"*CLASSES DE MATRIZES QUADRADAS PARA TESTE DE ALGORÍTMOS COMPUTACIONAIS*" [*]

Odelar Leite Linhares

Número 14

[*] Este trabalho foi realizado graças a Auxílio à Pesquisa concedido pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP - (Processo nº 84/1536-7).

- São Carlos (SP), JULHO de 1985 -

CLASSES DE MATRIZES QUADRADAS PARA TESTE DE ALGORITMOS COMPUTACIONAIS

ODELAR LEITE LINHARES
Departamento de Ciências de Computação e Estatística
Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos
Universidade de São Paulo
Caixa Postal 471
13.560 - São Carlos - SP.
Brasil

1. INTRODUÇÃO.

1.1. Professores ou pesquisadores de Matemática ou de Análise Numérica, freqüentemente se defrontam com a situação de terem que construir exemplos de matrizes cujos problemas de autovalores e de inversão sejam facilmente explicitáveis.

As classes de matrizes que definiremos, a seguir, possuem estas, além de outras características desejáveis.

1.2. É bem conhecido o fato de que matrizes quadradas A, de ordem N ($N \geq 2$; N inteiro) da forma:

$$(1) \qquad A = \begin{bmatrix} N & N-1 & N-2 & N-3 & \cdots & 2 & 1 \\ N-1 & N & N-2 & N-3 & \cdots & 2 & 1 \\ N-1 & N-2 & N & N-3 & \cdots & 2 & 1 \\ N-1 & N-2 & N-3 & N & \cdots & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ N-1 & N-2 & N-3 & N-4 & \cdots & N & 1 \\ N-1 & N-2 & N-3 & N-4 & \cdots & 1 & N \end{bmatrix}$$

têm autovalores $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$; $\ldots = \lambda_{N-1} = N - 1$ e $\lambda_N = N(N+1)/2 = \sum_{i=1}^{N} i$.

Esta afirmação, para $\lambda_i = i$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, pode ser facilmente comprovada, substituindo-se λ sucessivamente, por 1, 2, ..., N - 1, na matriz:

(2) $A - \lambda I$

(onde I é a matriz identidade de ordem N).

A matriz (2), para cada um desses valores de λ, terá duas linhas iguais, respectivamente, as 1ª e 2ª, 2ª e 3ª, ..., (N - 1)-ésima e N-ésima. Assim, seu determinante será zero, isto é,

(3) $\det(A - \lambda_i I) = 0 , \quad i = 1, 2, \ldots, N - 1$

A equação (3) diz que os λ_i, $i = 1, 2, \ldots, N - 1$ são zeros do polinômio característico de A, $\det(A - \lambda I)$, e que, portanto, são autovalores de A, definida em (1).

A prova de que $\lambda_N = N(N + 1)/2$ é, também, autovalor de A, faz-se, usando-se a propriedade "$\mathrm{Tr}\ A = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$", isto é, "o traço de A, Tr A (a soma dos elementos diagonais de A) é igual a soma dos autovalores de A".

Teremos, então:

$$\mathrm{Tr}\ A = N^2 ;$$

$$\mathrm{Tr}\ A - \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i = N^2 - (1 + 2 + 3 + \ldots + N - 1) =$$

$$= N^2 - (N - 1)N/2 = N(N + 1)/2 = \lambda_N .$$

Conhecidos os autovalores de A, seu determinante, detA, se exprime por:

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \ldots \cdot \lambda_{N-1} \cdot \lambda_N =$$

(4)

$$= 1.2.3. \ldots .(N - 1).N(N + 1)/2 = (N + 1)!/2$$

Se, na seqüência $\{N, N - 1, \ldots, 2, 1\}$, mantivermos fixo o primeiro elemento (isto é, o N) e fizermos permutações quaisquer dos restantes N - 1, obteremos um máximo de $(N - 1)!$ seqüências distintas de N elementos que darão origem a outras tantas matrizes análogas a A da forma (1) e que têm todas, os mesmos autovalores que A e, conseqüentemente, o mesmo determinante.

Por exemplo ($N = 4$), as matrizes abaixo, têm todas os autovalores 1, 2, 3 e 10 e o mesmo determinante (igual a 60), como se pode facilmente verificar.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} ; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} ; \quad A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} .$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} ; \quad A_6 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Autovalores de A_1:
$\lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = 2;\ \lambda_3 = 1;\ \lambda_4 = 10$

Autovalores de A_2:
$\lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 2;\ \lambda_4 = 10$

Autovalores de A_3:
$\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 3;\ \lambda_3 = 1;\ \lambda_4 = 10$

Autovalores de A_4:
$\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 3;\ \lambda_4 = 10$

Autovalores de A_5:
$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 3;\ \lambda_3 = 2;\ \lambda_4 = 10$

Autovalores de A_6:
$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 2;\ \lambda_3 = 3;\ \lambda_4 = 10$

Pretendemos mostrar que as matrizes A da forma (1), são casos particulares de classes mais gerais de matrizes, cujos problemas de autovalores e de inversão são facilmente solucionáveis.

Analisando as matrizes A, da forma (1), observamos que:

(a) A soma dos elementos de cada linha é um número fixo s_A, para cada matriz A.

(b) Os elementos, em cada coluna, abaixo e acima da diagonal são, respectivamente, iguais entre si.

(c) Os autovalores $\lambda_i = i$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, são obtidos subtraindo-se de cada elemento diagonal o elemento que lhe fica imediatamento abaixo (ou acima), na mesma coluna, isto é:

$$\lambda_1 = 1 = N - (N-1);\ \lambda_2 = 2 = N - (N-2);\ \ldots\ ;\ \lambda_{N-1} = N - 1 = N - (1).$$

(d) O autovalor $\lambda_n = N(N+1)/2$ é a soma fixa s_A dos elementos de cada linha de A.

(e) Os elementos diagonais são iguais entre si.

2. GENERALIZAÇÕES.

2.1. Generalização I

Uma generalização natural seria considerar a seqüência $\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$, onde os c_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, são números reais ou complexos quaisquer, e definir matrizes C de ordem N ($N \geqq 2$ N inteiro), da forma:

$$(5) \qquad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_N \\ c_2 & c_1 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_N \\ c_2 & c_3 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_1 & c_N \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_N & c_1 \end{bmatrix}$$

(i) Estas matrizes possuem as propriedades (a), (b) e (e) an teriormente descritas.

