A. F. IZÉ

ESTABILIDADE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E O SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV.

NOVEMBRO - 1976

ESTABILIDADE NO SENTIDO DE LIAPUNOV

Consideremos o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad (1)$$

onde $f: I \times D \to R^n$ é contínua $I = [0,\infty)$ e D um conjunto aberto conexo do R^n. Seja F uma classe de soluções de (1) que permanecem em D. Seja $x_o(t)$ um elemento de F, $x_o(t_o) = x_o$.

Pelo teorema de continuidade em relação as condições iniciais, se $x(t,t_o,x_1)$ pertence a D e $x_1 \to x_o$ então $x(t,t_o,x_1) \to x_o(t)$ uniformemente em $[t_o,T]$, $T > t_o$, T finito, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(t_o,\varepsilon,T)$ tal que $|x_1 - x_o| < \delta$ implica que $|x(t,t_o,x_1) - x_o(t)| \leq \varepsilon$, $t_o \leq t \leq T$.

O teorema da continuidade em relação as condições iniciais nos mostra que o problema de determinar a solução através das condições iniciais é bem posto e tem sentido físico . Isto nos diz em particular que em intervalos finitos, pequenos erros cometidos na determinação das condições iniciais não afetam a solução muito seriamente.

É natural perguntar se o problema é sempre bem posto em intervalos infinitos $[t_o,\infty)$. É fácil de ver que isto nem sempre acontece, pois é suficiente considerar a equação $\dot{x} = x$ cuja solução é $x(t) = x_o e^t$.

Entretanto é importante saber, em diversos problemas físicos, como por exemplo no movimento de corpos celestes, em problemas de balística se pequenos erros de medida, o que sempre acontece na prática, não acarretam grandes alterações na solução para todo $t \geq t_o$. Isto pode ser alcançado fazendo δ independente de T e isto nos leva a noção de estabilidade no sentido de Liapunov.

Entretanto não precisamos nos ater a estabilidade de uma determinada solução particular $x_o(t)$, pois se desejamos estudar a estabilidade de solução $x_o(t)$ fazendo a mudança de variáveis $x = y + x_o(t)$ o sistema (1) se transforma em

$$y' = f(t,y + x_o(t)) - f(t,x_o(t))$$

ou

$$y' = F(t,y)$$

onde $F(t,0) = 0$ e a solução nula $y = 0$ é solução de (1). Portanto se desejamos estudar a estabilidade de uma solução qualquer de (1) podemos sempre, por uma mudança de variáveis, reduzir o problema ao estudo da solução nula, podemos, portanto, sem perda de generalidade, desenvolver toda a teoria de estabilidade assumindo que no sistema (1) $f(t,o) = 0$ e que D é o domínio $\{x \mid |x| < H\}$, $H > 0$.

Definição: Dizemos que a solução $x \equiv 0$ de (1) é estável se qualquer que seja $\varepsilon > 0$ e $t_o > 0$ existe $\delta(\varepsilon,t_o) > 0$ tal que se $|x_o| < \delta(\varepsilon,t_0)$ implica que $|x(t,t_o,x_o)| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_o$.

Definição: Se o δ na definição acima é independente de t_o dizemos que a solução $x \equiv 0$ de (1) é uniformemente estável.

É natural perguntar se o conceito de estabilidade acima definido depende de t_o, no sentido de $x = 0$ ser estável para um determinado valor de t_o e não ser estável para um outro valor. A resposta é não, isto é, se a solução é estável em t_o, ela é estável para todo valor de $t_1 > t_o$.

Se $t_1 \leq t_o$ isto decorre imediatamente da continuidade das soluções com relação as condições iniciais. De fato, se $x = 0$ é estável existe $\delta(\varepsilon, t_o) > 0$ tal que se $|x_o| \leq \delta(t, \varepsilon)$ implica que $|x(t, t_o, x_o)| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_o$. Pela continuidade com relação as condições iniciais existe $\delta_1(\varepsilon, t_o, t_1, \delta) > 0$ tal que se $|x_1| \leq \delta_1(\varepsilon, t_o, t_1, \delta)$ implica que $|x(t, t_1, x_1)| \leq \delta(\varepsilon, t_o)$ para $t_1 \leq t \leq t_o$. Logo $|x(t, t_1, x_1)| \leq \varepsilon$ para $t \geq t_o$ e portanto para $t \geq t_1$ o que implica estabilidade em t_1. Se $t_1 > t_o$, seja $V(t_1, \varepsilon) = \{x \in R^n | x = x(t_1, t_o, x_o)$ e $|x_o| < \delta(t_o, \varepsilon)\}$. Como a transformação $x(t, t_o, \cdot)$ é um homeomorfismo existe $\delta_1(t_1, \varepsilon)$ tal que $\{x \,|\, |x| \leq \delta_1(t_1, \varepsilon)\} \subset V(t_1, \varepsilon)$. Então se $|x_1| \leq \delta_1(t_1, \varepsilon)$ implica $|x(t, t_1, x_1)| \leq \varepsilon$ para $t \geq t_1$, isto é, estabilidade em t_1.

