

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN - 0103-2585

SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES
DIFERENCIÁVEIS

FARID TARI

Nº 34

NOTAS DIDÁTICAS DO ICMC

São Carlos
Jan./1999

NOTAS DE AULA
Singularidades de Aplicações Diferenciáveis

Farid Tari
ICMC-USP, São Carlos, I Semestre de 1998

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 3 |
| 1.1 | Agradecimentos | 5 |
| 2 | Ações de grupos de Lie | 6 |
| 2.1 | Ações de grupos de Lie | 7 |
| 2.2 | Lema de Mather | 8 |
| 2.3 | Transversal Completa | 11 |
| 3 | Germes de Aplicações Diferenciáveis | 14 |
| 3.1 | Os grupos de Mather $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{K}$ | 15 |
| 3.2 | Os espaços tangentes e as álgebras de Lie | 17 |
| 3.3 | O espaço de jatos | 19 |
| 3.4 | Aplicação do teorema da Transversal Completa | 19 |
| 3.5 | Lista de exercícios | 20 |
| 4 | Álgebra Comutativa | 22 |
| 4.1 | Lema de Nakayama | 23 |
| 4.2 | Teorema de Preparação de Weierstrass | 24 |
| 4.3 | Teorema de Preparação de Malgrange | 28 |
| 4.4 | Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado | 30 |
| 4.5 | Lema de Wall | 33 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 5 | Determinação Finita | 34 |
| 5.1 | Critério da determinação finita para os grupos de Mather | 35 |
| 5.2 | Determinação finita e unipotência | 38 |
| 6 | Desdobramentos Versais | 42 |
| 7 | Classificação dos germes de funções | 46 |
| 7.1 | Singularidades de Morse e Lema da Decomposição | 46 |
| 7.2 | Singularidades de corank 1 | 48 |
| 7.3 | Singularidades de corank 2 | 49 |
| 7.4 | Singularidades simples | 51 |
| 7.5 | Caracterização geométrica dos germes finitamente determinados | 53 |
| 7.6 | Aplicação à geometria plana | 54 |
| 7.7 | Lista de exercícios | 57 |
| 8 | Classificação dos germes $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ | 58 |
| 8.1 | Fase inicial | 59 |
| 8.2 | Classificação dos germes com o 2-jato igual a (x, xy) | 60 |
| 8.3 | Classificação dos germes com o 2-jato igual a $(x, 0)$ | 61 |
| 8.4 | Geometria dos desdobramentos e aplicação à geometria de superfícies em \mathbb{R}^3 | 63 |
| 8.5 | Diagramas de bifurcação das singularidades de $\mathcal{A}_e - \text{codim} \leq 2$ | 65 |
| 9 | Dualidade | 70 |
| 10 | Comentários | 75 |
| 11 | Apêndice 2: Prova Escrita | 77 |

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste curso é dar uma técnica para a classificação de singularidades de aplicações diferenciáveis. O germe de uma aplicação (ver 3 pela definição) $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ é dito singular se a matriz jacobiana $Df(0)$ não tem rank máximo, no contrario f é dito regular. Quando f é regular, seguiu-se do teorema da função implícita que f pode ser escrito em um sistema de coordenadas na forma $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_p)$ e, em particular, a fibra $f^{-1}(0)$ é uma variedade regular. No caso de germes de funções, se o gradiente de f é nulo na origem e se a matriz Hessiana de f não é degenerada na origem, o Teorema de Morse asserta que f pode ser escrito, em coordenadas apropriadas, na forma $\pm x_1^2 \pm x_2^2 + \dots \pm x_n^2$. A estrutura da fibra $f^{-1}(0)$ depend do número de sinais $(-)$ na forma quadrática acima. Por exemplo, no caso $n = 2$ teremos um ponto isolado ou um no.

Vamos considerar agora um caso onde $D^2f(0)$ é degenerada. Seja

$$f(x, y) = (x + 3y)^2 + (x + 3y)^2 + 5(x + 3y)^2y + y^3 + 159y^{500}.$$

No primeiro abordo, não é claro o que é a estrutura de $f^{-1}(0)$. A mudança de variáveis $X = x + 3y, Y = y$ reduz f à forma

$$f(X, Y) = X^2 + X^3 + 5X^2Y + Y^3 + 159Y^{500},$$

e a mudança $u = X(1 + X + 5Y)^{1/2}, v = Y(1 + 159Y^{499})^{1/3}$ reduz novamente a

$$f(u, v) = u^2 + v^3.$$

A forma final de f é mais simples que a forma inicial. Além disso, usando o fato de que as fibras $f^{-1}(0)$ e $(f \circ h)^{-1}(0)$ são difeomorfas por um germe de difeomorfismo h , seguiu-se que a fibra da função f é difeomorfa a uma cúspide. Em geral não é sempre fácil exibir explicitamente as mudanças de variáveis que reduzem um germe a uma forma mais simples (forma normal/modelo).

A busca de modelos, ou classificação de objetos, é uma das principais preocupações em matemática. Temos resultados da forma “todo grupo de Lie abeliano é isomorfo a $T^n \times \mathbb{R}^m$ ” onde T^n denota o n -toro, ou da forma “toda matriz quadrada é conjugada a uma matriz com blocos de Jordan”. Note que a ferramenta que transforma os objetos aos modelos é uma relação de equivalência. A motivação para a busca de uma forma simples com representante de uma classe de equivalência é a de que tal modelo possui todas as propriedades dos elementos da sua classe. Além disso, os cálculos com o modelo podem ser feitos sem muitas dificuldades (ver o exemplo da cúspide acima).

Na teoria de singularidades de germes de aplicações diferenciáveis, uma noção de equivalência é a mudança de coordenadas na fonte e na meta. Uma questão fundamental desta teoria é a seguinte:

Existem sistemas de coordenadas em \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^p nos quais f pode ser escrita na forma de um polinômio de grau k ? Se a resposta é positiva qual é o menor k que satisfaz esta propriedade?

Um germe de uma aplicação f que satisfaz esta propriedade é dito *k -finitamente determinado*. A investigação da determinação finita começou com os trabalhos de John Mather em 1960, com uma estimativa sobre o grau de determinação finita. Em 70, Terence Gaffney e Andrew du Plessis apresentaram melhores aproximações para o grau de determinação de germes, mas foi somente nos anos 80 que a questão da determinação finita foi completamente resolvida por Bruce, du Plessis e Wall em [11]. Enunciamos e demonstramos neste curso o teorema principal de [11]. Para isso, precisamos de alguns resultados sobre grupos de Lie e álgebra comutativa, principalmente os teoremas de

divisão e de preparação.

O teorema da determinação finita sozinho não facilita a obtenção de listas de singularidades. Em [8], Bruce, Kirk e du Plessis desenvolveram um método para classificar singularidades. Explicaremos esse método, o aplicaremos aos germes de funções $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ e às aplicações $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$. Observamos aqui que existem outras técnicas para classificar singularidades. Por exemplo, no caso de funções, Arnold (ver [2]) usou os poliedros de Newton para obter a famosa lista de singularidades de funções. Mas a técnica de Transversal Completa desenvolvida em [8] é, até agora, a mais poderosa. Recentemente, Niel Kirk em sua tese de doutorado, desenvolveu um programa (escrito em Maple), “Transversal”, que implementa os resultados de [8]. Este programa permitiu a obtenção de uma longa lista de singularidades de germes de aplicações $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^4, 0$.

Daremos aplicações da classificação de singularidades a alguns problemas em geometria genérica. Isto será feito através de resultados sobre os desdobramentos versais.

1.1 Agradecimentos

Esta apostila apresenta notas de um curso de doutorado que eu dei no ICMC-USP, São Carlos, durante o primeiro semestre de 1998. Gostaria de agradecer os alunos e professores Daniel, João, Jorge, José Carlos, Marcelo e Regilene que seguiram o curso. Cada um dos participantes apresentou um seminário no final do semestre provando alguns resultados enunciados nas aulas ou abordando outros problemas da teoria de singularidades relacionados à classificação de germes. Os resultados sobre a dualidade foram apresentados por Ana Claudia.

A lingua Portuguêsa é muito bonita mas ainda tem segredos para mim na hora de escrever. Por isso, agradeço todos que corrigiram uma palavra aqui e outra ali nesta apostila. Um agradecimento especial a Miriam Manoel pela sua leitura detalhada do texto e suas sugestões.

Capítulo 2

Ações de grupos de Lie

Principais Referências

- [16] M. Golubitsky and V. Guillemin, Stable mappings and their singularities. Graduate Text in Mathematics, vol. 14, Springer-Verlag, N.Y. 1973.
- [19] J.N. Mather, Stability of C^∞ mappings, IV: Classification of stable germs by \mathbb{R} -algebras, *Pub. Math.*, IHES, 37 (1969), 223-248.
- [8] J.W. Bruce, N.P. Kirk and A.A. du Plessis, Complete transversals and the classification of singularities, *Nonlinearity* 10 (1997), No. 1, 253-275.

Seja G um grupo com estrutura de variedade suave (C^∞). G é dito *grupo de Lie* se a aplicação $G \times G \rightarrow G$ dada por $(a, b) \rightarrow ab^{-1}$ é suave.

Exemplo 2.0.1 1. $G = GL(n, \mathbb{R}) =$ grupo de $n \times n$ matrizes inversíveis.

2. $G = O(n) =$ subgrupo das matrizes ortogonais de $GL(n, \mathbb{R})$.

3. $G = T^n = S^1 \times \dots \times S^1 = n$ -toro.

Denotamos o espaço tangente a G na identidade e por T_eG (ou LG). Existe uma identificação de T_eG e G através da aplicação

$$\begin{aligned} \exp : T_eG &\rightarrow G \\ v &\mapsto \psi(1, v) \end{aligned}$$

onde ψ é o grupo a 1-parâmetro associado à extensão de v através de um campo de vetores invariantes à esquerda. A aplicação “ exp ” é um difeomorfismo na vizinhança de e e $d(exp) = id$.

No caso em que $G = GL(n, \mathbb{R})$, temos $T_e G = M(n, \mathbb{R})$ e $exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i$.

2.1 Ações de grupos de Lie

Seja M uma variedade suave e G um grupo de Lie. Uma ação (à esquerda) de G sobre M é uma aplicação suave

$$\begin{aligned} \alpha : G \times M &\rightarrow M \\ (g, x) &\mapsto \alpha(g, x) \end{aligned}$$

tal que $\alpha(e, x) = x$ e $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$. Denotamos $\alpha(g, x)$ por $g.x$.

A órbita de um ponto x em M é o conjunto

$$G.x = \{g.x, g \in G\}.$$

A ação α define uma relação de equivalência em G a saber: $x \sim y$ se e só se existe $g \in G$ tal que $y = g.x$. A órbita de x é a classe de equivalência de x .

Exemplo 2.1.1 1. $M = S^2$, $G =$ grupo das rotações sobre o pólo norte ($G \sim S^1$).

As órbitas são os paralelos (Figura 2.1). O conjunto M/G das classes de equivalência é parametrizado por $[0, 1]$, onde $0, 1$ correspondem aos pólos.

2. $M = S^2$, $G =$ grupo de todas as rotações. Existe uma só órbita.

3. $M = M(2, \mathbb{R})$, $G = GL(2, \mathbb{R})$, e a ação é dada por $(A, N) \in G \times N \rightarrow A^{-1}NA$.

As órbitas têm como representantes as matrizes

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Teorema 2.1.2 Seja G um grupo de Lie agindo sobre uma variedade suave M . Então as órbitas são subvariedades imersas de M .

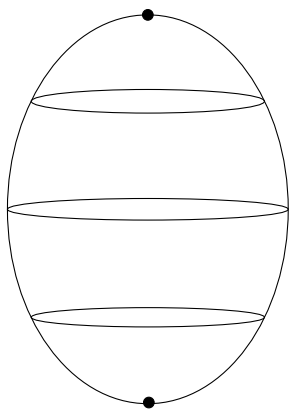


Figura 2.1: Órbitas da ação de S^1 sobre S^2 .

2.2 Lema de Mather

Lema 2.2.1 (Lema de Mather) *Seja $\alpha : G \times M \rightarrow M$ uma ação suave de um grupo de Lie G sobre uma variedade M , e seja V uma subvariedade conexa de M . Então as condições necessárias e suficientes para que V esteja contida em uma só órbita são as seguintes:*

- (a) $T_v(G.v) \supseteq T_vV, \forall v \in V$
- (b) $\dim T_v(G.v)$ é independente de $v \in V$.