(*ii*) Também satisfazem às propriedades (c) e (d), pois seus autovalores são dados por:

$$(6) \qquad \lambda_i = c_1 - c_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1$$

$$(7) \qquad \lambda_N = \sum_{j=1}^{N} c_j = s_C$$

(onde s_C é a soma dos elementos de cada linha de C).

(*iii*) O determinante de C,

$$(8) \qquad \det C = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i = \prod_{j=1}^{N-1} (c_1 - c_j) \cdot (\sum_{j=1}^{N} c_j)$$

(*iv*) Os autovetores de C, correspondentes aos autovalores λ_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1, N$ são os vetores v_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1, N$, quando diferentes de zero, dados por:

$$(9) \qquad v_1 = \begin{bmatrix} \sum_{j=2}^{N} c_j \\ -c_2 \\ -c_2 \\ \vdots \\ -c_2 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} \sum_{j=3}^{N} c_j \\ \sum_{j=3}^{N} c_j \\ -(c_2+c_3) \\ \vdots \\ -(c_2+c_3) \end{bmatrix}; \ldots; \quad v_{N-1} = \begin{bmatrix} c_N \\ c_N \\ \vdots \\ c_N \\ -\sum_{j=2}^{N} c_j \end{bmatrix}; \quad v_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

A prova de (6) faz-se substituindo λ por $\lambda_i = c_1 - c_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$ na matriz $C - \lambda I$. Para cada λ_i, esta matriz terá duas linhas iguais e, portanto, o seu determinante $\det(C - \lambda_i I)$ será zero, o que significa dizer os λ_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$ são zeros do polinômio característico de C, $\det(C - \lambda I)$, e isto completa a prova.

Para se provar que $\lambda_N = \sum_{j=1}^{N} c_j$ é autovalor de C, procede-se de maneira análoga à feita anteriormente:

$$\mathrm{Tr}\, C - \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i = Nc_1 - \sum_{j=2}^{N} (c_1 - c_j) = Nc_1 - (N-1)c_1 + \sum_{j=2}^{N} c_j = \sum_{j=1}^{N} c_j = \lambda_N$$

A demonstração de que os vetores v_i , $i = 1, 2, \ldots, N$, definidos em (9), são autovetores de C, correspondentes aos autovalores λ_i , $i = 1, 2, \ldots, N$, definidos em (6) e (7), é feita verificando que os v_i satisfazem às equações:

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0 , \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Observação: Se na seqüência $\{c_1, c_2, \ldots, c_{N-1}, c_N\}$ fixarmos o c_1 e fizermos permutações quaisquer dos $N - 1$ elementos restantes, podemos obter um máximo de $(N - 1)!$ matrizes da forma (5) que possuem os mesmos autovalores e, conseqüentemente, o mesmo determinante.

2.1.1. EXEMPLO

Seja $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Os autovalores de C são:

$\lambda_1 = 4 - 1 = 3$; $\lambda_2 = 4 - 0 = 4$; $\lambda_3 = 4 - 2 = 2$; $\lambda_4 = 4 + 1 + 0 + 2 = 7$.

Os correspondentes autovetores são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.1.2. APLICAÇÕES

1. Dados os números λ_1 , λ_2 , ..., λ_N , construir matriz C,

da forma (5), que tenha esses números como autovalores.

Devemos ter:

$$(11)\quad \begin{cases} c_1 - c_2 & = \lambda_1 \\ c_1 - c_3 & = \lambda_2 \\ c_1 - c_4 & = \lambda_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ c_1 - c_N & = \lambda_{N-1} \\ c_1 + c_2 + c_s + \ldots + c_N & = \lambda_N \end{cases}$$

Somando-se as $N - 1$ primeiras equações à última, obtemos o sistema equivalente:

$$(12)\quad \begin{cases} c_1 - c_2 & = \lambda_1 \\ c_1 - c_3 & = \lambda_2 \\ c_1 - c_4 & = \lambda_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ c_1 - c_N & = \lambda_{N-1} \\ Nc_1 & = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_N \end{cases}$$

Daí,

$$(13)\quad \begin{cases} c_1 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i / N \\ \\ c_j = c_1 - \lambda_{j-1}, \quad j = 2, 3, \ldots, N \end{cases}$$

Por exemplo, sejam $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$; λ_4 $(N = 4)$

Das equações (13), acima, resulta:

$$c_1 = 10/4 = 2,5$$
$$c_2 = c_1 - 1 = 1,5$$
$$c_3 = c_1 - 2 = 0,5$$
$$c_4 = c_1 - 3 = -0,5$$

Daí,

$$C = \begin{bmatrix} 2,5 & 1,5 & 0,5 & -0,5 \\ 1,5 & 2,5 & 0,5 & -0,5 \\ 1,5 & 0,5 & 2,5 & -0,5 \\ 1,5 & 0,5 & -0,5 & 2,5 \end{bmatrix}$$

é a matriz C, da forma (5), que tem os autovalores $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$; $\lambda_4 = 4$.

Observação: Das relações (6), (7) e (13), concluimos que "a condição necessária e suficiente para que uma matriz C, da forma (5), tendo autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ inteiros, seja inteira, é que a soma desses autovalores seja zero, $\pm N$, ou um múltiplo (positivo ou negativo) de N."

Assim, para $N = 4$, se desejarmos construir matriz C da forma (5), que tenha autovalores inteiros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4, e seja inteira, devemos escolhê-los de modo que $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i$ seja zero, ± 4 ou um múltiplo de 4. Se tomarmos, por exemplo: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$ e $\lambda_4 = 2$, uma destas condições é satisfeita. Teremos:

$$c_1 = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i/4 = 12/4 = 3$$

$$c_2 = c_1 - \lambda_1 = 1$$

$$c_3 = c_1 - \lambda_2 = 0$$

$$c_4 = c_1 - \lambda_3 = -2$$

Daí,

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

tem autovalores inteiros e é inteira.

2. Construir matriz C, da forma (5), que sendo inteira e inversível, possua inversa C^{-1} inteira.

Sabemos que "a condição necessária e suficiente para que uma matriz C inteira possua inversa inteira é que o determinante de C, $\det C$, seja igual a ± 1.

