APLICAÇÕES GENÉRICAS NO PLANO

Paulo F. S. Porto Junior

Volume n.º 16

SÃO CARLOS

julho de 1985

APLICAÇÕES GENÉRICAS NO PLANO

Paulo F. S. Porto Junior
(I.C.M.S.C.-U.S.P.)

INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste trabalho é estudar aplicações genéricas, genéricas especiais e estáveis a valores no plano, reunindo os principais resultados da literatura correspondente, bem como informações mais recentes e atuais.

Tais resultados se referem a informações topológicas sobre o domínio das aplicações, "simplificação" das aplicações, levantamento a imersões e classificação.

1. PRELIMINARES - PRINCIPAIS TRABALHOS E RESULTADOS ENVOLVIDOS

No que se segue, variedades e aplicações serão sempre C^∞.

1.1. *Definições*

(i) Seja M uma variedade m-dimensional fechada (compacta e sem bordo). A aplicação $f : M \to R^2$ é genérica se além dos pontos regulares - onde f toma a forma

$$(u,x_1,x_2,\ldots,x_{m-1}) \to (u,x_1),$$

f admitir apenas os pontos singulares de dobra - onde f toma a forma

$$(u,x_1,x_2,\ldots,x_{m-1}) \to (u,\sum_{i=1}^{m-1} \pm x_i^2)$$

e cuspidal - onde f toma a forma

$$(u,x_1,x_2,\ldots,x_{m-2},z) \to (u,\sum_{i=1}^{m-2} \pm x_i^2 + uz + z^3).$$

Os pontos singulares formam o conjunto singular $S(f)$, união finita e disjunta de círculos mergulhados em M nos quais um número finito de pontos cuspidais comparecem. Além disso, observa-se que $f|S(f)$ - {pontos cuspidais} é imersão.

(ii) Nas hipóteses acima $f : M \to R^2$ é genérica especial se as únicas singularidades admitidas forem os pontos de dobra de índice máximo - onde f toma a forma $(u,x_1,x_2,\ldots,x_{m-1}) \to (u,x_1^2+x_2^2 + \ldots + x_{m-1}^2)$.

(iii) Ainda nas condições anteriores f é estável se também se verificarem as seguintes condições globais:

(g_1) $f^{-1}(f(P)) \cap S(f) \equiv \{P\}$ se $P \in \{$pontos cuspidais$\}$.

(g_2) $f|S(f) - \{$pontos cuspidais$\}$ é imersão com intersecções normais.

Em particular, f não admite pontos triplos.

1.2. Um dos problemas abordados por Haefliger em [5] é relacionado com a seguinte questão:

"Em que condições, uma aplicação estável f definida na variedade m-dimensional fechada M, a valores no plano se deixa fatorar através de uma imersão i em R^{m+1} e da projeção $\pi : R^{m+1} \to R^2$?"

Observe-se que a dimensão do espaço-meta da imersão é a mínima que se pode exigir, uma vez que num ponto singular, $\ker(df)$ tem dimensão $m-1$.

Haefliger demonstrou que no caso $m = 2$, isto é, para uma aplicação estável $f : M^2 \to R^2$, a fatoração é possível se e somente se em cada componente S de $S(f)$ o número de pontos de cúspide for par (ou ímpar) conforme S admita (ou não) uma vizinhança orientada.

No mesmo artigo, Haefliger trata o seguinte problema:

"Dada uma curva S em uma superfície fechada M, e uma aplicação diferenciável $f : S \to R^2$ apresentando no máximo um número finito de cúspides, em que condições f pode se estender a uma aplicação estável $F : M \to R^2$ cujo conjunto singular $S(F)$ seja S ?"

Segundo Haefliger esse problema se reduz essencialmente ao seguinte:

"Dada uma imersão f do bordo de uma superfície compacta N no plano, em que condições f se estende a uma imersão F de N em R^2 ?"

Essa última questão, ponderava Haefliger no citado artigo, não estava resolvida mesmo no caso proposto inicialmente por Hopf em que N é simplesmente o disco.

