide, onde  $\lambda_1$  é o  $i$ -ésimo

autovalor. Para isto consideramos o seguinte teorema da álgebra linear (Wilkinson (1965), pg.26 e 28):

**Teorema:** Seja  $\bar{A}$  uma matriz simétrica e positiva definida, então:

- i) todos seus autovalores são positivos,
- ii) Existe uma base ortonormal de autovetores de  $\bar{A}$ .

Seja  $P = [p^1, \dots, p^n]$  uma matriz de autovetores de  $[A^T \bar{Z}^{-2} A]$  satisfazendo a condição ii) do teorema, onde  $\bar{Z} = \text{diag}[\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m]$ , com  $\bar{z}_i > 0$ ,  $i = 1 \dots m$ . Assim  $P^{-1} = P^T$ .

Logo,

$$[A^T \bar{Z}^{-2} A]P = [\lambda_1 p^1, \dots, \lambda_n p^n] = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

onde  $\lambda_i$  é o autovalor associado ao autovetor  $p^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

De outra forma,

$$A^T \bar{Z}^{-2} A = P \Lambda P^T,$$

com  $\Lambda = \text{diag} [\lambda_1 \dots \lambda_n]$ .

Considere agora a seguinte mudança de variável:  $y = P^T x$  ( $x = Py$ ), ou seja, dado um vetor  $x$ , podemos representá-lo na base  $[p^1, \dots, p^n]$  e suas coordenadas serão  $y_1 \dots y_n$ .

Reescrevemos agora  $V(\bar{x})$  no novo sistema de coordenadas  $y$ :

$$\begin{aligned} (x-\bar{x})^T A^T \bar{Z}^{-2} A (x-\bar{x}) &= (x-\bar{x})^T P \Lambda P^T (x-\bar{x}) \\ &= (P^T x - P^T \bar{x})^T \Lambda (P^T x - P^T \bar{x}) \\ &= (y-\bar{y})^T \Lambda (y-\bar{y}) = 1, \end{aligned}$$

onde  $\bar{y} = P^T \bar{x}$  ( $\bar{x} = P\bar{y}$ ) é a representação de  $\bar{x}$  no novo sistema de coordenadas.

A equação acima descreve um elipsóide (análogo a  $E_z$ ), centrado em  $\bar{y}$ , com eixos paralelos aos eixos coordenados de  $y$   $\{p^1, \dots, p^n\}$ , representado na figura 4.

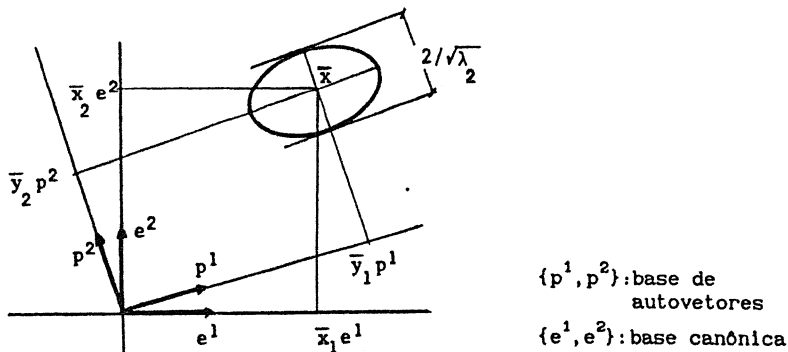


Figura 4

Retornemos ao problema (8) com  $V(\bar{x})$  definido pelo elipsóide (9), com  $x = \bar{x} + u$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T(\bar{x} + u) \\ \text{s.a.} \quad & u^T [A^T \bar{Z}^{-2} A] u = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Com a mudança de variável  $v = P^T u$ , o problema acima é equivalente a:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T P v + \{c^T \bar{x}\} \\ \text{s.a.} \quad & v^T \Lambda v = 1, \end{aligned}$$

cuja solução é múltipla de:

$$\bar{v} = -\Lambda^{-1} P c^T$$

Assim a solução de (10) é múltipla de:

$$\bar{u} = -P \Lambda^{-1} P^T c^T,$$

Note que

$$[A^T \bar{Z}^{-2} A]^{-1} = [P^T \Lambda P]^{-1} = P^T \Lambda^{-1} P,$$

e portanto a solução de (10) é múltipla de:

$$\bar{u} = -[A^T \bar{Z}^{-2} A]^{-1} c,$$

a qual é a direção (7). Desta forma mostramos que a direção usada por Adler/Karmarkar/Resende/Veiga pode ser obtida por resolver o problema (8) com  $V(\bar{x})$  definido por (9).

#### 4 - EXTENSÃO PARA RESTRIÇÕES CANALIZADAS

Nas secções 2 e 3 um método de pontos interiores foi deduzido explorando-se a estrutura das restrições no formato  $Ax \leq b$ . Nesta secção uma extensão daquele método é estendida para a estrutura de restrições canalizadas.

Considere o programa linear com restrições canalizadas:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a:} \quad & d \leq Ax \leq e, \end{aligned}$$

com  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\text{posto}(A) = n$ .

Naturalmente este problema pode ser visto como um caso particular do anterior, bastando reescrevê-lo na seguinte forma equivalente:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a:} \quad & Ax \leq e \\ & -Ax \leq -d, \end{aligned}$$

e então tratá-lo como anteriormente.