Em vista de (8), devemos ter:

$$(14)\quad \begin{cases} \lambda_i = c_1 - c_{i+1} = \pm 1, & i = 1, 2, \ldots, N-1 \\ \lambda_n = \sum_{j=1}^{n} c_j = \pm 1. \end{cases}$$

ou

$$(15)\quad \begin{cases} c_1 - c_2 = \pm 1 \\ c_1 - c_3 = \pm 1 \\ c_1 - c_4 = \pm 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 - c_N = \pm 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots + c_N = \pm 1 \end{cases}$$

Somando-se a 1ª, 2ª, ..., (N - 1)-ésima equações de (15) à última, obtemos o sistema equivalente:

$$(16)\quad \begin{cases} c_1 - c_2 = \pm 1 \\ c_1 - c_3 = \pm 1 \\ c_1 - c_4 = \pm 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 - c_N = \pm 1 \\ Nc_1 = K \end{cases}$$

onde $K = \pm N$ ou $|K| < N$ ou $K = 0$.

No primeiro caso $(K = \pm N)$, teremos as soluções:

$$c_1 = 1;\ c_2 = c_3 = \ldots = c_N = 0 \quad \text{ou} \quad C = I$$

$$c_1 = -1;\ c_2 = c_3 = \ldots = c_N = 0 \quad \text{ou} \quad C = -I$$

No segundo caso $(|K| < N)$, não há soluções inteiras para (15).

No último caso $(K = 0)$, temos

(a) $c_1 = 0$.

(b) A soma dos segundos membros das $N - 1$ primeiras equações de (15) deve ser igual a $+1$ ou igual a -1, de modo a que se possa ter $K = 0$. Nesse caso, N deve ser necessariamente *par* e os c_j iguais a ± 1 e tais que $N/2$ sejam iguais a $+1$ (ou a -1) e $(N/2) - 1$, iguais a -1 (ou a $+1$).

Daí, as matrizes C da forma (5) que sendo inteiras e inversíveis e com inversas inteiras (executando-se os casos triviais $C = I$ ou $C = -I$), devem satisfazer às condições:

(*i*) São de ordem N par.

(*ii*) As seqüências $\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ que as geram, têm a forma $\{0, \pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1\}$ onde o número de elementos positivos (iguais a $+1$) supera de uma unidade o número de elementos negativos (iguais a -1) ou vice-versa. Isto é, dos $N - 1$ elementos $c_j = \pm 1$, $j = 2, 3, \ldots, N$, $N/2$ são iguais a 1 e $(N/2) - 1$, iguais a -1 ou vice-versa.

Por exemplo, para $(N = 4)$, as matrizes:

$$(17) \qquad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

são inteiras e inversíveis, com inversas inteiras:

$$C_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad C_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

O número, NMI de tais matrizes, da forma (5), distintas, inteiras, e com inversas inteiras, para cada N, é dado por:

(18) $NMI = 2(N-1)!/((N/2)!((N/2)-1)!)$

Por exemplo, para $N = 4$, teremos seis matrizes distintas, da forma (5) inteiras e com inversas inteiras.

Observações:

(a) Mostraremos, mais adiante, como se pode obter, facilmente, as inversas de matrizes inversíveis C, da forma (5). A inversão de tais matrizes é um processo explícito.

(b) Para as matrizes de $\mathcal{C}$ vale a propriedade de que, se na seqüência $\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ fixarmos c_1 e permutarmos os restantes $N - 1$ elementos, poderemos obter um máximo de $(N - 1)!$ matrizes distintas com os mesmos autovalores e, conseqüentemente, com o mesmo determinante.

2.1.3. Seja $\mathcal{C}$ a classe das matrizes da forma (5). Valem, além das já citadas, as seguintes propriedades:

(a) $0 \in \mathcal{C}$; $I \in \mathcal{C}$ (onde 0 é a matriz zero de ordem N).

(b) Se α é um escalar e $C \in \mathcal{C} \rightarrow \alpha C \in \mathcal{C}$.

(c) Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \rightarrow C_1 + C_2 \in \mathcal{C}$.

As propriedades (a), (b) e (c) são de fácil verificação.

Observação: Infelizmente a classe $\mathcal{C}$ não é fechada relativamente às operações de multiplicação e de inversão de matrizes. Ou seja, se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, não é necessariamente verdade que C_1C_2 ou $C_2C_1 \in \mathcal{C}$. Se $C \in \mathcal{C}$ e C é inversível, nem sempre é verdade que C^{-1} (a inversa de C) pertence a $\mathcal{C}$.

Por exemplo: sejam

$$C_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} ; \quad C_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(19)

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

matrizes pertencentes a C.

Então:

(20) $$B_1 = C_1 C_2 = \begin{bmatrix} 16 & 7 & 10 & 16 \\ 10 & 13 & 10 & 16 \\ 10 & 9 & 14 & 16 \\ 10 & 9 & 10 & 20 \end{bmatrix} ;$$

(21) $$B_2 = C_1 C_3 = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 11 & 18 \\ 6 & 7 & 11 & 18 \\ 6 & 9 & 9 & 18 \\ 6 & 9 & 15 & 12 \end{bmatrix} .$$

Como vemos, embora C_1, C_2, C_3 pertencem a C, C_1C_2 e C_2C_3 não pertencem, o que mostra que a classe C não é fechada relativamente à multiplicação de matrizes.

A inversa C_1^{-1} de C_1 é:

(22) $$C_1^{-1} = 1/14 \begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 9 & -5 & -1 \\ -1 & -5 & 9 & -1 \\ -1 & -5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Também aqui verificamos que $C_1 \in C$ não implica que $C_1^{-1} \in C$. Assim, C também não é fechada relativamente à operação de inversão de matrizes.

2.2. Generalização II

A análise das estruturas das matrizes (20), (21) e (22), acima, nos sugere a seguinte generalização:

Seja A a classe de matrizes quadradas A de ordem N ($N \geqq 2$; N inteiro) definidas por:

$$(23) \qquad A = \begin{bmatrix} d_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_{N-1} & b_N \\ a_1 & d_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_{N-1} & b_N \\ a_1 & a_2 & d_3 & b_4 & \cdots & b_{N-1} & b_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & d_{N-1} & b_N \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{N-1} & d_N \end{bmatrix}$$

satisfazendo à condição:

$$(24) \qquad \begin{aligned} & d_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_{N-1} + b_N = \\ = {} & a_1 + d_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_{N-1} + b_N = \\ = {} & a_1 + a_2 + d_3 + b_4 + \ldots + b_{N-1} + b_N = \\ = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \\ = {} & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + d_{N-1} + b_N = \\ = {} & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{N-1} + d_N = s_A \end{aligned}$$

(onde s_A, soma dos elementos de cada linha A, é um número fixo, para cada matriz A).

