UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

TEORIA DA ESTABILIDADE: INVARIANÇA,FUNÇÕES DE LIAPUNOV

Nelson Onuchic

Nº 7

NOTAS

São Carlos - SP

TEORIA DA ESTABILIDADE:

INVARIANÇA,

FUNÇÕES DE LIAPUNOV

Nelson Onuchic

n.º 7

novembro - 1980

SÃO CARLOS - S.P.

1980

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Esta monografia é uma publicação de caráter didático sobre a Teoria da Estabilidade no sentido de Liapunov para sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias. Ela visa, entre outros informes, apresentar fatos simples, mas básicos, sobre o uso que LaSalle fez do conceito de invariança para determinar estimativas da região de estabilidade para soluções de sistemas autônomos.

O texto atual apresenta pequenas modificações relativamente ao manuscrito inicial e conserva o mesmo sabor do texto original, que surgiu por volta de 1965 em cursos dados em Salvador e Recife. É com satisfação que destaco nesta oportunidade a significativa colaboração da Lourdes.

Aqui ficam os agradecimentos sinceros pela valiosa contribuição, da Lene e suas auxiliares: Arlete, Gisele e Ivani.

CAPÍTULO I

ESTABILIDADE E EXEMPLOS

(a) Preliminares

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias.

$$\dot{x}_j = f_j(t,x_1, \ldots, x_n),\ j = 1, \ldots, n, (\cdot = \frac{d}{dt}),$$

onde t, x_j e f_j são reais.

Definindo as seguintes matrizes $n \times 1$:

$x = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n)$, ($\mathrm{col}\ z$ indicando a matriz $n \times 1$, transposta da matriz z, $1 \times n$),

$f(t,x) = \mathrm{col}(f_1(t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_n(t,x_1,\ldots,x_n))$,

$\dot{x} = \mathrm{col}(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)$,

o sistema acima pode ser escrito na forma matricial

$\dot{x} = f(t,x)$

Uma equação de ordem n,

$y^{(n)} = g(t,y,y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)})$,

($y^{(j)}$ indicando a derivada de ordem j), pode ser considerada como um sistema da seguinte maneira:

Associamos à equação dada o sistema

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ldots,\dot{x}_{n-1} = x_n,\ \dot{x}_n = g(t,x_1, \ldots, x_n),$$

que, escrito matricialmente, é

$$\dot{x} = f(t,x)$$

com $f(t,x) = \mathrm{col}(x_2, \ldots, x_n, g(t,x_1, \ldots, x_n))$.

Se y é uma solução da equação de ordem n, então a matriz $x = \mathrm{col}(y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)})$ é uma solução do sistema associado e se x é uma solução do sistema associado, então $y=x_1$ é uma solução da equação de ordem n. Assim, quando falamos de sistemas estamos também incluindo, como caso particular, as equações de ordem n.

Indicamos o espaço das matrizes $n \times 1$ ou $1 \times n$ por R^n. Para os elementos $x = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n)$ do R^n usaremos, exceto quando explicitamente mencionado o contrário, a norma $|x| = |x_1| + \ldots + |x_n|$.

Para uma matriz

$$x(t) = \mathrm{col}(x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

as $x_j(t)$ sendo Riemann integráveis em $[a,b]$, definimos

$$\int_a^b x(t)dt = \mathrm{col}(\int_a^b x_1(t)dt, \ldots, \int_a^b x_n(t)dt).$$

Vê-se que

$$|\int_a^b x(t)dt| \leq \int_a^b |x(t)|dt.$$

Dado H, $0 < H \leq \infty$, indicamos por Γ_H o conjunto das matrizes x, $n \times 1$, satisfazendo $|x| < H$.

Seja $f(t,x)$, matriz $n \times 1$, contínua em $E=[0,\infty)\times\Gamma_H$. Para todo $P_o = (t_o, x_o) \in E$ existe uma solução $x(t)$ do sistema $\dot{x} = f(t,x)$, definida em algum intervalo contendo t_o, com $x(t_o) = x_o$. Esta solução não é necessàriamente única. Quando é única nós a indicamos por $x(t,P_o)$ ou $x(t,t_o,x_o)$. Suporemos, sempre, que esta solução é definida no seu máximo intervalo aberto à direita, isto é, no intervalo $[t_o,t^+)$, $t^+ = t^+(P_o)$, $t_o < t^+ \leq \infty$, tal que $x(t,P_o)$ esteja definido em $[t_o,t^+)$, não podendo ser prolongada, como solução do sistema, a nenhum intervalo $[t_o,\tilde{t})$ com $\tilde{t} > t^+$. Uma condição suficiente para unicidade é que $f(t,x)$ seja localmente lipschitziana em E relativamente a x, isto é, para todo ponto $P_o \in E$ existe uma vizinhança V de P_o em E e uma constante K tal que $|f(t,x) - f(t,z)| \leq K|x - z|$, para $(t,x) \in V$, $(t,z) \in V$. Com referência às questões de existência e unicidade e uma ampla discussão no assunto indicamos o livro de P. Hartman [13, capítulos II e III].

Em todo nosso trabalho, mesmo quando não explicitamente mencionado, vamos supor que $f(t,x)$ seja contínua e que por todo ponto $(t_o,x_o) \in E$ passe uma única solução do sistema $\dot{x} = f(t,x)$.

Teorema da Continuidade em Relação às Condições Iniciais.

"*Seja* $P_o = (t_o,x_o) \in E$ *e seja a solução* $x(t,P_o)$ *de* $\dot{x} = f(t,x)$ *definida em* $[a,b]$, $a \leq t_o \leq b$. *Então existe uma vizinhança de* P_o *tal que, para todo* P *desta vizinhança,* $x(t,P)$ *existe em* $[a,b]$ *e* $\lim\limits_{P\to P_o} x(t,P) = x(t,P_o)$ *uniformemente em* t, $a \leq t \leq b$."

Para uma prova ver, por exemplo, [7, cap. 2, Teorema 4.3].

Se $x(t,P_o)$ é uma solução de $\dot{x} = f(t,x)$ com $t^+=\infty$, isto é, $x(t,P_o)$ é definida em $[t_o,\infty)$, dizemos que $x(t,P_o)$ é definida no futuro. Se $x(t,P_o)$ é limitada em $[t_o,\infty)$ dizemos que $x(t,P_o)$ é limitada no futuro.

O seguinte critério é verdadeiro, para saber se uma solução é definida no futuro:

"Seja $x(t,P_o)$ uma solução de $\dot{x} = f(t,x)$ tal que $|x(t,P_o)| \leq H_1 < H$ para $t_o \leq t < t^+$. Então $t^+ = \infty$."

Neste caso concluimos também que $x(t,P_o)$ é limitado no futuro.

Estas afirmações podem ser vistas como uma consequência imediata de [7, Teorema 3.1, pg 12]. Vale a pena notar que em [13, cap. II, § 3, pg 12] há uma análise bem fina do problema de extensão de soluções.

A seguinte desigualdade será de interêsse.

Lema de Gronwall.

Se $u(t) \geq 0$ e $v(t) \geq 0$, *para* $t_o \leq t < \tau$ *são funções contínuas e se para alguma constante* c *temos*

$$u(t) \leq c + \int_{t_o}^{t} u(s)\, v(s) ds$$

então $$u(t) \leq c \, \exp \int_{t_o}^{t} v(s) ds".$$

Para uma prova ver, por exemplo, [6].

(b) *Definições de Estabilidade*

O exposto neste parágrafo e no seguinte é baseado no trabalho de J. Massera [24-b-]. Relativamente ao sistema $\dot{x} = f(t,x)$ vamos supor que $f(t,0) = 0$ para $0 \leq t < \infty$, ou seja, $x = 0$ é uma solução da equação dada. As definições de estabilidade que se seguem, referem-se à solução $x = 0$ do sistema dado. Veremos, posteriormente, que não há perda de generalidade em nos limitarmos ao estudo da estabilidade da solução $x = 0$.

1 - *Estabilidade no sentido de Liapunov* (ou simplesmente *estabilidade)*: dados $\varepsilon > 0$ e $t_o \geq 0$, existe $\delta=\delta(\varepsilon,t_o) > 0$ tal que $|x_o| < \delta$ implica $|x(t,t_o,x_o)| < \varepsilon$ para $t \geq t_o$.

Exercício: Usando o teorema da continuidade em relação às condições iniciais mostrar que se a condição de estabilidade é satisfeita para algum $\tilde{t}_o \geq 0$, então ela é satisfeita para qualquer $t_o \geq 0$.

2 - *Estabilidade uniforme:* dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que $|x_o| < \delta$ implica $|x(t,t_o,x_o)| < \varepsilon$ para $t \geq t_o$.

3 - *Estabilidade assintótica no sentido de Liapunov* (ou simplesmente *estabilidade assintótica)*: (1) é satisfeita e dado $t_o \geq 0$ existe $\rho(t_o) > 0$ tal que $|x_o| < \rho(t_o)$ implica $x(t,t_o,x_o) \to 0$ com $t \to \infty$.

Observamos que o simples fato de um sistema ter todas as suas soluções tendendo para a origem não implica necessariamente que o $x = 0$ seja estável e, portanto, assintòticamente estável. Um exemplo pode ser encontrado em [4, exemplo 6, pg. 145].

4 - *Estabilidade equiassintótica:* existe $\rho > 0$ e a todo $\varepsilon > 0$ corresponde um $T(\varepsilon) \geq 0$ tal que $|x_o| < \rho$ implica $|x(t,0,x_o)| < \varepsilon$ para $t \geq T(\varepsilon)$.

Um exemplo discutido por Massera [24-a] mostra que estabilidade assintótica e estabilidade equiassintótica não são equivalentes. O exemplo de Massera está também discutido no livro de Yoshizawa [29-c].

5 - Existe $\rho > 0$ e a todo $\varepsilon > 0$ corresponde um $T(\varepsilon) \geq 0$ tal que $|x_o| < \rho$, $t_o \geq 0$, implicam $|x(t,t_o,x_o)| < \varepsilon$

para $t \geq t_o + T(\varepsilon)$.

6 - *Estabilidade assintótica uniforme:* (2) e (5) são satisfeitas.

7 - *Estabilidade assintótica exponencial:* existe $\nu > 0$ e a todo $\varepsilon > 0$ corresponde um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|x_o| < \delta$, $t_o \geq 0$ implicam

$$|x(t,t_o,x_o)| < \varepsilon \quad \exp[-\nu(t-t_o)] \quad \text{para} \quad t \geq t_o.$$

8 - *Estabilidade assintótica global:* $H = \infty$, isto é, $f(t,x)$ é definido para $t \geq 0$, x qualquer e (3) é satisfeita com $\rho(t_o) = \infty$.

Seja $\dot{y} = g(t,y)$ um sistema e $\psi(t)$ uma sua solução definida em $[0,\infty)$. Com a mudança de variáveis $x = y-\psi(t)$ vem $\dot{x} = \dot{y}-\dot{\psi}(t) = g(t,y) - g(t,\psi(t)) = g(t,x + \psi(t))-g(t,\psi(t))= = f(t,x)$, onde $f(t,0) = 0$.

Dizemos que $\psi(t)$ é estável num dos sentidos acima definidos se a solução $x = 0$ de $\dot{x} = f(t,x)$ é estável no sentido correspondente.

Observamos que os conceitos de estabilidade acima formulados referem-se também às equações diferenciais de ordem n, considerando-se estas como um sistema conforme foi observado em (a). No caso a origem será: $x = \mathrm{col}(x_1, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1}) = \mathrm{col}(0,0, \ldots, 0)$.

(c) Relações entre as diferentes definições de estabilidade e exemplos

Pode-se ver, sem dificuldades, que as seguintes implicações são verdadeiras:

$$(7) \Longrightarrow (6) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (1) \quad \text{e}$$

$$(7) \Longrightarrow (6) \Longrightarrow (5) \Longrightarrow (4) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (1).$$

Os exemplos que daremos, todos discutidos em [24-b-], mostram a não equivalência entre algumas das definições acima.

O seguinte exemplo mostra que (4) pode ser satisfeito sem que (2) o seja:

$$\dot{x} = -[13 + 12 \text{ sen } \ell n(t+1) + 12t(t+1)^{-1}\cos \ell n(t+1)]x$$

$$x(t) = x(0)\exp[-\{13 + 12 \text{ sen } \ell n(t+1)\}t]$$

e, portanto,

$$|x(t)| \le |x(0)|e^{-t}$$

Logo (4) está satisfeita.

Tomando-se $s_n = \exp[(4n+1)\frac{\pi}{2}] - 1$ e $t_n = \exp[(4n+3)\frac{\pi}{2}] - 1$ resulta

$$\frac{x(t_n)}{x(s_n)} = \exp\{(25-e^{\pi}).\exp[(4n+1)\tfrac{\pi}{2}] - 24\} \to \infty$$

com $n \to \infty$, visto que $25 > e^{\pi}$.

Logo (2) não está satisfeita.

O exemplo seguinte mostra que (5) pode ser satisfeita sem que (6) o seja.

$$\dot{x} = (6t \text{ sen}t - 2t)x$$

$$x(t) = x(0)\exp(6 \text{ sen}t - 6t \cos t - t^2)$$

Para $T \ge 7$, $t \ge t_o + T$, $t_o \ge 0$, vem

$$\frac{x(t)}{x(t_o)} \le \exp[12 + (t+t_o)(6 - t + t_o)] \le$$

$$\le \exp[12 + T(6-T)] \le e^{12}e^{-T} < \varepsilon$$

para $T = T(\varepsilon)$ suficientemente grande.

Logo (5) está satisfeita.

Tomando-se $t_n = n\pi$ vem:

$$\frac{x(t_{2n+1})}{x(t_{2n})} = \exp[(4n+1)\pi(6-\pi)] \to \infty, \qquad \text{com} \quad n \to \infty.$$

Logo (6) não está satisfeita.

O exemplo seguinte mostra que (6) pode ser satisfeita sem que (7) o seja.

$$\dot{x} = -x^3$$

para o qual $x(t,t_o,x_o) = x_o[1 + 2x_o^2(t-t_o)]^{-1/2}$.

Para o caso em que $f(t,x)$ é periódica em t ou independente de t temos que (1) ⟹ (2) e (3) ⟹ (6), [24-b-, Teorema 7]. Portanto, neste caso, o seguinte esquema é verdadeiro:

(7) ⟹ (6) ⟺ (5) ⟺ (4) ⟺ (3) ⟹ (2) ⟺ (1)

Os sistemas $\dot{x} = 0$ e $\dot{x} = -x^3$ nos mostram a não equivalência entre (1) e (3) e entre (6) e (7), respectivamente.

CAPÍTULO II

ESTABILIDADE PARA SISTEMAS LINEARES

(a) *Fatos básicos sobre sistemas lineares*

Para uma matriz $A = (a_{ij})$, $n \times n$ e complexa definimos a norma $|A| = \sum_{i,j} |a_{ij}|$. Pode-se verificar, sem dificuldade, que

$$|A + B| \leq |A| + |B|, \quad |AB| \leq |A|.|B|$$

$|cA| = |c|.|A|$, $|Ax| \leq |A|.|x|$, onde A e B são matrizes $n \times n$, x matriz $n \times 1$ e c número complexo.

Dada uma matriz A, $n \times n$, a série $I + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$ onde I matriz identidade, é convergente porque a série numérica $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|A^j|}{j!}$ é convergente como minorante da série convergente $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|A|^j}{j!}$ pois $|A^j| \leq |A|^j$.

Definimos $\exp A = I + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$

Se $AB = BA$ pode-se provar que

$\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$.

Em particular, tomando $B = -A$, vem que

$(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$

Do fato de $(ABA^{-1})^m = AB^mA^{-1}$ segue que:

$A(\exp B)A^{-1} = \exp(ABA^{-1})$

Seja A uma matriz $n \times n$ e λ um seu número característico de multiplicidade μ.

