

Filas $M/GI/n+1/0$ com realimentação Bernoulli;
um modelo protótipo para uso de processadores
paralelos para uma máquina de base de dados.

Maria Creusa B.Salles
Caetano Traina Junior

nº 38

São Carlos-SP
1988

"FILAS M/GI/n+1/O COM REALIMENTAÇÃO BERNOULLI: UM MODELO PROTÓ-
TIPO PARA USO DE PROCESSADORES PARALELOS PARA UMA MÁQUINA DE BA
SE DE DADOS"

Maria Creusa B. Salles e
Caetano Traina Junior.

ICMSC - USP - São Carlos

RESUMO:

Filas com realimentação (feedback) têm sido modelo de muitas situações reais. Neste trabalho analisamos o modelo com n servidores-memória idd mais um servidor-disco, independente dos anteriores e com distribuição distinta. Consideramos ainda sala de espera de tamanho zero, pois analisamos o modelo com um só processador. Para o modelo estocástico foi definido um processo de Markov $\{X_t^0, X_t^1, g_t: t \geq 0\}$ relativo ao desempenho do servidor-disco e dos servidores-memória para cada usuário no sistema, com realimentação segundo distribuição de Bernoulli. Determinamos a distribuição de equilíbrio do processo e algumas medidas de desempenho relativos ao número de processamentos por usuário, utilização da unidade de disco, tempo total de processamento de um usuário.

ABSTRACT:

Queues with feedback are usual in the real life. In this paper, we consider n idd servers (the memory of the processor unit) and a distinct server (the disk unit) independent of the others. We also consider no waiting room (only a processor unit). We define for each customer a Markov process $\{X_t^0, X_t^1, g_t: t \geq 0\}$ with instantaneous Bernoulli feedback in relation to performance of the processor and disk units. We find the stationary distribution of the process and some performance evaluations for the number of processing by customer, use of the disk unit, total time of processing, etc.

1. INTRODUÇÃO:

Muitos problemas reais têm sido modelados através de filas com realimentação ('feedback') instantânea. As hipóteses sobre o modelo-protótipo para o uso de processadores paralelos para uma máquina de Base de Dados (M.B.D.) levou-nos a uma fila com realimentação instantânea, segundo um processo de Bernoulli, com n servidores iid e ainda outro servidor, independente dos anteriores e com distribuição de tempo de serviço composta.

É ampla a literatura tratando de fila M/GI/1/N ($N \leq \infty$) com realimentação Bernoulli instantânea, onde tem sido estudado o processo que conta o número de usuários no sistema. Disney, McNickle e Simon (1980), Disney e König (1985), Hunter (1983) e (1985a), Disney, König e Schmidt (1984), Disney e Kiessler (1987) por exemplo, analisaram o processo número de usuários no sistema em tempo contínuo, bem como os processos imersos nos instantes de ocorrência de eventos: chegada (a) e partida (d) do sistema, entrada (i) e saída (o) do servidor e realimentação (f), também conhecidos como instantes de 'arrival', 'departure', 'input', 'output' e 'feedback', respectivamente. Mostraram que, em equilíbrio, a distribuição da cadeia de Markov imersa $\{p(k)\}$ no sistema, e as distribuições das cadeias imersas nos instantes de ocorrência de eventos $\alpha = a, d, i, o, f$, $\{p^\alpha(k)\}$ satisfazem, por exemplo, às igualdades:

$$\{p(k)\} = \{p^a(k)\} = \{p^d(k)\}$$

$$\{p^i(k)\} = \{p^o(k)\}$$

$$\{p^f(k)\} = \{p(k-1)\}$$

Disney (1981), Hunter (1985b) e outros também analisaram o tempo de permanência de um usuário no sistema. Outros autores, como König e Schmidt (1985) por exemplo, têm analisado filas com realimentação quando o processo de retorno é dependente do estado do sistema. Mais referências podem ser encontradas nas bibliografias dos trabalhos acima citados.