Valem para as matrizes A definidas em (23), satisfazendo (24), as seguintes propriedades:

Propriedade 1:

$$(25) \qquad d_i - a_i = d_{i+1} - b_{i+1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1$$

Prova: Consideremos duas linhas consecutivas de A, definida em (23), as de índices i e $i+1$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Usando (24), obtemos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{i-1} + d_i + b_{i+1} + b_{i+2} + \ldots + b_{N-1} + b_N =$$
$$= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{i-1} + a_i + d_{i+1} + b_{i+2} + \ldots + b_{N-1} + b_N$$

Daí,

$$d_i + b_{i+1} = a_i + d_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1$$

ou $$d_i - a_i = d_{i+1} - b_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1$$

como se queria provar.

Propriedade 2:

Os autovalores λ_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, de A, são dados por:

$$\text{(26)} \quad \begin{aligned} &\text{(a)}\ \lambda_i = d_i - a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \\ &\text{(b)}\ \lambda_N = s_A \end{aligned}$$

Prova:

(a) $\lambda_i = d_i - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$

Substituindo-se λ por $\lambda_i = d_i - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, na matriz $(A - \lambda I)$ e usando-se (25), esta matriz ficará com duas linhas iguais, a saber, as de índices i e $i+1$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

Assim, $\det(A - \lambda_i I) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, o que significa dizer que os $\lambda_i = d_i - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, são zeros do polinômio característico de A, $\det(A - \lambda I)$, e são, portanto, autovalores de A.

(b) $\lambda_N = s_A$

$$\lambda_N = \operatorname{Tr} A - \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i = \sum_{i=1}^{N} d_i - \sum_{i=1}^{N-1} (d_i - a_i) =$$

$$= d_N + \sum_{i=1}^{N-1} a_i = s_A$$

Assim, $\lambda_n = s_A$ é autovalor de A.

Observação: Em virtude de (25), os autovalores λ_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, podem também ser dados por $\lambda_i = d_{i+1} - b_{i+1}$ $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

Propriedade 3:

Os autovetores de A, correspondentes aos autovalores λ_i $i = 1, 2, \ldots, N$, dados em (26), são os vetores v_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, quando diferentes de zero, definidos por:

$$v_1 = \begin{bmatrix} \sum_{j=2}^{N} b_j \\ -a_1 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} \sum_{j=3}^{N} b_j \\ \sum_{j=3}^{N} b_j \\ -(a_1+a_2) \\ -(a_1+a_2) \\ \vdots \\ -(a_1+a_2) \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} \sum_{j=4}^{N} b_j \\ \sum_{j=4}^{N} b_j \\ \sum_{j=4}^{N} b_j \\ -(a_1+a_2+a_3) \\ -(a_1+a_2+a_3) \\ \vdots \\ -(a_1+a_2+a_3) \end{bmatrix}; \ldots;$$

(27)

$$v_{N-1} = \begin{bmatrix} b_N \\ b_N \\ \vdots \\ b_N \\ -\sum_{j=1}^{N-1} a_j \end{bmatrix}; \quad v_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prova: A prova é feita verificando-se que os v_i, $i = 1, 2, \dots, N$ satisfazem às equações:

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 4 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, matriz pertencente a Λ.

Os autovalores de A são:

$\lambda_1 = 3 - 1 = 2$; $\lambda_2 = 4 - 3 = 1$; $\lambda_3 = 5 - 2 = 3$; $\lambda_4 = 1 + 3 + 2 - 2 = 4$

$\lambda_1 = 4 - 2 = 2$; $\lambda_2 = 5 - 4 = 1$; $\lambda_3 = -2 + 5 = 3$.

Os correspondentes autovetores são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}; \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De fato:

(a) $(A - \lambda_1 I) = (A - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A - 2I) = 0$

(b) $(A - \lambda_2 I) = (A - I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A - I) = 0$

(c) $(A - \lambda_3 I) = (A - 3I) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A - 3I) = 0$

(d) $\mathrm{Tr}\ A - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 10 - (1 + 2 + 3) = 10 - 6 = 4 = \lambda_4.$

(e) $(A - \lambda_1 I)v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(f) $(A - \lambda_2 I)v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(g) $(A - \lambda_3 I)v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(h) $(A - \lambda_4 I)v_4 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Propriedade 4:

Se $A \in \mathcal{A}$ e A é inversível, sua inversa $X = A^{-1} \in \mathcal{A}$.

Seja A definida em (23), satisfazendo (24). Se definirmos $X = A^{-1}$ por:

(28) $$X = \begin{bmatrix} w_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{N-1} & y_N \\ x_1 & w_2 & y_3 & \cdots & y_{N-1} & y_N \\ x_1 & x_2 & w_3 & \cdots & y_{N-1} & y_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & w_{N-1} & y_N \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{N-1} & w_N \end{bmatrix}$$

Então X é facilmente explicitável e se tem:

(29) $$w_1 = \frac{\lambda_N - a_1}{\lambda_1 \lambda_N}$$

(30) $$w_2 = \frac{d_1}{\lambda_1 \lambda_N} + \frac{\sum_{j=3}^{N} b_j}{\lambda_2 \lambda_N}$$

(31) $$w_k = \frac{d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j}{\lambda_{k-1} \lambda_N} + \frac{\sum_{j=k+1}^{N} b_j}{\lambda_k \lambda_N}, \quad k = 3, 4, \ldots, N-1$$

(32) $$w_{N-1} = \frac{d_1 + \sum_{j=2}^{N-2} b_j}{\lambda_{N-2} \lambda_N} + \frac{b_N}{\lambda_{N-1} \lambda_N}$$

(33) $$w_N = \frac{\lambda_N - b_N}{\lambda_{N-1} \lambda_N}$$

(34) $$x_k = w_k - \frac{1}{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

(35) $$y_{k+1} = w_{k+1} - \frac{1}{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

ou

(36) $$y_{k+1} = (w_{k+1} - w_k) + x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

Prova: A prova se faz calculando a matriz dos cofatores de A, cofA. Então: $X = A^{-1} = (\text{cofA})^t/\det A$. Leva-se em conta para o cálculo final dos x_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$ e dos $y_j = j = 2, 3, \ldots, N$ que os autovalores de A^{-1} são os inversos dos autovalores de A.