O número $\nu = n-h$, onde h é a característica da matriz $A - \lambda I$, é chamado a nulidade de λ. Temos sempre $\nu \leq \mu$. Dizemos que λ tem divisores elementares simples se $\nu = \mu$. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são as raizes características da matriz A, de multiplicidades $\mu_1, \ldots, \mu_m$ e nulidades $\nu_1, \ldots, \nu_m$ respectivamente, existe então uma matriz não singular P tal que.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_N \end{bmatrix} = \text{diag} \begin{bmatrix} J_1, \ldots, J_N \end{bmatrix} = J$$

onde J_s é matriz $n_s \times n_s$ com $(J_s)_{ii} = \lambda_s'$, $i=1,\ldots,n_s, \lambda_s'=\lambda_r$ para algum $r = 1, \ldots, m$, $(J_s)_{i,i+1} = 1$, $i = 1, \ldots, n_{s-1}$ e os demais elementos iguais a zero.

As matrizes J_s são únicas a menos de permutações.

A matriz J é a chamada *forma canônica de Jordan*.

Dado λ_r, as matrizes J_s, para as quais $\lambda_s' = \lambda_r$ são todas de ordem $n_s = 1$ se e somente se $\nu_r = \mu_r$, ou seja, λ_r tem divisores elementares simples. A soma de todos os n_s associados a um dado λ_r é igual a μ_r.

Dada uma matriz C, não singular, provaremos a seguir que existe sempre uma matriz S tal que $C = \exp S$. A uma matriz S com esta propriedade vamos chamar logarítimo de C e indicar por $\ell_n C$. Evidentemente S não é única pois $\exp(S + 2m\pi iI) = \exp S$ para toda matriz S, $n \times n$.

Desde que $C = \exp S$ é equivalente a $QCQ^{-1}=\exp QSQ^{-1}$ para qualquer matriz não singular Q, podemos, sem perda de generalidade, supor C na forma canônica de Jordan J.

Como $R = \text{diag}(R_1, \ldots, R_m)$ implica

$\exp R = \mathrm{diag}(\exp R_1, \ldots, \exp R_m)$, podemos também sem perda de generalidade, supor $C = \lambda I + K$, onde K é $n \times n$ com $K^{n-1} = 0$ e $\lambda \neq 0$ porque $\det C = \lambda^n$.

Se x é um escalar sabemos que

$$\ell n(1 + x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}, \quad |x| < 1.$$

Isto nos sugere a definição

$$\ell n(I + \frac{K}{\lambda}) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{K^j}{j}$$

Esta série é na verdade uma soma finita porque $K^j = 0$ para $j \geq n-1$.

Para x escalar e $|x| < 1$ é sabido que

$$(1+x) = \exp \ell n(x+1) = \sum_{i=0}^{\infty} [\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}]^i \frac{1}{j!}$$

Desde que a série que define $\ell n(I + \frac{K}{\lambda})$ não envolve problema de convergência porque $K^j = 0$ para $j \geq n-1$, vê-se, sugerido pela expressão acima, que

$$I + \frac{K}{\lambda} = \exp[\ell n(I + \frac{K}{\lambda})] \quad \text{e}$$

$$C = \lambda[I + \frac{K}{\lambda}] = [\exp(\ell n \lambda)] \exp[\ell n(I + \frac{K}{\lambda})] =$$

$$= \exp[(\ell n \lambda) I + \ell n(I + \frac{K}{\lambda})]$$

Fica assim provada a existência de $\ell n\ C$ para toda matriz C, $n \times n$, não singular.

O sistema $\dot{x} = A(t)x$, onde $A(t)$ é uma matriz $n \times n$, real ou complexa, definida em $[a, \infty)$, é chamado linear ou linear homogêneo. Sem perda de generalidade, podemos supor sempre $a = 0$. Para os sistemas lineares a hipótese $A(t)$ contínua é bastante não só para garantir a existência mas também a unicidade da solução que passa por um ponto (t_o, x_o), $0 \leq t_o < \infty$ e x_o qualquer. Para os sistemas lineares, em que suporemos sempre $A(t)$ contínua, são ainda verdadeiras as seguintes propriedades:

O conjunto das soluções de um sistema linear é um espaço vetorial de dimensão n sobre os complexos. Se $A(t)$ é real, então o conjunto das soluções reais é um espaço vetorial de dimensão n sobre os reais.

O fato do conjunto das soluções formarem um espaço vetorial é de fácil prova: Que a dimensão seja n resulta do seguinte

Exercício

Sejam $y^1(t), \ldots, y^n(t)$ n soluções de $\dot{y} = A(t)y$. Então elas são linearmente independentes se e somente se, para algum t_o, os vetores $y^1(t_o), \ldots, y^n(t_o)$ forem linearmente independentes no espaço C^n ou R^n das matrizes $n \times 1$, complexas ou reais.

Na prova deste exercício usamos o fato de que se $y(t)$ é uma solução satisfazendo $y(t_o) = 0$ então, pela unicidade das soluções, $y(t) \equiv 0$.

Todas as soluções de um sistema linear são definidas em $[0,\infty)$.

Uma matriz $U(t)$, $n \times n$, cujas colunas formam uma base de soluções para o sistema $\dot{x} = A(t)x$ é chamada uma *matriz fundamental* deste sistema. Ligadas a uma matriz fundamental $U(t)$ temos as seguintes propriedades:

Qualquer solução de $\dot{x} = A(t)x$ é da forma $U(t).C$, C matriz constante $n \times 1$.

Se $U(t)$ e $V(t)$ são matrizes fundamentais de um mesmo sistema então $V(t) = U(t).C$, C matriz constante $n \times n$.

A prova das propriedades acima para os sistemas lineares não oferece maior dificuldade.

Se $U(t)$ é uma matriz cujas colunas são soluções de

$\dot{x} = A(t)x$, não necessàriamente matriz fundamental, então temos a *relação de Jacobi-Liouville:*

$$\det U(t) = \det U(t_o).\exp\int_{t_o}^{t} trA(s)ds,\ 0 \leq t_o < \infty;$$

onde $trA(s)$ é igual à soma dos elementos diagonais de $A(s)$.

Para uma prova desta relação ver [13, Teorema 1, 2, pg. 46].

Como uma consequência da fórmula acima vemos que $U(t)$ é uma matriz fundamental se e somente se $\det U(t) \neq 0$ para todo t, ou equivalentemente para algum $t \geq 0$.

Se A é uma matriz constante então $U(t) = \exp At$ é uma matriz fundamental de $\dot{x} = Ax$ com $U(0) = I$.

A prova pode ser feita como segue. Vamos determinar a matriz fundamental $U(t)$ de $\dot{x} = Ax$ satisfazendo $U(0) = I$. Usando o método das aproximações sucessivas temos que

$$U(t) = \lim_{m\to\infty} U_m(t), \quad \text{onde} \quad U_o(t) = I \quad e \quad U_m(t) = I+\int_o^t AU_{m-1}(s)ds,$$

para $m \geq 1$.

Um simples cálculo mostra que

$$U_m(t) = I+At + A^2\frac{t^2}{2!} + \ldots + A^m\frac{t^m}{m!}$$

Assim $U(t) = \exp At$.

Com o auxílio da forma canônica de Jordan podemos obter importantes informações sobre a matriz fundamental exp At.

Seja P matriz não singular tal que $P^{-1}AP = J$, J forma canônica de Jordan. Então, fazendo no sistema $\dot{x} = Ax$ a substituição $x = Py$, resulta $\dot{y} = Jy$ e, assim, $U(t) = P \exp(tJ)$ é uma matriz fundamental de $\dot{x} = Ax$.

Temos $\exp(tJ) = \text{diag}(\exp tJ_1, \ldots, \exp tJ_n)$ com

$$\exp(tJ_s) = \exp(t\lambda_s') \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_s-1}}{(n_{s-1})!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_s-2}}{(n_{s-2})!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando a expressão acima segue que as componentes de $y(t)$ são combinações lineares das exponenciais $\exp\lambda_1 t, \ldots, \exp\lambda_m t$, com polinômios em t como coeficientes. O desenvolvimento acima mostra que estes polinômios não podem ser escolhidos de maneira arbitrária. No caso particular de todos os $n_s = 1$, estes polinômios são todos de grau zero, isto é, são constantes.

Vamos supor que os números característicos λ_j da matriz A tenham todos parte real negativa e seja α satisfazendo $0 < \alpha < -R(\lambda_j)$.

A forma das matrizes $\exp tJ_S$ nos mostra então que

$|\exp tA| \le |P|e^{tJ}|P^{-1}| \le \beta e^{-\alpha t}$, para $t \ge 0$, onde $\beta = \beta(\alpha)$ é constante suficientemente grande.

(b) Relações de t-semelhança

Duas matrizes $A(t)$, $B(t)$, $n \times n$, contínuas em $[0,\infty)$ são ditas *t-semelhantes* se existir uma matriz $S(t)$ tal que em $[0,\infty)$:

1) $\dot{S}(t)$ é contínua
2) $S(t)$ e $S^{-1}(t)$ são limitadas;
3) $\dot{S}(t) + S(t)A(t) - B(t)S(t) = 0$.

A relação de t-semelhança, que indicamos por $\sim$, é uma relação de equivalência. De fato, $A(t) \sim A(t)$ com $S(t) = I$.

Se $A(t) \sim B(t)$ com um dado $S(t)$ então $B(t) \sim A(t)$ com $S^{-1}(t)$. Se $A(t) \sim B(t)$ com um dado $S(t)$ e $B(t) \sim C(t)$ com $T(t)$ então $A(t) \sim C(t)$ com $T(t)S(t)$.

Dizemos que dois sistemas $\dot{x} = A(t)x$ e $\dot{y} = B(t)y$ são t-semelhantes se $A(t)$ e $B(t)$ são t-semelhantes. Podemos passar de um sistema $\dot{x} = A(t)x$ para um outro $\dot{y} = B(t)y$ que lhe é t-semelhante fazendo a substituição $y = S(t)x$. De fato,

$$\dot{y} = \dot{S}(t)x + S(t)\dot{x} = \dot{S}(t)x + S(t)A(t)x =$$

$$= (\dot{S}(t) + S(t)A(t))x = B(t)S(t)x = B(t)y$$

Assim se $X(t)$ é uma matriz fundamental do sistema $\dot{x} = A(t)x$ então $Y(t) = S(t)X(t)$ o é de $\dot{y} = B(t)y$.

Dizemos que o sistema $\dot{x} = A(t)x$ é *redutível* se a matriz $A(t)$ é t-semelhante a uma matriz constante C e *redutível a zero* se C é igual à matriz zero.

Uma classe importante de sistemas redutíveis é a dos sistemas de coeficientes periódicos.

Teorema - Se $\dot{x} = A(t)x$ e $A(t + \omega) = A(t)$ *com* $\omega > 0$ *então este sistema é redutível.*

Prova

Seja $U(t)$ a matriz fundamental satisfazendo $U(0) = I$ e definamos $S(t) = U(t) \exp[(-t\omega^{-1}) \ell n\, U(\omega)]$.

Esta definição faz sentido porque sendo $\det U(\omega) \neq 0$ então existe $\ell n\, U(\omega)$. Como $U(t+\omega) = U(t)U(\omega)$ porque são matrizes fundamentais que coincidem para $t = 0$, segue que

$$S(t+\omega) = U(t+\omega)\exp[-(t+\omega)\omega^{-1}\ell n\, U(\omega)] =$$

$$= U(t)U(\omega)\exp[-\ell n\, U(\omega)]\exp[-t\omega^{-1}\ell n\, U(\omega)] =$$

$$= U(t)\exp[-t\omega^{-1}\ell n\, U(\omega)] = S(t)$$

Como $\det S(t) \neq 0$ para todo $t \geq 0$ e $S(t)$ é periódica resulta que $S(t)$ e $S^{-1}(t)$ são limitadas. Agora,

$$\dot{S}(t) = A(t)U(t)\exp[-t\omega^{-1}\ell n\, U(\omega)] -$$

$$- U(t)\omega^{-1}\ell n\, U(\omega)\exp[-t\omega^{-1}\ell n\, U(\omega)],$$

ou seja

$$\dot{S}(t) = A(t)S(t) - S(t)[\omega^{-1}\ell n\, U(\omega)].$$

Logo $A(t) \sim C$ onde $C = \omega^{-1}\ell n\, U(\omega)$

Para mais detalhes sobre sistemas t-semelhantes, ver [8].

(c) Estabilidade para sistemas lineares

Dizemos que um sistema de equações diferenciais goza de um determinado tipo de estabilidade se todas as soluções do sistema gozarem do mencionado tipo de estabilidade.

Para os sistemas lineares a seguinte propriedade é verdadeira.

Teorema 1 - *Num sistema linear se a solução $x = 0$ gozar de um dos tipos de estabilidade mencionados no Capítulo* 1, *item b, então o sistema goza do mencionado tipo de estabilidade, ou seja, o mesmo tipo de estabilidade se verifica para todas as soluções do sistema.*

A prova se baseia no fato de ser

$$x(t,t_o,\alpha x_o + \beta y_o) = \alpha x(t,t_o,x_o) + \beta x(t,t_o,y_o)$$

para sistemas lineares.

Para sistemas lineares a estabilidade no sentido de Liapunov é equivalente a serem todas as soluções limitadas no futuro; isto decorre do teorema seguinte:

Teorema 2 - O sistema $\dot{x} = A(t)x$ *é estável no sentido de Liapunov se, e somente se, dada uma matriz fundamental qualquer* $U(t)$, *existe constante* M *tal que* $|U(t)| \leq M$ *para* $t \geq 0$.

Prova

Dado $t_o \geq 0$, seja $U(t)$ a matriz fundamental satisfazendo $U(t_o) = I$. Para duas soluções quaisquer $x(t)$ e $\tilde{x}(t)$ temos sempre $x(t) = \tilde{x}(t) + U(t)[x(t_o) - \tilde{x}(t_o)]$. Assim, se $|U(t)| \leq M$ para $t \geq 0$ resulta

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq |U(t)||x(t) - \tilde{x}(t)| \leq M|x(t_o) - \tilde{x}(t_o)|.$$

Isto implica a estabilidade do sistema.

Seja a solução $x = 0$ estável. Então existe $\delta > 0$ tal que, para toda solução $x(t)$ satisfazendo $|x(0)| < 2\delta$, resulta $|x(t)| < 1$ para $t \geq 0$. Tomando $x(t) = \delta x^i(t)$, $x^i(t)$ sendo a coluna i de $U(t)$, temos $|x(0)| = \delta$, o que implica $|x(t)| < 1$ e, portanto, $|x^i(t)| < \delta^{-1}$ para $t \geq 0$. Logo $|U(t)| < n\delta^{-1}$ para $t \geq 0$.

É imediato que a existência de uma matriz fundamental limitada implica que todas as matrizes fundamentais o sejam.

Chamamos a atenção do leitor para notar que a constante M considerada no teorema anterior depende, em geral, de t_o e assim o δ que se toma na demonstração é um $\delta(\varepsilon,t_o)$. Isto significa que as soluções podem ser limitadas sem que o sistema seja uniformemente estável, como já vimos nos dois primeiros exemplos do Capítulo I, item c. Uma condição equivalente à estabilidade uniforme é dada no teorema seguinte. Observamos, com vistas ao próximo teorema, que se $U(t)$ e $V(t)$ são duas matrizes fundamentais de um sistema linear, então $U(t)U^{-1}(s) = V(t)V^{-1}(s)$ para quaisquer s, t. Isto segue do fato de existir uma matriz constante C tal que $V(t) = U(t)C$.