O nosso problema difere desse modelo clássico, principalmente pelo processo analisado. Devido ao caráter aplicado do problema, conforme descrito na seção 2, estamos interessados no desempenho dos n servidores (processadores) em si, bem como do servidor distinto (unidade de disco acoplado). Na seção 3 defini-

mos o processo que conta o número de vezes que o usuário, presente no sistema, usa a unidade de disco e o processador. Para o processo $X = \{X_t^0, X_t^1, g_t: t \geq 0\}$ assim definido, determinamos na seção 4 condições de existência para a distribuição de equilíbrio e a determinamos, mostrando que o que ocorre no processo X corresponde à superposição do processo de Bernoulli e de uma distribuição binomial negativa relativa ao uso do processador e do disco. Na seção 5 determinamos algumas medidas de desempenho para o sistema, como as distribuições marginais e seus valores médios, e o tempo de permanência de um usuário no sistema.

Como o objetivo final desse trabalho é a implementação do modelo com vários processadores, em paralelo, uma análise comparativa do desempenho do modelo-protótipo e do modelo estocástico aqui proposto deverá ser feita, através de simulações e análise de dados. É ainda nosso objetivo futuro determinar os processos imersos nos instantes de partida do sistema e de saída dos servidores, visto que esse processador-protótipo irá se conectar com outros processadores e unidades de disco.

2. MODELO REAL

O modelo real final, que está sendo desenvolvido na área de Engenharia de Software, é a construção de uma Máquina de Base de Dados através do uso de processadores operando em paralelo, e usando para isso uma massa de dados que pode ser compartilhada entre os vários processadores. Esta máquina tem a intenção de suportar um modelo de dados semântico orientado a objetos, denominado "Modelo de Representação de Objetos" - MRO (ver Traina e Slaets (1988)).

Para a construção dessa máquina, é necessário que se conheçam alguns parâmetros que permitam dimensionar o número de processadores, tamanho de memória em cada processador, velocidades de transferências de dados entre processadores, etc.

Para que o MRO pudesse ser utilizado, um Sistema de Gerenciamento de Base de Dados nele apoiado foi desenvolvido em cada um dos projetos intermediários de implementação (veja Traina (1982), Tsukumo (1985), Traina (1986)), para operação em computadores monoprocessadores convencionais (PDP-11/45, VAX e IBM-XT). Essas implementações estão operacionais e sendo utilizadas em situações reais de aplicação do modelo, constituindo um mode

lo-protótipo para análise e coleta de dados que serão usados para a validação de modelos sobre o MRO.

Assim, o objetivo final desse projeto é a obtenção de um modelo estocástico do MRO operando em multiprocessadores, porém, dada a disponibilidade atual de implementações em monoprocessores, o modelo estocástico aqui desenvolvido servirá para validar modelos futuros.

A seguir, faremos uma descrição sucinta do modelo-protótipo baseado em um processador:

O modelo-protótipo consiste de um processador com capacidade de armazenar todas as informações desejadas em uma Base de Dados (B.D.). Essas informações são armazenadas em m blocos de memória denominadas "páginas", todas do mesmo tamanho. A B.D. dispõe de todas as páginas armazenadas em disco porém, para que uma página possa ser processada, deve ser copiada na memória principal do processador de capacidade n limitada. As páginas são copiadas sob demanda, substituindo as menos usadas e/ou há mais tempo sem uso.

Um usuário do sistema pode necessitar, a uma única consulta, o uso de k páginas de informação, que devem estar na memória, ou serem aí copiadas, para que possam ser processadas. O número k de páginas necessárias a cada consulta é aleatório, pois o processamento de uma página pode ou não gerar uma nova "pergunta", independentemente das informações obtidas anteriormente. Note-se que perguntas geradas internamente pelo processamento de páginas e consultas provenientes do usuário são tratadas indistintamente pelo processador. As k páginas de informação processadas não são visíveis ao usuário, que recebe apenas a resposta final produzida pelo processador.