A prova, por ser muito extensa e laboriosa será omitida.

Exemplo:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Então: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 4$; $\lambda_3 = 2$; $\lambda_4 = 3$

$$w_1 = \frac{\lambda_4 - a_1}{\lambda_1\lambda_4} = \frac{3-3}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

$$w_2 = \frac{d_1}{\lambda_1\lambda_4} + \frac{b_3 + b_4}{\lambda_2\lambda_4} = \frac{4}{3} + \frac{0-5}{12} = \frac{16-5}{12} = \frac{11}{12}$$

$$w_3 = \frac{d_1 + b_2}{\lambda_2\lambda_4} + \frac{b_4}{\lambda_3\lambda_4} = \frac{4+4}{12} + \frac{-5}{6} = \frac{8-10}{12} = -\frac{2}{12}$$

$$w_4 = \frac{\lambda_4 - b_4}{\lambda_3\lambda_4} = \frac{3+5}{6} = \frac{8}{6} = \frac{16}{12}$$

$$x_1 = w_1 - \frac{1}{\lambda_1} = 0 - 1 = -1 = -\frac{12}{12}$$

$$x_2 = w_2 - \frac{1}{\lambda_2} = +\frac{11}{12} - \frac{1}{4} = \frac{11-3}{12} = \frac{8}{12}$$

$$x_3 = w_3 - \frac{1}{\lambda_3} = -\frac{2}{12} - \frac{1}{2} = \frac{-2-6}{12} = -\frac{8}{12}$$

$$y_2 = w_2 - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{11}{12} - 1 = \frac{11 - 12}{12} = -\frac{1}{12}$$

$$y_3 = w_3 - \frac{1}{\lambda_2} = -\frac{2}{12} - \frac{1}{4} = \frac{-2 - 3}{12} = -\frac{5}{12}$$

$$y_4 = w_4 - \frac{1}{\lambda_3} = \frac{16}{12} - \frac{1}{2} = \frac{16 - 6}{12} = \frac{10}{12}$$

Daí:

$$X = A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 & 10 \\ -12 & 11 & -5 & 10 \\ -12 & 8 & -2 & 10 \\ -12 & 8 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

como se pode verificar, mostrando que X satisfaz às equações:

$AX = XA = I$.

Propriedade 5:

Se α_1, α_2 são escalares e se A_1, $A_2 \in \Lambda$, então $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \in \Lambda$ e se tem:

(a) $(d_i - a_i)_{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2} = \lambda_i(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) =$

$= \alpha_1 (d_i - a_i)_{A_1} + \alpha_2 (d_i - a_i)_{A_2} =$

$= \alpha_1 \lambda_i (A_1) + \alpha_2 \lambda_i (A_2)$, $\quad i = 1, 2, \ldots, N - 1$

(b) $s_{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2} = \lambda_N(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) =$

$= \alpha_1 s_{A_1} + \alpha_2 s_{A_2} = \alpha_1 \lambda_N (A_1) + \alpha_2 \lambda_N (A_2)$.

Prova: A demonstração, por longa e laboriosa, será omitida.

Exemplos:

Sejam $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

$\alpha_1 = 2$; $\alpha_3 = 3$

Então: $\lambda_1(A_1) = 2$; $\lambda_2(A_1) = 1$; $\lambda_3(A_1) = 3$; $\lambda_1(A_2) = 1$; $\lambda_2(A_2) = 2$; $\lambda_3(A_2) = 4$.

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 5 & 13 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(d_1 - a_1)_{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2} = \lambda_1(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = 7 = 2 \,.\, 2 + 3 \,.\, 1 =$$

$$= 2\lambda_1(A_1) + 3\lambda_1(A_2)$$

$$(d_2 - a_2)_{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2} = \lambda_2(\alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_2) = 8 = 2 \,.\, 1 + 3 \,.\, 2 =$$

$$= 2\lambda_2(A_1) + 3\lambda_2(A_2)$$

$$s_{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2} = \lambda_3(\alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_2) = 18 = 2 \,.\, 3 + 3 \,.\, 4 =$$

$$= 2\lambda_3(A_1) + 3\lambda_3(A_2)$$

Propriedade 6:

Se A_1, $A_2 \in \Lambda$, então $A_1 A_2$, $A_2 A_1 \in \Lambda$ e se tem:

(a) $(d_i - a_i)_{A_1 A_2} = (d_i - a_i)_{A_2 A_1} = \lambda_i(A_1 A_2) = \lambda_i(A_2 A_1) =$

$= (d_i - a_i)_{A_1} (d_i - a_i)_{A_2} = \lambda_i(A_1) . \lambda_i(A_2)$, $i = 1, 2, \ldots, N - 1$

(b) $s_{A_1 A_2} = s_{A_2 A_1} = \lambda_N(A_1 A_2) = \lambda_N(A_2 A_1) = s_{A_1} s_{A_2} = \lambda_N(A_1) . \lambda_N(A_2)$.

Prova: A demonstração será omitida, por ser longa e trabalhosa.

Exemplos:

Sejam $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Então: $\lambda_1(A_1) = 1$; $\lambda_2(A_1) = 2$; $\lambda_3(A_1) = 6$; $\lambda_1(A_2) = 2$; $\lambda_2(A_2) = 1$; $\lambda_3(A_2) = 4$.

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 2 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 16 \end{bmatrix}; \quad A_2A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 4 & 8 & 12 \\ 4 & 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(d_1 - a_1)_{A_1A_2} = (d_1 - a_1)_{A_2A_1} = \lambda_1(A_1A_2) = \lambda_1(A_2A_1) = 2 =$$

$$= 1 \,.\, 2 = \lambda_1(A_1)\lambda_1(A_2)$$

$$(d_2 - a_2)_{A_1A_2} = (d_2 - a_2)_{A_2A_1} = \lambda_2(A_1A_2) = \lambda_2(A_2A_1) = 2 =$$

$$= 2 \,.\, 1 = \lambda_2(A_1)\lambda_2(A_2)$$

$$s_{A_1A_2} = s_{A_2A_1} = \lambda_3(A_1A_2) = \lambda_3(A_2A_1) = 24 = \lambda_3(A_1)\lambda_3(A_2)$$

Propriedade 7:

Se A pertence a $\mathcal{A}$, então, as submatrizes principais A_k, de A, isto é, as submatrizes constituidas das k primeiras linhas e das k primeiras colunas de A, $k = 1, 2, \ldots, N - 1$, também pertencem a $\mathcal{A}$.