A condição necessária é trivial. **A condição (a) não é suficiente:** Seja G o subgrupo de matrizes em $GL(2, \mathbb{R})$ que preservam o eixo- x . Então

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \right\}.$$

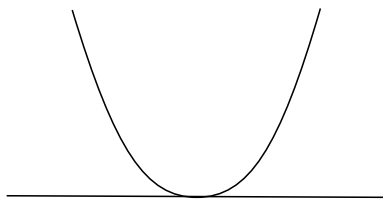


Figura 2.2: V não é contida em uma só órbita.

Seja $M = \mathbb{R}^2$ e suponha que a ação é dada por $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Existem duas órbitas, o eixo- x e $M - \{\text{eixo} - x\}$.

Seja V a curva $y = x^2$. Então V satisfaz (a), não satisfaz (b) e V não está contida em uma só órbita (Figura 2.2).

Demonstração da condição suficiente: Seja $v \in M$ e $\alpha_v : G \rightarrow M$ dada por $\alpha_v(g) = g.v$, e denote por $T_e G$ o espaço tangente de G em e . Como $T\alpha_v(T_e G) = T_v(G.v)$, segue que (a) e (b) são equivalentes a

$$(a') T\alpha_v(T_e G) \supseteq T_v V, \forall v \in V,$$

$$(b') \dim T\alpha_v(T_e G) \text{ é independente de } v \in V.$$

Dê uma norma $|\cdot|$ de Hilbert a $T_e G$. Seja $L_v = (\text{Ker}(T\alpha_v : T_e G \rightarrow T_v M))^\perp$. Seja $L = \cup_{v \in V} (v \times L_v) \subset V \times T_e G$.

Usando (b'), L é um subfibrado vetorial sobre V de $V \times T_e G$. Seja

$$L_0 = \cup_{v \in V} ((T\alpha_v)^{-1})(T_v V) \cap L_v.$$

Usando (a') L_0 é um subfibrado vetorial sobre V de L e a aplicação

$$\cup_{v \in V} T\alpha_v : L_0 \rightarrow TV$$

é um difeomorfismo de fibrados vetoriais. Seja $\beta : TV \rightarrow L_0$ a inversa desta aplicação e $\pi : V \times T_e G \rightarrow T_e G$ a projeção natural. Então $\pi \circ \beta : TV \rightarrow T_e G$ é uma aplicação suave e

$$(d) T\alpha_v(\pi \circ \beta(\eta)) = \eta, \quad \forall \eta \in T_v V,$$

pois $\eta \in T_v V$, $\beta(\eta) = (v, (T\alpha_v)^{-1}(\eta))$ e $\pi(\beta(\eta)) = (T\alpha_v)^{-1}(\eta)$. (Ver Figura 2.3.)

Para mostrar que V está contida em uma só órbita basta mostrar que quaisquer $v_1, v_2 \in V$ pertencem à mesma órbita. Como V é conexa, existe um caminho ligando v_1 a v_2 , isto é, uma aplicação suave

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow V \quad \text{tal que } \gamma(0) = v_1 \text{ e } \gamma(1) = v_2.$$

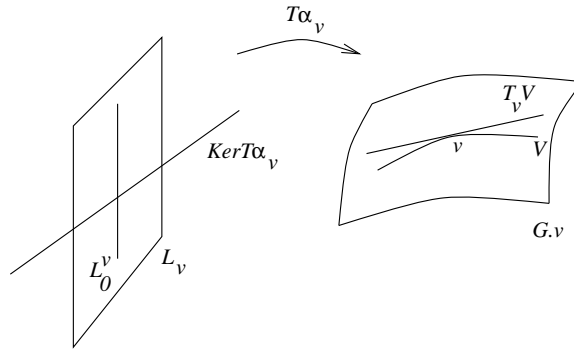


Figura 2.3:

Basta mostrar que $\forall t_0 \in [0, 1]$ existe $\epsilon > 0$ tal que se $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$, então $\gamma(t)$ pertence à órbita de $\gamma(t_0)$.

Seja $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}V$ o vetor tangente a $\gamma(t)$ em t e $X(t) = \pi \circ \beta(\gamma'(t)) \in T_e G$. $X(t)$ é uma função C^∞ em t e usando (d) temos

$$(e) \quad T\alpha_{\gamma(t)}(X(t)) = \gamma'(t).$$

Segue do teorema de existência de soluções de equações diferenciais que existe uma curva $t \rightarrow \mu(t) \in G$ definida em $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$ tal que

$$\begin{aligned} \mu(t_0) &= e \\ \frac{d}{dt}\mu(t) &= \tilde{X}_t(\mu(t)) \end{aligned}$$

onde \tilde{X} é o único campo de vetores em G , invariante à direita, que estende $X(t)$.

Para demonstrar o teorema, basta provar que

$$(\mu(t)^{-1})(\gamma(t)) = \gamma(t_0), \quad t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon,$$

pois isto mostra que $\gamma(t)$ está na mesma órbita que $\gamma(t_0)$, $\forall t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu(t)^{-1}\gamma(t)) &= \frac{d}{dt}(\mu(t)^{-1})\gamma(t) + \mu(t)^{-1}\frac{d}{dt}(\gamma(t)) \\ &= (\mu(t)^{-1}) \cdot \left(-\frac{d\mu(t)}{dt}\mu(t)^{-1}\gamma(t) + \frac{d}{dt}\gamma(t)\right). \end{aligned}$$

Mas \tilde{X} é invariante à direita, então

$$\begin{aligned} -\frac{d\mu(t)}{dt}\mu(t)^{-1}\gamma(t) + \frac{d}{dt}\gamma(t) &= -X(t) \cdot \mu(t)^{-1}\gamma(t) + \gamma'(t) \\ &= -X(t) \cdot \gamma(t) + \gamma'(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Então $\frac{d}{dt}(\mu(t)^{-1}\gamma(t)) = 0$. Como $\mu(t_0) = e$ segue que $\mu(t)^{-1}\gamma(t) = \gamma(t_0)$ para $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$.

Observação 2.2.2 *Veremos aplicações do Lema de Mather durante a classificação de germes de aplicações.*

2.3 Transversal Completa

Um espaço afim A é um espaço invariante por transformações afins (translações e mudanças lineares de coordenadas). A diferença entre um espaço afim e um espaço vetorial é que no espaço afim a origem perde importância. Uma definição rigorosa é a seguinte.

Definição 2.3.1 *Um conjunto A é um espaço afim se existem um espaço vetorial V_A e uma aplicação $A \times V_A \rightarrow A$, $(x, v) \mapsto x + v$ tais que*

$$(i) \ x + 0 = x \text{ e } x + (u + v) = (x + u) + v \ \forall x \in A, \forall u, v \in V_A;$$

$$(ii) \ \text{para quaisquer } x, y \in A \text{ existe um } \text{único } v \in V_A \text{ tal que } y = x + v.$$

Corolário 2.3.2 *Seja G um grupo de Lie agindo sobre um espaço afim A e seja W um subespaço vetorial de V_A .*

Se $x \in A$, então $x + W$ está contido em uma órbita só se

$$(a) \ W \subset LG.x$$

$$(b) \ \forall y \in x + W, \ LG.y = LG.x.$$

Podemos agora enunciar uma generalização do Lema de Mather que é muito importante na classificação de singularidades.

Teorema 2.3.3 (Transversal Completa) *Seja G um grupo de Lie agindo suavemente sobre um espaço afim A , e seja W um subespaço vetorial de V_A com*

$$LG.(x + w) = LG.x, \ \forall x \in A \text{ e } w \in W. \quad (1)$$

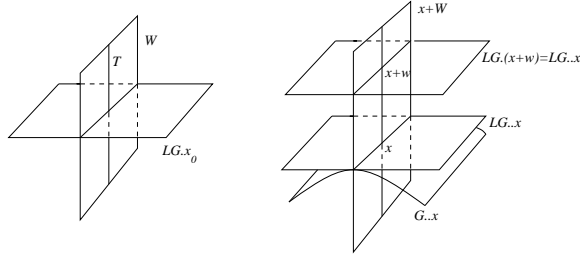


Figura 2.4: Transversal Completa

Então

(i) $\forall x \in A$

$$x + \{LG.x \cap W\} \subset G.x \cap \{x + W\}$$

(ii) Se $x_0 \in A$ e T é um subespaço vetorial de W tal que

$$W \subset T + LG.x_0, \quad (2)$$

então $\forall w \in W$, existem $g \in G$, $t \in T$ tal que $g.(x_0 + w) = x_0 + t$. (Ver Figura 2.4.)

Demonstração: (i) $x + LG.x \cap W$ é um sub-espaço afim de A cujo espaço tangente é $LG.x \cap W$. Se $x + w \in x + LG.x \cap W$, então

$$T_{x+w}(G.(x + w)) = LG.(x + w) = LG.x,$$

o que significa que os espaços tangentes das órbitas de pontos $x + LG.x \cap W$ têm dimensão constante e contêm o espaço tangente de $x + LG.x \cap W$. Usando o Lema de Mather (ou o Corolário 2.3.2) $x + \{LG.x \cap W\} \subset G.x$, o que implica na validade de (i).

(ii)

$$\begin{aligned} \cup_{t \in T} G.(x_0 + t) &\supset \cup_{t \in T} \{x_0 + t + LG.(x_0 + t) \cap W\} && \text{de (i)} \\ &= \cup_{t \in T} \{x_0 + t + LG.x_0 \cap W\} && \text{de (1)} \\ &= x_0 + T + LG.x_0 \cap W \\ &= x_0 + (T + LG.x_0) \cap W && \text{pois } T \subset W \\ &= x_0 + W && \text{(de (2)).} \end{aligned}$$

Observação 2.3.4 (a) O teorema diz que a transversal T à órbita de x_0 contém um representante da G -órbita de todos os elementos de $x_0 + W$ de A . Por isso T se chama “Transversal Completa”.

(b) A hipótese (1) do teorema diz que o espaço tangente às órbitas de $x + W$ é o mesmo em todos os pontos $x + w$, e é igual a $LG.x$. Esta condição pode ser substituída por uma versão infinitesimal, a saber,

$$l.(x + w) = l.x$$

$$\forall x \in A, w \in W, l \in LG.$$

Capítulo 3

Germes de Aplicações Diferenciáveis

Todas as aplicações serão consideradas C^∞ ou analíticas no caso real e holomorfas no caso complexo.

Sejam duas aplicações $f : U \rightarrow K^p$ e $g : V \rightarrow K^p$ ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) definidas em vizinhanças U e V de um ponto $q \in K^n$. Definimos a seguinte relação de equivalência:

$$f \sim g \iff \exists \text{ vizinhança } W \text{ de } q, W \subset U \cap V \text{ tal que } f|_W = g|_W.$$

Às classes de equivalência chamamos *germes* de aplicações no ponto q . Sem perda de generalidade tomamos $q = 0 \in K^n$. O germe de f em 0 é denotado por

$$f : K^n, 0 \rightarrow K^p.$$

O conjunto dos germes $K^n, 0 \rightarrow K^p$ é denotado por $\mathcal{O}(n, p)$. Quando $p = 1$ (germes de funções), o conjunto é denotado simplesmente por \mathcal{O}_n .

1. \mathcal{O}_n é um anel comutativo, com identidade $\bar{1}$:

As operações $\bar{f} + \bar{g} = \overline{f+g}$ e $\bar{f} \cdot \bar{g} = \overline{f \cdot g}$, onde \bar{f} denota o germe de f , são bem definidas e fazem de \mathcal{O}_n um anel comutativo com identidade $\bar{1}$.

Seja $m_n = \{f \in \mathcal{O}_n : f(0) = 0\}$; m_n é o conjunto dos germes de funções cujos representantes se anulam em 0 . Não é difícil verificar que m_n é um ideal de \mathcal{O}_n .

2. \mathcal{O}_n é um anel local (isto é, possui um único ideal maximal):

O único ideal maximal é m_n . Defato, \mathcal{M} um outro ideal e suponha que $f \in \mathcal{M} - m_n$. Então $f(0) \neq 0$, portanto $1/f$ está bem definida. Temos $\overline{(1/f)} \cdot \bar{f} = \bar{1} \in \mathcal{M}$, portanto $\mathcal{M} = \mathcal{O}_n$. Isto significa que m_n é o único ideal maximal de \mathcal{O}_n .

A partir de agora, denotaremos um germe de f por f .