Se a solução nula de (1) é estável a solução de (1) pelo ponto $(t_o, 0)$, $t_o \in I$ é única a direita pois se existis se outra solução $x_1(t)$, em algum ponto $t_1 > t_o$ teríamos $x(t_1) \neq 0$ e tomando $0 < \varepsilon < |x(t_1)|$ pela definição de estabilidade, esta solução não seria estável. Entretanto mesmo que a solução zero seja estável, soluções com condição inicial proximas da origem podem não ser únicas; por exemplo, considere a equação escalar

$$\dot{x} = f(x) \qquad (2)$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} -2\pi(2^{-k}-x)^{\frac{1}{2}}(x-2^{-k-1})^{\frac{1}{2}}, (2^{-k-1} \leqslant x \leqslant 2^{-k})k = 0,1,\ldots \\ -x \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 0). \end{cases}$$

Logo $f(x)$ é contínua para $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e para cada $k = 0, 1,\ldots$ e cada $t_o > 0$ existe uma infinidade de soluções por $(t_o,2^{-k})$ uma das quais é $x(t) = 2^{-k}$, e a outra que é

$$x(t) = 2^{-k} - 2^{-k-1}\operatorname{sen}^2\pi(t - t_o) \quad \text{para} \quad t_o \leqslant t \leqslant t_o+\tfrac{1}{2}$$

O seguinte exemplo mostra que a estabilidade da solução nula não implica necessariamente na estabilidade uniforme, considere a equação escalar autônoma

$$x' = f(x) \qquad (3)$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} -x \ , \ x \geqslant -e^{-t} \\ x \ , \ x < -e^{-t} \end{cases}$$

A solução $x = 0$ é estável pois por exemplo se $t_o = 0$ e qualquer que seja $\varepsilon > 0$ tomando $\delta < \varepsilon$, $\delta < 1$ a solução por x_o, $|x_o| < \delta$ é $x(t) = x_o\, e^{-t}$ e $|x(t)| \leqslant \varepsilon$ para $t \geqslant t_o$, entretanto se $t_o > 0$ é suficiente mente grande na vizinhança $\{x(t_o) \mid |x(t_o)| \leq \delta\}$ existem pontos tais que a solução por estes pontos é $(x(t) = |x(t_o)e^t| > \varepsilon)$ para t suficientemente grande. Portanto δ não é independente de t_o e $x = 0$ não é uniformemente estável.

Vamos supor agora que o sistema (1) seja periódico, isto é,

$$x' = f(t,x) \ , \ f(t + w,x) = f(t,x) \ , \ w > 0 \qquad (4)$$

$$f \in C(R \times D, R^n) \quad \text{contínua}$$

Então temos o seguinte:

Teorema **1:**

Se a solução nula de (4) é estável, então ela é uniformemente estável.

Demonstração:

Pela estabilidade simples temos que qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1(w,\varepsilon)$ tal que se $||x_o|| < \delta_1(w,\varepsilon)$ implica $||x(t,w,x_o)|| \leq \varepsilon$ para $t \geq w$. Como a solução zero é estável ela é única, logo o teorema de continuidade em relação as condições iniciais garante que existe um $\delta_o = \delta(w,\delta_1)$ tal que se $||x_o|| \leq \delta_o$ e $t_o \in [0,w]$ temos $||x(t,t_o,x_o)|| \leq \leq \delta_1$ para $t_o \leq t \leq w$.

Portanto se $t_o \in [0,w]$ temos $||x(t,t_o,x_o)|| \leq \delta_1$ para $t_o \leq t \leq w$. Logo se $t_o \in [0,w]$ e $||x_o|| \leq \delta_o$ teremos $||x(t,t_o,x_o)|| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_o$.

Vamos agora ver o caso em que $t_o \notin [0,w]$. Se $t_o \notin \notin [0,w]$ podemos garantir que existe $k \geq 1$ inteiro, tal que, $kw \leqslant t_o \leqslant (k + 1)w$.

Pela periodicidade de $f(t,x)$ temos que se $x(t,t_o,x_o)$ é solução, então $x(t - kw,t_o - kw,x_o)$ também é solução. De fato se $y(t) = x(t - kw,t_o - kw,x_o)$ então $\dot{y}(t) = f(t - kw,x(t - kw) = f(t,x(t - kw))$. Observando que $x(t_o,t_o,x_o) = x(t_o - kw,t_o - kw,x_o) = y(t_o,t_o,x_o)$ e pela unicidade da solução nula, temos que $x(t,t_o,x_o) =$ $= x(t - kw,t_o - kw,x_o) = y(t,t_o,x_o)$. Pondo $\zeta = t_o - kw$ temos que $0 \leqslant \zeta \leqslant w$ e $x(t - kw,t_o - kw,x_o) \equiv x(t - kw,\zeta,x_o)$. Fazendo $||x_o|| \leqslant \delta_o$ temos que $||x(t,t_o,x_o)|| =$ $= ||x(t - kw,t_o - kw,x_o)|| \leqslant \varepsilon$ para $t - kw > t_o - kw$. Portanto $x \equiv 0$ é uniformemente estável.

Existem sistemas físicos nos quais um pequeno erro na determinação das condições iniciais implica pequenas alterações na solução para todo $t \geqslant 0$, mas, mais ainda, estas pequenas alterações tendem a zero a medida que t cresce e isto nos leva a um conceito de estabilidade mais forte que é o conceito de estabilidade assintótica.

Definição:

A solução nula de (1) é quase assintoticamente estável se para cada $t_o \geqslant 0$ existe $\delta(t_o) > 0$ tal que se $||x_o|| \leqslant \delta(t_o)$ então $\lim_{t\to\infty} ||x(t,t_o,x_o)|| = 0$

Definição:

A solução nula de (1) é assintoticamente estável se *for estável* e quase assintoticamente estável.

Pode parecer a primeira vista de que o fato de que a solução nula de (1) ser quase assintoticamente estável implica que a solução nula de (1) é assintoticamente estável. O seguinte exemplo mostra que isto não é verdade mesmo para sistemas autônomos.