Prova: Seja $A \in \mathcal{A}$, matriz da forma:

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_k & b_{k+1} & \cdots & b_N \\ a_1 & d_2 & b_3 & \cdots & b_k & b_{k+1} & \cdots & b_N \\ a_1 & a_2 & d_3 & \cdots & b_k & b_{k+1} & \cdots & b_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & d_k & b_{k+1} & \cdots & b_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_k & a_{k+1} & \cdots & d_N \end{bmatrix}$$

Então a submatriz principal A_k de A, têm a forma:

$$A_k = \begin{bmatrix} d_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_k \\ a_1 & d_2 & b_3 & \cdots & b_k \\ a_1 & a_2 & d_3 & \cdots & b_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & d_k \end{bmatrix}$$

Devemos mostrar que:

(a) A_k tem a forma de A.

(b) A soma de cada linha de A_k é um número fixo s_{A_k}, para cada k.

A propriedade (a) é facilmente verificável, da observação da forma de A_k.

A propriedade (b) decorre facilmente do fato de ser $s_{A_k} = s_A - \sum_{r=k+1}^{N} b_r$.

Aplicação: Construção de matrizes A e $\bar{A}$ que sejam decomponíveis em produto $A = LU$, onde L é matriz triangular inferior cujos elementos diagonais são todos iguais a 1 e U é matriz triangular superior. A condição para que essa decomposição seja possível é que $\det A_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$.

Para isso, basta que escolhamos os elementos de A_k,

$k = 1, 2, \ldots, N - 1$, de tal modo que:

(a) $d_i - a_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k - 1$

(b) $d_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i \neq 0$

Exemplo: Seja $A \in \Lambda$ matriz de ordem 4. Se fizermos:

$$d_1 - a_1 = 1$$
$$a_1 + d_1 = 2$$
$$d_2 - a_2 = 2$$
$$a_1 + a_2 + d_3 = 3$$
$$d_3 - a_3 = 1$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + d_4 = 4$$

teremos, por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Cada submatriz A_k, $k = 1, 2, 3$, de A, inclusive A, têm determinante diferente de zero:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Em resumo, podemos afirmar a respeito das matrizes de Λ:

(a) $0, I \in \Lambda$ (0 e I são, respectivamente, as matrizes zero e identidade de ordem N).

(b) Se α é escalar e $A \in \Lambda$, então $\alpha A \in \Lambda$.

(c) Se $A, B \in \Lambda$, então, $A + B \in \Lambda$.

(d) Se $A, B \in \Lambda$, então, $AB, BA \in \Lambda$.

(e) Se $A \in \mathcal{A}$ e A é inversível, sua inversa $A^{-1} \in \mathcal{A}$.

(f) Se α, β são escalares e $A, B \in \mathcal{A}$ os autovalores $\lambda_i(\alpha A + \beta B)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, de $\alpha A + \beta B$ são dados por $\alpha\lambda_i(A) + \beta\lambda_i(B)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

(g) Se $A, B \in \mathcal{A}$, os autovalores $\lambda_i(AB) = \lambda_i(BA)$ de AB e e de BA, $i = 1, 2, \ldots, N$, são dados por $\lambda_i(A).\lambda_i(B)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

2.1.4. APLICAÇÕES

1. Construção de matrizes da forma (23), satisfazendo (24) com dados autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$.

Escolhemos, por exemplo, $d_1, d_2, \ldots, d_{N-1}$. Daí, obtemos os $a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, d_N$ e os $b_2, b_3, \ldots, b_N$, através das relações:

$$a_i = d_i - \lambda_i , \quad i = 1, 2, \ldots, N-1$$

$$d_N = \lambda_N - \sum_{i=1}^{N} a_i$$

$$b_{i+1} = (a_i - d_i) + d_{i+1} = d_{i+1} - \lambda_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Exemplo:

Sejam $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 5$; $\lambda_4 = 4$.

Escolhemos:

$d_1 = 2$; $d_2 = 3$; $d_3 = 2$

obtemos então:

$$a_1 = d_1 - \lambda_1 = 2 - 1 = 1$$
$$a_2 = d_2 - \lambda_2 = 3 - 2 = 1$$
$$a_3 = d_3 - \lambda_3 = 2 - 5 = -3$$
$$d_4 = \lambda_4 - (a_1 + a_2 + a_3) = 4 - (-1) = 5$$
$$b_2 = d_2 - \lambda_1 = 3 - 1 = 2$$
$$b_3 = d_3 - \lambda_2 = 2 - 2 = 0$$
$$b_4 = d_4 - \lambda_3 = 5 - 5 = 0$$

A matriz A que tem os autovalores acima especificados, é então:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix},$$

como se pode facilmente verificar.

2. Construção de matrizes A da forma (23), satisfazendo (24) que sendo inteiras e inversíveis, possuam inversas inteiras.

Tais matrizes devem satisfazer à condição:

$$\det A = \pm 1$$

ou $$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N = \pm 1$$

ou $$\lambda_i = \pm 1 , \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

A partir daqui, procede-se como no caso anterior.

Por exemplo: Sejam $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = 1$; $\lambda_4 = -1$.

Escolhemos $d_1 = 2$; $d_2 = 3$; $d_3 = 4$.