3. MODELO ESTOCÁSTICO

Consideramos um modelo de filas, com $(n+1)$ servidores independentes entre si. Cada um dos n servidores iid corresponde a uma página da memória do processador. Consideramos que a B.D. inteira (armazenada em disco) dispõe de um total de m páginas. O outro servidor, chamado "servidor-disco", corresponde a unidade de disco onde estão armazenadas as demais $(m-n)$ páginas de informação não disponíveis na memória, e executa o serviço de: (i) localização-e-transferência de uma página do disco para a

memória do processador e (ii) o processamento da página.

Supomos que usuários chegam ao sistema segundo um processo de Poisson. Como o sistema real possui apenas um processador, supomos que a sala de espera do sistema é de dimensão zero, e o usuário que chega e encontra o sistema ocupado é considerado perdido.

O usuário que chega e encontra o sistema vazio faz uma primeira consulta, cuja página pode estar na memória do processador (com probabilidade $r=n/m$) ou não. Nesse caso, a consulta dirige-se imediatamente ao servidor-disco. Esse primeiro atendimento ao usuário pode gerar (com probabilidade $0 \leq p < 1$) a necessidade de um novo processamento, quando então repetimos o comportamento de prestação de serviço caracterizado acima.

Após um número aleatório de processamentos, com probabilidade $q=1-p$ a informação solicitada pelo usuário é considerada completada, e o usuário sai do sistema.

Temos então um modelo de filas $M/GI/n+1/0$, com realimentação Bernoulli (veja Fig. 1)

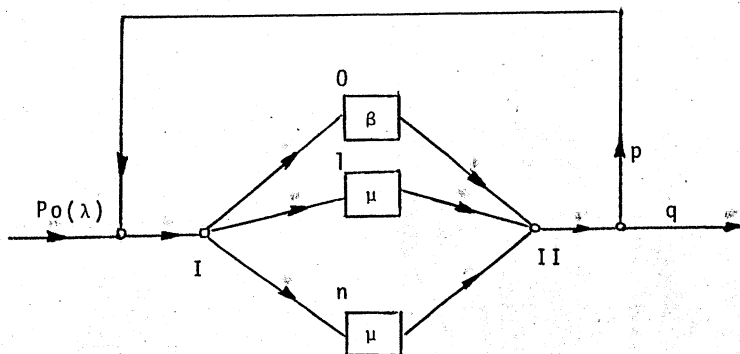


Fig. 1

São hipóteses do modelo:

- . processo de chegada Poisson de parâmetro $\lambda > 0$;
- . n servidores i.i.d., correspondendo o tempo de processamento de uma página a uma distribuição exponencial, de média $1/\mu < \infty$ (servidor tipo "1");
- . um servidor-disco (tipo "0"), independente dos anteriores e correspondendo o tempo de localização-e-transfe-

rência de páginas a uma distribuição exponencial de média $1/\gamma \gg 1/\mu$. Portanto o servidor-disco tem tempo de atendimento com distribuição tipo fase, de parâmetros μ e γ ;

- . no switch I o usuário dirige-se a qualquer um dos n servidores "1" com probabilidade $1/n$ ou ao servidor "0" com probabilidade $(1-r)$, $r=n/m$;
- . ao switch II associamos um processo de Bernoulli, com probabilidade de retorno igual a p , $0 \leq p < 1$, e probabilidade de partida do sistema igual a $q=1-p$;
- . os usuários que retornam ao centro de serviço, o fazem instantaneamente.

Consideramos ainda que os processos de chegada, atendimento e realimentação são independentes entre si.

Neste trabalho é nosso objetivo analisar o desempenho do sistema, a nível de utilização do processador e do disco.

4. O PROCESSO $X = \{X_t^0, X_t^1, g_t: t \geq 0\}$

Por todo o trabalho estaremos nos referindo ao usuário presente no sistema no instante t .

Definimos então as variáveis aleatórias:

X_t^0 : número de vezes que o usuário utilizou o servidor-disco "0" até o instante t , incluindo o atendimento atual;

X_t^1 : número de vezes que o usuário passou pelo switch I até o instante t , correspondendo ao número de processamentos do usuário e incluindo o atendimento atual. Definimos $X_t^1 := 0$ se no instante t o sistema está vazio;

g_t : variável auxiliar, que vale 1 ou 0 se o processamento atual é no servidor-disco "0" ou no servidor-memória "1", respectivamente. Definimos $g_t := 0$ se $X_t^1 = 0$.