Teorema 3 - O sistema $\dot{x} = A(t)x$ *é uniformemente estável se, e somente se, existe constante* M *tal que* $|U(t)U^{-1}(s)| \leq M$ *para* $0 \leq s \leq t$, *onde* $U(t)$ *é uma matriz fundamental qualquer.*

Prova

Dadas duas soluções $x(t)$ e $\tilde{x}(t)$ do sistema linear temos que $x(t) - \tilde{x}(t) = U(t)U^{-1}(t_o)[x(t_o) - \tilde{x}(t_o)]$. Assim se $|U(t)U^{-1}(s)| \leq M$ para $0 \leq s \leq t$ resulta

$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq |U(t)U^{-1}(t_o)||x(t_o) - \tilde{x}(t_o)| \leq M|x(t_o)-\tilde{x}(t_o)|$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon/M$, que não depende de t_o, e isto garante a estabilidade uniforme de $x = 0$.

Seja a solução $x = 0$ uniformemente estável. Então, dado s, existe δ independente de s tal que $|x(s)|<2\delta$ implica $|x(t)| < 1$ para $t \geq s$. Seja e_j a matriz $n \times 1$ cuja j-ésima linha é 1 e os demais elementos zero. Resulta pois $|\delta e_j| < 2\delta$, que implica $|U(t)U^{-1}(s)\delta e_j| < 1$ para $t \geq s$. Logo $|$coluna j de $U(t)U^{-1}(s)| < \delta^{-1}$ para $t \geq s$, ou seja

$$|U(t)U^{-1}(s)| < n\delta^{-1} \quad \text{para} \quad t \geq s.$$

Para os sistemas $\dot{x} = Ax$, A matriz constante, pode mos obter informações muito precisas sobre os diferentes tipos de estabilidade; algumas delas sendo casos particulares das propriedades citadas no fim do Capítulo 2.

Teorema 4 - Se o sistema $\dot{x} = Ax$ *é estável então ele é uniformemente estável.*

Prova

Pondo $U(t) = \exp tA$ vem que

$$U(t)U^{-1}(s) = [\exp tA][\exp(-s)A] = \exp(t-s)A = U(t-s)$$

Logo $|U(t)| \leq M$ para $t \geq 0$ implica

$$|U(t)U^{-1}(s)| = |U(t-s)| \leq M \quad \text{para} \quad t \geq s.$$

Para sistemas lineares de coeficientes constantes o seguinte teorema é central no que se refere à estabilidade no sentido de Liapunov e, portanto, à estabilidade uniforme.

Teorema 5 - O sistema $\dot{x} = Ax$ *é estável se, e somente se os números característicos de* A *têm parte real menor ou igual a zero e aqueles para os quais a parte real é igual a zero têm a multiplicidade coincidindo com a nulidade.*

Prova

O teorema é uma conseqüência imediata da análise da matriz fundamental $U(t) = P \exp tJ$ onde as matrizes P e J são as consideradas na forma canônica de Jordan, e do Teorema 2.

Para os outros tipos de estabilidade em sistemas lineares de coeficientes constantes o seguinte teorema é fundamental.

Teorema 6 - Se o sistema $\dot{x} = Ax$ *é assintòticamente estável então ele é exponencialmente assintòticamente estável.*

Prova

O fato de a solução $x = 0$ ser assintòticamente estável implica que todas as soluções tendem para o vetor zero com $t \to \infty$. Logo os números característicos de A têm parte real negativa o que implica, em vista do que foi mostrado no fim do item a, a existência de constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que $|\exp tA| \leq \beta e^{-\alpha t}$ para $t \geq 0$. Portanto, dados $\varepsilon > 0$ e $\delta = \frac{\varepsilon}{\beta}$, vem que $|x_o| < \delta$ implica $|x(t,t_o,x_o)| = |[\exp(t-t_o)A]x_o| \leq |\exp(t-t_o)A||x_o| \leq \leq \beta e^{-\alpha(t-t_o)}|x_o| < \varepsilon e^{-\alpha(t-t_o)}$ para $t \geq t_o$.

Como para sistemas lineares é óbvio que estabilidade assintótica e estabilidade global coincidem temos então, em vista de resultados acima, o seguinte

Corolário 1 - Para sistemas lineares de coeficientes constantes $\dot{x} = Ax$, *as seguintes implicações entre os diferentes tipos de estabilidade são verdadeiras:*

$$(8) \iff (7) \iff (6) \iff (5) \iff (4) \iff (3) \quad \text{e} \quad (2) \iff (1)$$

Se o sistema $\dot{x} = A(t)x$ é redutível então existem matriz constante C e matriz $S(t)$, com $\dot{S}(t)$ contínua, $S(t)$ e $S^{-1}(t)$ limitadas em $[0,\infty)$, de modo que pela transformação $y = S(t)x$ passamos do sistema $\dot{x} = A(t)x$ para $\dot{y} = Cy$. Então se $X(t)$ é uma matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$, resulta que

$Y(t) = S(t)X(t)$ é matriz fundamental de $\dot{y} = Cy$ e

$$|Y(t)| \le |S(t)||X(t)| \le M|X(t)|,$$

$$|X(t)| \le |S^{-1}(t)||Y(t)| \le M|Y(t)|,$$

$$M = \sup\{|S(t)| + |S^{-1}(t)|\} < \infty$$

As relações acima nos permitem afirmar que se o sistema $\dot{x} = A(t)x$ goza de um dos tipos de estabilidade mencionados no Capítulo I, item b, então o sistema $\dot{y} = Cy$ goza do mesmo tipo de estabilidade.

Esta observação, juntamente com o Corolário 1, nos leva ao seguinte

Corolário 2 - Na classe dos sistemas lineares redutíveis e, em particular, na classe dos sistemas lineares de coeficientes periódicos, as seguintes implicações entre os diferentes tipos de estabilidade são verdadeiras:

$$(8) \Longleftrightarrow (7) \Longleftrightarrow (6) \Longleftrightarrow (5) \Longleftrightarrow (3) \text{ e } (2) \Longleftrightarrow (1)$$

Para sistemas lineares em geral é possível mostrar que (6) e (7) são equivalentes. [24-b-, Teorema 7].

Para o caso especial dos sistemas lineares podemos introduzir o conceito de sistema restritamente estável. Dizemos que o sistema $\dot{x} = A(t)x$ é *restritamente estável* se dada uma matriz fundamental $U(t)$ existe constante M tal que $U(t) \le M$ e $U^{-1}(t) \le M$ para $t \ge 0$. É óbvio que todo sistema restritamente estável é uniformemente estável mas um sistema pode ser uniformemente estável sem gozar da estabilidade restrita. É o que nos mostra o exemplo $x = -x$, x escalar. Podemos caracterizar em termos de t-semelhança a classe dos sistemas que gozam de estabilidade restrita.

Teorema 7 - Um sistema linear é restritamente estável se e somente se é redutível a zero.

Prova

Se o sistema $\dot{x} = A(t)x$ é redutível a zero então ele é restritamente estável porque o sistema $\dot{x} = 0x$, matriz zero, $n \times n$, é restritamente estável. Se o sistema é restritamente estável então, para qualquer matriz fundamental $U(t)$ resulta $U(t)$ e $U^{-1}(t)$ limitadas. Usando, na definição de t-semelhança, $S(t) = U(t)$ decorre a redutibilidade a zero sistema.

Para sistemas lineares uniformemente estáveis não podemos garantir nem mesmo que o sistema seja redutível. Isto podemos ver no exemplo $(n = 1)$, $\dot{x} = -t^{-1}x$, $t \geq 1$, do qual t^{-1} é uma solução com $t^{-1}s \leq 1$ para $1 \leq s \leq t$ e, portanto, uniformemente estável. Entretanto este sistema não é redutível porque a equação, $(n = 1)$, $\dot{S} + CS + t^{-1}S = 0$, com C constante, tem para solução geral $S(t) =$ constante $t^{-1}\exp[-C(t-1)]$ e não existe $S(t)$ com $S(t)$ e $S^{-1}(t)$ limitadas qualquer que seja C.

Seja $\dot{x} = A(t)x$ um sistema estável. Se para uma matriz fundamental $U(t)$ temos $|\det U(t)| \geq \delta > 0$ em $[0,\infty)$, decorre que $U^{-1}(t)$ é também limitada e portanto o sistema é restritamente estável. Esta observação juntamente com a fórmula de Jacobi-Liouville nos leva ao seguinte teorema.

Teorema 8 - Se o sistema $\dot{x} = A(t)x$ *é estável e se* $\lim_{t\to\infty} \mathrm{Real} \int_0^t \mathrm{tr}A(s)ds \geq \delta > -\infty$ *então o sistema dado é restritamente estável.*

Num sistema linear de coeficientes constantes $\dot{x} = Ax$ vimos que o fato de os números característicos de A terem parte real negativa implica a estabilidade assintótica exponen cial do sistema. Consideremos agora um sistema $\dot{x} = A(t)x$ e sejam $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ os números característicos de $A(t)$ no instante t. Não podemos garantir que a existência de um $\alpha > 0$ tal que $\text{Real}\{\lambda_j(t)\} < -\alpha$ para todo $j = 1, \ldots, n$, $t \geq 0$ implique, necessariamente, nem mesmo a simples estabilidade no sentido de Liapunov, mesmo que $A(t)$ seja periódico. Vamos ver isto no seguinte exemplo

Seja $\dot{x} = A_a(t)x$, onde

$$A_a(t) = \begin{bmatrix} -1 + a\cos^2 t & 1 - a \operatorname{sen} t \cos t \\ -1 - a \operatorname{sen} t \cos t & -1 + a \operatorname{sen}^2 t \end{bmatrix}$$

Um simples cálculo mostra que as soluções de $\det[A_a(t) - \lambda I] = 0$ são dadas por $\lambda_a(t) = \frac{a-2 \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$, que são os números característicos de $A_a(t)$. Por uma verificação direta vemos que $\varphi(t) = \text{col}(-e^{(a-1)t}\cos t,\ e^{(a-1)t}\operatorname{sen} t)$ é uma solução do sistema. É imediato que se tomarmos uma constante a satisfazendo $1 < a < 2$ segue que $\text{Real}\{\lambda_a(t)\} = \frac{a-2}{2} < 0$ e $\varphi(t)$ é não limitado em $[0,\infty)$. Donde o sistema não é estável.

Vamos no entretanto mostrar que os números característicos instantâneos da matriz $\frac{1}{2}[A(t) + A'(t)]$ podem nos dar informações sobre a estabilidade do sistema $\dot{x} = A(t)x$. (Estamos usando a notação z' para indicar a matriz transposta da z).

Seja $A = A(t)$ real. Definimos $A^o = \frac{1}{2}(A + A')$. Para cada t, $A^o = A^o(t)$ é simétrica e $A^o - A^o = \frac{1}{2}(A - A')$ é alternada. Então $x'Ax = x'A^o x$, $\text{tr}A = \text{tr}A^o$ e os números característicos de A^o são reais. Sejam, para cada t, $\lambda(t)$ e $\mu(t)$, respectivamente, o menor e o maior número característico de $A^o = A^o(t)$.

Temos pois que $r^2(t) \le x'Ax \le r^2(t)$, $r^2 = x'x$. Assim,

$$r^2\lambda(t) \le x'Ax \le r^2\mu(t) \quad e \quad n\lambda(t) \le trA(t) \le n\mu(t).$$

Com esta introdução estamos em condição de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 9 - Se $\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t \mu(s)ds < \infty$, *o sistema* $\dot{x}=A(t)x$ *é estável. Se também tivermos* $\underline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t \lambda(s)ds > -\infty$ *então o sistema é restritamente estável.*

Prova:

Para toda solução $x = x(t)$ diferente da solução zero, $r^2 = x'x \neq 0$ para todo $t \ge 0$. Assim, $\frac{d}{dt}t^2 = 2x'x = 2x'Ax$. Portanto $\lambda(t) \le \frac{1}{2}r^{-2}\frac{d}{dt}r^2 \le \mu(t)$, ou seja, $\lambda(t) \le \frac{\dot{r}}{r} \le \mu(t)$.

Isto implica $r(0)\exp\int_0^t \lambda(s)ds \le r(t) \le r(0)\exp\int_0^t \mu(s)ds$.

Da primeira hipótese decorre a estabilidade do sistema por causa do Teorema 2. Como $n \underline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t \lambda(s)ds \le \underline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t trA(s)ds$, decorre das duas hipóteses feitas que o sistema goza da estabilidade restrita em vista do Teorema 8.

Vamos dar a seguir algumas informações sobre o problema da estabilidade no sentido de Liapunov e estabilidade uniforme no caso de um sistema que foi obtido como perturbado de um sistema linear.

Teorema 10 - O sistema $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ *é estável (uniformemente estável) se e somente se o sistema* $\dot{y} = A(t)y$ *é estável (uniformemente estável).*

Prova:

Sejam $y(t)$ e $\tilde{y}(t)$ soluções do sistema $\dot{y} = A(t)y$, $x(t)$ e $\tilde{x}(t)$ soluções do sistema $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, de modo que $y(t_o) = x(t_o)$ e $\tilde{y}(t_o) = \tilde{x}(t_o)$. Então $x(t) - \tilde{x}(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ porque ambos os membros são soluções do sistema $\dot{x} = A(t)x$ que coincidem em t_o. O afirmado no teorema é uma decorrência imediata deste fato.

Vimos que o sistema $\dot{y} = A(t)y$ é estável se e somente se todas as soluções são limitadas. Mas, o sistema $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ pode ser estável sem que as suas soluções sejam limitadas. Veja-se, por exemplo, a equação $\dot{x} = 1$ cujas soluções $x = t+$ constante não são limitadas e que é estável porque $\dot{y} = 0$ é estável.

Se o sistema $\dot{x} = A(t)x$ é estável e se $B(t)$ é matriz $n \times n$ satisfazendo $\int_0^\infty |B(t)|dt < \infty$, não podemos garantir a estabilidade do sistema $\dot{x} = [A(t) + B(t)]x$ mesmo que a estabilidade de $\dot{x} = A(t)x$ seja assintótica. Veja-se, por exemplo, [2, Teorema 5, pg. 42]. Mas, para estabilidade uniforme o seguinte teorema é válido:

Teorema 11 - Se o sistema $\dot{y} = A(t)y$ *é uniformemente estável e se* $\int^\infty |B(t)|dt < \infty$ *então o sistema* $\dot{x} = [A(t) + B(t)]x$ *é uniformemente estável.*

Prova

Seja $Y(t)$ uma matriz fundamental de $\dot{y} = A(t)y$. Então para o sistema $\dot{x} = [A(t) + B(t)]x$ vem que

$$x(t,t_o,x_o) = Y(t)Y^{-1}(t_o)x_o + \int_{t_o}^{t} Y(t)Y^{-1}(s)B(s)x(s,t_o,x_o)ds$$

$$|x(t,t_o,x_o)| \le Y(t)Y^{-1}(t_o)||x_o| + \int_{t_o}^{t} |Y(t)Y^{-1}(s)||B(s)||x(s,t_o,x_o)|ds$$

para $t \ge t_o \ge 0$. Como $\dot{y} = A(t)y$ é uniformemente estável existe M tal que $|Y(t)Y^{-1}(s)| \le M$ para $t \ge s \ge 0$. Logo

$$|x(t,t_o,x_o)| \le M\,|x_o| + \int_{t_o}^{t} M|B(s)||x(s,t_o,x_o)|ds.$$

Do Lema de Gronwall

$$|x(t,t_o,x_o)| \le M|x_o| \exp\int_{t_o}^{t} M|B(s)|ds \le K|\,x_o|$$

onde
$$K = M \exp\int_{t_o}^{\infty} M|B(s)|ds < \infty$$

Logo temos a estabilidade uniforme.

Na verdade podemos demonstrar um teorema muito mais forte que o acima com perturbações não necessariamente lineares. Mas, neste caso, a demonstração é bem mais elaborada, requerendo um instrumental matemático mais fino. Este resultado, devido a N. Onuchic [26-a-], estabelece o seguinte:

Seja $\dot{y} = A(t)y$ uniformemente estável. Seja $f(t,x)$ definida para $t \ge 0$, $|x| < \infty$, tal que para todo $M > 0$ existe $h_M(t) \ge 0$ satisfazendo $\int_0^{\infty} h_M(t)dt < \infty$ e $|f(t,x)| \le h_M(t)$ para $t \ge 0, |x| \le M$. Então toda solução $x(t)$ de $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$; limitada em um intervalo $[\alpha,\infty)$, é uma solução uniformemente estável em $[\alpha,\infty)$.