Mas em sua tese S. Blank [2] resolve completamente o problema da extensão da imersão do bordo de um disco no plano a uma imersão do próprio disco e classifica tais extensões.

Em 1973, S. Troyer [15] generaliza o trabalho de S. Blank para o caso do disco com n-buracos. Em 1975, K. Bailey [1] generaliza também o trabalho de Blank para o caso de um disco com n-asas. Finalmente, em 1979, S. Troyer e G. Francis [4] resolvem totalmente o problema proposto por Haefliger e equivalentemente o problema de extensão de imersões para qualquer superfície compacta. Mais recentemente Vera

C. Zanetic [16] generaliza todos os trabalhos citados, tratando de "superfícies com fins" e utilizando métodos mais simples e claros.

É interessante observar que todos os autores obtêm também uma classificação das extensões encontradas.

1.3. Em [3] G. de Rham e O. Burlet estudaram aplicações genéricas especiais $f : M^3 \to R^2$ e seus principais resultados procuraremos resumir em seguida, ajustando-se adequadamente a terminologia e os procedimentos utilizados.

"Define-se inicialmente em M uma relação de equivalência que identifica pontos pertencentes a uma mesma componente conexa da fibra de f. O espaço quociente de M pela relação definida é uma superfície compacta W_f cujo bordo ∂W_f corresponde ao conjunto singular $S(f)$. M por sua vez é obtida como o quociente de um S^1-fibrado M' sobre W_f pela identificação dos pontos de uma mesma fibra sobre pontos de ∂W_f. Denotando-se por $q : M \to W_f$ a aplicação quociente, então existe uma imersão $\overline{f} : W_f \to R^2$ que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & R^2 \\ W_f \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Reciprocamente, dada uma imersão $\bar{f}$ de uma superfície compacta e com bordo W em R^2 e um S^1-fibrado localmente trivial M' sobre W, então o quociente de M' pela identificação dos pontos de uma fibra sobre um ponto de ∂W é uma variedade tridimensional fechada M a qual se associa uma estrutura diferenciável tal que: Denotando-se por $q : M \to W$ a projeção induzida, então $\bar{f}oq$ é uma aplicação genérica especial de M em R^2".

Segue-se então que $\pi_1(M) \approx \pi_1(W_f)$, o qual é livre e tem $r = 2g + b - 1$ geradores, onde g = genus de W_f e b = número de componentes de ∂W_f = número de componentes de $S(f)$.

Por indução em $r = rk\pi_1(M)$ demonstra-se então que as únicas variedades tridimensionais fechadas que são domínio de aplicações genéricas especiais são:

$$S^3,\ S^1 \times S^2,\ \ldots,\ S^1 \times S^2 \# S^1 \times S^2 \# \ldots \# S^1 \times S^2$$

(r parcelas) no caso orientável.

Se M é não orientada, então

$$M = (S^1 \times S^2)^* \# S^1 \times S^2 \# \ldots \# S^1 \times S^2$$

soma conexa de r-1 parcelas iguais a $S^1 \times S^2$ com um elemento não orientado $(S^1 \times S^2)^*$, quociente de $S^1 \times S^2$ pelo grupo de ordem 2 gerado pela transformação obtida de uma simetria diametral de S^2 combinado com uma simetria de S^1 relativa ao centro.

Observações:

(i) Os autores também classificam as aplicações genéricas especiais.

(ii) Verifica-se que neste caso M se decompõe em duas subvariedades M_1 e M_2 tais que M_1 é um S^1-fibrado sobre W_f e M_2 é um D^2-fibrado sobre as componentes de S(f).

1.4. Luis Kauffman [6] classifica imersões preservando orientação de uma superfície compacta e com bordo W em R^2 através de uma relação que denomina imagem-homotopia; assim, duas imersões $f,g : W \to R^2$ preservando orientação são imagem-homotópicas se existir um automorfismo preservando orientação $h : W \to W$ tal que f e goh sejam regularmente homotópicas. Lembremos que as imersões f e g são regularmente homotópicas se existir uma família f_t de imersões de W em R^2 tal que $f_o = f$, $f_1 = g$ e f_t e df_t variam continuamente com o parâmetro t.