3. $\mathcal{O}(n, p)$ é um \mathcal{O}_n -módulo:

$(\mathcal{O}(n, p), +)$ é um grupo abeliano, \mathcal{O}_n é um anel, e a operação

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n \times \mathcal{O}(n, p) &\rightarrow \mathcal{O}(n, p) \\ (f, F) &\mapsto f \cdot F = (f \cdot F_1, \dots, f \cdot F_n) \end{aligned}$$

satisfaz

$$\begin{aligned} f \cdot (g \cdot F) &= (fg) \cdot F \\ f \cdot (F + G) &= f \cdot F + f \cdot G \\ (f + g) \cdot F &= f \cdot F + g \cdot F \\ 1 \cdot F &= F. \end{aligned}$$

3.1 Os grupos de Mather $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{K}$

\mathcal{R} é o grupo dos germes de difeomorfismos $K^n, 0 \rightarrow K^n, 0$, \mathcal{L} é o grupo dos germes de difeomorfismos $K^p, 0 \rightarrow K^p, 0$, e \mathcal{A} é o produto direto $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$. Definimos ações destes grupos sobre $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ como

$$\begin{aligned} h \cdot f &= f \circ h^{-1}, \quad h \in \mathcal{R} \\ k \cdot f &= k \circ f, \quad k \in \mathcal{L} \\ (h, k) \cdot f &= k \circ f \circ h^{-1}, \quad (h, k) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

onde $f \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$. O grupo \mathcal{R} (resp. \mathcal{L}) é chamado também o grupo de mudanças de coordenadas na fonte (resp. na meta).

O grupo \mathcal{C} é o grupo de germes de difeomorfismos $K^n \times K^p, 0 \rightarrow K^n \times K^p, 0$ que são escritos na forma $H(x, y) = (x, H'(x, y))$ com $H'(x, 0) = 0$ para $x \in K^n$ próximo da origem. A ação de \mathcal{C} sobre $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ é definida como

$$H \cdot f(x) = H(x, f(x)), \quad H \in \mathcal{C}, \quad f \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p).$$

\mathcal{C} pode ser visto como o grupo de difeomorfismos $K^p, 0 \rightarrow K^p, 0$ parametrizados por $x \in K^n$. Denote $h_x(y) = H'(x, y)$, então a fórmula antecedente pode ser escrita na forma

$$H.f(x) = h_x(f(x)).$$

O grupo \mathcal{K} é o grupo dos germes de difeomorfismos $K^n \times K^p, 0 \rightarrow K^n \times K^p, 0$ que são escritos na forma

$$H(x, y) = (h(x), H'(x, y)),$$

onde $h \in \mathcal{R}$, $\bar{H}(x, 0) = 0$ para $x \in K^n$ próximo da origem. A ação de \mathcal{K} sobre $m_n.\mathcal{O}(n, p)$ é definida como

$$H.f(x) = H(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))), \quad H \in \mathcal{K}, \quad f \in m_n.\mathcal{O}(n, p).$$

Isto é

$$H.f(x) = h_x(f(h^{-1}(x))).$$

O grupo \mathcal{K} é chamado *grupo de contato*. O grupo \mathcal{C} é um subgrupo normal de \mathcal{K} e os grupos \mathcal{R} , \mathcal{L} , \mathcal{A} podem ser identificados com subgrupos de \mathcal{K} .

O grupo de contato tem uma interpretação geométrica. Sejam (X_i, Y_i) , $i = 1, 2$, dois pares dos germes de variedades suaves em $\mathbb{R}^n, 0$. Dizemos que os pares têm o mesmo contato na origem se existe um difeomorfismo $h \in \mathcal{R}$ tal que $h(X_1) = X_2$ e $h(Y_1) = Y_2$.

Suponha que cada X_i seja parametrizada por $\phi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e Y_i seja definida por uma submersão $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, e seja $f_i = g_i \circ \phi_i$, $i = 1, 2$. Então,

Teorema 3.1.1 *Os pares (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) têm o mesmo contato na origem se, e somente se, f_1 e f_2 são \mathcal{K} -equivalentes.*

Proof Ver [21].

Observação 3.1.2 *Os grupos de Mather não são grupos de Lie, pois as suas dimensões são infinitas.*

3.2 Os espaços tangentes e as álgebras de Lie

Definimos o “espaço tangente” a $\mathcal{O}(n, p)$ em f denotado θ_f com o \mathcal{O}_n -módulo de campos de vetores ao longo de f . Então $\xi \in \theta_f$ se $\xi : K^n, 0 \rightarrow T(K^p)$ e $\pi_p \circ \xi = f$, onde $\pi_p : T(K^p) \rightarrow K^p$ é a projeção do fibrado tangente $T(K^p)$ de K^p a K^p .

Definimos $\theta_n = \theta_{1_{K^n}}$ e $\theta_p = \theta_{1_{K^p}}$, onde 1_{K^n} e 1_{K^p} denotam as aplicações identidades de K^n e K^p respectivamente.

Seja \mathcal{G} um subgrupo de \mathcal{K} . Definimos a álgebra de Lie, $L\mathcal{G}$, de \mathcal{G} como segue. Seja $\phi :]-\epsilon, \epsilon[\times K^{n+p}, 0 \rightarrow K^{n+p}, 0$ uma curva em \mathcal{G} tal que ϕ_0 é a identidade em \mathcal{G} . Derivando-a temos um campo de vetores

$$z \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, z)|_{t=0}.$$

O conjunto de todos estes campos é denotado por $L\mathcal{G}$ e é chamado a álgebra de Lie do grupo \mathcal{G} .

Não é difícil verificar que $L\mathcal{R} = m_n \cdot \theta_n$ e $L\mathcal{L} = m_p \cdot \theta_p$.

Definimos o \mathcal{O}_n -homomorfismo

$$\begin{aligned} tf : \theta_n &\rightarrow \theta_f \\ \phi &\mapsto df \circ \phi \end{aligned}$$

e o \mathcal{O}_p -homomorfismo (via $f^* : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathcal{O}_n$, $\alpha \mapsto \alpha \circ f$ para $\alpha \in \mathcal{O}_p$)

$$\begin{aligned} wf : \theta_p &\rightarrow \theta_f \\ \psi &\mapsto \psi \circ f. \end{aligned}$$

Então os espaços tangentes às órbitas dos grupos de Mather são dados por

$$L\mathcal{R} \cdot f = tf(m_n \cdot \theta_n), \quad L\mathcal{L} \cdot f = wf(m_p \cdot \theta_p), \quad L\mathcal{C} \cdot f = f^*(m_p) \cdot \theta_f,$$

$$L\mathcal{A} \cdot f = L\mathcal{R} \cdot f + L\mathcal{L} \cdot f, \quad L\mathcal{K} \cdot f = L\mathcal{R} \cdot f + L\mathcal{C} \cdot f.$$

Na prática, aplicamos a seguinte observação. O conjunto θ_f é um \mathcal{O}_n -módulo livre de rank p , pois se (y_1, \dots, y_p) é um sistema local de coordenadas em $K^p, 0$, então os campos de vetores

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right) \circ f, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_p}\right) \circ f$$

ao longo de f constituem uma base livre de θ_f . Podemos então identificar θ_f com $\mathcal{O}(n, p)$ e escrever os espaços tangentes acima como

$$\begin{aligned} L\mathcal{R} \cdot f &= m_n \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} \\ L\mathcal{L} \cdot f &= f^*(m_p) \cdot \{e_1, \dots, e_p\} \\ L\mathcal{C} \cdot f &= f^*(m_p) \cdot \mathcal{O}_n \cdot \{e_1, \dots, e_p\}, \end{aligned}$$

onde e_1, \dots, e_p são elementos da base canônica em K^p (considerados como elementos de $\mathcal{O}(n, p)$).

Observe que $L\mathcal{A} \cdot f$ tem uma estrutura de mistura de módulos. Isto causa uma complicação no tratamento do grupo \mathcal{A} .

Definimos a \mathcal{G} -codimensão de f como

$$\mathcal{G} - \text{codim}(f) = d(f, \mathcal{G}) = \dim_K(m_n \cdot \mathcal{O}(n, p) / L\mathcal{G} \cdot f)$$

Definimos a \mathcal{G}_e -codimensão de f como

$$\mathcal{G}_e - \text{codim}(f) = d_e(f, \mathcal{G}) = \dim_K(\mathcal{O}(n, p) / L_e\mathcal{G} \cdot f)$$

onde

$$L_e\mathcal{R} \cdot f = tf(\theta_n), \quad L_e\mathcal{L} \cdot f = wf(\theta_p), \quad L_e\mathcal{C} \cdot f = f^*(\mathcal{O}_p) \cdot \theta_f,$$

$$L_e\mathcal{A} \cdot f = L_e\mathcal{R} \cdot f + L_e\mathcal{L} \cdot f, \quad L_e\mathcal{K} \cdot f = L_e\mathcal{R} \cdot f + L_e\mathcal{C} \cdot f.$$

O espaço $L_e\mathcal{G} \cdot f$ é chamado espaço tangente estendido.

Exemplo 3.2.1 (1). Seja $f(x, y) = x^2y + y^k$. Então $L\mathcal{R}.f = m_2(x, y)\langle 2xy, x^2 + ky^{k-1} \rangle$ e $\mathcal{R} - \text{codim}(f) = k + 1$.

(2) Seja $f(t) = (t, t^2)$, então $L\mathcal{L}_e.f = \mathcal{O}(1, 2)$, e portanto a $\mathcal{L}_e - \text{codim}(f) = 0$.

(3) $f(x, y, z) = (x, y, z^{k+1})$, $L\mathcal{K}.f = m(x, y)\mathcal{O}(x, y, z) + m^{k+1}(x, y, z)\mathcal{O}(3, 3)$, portanto $\mathcal{K} - \text{codim}(f) = k + 3$.

3.3 O espaço de jatos

Denotamos por m_n^{k+1} o espaço dos germes de funções cujos polinômios de Taylor de ordem k na origem são identicamente nulos. Uma das principais idéias na teoria de singularidades é substituir o espaço dos germes $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ pelo espaço de k -jatos

$$J^k(n, p) = m_n \cdot \mathcal{O}(n, p) / m_n^{k+1} \cdot \mathcal{O}(n, p)$$

para algum k . Este espaço consiste dos germes de polinômios de grau $\leq k$ sem o termo constante, e é portanto um espaço vetorial de dimensão finita. A cada $f \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ associamos o k -jato $j^k f$ que é seu polinômio de Taylor de grau $\leq k$ na origem.

Seja \mathcal{G} um subgrupo de um dos grupos de Mather e defina \mathcal{G}_k como o subgrupo de \mathcal{G} que consiste dos elementos de \mathcal{G} cujo k -jato é a identidade. Estes são subgrupos normais de \mathcal{G} e definem os grupos de jatos $J^k \mathcal{G} = \mathcal{G} / \mathcal{G}_k$. *Estes grupos são grupos de Lie.*

A ação de \mathcal{G} sobre $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ induz uma ação de $J^k \mathcal{G}$ sobre $J^k(n, p)$ que é uma ação de grupo de Lie. A idéia é estudar a ação de \mathcal{G} sobre $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ através da ação de $J^k \mathcal{G}$ sobre $J^k(n, p)$.

Definição 3.3.1 *Um germe $f \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ é dito k - \mathcal{G} -determinado se qualquer $g \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ tal que $j^k g = j^k f$ é \mathcal{G} -equivalente a f .*

f é dito finitamente determinado se é k -determinado para algum k .

A determinação finita significa que o germe é equivalente a um de seus polinômios de Taylor e que o problema da classificação pode ser reduzido ao espaço dos k -jatos, que é um espaço vetorial de dimensão finita.

3.4 Aplicação do teorema da Transversal Completa

Seja $H^{k+1}(n, p)$ o espaço dos germes de polinômios homogêneos de grau $k + 1$ em $\mathcal{O}(n, p)$ e denote por \mathcal{G}_1 o subgrupo de \mathcal{G} cujos elementos têm 1-jato igual à identidade.

Proposição 3.4.1 (*Transversal Completa para jatos*). Seja \mathcal{G} um dos grupos de Mather. Então dado $f \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ e $T \subset H^{k+1}(n, p)$ tais que

$$H^{k+1}(n, p) \subset L(J^{k+1}\mathcal{G}_1) \cdot j^{k+1}f + T$$

qualquer $(k+1)$ -jato $j^{k+1}g$, cujo $j^k g = j^k f$ está na mesma \mathcal{G}_1 -órbita de $j^{k+1}f + t$, para algum $t \in T$.