No caso particular de $|f(t,x)| \le h(t)|x|$, com $\int_0^{\infty} h(t)dt < \infty$, a hipótese acima sobre $f(t,x)$ está satisfeita e, supondo ainda que $\dot{y} = A(t)y$ seja uniformemente estável, podemos provar usando o Lema de Gronwall, que toda solução de $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$ é limitada no futuro. Portanto toda solução deste sistema é limitada e uniformemente estável em algum intervalo $[\alpha,\infty)$.

Uma generalização de resultados de [26-a-], considerando-se sistemas não lineares perturbados, foi feita por Strauss [27].

No capítulo IV vamos estudar problemas de estabilidade de sistemas perturbados de sistemas lineares exponencialmente assintoticamente estáveis.

Para uma ampla indicação bibliográfica temos [6] e [11].

CAPÍTULO 3

SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV

(a) Critérios de estabilidade e instabilidade com o uso de funções de Liapunov.

O segundo método de Liapunov consiste em estabelecer critérios de estabilidade e instabilidade da solução $x = 0$ de um sistema $\dot{x} = f(t,x)$, com o uso de funções auxiliares, chamadas funções de Liapunov, sem que se necessite encontrar soluções particulares do sistema dado, isto é, sem que se necessite explicitar as soluções da equação. Este método, que foi introduzido por Liapunov em seu livro [21 - a], não foi devidamente apreciado por muito tempo. A situação, de alguns anos para cá, é porém completamente outra. Podemos dizer que as funções de Liapunov são hoje o principal instrumento para o estudo de problemas de estabilidade.

Com o ojetivo de não exigir que as funções de Liapunov sejam necessariamente diferenciáveis, vamos considerar a derivada de uma função escalar tomada no seguinte sentido:

Seja $\psi(t)$ contínua em $[a,b]$, $b \leq \infty$. Dado t, $a \leq t \leq b$, definimos $\dot{\psi}(t) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \dfrac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h}$, onde admitimos as possibilidades $\dot{\psi}(t) = \pm\infty$

Então $\dot{\psi}(t)$ existe sempre e, no caso de ser diferenciável no ponto t, $\dot{\psi}(t)$ coincide com o conceito de derivada tomado no sentido usual.

Os seguintes lemas são verificados:

Lema 1 - Seja $\psi(t)$ *contínua com* $\dot{\psi}(t) \leq 0\{\dot{\psi}(t) \geq 0\}$ *em* $[a,b)$. *Então* $\psi(t)$ *é não crescente* {*não decrescente*} *em* $[a,b)$.

Prova

Consideremos o caso $\dot{\psi}(t) \leq 0$. O caso $\dot{\psi}(t) \geq 0$ é análogo. Sejam t_1, t_2 quaisquer satisfazendo $a \leq t_1 \leq t_2 < b$. Mostremos que $\psi(t_2) \leq \psi(t_1)$. Dado $\varepsilon > 0$, vamos mostrar que $\psi(t_2) - \psi(t_1) \leq \varepsilon(t_2 - t_1)$. Supomos que isto não seja verdadeiro, isto é, $\psi(t_2) - \psi(t_1) > \varepsilon(t_2 - t_1)$.

Seja $\phi(t) = \psi(t) - \psi(t_1) - \varepsilon(t - t_1)$. Temos $\phi(t_2) > 0$.

Como $\dot{\psi}(t_1) \leq 0$ existem pontos t, $t_1 < t < t_2$, satisfazendo $\dfrac{\psi(t) - \psi(t_1)}{t-t_1} < \varepsilon$ e, portanto, $\phi(t) < 0$.

Logo existem pontos τ, $t_1 < \tau < t_2$, satisfazendo $\phi(\tau) = 0$. Seja $\xi = \sup\{\tau \in (t_1,t_2) \mid \phi(\tau) = 0\}$.

Então $\phi(\xi) = 0$ e $\phi(t) > 0$ para $\xi < t \leq t_2$.

Isto implica $\dot{\phi}(\xi) \geq 0$ e, por conseguinte, $\dot{\phi}(\xi) = \dot{\psi}(\xi) - \xi \geq 0$, ou seja $\dot{\psi}(\xi) \geq \varepsilon$. Como isto não é possível segue que $\psi(t_2) - \psi(t_1) \leq \varepsilon(t_2 - t_1)$.

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ segue que $\psi(t_2) \leq \psi(t_1)$.

Lema 2 - Seja $\psi(t)$ *contínua com* $\dot{\psi}(t) \leq -\alpha$, $\{\dot{\psi}(t) \geq \alpha\}$ $\alpha > 0$, *em* $[a,b)$. *Então* $\psi(t) \leq \psi(t_o) - \alpha(t - t_o)$, $\{\psi(t) \geq \psi(t_o) + \alpha(t - t_o)\}$, $a \leq t_o \leq t < b$.

Prova

Consideremos o caso $\dot{\psi}(t) \leq -\alpha$. O outro é análogo. Tomemos a função $\psi(t) = \psi(t) + \alpha t$.

Temos que $\dot{\psi}(t) = \dot{\varphi}(t) + \alpha \leq 0$. Do Lema 1 segue que $a \leq t_o \leq t < b$ implica $\psi(t) \leq \psi(t_o)$, ou seja $\varphi(t)+\alpha t \leq \varphi(t_o)+\alpha t_o$.

Vamos supor que $f(t,x)$ seja contínua em $E = [0,\infty) \times \Gamma_H$, $f(t,0) = 0$ e que por todo $(t_o,x_o) \in E$ passe uma única solução do sistema dado.

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad (*)$$

A função $V(t,x)$ é dita *definida positiva* se existir função contínua $W(x)$, $x \in \Gamma_H$, com $W(x) > 0$ para $x \neq 0$ tal que $V(t,x) \geq W(x)$ para todo $x \in \Gamma_H$. A função $V(t,x)$ é dita *definida negativa* se $V(t,x)$ é definida positiva.

Está implícito que $W(0) = 0$ pois $0 = V(t,0) \geq W(0) \geq 0$.

Vê-se que para $V = V(x)$, contínua, ser definida positiva devemos ter $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ para $x \neq 0$.

Quando a solução $x = 0$ de $(*)$ goza de um determinado tipo de estabilidade dizemos também que a origem é um ponto de equilíbrio gozando do respectivo tipo de estabilidade.

No que segue suporemos sempre que as funções $V = V(t,x) = V(t,x_1, \ldots, x_n)$ definidas em E satisfaçam $V(t,0) = 0$.

Dados $t_o \geq 0$, $x_o \in \Gamma_H$ e $V(t,x)$ uma função contínua em E pomos, por definição, $\dot{V}(t_o,x_o) = \dot{v}(t_o)$ onde $v(t) = V(t,x(t))$, isto é,

$$\dot{V}(t_o,x_o) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}[V(t_o + h, x(t_o + h)) - V(t_o,x_o)],$$

onde $x(t) = x(t,t_o,x_o)$ é solução de $(*)$.

Quando $V = V(t,x)$ é de classe C^1 em E, ou seja os $\frac{\partial V}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$, $\frac{\partial V}{\partial t}$, são contínuas, então temos que

$$\dot{V}(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_j} f_j(t,x) + \frac{\partial V(t,x)}{\partial t}$$

$$\dot{V}(t_o,x_o) = \frac{d}{dt}[V(t,x(t))]_{t=t_o}$$

Teorema 1 - (Primeiro Teorema de Liapunov, sobre estabilidade)

Supomos que o sistema (*) *admite uma função* V(t,x) *continua definida positiva, com* $\dot{V}(t,x) \leq 0$.

Então a solução $x = 0$ *do sistema* (*) *é estavel no sentido de Liapunov.*

Prova

Dado $\varepsilon > 0$, seja $\eta = \inf_{|x|=\varepsilon} W(x)$; η é positivo no conjunto compacto $|x| = \varepsilon$. Dado $t_o \geq 0$ existe $\delta = \delta_1(\eta,t_o) < \varepsilon$ tal que $|x_o| < \delta$ implica $V(t_o,x_o) > \eta$. Como $\eta = \eta(\varepsilon)$ vem que $\delta = \delta(\varepsilon,t_o)$. Garantimos que $|x_o| < \delta$ implica $|x(t)| < \varepsilon$ para $t \geq t_o$, onde $x(t) = x(t,t_o,x_o)$. De fato, do contrário existe $t_1 > t_o$ com $|x(t_1)| = \varepsilon$ e, portanto

$$V(t_1,x(t_1)) \geq W(x(t_1)) \geq \eta > V(t_o,x(t_o)).$$

Logo, pelo Lema 1, existe s, $t_o < s < t_1$, satisfazendo:

$$\dot{V}(s,x(s)) = [\frac{d}{dt}V(t,x(t)]_{t=s} > 0,$$

o que não é possível. Portanto, $x = 0$ é estável.

Para sistemas autônomos, isto é, $f(t,x) = g(x)$, o primeiro Teorema de Liapunov nos dá um critério para estabilidade uniforme porque, como já vimos, para tais sistemas os conceitos de estabilidade e estabilidade uniforme coincidem.

Se $V_j = V_j(t,x)$, $j = 1,\ldots,p$, tem a propriedade de serem constantes ao longo das curvas soluções de (*) então

$V = V(t,x) = F(V_1,\ldots,V_p)$ também será constante ao longo das curvas soluções e, portanto, $\dot{V}(t,x) \equiv 0$. Então a condição $\dot{V}(t,x) \leq 0$ do Teorema 1 estará neste caso satisfeita. Uma idéia natural ao se aplicar o Teorema 1 é, pois, tentar achar funções $V_j = V_j(t,x)$ com a propriedade mencionada e procurar $F(z_1,\ldots,z_p)$ de modo que $V = F(V_1,\ldots,V_p)$ seja definida positiva.

Exemplo 1 - Mostrar que a origem é um ponto de equilíbrio estável para o sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1(x_2)^4 h(t,x_1,x_2)$$
$$\dot{x}_2 = x_2(x_1)^4 h(t,x_1,x_2)$$

Solução - Seja $(x_1(t),x_2(t))$ uma solução qualquer do sistema. Então

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t)[x_2(t)]^4 h(t,x_1(t),x_2(t))$$

e

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t)[x_1(t)]^4 h(t,x_1(t),x_2(t))$$

Logo $\dot{x}_1(t)[x_1(t)]^3 + \dot{x}_2(t)[x_2(t)]^3 = 0$ e, portanto, $[x_1(t)]^4 + x_2(t)^4 =$ constante. Então $V = V(x) = [x_1]^4 + [x_2]^4$ é definida positiva com $\dot{V}(x) = 0$. Assim, a origem é um ponto de equilíbrio estável como conseqüência do Teorema 1.

Exemplo 2 - Vamos estudar a estabilidade de pontos de equilíbrio do sistema:

$$a\dot{p} + (c-b)q^r = 0$$

$$b\dot{q} + (a-c)p^r = 0$$

$$c\dot{r} + (b-a)p^q = 0$$

Observação - Este sistema dá as chamadas equações de Euler para rotação de um corpo rígido, em torno de seu centro de gravidade, no caso particular de ausência de forças externas. As variáveis p, q, r são as coordenadas segundo três eixos centrais de inércia e as constantes a, b, c são os respectivos momentos centrais de inércia.

Vamos considerar os pontos de equilíbrio da forma $(0,0,r_o)$. É imediato ver que a origem $(p,q,r) = (0,0,0)$ é sempre um ponto de equilíbrio uniformemente estável. Para tanto basta tomar como função de Liapunov $V = ap^2 + bq^2 + cr^2$ para a qual temos $\dot{V} = 0$ e aplicando o Teorema 1. Consideremos pois o caso em que $r_o \neq 0$. Vamos mostrar que se $(a-c)(b-c) > 0$ então $(0,0,r_o)$ é um ponto de equilíbrio uniformemente estável.

Fazemos a mudança de variáveis $x = p$, $y = q$ e $z = r - r_o$; resulta

$$a\dot{x} + (c-b)y(z + r_o) = 0$$

$$b\dot{y} + (a-c)x(z + r_o) = 0$$

$$c\dot{z} + (b-a)xy = 0$$

O nosso problema é então mostrar que a origem do novo sistema é um ponto de equilíbrio uniformemente estável.

Seja $(x(t), y(t), z(t))$ uma solução qualquer do sistema. Então

$$a\frac{\dot{x}(t)x(t)}{b-c} + b\frac{\dot{y}(t)y(t)}{a-c} = 0$$

e, portanto, $\frac{a}{b-c}x^2(t) + \frac{b}{a-c}y^2(t) = \text{constante}$.

Assim $V_1 = V_1(x,y,z) = \frac{a}{b-c}x^2 + \frac{b}{a-c}y^2$ satisfaz $\dot{V}_1(x,y,z) = 0$ mas não é definida positiva. Procuramos pois uma função V_2 com $\dot{V}_2 = 0$ e uma $F(z_1,z_2)$ tal que $V = F(V_1,V_2)$ seja definida positiva.

Temos que

$$a\dot{x}(t)x(t) + (c-b)x(t)y(t)[z(t) + r_o] = 0$$

$$b\dot{y}(t)y(t) + (a-c)x(t)y(t)[z(t) + r_o] = 0$$

$$c\dot{z}(t)z(t) + (b-a)x(t)y(t)z(t) = 0$$

A adição destas relações nos conduz a

$$ax(t)\dot{x}(t) + by(t)\dot{y}(t) + cz(t)\dot{z}(t) + (a-b)x(t)y(t)r_o =$$

$$= ax(t)\dot{x}(t) + by(t)\dot{y}(t) + cz(t)\dot{z}(t) + c\dot{z}(t)r_o = 0$$

Portanto, $ax^2(t) + by^2(t) + cz^2(t) + 2cz(t)r_o = \text{constante}$. Assim, $V_2 = V_2(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2czr_o$ satisfaz $\dot{V}_2(x,y,z) = 0$ mas não é definida positiva. Todavia a função $V = V(x,y,z) = [V_1]^2 + [V_2]^2$ é definida positiva no conjunto $E = [0,\infty) \times \Gamma_H$; $H = |r_o|$ e $\dot{V}(x,y,z) = 0$. Logo a origem é um ponto de equilíbrio estável.

Exemplo 3 - Consideremos um sistema dinâmico conservativo com n graus de liberdade. O estado do sistema pode ser descrito por

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1,\dots n.$$

$$H = H(p,q) = H(p_1,\dots,p_n, q_1,\dots,q_n)$$

é tal que $H(0,0) = 0$ e representa a energia total do sistema.

Consideremos a origem um ponto de equilíbrio isolado, isto é, na origem temos $\frac{\partial H}{\partial p_j} = 0, \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$, $j = 1,\dots,n$ e

$(\frac{\partial H}{\partial p_1},\ldots,\frac{\partial H}{\partial p_n},\frac{\partial H}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial H}{\partial q_n}) \neq 0$ numa vizinhança da origem, excluída a origem. Podemos escrever $H(p,q) = T(p) + U(q)$ onde $T(p)$ é a energia cinética e $U(q)$ a energia potencial. Se a energia potencial tem um mínimo isolado em $q = 0$, então $U(q)$ é definida positiva em relação a q. Como $T(p)$ é sempre definida positiva em relação p, temos $V = H(p,q)$ definida positiva. Num campo conservativo a energia é constante ao longo de qualquer trajetória, portanto $\dot{V} = 0$. Logo a origem é um ponto de equilíbrio uniformemente estável. Este resultado é o conhecido Teorema de Lagrange, que podemos enunciar assim:

Se num sistema conservativo um ponto de equilíbrio é de mínimo isolado para a energia potencial, então esse ponto de equilíbrio é estável.