Exemplo:

Seja D_1 o semiplano $y \leqslant 0$. Seja D_2 o lugar dos pontos que satisfazem a condição $x^2 + y^2 \leqslant 2|x|$ que consiste dos discos $(x \pm 1)^2 + y^2 \leqslant 1$. Seja D_3 a semi faixa $|x| \leqslant 2$, $y > 0$. Seja D_4 o lugar dos pontos que satisfazem $|x| > 2$ $y > 0$.

O sistema

$$\dot{x} = \begin{cases} 2xy & \text{em } D_1 \cup D_2 \cup D_3 \\ 2xy/\left[3 - (4/|x|)\right] & \text{em } D_4 \end{cases} \tag{5}$$

$$\dot{y} = \begin{cases} y^2 - x^2 & \text{em } D_1 \cup D_2 \\ 4|x| - y^2 - 3x^2 & \text{em } D_3 \\ (4|x| - y^2 - 3x^2)/\left[3 - 4|x|\right] & \text{em } D_4 \end{cases}$$

é instável; entretanto $\lim x(t) = 0$ para todas as soluções $x(t)$

Exercício:

Demonstrar que para $n = 1$, isto é, a equação (1) é escalar, estabilidade quase assintótica implica estabilidade de assintótica.

Definição:

Dizemos que a solução nula de (1) é equiassintotica -

mente estável se for estável e se, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $t_o \geq 0$ existe um $\delta_0(t_o) > 0$ e um $T(t_o,\varepsilon)$ tla que se $||x_o|| \leq \delta_o(t_o)$ implica que $||x(t,t_o,x_o)|| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_o + T(t_o,\varepsilon)$.

Definição:

A solução nula de (1) é uniformemente assintoticamente estável se for uniformemente estável e se δ_o e T na definição anterior são independentes de t_o.

O seguinte exemplo mostra que estabilidade assintotica não implica estabilidade assintótica uniforme. Consideremos a equação

$$\dot{x} = -\frac{1}{t+1}\,x \quad x(0) = 1$$

que tem solução $x = \frac{1}{t+1}$. É fácil de ver que esta solução é assintoticamente estável mas não é uniformemente assintoticamente estável.(Decorre do teorema 6que segue). Entretanto para sistemas periódicos esta implicação é verdadeira.

Teorema 2:

Para o sistema (4) estabilidade assintótica implica estabilidade assintótica uniforme.

Demonstração:

No teorema anterior vimos que se a solução nula de (4) é estável, ela é uniformemente estável, logo já temos estabilidade uniforme.

Vamos agora mostrar que, o fato de a solução nula ser uniformemente estável e quase assintoticamente estável, implica que é assintoticamente estável, isto é, existe $\delta_o(t_o) > 0$ e para cada $\varepsilon > 0$ um $T(t_o,\varepsilon)$ tal que $||x_o|| \leq \delta_o(t_o)$ implica que $||x(t,t_o,x_o)|| \leq \varepsilon$ para $t \geq T(t_o,\varepsilon)$. Vamos supor que não.

Da estabilidade quase assintótica de $x(t) \equiv 0$ existe $\delta_o = \delta_o(t_o)$ tal que se $||x_o|| \leq \delta_o$ implica que $\lim\limits_{t\to\infty}||x(t,t_o,x_o)|| = 0$. Pela nossa hipótese, para algum $t_o \in I$ e algum $\varepsilon > 0$ existem sequências $\{x_k\}$, $\{\tau_k\}$ tais que $||x_k|| \leq \delta_o(t_o)$, $\tau_k \to \infty$ para $k \to \infty$ e tais que $||x(\tau_k,t_o,x_k)|| > \varepsilon$. Seja x_o um ponto se acumulação de $\{x_k\}$ e portanto $||x_o|| \leq \delta_o(t_o)$. Para todo intervalo finito a sequência $\{x(t,t_o,x_k)\}$ é uniformemente limitada e equicontínua, e portanto, pelo teorema de Ascoli existe uma subsequência que converge uniformemente em todo intervalo finito, para uma solução $x(t,t_o,x_o)$ e indicamos esta subsequência pela mesma notação $\{x(t,t_o,x_k)\}$.

Como $||x_o|| \leq \delta_o(t_o)$, $\lim\limits_{t\to\infty}||x(t,t_o,x_o)|| = 0$, portanto qualquer que seja $\eta > 0$, se m é suficientemente grande temos $||x(mw,x_o,t)|| \leq \eta$ onde $m > 0$ é um inteiro. Como $\{x(t,t_o,x_k)\}$ converge uniformemente para $x(t,t_o,x_o)$, $||x(mw,t_o,x_k)|| \leq \eta$ para algum k suficientemente grande e além disto $||x(\tau_k,t_o,x_k)|| > \varepsilon$ para $\tau_k > mw$. Deste modo existe uma solução $x(t,0,x(mw,t_o,x_k))$ tal que $||x(\tau_k-mw,0x(mw,t_o,x_k)|| > \varepsilon$ o que contradiz a estabilidade de $x(t) \equiv 0$. Portanto a solução nula de (1) é equiassintoticamente estável. Vamos mostrar agora que estabilidade de equiassintótica implica no caso periodico estabilidade equiassintotica uniforme.

De fato da estabilidade equiassintotica existe $\delta_o(w)$ e $T(w,\varepsilon)$ tal que $||x_o|| \leq \delta_o(w)$ implica $||x(t,w,x_o)|| \leq \varepsilon$ para $t \geq w + T(w,\varepsilon)$. Pelo teorema de continuidade em relação as condições iniciais podemos garantir a existência de $\delta = \delta(w,\delta_o)$ tal que $||x_o|| \leq \delta$ e $t_o \in [0,w]$ implicam $||x(t,t_o,x_o)|| \leq \delta_o$ para $t_o \leq t \leq w$ e portanto $||x(t,t_o,x_o)|| \leq \varepsilon$ para $t \geq w + T(w,\varepsilon)$. Pondo $T(\varepsilon) = w + T(w,\varepsilon)$ e lembrando que $t_o \geq 0$ temos que $||x(t,t_o,x_o) \leq \varepsilon$ para $t \geq t_o + T(\varepsilon)$. Logo o teorema vale para qualquer $t_o \in [0,w]$. Tomemos agora $t_o \notin [0,w]$.