Seja então o processo $X = \{X_t^0, X_t^1, g_t: t \geq 0\}$, com espaço de estados $E = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \{0, 1\}$ e matriz de taxas Q .

O resultado seguinte é imediato:

Teorema: O processo $X = \{X_t^0, X_t^1, g_t: t \geq 0\}$, acima definido, é um processo de Markov.

Demonstração: Num intervalo de tempo Δt observamos apenas as transições que correspondem à chegada de um usuário, ao fim de atendimento nos servidores, e à ocorrência ou não de um retorno. Devido às hipóteses de independências e distribuições exponenciais, temos garantida a propriedade de Markov para o processo X . □

A matriz Q é uma matriz "quase nascimento e morte" em blocos, onde as linhas e as colunas correspondem à sequência de estados $\{x_{00}, x_0, y_1, x_1, y_2, \dots\}$ onde temos:

$$x_{00} = \{(0,0,0)\}$$

$$x_n = \{(n,n+k,0), k \geq 1\}, \quad n \geq 0$$

$$y_n = \{(n,n+k,1), k \geq 0\}, \quad n \geq 1.$$

A matriz Q é da forma

$$Q = \begin{bmatrix} D_0 & D_1 & D_2 & & & & 0 \\ C_0 & A_0 & A_1 & & & & \\ C_1 & & B_0 & B_1 & B_2 & & \\ C_0 & & & A_0 & A_1 & & \\ C_1 & & & & B_0 & B_1 & B_2 \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & 0 & & & \\ \vdots & & & & & & \end{bmatrix}$$

onde os blocos são definidos por

$$D_0 = (-\lambda) \quad (1 \times 1)$$

$$D_1 = (\lambda r \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots) \quad (1 \times \infty)$$

$$D_2 = (\lambda(1-r) \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots) \quad (1 \times \infty)$$

$$C_0 = (\mu q \ \mu q \ \mu q \ \dots)^t \quad (\infty \times 1)$$

$$C_1 = (\beta q \ \beta q \ \beta q \ \dots)^t \quad (\infty \times 1)$$

A_0 : possui $(-\mu)$ em toda a diagonal principal, (μpr) na primeira diagonal superior, e zero nas demais posições;

A_1 : possui $(\mu p(1-r))$ em toda a primeira diagonal acima da diagonal principal, e zero nas demais posições;

B_0 : possui $(-\beta)$ em toda a diagonal principal, e zero nas demais posições;

B_1 : possui (βpr) em toda a diagonal principal e zero no resto;

B_2 : possui $(\beta p(1-r))$ em toda a diagonal principal e zero no resto;

onde utilizamos a seguinte notação:

λ : taxa de chegada de novos usuários;

μ : taxa de serviço no servidor "1";

$\beta = \mu \gamma$: taxa de serviço do servidor-disco "0", calculado no Apêndice;

$r = n/m$: probabilidade com que o usuário se dirige aos servidores-processador "1";

$p = 1 - q$: probabilidade de retorno do freguês ao centro de serviço, a cada vez que ele passa no switch II.

A distribuição de equilíbrio do processo X pode ser determinada:

Corolário: O processo de Markov $\{X_t^0, X_t^1, g_t : t \geq 0\}$ possui distribuição de equilíbrio π , sujeita à condição $0 \leq pr < 1$, e dada por:

$$(i) \quad \pi(0,0,0) = \frac{q}{[M]}$$

(ii) para $j \geq 1$ e $k \geq 0$:

$$\pi(j, j+k, 1) = \frac{1}{[M]} \cdot \frac{\lambda}{\beta} \cdot p^{j+k-1} \cdot q \cdot$$

$$\cdot \binom{j+k-1}{k} (1-r)^j r^k$$

(iii) para $j \geq 0$ e $k \geq 1$:

$$\pi(j, j+k, 0) = \frac{1}{[M]} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p^{j+k-1} q \cdot \binom{j+k-1}{j} (1-r)^j r^k$$

onde $[M] = q + \frac{\lambda}{\mu} \cdot r + \frac{\lambda}{\beta} \cdot (1-r)$

Demonstração:

Da igualdade

$$\pi Q = 0$$

e satisfazendo:

$$\begin{aligned} \pi(0,0,0) + \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 1} \pi(j, j+k, 0) + \\ + \sum_{j \geq 1} \sum_{k \geq 0} \pi(j, j+k, 1) = 1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} -\lambda \pi(0,0,0) + \mu q \left[\sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 1} \pi(j, j+k, 0) \right] + \\ + \beta q \left[\sum_{j \geq 1} \sum_{k \geq 0} \pi(j, j+k, 1) \right] = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} \lambda r \pi(0,0,0) - \mu \pi(0,1,0) = 0 \\ \lambda(1-r) \pi(0,0,0) - \beta \pi(1,1,1) = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Para $k \geq 1$:

$$\begin{cases} \mu p r \pi(0,k,0) - \mu \pi(0,k+1,0) = 0 \\ \mu p(1-r) \pi(0,k,0) - \beta \pi(1,k+1,1) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Para $j=1,2,3,\dots$ e $k=1,2,3,\dots$:

$$\begin{cases} \beta pr \pi(j,j,1) - \mu \pi(j,j+1,0) = 0 \\ \beta pr \pi(j,j+k,1) + \mu pr \pi(j,j+k,0) - \\ - \mu \pi(j,j+k+1,0) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} \beta p(1-r) \pi(j,j,1) - \beta \pi(j+1,j+1,1) = 0 \\ \beta p(1-r) \pi(j,j+k,1) + \mu p(1-r) \pi(j,j+k,0) - \\ - \beta \pi(j+1,j+k+1,1) = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Das equações (4.2) a (4.6) obtemos:

para $k=1,2,3,\dots$:

$$\pi(0,k,0) = (pr)^{k-1} \frac{\lambda r}{\mu} \pi(0,0,0) \quad (4.7)$$

para $j=1,2,3,\dots$ e $k=0,1,2,\dots$:

$$\begin{aligned} \pi(j,j+k,1) &= \binom{j+k-1}{j-1} (p(1-r))^{j-1} (pr)^k \cdot \\ &\cdot \frac{\lambda(1-r)}{\beta} \pi(0,0,0) \end{aligned} \quad (4.8)$$

para $j=1,2,3,\dots$ e $k=1,2,3,\dots$:

$$\begin{aligned} \pi(j,j+k,0) &= \binom{j+k-1}{j} (p(1-r))^{j-1} (pr)^k \cdot \\ &\cdot \frac{\lambda(1-r)}{\mu} \pi(0,0,0) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Substituindo as equações (4.7) a (4.9) na equação (4.1) obtemos o resultado enunciado, se estiver satisfeita a condição de equilíbrio

$$0 \leq p \cdot r < 1$$

□

5. MEDIDAS DE DESEMPENHO

É nosso interesse determinarmos algumas medidas relevantes dos processos marginais $\{X_t^0 : t > 0\}$ e $\{X_t^1 : t > 0\}$. Para tanto calculamos suas distribuições marginais de equilíbrio, assim como determinamos a função de distribuição condicionada do tempo de permanência $\{W\}$ de um usuário no sistema, conhecidos os valores de (X^0, X^1) , sua esperança condicionada e sua esperança não condicionada.