Exercício - Seja $\ddot{x} + g(x) = 0$, onde $g(x)$ é diferenciável e x escalar. Supondo $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$, mostrar que a origem $(x,\dot{x}) = (0,0)$ é um ponto de equilíbrio estável.

O teorema seguinte é um critério para estabilidade uniforme. Primeiro precisamos introduzir um novo conceito.

A função $V(t,x)$ tem *extremo superior infinitésimo* se existir função contínua $\psi(x)$, $\psi(0) = 0$, tal que $|V(t,x)| \leq \psi(x)$ em E. No caso $V = V(x)$ esta condição fica apenas $V(0) = 0$.

Teorema 2 - Supomos que o sistema (*) *admite uma função* $V(t,x)$ *que é definida com* $\dot{V}(t,x) \leq 0$ *Supomos que* $V(t,x)$ *admite extremo superior infinitésimo. Então a solução* $x = 0$ *é uniformemente estável.*

Prova

No Teorema 1 podemos tomar $\delta = \delta(\varepsilon)$ porque $V(t_o,x_o) \leq \leq \psi(x_o)$ e $\psi(x)$ é contínua com $\psi(0) = 0$.

Seja $x = 0$ solução assintoticamente estável de (*). Dado $t_o \geq 0$, o conjunto

$$D_{t_o} = \{x_o \in R^n | \; x(t,t_o,x_o) \to 0 \quad \text{com} \quad t \to \infty\}$$

é chamado *centro de atração* ou *domínio de estabilidade em* t_o. No caso de estabilidade global temos que $D_{t_o} = R^n$ para todo t_o. No caso de sistemas autônomos, como $x(t)$ solução implica $y(t) = x(t + s)$ também solução, qualquer que seja s, então D_{t_o} é o mesmo para todo t_o e o conjunto acima é simplesmente chamado centro de atração ou domínio de estabilidade.

Teorema 3 - Supomos que o sistema (*) *admite uma função* $V(t,x)$, *definida positiva, com extremo superior infinitésimo e* $\dot{V}(t,x)$ *definida negativa. Então a solução* $x = 0$ *do sistema* (*) *é uniformemente assintoticamente estável.*

Prova

Do teorema 2 segue que $x = 0$ é uniformemente estável. Sendo $V(t,x)$ definida positiva, com extremo superior infinitésimo, existem funções contínuas $W(x)$ e $\psi(x)$ com $W(x) > 0$ para $x \neq 0, \psi(0) = 0$ de modo que $W(x) \leq V(t,x) \leq \psi(x)$, para todo $(t,x) \in E = [0,\infty) \times \Gamma_H$. Sejam H_1, H_2, $0 < H_1 < H_2 < H$, de modo que $\sup_{|x|=H_1} \psi(x) < \inf_{|x|=H_2} W(x)$. É possível encontrar H_1 e H_2 como requeridos. De fato, dado H_2, $0 < H_2 < H$, segue que $\eta = \inf_{|x|=H_2} W(x) > 0$; como $\psi(x)$ é contínua e $\psi(0)=0$ existe H_1, $0 < H_1 < H_2$, tal que $\sup_{|x|=H_1} \psi(x) < \eta$. Temos que se $t_o \geq 0, |x_o| < H_1$, então $|x(t)| < H_2$ para $t_o \leq t < t^+$, onde $x(t) = x(t,t_o,x_o)$. De fato, do contrário existiriam t_1, t_2, $t_o < t_1 < t_2$, com $|x(t_1)| = H_1, |x(t_2)| = H_2$; portanto, $V(t_1, x(t_1)) \leq \psi(x(t_1)) < W(x(t_o)) \leq V(t_2,x(t_2))$ e, por conseguinte, existe um τ, $t_1 < \tau < t_2$, satisfazendo $\dot{V}(\tau,x(\tau)) > 0$, o que nos leva a uma contradição. Logo $|x_o| < H_1$ implica $|x(t)| < H_2$ para $t_o \leq t < \infty$. Como $x = 0$ é uniformemente estável, dado ε, $0 < \varepsilon < H_1$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que $|x_o| < \delta$ implica $|x(t)| < \varepsilon$ para $t_o \leq t < \infty$. Como $\dot{V}(t,x)$ é definida negativa existe $\alpha(x)$ contínua, $\alpha(x) > 0$ para $x \neq 0$, com $\dot{V}(t,x) \leq -\alpha(x)$. Sejam $0 < \gamma = \inf_{\delta \leq |\xi| \leq H_2} \alpha(\xi)$, $M > \sup_{|\xi| \leq H_1} \psi(\xi) > 0$ e $T = \frac{M}{\gamma}$. Temos que T depende de ϵ mas não de $t_o \geq 0$. Garantimos que $|x_o| < H_1$ implica $|x(\tilde{t})| < \delta$ para algum $\tilde{t}$, $t_o \leq \tilde{t} \leq t_o + T$. Supomos que não. Então $\delta \leq |x(t)| \leq H_2$ para $t_o \leq t \leq t_o + T$. Portanto

$$\dot{V}(t,x(t)) \leq -\alpha(x(t)) \leq -\inf_{\delta\leq|\xi|\leq H_2} \alpha(\xi) = -\gamma,$$

para $t_o \leq t \leq t_o + T$. Logo, pelo Lema 2, $V(t,x(t)) \leq V(t_o,x_o) - \gamma(t-t_o)$ para $0 \leq t_o \leq t \leq t_o + T$. Donde $V(t_o+T,x(t_o+T)) \leq \psi(x_o) - \gamma T < M - \gamma T = 0$, o que é absurdo pois $V(t,x) \geq 0$. Logo $|x_o| < \rho = H_1$ implica $|x(t)| < \delta$ para algum $\tilde{t}$, $t_o \leq \tilde{t} \leq t_o + T$ e, portanto, $|x(t)| < \varepsilon$ para $t \geq t_o + T$.

O teorema está assim provado.

Este teorema, com a conclusão apenas de estabilidade, assintótica é conhecido como o segundo teorema de Liapunov, sobre estabilidade.

Observamos da prova acima que, dados H_1 e H_2, como no Teorema 3, o conjunto Γ_{H_1} está contido no centro de atração para qualquer $t_o \geq 0$ ou seja $\Gamma_{H_1} \subset D_{t_o}$. $V(t,x)$ contínua em $[0,\infty) \times R^n$ é dita *infinitamente grande se* existir uma função contínua $\gamma(x)$ satisfazendo $\gamma(x) \to \infty$ com $|x| \to \infty$, tal que $V(t,x) \geq \gamma(x)$. No caso $V = V(x)$, esta condição fica apenas $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty$.

Teorema 4 - Supomos que o sistema (*) *admite uma função* $V(t,x)$, *definida positiva, com extremo superior infinitésimo, infinitamente grande e* $\dot{V}(t,x)$ *definida negativa. Então a solução* $x = 0$ *do sistema* (*) *é globalmente assintóticamente estável.*

Prova

Do fato de ser $V(t,x)$ definida positiva, com extremo superior infinitésimo, existem funções contínuas $W_1(x)$ e

$\psi(x)$ com $W_1(x) > 0$ para $x \neq 0$ e $\psi(0) = 0$, de modo que $W_1(x) \leq V(t,x) \leq \psi(x)$.

Por ser $V(t,x)$ infinitamente grande, existe $\gamma(x)$ contínua satisfazendo $\gamma(x) \to \infty$ com $|x| \to \infty$ tal que $V(t,x) \geq \gamma(x)$. Definindo $W(x) =$ maior $\{W_1(x), \gamma(x)\}$ temos que $W(x) > 0$ para $x \neq 0$, $W(x) \to \infty$ com $|x| \to \infty$ e satisfazendo $W(x) \leq V(t,x) \leq \psi(x)$. Dado pois $H_1 > 0$ qualquer é possível então encontrar $H_2 > H_1$ com $\sup\limits_{|x|=H_1} \psi(x) < \inf\limits_{|x|=H_2} W(x)$.

Como Γ_{H_1} está no centro de atração para todo $t_o \geq 0$ e como H_1 pode ser tomado arbitràriamente positivo, resulta que a solução $x = 0$ do sistema (*) é globalmente assintòticamente estável.

Exemplo 4 - Mostrar que a origem do sistema

$$\dot{x}_1 = - x_2 - [x_1]^3$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - [x_2]^3$$

é globalmente assintòticamente estável.

Seja $x = (x_1(t), x_2(t)) \neq 0$ uma solução do sistema. Então

$$\dot{x}_1(t) = - x_2(t) - [x_1(t)]^3$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - [x_2(t)]^3$$

e portanto,

$$\dot{x}_1(t)\ x_1(t) + \dot{x}_2(t) = - \{[x_1(t)]^4 + [x_2(t)]^4\} < 0,$$

isto é, $\frac{d}{dt}\{[x_1(t)]^2 + [x_2(t)]^2\} < 0$. Isto nos sugere tomar

$V = V(x) = [x_1]^2 + [x_2]^2$ como função de Liapunov e aplicar o Teorema 4. De fato, $V(x)$ assim definida satisfaz às condições do Teorema 4 e, por conseguinte, a origem é globalmente assintóticamente estável.

A solução $x = 0$ do sistema (*) é dita *instável* se ela não é estável no sentido de Liapunov.

Teorema 5 - (Terceiro teorema de Liapunov, sobre instabilidade)

Supomos que o sistema (*) *admite uma função* $V(t,x)$, *com extremo superior infinitésimo* $\dot{V}(t,x)$ *definida positiva e que existe* $t_o \geq 0$ *tal que toda vizinhança de* $x = 0$ *contém um ponto* x_o *satisfazendo* $V(t_o,x_o) > 0$ *Então a solução* $x = 0$ *do sistema* (*) *é instável.*

Prova

Como $V(t,x)$ tem extremo superior infinitésimo, existe H_o, $0 < H_o < H$, tal que $t \geq 0$, $|x| < H_o$ implicam $|V(t,x)| < 1$. Seja x_o satisfazendo $V(t_o,x_o) > 0$. Mostremos que existe $\tilde{t} = \tilde{t}(x_o)$ $\tilde{t} \geq t_o$, satisfazendo $|x(\tilde{t},t_o,x_o)| \geq H_o$; este fato prova o teorema. Supomos que não existe $\tilde{t}$ com a propriedade acima. Então $|x(t)| < H_o$ para $t \geq t_o$, $x(t)=x(t,t_o,x_o)$ e, por conseguinte, $t^+ = \infty$. Isto implica $|V(t,x(t))| < 1$ para $t_o \leq t < \infty$. Como $V(t,x)$ tem extremo superior infinitésimo, existe $\delta = \delta(x_o) > 0$ tal que $t \geq 0$, $|x| < \delta$ implicam $V(t,x) < V(t_o,x_o)$. Logo $V(t,x) \geq V(t_o,x_o)$ implica $|x| \geq \delta$. Como $\dot{V}(t,x)$ é definida positiva existe $\rho = \rho(\delta) > 0$ tal que $\delta \leq |x| \leq H_o$, $t \geq 0$, implicam $\dot{V}(t,x) \geq \rho$. Por ser

$\dot V(t,x(t)) \geq 0$ resulta, do Lema 1, que $V(t,x(t)) \geq V(t_o,x_o)$ para $t \geq t_o$; portanto $\delta \leq |x(t)| < H_o$ para $t \geq t_o$. Logo $\dot V(t,x(t)) \geq \rho$ para $t \geq t_o$ e, por conseguinte, do Lema 2, $V(t,x(t)) \to \infty$ com $t \to \infty$, o que é absurdo pois $|V(t,x(t))| < 1$.

Exercício:

Dada a equação $\dot x = \sum_{j=m}^{\infty} a_j x^j$, $m \geq 1$, com raio de convergencia não zero, mostrar que m par implica $x = 0$ instável; m impar implica $x = 0$ instável se $a_m > 0$ e $x = 0$ assintoticamente estável se $a_m < 0$.

Sugestão: Como funções de Liapunov tomamos $V = a_m x^2$ se m ímpar e $V = a_m x$ se m par.

Teorema 6 - (Quarto teorema de Liapunov, sobre instabilidade)

Supomos que o sistema (*) *admite uma função* $V(t,x)$ *limitada em* $E = [0,\infty)\times\Gamma_H$ *e que existe* $t_o \geq 0$ tal que toda vizinhança de $x = 0$ *contém um ponto* x_o *satisfazendo* $V(t_o,x_o) > 0$. *Supomos que existem funções continuas* $\alpha(t)$ *e* $U(t,x)$ *satisfazendo* $\alpha(t) \geq 0$, $\int^{\infty} \alpha(s)ds = \infty$, $U(t,x) \geq 0$, *com* $\dot V(t,x) = \alpha(t)V(t,x) + U(t,x)$. *Então a solução* $x = 0$ *do sistema* (*) *é instável.*

Prova:

Fixemos H_o, $0 < H_o < H$, e mostremos que se $V(t_o,x_o) > 0$, então existe $\tilde t > t_o$ satisfazendo $|x(\tilde t)| \geq H_o$ onde $x(t) = x(t,t_o,x_o)$, este fato prova o teorema. Supomos que não existe $\tilde t$ com a propriedade acima. Então $t^+ = \infty$ e $|x(t)| < H_o$

para $t_o \leq t < \infty$

$\dot{V}(t,x(t)) = \alpha(t)V(t,x(t)) + U(t,x(t)) \geq \alpha(t)V(t,x(t))$. Esta desigualdade implica, pelo fato de ser $V(t_o,x_o) > 0$, que $V(t,x(t)) > 0$ para $t_o \leq t < \infty$.

Então temos $\dfrac{\dot{V}(t,x(t))}{V(t,x(t))} \geq \alpha(t)$, que implica

$V(t,x(t)) \geq V(t_o,x_o)\, e^{\int_{t_o}^{t} \alpha(s)ds}$. Portanto, $V(t,x(t)) \to \infty$ com $t \to \infty$, o que nos leva a uma contradição.

O teorema seguinte sobre instabilidade, para sistemas autonomos, é um caso particular do Teorema de Cetaev estabelecido para sistemas não necessariamente autônomos. Ver, por exemplo, [16] e [22]. Vamos considerar aqui o caso autônomo em vista da grande simplicidade com que o Teorema de Cetaev pode ser formulado.

Teorema 7 - Supomos que o sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, *admite uma função* $V = V(x)$ *de classe* C^1, *em um aberto* Ω *contido em* Γ_H, *de modo que*

1) $V(x) > 0$ e $\dot{V}(x) > 0$ *para* $x \in \Omega$;

2) $0 \in \bar{\Omega}$, $\bar{\Omega}$ *sendo a aderência de* Ω *em* Γ_H;

3) $V(x) = 0$ *para* $x \in F(\Omega,\Gamma_H)$, $F(\Omega,\Gamma_H)$ *sendo a fronteira de* Ω *relativamente a* Γ_H.

Então $x = 0$ *é um ponto de equilíbrio instável.*

Prova

Fixemos H_o, $0 < H_o < H$. Seja $x_o \in \Omega$ e $x(t)$ a solução do sistema satisfazendo $x(0) = x_o$. Vamos mostrar que existe $\tilde{t} = \tilde{t}(x_o)$ tal que $|x(\tilde{t})| > H_o$; este fato prova o teorema porque toda vizinhança de $x = 0$ contém um ponto $x_o \in \Omega$, em vista da hipótese 2). Supomos que não existe $\tilde{t}$ com a propriedade acima. Então $t^+ = \infty$ e $|x(t)| \leq H_o$ para $t_o \leq t < \infty$. Garantimos que $x(t) \in \Omega$ para todo $t_o \leq t < \infty$ pois, do contrário existiria um s tal que $x(t) \in \Omega$ para $t_o \leq t < s$, $x(s) \in F(\Omega,\Gamma_H)$ e, por conseguinte, em vista das hipóteses 1) e 3), existiria um $p, t_o<p<s$, satisfazendo $\dot{V}(x(p)) < 0$. Isto não é possível porque $\dot{V} > 0$ em Ω. Como $\dot{V}(x(t)) > 0$ resulta $V(x(t)) \geq V(x_o = \sigma > 0$, para $t_o \leq t < \infty$. Então

$$x(t) \in K(\sigma,H_o) = \{\xi \in \Omega |\ V(\xi) \geq \sigma \quad e \quad |\xi| \leq H_o\},$$

que é um conjunto compacto. Logo, do fato de ser $\dot{V}(\xi) > 0$ em $K(\sigma,H_o) \subset \Omega$, resulta que existe $\alpha > 0$ satisfazendo $\dot{V}(x(t)) \geq \alpha$ para $t_o \leq t < \infty$ e, portanto, $V(x(t)) \to \infty$ com $t \to \infty$. Mas isto é um absurdo porque $V(x)$ é contínua no compacto $K(\sigma,H_o)$ e, portanto, limitado.