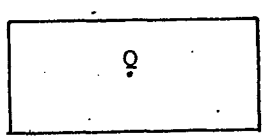
Sendo $\mathcal{R}(W)$ = classes de homotopia regular de imersões de W em R^2, $\mu(W)$ = classes de difeomorfismos de W e $\mathcal{I}(W)$ = classes de imersões imagem homotópicas de W em R^2, então:

$$\mathcal{I}(W) = \frac{\mathcal{R}(W)}{\mu(W)} .$$

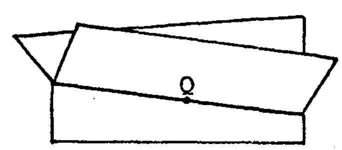
Além da visão, a cada instante, da deformação que leva uma imagem sobre a outra é também interessante observar que o número de classes de imagem homotopia aumenta com o aumento do número de componentes do bordo de W e inversamente, diminui com o aumento do genus de W.

2. RESULTADOS RECENTES - TRABALHOS EM ANDAMENTO

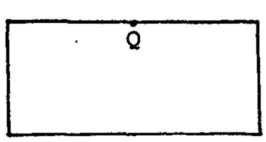
2.1. Em [11] estudamos aplicações estáveis $f : M^3 \to R^2$, utilizando a relação que identifica pontos sobre a mesma componente conexa da fibra de f. Neste caso porém W_f é um complexo bidimensional apresentando apenas singularidades simples. Assim que, nas vizinhanças de cada um de seus pontos W_f localmente se apresenta de uma das formas seguintes:



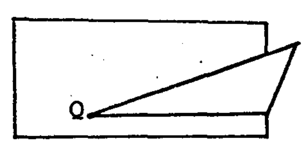
ponto regular



ponto de sela

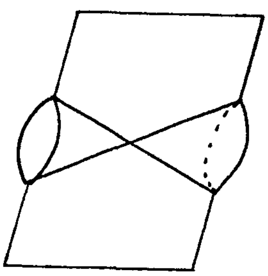


ponto de dobra

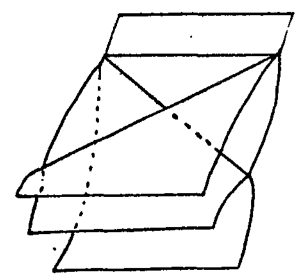


ponto de cúspide

Se o ponto singular considerado é não simples - e só pode ser duplo - então sua imagem em W_f localmente tem um dos modelos seguintes:



duplo-cone



tridente

Como neste caso a componente conexa da fibra de f é um círculo, os modelos acima resultam do cruzamento de uma linha singular por uma tal componente. Enquanto ao passar por uma curva de pontos de dobra a componente "nasce" ou "morre", ao cruzar uma curva de pontos de sela a mesma se subdivide através de uma cirurgia realizada no círculo.

Por sua vez, nas vizinhanças de um ponto singular não simples, é necessário se analisar as possíveis combinações de um par de cirurgias num círculo.

Cada ponto P de M orientada admite uma vizinhança - Vizinhança Produto - onde a menos de difeomorfismos, f toma a forma:

$$h : I \times T \to I \times J$$

onde I é um intervalo aberto, J é um intervalo fechado, T é uma superfície compacta com bordo e

$$h : (t,x) \to (t,h_t,(x))$$

onde $h_t : T \to J$ é função de Morse, exceto para $t = 0$, se P for de cúspide.

Além da análise das formas normais em cada tipo de ponto, é essencial no trabalho, o:

Teorema de Ehresman

Seja $f : M \to N$ uma submersão própria e sobre entre variedades conexas e sem bordo. Então $f : M \to N$ é uma fibração localmente trivial. Se $\partial M \neq \emptyset$ e f e $f|\partial M$ são submersões próprias sobre N, então $f : M \to N$ ainda é uma fibração localmente trivial e

$$\partial f^{-1}(y) = (f|\partial M)^{-1}(y) \quad \forall\, y \in N.$$

Demonstra-se também que sendo $f : M^3 \to R^2$ uma aplicação estável definida na variedade fechada e orientada M, então esta pode se decompor em:

(a) $B(R)$ - S^1-fibrados sobre superfícies compactas R, obtidas de $W_f - q(S(f))$.