Demonstração: Exercício. In particular, mostre que a proposição não vale para o grupo \mathcal{G} .

Exemplo 3.4.2 Consideremos o germe $f(x, y) = (x, y^2, x^2y)$. Então usando a Proposição 3.4.1, qualquer $2k$ -jato cujo $(2k-1)$ -jato é igual a f é \mathcal{A}_1 -equivalente a (x, y^2, x^2y) , pois o $2k$ -transversal é vazio neste caso. Considerando agora o $(2k+1)$ -transversal, não é difícil mostrar que qualquer $(2k+1)$ -jato cujo $2k$ -jato é igual a f é \mathcal{A}_1 -equivalente a $(x, y^2, x^2y + \lambda y^{2k+1})$.

3.5 Lista de exercícios

1. Mostre que se $f_1 \sim_{\mathcal{K}} f_2$, então existe um difeomorfismo que leva o gráfico de f_1 ao gráfico de f_2 .
2. Mostre que se $f_1 \sim_{\mathcal{G}} f_2$ onde $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{C}$, então $f_1 \sim_{\mathcal{K}} f_2$.
3. Seja $I_f = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$ o ideal em \mathcal{O}_n gerado pelas componentes de f . Mostre que as seguintes condições são equivalentes para $f, g \in \mathcal{O}(n, p)$:
 - (i) f, g são \mathcal{C} -equivalentes.
 - (ii) Os ideais I_f e I_g são iguais.
 - (iii) Existe uma $p \times p$ matriz inversível (u_{ij}) com coeficientes em \mathcal{O}_n tal que $f_i = \sum_j u_{ij} g_j$ para $1 \leq i \leq p$.

(iv) Deduza que f e g são \mathcal{K} -equivalentes se, e somente se, os ideais I_f e I_g são isomorfos induzidos. (Dois ideais em \mathcal{O}_n são isomorfos induzidos se existe $h \in \mathcal{R}$ tal que h^* leva um ideal ao outro.)

4. Calcule a $\mathcal{G}_1 - k$ -transversal completa ($\mathcal{G} = \mathcal{A}, \mathcal{K}$) de f nos seguintes casos:

(i) $f(x, y) = (x, y^2, xy^3),$

(ii) $f(x, y) = (x, y^2, y^3),$

(iii) $f(x, y) = (x, y^2, xy^3, y^5),$

(iv) $f(x, y, z) = (x, y, z^4 + xz),$

(v) $f(x, y) = (x, x^2y),$

(vi) $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2w.$

Capítulo 4

Álgebra Comutativa

Principais Referências

- [16] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*. Graduate Text in Mathematics, vol. 14, Springer-Verlag, N.Y. 1973.
- [14] C.G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*. Research Notes in Maths. 25, Pitman, London 1973.
- [3] T. Bröcker and L.Lander, *Differentiable Germs and Catastrophes*, London Math. Soc. Lecture Note Series **17**, (Cambridge University Press, 1975).

Os conjunto $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ e \mathcal{G} (um dos grupos de Mather) são espaços de Frechet de dimensão infinita. Portanto os resultados sobre as ações de grupos de Lie (Lema de Mather, Transversal Completa) não se aplicam diretamente pela ação de \mathcal{G} sobre $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$. Vimos que a ação de \mathcal{G} sobre $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ induz uma ação de $J^k \mathcal{G}$ sobre $J^k(n, p)$ que é uma ação de um grupo de Lie sobre uma variedade de dimensão finita. Para que a $J^k \mathcal{G}$ -órbita de $j^k f$ satisfaça todas as propriedades da \mathcal{G} -órbita de f precisamos de um germe f finitamente $\mathcal{G} - k$ -determinado. Uma condição necessária para que f seja finitamente \mathcal{G} -determinado é que $m_n^{k+1} \cdot \mathcal{O}(n, p) \subset L\mathcal{G}.f$. Para obter resultados sobre a suficiência de uma inclusão do tipo acima, precisamos usar ferramentas da álgebra comutativa, através da estrutura do espaço tangente $L\mathcal{G}.f$. No caso onde $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}$ ou \mathcal{K} o espaço tangente $L\mathcal{G}.f$ é um \mathcal{O}_n -módulo. Temos o seguinte resultado.

4.1 Lema de Nakayama

Lema 4.1.1 *Seja R um anel comutativo, m um ideal maximal em R . Seja C um R -módulo, A e B R -sub-módulos de C com A finitamente gerado.*

$$\text{Se } A \subset B + mA, \text{ então } A \subset B.$$

Demonstração: Sejam a_1, \dots, a_q os geradores de A . Por hipótese, existem b_1, \dots, b_q em B , λ_{ij} em m tal que

$$a_i = b_i + \sum_{j=1}^q \lambda_{ij} a_j, \quad 1 \leq i \leq q$$

Sejam $a = (a_1, \dots, a_q)$, $b = (b_1, \dots, b_q)$ e $\Lambda = (\lambda_{ij})$. Podemos escrever a equação acima na forma matricial

$$(I - \Lambda)a = b$$

onde I é a matriz identidade de ordem q em R . Para demonstrar o Lema é suficiente mostrar que $I - \Lambda$ é inversível em R . Mas $\det(I - \Lambda) = 1 + \lambda$, onde $\lambda \in m$, e como m é maximal, $1 + \lambda$ é inversível. Portanto $(I - \Lambda)$ é inversível.

Corolário 4.1.2 *Suponha que $\mathcal{G} = \mathcal{R}$, \mathcal{C} ou \mathcal{K} . Se*

$$m_n^{k+1} \cdot \mathcal{O}(n, p) \subset L\mathcal{G}.f + m_n^{k+2} \cdot \mathcal{O}(n, p),$$

então $m_n^{k+1} \cdot \mathcal{O}(n, p) \subset L\mathcal{G}.f$.

Prova: Aplique o Lema de Nakayama.

Nos casos dos grupos \mathcal{L} e \mathcal{A} os espaços tangentes não são mais \mathcal{O}_n -módulos. Precisamos de resultados mais fortes do que o Lema de Nakayama para tratar destes grupos, a saber dos Teoremas de Preparação.

4.2 Teorema de Preparação de Weierstrass

Teorema 4.2.1 (Teorema de Preparação de Weierstrass) *Seja $F : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa definida em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ tal que*

- a) $F(w, 0) = w^k g(w)$, $(w, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ e g é uma função holomorfa de uma variável definida em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$,
- b) $g(0) \neq 0$.

Então existe uma função holomorfa $q : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}$ e funções holomorfas $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1} : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

- (i) $qF(w, z) = w^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(z)w^i$ em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$,
- (ii) $q(0) \neq 0$.

O Teorema de preparação de Weierstrass segue do seguinte Teorema.

Teorema 4.2.2 (Teorema de Divisão de Weierstrass) *Sejam F, g, k como no Teorema 4.2.1 e $G : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa definida em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. Então existem funções holomorfas q e $r : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}$ tais que*

- (i) $G = qF + r$,
- (ii) $r(w, z) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i(z)w^i$, onde r_i são funções holomorfas, e
- (iii) q e r são únicas.

Teorema 4.2.2 \implies Teorema 4.2.1:

Tomando $G = w^k$, temos $w^k = q(w, z)F(w, z) + \sum_{i=0}^{k-1} r_i(z)w^i$.

Precisamos mostrar que $q(0, 0) \neq 0$. Temos:

$$\begin{aligned} w^k &= q(w, 0)F(w, 0) + \sum_{i=0}^{k-1} r_i(0)w^i \\ &= q(w, 0)w^k g(w) + \sum_{i=0}^{k-1} r_i(0)w^i. \end{aligned}$$

Logo, como g e q são analíticas, segue que

$$q(0,0)g(0,0) = 1 \implies q(0,0) \neq 0.$$

Prova do Teorema 4.2.2

(iii) Unicidade de q e r

Suponhamos que $G = q_1F + r_1 = q_2F + r_2$. Então

$$(q_1 - q_2)F = r_2 - r_1 = \sum_{i=0}^{k-1} (r_2(z) - r_1(z))w^i,$$

o que mostra que $r_2 - r_1$ é um polinômio de grau $\leq k - 1$ em w . Vamos mostrar que $(q_1 - q_2)F$ tem no mínimo k raízes para qualquer z fixo numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n$. Para isto é suficiente mostrar que isto é válido para a função $h(w) = F(w, z)$.

Seja $\bar{F}(w) = F(w, 0) = w^k g(w)$. Então \bar{F} tem k raízes em 0 , e como F é analítica, as raízes são isoladas. Então existe $\delta > 0$ tal que $\bar{F}(w) \neq 0$ para $0 < |w| < \delta$.

Seja $\epsilon = \inf_{|w|=\delta} (|\bar{F}(w)|)$.

Como F é contínua existe uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n$ tal que $|z| < \sigma$ implica

$$|h(w) - \bar{F}(w)| = |F(w, z) - \bar{F}(w)| < \epsilon \leq |\bar{F}(w)|, \text{ para } |w| = \delta$$

Usando o Teorema de Rouché, segue que h e \bar{F} têm o mesmo número de raízes no disco $|w| < \delta$. Então $F(w, z)$ (para $|z| < \sigma$) tem no mínimo k raízes, o que implica que $q_1 - q_2 = 0$ e $r_2 - r_1 = 0$.

Definição 4.2.3 *Os polinômios P_k são os polinômios $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \rightarrow \mathbb{C}$ da forma $P_k(w, z, \lambda) = w^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i w^i$, onde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})$.*

Para provar (i) e (ii) do Teorema de Divisão de Weierstrass precisamos do seguinte:

Teorema 4.2.4 (Teorema de Divisão de Polinômios) *Seja $G : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então existem funções holomorfas $q, r : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfazem*

(i) $G(w, z) = q(w, z, \lambda)P_k(w, z, \lambda) + r(w, z, \lambda)$, e

(ii) $r(w, z, \lambda) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i(z, \lambda)w^i$, onde r_i são funções holomorfas $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \rightarrow \mathbb{C}$.

Teorema 4.2.4 \implies (i) e (ii) do Teorema 4.2.2:

Sejam F e G como no Teorema 4.2.2. Aplicando o Teorema 4.2.4 para F e G temos

$$F = q_F P_k + r_F \quad e \quad G = q_G P_k + r_G,$$

com $r_F(w, z, \lambda) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i^F(z, \lambda)w^i$. As funções r_i^F e q_F satisfazem $r_i^F(0, 0) = 0$ e $q_F(0) \neq 0$ pois

$$\begin{aligned} w^k g(w) &= F(w, 0) = q_F(w, 0)P_k(w, 0) + r_F(w, 0) \\ &= q_F(w, 0)w^k + \sum_{i=0}^{k-1} r_F(0)w^i. \end{aligned}$$

Seja $f_i(\lambda) = r_i^F(0, \lambda)$, então $\det(\partial f_i / \partial \lambda_j)(0) \neq 0$, pois tomando $z = 0$ temos

$$\begin{aligned} w^k g(w) &= F(w, 0) = q_F P_k + r_F \\ &= q_F(w, 0, \lambda)(w^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i w^i) + \sum_{i=0}^{k-1} f_i(\lambda)w^i. \end{aligned}$$

Derivando ambos os lados em relação a λ_j e calculando em $\lambda = 0$ obtemos

$$0 = \frac{\partial q_F}{\partial \lambda_j}(w, 0)w^k + q_F(w, 0)w^j + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_j}(0)w^i.$$

Comparando os coeficientes de w^i para $i < j$ segue que $\frac{\partial f_i}{\partial \lambda_j}(0) = 0$ e $\frac{\partial f_j}{\partial \lambda_j}(0) = -q_F(0)$, e portanto $\det(\partial f_i / \partial \lambda_j)(0) = (-1)^k q_F(0) \neq 0$.

Aplicando o Teorema da Função Implícita (para aplicações holomorfas) existe uma aplicação holomorfa $\theta(z) = (\theta_1(z), \dots, \theta_{k-1}(z))$, tais que $\theta(0) = 0$ e $r_j^F(z, \theta(z)) = 0$.