Da mesma forma que no teorema anterior podemos garantir a existência de k tal que $kw \leq t_o \leq (k+1)w$. Sabemos também que $x(t-kw,t_o-kw,x_o)$ é solução e ainda mais $x(t-kw,t_o-kw,x_o) \equiv x(t,t_o,x_o)$. Fazendo $\tau = t_o-kw$ temos $0 \leq \tau \leq w$. Portanto se $||x_o|| \leq \delta$ temos $||x(t-kw,t_o-kw,x_o)|| \leq \varepsilon$ para $t-kw \geq t_o-kw + T(\varepsilon)$ de onde vem que $t \geq t_o + T(w)$. Mas $||x(t-kw,t_o-kw,x_o)|| = ||x(t,t_o,x_o)||$. Logo temos estabilidade equiassintótica uniforme com $\delta_o = \delta(w)$ e $T(\varepsilon) = T(w,\varepsilon) + w$.

Definição:

Dizemos que a solução nula de (1) é exponencialmente estável se para todo $t_o > 0$ existem constantes $\delta > 0$;

$\beta > 0$ e $\lambda > 0$ tais que se $||x_o|| < \delta$ implica que $||x(t,t_o,x_o)|| < \beta\ e^{-\lambda(t-t_o)}$ para todo $t > t_o$.

Observação:

Esta definição é equivalente a seguinte: **existe** $\lambda > 0$ e para cada ε um $\delta(\varepsilon)$ tal que se $||x_o|| \leqslant \delta(\varepsilon)$ implica $||x(t,t_o,x_o)|| \leqslant \varepsilon \exp\ [-\lambda(t-t_o)]$

Exemplo 1:

A solução nula de $\dot{x} = -x$ é exponencialmente estável.

Exemplo 2:

A solução nula de $\dot{x} = 0$ é estável e uniformemente estável mas não é exponencialmente estável.

Exemplo 3:

A solução nula de $\dot{x} = -\frac{1}{t+1}x$ que tem por solução $x(t) = x_o \frac{t_o+1}{t+1}$ é assintoticamente estável, **mas** não é exponencialmente estável.

ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES

Consideremos o sistema linear

$$\dot{x} = A(t)\ x \qquad (6)$$

onde $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ contínua em I. Seja $\mathbf{X}(t)$ uma matriz fundamental de soluções de (6). Então qualquer solução de (6) por (t_o,x_o) é de forma $x(t,t_o,x_o) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_o)x_o$.

Uma propriedade importante dos sistemas lineares é que a estabilidade, estabilidade uniforme, estabilidade assintótica e assintótica uniforme e exponencial da solução nula e global, isto é, o δ da definição destes conceitos é arbitraria, isto quer dizer que se a solução nula satisfaz um destes tipos de estabilidade então qualquer outra solução também satisfaz e dizemos então neste caso que o sistema (6) é estável, uniformemente estável, assintoticamente estável, exponencialmente estável. De fato

Teorema 3:

Se a solução nula de (6) é estável, uniformemente estável, assintoticamente estável, uniformemente assintoticamente estável, exponencialmente estável, então o sistema é estável, uniformemente estável, assintoticamente estável, uniformemente assintoticamente estável, exponencialmente estável.

Demonstração:

Vamos supor que a solução nula é estável (uniformemente estável) então dadas $\varepsilon > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon, t_o)$, $(\delta = \delta(\varepsilon))$ tal que $||x(t_o)|| \leqslant \delta$ implica que $||x(t,t_o)|| \leqslant \varepsilon$ para $t \geqslant t_o$.

Seja $y(t)$ uma solução qualquer de (6). Seja $z(t)$ uma solução de (6) tal que se $|z(t_o) - y(t_o)| \leqslant \delta$. Consideremos a solução $x(t) = z(t) - y(t)$ e portanto $x(t_o) = z(t_o) - y(t_o)$. Como a solução nula é estável (uniformemente estável) $||x(t_o)|| = ||z(t_o) - y(t_o)|| \leqslant \delta$ implica que $||x(t)|| = ||z(t) - y(t)|| \leqslant \varepsilon$ portanto a solução $y(t)$ é estável (uniformemente estável).

Analogamente, se a solução nula de (6) é assintóticamente estável, uniforme assintoticamente estável, exponencialmente estável, implica que $y(t)$ é assintoticamente estável, uniforme assintoticamente estável, exponencialmente estável e como $y(t)$ é arbitrario o teorema está provado.

Para o sistema (6) estabilidade e limitação são conceitos equivalentes.

Teorema 2:

O sistema (6) é estável se, e somente se, dada uma matriz fundamental $U(t)$ existe constante M tal que $||U(t)|| \leq M$ para $t \geq 0$.

Vamos supor que existe constante M tal que $||U(t)|| \leq M$ onde $U(t)$ é uma matriz fundamental de (6) tal que $U(t_o) = I$. Qualquer solução de (6) por (t_o, x_o) é da forma $x(t,t_o,x_o) = U(t)x(t_o)$ então dado $\varepsilon > 0$ tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, se $||x(t_o)|| \leq \delta$ implica que $||x(t,t_o,x_o)|| = ||U(t)x(t_o)|| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ logo a solução nula é estável e portanto pelo teorema anterior o sistema anterior é estável.