(b) $B(c)$ - D^2-fibrados sobre curvas correspondentes à componentes c de $S(f)$ constituídas por pontos de dobra.

(c) $B(c)$ - $\$_3$-fibrados sobre curvas correspondentes à componentes c de $S(f)$ constituídas por pontos de sela.

Observação: $\$_3$ = "S^2 menos 3 discos".

(d) $B(P)$ - vizinhanças produtos de P - difeomorfas a $I \times T$ onde I é um intervalo aberto e T é uma superfície compacta com bordo tal que:

$T = \$_2 = S^2$ menos 2 discos - se P é decúspide

$T = \$_4 = S^2$ menos 4 discos - se P é tridente

$T = T_2$ = Toro menos 2 discos - se P é duplo-cone

Observações:

(i) Uma decomposição correspondente é obtida também para W_f.

(ii) Resultados análogos são obtidos para o caso em que M é não orientada.

Finalmente, utilizando-se as informações obtidas, determinam-se condições suficientes - não necessárias - para que uma aplicação estável $f : M^3 \to R^2$ se fatore a uma imersão $F : M^3 \to R^4$, sobre f sendo M orientada.

Como corolário segue-se que toda aplicação estável $f : M^3 \to R^2$ que não admite pontos duplo-cone sempre se deixa fatorar por uma imersão $F : M^3 \to R^4$, sobre f (M^3 orientada)

A fatoração de uma aplicação estável f de uma variedade tridimensional fechada e orientada M no plano à uma imersão F em R^4, sobre f é analisada completamente por Levine, em [10] estudando classes de imersões em R^4 sobre f.

2.2. A simplificação de uma dada aplicação estável é outro problema cuja solução tem sido buscada:

"Dada uma aplicação estável $f : M \to R^2$, procura-se uma outra aplicação estável $g : M \to R^2$, tal que $S(g)$ seja mais simples que $S(f)$ e de modo que g difira de f por uma "homotopia quase-regular", isto é, por uma família f_t de aplicações estáveis de M em R^2, exceto no máximo para um número finito de valores do parâmetro".

Em [8], H. Levine demonstra que, nesta linha de procedimento, é possível "eliminar-se cúspides aos pares" de uma aplicação estável $f : M^m \to R^2$, onde M é fechada e orientada, de modo que a nova aplicação estável encontrada tenha apenas uma cúspide (ou nenhuma) conforme $\chi(M)$ seja ímpar (ou seja par).

Assim, como em nosso caso original $m = 3$ e $\chi(M) = 0$, segue-se que as cúspides "são desnecessárias".

Utilizando-se diversos procedimentos técnicos como criação e eliminação de cúspides, eliminação de pares de componentes de $S(f)$ - uma componente definida com uma componente indefinida, soma conexa em W_f, etc., é possível obter-se um grande número de informações e resultados sobre possíveis simplificações de f, os quais foram generalizados e formalizados por L. Matta-Lorenzo em sua tese, a qual está em fase final. (Brandeis University).

Permanece no entanto sem solução a seguinte questão, a qual é essencial para o completo estudo das aplicações estáveis $f : M^3 \to R^2$.

"Quais os complexos bidimensionais com apenas os tipos assinalados de singularidades podem ser obtidos como W_f, isto é, como quociente do domínio de uma aplicação estável f em R^2 pela relação de equivalência definida ?" ; ou ainda, "como se classificam os espaços W_f ?"

2.3. A obtenção de informações topológicas sobre o domínio de uma aplicação estável f no plano, através do conhecimento da restrição desta a S(f) ou a uma vizinhança de S(f) é outro problema que se põe e cuja resposta é positiva, em certas situações, [12].

Assim, G. de Rham e O. Burlet obtêm a própria M a partir do conhecimento de S(f) se f é genérica especial.