Obtemos, então:

$$a_1 = d_1 - \lambda_1 = 2 - 1 = 1$$
$$a_2 = d_2 - \lambda_2 = 3 + 1 = 4$$
$$a_3 = d_3 - \lambda_3 = 4 - 1 = 3$$
$$d_4 = \lambda_4 - (a_1 + a_2 + a_3) = -1 - 8 = -9$$
$$b_2 = d_2 - \lambda_1 = 3 - 1 = 2$$
$$b_3 = d_3 - \lambda_2 = 4 + 1 = 5$$
$$b_4 = d_4 - \lambda_3 = -9 - 1 = -10$$

A matriz A da forma (23), satisfazendo (24), que sendo inteira e inversível, possua inversa inteira é, então:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 & -10 \\ 1 & 3 & 5 & -10 \\ 1 & 4 & 4 & -10 \\ 1 & 4 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

Sua inversa A^{-1} pode ser facilmente calculavel pelas fórmulas (29) a (36) e se tem:

$$w_1 = \frac{\lambda_4 - a_1}{\lambda_1\lambda_4} = \frac{-1-1}{-1} = 2$$

$$w_2 = \frac{d_1}{\lambda_1\lambda_4} + \frac{b_3 + b_4}{\lambda_2\lambda_4} = \frac{2}{-1} + \frac{-5}{1} = -2 - 5 = -7$$

$$w_3 = \frac{d_1 + b_2}{\lambda_2\lambda_4} + \frac{b_4}{\lambda_3\lambda_4} = \frac{2+2}{1} + \frac{-10}{-1} = 4 + 10 = 14$$

$$w_4 = \frac{\lambda_4 - b_4}{\lambda_3\lambda_4} = \frac{-1+10}{-1} = -9$$

$$x_1 = w_1 - \frac{1}{\lambda_1} = 2 - 1 = 1$$

$$x_2 = w_2 - \frac{1}{\lambda_2} = -7 - \frac{1}{-1} = -6$$

$$y_2 = w_2 - \frac{1}{\lambda_1} = -7 - 1 = -8$$

$$y_3 = w_3 - \frac{1}{\lambda_2} = 14 + 1 = 15$$

$$y_4 = w_4 - \frac{1}{\lambda_3} = -9 - 1 = -10$$

Dai,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 15 & -10 \\ 1 & -7 & 15 & -10 \\ 1 & -6 & 14 & -10 \\ 1 & -6 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

Observação 1: No caso em que se escolha $\lambda_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$, as fórmulas (29) a (35) se simplificam e se obtém:

$$w_1 = 1 - a_1$$

$$w_k = 1 - b_k, \quad k = 2, 3, \ldots, N$$

$$x_1 = -a_1$$

$$x_k = -b_k, \quad k = 2, 3, \ldots, N - 1$$

$$y_k = -b_k, \quad k = 2, 3, \ldots, N$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -6 \\ 4 & 3 & 0 & -6 \\ 4 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Então:

$$w_1 = 1 - a_1 = 1 - 4 = -3$$

$$w_2 = 1 - b_2 = 1 - 2 = -1$$

$$w_3 = 1 - b_3 = 1 - 0 = 1$$

$$w_4 = 1 - b_4 = 1 + 6 = 7$$

$$x_1 = -a_1 = -4$$

$$x_2 = -b_2 = -2$$

$$x_3 = -b_3 = 0$$

$y_2 = -b_2 = -2$

$y_3 = -b_3 = 0$

$y_4 = -b_4 = 6$

Então:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 6 \\ -4 & -1 & 0 & 6 \\ -4 & -2 & 1 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Observação 2: Se escolhermos $\lambda_i = -1$, $i = 1, 2, \ldots, N$, as fórmulas (29) a (35) também se simplificam e obtemos:

$w_1 = -(1 + a_1)$

$w_k = -(1 + b_k)$, $k = 2, 3, \ldots, N$

$x_1 = -a_1$

$x_k = -b_k$, $k = 2, 3, \ldots, N - 1$

$y_k = -b_k$, $k = 2, 3, \ldots, N$

Exemplo:

$$\text{Seja} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & -15 \\ 3 & 4 & 7 & -15 \\ 3 & 5 & 6 & -15 \\ 3 & 5 & 7 & -16 \end{bmatrix}$$

Então:

$w_1 = -(1 + a_1) = -(1 + 3) = -4$

$w_2 = -(1 + b_2) = -(1 + 5) = -6$

$w_3 = -(1 + b_3) = -(1 + 7) = -8$

$w_4 = -(1 + b_4) = -(1 - 15) = 14$

$x_1 = -a_1 = -3$

$x_2 = -b_2 = -5$

$x_3 = -b_3 = -7$

$y_2 = -b_2 = -5$

$y_3 = -b_3 = -7$

$y_4 = -b_4 = 15$

Daí,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -7 & 15 \\ -3 & -6 & -7 & 15 \\ -3 & -5 & -8 & 15 \\ -3 & -5 & -7 & 14 \end{bmatrix}$$

3. SUBCLASSES DE $\mathcal{A}$.

3.1. Subclasse $\mathcal{A}_1$ das matrizes de $\mathcal{A}$ que são simétricas

Se exigirmos que as matrizes A de $\mathcal{A}$ sejam simétricas, elas tomam a forma:

$$A = \begin{bmatrix} d & a & a & \dots & a & a \\ a & d & a & \dots & a & a \\ a & a & d & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & d & a \\ a & a & a & \dots & a & d \end{bmatrix}$$

com $\lambda_N = s_A = d + (N - 1)a$ (N é a ordem de A)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{N-1} = d - a$$

Esta subclasse A_1 de matrizes A *é fechada* relativamente às operações de adição, de multiplicação e de inversão de matrizes e de multiplicação de matriz por escalar.

Isto é:

(a) Se $A, B \in A_1$ e $\alpha ; \beta$ são escalares, então: $\alpha A + \beta B \in A_1$

(b) Se $A, B \in A_1$, $AB = BA \in A$.

(c) Se $A \in A_1$ e é inversível, sua inversa $X = A^{-1} \in A_1$. É ainda mais facilmente explicitável. De fato, tem-se:

$$X = A^{-1} = \frac{1}{\gamma\mu} = \begin{bmatrix} \mu-a & -a & -a & \cdots & -a \\ -a & \mu-a & -a & \cdots & -a \\ -a & -a & \mu-a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & \mu-a \end{bmatrix}$$

com $\gamma = d - a = \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, N - 1$

$\mu = d + (N - 1)a = \lambda_N$

Os autovetores de $A \in A_1$, correspondentes aos autovalores $\gamma = d - a$ (de multiplicidade $N - 1$) e $\mu = d + (N - 1)a$ são respectivamente, os vetores:

$$u_1 = \begin{bmatrix} N-1 \\ -1 \\ \cdot \\ \vdots \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad u_2 = \begin{bmatrix} N-2 \\ N-2 \\ -2 \\ \cdot \\ \vdots \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}; \ \ldots; \quad u_{N-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \vdots \\ 1 \\ 1-N \end{bmatrix}; \quad u_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

independendo, assim, dos elementos de $A \in A_1$. Estes autovetores são *linearmente independentes*.

Exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ matriz pertencente a A_1 .

Seus autovalores são:

$\gamma = d - a = 5 - 1 = 4$ (de multiplicidade 3)

$\mu = d + (N - 1)a = 5 + 3 \,.\, 1 = 8$

Seus autovetores, correspondentes aos autovalores γ (de multiplicidade 3) e μ, são, respectivamente:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad u_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sua inversa A^{-1} é:

$$A^{-1} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

3.2. Subclasse A_2 de matrizes de A

Se exigirmos que $d_1 = d_2 = \ldots = d_N$, as matrizes A de A tomam a forma:

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{N-1} & c_N \\ c_2 & c_1 & c_3 & \cdots & c_{N-1} & c_N \\ c_2 & c_3 & c_1 & \cdots & c_{N-1} & c_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_N & c_1 \end{bmatrix}$$

Esta subclasse A_2 é fechada relativamente às operações de adição de matrizes e de multiplicação de matriz por escalar, *mas, não o é relativamente às operações de multiplicação e de inversão de matrizes.*

A classe A_2 já foi estudada anteriormente (vide *2.1.* acima). São as matrizes C da forma (5).

Sendo as matrizes C da forma (5) caso particular das matrizes A, podemos reescrever as fórmulas (29) a (35), para matrizes C :

(37) $$w_1 = \frac{\lambda_n - c_2}{\lambda_1 \lambda_N}$$

(38) $$w_2 = \frac{c_1}{\lambda_1 \lambda_N} + \frac{\sum_{j=3}^{N} c_j}{\lambda_2 \lambda_N}$$

(39) $$w_k = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} c_j}{\lambda_{k-1} \lambda_N} + \frac{\sum_{j=k+1}^{N} c_j}{\lambda_k \lambda_N}, \qquad k = 2, 3, \ldots, N-1$$

(40) $$w_{N-1} = \frac{\sum_{j=1}^{N-2} c_j}{\lambda_{N-2} \lambda_N} + \frac{c_N}{\lambda_{N-1} \lambda_N}$$

(41) $$w_N = \frac{\lambda_N - c_N}{\lambda_{N-1}\ N}$$

(42) $$x_k = w_k - \frac{1}{\lambda_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

(43) $$y_{k+1} = w_{k+1} - \frac{1}{\lambda_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Então:

$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 3; \quad \lambda_3 = 1; \quad \lambda_4 = 15$

$$w_1 = \frac{\lambda_4 - c_2}{\lambda_1 \lambda_4} = \frac{15 - 4}{15} = \frac{11}{15}$$

$$w_2 = \frac{c_1}{\lambda_1 \lambda_4} + \frac{c_3 + c_4}{\lambda_2 \lambda_4} = \frac{5}{15} + \frac{6}{45} = \frac{7}{15}$$

$$w_3 = \frac{c_1 + c_2}{\lambda_2 \lambda_4} + \frac{c_4}{\lambda_3 \lambda_4} = \frac{9}{45} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$$

$$w_4 = \frac{\lambda_4 - c_4}{\lambda_3 \lambda_4} = \frac{15 - 4}{15} = \frac{11}{15}$$

$$x_1 = w_1 - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{11}{15} - 1 = \frac{-4}{15}$$

$$x_2 = w_2 - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

$$x_3 = w_3 - \frac{1}{\lambda_3} = \frac{7}{15} - 1 = \frac{-8}{15}$$

$$y_2 = w_2 - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{7}{15} - 1 = \frac{-8}{15}$$

$$y_3 = w_3 - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

$$y_4 = w_4 - \frac{1}{\lambda_3} = \frac{11}{15} - 1 = \frac{-4}{15}$$

Então:

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 11 & -8 & 2 & -4 \\ -4 & 7 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 7 & -4 \\ -4 & 2 & -8 & 11 \end{bmatrix}$$

4. APLICAÇÕES VÁRIAS.

(a) Construção de matrizes com prefixados autovalores e com autovetores facilmente calculáveis.

(b) Construção de matrizes que sendo inteiras e inversíveis possuam inversas inteiras facilmente calculáveis.

(c) Construção de matrizes simétricas positivas definidas.

(d) Construção de matrizes simétricas, cujos problemas de autovalores e de inversão são facilmente explicitáveis.

(e) Construção de matrizes inteiras com autovalores e autovetores inteiros.

(f) Construção fácil de matrizes A decomponíveis em produto $A = LU$ ou decomponíveis em produto $A = S^tS$.

(g) Construção fácil de matrizes não singulares.

(h) Construção fácil de seqüências de $2 \leq k \leq N$ vetores de N componentes, linearmente independentes.

REFERÊNCIAS.

[1] Bellman, R.E. 1960 - *Introduction to matrix analysis*. Nova York, McGraw-Hill.

[2] Gregory, R.T. e Karney, D.L. 1969 - *A collection of matrices for testing computational algorithms*. Nova York, Wiley Interscience.

[3] Linhares, O.L. 1977 - *Sobre uma classe de matrizes cujo problema de autovalores é facilmente solucionável.* Ci. e Cultura 8:914-919.

[4] Linhares, O.L. e Andrade, E.X.L. 1979 - *Sobre classe de matrizes quadradas com certas características desejáveis facilmente explicitáveis.* Ci. e Cultura 31(6):652.

[5] Linhares, O.L. e Andrade, E.X.L. 1980 - *Classes de matrizes quadradas inteiras com inversas inteiras facilmente explicitáveis.* Ci. e Cultura 32(7):908-914.

[6] Newmann, M. 1972 - *Integral Matrices.* Nova York, Academic Press.

[7] Renaud, J.C. 1983 - *Matrices with integer entries and integer eigenvalues.* American Mathematical Monthly, Vol. 90, p. 202-203.

[8] Valvi, F. 1977 - *Explicit presentation of the inverses of some types of matrices.* J. Maths. Applics. Vol. 19, p. 107-117.