5.1. Ocupação do Sistema

$$\text{Pr} [\text{sistema desocupado}] = \frac{q}{[M]} \quad \square$$

5.2. Desempenho do Processador

(i) para $k \geq 1$:

$$\text{Pr} [X^1 = k] = \left[1 - \frac{q}{[M]}\right] p^{k-1} \cdot q$$

(ii) Número médio de processamentos efetuados para cada usuário:

$$E(X^1) = \left[1 - \frac{q}{[M]}\right] \cdot \frac{1}{q} = \delta \cdot \frac{1}{q}$$

$$\text{Var}(X^1) = \left[1 - \frac{q}{[M]}\right] \cdot \left[\frac{p}{q^2} + \frac{1}{q[M]}\right] =$$

$$= \frac{\delta}{q^2} [1 + p - \delta] \quad \square$$

5.3. Desempenho do Disco

$$(i) \quad \text{Pr}[X^0 = 0] = \frac{q}{[M](1-pr)} \left[\frac{\lambda r}{\mu} + (1 - pr) \right]$$

e para $j \geq 1$:

$$\text{Pr} [X^0 = j] = \frac{q}{[M](1-pr)} \left[\frac{\lambda r}{\mu} + \frac{\lambda}{\beta} \frac{(1-pr)}{p} \right] \cdot \left[\frac{p(1-r)}{1-pr} \right]^j$$

(ii) Número médio de consultas ao servidor-disco por usuário:

$$E(X^0) = \frac{p(1-r)}{[M]} \left[\frac{\lambda r}{\mu} + \frac{\lambda}{\beta} \cdot \frac{1-pr}{p} \right] \cdot \frac{1}{q} = \Delta \cdot \frac{1}{q}$$

$$\text{Var}(X^0) = \frac{\Delta}{q^2} [1 + p - 2pr - \Delta] \quad \square$$

5.4. Tempo de Permanência de Um Usuário no Sistema (W)

(i) Seja $v(\cdot)$ a distribuição marginal de equilíbrio de (X^0, X^1) . Temos então:

$$v(0,0) = \frac{q}{[M]}$$

para $j = 1, 2, 3, \dots$:

$$v(j,j) = \frac{1}{[M]} \cdot \frac{\lambda}{\beta} \cdot p^{j-1} q \cdot (1-r)^j$$

e para $j = 0, 1, 2, \dots$ e $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$v(j, j+k) = \frac{1}{[M]} \cdot \frac{\lambda}{(j+k)} \cdot \left(\frac{j}{\beta} + \frac{k}{\mu} \right) \cdot p^{j+k-1} q \cdot \binom{j+k}{j} r^k (1-r)^j$$

(ii) A distribuição condicionada de W , dado (X^0, X^1) , devido à independência entre os servidores, e entre estes e o processo Bernoulli de retorno, pode ser diretamente calculada:

$$\begin{aligned} \text{Pr}[W \leq t \mid X^0 = j, X^1 = j+k] &= \\ &= G^{(j+k)} * H^{(j)}(t) \end{aligned}$$

onde $G(x)$ e $H(x)$ são as funções de distribuição exponencial de parâmetros μ e γ , respectivamente e $F^{(n)}(x)$ é a n -ésima convolução iterada de $F(x)$. Então

$$\begin{aligned} F_W(t) &= \text{Pr}[W \leq t] = v(0,0) + \\ &+ \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 1} v(j, j+k) (G^{(j+k)} * H^{(j)})(t) \end{aligned}$$

e com transformada de Laplace-Stieltjes dada por:

$$\begin{aligned}
 F_W^*(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dF_W(t) = \\
 &= \frac{\lambda q}{\beta[M]} \frac{r(1-r) [G^*(s)]^2 H^*(s)}{[1 - p(1-r)G^*(s)H^*(s)][1-pG^*(s)((1-r)H^*(s) + r)]} + \\
 &+ \frac{\lambda q}{\mu[M]} \frac{rG^*(s)}{[1-pG^*(s)((1-r)H^*(s) + r)]}
 \end{aligned}$$

(iii) Tempo médio de permanência de um usuário no sistema pode ser calculado:

$$E[W | X^0 = j, X^1 = j + k] = \frac{j+k}{\mu} + \frac{j}{\gamma}$$

$$E(W) = \int_0^{\infty} t dF_W(t) = - \frac{d}{ds} F_W^*(s) \Big|_{s=0} \quad \square$$

6. COMENTÁRIOS

Os resultados obtidos evidenciam fortemente o caráter in dependente entre os servidores e os switches.