Logo o ponto de equilíbrio é instável.

Exemplo 5 - Mostremos que, no problema do Exemplo 2, o ponto de equilíbrio $(p,q,r) = (0,0,r_o)$, $r_o \neq 0$, é instável se $r_o > 0$ com $b \geq c > a$ ou $b > c \geq a$; também é instável se $r_o > 0$ com $a \geq c > b$ ou $a > c \geq b$.

No sistema

$$a\dot{x} + (c-b)y(z + r_o) = 0$$
$$b\dot{y} + (a-b)x(z + r_o) = 0$$
$$c\dot{z} + (b-a)xy \qquad = 0$$

tomamos $H = |r_o|$, $\Gamma_H = \{(x,y,z) \in R^3 | x^2 + y^2 + z^2 < H^2\}$,

$\Omega = \{(x,y,z) \in \Gamma_H | xy > 0\}$ e $V = V(x,y,z) = xy$.

Para aplicar o Teorema de Cetaev, vamos verificar que $\dot{V}(x,y,z) > 0$ em Ω; as demais condições são obviamente satisfeitas.

$$\dot{V} = \dot{V}(x,y,z) = [\frac{b-c}{a}y^2(z + r_o)] + [\frac{c-a}{b}x^2(z + r_o)]$$

Se $r_o > 0$, vem que $z + r_o > 0$ em Γ_H e, portanto $b \geq c > a$ ou $b > c \geq a$ implica $\dot{V} > 0$ em Ω. Se $r_o < 0$, vem que $z + r_o < 0$ em Γ_H e, portanto, $a \geq c > b$ ou $a > c \geq b$ implica $\dot{V} > 0$ em Ω.

Logo, aplicando Cetaev, temos a instabilidade do ponto de equilíbrio.

Exercício - Mostrar que a origem é um ponto de equilíbrio instável para o sistema

$$\dot{x}_1 = (x_1)^5 + (x_2)^3$$

$$\dot{x}_2 = (x_1)^3 + (x_2)^5$$

Sugestão - Tomar $V = (x_1)^4 - (x_2)^4$ e aplicar o Teorema de Cetaev.

Para um tratamento especializado da teoria da estabilidade, principalmente no que se refere ao segundo método de Liapunov, recomendamos os livros de Liapunov [21 - a -], e [21 - b -] Hahn [10], Krasovskii [16], Malkin [22] Halanay [11] e T. Yoshizawa [29 - a], [29 - b] e [29 - c]. Os livros de Hahn, Krasovskii e Halanay, além de um conteúdo de grande valor, trazem uma extensa indicação bibliográfica. Para indicações bibliográficas mencionamos, ainda o livro de Cesari [6], que possue também uma clara introdução à teoria da estabilidade.

O ponto alto do livro de Malkin são as aplicações. Na verdade, Malkin visa basicamente o leitor "prático". Destacamos ainda os artigos de Massera [24 - a] e [24 - c] já mencionados anteriormente, e a exposição de Antosiewicz [1].

(b) Conjuntos invariantes de um sistema autônomo e implicações em estabilidade: Teoremas de La Salle e aplicações.

Consideremos o sistema autônomo

$$\dot{x} = F(x) \quad , \; F(0) = 0, \qquad (*)$$

supondo sempre $F(x)$ contínua em R^n e que seja satisfeita alguma hipótese de unicidade para as soluções que passam por um ponto.

O segundo teorema de Liapunov, sobre estabilidade, (Teorema 3 deste capitulo), quando aplicado ao caso de sistemas autônomos, nos diz que se $V(x) > 0$, $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$ e $V(0) = \dot{V}(0) = 0$, então, a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Os resultados de La Salle, que apresentaremos aqui, nos dizem muito mais que o segundo teorema de Liapunov,,para sistemas autônomos. Comparado com o resultado de Liapunov vamos notar que:

1º) Para concluir a estabilidade assintotica da origemnão precisamos que $\dot{V}(x)$ se anule apenas na origem; $\dot{V}(x)$ pode se anular em um conjunto maior desde que o maior conjunto invariante do sistema (*) (vamos precisar este conceito mais adiante) contido no mencionado conjunto se reduza à origem.

Observação análoga pode ser feita com referência ao Teorema 4 deste capítulo sobre estabilidade assintótica global.

2º) Os resultados de La Salle nos permitem dar estimativas sobre o centro de atração.

Seja $x(t)$ uma solução de (*) definida em $[0,\infty)$.

O conjunto ω-limite de $x(t)$, que indicamos por Γ^+, é o conjunto dos elementos $p \in R^n$ de modo que existe (t_m) com $t_m \to \infty$ e $x(t_m) \to p$ para $m \to \infty$

Exemplo:

a) Se $x(t) \to p$ com $t \to \infty$, então, $\Gamma^+ = \{p\}$;

b) se $|x(t)| \to \infty$, então, Γ^+ é o conjunto vazio;

c) se $x(t)$ é periódica de período ω, então,
$\Gamma^+ = \{p \in R^n |\ x(t) = p,\ 0 \leq t \leq \omega\}$.

Dado $x_o \in R^n$, indicamos por $x(t,x_o)$ a solução que satisfaz $x(0,x_o) = x_o$.

Um conjunto $M \subset R^n$ é dito invariante relativamente a (*) se $x_o \in M$ implicar $x(t,x_o)$ definida em $(-\infty,+\infty)$ e $x(t,x_o) \in M$ para todo t, $-\infty < t < +\infty$. Se por exemplo, $x(t)$ é uma solução de (*) definida em $(-\infty,+\infty)$, então,
$M = \{x(t) \mid -\infty < t < +\infty\}$ é um conjunto invariante. Em particular, $M = \{0\}$ é um conjunto invariante.

Seja $A \subset R^n$. Dizemos que A é conexo por caminho se, dados dois pontos quaisquer de A, existir uma curva contínua contida em A, ligando estes dois pontos. Dados $x_o \in A$, chamamos de componente conexa de x_o, relativamente a A, ao maior conjunto conexo por caminho contido em A e contendo x_o, isto é, K é a componente conexa se e somente se K é conexo por caminho, $x_o \in K$, e se B é qualquer conjunto conexo por caminho, com

$x_o \in B$, resulta $B \subset K$.

Seja $B \subset R^n$ e $x \in R^n$. Chamamos distancia de x a B, que indicamos por $d(x,B)$, ao número $d(x,B) = \inf\limits_{p \in B} |x-p|$.

O lema seguinte é fundamental para os resultados que se seguem. Isto é, $|x(t)| < H_1 < H \leq \infty$.

Lema 3 - Seja $x(t)$ *uma solução de* (*) *definida e limitada em* $[0,\infty)$. *Então* Γ^+ *é um conjunto não vazio, compacto, invariante e* $x(t) \to \Gamma^+$ *com* $t \to \infty$, *isto é* $d(x(t),\Gamma^+) \to 0$ *com* $t \to \infty$

É imediato que Ω^+ é um conjunto não vazio, compacto e que $x(t) \to \Gamma^+$ com $t \to \infty$. Basta provar que Γ^+ é invariante relativamente a (*).

Dados $V = V(x)$ de classe C^1 em R^n, $V(0) = 0$ e $\ell > 0$, pomos:

$$\Omega_\ell = \{x \in R^n | V(x) < \ell\} ;$$

$\tilde{\Omega}_\ell$ a componente conexa da origem $x = 0$ relativamente a Ω_ℓ;

$$E = \{x \in \tilde{\Omega}_\ell | \dot{V}(x) = 0\};$$

M o maior conjunto invariante de (*), contido em E. O maior conjunto invariante contido em E existe porque a união qualquer de conjuntos invariantes é um conjunto invariante e é não vazio porque a origem $x = 0$ é um conjunto invariante contido em E. Vê-se imediatamente que os conjuntos Ω_ℓ e $\tilde{\Omega}_\ell$ são abertos.

Os teoremas e corolários seguintes são devidos a La Salle. Por ser mais conveniente nas aplicações, o teorema seguinte e seus corolários são formulados numa forma ligeiramente diferente do que em [18, Teoremas VI e VII], usando $\tilde{\Omega}_\ell$ em vez de Ω_ℓ

Já na aplicação feita por LaSalle [18, exemplo 2,pg. 62], ele usa seu teorema [18, Teorema VI] como se o mesmo estivesse formulado com hipóteses sobre Ω_ℓ

Teorema 8 - Supomos $\tilde{\Omega}_\ell$ *limitado e que para todo* $x \in \tilde{\Omega}_\ell$ *temos* $V(x) \geq 0$ *e* $\dot{V}(x) \leq 0$. *Então, se* $x_o \in \tilde{\Omega}_\ell$ *resulta* $x(t,x_o)$ *definida no futuro,* $x(t,x_o) \in \tilde{\Omega}_\ell$ *para* $0 \leq t < \infty$ *e* $x(t,x_o) \to M$ com $t \to \infty$.

Prova

Seja $x_o \in \tilde{\Omega}_\ell$. Supomos por momento que existe $\tilde{t}, 0<\tilde{t}<t^+$, com $x(\tilde{t}) \notin \tilde{\Omega}_\ell$, onde $x(t) = x(t,x_o)$. Então, existe s, $0 < s < t^+$, tal que $x(t,x_o) \in \tilde{\Omega}_\ell$ para $0 \leq t < s$ e $x(s) \notin \tilde{\Omega}_\ell$. Logo existe τ, $0 < \tau < s$, satisfazendo $\dot{V}(\tau, x(\tau)) > 0$, o que nos leva a uma contradição. Assim, $x(t) \in \tilde{\Omega}_\ell$ para $0 \leq t < t^+$ e como $\tilde{\Omega}_\ell$ é limitado resulta $t^+ = \infty$. Donde $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ para $0 \leq t < \infty$ e, portanto, $V(x(t))$ não crescente. Logo $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = \ell_o \leq V(x_o) < \ell$ e, por conseguinte, $V(p) = \ell_o$ para todo $p \in \Gamma^+$. Do fato de ser $V(p) = \ell_o < \ell$ para $p \in \Gamma^+$, vem $\Gamma^+ \subset \tilde{\Omega}_\ell$; como Γ^+ é um conjunto invariante resulta $\dot{V}(p) = 0$ para $p \in \Gamma^+$, ou seja, $\Gamma^+ \subset E$. Como M é o maior conjunto invariante contido em E, resulta $\Gamma^+ \subset M$. Do Lema 3 segue que $x(t) \to M$ com $t \to \infty$.

Corolário 1 - Supomos $\tilde{\Omega}_\ell$ *limitado e que para todo* $x \in \tilde{\Omega}_\ell$, $x \neq 0$, *temos* $V(x) > 0$ *e* $\dot{V}(x) \leq 0$. *Supomos tambem* $M = \{0\}$. *Então, a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e* $\tilde{\Omega}_\ell$ *está no centro de atração.*

Prova

Do primeiro teorema de Liapunov (Teorema 1 deste capí tulo) segue que a origem é estável. Do teorema enterior resulta que $x_o \in \tilde{\Omega}_\ell$ implica $x(t,x_o) \to 0$ com $t \to \infty$. Portanto, a origem é assintoticamente estável e $\tilde{\Omega}_\ell$ está no centro de atração.

Corolário 2 - Supomos $\tilde{\Omega}_\ell$ limitado e que para todo $x \in \tilde{\Omega}_\ell$, $x \neq 0$, temos $V(x) > 0$ e $\dot{V}(x) < 0$. Então, a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e $\tilde{\Omega}_\ell$ está no centro de atração.

Exemplo 1 - Consideremos a equação

$$\ddot{x} + [\dot{x} - \frac{1}{a^2}(\dot{x})^3] + x = 0$$

x escalar, $\alpha > 0$ e $a > 0$.

Para $a^2 = 3$ esta é a chamada equação de Rayleigh.

Vamos estudar a estabilidade da origem do sistema equivalente:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\alpha y + \frac{\alpha}{a^2}y^3 - x$$

Seja $(x(t),y(t))$ uma solução qualquer do sistema. Então

$$\ddot{x}(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{x}(t) = -\alpha\{[\dot{x}(t)]^2 - \frac{1}{a^2}[\dot{x}(t)]^4\}$$

e, portanto, $([x(t)]^2 + [y(t)]^2)^{\cdot} = -2\alpha\{[y(t)]^2 - \frac{1}{a^2}[y(t)]^4\}$

Isto nos mostra que, se tomarmos $V = x^2 + y^2$, resulta $\dot{V} \leq 0$ para $y^2[1 - \frac{1}{a^2}y^2] \geq 0$, ou seja, $y^2 \leq a^2$.

Portanto, se tomarmos $\ell = a^2$, segue que $\dot{V} \leq 0$ no conjunto $\Omega_\ell = \{(x,y) \in R^2 | V = x^2 + y^2 < \ell = a^2\}$.

Neste caso $\Omega_\ell = \tilde{\Omega}_\ell$. O conjunto dos pontos de Ω_ℓ em que $\dot{V}$ se anula é, no caso, $E = \{(x,y) \in \Omega_\ell | \, y = 0\}$, ou seja, o segmento do eixo x contido no círculo aberto de raio a. Mostremos que o único conjunto invariante $M \subset E$, é a origem. Supomos que não. Então existe conjunto invariante $M \subset E$, com um $(x_o,0) \in M$, $x_o \neq 0$. Por ser M invariante segue que a solução $(x(t),\dot{x}(t))$, com $x(0) = x_o$ e $\dot{x}(0) = 0$ satisfaz $\dot{x}(t) \equiv 0$ e, portanto, $x(t) \equiv x_o$; donde, substituindo na equação dada, $x_o = 0$ e temos uma contradição. Logo o maior conjunto invariante contido em E é a origem.

Aplicando o Corolário 1 segue que a origem $(x,\dot{x})=(0,0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e que o círculo aberto de raio a está contido no centro de atração.