Sejam $\bar{q}(w, z) = q_F(w, z, \theta(z))$ e $P(w, z) = P_k(w, z, \theta(z))$. Temos

$$\begin{aligned} F(w, z) &= q_F(w, z, \theta(z))P_k(w, z, \theta(z)) + r_F(w, z, \theta(z)) \\ &= \bar{q}(w, z)P(w, z). \end{aligned}$$

Além disso, $\bar{q}(0) = q_F(0) \neq 0$ e $P(w, z) = F(w, z) / \bar{q}(w, z)$ em uma vizinhança de 0 onde $\bar{q}(w, z) \neq 0$.

Substituindo tudo isso na equação de G temos

$$\begin{aligned} G(w, z) &= q_G(w, z, \theta(z))P_k(w, z, \theta(z)) + r_G(w, z, \theta(z)) \\ &= \frac{q_G(w, z, \theta(z))}{\bar{q}(w, z)}F(w, z) + r_G(w, z, \theta(z)) \\ &= q(w, z)F(w, z) + r(w, z), \end{aligned}$$

onde $r(w, z) = r_G(w, z, \theta(z)) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i^G(z, \theta(z))w^i = \sum_{i=0}^{k-1} r_i(z)w^i$.

Prova do Teorema 4.2.4:

Seja $G(w, z)$ uma função holomorfa, temos que encontrar q e r tal que

$$G(w, z) = q(w, z, \lambda)P_k(w, z, \lambda) + r(w, z, \lambda),$$

onde $r(w, z, \lambda) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i(z, \lambda)w^i$. Pela definição dos polinômios P_k que

$$P_k(\eta, \lambda) - P_k(w, \lambda) = (\eta - w)\left(\sum_{i=0}^{k-1} s_i(\eta, \lambda)w^i\right),$$

ou

$$\frac{P_k(\eta, \lambda)}{\eta - w} = \frac{P_k(w, \lambda)}{\eta - w} + \sum_{i=0}^{k-1} s_i(\eta, \lambda)w^i.$$

Usando a fórmula integral de Cauchy

$$G(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G(\eta, z)}{\eta - w} d\eta,$$

onde γ é uma curva fechada simples em \mathbb{C} , e w um ponto no interior desta curva, temos

$$\begin{aligned} G(w, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G(\eta, z)}{\eta - w} \frac{P_k(\eta, \lambda)}{P_k(\eta, \lambda)} d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G(\eta, z)}{P_k(\eta, \lambda)} \left(\frac{P_k(w, \lambda)}{\eta - w} + \sum_{i=0}^{k-1} s_i(\eta, \lambda)w^i \right) d\eta \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G(\eta, z)}{(\eta - w)P_k(\eta, \lambda)} d\eta \right) P_k(w, \lambda) + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G(\eta, z)}{P_k(\eta, \lambda)} s_i(\eta, \lambda) d\eta \right) w^i. \end{aligned}$$

Sejam

$$q(w, z, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G(\eta, z)}{(\eta - w)P_k(\eta, \lambda)} d\eta$$

$$r_i(z, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G(\eta, z)}{P_k(\eta, \lambda)} s_i(\eta, \lambda) d\eta.$$

Estas funções estão bem definidas se, e somente se, as raízes de P_k não ocorrem na curva γ para λ próximo de $0 \in \mathbb{C}^k$. Podemos escolher γ satisfazendo esta propriedade, o que termina a demonstração do teorema.

4.3 Teorema de Preparação de Malgrange

A demonstração do Teorema de Preparação de Weierstrass pode ser adaptada para tratar o caso de funções suaves reais. A única dificuldade vem da última parte da demonstração do Teorema de Divisão para polinômios.

Teorema 4.3.1 (Teorema de Divisão de Mather) *Seja F uma função suave $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $F(t, 0) = t^k g(t)$ com $g(0) \neq 0$. Então, dada qualquer função suave $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}$, existem funções suaves q e r tais que*

- (i) $G = qF + r$ em uma vizinhança de 0 ,
- (ii) $r(t, x) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i(x)t^i$ para (t, x) perto de 0 .

Uma diferença em relação ao caso complexo é que as funções q e r não precisam ser únicas. Exemplo: $F(t, x) = t^2 - x$, $G(t, x) \equiv 0$. Então $q_1 = r_1 = 0$ e

$$r_2(t, x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} \text{ and } q_2 = -r_2/F$$

são dois pares que satisfazem as conclusões do teorema. (No caso $k = 1$, as funções q e r são únicas.)

O Teorema de Divisão de Mather segue do Teorema de Divisão de polinômios.

Teorema 4.3.2 (Teorema de Divisão de Polinômios) *Seja $G(t, x)$ uma função complexa definida e suave perto de 0 em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0$. Então existem funções complexas $q(t, x, \lambda)$ e $r(t, x, \lambda)$ definidas em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0$ tais que*

- (i) $G(t, x) = q(t, x, \lambda)P_k(t, x, \lambda) + r(t, x, \lambda)$, e
- (ii) $r(t, x, \lambda) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i(x, \lambda)w^i$, onde r_i são funções suaves definidas em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

Além disso se G é real, q e r podem ser escolhidas reais.

O Teorema de Divisão de Mather segue do Teorema de Divisão de Polinômios de uma maneira análoga ao caso complexo. No lugar da fórmula integral de Cauchy usamos o Teorema de Green.

Seja $z = x + iy$ a coordenada complexa de \mathbb{R}^2 e $\bar{z} = x - iy$. Suponha que $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $f + ig$ onde $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Então

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right).$$

Em particular $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$ se e somente se F é holomorfa. Temos

Lema 4.3.3 *Seja $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função suave (quando considerada como uma aplicação $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$). Seja γ uma curva simples e fechada em \mathbb{C} cujo interior é D . Então para $w \in D$*

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(z)}{z - w} dz + \frac{1}{2\pi i} \int \int_D \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - w}.$$

Prova do Teorema 4.3.2:

Seja $G(t, x)$ uma função definida em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Precisamos mostrar que $G = qP_k + r$ para algumas funções apropriadas q e r .

Seja $\tilde{G}(z, x, \lambda)$ uma extensão de G definida em uma vizinhança de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k$. Então usando a mesma técnica da demonstração do teorema da divisão de polinômios para o caso complexo, temos $\tilde{G} = qP_k + r$ (em $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k$), onde

$$q(w, x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\tilde{G}(\eta, x, \lambda)}{P_k(\eta, \lambda)} \frac{d\eta}{\eta - w} + \frac{1}{2\pi i} \int \int_D \frac{\partial \tilde{G} / \partial \bar{z}(\eta, x, \lambda)}{P_k(\eta, \lambda)} \frac{d\eta \wedge d\bar{\eta}}{\eta - w}$$

e

$$r_i(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\tilde{G}(\eta, x, \lambda)}{P_k(\eta, \lambda)} s_i(\eta, \lambda) d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int \int_D \frac{\partial \tilde{G} / \partial \bar{z}(\eta, x, \lambda)}{P_k(\eta, \lambda)} s_i(\eta, \lambda) d\eta \wedge d\bar{\eta}.$$

As primeiras integrais em q e r_i estão bem definidas. O problema é na segunda integral pois D contém os zeros de P_k . Mas se for possível escolher uma extensão \tilde{G} de G tal que $\partial \tilde{G} / \partial \bar{z}$ se anule nos zeros de P_k para z real, teremos q e r_i bem definidas. Para assegurar a diferenciabilidade de q e r_i uma condição apropriada é que a extensão \tilde{G} de G seja escolhida tal que $\partial \tilde{G} / \partial \bar{z}$ se anule nos zeros de P_k , para z real, com ordem infinita. A existência desta extensão é dada pelo Teorema de extensão de Nirenberg (ver [16]).

4.4 Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado

Proposição 4.4.1 *Seja R um anel comutativo local com identidade e m o ideal maximal de R . Seja A um R -módulo finitamente gerado. Então A/mA é um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo R/m . Seja $\phi : A \rightarrow A/mA$ a projeção natural e v_1, \dots, v_n uma base deste espaço vetorial. Escolha e_1, \dots, e_n em A tais que $\phi(e_i) = v_i$. Então e_1, \dots, e_n são geradores de A sobre R .*

Prova: A ação de R sobre A induz uma ação de R/m sobre A/mA . R/m é um corpo, portanto A/mA é um espaço vetorial. Sejam e_1, \dots, e_n os geradores de A e $v_i = \phi(e_i)$. Seja $v \in A/mA$, então $v = \phi(a)$ por algum $a \in A$. Mas $a = r_1e_1 + \dots + r_n e_n$ ($r_i \in A$), portanto $v = \phi(r_1)v_1 + \dots + \phi(r_n)v_n$. O que implica que v_1, \dots, v_n geram A/mA , isto é A/mA tem dimensão finita.

Inversamente, seja v_1, \dots, v_n uma base de A/mA com $v_i = \phi(e_i)$, $i = 1 \dots n$. Seja B o sub-módulo de A gerado por e_1, \dots, e_n , e $C = A/B$. Como A é finitamente gerado sobre R então C é finitamente gerado sobre R . Agora $A = B + mA$, pois se $a \in A$ então $\phi(a) = \phi(r_1)v_1 + \dots + \phi(r_n)v_n$. Logo $a = r_1e_1 + \dots + r_n e_n + s$, $s \in mA$. Portanto,

$$C = A/B = (B + mA)/B = m(A/B) = mC.$$

Aplicando o Lema de Nakayama segue que $C = 0$, isto é, $A = B$.

Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ um germe de uma aplicação C^∞ , e A um \mathcal{O}_n -módulo. Então $f^* : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathcal{O}_n$ dada por $f^*(\psi) = \psi \circ f$ é um homomorfismo de anéis. Portanto, A pode ser visto com um \mathcal{O}_p -módulo, pois se $a \in A$ e $\psi \in \mathcal{O}_p$, $\psi.a = f^*(\psi).a = (\psi \circ f).a$. Dizemos que A é um \mathcal{O}_p -módulo via f^* .

Teorema 4.4.2 *(Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado) Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ um germe de uma aplicação C^∞ , e A um \mathcal{O}_n -módulo finitamente gerado. Então*

A é um \mathcal{O}_p -módulo (via f^*) finitamente gerado se e somente se $A/m_p A$ é um espaço vetorial de dimensão finita.

Observações 4.4.3 1. No caso dos germes de aplicações holomorfas, o teorema segue do Teorema de Preparação de Weierstrass.

2. O Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado implica no Teorema de Divisão de Mather. (Ver [16] para a demonstração.)

3. Se A é \mathcal{O}_p -módulo finitamente gerado então, usando a Proposição 4.4.1, $A/m_p A$ é um espaço vetorial de dimensão finita. A outra implicação é demonstrada primeiramente no caso de submersões e imersões.

Lema 4.4.4 Seja $\pi : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, 0$ o germe da projeção $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_2, \dots, x_n)$, e A um \mathcal{O}_n -módulo finitamente gerado. Se $A/m_{n-1}A$ é um espaço vetorial de dimensão finita então A é um \mathcal{O}_{n-1} -módulo (via π^*) finitamente gerado.

Prova: Sejam $e_1, \dots, e_n \in A$ tais que $\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)$ formam uma base de $V = A/m_{n-1}A$, onde $\psi : A \rightarrow V$ é a projeção natural.

Etapa 1: e_1, \dots, e_n geram A como um \mathcal{O}_n -módulo. Para demonstrar isso, observamos que $m_{n-1} \subset m_n$, o que induz uma projeção $\eta : A/m_{n-1}A \rightarrow A/m_n A$. Então $\eta\psi(e_1), \dots, \eta\psi(e_n)$ geram $A/m_n A$, e segundo a Proposição 4.4.1, e_1, \dots, e_n geram A como um \mathcal{O}_n -módulo.

Etapa 2: Um elemento $a \in A$ tem a forma $\sum_{i=1}^n (c_i e_i + f_i e_i)$ onde $c_i \in \mathbb{R}$ e $f_i \in m_{n-1}\mathcal{O}_n$. Como $\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)$ é uma base de V , então $a = \sum_{i=1}^n c_i e_i + \bar{e}$, onde $\bar{e} \in m_{n-1}A$, e $c_i \in \mathbb{R}$. Então $\bar{e} = \sum_{j=1}^m g_j a_j$, $g_j \in m_{n-1}$ e $a_j \in A$. Pela *Etapa 1*, $a_j = \sum_{i=1}^n h_{ij} e_i$, $h_{ij} \in \mathcal{O}_n$. Então $\bar{e} = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m g_j h_{ij}) e_i$, o que implica que $a = \sum_{i=1}^n (c_i e_i + f_i e_i)$, onde $f_i = \sum_{j=1}^m g_j h_{ij}$.