Se o sistema (6) é estável e portanto a solução nula é estável, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda solução $x(t)$ tal que $||x(t_o)|| \leq \delta$ implica que $||x(t)|| \leq 1$ para $t \geq 0$. Se determinarmos n soluções linearmente independentes que sejam limitadas obtemos uma matriz fundamental limitada. De fato se x^j é um vetor coluna de matriz $U(t)$ tal que $U(t_o) = I$ tomando $x_j(t) = \frac{\delta}{2} x^j(t)$ e como $||x_j(t_o)|| = \frac{\delta}{2} < \delta$ implica que $||x_j(t)|| \leq 1$ para todo $t \geq t_o$, $j = 1,2\ldots n$. Como os x_j são linearmente independentes porque os x^j o são, eles formam uma matriz fundamental $V(t)$ limitada. Como existe matriz constante C tal que $V(t) = U(t)C$ e $V(t)$ limitada, implica que $U(t)$ é limitada.

Observamos que a constante M depende em geral de t_o e portanto o δ tomado na demonstração depende de t_o, logo um sistema linear homogêneo pode ter as soluções limitadas para todo $t \geq 0$ e não ser uniformemente estável.

Teorema 4:

O sistema (6) é uniformemente estável se e somente se existe constante $M > 0$ tal que $|U(t)U^{-1}(s)| \leq M$ para $0 \leq s \leq t$ onde $U(t)$ é uma matriz fundamental qualquer do sistema dado.

Prova:

Lembremos que se $U(t)$ e $V(t)$ são duas matrizes fundamentais $U(t)U^{-1}(s) = V(t)V^{-1}(s)$ então podemos sempre escolher uma $U(t)$ conveniente.

Vamos supor que existe constante $M > 0$ tal que $|U(t)U^{-1}(s)| \leq M$, $0 \leq s \leq t$ e vamos mostrar que a solução nula é uniformemente estável. De fato, qualquer solução de (6) é dada da forma

$$x(t) = U(t)U^{-1}(t_o)\ x(t_o)$$

$||x(t)|| \leqslant ||U(t)U^{-1}(t_o)||\ ||x(t_o)|| \leqslant M\ ||x(t_o)||$ onde M não depende de t_o, logo, dado $\varepsilon > 0$ tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ temos que $||x(t)|| \leqslant \varepsilon$ e a solução nula de (6) é uniformemente estável e portanto o sistema (6) é uniformemente estável.

Reciprocamente se o sistema (6) é uniformemente estável e portanto a solução nula é uniformemente estável então:

Dado $\varepsilon = 1$ existe δ independente de s tal que se $||x(s)|| \leqslant 1$ implica que $||x(t)|| \leqslant 1$ para $t \geqslant s$.

Escolhendo $U(t)$ tal que $U(s) = I$ e chamando $x^j(t)$ a coluna j de $U(t)$, $j = 1,2,\ldots n$ vem que

$||\frac{\delta}{2}x^j(s)|| = \frac{\delta}{2}||x^j(s)|| = \frac{\delta}{2} \leqslant \delta$ logo $||\frac{\delta}{2}x^j(t)|| \leqslant 1$ logo

$||x^j(t)|| \leqslant \frac{2}{\delta}$ e como $x^j(s) = 1$ $j = 1,2\ldots n$ temos

$\frac{2}{\delta} \geqslant ||x^j(t)|| = ||U(t)U^{-1}(s)x^j(s)|| = \sum_{i=1}^{n} ||(U(t)U^{-1}(s))_{ij}||$. $t \geqslant s$

$j = 1\ 2\ldots n$ (n colunas) e portanto $|U(t)U^{-1}(s)| \leqslant \frac{2n}{\delta}$ para $0 \leqslant s \leqslant t$.

O seguinte exemplo mostra que há sistemas estaveis que não são uniformemente estáveis. Considere a equação:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\frac{2}{t}.y$$

para $t \geqslant 1$ que tem por soluções linearmente independentes

$(1,0)$ e $(-\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2})$. É evidente que a matriz fundamental $V(t)$ formada por estas soluções é limitada e portanto o sistema é estável. Entretanto

$$V(t)V^{-1}(s) = \begin{pmatrix} 1 & s - s^2/t \\ 0 & \frac{s^2}{t^2} \end{pmatrix}$$

e, para $t = 2s$ temos $|V(t)V^{-1}(s)| = s - \frac{s^2}{t} = s - \frac{s}{2} = \frac{s}{2}$ que não é limitada uniformemente e pelo teorema anterior não é uniformemente estável.

Teorema 5.

Se a solução $x(t) \equiv 0$ de (6) é assintoticamente estável, então ela é equiassintoticamente estável.

Demonstração:

Como a estabilidade assintotica implica que todos os elementos de $U(t)$ tendem a zero para $t \to \infty$, existe um $T(t_o,\varepsilon) > 0$ tal que se $t \geqslant T(t_o,\varepsilon)$, $||U(t)U^{-1}(t_o)|| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta_o}$, onde ε é dado e $\delta_o > 0$ é uma constante. Portanto se $||x_o|| < \delta_o$ e $t \geqslant t_o + T(t_o,\varepsilon)$

$$||x(t,t_o,x_o)|| \leqslant ||U(t)U^{-1}(t_o)|| \; ||x_o|| \leqslant \varepsilon$$

o que mostra que $x(t) \equiv 0$ de (6) é equiassintoticamente estável.

Teorema 6:

Se a solução nula de (6) é uniformemente assintoticamente estável, então ela é exponencialmente assintoticamente estável.