As distribuições de equilíbrio podem ser interpretadas co mo uma parcela correspondendo ao processo de Bernoulli ($p^{j+k-1}q$) e outra que conta o número de vezes que o disco é usado até o k-ésimo uso do processador (binomial negativa).

Por outro lado, devido ao fato de não termos estudado o processo que conta o número de fregueses no sistema, torna difí cil a comparação com os resultados clássicos de filas, com e sem realimentação.

7. APÊNDICE

Cálculo da distribuição do tempo de serviço no Servidor tipo "0":

O usuário, ao ser atendido no servidor tipo "0" recebe, um após o outro, dois serviços: localização-e-transferência (exponencial de média $\frac{1}{\gamma}$) e processamento (exponencial de média $\frac{1}{\mu}$).

Portanto, sendo S a variável correspondente ao serviço total, S^d e S^p correspondendo às exponenciais acima; temos:

$$\Pr [S \leq t] = \Pr [S^d + S^p \leq t] = G * H(t)$$

$$\text{onde } G(x) = 1 - e^{-\gamma x} \quad \text{e} \quad H(x) = 1 - e^{-\mu x}$$

$$\Pr[S \leq t] = \frac{\mu}{\mu - \gamma} (1 - e^{-\gamma t}) - \frac{\gamma}{\mu - \gamma} (1 - e^{-\mu t})$$

Parâmetro de serviço

$$h(t) = \frac{\mu\gamma}{\mu - \gamma} (e^{-\gamma t} - e^{-\mu t})$$

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(\Delta t) - h(0)}{\Delta t} = \mu\gamma$$

AGRADECIMENTOS

M.C.B. Salles foi financiada em parte pelo CNPq, contrato nº 30.0335/87-3/MA/FV, a quem agradece.

BIBLIOGRAFIA

- R.L. Disney (1981): "A Note on Sojourn Times in M/G/1 Queues with Instantaneous, Bernoulli Feedback". Naval. Res. Log. Q., 28, nº 4, 679-684.
- R.L. Disney and P. Kiessler: Traffic Processes in Queueing Theory, the John Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1987.
- R.L. Disney and D. König : (1985): "Queueing Networks: A Survey of their Random Processes", SIAM Rev., 27 , nº 3, 335-403.

- R.L. Disney, D König and V. Schmidt (1984): "Stationary Queue-Length and Waiting-Time Distributions in Single-Server Feedback Queues", Adv. Appl. Prob., 16, 437-446.
- R.L. Disney, D.C. Mc Nickle and B. Simon (1980): "The M/G/1 Queue with Instantaneous Bernoulli Feedack", Naval. Res. Log. Q. 27, 635-644.
- J.J. Hunter (1983): "Filtering of Markov Renewal Queues, I: Feedback Queues*", Adv. Appl. Prob. 15, 349-375.
- J.J. Hunter (1985a): "Filtering of Markov Renewal Queues, IV: Flow Processes in Feedback Queues", Adv. Appl. Prob. 17, 386-407.
- J.J. Hunter (1985b): "Birth-Death Queues with Feedback", NZOR, 13, nº 1, 39-49.
- D. König and V. Schmidt (1985): "Limit Theorems for Single-server Feedback Queues Controlled by a General Class of Marked Point Processes", Th. of Probab. and its Appl., Vol xxx, nº 4, 712-719.
- C. Traina Jr (1982): "Sistema de Apoio por Computador à Documentação de Sistemas", dissertação de mestrado, ICMSC-USP, São Carlos.
- C. Traina Jr (1986): "Máquina e Modelo de Dados Dedicados para Aplicações de Engenharia", tese de Doutorado. IFQSC-USP, São Carlos.
- C. Traina Jr e J.F.W. Slaets (1988): "Um Modelo de Representação de Objetos", Anais do III Simpósio Brasileiro de Banco de Dados.
- A.N. Tsukumo et alli (1985): "Um Sistema Expansível para Produção de Software", Anais do 2º Congresso Nacional de Automação Industrial, São Paulo, pp 379-386.