Exemplo 2 - Consideremos a equação

$$\ddot{x} + x + x^2 + g(x,\dot{x}) = 0,$$

x escalar e $yg(x,y) > 0$ para todo x e todo $y \neq 0$. Vamos estudar a estabilidade da origem do sistema equivalente.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= - x - x^2 - g(x,y) \end{aligned}$$

Seja $(x(t),y(t))$ uma solução qualquer do sistema. Então $\ddot{x}(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{x}(t) + x^2(t)\dot{x}(t) = - \dot{x}(t)g(x(t),\dot{x}(t)) \le 0$ e, portanto,

$$\left(\frac{1}{2}[y(t)]^2 + \frac{1}{2}[x(t)]^2 + \frac{1}{3}[x(t)]^3\right)^{\cdot} = - y(t)g(x(t),y(t))$$

Isto nos mostra que se tomarmos

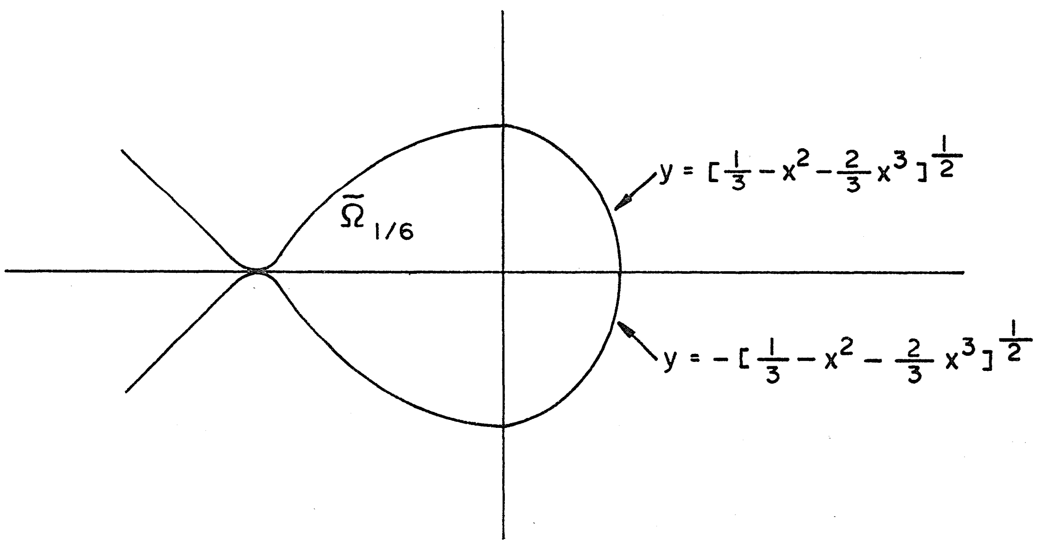
$V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2$ resulta $\dot{V} \le 0$. Vamos agora escolher um conveniente valor de $\ell > 0$. Para aplicar o Corolário 1 vemos que uma condição necessária é que $\tilde{\Omega}_\ell$ não contenha outro ponto de equilíbrio além da origem. Nosso sistema possue dois pontos de equilíbrio, ou seja, (0,0) e (-1,0). Um procedimento natural é pois escolher ℓ de modo que $(0,-1) \notin \Omega_\ell$. Determinemos ℓ de modo que a curva $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 = \ell$ passe por (-1,0); ou seja $\ell = \frac{1}{6}$. Temos que.

$$\Omega_{1/6} = \{(x,y) \mid \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 < \frac{1}{6}\}$$

ou seja Ω_ℓ é o conjunto aberto limitado pelas duas curvas

$$y = \pm[\frac{1}{3} - x^2 - \frac{2}{3}x^3]^{1/2}$$

Uma análise da curva $y = [\frac{1}{3} - x^2 - \frac{2}{3}x^3]^{1/2}$ (a outra é simétrica em relação ao eixo x) mostra que ela está definida para $-\infty < x \le \frac{1}{2}$ e tem o seguinte comportamento: $y=y(x)$ é decrescente no intervalo $(-\infty,-1]$, $y(-1) = 0$, é crescente no intervalo $[-1,0]$, $y(0) = 3^{-1/2}$, é decrescente no intervalo $[0,1/2]$ e $y(1/2) = 0$



Vemos que $\Omega_{1/6}$ não é limitado e não é conexo mas, $\tilde{\Omega}_{1/6}$ (parte hachurada da figura) é limitada e, em $\tilde{\Omega}_{1/6}$, temos

$V(x,y) > 0$ para $(x,y) \neq (0,0)$ com $\dot{V}(x,y) \leq 0$.

É fácil ver que o conjunto E dos pontos de $\tilde{\Omega}_{1/6}$ em que $\dot{V}$ se anula é formado do segmento do eixo x contido em $\tilde{\Omega}_{\ell}$. Pelo mesmo tipo de raciocínio do exemplo anterior vemos que o maior conjunto invariante M contido em E é a origem.

Aplicando o Corolário 1 segue que a origem $(x,\dot{x})=(0,0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e que o conjunto $\tilde{\Omega}_{1/6}$ está no centro de atração.

No que segue $V(x)$ é de classe C^1 em R^n, $V(0) = 0$, $E = \{x \in R^n | \dot{V}(x) = 0\}$ e M o maior conjunto invariante contido em E.

Dentro de nossa ordem de idéia temos:

Teorema 9 - Seja $V(x) \geq 0$ *e* $\dot{V}(x) \leq 0$ *em* R^n.

Então toda solução de (*) *limitada no futuro tende para* M *com* $t \to \infty$.

Prova

Seja $x(t)$ solução de (*) limitada no futuro. Como $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ temos, como no Teorema 8, que $V(x)$ é constante e, portanto, $\dot{V}(x) = 0$ sobre Γ^+. Logo $\Gamma^+ \subset M \subset E$ e, do Lema 3, segue que $x(t) \to M$ com $t \to \infty$

Corolário - Supomos $V(x) > 0$ *para* $x \neq 0$ *e* $\dot{V}(x) \leq 0$ *em* R^n. *Supomos que todas as soluções de* (*) *são limitadas no futuro e que* $M = \{0\}$.

Então, a origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Prova

Do primeiro teorema de Liapunov (Teorema 1 deste capítulo) segue que a origem é estável. Do teorema anterior segue que toda solução tende para M com $t \to \infty$ e, portanto, toda solução tende para a origem $x = 0$ com $t \to \infty$. Logo, a origem é globalmente assintoticamente estável.

Visando aplicações do Corolário acima, as seguintes observações são de interesse:

1) As condições $V(x) \to \infty$ com $|x| \to \infty$ e $\dot{V}(x) \leq 0$ implicam que toda solução de $(*)$ é limitada no futuro.

De fato, supomos que $x(t)$ é definida e não limitada em $[t_o, t^+)$. Logo, existe s, $t_o < s < t^+$, tal que $V(x(s)) > V(x(t_o))$ porque $V(x) \to \infty$ com $|x| \to \infty$. Então, existe τ, $t_o < \tau < s$, satisfazendo $\dot{V}(x(\tau)) > 0$, o que não é possível. Logo $x(t)$ é limitada em $[t_o, t^+)$ e, portanto, definida e limitada em $[t_o, \infty)$.

2) A condição $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$ implica $M = \{0\}$

Exemplo - Consideremos a equação

$$\ddot{x} + f(x)x + g(x) = 0,$$

x escalar, com $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$, $f(x) > 0$ para todo x e $G(x) = \int_0^x g(s)ds \to \infty$ com $|x| \to \infty$. Então, a origem do sistema equivalente

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -g(x) - f(x)y$$

é globalmente assintoticamente estável.

Seja $(x(t), y(t))$ uma solução qualquer do sistema.

Então

$$\ddot{x}(t)\dot{x}(t) + \dot{x}(t)g(x(t)) = - [\dot{x}(t)]^2 f(x(t)) \leq 0$$

e, portanto, $[\frac{1}{2}y(t)]^2 + [G(x(t))]^{\cdot} \leq 0$. Isto nos sugere tomar $V = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$. Temos $V = V(x,y) > 0$ para $(x,y) \neq (0,0)$, $\dot{V}(x,y) = - y^2 f(x) \leq 0$; portanto E é o eixo x. De maneira análoga ao discutido no Exemplo 1 segue que $M = \{(0,0)\}$. Como $V(x,y) \to \infty$ com $x^2 + y^2 \to \infty$, segue, do Corolário, combinado com a Observação 1, que a solução $(x,\dot{x}) = (0,0)$ é globalmente assintóticamente estável

Exercício - Mostrar que a mesma conclusão do exemplo anterior é válido se enfraquecermos a condição sobre $f(x)$ supondo $f(x) \geq 0$ e que os zeros de $f(x)$ sao isolados.

As ideias desenvolvidas neste item nos fornecem um método para estudar o comportamento das soluções limitadas de $(*)$ com $t \to \infty$, mesmo que a origem não seja estável. Vamos ver isto no teorema seguinte.

Teorema 10 - Seja $V(x)$ *de Classe* C^1 *em* $\Gamma_H, 0<H \leq \infty$. *Seja* $x(t)$ *uma solução de* $(*)$ *tal que* $|x(t)| \leq H_1 < H$ *e* $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ *para* $0 \leq t < \infty$. *Então* $x(t) \to M$ *com* $t \to \infty$, *onde* M *é o maior conjunto invariante contido em* $E = \{x \in \overline{\Gamma}_{H_1} | \dot{V}(x) = 0\}$

Prova

Como $x(t) \in \overline{\Gamma}_{H_1}$, $0 \leq t \to \infty$, vem que $\Gamma^+ \subset \overline{\Gamma}_{H_1}$. Do fato de ser $\dot{V}(x) \leq 0$ e, portanto, não crescente em $[0,\infty)$, resulta V constante sobre Γ^+. Como Γ^+ é invariante então $\dot{V}$ se anula sobre Γ^+. Donde, pelo Lema 3 $x(t) \to M$ com $t \to \infty$.

Exemplo Consideremos o sistema $\ddot{x} = F(x,\dot{x})$, $F(x,y)$ definido para x,y no R^n. Supomos $xF(x,y) \geq 0$. (Estamos usando a notação xz para indicar $x^t z$, onde x e z são matrizes $n \times 1$). Seja $(x(t),y(t))$ uma solução do sistema equivalente

$$\dot{x} = y$$

$$y = F(x,y)$$

com $(x(t),y(t))$ limitada em $[0,\infty)$. (Sobre o problema de existencia de soluções com tais propriedades ver N. Onuchic [26-b-]. Vamos mostrar que $y(t) \to 0$ com $t \to \infty$ e que existe α tal que $x(t) \to N_\alpha = \{x \in R^n | x.x = \alpha^2$ e $F(x,0) = 0\}$ com $t \to \infty$.

Do fato de ser $(x(t),y(t))$ limitada em $[0,\infty)$ segue que $x(t)y(t) \leq 0$, De fato, supomos que existe t_o tal que $x(t_o)y(t_o) > 0$. Como

$$[x(t)y(t)]^{\cdot} = y(t)y(t) + x(t)F(x(t),y(t)) \geq 0,$$

segue que $x(t)y(t)$ é não decrescente e, portanto,

$$[r^2(t)]^{\cdot} = 2x(t)y(t) \geq 2x(t_o)y(t_o) > 0$$

onde $r^2(t) = x(t)x(t)$. Mas isto implica $r(t) \to \infty$ com $t \to \infty$, o que não é possível. Logo $x(t)y(t) \leq 0$ em $[0,\infty)$. Pomos

$$H > H_1 = \sup_{0 \leq t < \infty} [x(t)x(t) + y(t)y(t)]^{1/2} \text{ e } V(x,y) = -xy.$$

Temos que

$$\dot{V}(x(t)y(t)) = -[y(t)y(t) + x(t)F(x(t),y(t))] \leq 0.$$

É imediato ver que $M = \{(x,y) | y = 0,\ x.x \leq H_1^2$ e $F(x,0) = 0\}$. Logo, pelo Teorema 10, $(x(t),y(t)) \to M$ com $t \to \infty$ e como $r(t)$ é não crescente, porque $[r^2(t)]^{\cdot} = 2x(t)y(t) \leq 0$, resulta que existe $\alpha \leq H_1$ tal que $r(t) \to \alpha$ com $t \to \infty$. Por conseguinte, $y(t) \to 0$ e $x(t) \to N_\alpha$ com $t \to \infty$.

Importantes generalização de resultados de La Salle foram feitas para sistemas não autônomos. Ver, neste sentido, os trabalhos de La Salle [17 - a - b], Yoshizawa [29 - a - b - c] Miller [25] e Strauss - Yorke [28 - a - b].

ESTABILIDADE PARA SISTEMAS PERTURBADOS DE UM SISTEMA LINEAR

Vamos mostrar que se a origem de um sistema linear de coeficientes constantes é assintòticamente estável, então, o sistema perturbado que se obtém por uma perturbação "pequena", num sentido que vai ser precisado mais adiante, deixa ainda a origem assintoticamente estável. O teorema que exporemos aqui é um resultado muito recente de A. Strauss e J. Yorke [28 - b] e que generaliza conhecidos resultados sobre estabilidade assintótica de sistemas perturbados de um sistema linear de coeficientes constantes.

Supomos que os sistemas abaixo satisfazem às condições de continuidade e à exigencia de unicidade das soluções em relação ao problema de valor inicial no conjunto $[0,\infty)\times\Gamma_H$, $0 < H \leq \infty$.

O seguinte fato será usado a seguir:

Dado o sistema $\dot{x} = Cx + f(t,x)$, C matriz constante $n \times n$, se $x(t)$ é uma solução em $[t_o,t^+)$, então,

$$x(t) = e^{(t-t_o)C}x(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{(t-s)C}f(s,x(s))ds$$

Esta fórmula pode ser verificada diretamente mostrando, por exemplo, que

$$y(t) = x(t) - \int_{t_o}^{t} e^{(t-s)C}f(s,x(s))ds$$

é solução do sistema $\dot{y} = Cy$ satisfazendo $y(t_o) = x(t_o)$ e, portanto, $y(t) = e^{(t-t_o)C}x(t_o)$.

Uma série de lemas serão apresentados preliminarmente.

A seguinte hipótese para uma função contínua não negativa $\gamma(t)$ em $[0,\infty)$ será de especial interesse.

Hipótese P :

$$G(t) = \int_t^{t+1} \gamma(s)ds \to 0 \quad \text{com} \quad t \to \infty.$$

É fácil verificar que se $\gamma(t)$ é uma função contínua não negativa em $[0,\infty)$ e satisfazendo $\gamma(t) \to 0$ com $t \to \infty$ ou $\int_0^\infty \gamma(t)dt < \infty$, então, $\gamma(t)$ satisfaz à Hipótese P. Por outro lado pode-se ver que existe $\gamma(t)$ satisfazendo à Hipótese P com $\gamma(t) \not\to 0$ para $t \to \infty$ e $\int_0^\infty \gamma(t)dt = \infty$. De fato, sejam $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ funções contínuas não negativas em $[0,\infty)$ satisfazendo $\gamma_1(t) \to 0$ com $t \to \infty$, $\int_0^\infty \gamma_1(t)dt = \infty$. e $\gamma_2(t) \not\to 0$ com $t \to \infty$ $\int_0^\infty \gamma_2(t)dt < \infty$. Então, $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$ satisfaz à Hipótese P mas, $\gamma(t) \not\to 0$ com $t \to \infty$ e $\int_0^\infty \gamma(t)dt = \infty$.

Lema 1 - $\int_{t_o}^t \delta(s)ds \leq \int_{t_o-1}^t [\int_s^{s+1} \delta(u)du]ds$ *para* $t \geq t_o > 1$, *onde* $\delta(s)$ *é contínua não negativa para* $s \geq 0$.

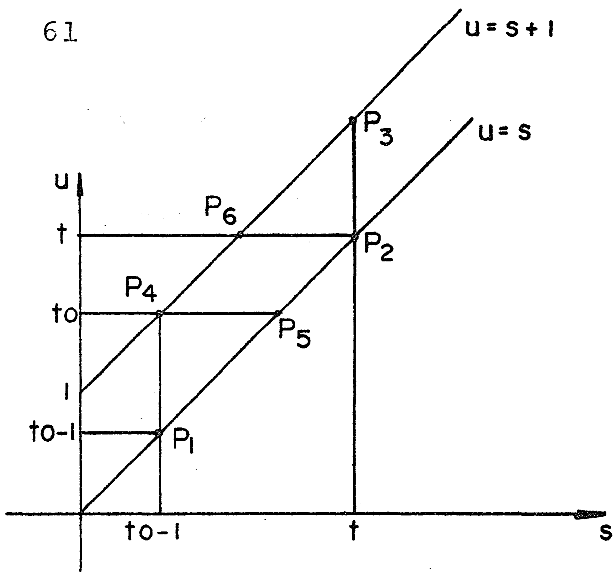
Prova

$$\int_{t_o-1}^t [\int_s^{s+1} \delta(u)du]ds = \iint_D \delta(u)dsdu$$

onde D é o paralelogramo $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$. Mas.

$$\iint_D \delta(u)\,dsdu \geq \iint_\Delta \delta(u)\,dsdu$$

onde Δ é o paralelogramo $P_4\ P_5\ P_2\ P_6$.