Etapa 3: Demonstração do Lema. Pela *Etapa 2*, $x_1 e_i = \sum_{j=1}^n (c_{ij} + f_{ij}) e_j$ com $c_{ij} \in \mathbb{R}$ e $f_{ij} \in m_{n-1}\mathcal{O}_n$. Obtemos um sistema linear de n -equações a n -variáveis

e_1, \dots, e_n

$$\sum_{j=1}^n (x_1 \delta_{ij} - c_{ij} - f_{ij}) e_j = 0,$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Seja $P(x_1, \dots, x_n)$ o determinante da matriz $(x_1 \delta_{ij} - c_{ij} - f_{ij})$. Escrevendo o sistema acima na forma $A.e = 0$ e multiplicando pela matriz adjunta, temos $P.e = 0$, ou seja $P.e_i = 0, \forall i$.

Além disso, temos $f_{ij}(x_1, 0, \dots, 0) = 0$ pois $f_{ij} \in m_{n-1} \mathcal{O}_n$. Então

$$P(x_1, 0, \dots, 0) = \det(x_1 \delta_{ij} - c_{ij})$$

que é um polinômio em x_1 de grau $\leq n$. Então existe $k \leq n$ tal que $P(x_1, 0, \dots, 0) = x_1^k g(x_1)$ e $g(0) \neq 0$. Pela *Etapa 2*, se $a \in A$, então $a = \sum_{i=1}^n (c_i e_i + f_i e_i)$. Aplicando o Teorema de Preparação (usual) a f_i e P , obtemos

$$f_i = q_i P + \sum_{j=0}^{k-1} r_{ij}(x_2, \dots, x_n) x_1^j.$$

Como $P e_i = 0$, $f_i e_i = \sum_{j=0}^{k-1} r_{ij}(x_2, \dots, x_n) x_1^j e_i$ e

$$a = \sum_{i=1}^n (c_i e_i + \sum_{j=0}^{k-1} r_{ij}(x_2, \dots, x_n) x_1^j e_i).$$

Então A é gerado pelos nk elementos $e_1, \dots, e_n, x_1 e_1, \dots, x_1 e_n, \dots, x_1^k e_n$ como um \mathcal{O}_{n-1} , pois $r_{ij} \in \mathcal{O}_{n-1}$.

Lema 4.4.5 *Seja $i : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ o germe de uma imersão e A um \mathcal{O}_n -módulo finitamente gerado. Então A é um \mathcal{O}_p -módulo finitamente gerado.*

Demonstração: Basta observar que a aplicação $i^* : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathcal{O}_n$ é sobrejetora.

Demonstração do Teorema 4.4.2: Definimos a aplicação $\bar{f}(x) = (x, f(x))$. Sejam $\pi_i : \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{i-1} \times \mathbb{R}^p$ as projeções dadas por

$$\pi_i(x_1, \dots, x_i, y) = (x_1, \dots, x_{i-1}, y).$$

Então $f = \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_n \circ \bar{f}$. Como \bar{f} é uma imersão, aplicando o Lema 4.4.5, A é um \mathcal{O}_{n+p} -módulo finitamente gerado. Como $m_p(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^p)A \supset m_p A$, existe uma projeção natural $A/m_p A \rightarrow A/m_p(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^p)A$, portanto $A/m_p(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^p)A$ é um espaço vetorial de dimensão finita. As hipóteses do Lema 4.4.4 estão satisfeitas para as projeção π_n , o que nos permite concluir que A é \mathcal{O}_{n-1+p} -módulo finitamente gerado. Por indução, o mesmo argumento implica que A é um \mathcal{O}_p -módulo finitamente gerado.

4.5 Lema de Wall

Nas aplicações ao problema da determinação finita, o seguinte lema, resultante do teorema de preparação, é muito importante. Ele foi provado em [25].

Lema 4.5.1 *Sejam $f : K^n, 0 \rightarrow K^p, 0$, C um \mathcal{O}_n -módulo finitamente gerado e A um \mathcal{O}_p -sub-módulo de $f^*m_p.C$. Sejam $I, M \subset m_n$ dois ideais de colength finitos em \mathcal{O}_n .*

(i) *Se (a) $M.C \subset (f^*m_p + m_n.M).C$, e (b) $I.C \subset A + M.I.C$, então $I.C \subset A$.*

(ii) *Se $M.C \subset A + M^2.C$, então $M.C \subset A$.*

Prova: (i) Seja $E = (f^*m_p + M).C/f^*m_p.C$. Isto é um \mathcal{O}_n -módulo finitamente gerado (desde que é um quociente de $M.C$ e M e C são finitamente gerados). A condição (a) implica que $m_n.E = E$, então pelo lema de Nakayama, $E = 0$ e portanto $M.C \subset f^*m_p.C$. Segue disso e de (b) que (c): $I.C \subset A + f^*m_p.I.C$.

Seja $E' = (A + I.C)/A$. Segue de (c) que $f^*m_p.E' = E'$. O resultado $E' = 0$ segue se mostrarmos que E' é finitamente gerado sobre \mathcal{O}_p . Para isso basta mostrar para $I.C$.

$I.C$ é finitamente gerado sobre \mathcal{O}_n , e como $I.M.C \subset f^*m_p.I.C$

$$\dim_{\mathbb{R}}(I.C/f^*m_p.I.C) \leq \dim_{\mathbb{R}}(I.C/M.I.C)$$

Isto é finito visto que M é de colength finito. O resultado segue do Teorema de Preparação.

(ii) Aplicamos (i) com $I = M$.

Capítulo 5

Determinação Finita

Principais Referências

- [24] C.T.C Wall, Finite Determinacy of Smooth map-germs, *Bull. London Math. Soc.*, 13 (1981), 481-539.
- [25] C.T.C Wall, Classification and stability of singularities of smooth maps. *Singularity theory (Trieste, 1991)*, 920–952, *World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995*.
- [11] J.W. Bruce, A.A. du Plessis, C.T.C. Wall, Determinacy and unipotency, *Invent. Math.* 88 (1987) 521-554.

A investigação da determinação finita começou com os trabalhos de John Mather em 1960 com uma série de artigos principais da teoria de singularidades. Mather deu uma estimativa grosseira do grau de determinação finita de um germe de aplicação. Terence Gaffney e Andrew du Plessis melhoraram bastante as aproximações do grau de determinação de germes. O artigo de C.T.C. Wall contém um *survey* dos resultados conhecidos sobre a determinação finita antes 1980. Foi somente em [11] que a questão do grau da determinação finita foi completamente resolvida usando as ações de grupos unipotentes. Neste capítulo apresentamos os principais resultados dos artigos [24] e [11]. Observamos que o Lema correspondente ao Lema 4.5.1 em [24] não está correto.

O lema foi substituído pelo Lema 4.5.1 enunciado no capítulo anterior, que apareceu em [25]

5.1 Critério da determinação finita para os grupos de Mather

Teorema 5.1.1 *Para $f \in \mathcal{O}(n, p)$ e \mathcal{G} um grupo de Mather, são equivalentes*

- (a) f é finitamente \mathcal{G} -determinado,
- (b) para algum k , $m_n^k \cdot \theta_f \subset L\mathcal{G}f$,
- (c) $d(f, \mathcal{G}) < \infty$,
- (d) $d_e(f, \mathcal{G}) < \infty$,

Além disso, se consideramos $\epsilon = 1$ para $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}$ ou \mathcal{K} e $\epsilon = 2$ para $\mathcal{G} = \mathcal{L}, \mathcal{A}$, temos

- (i) Se f é $r - \mathcal{G}$ -determinado, então $m_n^{r+1} \cdot \theta_f \subset L\mathcal{G}f$.
- (ii) Se $m_n^{r+1} \cdot \theta_f \subset L\mathcal{G}f$, então f é $(\epsilon r + 1) - \mathcal{G}$ -determinado.
- (iii) Se $d(f, \mathcal{G}) = d < \infty$, então $m_n^{(d+1)\epsilon} \cdot \theta_f \subset L\mathcal{G}f$.

As afirmações (a)-(d) seguem das afirmações (i), (ii) e (iii).

Prova da Parte (i) do Teorema 5.1.1:

Suponha que f é r -determinado. Então, qualquer l -jato, $l \geq r$, cujo r -jato é igual a $j^r f$ é equivalente a f . Estes jatos formam uma sub-variedade em $J^l(n, p)$ cujo espaço tangente é $m_n^{r+1} \cdot \theta_f / m_n^{l+1} \cdot \theta_f$. Portanto

$$m_n^{r+1} \cdot \theta_f \subset L\mathcal{G}.f + m_n^{l+1} \cdot \theta_f.$$

Em particular, se $l = \epsilon r + 1$ temos

$$m_n^{r+1} \cdot \theta_f \subset L\mathcal{G}.f + m_n^{\epsilon r + 2} \cdot \theta_f.$$

Se $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{K}$, aplicando o Lema de Nakayama, segue-se que $m_n^{r+1} \cdot \theta_f \subset L\mathcal{G}.f$.

Aplicando o Lema 4.5.1 com $C = \theta_f$ no caso \mathcal{L} , ou $C = \theta_f/L\mathcal{R}.f$ no caso \mathcal{A} , A é a imagem de $L\mathcal{L}.f$ em C , e $M = m_n^{r+1}$, segue que $m_n^{r+1}.\theta_f \subset L\mathcal{G}.f$.

Prova da parte (ii) do Teorema 5.1.1:

Para demonstrar a parte (ii) do teorema, precisamos de alguns lemas de aproximação, mostrando que se f e g tem o mesmo l -jato então os espaços tangentes $L\mathcal{G}.f$ e $L\mathcal{G}.g$ diferenciam-se apenas em ordens maiores.

Lema 5.1.2 *Sejam f e g com mesmo $k - 1$ -jatos em 0 .*

(i) *Se $\xi \in \theta_n$, então $tf(\xi) - tg(\xi) \in m_n^{k-1}.\theta_f$.*

(ii) *Se $\phi \in \mathcal{O}_p$, então $f^*(\phi) - g^*(\phi) \in m_n^k$.*

(iii) *Se $\eta \in \theta_p$, então $wf(\eta) - wg(\eta) \in m_n^k.\theta_f$.*

(iv) *$L\mathcal{G}.f + m_n^k.\theta_f = L\mathcal{G}.g + m_n^k.\theta_g$.*

Prova: Exercício.

Seja $F : K^n \times K \rightarrow K^p \times K$ um germe dado por $F(x, t) = (F_1(x, t), t)$ (“level preserving”). Definimos θ'_F como o conjunto dos campos de vetores verticais ao longo de F (são os campos cuja projeção em K é nula). Então não é difícil ver que $\theta'_F = \theta_{F_1}$. Temos

$$\begin{aligned} t'F : \theta'_{K^n \times K} &\rightarrow \theta'_F, \text{ com imagem } L'_e\mathcal{R}.F \\ w'F : \theta'_{K^p \times K} &\rightarrow \theta'_F, \text{ com imagem } L'_e\mathcal{L}.F \end{aligned}$$

Tratando F como uma família dos germes, usamos os ideais m_n (em $\mathcal{O}(n + 1)$) e m_p (em $\mathcal{O}(p + 1)$) que definem $0 \times K$, definimos

$$\begin{aligned} L'\mathcal{R}.F &= t'F(m_n.\theta'_{K^n \times K}), \\ L'\mathcal{L}.F &= w'F(m_p.\theta'_{K^p \times K}), \\ L'\mathcal{C}.F &= F^*m_p.\theta'_F, \end{aligned}$$

com $L'\mathcal{A}.F$ e $L'\mathcal{K}.F$ definidos como as somas usuais.

Seja $F_0(x, t) = (f(x), t)$ a família constante. Então

Lema 5.1.3 $m_n^k.\theta'_{F_0} \subset L'\mathcal{G}.F_0 \iff m_n^k.\theta_f \subset L\mathcal{G}.f$.

Prova: Ver [24].

Lema 5.1.4 *Sejam $F, G : K^n \times K, 0 \rightarrow K^p \times K, 0$ tais que $G - F \in m_n^k \cdot \theta_F$. Então*

- (i) *para $\xi \in \theta'_{n+1}$, $t'F(\xi) - t'G(\xi) \in m_n^{k-1} \cdot \theta'_F$,*
- (ii) *para $\phi \in \mathcal{O}_{p+1}$, $F^*(\phi) - G^*(\phi) \in m_n^k \cdot \mathcal{O}_{n+1}$,*
- (iii) *para $\eta \in \theta'_{p+1}$, $w'F(\eta) - w'G(\eta) \in m_n^k \cdot \theta'_F$.*
- (iv) *para cada \mathcal{G} , $L'\mathcal{G}.F + m_n^k \cdot \theta'_F = L'\mathcal{G}.G + m_n^k \cdot \theta'_G$.*

Prova: Exercício.