Em [9], H. Levine obtém $\chi(M)$ para o caso em que M é orientada, dim (M) = 2ℓ e $f : M \to R^2$ é estável. $\chi(M)$ é obtida como soma dos graus de aplicações $k_S : S \to S^1$ extensões convenientemente definidas em componentes S de S(f). Este resultado generaliza resultado semelhante obtido por R. Thom em [14] onde apenas a paridade de $\chi(M)$, dada $f : M \to R^2$ genérica, é conseguida; em [7] L. Kushner obtêm resultado análogo ao de H. Levine para aplicações estáveis $f : M^{2n} \to R^{2\ell}$ definidas em variedades fechadas e orientadas.

Nesta mesma linha, em [12], para o caso em que M é domínio de uma aplicação genérica especial, concluimos que M se decompõe em duas subvariedades M_1 e M_2 tais que:

M_1 é um $(m-1)$-fibrado em discos sobre as componentes de $S(f)$.

M_2 é um $(m-2)$-fibrado em esferas sobre $W \approx W_f$ sendo que M_1 e M_2 são triviais no caso em que M é orientada e $\partial M_1 = \partial M_2$.

Mais geralmente, se $f : M^m \to R^p$ admite apenas pontos de dobra de índice máximo, isto é, se localmente f toma a forma

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots, x_m) \to (x_1, \ldots, x_{p-1}, \sum_{i=p}^{m} x_i^2)$$

então M se decompõe em duas subvariedades M_1 e M_2 tais que:

M_1 é um $(m-p+1)$-fibrado em discos sobre as componentes de $S(f)$, que é $(p-1)$-dimensional.

M_2 é um $(m-p)$-fibrado em esferas sobre $W \approx W_f$-variedade p-dimensional tal que $\partial W \simeq S(f)$.

Observação:

No caso de funções de Morse $(p = 1)$, se $S(f) \equiv \{P_1, P_2\}$, então W_f é necessariamente um intervalo e M se decompõe em M_1 e M_2, tais que:

M_1 é um m-fibrado em discos, sobre $\{P_1, P_2\}$.

M_2 é um $(m-1)$-fibrado em esferas sobre $[P_1, P_2]$.

Donde $M \approx S^m$. (Teorema de Reeb)

2.4. Estudando aplicações genéricas especiais $f : M^m \to R^2$, com $3 \leq m \leq 6$, [13], obtém-se resultados análogos aos obtidos por de Rham e Burlet [3], no que se refere aos domínios de tais aplicações, que podem ser:

$$S^m,\ S^1 \times S^{m-1},\ S^1 \times S^{m-1} \# \ldots \# S^1 \times S^{m-1},$$

r parcelas onde $r = rk\pi_1(M)$ se M é orientável

e resultado semelhante no caso não orientável. Se $m \geq 7$, os resultados são os mesmos, módulo homeomorfismos, uma vez que nestas dimensões surgem as esferas exóticas.

2.5. Ainda em colaboração com Yolanda K. S. Furuya, [13], procuramos responder à seguinte questão:

"Dada a imersão $f : S^1 \to R^2$, em que condições existe uma aplicação genérica especial $F : S^3 \to R^2$ tal que $F|S(F) \equiv f$?"

O mesmo problema para o caso de S^m bem como a extensão de uma imersão de uma união finita e disjunta de círculos em R^2 a uma aplicação genérica especial de M^m em R^2 é respondida usando técnicas semelhantes.

2.6. Procuramos também, [13], classificar aplicações genéricas especiais $f : M^3 \to R^2$ através de imagem equivalência: $f,g : M^3 \to R^2$ genéricas especiais são imagem equivalentes se forem equivalentes "segundo de Rham", isto é, existirem difeomorfismos h e H comutando o diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi_f"'] & M \arrow[d, "\pi_g"] \\ W_f \arrow[r, "h"] & W_g \end{tikzcd}$$

e além disso, f e goh : $W_f \to R^2$ forem imagem homotópicas.