Entretanto a aplicação direta do algoritmo neste problema equivalente deve levar a um procedimento ineficiente. Podemos, ainda, explorar as particularidades das restrições (note que a matriz  $A$  é repetida) e trabalhar implicitamente com a duplicação das restrições, aproveitando-se de cálculos repetidos que apareceriam na determinação de  $\bar{u}$ . Entretanto a exploração das particularidades podem ser bem mais facilmente percebidas seguindo-se a linha geométrica adotada na dedução do algoritmo.

Definimos as variáveis de folga como a imagem da transformação linear:

$$z = T(x) = Ax.$$

De maneira análoga ao caso anterior podemos definir uma vizinhança  $V(\bar{x})$  inteiramente contida na região de factibilidade, primeiro construindo-se um elipsóide na imagem de  $T(\bar{x})$ , contido agora no hiper-cubo:  $d \leq z \leq e$  (relembre que no caso anterior exigia-se apenas  $z \geq 0$ ), e então tomar a imagem inversa deste. Para

isto considere o elipsóide:

$$E_z = \{ z \in R^m / (z - \bar{z})^T \bar{Z}^{-2} (z - \bar{z}) = 1 \}$$

onde  $\bar{Z} = \text{diag} [ \bar{z}'_1, \dots, \bar{z}'_m ]$ , com  $\bar{z}'_1 = \min \{ \bar{z}_1 - d_1, e_1 - \bar{z}_1 \}$ .

Note que este elipsóide, analogamente ao anterior, tem seus eixos paralelos aos eixos das coordenadas, no espaço das variáveis de folga e está inteiramente contido no hiper-cubo. Observe que se  $\bar{x}$  está mais próximo da fronteira:  $a_1 x = d_1$  ( $a_1$  é a  $i$ -ésima linha da matriz  $A$ ) do que  $a_1 x = e_1$ , isto implica que  $\bar{z}_1$  está mais próximo da face do hiper-cubo definido por  $z_1 = d_1$  do que  $z_1 = e_1$ . Isto decidirá a escolha de  $\bar{z}'_1$ , que fornece a amplitude do eixo do elipsóide naquela direção.

Assim, a menos da definição da matriz  $\bar{Z}$  e do tamanho do passo a ser dado em uma determinada direção, definido pelas condições de fronteira do problema (já que agora limitantes inferiores e superiores devem ser considerados), todas as expressões deduzidas anteriormente, são idênticas. Como consequência, um algoritmo para o caso de restrições canalizadas pode facilmente ser obtido.

**Algoritmo para restrições canalizadas:**

Encontre  $x^0$  tal que  $d \leq Ax^0 \leq e$ ,  $z^0 = Ax^0$ ,  $k = 0$ .

Enquanto um critério de parada não for satisfeito, faça:

Calcule a matriz  $\bar{Z}_k = \text{diag} [ \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m ]$  onde

$$\bar{z}_1 = \min \{ z_1^k - d_1, e_1 - z_1^k \}; i = 1, \dots, m.$$

Calcule a direção:

$$d_x = - [ A^T \bar{Z}_k^{-2} A ]^{-1} c,$$

$$d_z = A d_x.$$

Calcule o passo:

$$\alpha^1 = \min \{ - (z_1^k - d_1) / (d_z)_1 \text{ tal que } (d_z)_1 < 0 \},$$

$$\alpha^2 = \min \{ (e_1 - z_1^k) / (d_z)_1 \text{ tal que } (d_z)_1 > 0 \},$$

$$e = 0.95 \min \{ \alpha^1, \alpha^2 \}.$$



Atualize a solução:

$$x^{k+1} = x^k + \varepsilon d_x,$$

$$z^{k+1} = z^k + \varepsilon d_z,$$

$$k \leftarrow k + 1.$$

## B - REFERÊNCIAS

Adler, I.; Karmarkar, N.; Resende, M.G.C. and Veiga, G. (1986)- *An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming*, Technical Report, University of California, Berkeley. (Revised 1989).

Arenales, M.N. (1984) - *Programação linear: Novos métodos e alguns problemas particulares*, Tese de doutorado, Unicamp-FEC.

Noble, B. (1969) - *Applied linear algebra*, Prentice-Hall.

Wilkinson, J.H. (1965) - *The algebraic eigenvalue problem*, Oxford University Press.

NOTAS DO ICMS - USP

- Nº 65 - BONNECAZE, C. et al. - The tomography from the viewpoint of the topologist
- Nº 64 - RODRIGUES, J.; LOUZADA NETO, F. - A note on the orthogonal reparametrization in Bayesian inference for the extreme value distribution
- Nº 63 - RODRIGUES, S.R.; MONARD, M.C. - Implementação lógica de um módulo coletor de dados para a construção de sistemas especialistas
- Nº 62 - MONARD, M.C.; NICOLETTI, M.C. - Método sintático de prova de teorema algorítmico de Wang
- Nº 61 - GIONCO, M.A.; TÁBOAS, P.Z. - Roses play a role in some inverse problems from bifurcation theory
- Nº 60 - MORABITO, R.N.; ARENALES, M.N.; ARCARO, V.F. - An and-or-graph representation for two-dimensional cutting problems
- Nº 59 - ACHCAR, J.A. - A Bayesian approach to reparametrization of the exponential distribution with type I censored data
- Nº 58 - ACHCAR, J.A. - An useful reparametrization for the extreme value distribution
- Nº 57 - MASIERO, P.C. et al. - Um ambiente de desenvolvimento baseado na abordagem operacional
- Nº 56 - ANDRADE, E.X.L.; BRACCIALI, C.F. - Um método, assemelhado ao de Francis, para determinação de auto-valores de matrizes