Podemos agora demonstrar a parte (ii) do teorema. Suponha que $m_n^{r+1} \cdot \theta_f \subset L\mathcal{G}.f$, e seja g um germe com o mesmo l -jato que f , onde $l = \epsilon r + 1$. Pelo Lema 5.1.2

$$m_n^{r+1} \cdot \theta_f \subset L\mathcal{G}.f + m_n^{l+1} \cdot \theta_f = L\mathcal{G}.g + m_n^{l+1} \cdot \theta_g.$$

Usando o Lema 4.5.1 segue que $m_n^{r+1} \cdot \theta_g \subset L\mathcal{G}.g$.

Seja $H : K^n \times K, 0 \rightarrow K^p \times K, 0$ uma interpolação linear entre f e g , ou seja, $H(x, t) = (f_t(x), t)$ com $f_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x)$. Em cada ponto $(0, t_0)$, $0 \leq t_0 \leq 1$, f_{t_0} tem o mesmo l -jato que f . Então pela observação acima, $m_n^{r+1} \cdot \theta_{f_{t_0}} \subset L\mathcal{G}.f_{t_0}$, e pelo Lema 5.1.3 $m_n^{r+1} \cdot \theta_{(f_{t_0} \times id_K)} \subset L\mathcal{G} \cdot (f_{t_0} \times id_K)$. Aplicando o Lema 5.1.4 para $F = f_{t_0} \times K$ e G o germe de H em $(0, t_0)$: a diferença é $((t - t_0)(g(x) - f(x)), 0)$ que pertence a $m_n^l \theta'_F$. Portanto,

$$m_n^{r+1} \theta'_G \subset L'\mathcal{G}.G + m_n^{l+1} \cdot \theta'_G.$$

Pelo Lema 4.5.1 isto implica $m_n^{r+1} \theta'_G \subset L'\mathcal{G}.G$.

Em particular, o vetor $dG(0, \partial/\partial t) - (0, \partial/\partial t) \in L'\mathcal{G}.G$ (denotado por $tG(\partial/\partial t) - \partial/\partial t$). Para $\mathcal{G} = \mathcal{A}$ isto significa que existem germes de campos de vetores $\xi \in m_n \cdot \theta'_{n+1}$ e $\eta \in m_p \cdot \theta'_{p+1}$ tais que

$$t'G(\xi) + w'G(\eta) = tG(\partial/\partial t) - \partial/\partial t.$$

A equação acima implica na existência de duas famílias à 1-parâmetro dos germes de difeomorfismos A e B , preservando os níveis, tais que

$$B \circ G \circ A = f_{t_0} \times id_K.$$

(Este é um resultado de Thom-Levine, ver [16] Theorem 3.3, pp 125-126, versão local.) Portanto f_t é \mathcal{A} -equivalente a f_{t_0} para t próximo de t_0 . Então $f = f_0$ é \mathcal{A} -equivalente a $g = f_1$.

Uma vez que o problema da determinação finita está resolvido, isto é, o germe f foi provado ser finitamente determinado, podemos trabalhar no espaço $J^l(n, p)$ e usar o Lema de Mather para ver se o germe é r determinado por algum $r < l$. Assim podemos dar uma estimativa do grau da determinação de f . Existem vários trabalhos sobre esta estimativa (ver [24]). No caso do grupo \mathcal{A} , a aproximação é feita usando uma aproximação do grau da \mathcal{K} -determinação do germe, como mostram os seguintes resultados.

Teorema 5.1.5 *Se existe um \mathcal{O}_n -módulo D tal que*

$$(a) \ m_n^s \cdot \theta_f \subset tf(m_n \cdot \theta_n) + f^* m_p \cdot D + m_n^{s+1} \cdot \theta_f,$$

$$(b) \ D \subset tf(\theta_n) + wf(\theta_p) + m_n^s \cdot \theta_f,$$

então f é $s - \mathcal{A}$ -determinado.

Corolário 5.1.6 *Se*

$$(a) \ m_n^l \cdot \theta_f \subset L_e \mathcal{K} \cdot f = tf(\theta_n) + f^* m_p \cdot \theta_f,$$

$$(b) \ m_n^k \cdot \theta_f \subset L_e \mathcal{A} \cdot f = tf(\theta_n) + wf(\theta_p),$$

então f é $k + l - \mathcal{A}$ -determinado.

5.2 Determinação finita e unipotência

Uma solução definitiva do problema da estimativa do grau da determinação finita é dada em [11] para uma grande classe de subgrupos de Mather. Já que o problema

da determinação finita foi resolvido por Mather, basta trabalhar em algum espaço dos jatos $J^k(n, p)$, para k grande. A idéia principal em [11] é perceber que a condição necessária para $k - \mathcal{G}_s$ -determinação de um germe f ($\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{A}$, $s \geq 1$) é também suficiente (onde \mathcal{G}_s é o subgrupo de \mathcal{G} cujos elementos têm s -jato à identidade). Além disso, este resultado vale para qualquer subgrupo \mathcal{U} de um dos grupos de Mather tal que $J^1\mathcal{U}$ é um grupo algébrico afim unipotente. Os resultados da teoria dos grupos algébricos afins são essenciais no trabalho de Bruce-du Plessis-Wall (1997). Temos abaixo algumas definições e conceitos sobre grupos algébricos.

Um grupo $G \subset GL(n, K)$ ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) é dito algébrico se G é um subconjunto algébrico do conjunto aberto das matrizes inversíveis. O grupo G age algebricamente sobre uma variedade afim M se a ação é dada na forma polinomial.

Um endomorfismo α de um K -espaço vetorial V é dito *nilpotente*, e $I + \alpha$ *unipotente*, se $\alpha^r = 0$, para algum r .

Um grupo algébrico de automorfismos unipotentes de um espaço vetorial é chamado *grupo algébrico unipotente*.

Lema 5.2.1 *Seja U um grupo algébrico afim unipotente, agindo algebricamente sobre um espaço afim A . Seja B um subespaço vetorial de V_A . Se $x \in A$, então $x + B$ está contido em uma órbita só se*

$$(a) \ B \subset LU.x,$$

$$(b) \ \forall y \in x + B, \ LU.y = LU.x.$$

Proposição 5.2.2 *Seja G um grupo algébrico afim agindo algebricamente sobre um espaço afim A . Seja B um subespaço vetorial de V_A tal que existe uma ação induzida de G sobre A/B . Se para algum $x \in A$, $x + B \subset G.x$, então existe um subgrupo unipotente $U \subset G$ tal que $x + B = U.x$.*

Proposição 5.2.3 *Seja \mathcal{H} um subgrupo conexo e fechado do grupo $J^s\mathcal{K}$, $s \geq 1$. Então \mathcal{H} é um grupo algébrico afim unipotente se, e somente se, $J^1\mathcal{H}$ é unipotente.*

Definição 5.2.4 *Seja \mathcal{G} um dos grupos de Mather. Um subgrupo \mathcal{H} de \mathcal{G} é dito fortemente fechado se $\mathcal{G}_s \subset \mathcal{H}$ para algum s , e $J^s \mathcal{H}$ é um subgrupo fechado de $J^s \mathcal{G}$. Além disso, se $J^s \mathcal{H}$ é um subgrupo algébrico, então \mathcal{H} é dito fortemente Z -fechado.*

Teorema 5.2.5 *Seja \mathcal{H} um subgrupo fortemente Z -fechado de um dos grupos de Mather \mathcal{G} . Então, para qualquer r , $f \in \mathcal{O}(n, p)$ é $r - \mathcal{H}$ -determinado se, e somente se, existe um subgrupo fortemente fechado $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$ de \mathcal{G} , com $J^1 \mathcal{U}$ unipotente, tal que*

$$m_n^{r+1} \cdot \theta_f \subset LU.f.$$

Prova “ \implies ”: Como $m_n^{r+1} \cdot \theta_f \subset LU.f \subset LG.f$, f é finitamente \mathcal{G} -determinado e portanto \mathcal{G}_s -determinado para qualquer s . Escolha s tal que $\mathcal{G}_s \subset \mathcal{U}$ e k tal que f é finitamente $k - \mathcal{G}_s$ -determinado. Então basta mostrar que o espaço afim dos k -jatos que têm o mesmo r -jato que f está contido na $J^k \mathcal{U}$ -órbita de $j^k f$.

Usando os lemas de aproximação (Lema 5.1.2), se g tem o mesmo r -jato que f , então

$$\begin{aligned} LU.g &\subset LU.f + m_n^{r+1} \cdot \theta_f \\ &= LU.f \text{ pela hipótese.} \end{aligned}$$

Tomando os k -jatos,

$$L(J^k \mathcal{U}) \cdot j^k g \subset L(J^k \mathcal{U}) \cdot j^k f,$$

para todo g com o mesmo r -jato que f . Como $J^1 \mathcal{U}$ é unipotente, segue que $J^k \mathcal{U}$ é unipotente (Proposição 5.2.3), e usando o Lema 5.2.1, concluímos que g está na mesma órbita que f .

“ \impliedby ”:

 Como f é $r - \mathcal{H}$ -determinado, f é $r - \mathcal{G}$ -determinado e portanto $k - \mathcal{G}_s$ -determinado por algum k , onde s é tal que $\mathcal{G}_s \subset \mathcal{H}$. Claramente $k \geq s$. Agora $J^k \mathcal{H} \subset J^k \mathcal{G}$ age sobre $J^k(n, p)$ com uma ação induzida sobre $J^r(n, p) = J^k(n, p) / J^k(m_n^{r+1} \cdot \mathcal{O}(n, p))$. Aplicando a Proposição 5.2.2, com $A = J^k(n, p)$, $B = J^k(m_n^{r+1} \cdot \mathcal{O}(n, p))$, $G = J^k \mathcal{H}$,

mostramos que existe um subgrupo unipotente U de $J^k\mathcal{H}$ tal que $U.j^k f = j^k f + J^k(m_n^{r+1}.\mathcal{O}(n, p))$.

Definimos \mathcal{U} como o subgrupo de \mathcal{H} tal que $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{U}$ e $J^k\mathcal{U} = U$. Como J^1U é unipotente, então $J^1\mathcal{U}$ é unipotente. Como f é $k - \mathcal{G}_s$ -determinado,

$$m_n^{k+1}.\theta_f \subset L\mathcal{G}_s.f \subset L\mathcal{U}.f.$$

Finalmente, como $L\mathcal{U}.j^k f = J^k(m_n^{r+1}.\mathcal{O}(n, p))$, segue que

$$m_n^{r+1}.\theta_f \subset L\mathcal{U}.f.$$

Teorema 5.2.6 *Seja G um dos grupos de Mather. Então f é $r - \mathcal{G}_s$ -determinado ($s \geq 1$) se, e somente se,*

$$m_n^{r+1}.\theta_f \subset L\mathcal{G}_s.f.$$

Prova Aplique o Teorema 5.2.5 para $\mathcal{H} = \mathcal{G}_s$.

Corolário 5.2.7 *f é $r - \mathcal{G}_s$ -determinado ($\mathcal{G} = \mathcal{L}$ ou \mathcal{A} , $s \geq 1$) se, e somente se,*

$$m_n^{r+1}.\theta_f \subset L\mathcal{G}_s.f + m_n^{r+1}.(f^*m_p.\mathcal{O}_n + m_n^{r+1}).\mathcal{O}(n, p).$$

Prova: Aplique o Teorema 5.2.6 e o Lema 4.5.1.

No caso do grupo \mathcal{A} os resultados acima são usados através do seguinte corolário.

Corolário 5.2.8 *Se f satisfaz*

$$\begin{aligned} m_n^l.\theta_f &\subset L\mathcal{K}.f \text{ e} \\ m_n^{r+1}.\theta_f &\subset L\mathcal{A}_1.f + m_n^{l+r+1}.\theta_f, \end{aligned}$$

então f é $r - \mathcal{A}_1$ -determinado.

Demonstração: Das hipóteses do corolário temos

$$m_n^{r+1}.\theta_f \subset L\mathcal{A}_1.f + m_n^{r+1}L\mathcal{K}.f.$$

e o resultado segue do Corolário 5.2.7.