Além de uma classificação mais fina, a imagem equivalência permite que se visualize em cada instante, a deformação que leva f(M) sobre g(M). Observe-se por exemplo que para $r = 2$ existem duas classes distintas pela classificação de [3], enquanto nesta nova classificação, existem infinitas classes. Para $r = 3$ novamente de duas classes na classificação de [3], só no caso $g = 2$ e $b = 2$ se tem duas classes na nova classificação.

2.7. Finalmente, também em colaboração com Yolanda K. S. Furuya, estamos estudando aplicações estáveis $f : M^4 \to R^2$ utilizando-se o espaço auxiliar W_f. Neste caso, a componente conexa da fibra f é uma superfície fechada; ao cruzar uma curva de pontos de dobra (definida) pode-se observar o nascimento ou a morte de uma S^2. Ao se cruzar porém uma curva de pontos de sela (dobra indefinida) pode haver mudança no número de componentes (uma divisão) ou uma alteração simplesmente no genus da componente. O estudo se torna assim mais rico e interessante que na dimensão $m = 3$, mas é mais uma vez essencial à análise das formas normais possíveis e o Teorema de Ehresman. Definem-se as vizinhanças produtos e as cirurgias em S^2 (ou nessa superfície fechada) ou pares destas combinadas, bem como o conhecimento das funções de Morse definidas em variedades tridimensionais são importantes. Procuraremos a seguir obter condições para o levantamento de uma aplicação estável $f : M^4 \to R^2$ a uma imersão $F : M^4 \to R^5$ sobre f.

Observação Final:

Uma nova versão da Conjectura de Poincaré se estabelece da seguinte forma:

"Uma variedade tridimensional fechada e simplesmente conexa M onde está definida uma aplicação genérica especial $f : M \to R^2$ é necessariamente S^3".

REFERÊNCIAS

[1] - Bailey, K. D.: Extending closed plane curves to immersions of a disc with n handles. Frans. Amer. Math. Soc., 206 (1975), 1-24.

[2] - Blank, S.J.: Extending immersions and regular homotopies in cod. 1. Thesis, Brandeis University, (1967).

[3] - de Rham, G. & Burlet, O.: Sur certaines applications generiques d'une varieté close tridimensional sur le plan. Enseignement de Mathematiques, (1974).-

[4] - Francis, G.K. & Troyer, S.F.: Excellent maps with given folds and cusps. Houston J. of Math., Vol. 3, n.º 2, (1977).

[5] - Haefliger, A.: Quelques remarques sur les applications differetiables d'une surface dans le plan. Annales I. Fourier, Vol. 10, (1970), 47-60.

[6] - Kauffman, L.: Planar Surface Immersions. Ill. J. of Math., Vol.23, n.º 4, (1979).

[7] - Kushner, L.: On mappings into $R^{2\ell}$. Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 13, n.º 1, (1982), 45-54.

[8] - Levine, H.: Elimination of Cusps. Topology, Vol. 3, Supl. 2, (1965), 263-296.

[9] - ————————: Mappings of manifolds into the plane. Amer. J. of Math., Vol. LXXXVIII, n.º 2, (1966).

[10] - ————————: Classifying immersions over stable maps of oriented three manifolds into the plane. (A aparecer)

[11] - Porto, P.; Levine, H. & Kushner, L.: Mapping three manifolds into the plane. Bol. Soc. Mat. Mex., Vol. 29, n.º 1, (1984), 11-35.

[12] - Porto, P.: Informações Topológicas Sobre o Domínio de Certas Aplicações Estáveis. Tese, ICMSC-USP, (1983).

[13] - Porto, P. & Furuya, Y.K.S.: Sobre Aplicações Genéricas Especiais. (A aparecer)

[14] - Thom, R.: Les singularites des applications differentiables. Annales I. Fourier VI, (1956), 43-87.

[15] - Troyer, S.F.: Extending on boundary immersion to the disc with n holes. Diss. Northearstern, U. Boston, (1973).

[16] - Zanetic, V.C.: A Extensão em Codimensão Dois de Imersões e as Funções Diferenciáveis Com Imagem de Conjunto Singular Especificada. Tese, IME-USP, (1984).