Demonstração:

Da estabilidade uniforme, segue que existe constante $N \geq 1$ tal que $||U(t)U^{-1}(t_o)|| \leq N$ para todo $t \geq t_o \geq 0$ onde $U(t)$ é uma nmatriz fundamental de (6). Da estabilidade uniforme assintótica existe ρ, $T \geq 0$ tais que $||U(t)U^{-1}(t_o)|| \leq \frac{1}{2}$ para $t \geq t_o + T$ e $||x_o|| \leq \rho$. Isto implica que:

$$||U(t)U^{-1}(t_o)|| \leq 2^{-k} N \quad \text{para} \quad t \geq t_o + kT,\ k = 0,1,2 \quad (7)$$

De fato

$$||U(t)\ U^{-1}(t_o + T)||\ ||U^{-1}(t_o + T)\ U^{-1}(t_o + T)U^{-1}(t_o)|| \leq$$

$$\leq ||U(t)\ U^{-1}(t_o + T)||\ ||U^{-1}(t_o + T)\ U^{-1}(t_o)||$$

Mas $||U(t)U^{-1}(t_o + T)|| \leq \frac{1}{2}$ para $t \geq t_o + 2T$ e

$$||U^{-1}(t_o + T)\ U^{-1}(t_o)|| \leq \frac{1}{2} \quad \text{logo}$$

$$||U(t)U^{-1}(t_o)|| \leq 2^{-2} \leq 2^{-2}N \quad \text{para} \quad t \geq t_o + 2T \quad \text{e} \quad ||x_o|| \leq \rho$$

Mostremos agora por indução que se (7) vale para $k = m - 1$ então vale para $k = m$. De fato

$$||U(t)U^{-1}(t_o)|| = ||U(t)U^{-1}(t_o + (m-1)T)U(t_o + m-1)TX^{-1}(t_o)|| \leq$$

$$\leq ||U(t)U^{-1}(t_o + (m-1)T)||\ ||U(t_o + (m-1)T)\ X^{-1}(t_o))||$$

mas pela estabilidade uniforme assintótica

$$||U(t)U^{-1}(t_o + (m-1)T)|| \leq \frac{1}{2} \quad \text{para} \quad t \geq t_o + mT \qquad \text{e}$$

$$||U(t_o + (m-1)T)U^{-1}(t_o)|| \leqslant 2^{-(m-1)}N$$

pela hipótese de indução para $t \geqslant t_o + (m-1)T$. Logo

$||U(t)U^{-1}(t_o)|| \leqslant 2^{-m}N$ para $t \geqslant t_o + mT$

Pondo $\lambda = \dfrac{\log 2}{T}$ temos que $||U(t)U^{-1}(t_o)|| \leqslant$ $\leqslant 2\ N\ e^{-\lambda(t-t_o)}$ para $t \geqslant t_0$. De fato, dado $\bar{t} \geqslant t_o$ temos que existe inteiro k tal que

$$t_o + kT \leqslant \bar{t} \leqslant t_o + (k+1)T$$

ou seja $\bar{t} - t_o \leqslant (k+1)T$. Porém se $\bar{t} \geqslant t_o + kT$ temos que $||U(t)U^{-2}(t_o)|| \leqslant N\ 2^{-k}$.

Basta pois mostrar que $N\ 2^{-k} \leqslant 2\ N\ e^{-\lambda(\bar{t}-t_o)}$ ou seja $2^{-k} \leqslant 2\ e^{-}(\bar{t}-t_o)$.

Mas como $0 \leqslant t - t_o \leqslant (k+1)T$ vem

$2\ e^{-(\bar{t} - t_o)} \geqslant 2\ e^{-\lambda(k+1)T} = 2\ e^{-\frac{\log 2}{T}(k+1)T} =$

$= \ 2\ e^{-(k+1)\log 2} = 2^{-k}$ logo temos

$||U(t)U^{-1}(t_o)|| \leqslant 2\ N\ e^{-\lambda(t-t_o)}$ para $t \geqslant t_o \geqslant 0$ logo

$||x(t,t_o,x_o)|| = ||U(t)U^{-1}(t_o)x_o|| \leqslant ||U(t)U^{-1}(t_o)||$

$||2\ N\ e^{-\lambda(t-t_o)}||x_o||$

Já vimos anteriormente que para sistemas periodicos, em particular autônomos, estabilidade implica estabilidade uniforme; logo se $A(t)$ é periódica ou constante, estabilidade de (6) implica estabilidade uniforme.

O sistema

$$\dot{x} = A\,x \quad , \quad A \quad \text{constante} \qquad (7)$$

é uniformemente estável se, e somente se todas as suas soluções são limitadas e isto é verdade se, e somente se $Re(\lambda) \leq 0$ para todo autovalor de A e os auto valores de A tais que $Re(\lambda) = 0$ tem multiplicidade igual a nulidade. Se $Re(\lambda) < 0$ pata todo auto valor de A o sistema (7) é exponencialmente estável. Isto decorre do fato de que toda solução de (7) é da forma $||x(t,t_o,x_o)|| =$
$= |p(t)\ e^{\lambda\varepsilon}|| < ||p(t)||\ e^{Re(\lambda)t} \leq ||p(t)||e^{-\varepsilon t}e^{(Re(\lambda)+\varepsilon)\lambda} \leq$
$\leq k\ e^{-\alpha t}$ onde $Re(\lambda) < \varepsilon < 0$ e $p(t)$ é um polinômio.

Se $A(t)$ é periódica de período w, pela teoria de Floquet, toda matriz fundamental de (6) é da forma
$U(t) = z(t)\ e^{tR}$ onde $z(t)$ e W periódica e os multiplicadores característicos ρ são auto valores da matriz e^{wR}. Os expoentes característicos λ são auto valores da matriz R e $\rho = e^{w\lambda}$.