Agora $\displaystyle\iint_\Delta \delta(u)\,dsdu = \int_{t_o}^{t} [\int_{u-1}^{u} \delta(u)\,ds]du =$

$$= \int_{t_o}^{t} \delta(u)\,du$$

O lema fica assim provado.

Lema 2 - $\displaystyle\int_{t_o}^{t} e^{\alpha s}\gamma(s)\,ds \leq \int_{t_o-1}^{t} e^{\alpha(s+1)}G(s)\,ds,$

para $\alpha > 0$, $t \geq t_o \geq 1$, $\gamma(t)$ *contínua não negativa.*

Prova

Aplicando o Lema 1, para $\delta(s) = e^{\alpha s}\gamma(s)$, vem

$$\int_{t_o}^{t} e^{\alpha s}\gamma(s)\,ds \leq \int_{t_o-1}^{t} [\int_{s}^{s+1} e^{\alpha u}\gamma(u)\,du]ds \leq$$

$$\leq \int_{t_o-1}^{t} [\int_{s}^{s+1} e^{\alpha(s+1)}\gamma(u)\,du]ds = \int_{t_o-1}^{t} e^{\alpha(s+1)}G(s)\,ds$$

Lema 3 - Seja $\gamma(s)$ *satisfazendo à Hipótese P*

Então, $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\alpha t}\int_1^t e^{\alpha s}\gamma(s)ds = 0, \quad \alpha > 0.$

Prova

Do Lema 2 segue que

$$\frac{\int_1^t e^{\alpha s}\gamma(s)ds}{e^{\alpha t}} \le \frac{\int_o^t e^{\alpha(s+1)}G(s)ds}{e^{\alpha t}}$$

Da regra de L'Hospital segue que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_o^t e^{\alpha(s+1)}G(s)ds}{e^{\alpha t}} = 0$$

Lema 4 - *Sejam* $r(t)$ *e* $p(t)$ *contínuas para* $t \ge t_o$. *Sejam* $c \ge 0$, $k \ge 0$ *e seja*

$r(t) \le c + \int_{t_o}^t [kr(s) + p(s)]ds.$ *Então,*

$$r(t) \le ce^{k(t-t_o)} + \int_{t_o}^t p(s)e^{k(t-s)}ds.$$

Prova

Pomos $R(t) = c + \int_{t_o}^t [kr(s) + p(s)]ds$. Assim, $r(t) \le R(t)$. Então $R'(t) = kr(t) + p(t) \le kR(t) + p(t)$ e, portanto, $R'(t) - kR(t) \le p(t)$. Multiplicando-se ambos os membros por e^{-kt} vem que $e^{-kt}R'(t) - ke^{-kt}R(t) \le p(t)e^{-kt}$

ou seja, $(R(t)e^{-kt})' \leq p(t)e^{-kt}$. Logo, para $t \geq t_o$, resulta $R(t)e^{-kt} - R(t_o)e^{-kt_o} \leq \int_{t_o}^{t} p(s)e^{-ks}ds$ e, por conseguinte,

$$r(t) \leq R(t) \leq R(t_o)e^{k(t-t_o)} + \int_{t_o}^{t} p(s)e^{k(t-s)}ds =$$

$$= ce^{k(t-t_o)} + \int_{t_o}^{t} p(s)e^{k(t-s)}ds$$

Seja C uma matriz constante $n \times n$ cujos números característicos λ_j, $j = 1,2, \ldots,n$, têm parte real negativa; seja σ satisfazendo $0 < \sigma < - R(\lambda_j)$, $j = 1, \ldots,n$. Sabemos, então que existe $K = K(\sigma) \geq 1$ satisfazendo $|e^{tC}| \leq Ke^{-\sigma t}$, $t \geq 0$.

Sejam $h(t,x)$ e $g(t,x)$ contínuas em $[0,\infty) \times \Gamma_r$ $0 < r < \infty$, e satisfazendo às seguintes condições:

i) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ e $T = T(\varepsilon)$ de modo que $h(t,x)| \leq \varepsilon|x|$ para $|x| \leq \delta$ e $t \geq T$.

ii) Existe $\gamma(t)$ satisfazendo à Hipótese P tal que $|g(t,x)| \leq \gamma(t)$ para $t \geq 0$, $x \in \Gamma_r$.

Teorema - Seja C *matriz* $n \times n$ *em que todo número caractarístico tem parte real negativa. Sejam* $h(t,x)$ *e* $g(t,x)$ *funções satisfazendo às hipóteses acima* (i) *e* (ii), *com* $g(t,0) = 0$ *e* $h(t,0) = 0$ *para* $t \geq 0$. *Então, a solução* $x = 0$ *do sistema* $\dot{x} = Cx + g(t,x) + h(t,x)$ *é assintoticamente estável.*

Prova

Dado $\varepsilon > 0$, que podemos supor satisfazendo $\varepsilon < \min\{\sigma/K, r\}$, escolhemos $\delta = \delta(\varepsilon) \le \varepsilon$ e $T = T(\varepsilon) \ge 1$ de a côrdo com a hipótese (i) acima.

Seja $T_o \ge T$ tal que $K\int_1^t e^{-(\sigma-K\varepsilon)(t-s)}\gamma(s)ds < \frac{\delta}{2}$ para $t \ge T_o$. Isto é possível pelo Lema 3, desde que $\alpha = \sigma - K\varepsilon > 0$ e que $\gamma(t)$ satisfaz à Hipótese P. Sejam $\eta = \delta/2K$, $t_o \ge T_o$ e x_o tal que $|x_o| < \eta$. Temos que $|x(t)| < \delta$ para $t_o \le t < t^+$, onde $x(t) = x(t,t_o,x_o)$. Vamos supor que isto não valha. Então, existe $\tilde{t} > t_o$ tal que $|x(t)| < \delta$ para $t_o \le t < \tilde{t}$ e $|x(\tilde{t})| = \delta$.

Logo, para $t_o \le t \le \tilde{t}$, vem

$$|x(t)| = e^{(t-t_o)C}x_o + \int_{t_o}^t e^{(t-s)C}g(s,x(s)ds + $$
$$+ \int_{t_o}^t e^{(t-s)C}h(s,x(s))ds| \le$$
$$\le Ke^{-\sigma(t-t_o)}|x_o| + \int_{t_o}^t Ke^{-\sigma(t-s)}[|g(s,x(s))| + |h(s,x(s))|]ds \le$$
$$\le K\eta e^{-\sigma(t-t_o)} + \int_{t_o}^t Ke^{-\sigma(t-s)}[\varepsilon|x(s)| + \gamma(s)]ds.$$

Donde

$$e^{\sigma t}|x(t)| \le K\eta e^{\sigma t_o} + \int_{t_o}^t [\varepsilon K|x(s)|e^{\sigma s} + Ke^{\sigma s}\gamma(s)]ds$$

Fazendo

$$r(t) = e^{\sigma t}|x(t)|,\ c = K\eta e^{\sigma t_o},\ k = \varepsilon K,\ p(s) = Ke^{\sigma s}\gamma(s)$$

e aplicando o Lema 4 resulta

$$e^{\sigma t}|x(t)| \le K\eta e^{\sigma t_o}e^{\varepsilon K(t-t_o)} + \int_{t_o}^t Ke^{\sigma s}\gamma(s)e^{\varepsilon K(t-s)}ds.$$

Dai segue que

$$|x(t)| \leq K\eta e^{-(\sigma-\varepsilon K)(t-t_o)} + K\int_{t_o}^{t} e^{-(\sigma-\varepsilon K)(t-s)}\gamma(s)ds$$

e, por conseguinte,

$$|x(t)| \leq K\eta + K\int_{1}^{t} e^{-(\sigma-\varepsilon K)(t-s)}\gamma(s)ds < K\eta + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

para $t_o \leq t \leq \tilde{t}$. Em particular $|x(\tilde{t})| < \delta$, o que nos leva a uma contradição. Logo $|x(t)| < \delta$ para $t_o \leq t < t^+$ e $t^+ = \infty$. Isto nos permite concluir, em vista do raciocínio acima, que

$$|x(t,t_o,x_o)| < K\eta e^{-(\sigma-\varepsilon K)(t-t_o)} + K\int_{1}^{t} e^{-(\sigma-\varepsilon K)(t-s)}\gamma(s)ds$$

para $t_o \leq t < \infty$. Como $\int_{1}^{t} e^{-(\sigma-\varepsilon K)(t-s)}\gamma(s)ds \to 0$ com $t \to \infty$ pelo Lema 3, segue que $x(t,t_o,x_o) \to 0$ com $t \to \infty$. Ainda mais, como $|x(t,t_o,x_o)| < \delta \leq \varepsilon$ para $t_o \leq t < \infty$, segue que a origem é assintoticamente estável.

O seguinte corolário segue facilmente do Teorema de Strauss-Yorke.

Corolário - Seja $\dot{y} = A(t)y$ *um sistema linear redutível em que a origem é assintoticamente estável. Sejam* $h(t,x)$ *e* $g(t,x)$ *satisfazendo às hipóteses do Teorema anterior. Então a solução* $x = 0$ *do sistema*

$$\dot{x} = A(t)x + g(t,x) + h(t,x)$$

é assintoticamente estável.

Prova

Sendo $\dot{y} = A(t)y$ assintoticamente estável e redutível existem matriz constante C, da qual todo número característico tem parte real negativa, e matriz $S(t)$ com $\dot{S}(t)$ contínua,

$S(t)$ e $S^{-1}(t)$ limitadas em $[0,\infty)$, de modo que a transformação $z = S(t)x$ leva o sistema

$$\dot{x} = A(t)x + g(t,x) + h(t,x)$$

no sistema $\dot{z} = Cz + \tilde{g}(t,z) + \tilde{h}(t,z)$, onde
$\tilde{g}(t,z) = S(t)g(t,S^{-1}(t)z)$, $\tilde{h}(t,z) = S(t)h(t,S^{-1}(t)z)$

Como $\tilde{h}(t,0) = 0$ e satisfaz à hipótese (i), $\tilde{g}(t,0) = 0$ e satisfaz à hipótese (ii), segue do Teorema que $z = 0$ é assintoticamente estável. Logo $x = 0$ é assintoticamente estável.

Como indicação bibliográfica na linha do tratamento desenvolvido neste capítulo, mencionamos os livros de Lyapunov [21], Hahn [10], Malkin [22], Halanay [11], Cesari [6], Coddington e Levinson [7] e os artigos de Strauss e Yorke [28 - b -] e Massera [24]. Nestes dois artigos encontram-se também resultados a respeito da estabilidade de sistemas perturbados de sistemas não lineares.

BIBLIOGRAFIA

[1] - ANTOSIEWICZ, H.A. - A Survey of Lyapunov's Second Method - S. Lefschetz (ed.), Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol. IV, Annals of Mathematical Studies, N.º 41, Princeton, N.J., Princeton University Press, 1959.

[2] - BELLMAN, R. - Stability Theory of Differential Equations - McGraw-Hill, 1953.

[3] - BELLMAN, R. & COOKE, K. - Modern Elementary Differential Equations - Adisson-Wesley, 1971.

[4] - BIRKHOFF, G. & ROTA, G.C. - Ordinary Differential Equations - Ginn, Boston, 1962.

[5] - BOURBAKI, N. - Topologie Générale - Chap. X, Hermann et Cie., Paris, 1949.

[6] - CESARI, L. - Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations - 2nd edition, Academic Press, 1963.

[7] - CODDINGTON, E.A. & LEVINSON, N. - Theory of Ordinary Differential Equations - McGraw-Hill, 1955.

[8] - CONTI, R. & SANSONE, G. - Equazioni Differenziali Non Lineari - Cremonese, Roma, 1956.

[9] - COPPEL, W.A. - Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations - Heath Mathematical Monographs, 1965.

[10] - HAHN, W. - Theory and Applications of Liapunov's Direct Method - Prentice-Hall, 1963.

[11] - HALANAY, A. - Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags - Academic Press, 1966.

[12] - HALE, J.K. - Ordinary Differential Equations - Willey Interscience, 1969.

[13] - HARTMAN, P. - Differential Equations - John Wiley and Sons, 1964.

[14] - HÖNIG, C.S. - Aplicações da Topologia à Análise - Textos de Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade do Recife.

[15] - HUREWICZ, W. - Lectures on Orinary Differential Equations - The M.I.T. Press, 1958.

[16] - KRASOVSKII, N. - Stability of Motion - Stanford University Press, Stanford, Califórnia, 1963.

[17] - a - LASALLE, J.P. - The extent of asymptotic stability - Proc. Nat. Acad. Sci., 46, 1960, 363-365.

- b - LASALLE, J.P. - Recent advances in Liapunov stability theory - SIAM Review, Vol. 6, 1, January, 1964.

[18] - LASALLE, J.P. & LEFSCHETZ, S. - Stability by Liapùnov's Direct Method with Applications - Academic Press, 1961.

[19] - LEVIN, J. & NOHEL, J. - Ordinary Differential Equations - W. K. Benjamin, 1967.

[20] - LIUSTERNIK, L. & SOBOLEV, V. - Elements of Functional Analysis - Frederick Ungar, New York.

[21] - a - LIAPUNOV, A.M. - Problème Générale de la Stabilité du Mouvement - Annales of Mathematical Studies, N.º 17, Princeton, N.J., Princeton University Press, 1947.

- b - LIAPUNOV, A.M. - Stability of Motion - Academic Press, 1966.

[22] - MALKIN, I.G. - Theory of stability of motion - U. S. Atomic Energy Comission, A.E.C. - tr. - 3352.

[23] - MARKUS, L. - Periodic Solutions of Nonlinear Ordinary Differential Equations - Lectures Notes at the University of Minnesota, 1962.

[24] - a - MASSERA, J.L. - On Liapounoff's condition of stability - Annals of Mathematics, Vol. 50, N.º 3, 1949.

- b - MASSERA, J.L. - Contributions to stability theory - Annals of Mathematics, Vol. 64, N.º 1, 1956, 182-206.

[25] - MILLER, R.K. - Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations - Transactions of the American Math. Soc., Vol. 115, N.º 3, 1965, 400-416.

[26] - a - ONUCHIC, N. - On the uniform stability of a perturbed linear system - Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 6, N.º 3, 1963, 457-464.

- b - ONUCHIC, N. - On the Asymptotic Behavior of the Solutions of Functional Differential Equations - Differential Equations and Dynamical Systems - Academic Press, 1967.

- c - ONUCHIC, N. - Invariance properties for ordinary differential equations: stability and instability - Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol. 2, N.º 1, 1978, 69-78.

- d - ONUCHIC, N. - Invariance properties in the theory of ordinary differential equations with applications to stability problems - SIAM J. Control, Vol. 9, 1971, 97-104.

- e - ONUCHIC, N. - Invariance and stability for ordinary differential equations - J. Math. Analysis and Applications, Vol. 63, N.º 1, 1978, 9-18.

- f - ONUCHIC, N. - Stability Properties of a Second Order Differential Equations - Acta Mex. Ciencia Tecnol., 3, 1969, 6-11.

[27] - STRAUSS, A. - On the stability of a perturbed nonlinear system - Proc. Am. Math. Soc., Vol. 17, N.º 14, 1966, 803-807.

[28] - a - STRAUSS, A. & YORKE, J.A. - On Asymptotically Autonomous Differential Equations - University of Mariland, Technical Note, BN 466, 1966.

- b - STRAUSS, A. & YORKE, J.A. - Perturbation theorems for ordinary differential equations - Journal of Differential Equations, Vol. 3, N.º 1, 1967, 15-30.

[29] - a - YOSHIZAWA, T. - Asymptotic Behavior of Solutions of a System of Differential Equations - Contributions to Differential Equations, 1, 1963, 371-387.

- b - YOSHIZAWA, T. - Stability Theory by Liapunov's Second Method - Mathematical Society of Japan, 1966.

- c - YOSHIZAWA, T. - Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions, Springer--Verlag, 1975.