Teorema 7:

Se $A(t)$ é w periódica e os multiplicadores característicos estão no círculo $|z| \leq 1$ e os multiplicadores característicos situados em $|z| = 1$ correspondem a blocos de Jordan unidimensionais, então o sistema (6) é uniformemente estável. Se os multiplicadores característicos estão no círculo $|z| < 1$, o sistema (6) é exponencialmente estável.

Demonstração:

Se $|\rho| \leq 1$ então $Re(\lambda) \leq 0$.

Se $|\rho| = 1$, $Re(\lambda) = 0$ então os expoentes característicos tem parte real menor ou igual a zero e os que tem parte real zero corresponde a blocos de Jordan unidimensionais. Se $|\rho| < 1$, $Re(\lambda) < 1$ logo

$$|e^{Rt}| \leq M, \quad \text{se} \quad |\rho| \leq 1 \qquad \text{e}$$

$$|e^{Rt}| \leq k\, e^{-\alpha(t-t_o)} \quad \alpha > 0 \quad \text{se} \quad |\rho| < 1$$

como $Z(t)$ é contínua e periodica portanto limitada

$$||U(t)|| = ||P(t)e^{Rt}|| \leq M \quad \text{se} \quad |\rho| \leq 1$$

e $\quad ||U(t)|| = ||P(t)e^{Rt}|| \leq M\, e^{-\alpha(t-t_o)} \quad$ se $|\rho| < 1$

e o teorema está provado.

Consideremos o sistema linear não homogêneo

$$\dot{y} = A(t)y + f(t) \qquad (8)$$

Teorema

O sistema (8) é estável (uniformemente estável) se, e somente se o sistema (6) é estável (uniformemente estável)

Seja $x(t)$ $\tilde{x}(t)$ soluções de (6), $y(t)$ $\tilde{y}(t)$ soluções de (8) tais que $y(t_o) = x(t_o)$, $\tilde{y}(t_o) = \tilde{x}(t_o)$ $y(t) - \tilde{y}(t)$ é solução do sistema homogêneo (6) e $x(t) - \tilde{x}(t)$ é solução do homogêneo (6) e do fato que $y(t)-\tilde{y}(t_o) = x(t_o) - \tilde{x}(t_o)$. Segue que $y(t) - \tilde{y}(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ logo se (6) é estável (uniformemente estável) implica que (8) é estável (uniformemente estável) e reciprocamente.

Condições Suficientes de Estabilidade

Segundo Método de Lyapunov

Funções de Lyapunov:

Seja $f(t,x) \in C(I \times D, R^n)$ onde D é um conjunto aberto em R^n, $I = |0,\infty)$

Para o sistema

$$x' = f(t,x) \qquad ' = \frac{d}{dt} \tag{1}$$

vamos considerar uma função escalar contínua $V(t,x)$ definida em conjunto aberto $S \subset R \times D$. Vamos supor que $V(t,x)$ satisfaz localmente uma condição de Lipschitz com relação a x, para cada ponto em S existe uma vizinhança U e um número positivo $L(U)$ tal que

$$|V(t,x) - V(t,y)| \leq L(U)\,||x - y||$$

para todo $(t,x) \in U$, $(t,y) \in U$

Definimos a função:

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) = \overline{\lim}\frac{1}{h}\; V(t + h, x + hf(t,x)) - V(t,x) \tag{2}$$

Seja $x = x(t)$ uma solução de (1) que permanece em S e vamos indicar por $V'(t,x(t))$ a derivada superior de $V(t,x(t))$, isto é,

$$V'(t,x(t)) = \overline{\lim_{h \to o}}\, \frac{1}{2}\, V(t + h, x(t + h)) - V(t,x) \tag{3}$$

Proposição:

Se V satisfaz uma condição de Lipschitz local em $S \subset R \times D$ com relação a x então temos

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) = V'(t,x(t)) \tag{4}$$

De fato:

Para um ponto $(t,x) \in S$ e h suficientemente pequeno, existe uma vizinhança de (t,x) e $L > 0$ tal que $\bar{U} \subset S$, $(t+h, x+hf(t,x)) \in U$, $(t+h, x(t+h)) \in U$ e

$|V(\tau,\zeta)-V(\tau,\eta)| \leq L|\xi-\eta|$ para $(\tau,\xi) \in U$ e $(\tau,\eta) \in U$

temos então

$$V(t+h,x(t+h))-V(t,x) = V(t+h,x+hf(t,x)+h\varepsilon) - V(t,x) = \tag{5}$$

$$= V(t+h,x+hf(t,x)+h\varepsilon) - V(t+h,x+hf(t,x)) + V(t+h,x+hf(t,x))$$

$$- V(t,x) \leq L\,h|\varepsilon| + V(t+h,x+hf(t,x)) - V(t,x)$$

onde ε tende a zero com h. De (2) segue que

$$\overline{\lim_{h\to o^+}}\frac{1}{h}\{V(t+h,x(t+h)) - V(t,x)\} \leq \tag{6}$$

$$\leq \overline{\lim_{h\to 0_+}}\frac{1}{h}\{V(t+h,x+hf(t,x)) - V(t,x)\}$$

Por outro lado temos

$$V(t+h,x(t+h)) - V(t,x) \geq V(t+h,x+hf(t,x)) - V(t,x)-Lh|\varepsilon|$$

o que implica que

$$V'(t,x(t)) \geq \dot{V}(t,x) \tag{7}$$

De (6) e (7) implica que $V'(t,x(t)) = \dot{V}(t,x)$

De modo análogo obtemos a relação

$$\underline{\lim_{h\to 0_+}}\{V(t+h,x(t+h)) - V(t,x\} = \underline{\lim_{h\sim 0_+}}\{V(t+h,x+hf(t,x)) -$$

$$- V(t,x)\}$$

Quando $V(t,x)$ admite derivadas parciais contínuas de primeira ordem, é evidente que

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t,x)$$

onde $\cdot$ denota o produto escalar.

Observação:

Quando $V(t,x)$ não é localmente Lipschitziana com relação a x, mesmo se a solução $x(t)$ seja única a direita, não temos necessariamente a relação (4).

Por exemplo:

Consideremos a função

$$V = \sqrt{x} \ , \quad x \geqslant 0$$

para a equação

$$x' = 2t \ , \quad x > 0$$

É obvio que $\dot{V}(0,0) = 0$, mas para a solução $x(t) = t^2$ por $(0,0)$ temos $V'(0,0) = 1$

Como sabemos se $\dot{V}_{(1)}(t,x) \leqslant 0$ e portanto $V'(t,x(t)) \leqslant 0$ a função $V(t,x(t))$ é não decrescente com relação a t, isto é, $V(t,x)$ é não decrescente ao longo de uma solução de (1) e vice versa, se $V(t,x)$ é não decrescente ao longo da solução (1), temos $\dot{V}_{(1)}(t,x) \leqslant 0$.

Teorema 1:

Vamos supor que existe uma função de Lyapunov $V(t,x)$ definida em $I \times D$ que satisfaz as seguintes condições:

$$V(t,0) = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$a(|x|) \leqslant V(t,x) \qquad \text{(ii)}$$

onde $a(r)$ é uma função contínua positiva definida, isto é, $a(0) = 0$ e $\forall |x| \leqslant \rho$, $a(|x|) > 0$ se $|x| \neq 0$

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \leqslant 0 \qquad \text{(iii)}$$

Então a solução nula de (1) é estável.

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < H$ temos $a(\varepsilon) \leqslant V(t,x)$ para x tal que $|x| = \varepsilon$

Para t_o fixado podemos escolher $\delta(t_o,\varepsilon) > 0$ tal que $|x_o| < \delta(t_o,\varepsilon)$ implica $V(t_o,x_o) < a(\varepsilon)$ pois $V(t_o,0) = 0$ e $V(t,x)$ é contínua.

Vamos supor que existe solução $x(t,t_o,x_o)$ de (1) tal que se $||x_o|| < \delta(t_o,\varepsilon)$ implica que $x(t_1,t_o,x_o) = \varepsilon$ para algum $t_1 \geqslant t_o$ então por iii) $V(t_1,x(t_1,t_o,x)) \leqslant$ $\leqslant V(t_o,x_o)$

$$a(\varepsilon) \leqslant V(t,x(t_1,t_o,x_o)) \leqslant V(t_o,x_o) < a(\varepsilon)$$

contradição e portanto se $|x_o| < \delta(t_o,\varepsilon)$ então $|x(t,t_o,x_o)| < \varepsilon$ para todo $t \geqslant t_o$ e portanto a solução é estável.

Teorema 2:

Se a condição no teorema (1) for substituida por

$$a(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant b(|x|) \qquad \text{(ii')}$$

onde $b(r)$ é uma função contínua estritamente crescente e tal que $b(0) = 0$, então a solução nula de (1) é uniformemente estável.

Demonstração:

Seja $\varepsilon > 0$ dado, $\varepsilon < H$. Como b é definida positiva e $b(0) = 0$ escolhemos $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $b(\delta) < a(\varepsilon)$. Por (ii) se $|x_o| \leq \delta$

$a(\varepsilon) \leq V(t,x(t,t_o,x_o) \leq V(t_o,x(t_o,t_ox_o)) = V(t_o,x_o) \leq$

$\leq b(|x_o|) \leq b(\delta) < a(\varepsilon)$ contradição.

Exemplo:

Considere a equação de Lienard

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \qquad (8)$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas para $x \in R$.

Vamos supor que

$$g(x)\ F(x) > 0 \quad \text{para} \quad x \neq 0 \quad \text{onde} \quad F(x) = \int_o^x f(u)\,du \qquad \text{(i)}$$

$$xg(x) > 0 \quad \text{para} \quad x \neq 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$G(x) = \int_o^x g(u)\,du \to \infty \quad \text{para} \quad |x| \to \infty \qquad \text{(iii)}$$

consideremos o sistema equivalente

$$x' = y - F(x) \qquad y' = -g(x) \qquad (8)$$

e uma função de Lyapunov $V(t,x,y) = G(x) + \frac{y^2}{2}$; V satisfaz a condição (ii) no teorema 2 e temos

$$\dot{V}_{(8)}(t,x,y) = g(x)(y - F(x)) + y(-g(x)) =$$

$$= -g(x)\ F(x) \leq 0$$

portanto a solução $x(t) \equiv 0$ $y(t) \equiv 0$ de (8) é uniformemente assintoticamente estável.

REFERÊNCIAS

1. Hale, J.K. - Ordinary Differential Equations Wiley-Interscience, vol. XXI, 1969

2. Massera, J.L. - Contributions to Stability Theory Annals of Mathematics, vol. 64, Nº 1, July 1956.

3. Reis, J.G. - Relações entre Diferentes Definições de Estabilidade no Sentido de Liapunov. Tese de Mestrado, 1973 - ICMSC-USP.

4. Yoshizawa, T. - Stability Theory by Liapunov's Second Method The Mathematical Society of Japan, 1966.

5. Yoshizawa, T. - Stability Theory and the Existence of Periodic Solution and Almost Periodic Solutions Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences, 14.