Capítulo 6

Desdobramentos Versais

Principal Referência

- [18] J. Martinet, Singularities of smooth functions and maps, LMS Lecture Notes 58, Cambridge University Press 1982.

Seja f um germe finitamente determinado. Podemos considerar as deformações de f e estudar os tipos de singularidades que aparecem em tais deformações. Em particular, podemos perguntar se os tipos de singularidades que aparecem são em número finito e se existe uma família que contém todos estes tipos. Na verdade queremos que qualquer outra deformação de f seja obtida a partir desta família. Tais famílias chamam-se deformações versais. Neste capítulo enunciamos os teoremas principais sobre as deformações e desdobramentos versais. Estudamos também alguns objetos geométricos associados a tais famílias.

A partir de agora tomamos $K = \mathbb{R}$, mas os resultados valem também para $K = \mathbb{C}$.

Definição 6.0.9 *Um desdobramento a s -parâmetros de um germe $f_0 \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ é um germe*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0 \\ (x, u) &\mapsto (f(x, u), u) \end{aligned}$$

tal que $f(x, 0) = f_0(x)$. O germe $f(x, u)$ é chamado uma deformação de f_0 .

Consideramos o caso $\mathcal{G} = \mathcal{A}$ (os resultados são análogos para qualquer grupo de Mather). Dois desdobramentos $F, G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0$ de f_0 são *isomorfos* se existirem dois germes de difeomorfismos

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0 \text{ e} \\ \psi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0\end{aligned}$$

que são desdobramentos a s -parâmetros dos germes das identidades em \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^p respectivamente, e

$$G = \psi \circ F \circ \phi^{-1}.$$

Como $\phi_0 = 1_{\mathbb{R}^n}$ e $\psi_0 = 1_{\mathbb{R}^p}$, então ϕ_u e ψ_u são germes de difeomorfismos para u pequeno. Então $g_u = \psi_u \circ f_u \circ \phi_u^{-1}$ e g_u é \mathcal{A}_e -equivalente a f_u via difeomorfismos que são suavemente parametrizados por u . Observamos que os germes g_u, f_u, ϕ_u e ψ_u não podem ser considerados como germes em 0 com meta 0, para $u \neq 0$. Por isso chamamos a equivalência de \mathcal{A}_e -equivalência. Para manter a origem fixa temos que impor $\phi(0, u) = 0$ e $\psi(0, u) = 0$.

Dado um germe $h : \mathbb{R}^t, 0 \rightarrow \mathbb{R}^s, 0$ definimos o *pull-back* de F por h , denotado por h^*F , o desdobramento a t -parâmetros

$$h^*F(x, v) = (f(x, h(v)), v).$$

F e G são ditos *equivalentes* se existir um difeomorfismo $h : \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}^s, 0$ tal que G é isomorfo a h^*F . Esta é uma relação de equivalência. Se G é um desdobramento a t -parâmetros de f_0 (t não necessariamente igual a s), dizemos que G é induzido por F se existir um germe $h : \mathbb{R}^t, 0 \rightarrow \mathbb{R}^s, 0$ tal que G é isomorfo a h^*F .

Definição 6.0.10 1. F é *versal* se todos os desdobramentos de f_0 são induzidos por F .

2. F é *trivial* se é isomorfo ao desdobramento constante $(x, u) \mapsto (f_0(x), u)$.

3. f_0 é *estável* se todos os desdobramentos de f_0 são triviais.

Dado $F(x, u) = (f(x, u), u)$ um desdobramento de f_0 , as *velocidades iniciais* $\dot{F}_i \in \mathcal{O}(n, p)$ de F são definidas como

$$\dot{F}_i(x) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, 0), \quad \text{para } i = 1, \dots, s.$$

Podemos enunciar agora o teorema fundamental da existência de desdobramentos versais.

Teorema 6.0.11 *O desdobramento F é versal se, e somente se,*

$$L\mathcal{A}_e.f_0 + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s\} = \mathcal{O}(n, p).$$

Suponha que $c = \mathcal{A}_e\text{-codim}(f_0) < \infty$ e $g_1, \dots, g_c \in \mathcal{O}(n, p)$ formam uma \mathbb{R} -base do complementar de $L\mathcal{A}_e.f_0$ em $\mathcal{O}(n, p)$. Defina o desdobramento

$$F(x, u) = (f_0(x) + \sum_{i=1}^c u_i g_i(x), u),$$

com $g_i = \dot{F}_i$. Então

Corolário 6.0.12 $F(x, u) = (f_0(x) + \sum_{i=1}^c u_i g_i(x), u)$ é um desdobramento versal de f_0 .

Corolário 6.0.13 f_0 possui um desdobramento versal se, e somente se, $\mathcal{A}_e\text{-codim}(f_0) < \infty$.

Temos também:

Teorema 6.0.14 f_0 é estável se, e somente se, $\mathcal{A}_e\text{-codim}(f_0) = 0$.

Se $c = \mathcal{A}_e\text{-codim}(f_0)$, então o número mínimo de parâmetros para um desdobramento versal é c . Um desdobramento versal a c -parâmetros de f_0 é chamado *miniversal*.

Teorema 6.0.15 *Todos os desdobramentos miniversais de f_0 são equivalentes.*

Os resultados no caso dos \mathcal{A} -desdobramentos são análogos, só que usamos a \mathcal{A} - $\text{codim}(f_0)$ e supomos que $g_1, \dots, g_s \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ geram o complementar de $L\mathcal{A}.f_0$ em $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$. Observamos que existe o seguinte resultado de Wilson.

Teorema 6.0.16 $\mathcal{A}\text{-codim}(f_0) = \mathcal{A}_e\text{-codim}(f_0) + n$.

Os desdobramentos versais fornecem informações sobre a geometria do germes singulares.

Definição 6.0.17 1. *O conjunto dos pontos críticos de F é*

$$\Sigma F = \{(x, u) : DF_x(x, u) \text{ é singular}\},$$

onde DF_x denota a derivada c.r.a. x

2. *O discriminante de F , $\Delta(F)$ é a imagem de ΣF , isto é, $\Delta(F) = F(\Sigma F)$.*

3. *O conjunto de bifurcação é definido por*

$$\text{Bif}(F) = \{u \in \mathbb{R}^s : \exists x \in \mathbb{R}^n, 0 \text{ com } f_u \text{ instável em } x\}$$

Uma aplicação importante dos desdobramentos versais é a seguinte.

Proposição 6.0.18 *Quaisquer dois desdobramentos versais com mesmo número de parâmetros têm conjuntos de pontos críticos, discriminantes e conjuntos de bifurcações difeomorfos.*

Capítulo 7

Classificação dos germes de funções

Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ um germe de uma função suave. Se $\nabla f(0) \neq 0$, então $f \simeq_{\mathcal{R}} x_1$. Se f é singular em 0, o objetivo é determinar uma lista de singularidades finitamente determinadas. É claro que não podemos obter todos os germes finitamente determinados, portanto, restringimo-nos ao caso dos germes simples (Definição 7.4.1).

Neste curso, a classificação dos germes de funções (ou de aplicações) é obtida por indução sobre o espaço de k -jatos. Dado um $j^k f$ usamos o teorema da Transversal Completa para obter uma parametrização dos $(k+1)$ -jatos que tem o k -jato igual a $j^k f$. Podemos usar o Lema de Mather para produzir as órbitas dentro desta parametrização. Aplicamos o teste da determinação finita a cada órbita no $(k+1)$ -jato (cuja k -jato é $j^k f$). Se o germe é finitamente determinado paramos o processo. Se não, consideramos o $(k+2)$ -jato. No caso de funções precisamos dos resultados que apresentamos na próxima seção.

7.1 Singularidades de Morse e Lema da Decomposição

Definição 7.1.1 *Um germe $f \in m_n$ é dito de Morse se $j^2 f$ é uma forma quadrática não degenerada.*

Lema 7.1.2 ([18]) *Um germe de Morse é \mathcal{R} -equivalente a $\sum_{i=1}^n \pm x_i^2$.*

Seja $f \in m_n$, então o \mathcal{R} -espaço tangente estendido de f é dado por $L_e \mathcal{R}.f = J(f)$, onde $J(f)$ denota o ideal Jacobiano de f . Segue do teorema fundamental dos desdobramentos versais (ver Teorema 6.0.11 no caso do grupo \mathcal{A}) que um desdobramento de f é \mathcal{R}_e -versal se, e somente se,

$$J(f) + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s\} = \mathcal{O}_n.$$

Isto implica na seguinte proposição.

Proposição 7.1.3 *Uma deformação \mathcal{R}_e -miniversal de um germe de Morse f é dada por $f(x, u) = f(x) + u$.*

Observação 7.1.4 *No caso do grupo \mathcal{K} ou \mathcal{A} um germe de Morse é estável.*

Definição 7.1.5 *Um germe $f \in m_n^2$ tem corank q se a matriz Hessiana $(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j(0))$ tem rank $p = n - q$.*

Lema 7.1.6 (*“Splitting Lemma” ou Lema de Decomposição*) *Se $f \in m_n^2$ é uma singularidade de corank q , então f é \mathcal{R} -equivalente a um germe da forma*

$$Q(x_1, \dots, x_p) + g(x_{p+1}, \dots, x_n),$$

onde $p + q = n$, Q uma forma quadrática não degenerada e $j^2 g = 0$.

Prova: Podemos supor que $j^2 f$ é dado por uma forma quadrática não degenerada $Q(x_1, \dots, x_p)$, e considerar f como um desdobramento de Q . Como $Q + u$ é miniversal, segue que f é isomorfo a $g^*(Q + u)$ por algum germe $g : \mathbb{R}^{n-p}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$. Isto é, existe um difeomorfismo ϕ tal que

$$f(\phi(x_1, \dots, x_n)) = Q(x_1, \dots, x_p) + g(x_{p+1}, \dots, x_n).$$

Observemos que a singularidade de f é completamente determinada pela singularidade de g . A vantagem do uso do Lema de Decomposição é que g tem um número

menor de variáveis. Podemos classificar agora os germes de funções usando o Teorema da Transversal Completa e o Teorema 5.1.1 da determinação finita, a saber, se

$$m_n^k \cdot \mathcal{O}_n \subset L\mathcal{R}.f + m_n^{k+1} \cdot \mathcal{O}_n,$$

então f é $k - \mathcal{R}$ -determinado.

7.2 Singularidades de corank 1

Usando o Lema de Decomposição, temos $f = g(x) + q(x_2, \dots, x_n)$, onde q é uma forma quadrática não degenerada. Então o problema neste caso se reduz a classificar funções de uma só variável.

Se $g(0) = \dots = g^{(k)} = 0$ mas $g^{(k+1)} \neq 0$, então não é difícil mostrar que g é $(k + 1)$ -determinado e, portanto,

$$g \simeq_{\mathcal{R}} \pm x^{k+1}.$$

A singularidade $\pm x^{k+1}$ é chamada A_k . Ela é de \mathcal{R}_e -codimensão k . Um desdobramento versal é dado por

$$\pm x^{k+1} + u_{k-1}x^{k-1} + \dots + u_1x + u_0.$$

A constante u_0 representa os níveis de $f_u(x)$. Em alguns casos somente a singularidade de f é de interesse. Nest caso, é definido o desdobramento versal “potencial” como um desdobramento que satisfaz

$$J(f) + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s\} = m_n \cdot \mathcal{O}_n.$$

No caso da singularidade $\pm x^{k+1}$, um modelo de um desdobramento potencial é $\pm x^{k+1} + u_{k-1}x^{k-1} + \dots + u_1x$. Uma outra maneira de eliminar o termo constante é considerar o grupo \mathcal{K} ou \mathcal{A} . Nestes casos podemos obter o termo constante no desdobramento usando o grupo \mathcal{L} .

Os discriminantes e os conjuntos de bifurcações das singularidades A_2 e A_3 são dados nas Figuras 7.1 e 7.2.

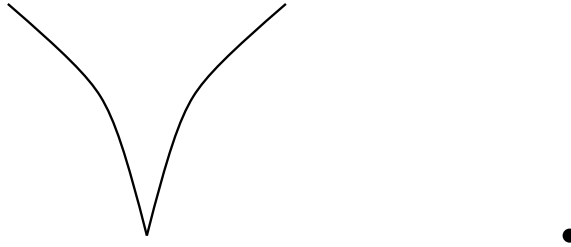


Figura 7.1: Discriminante e conjunto de bifurcação da singularidade A_2 .

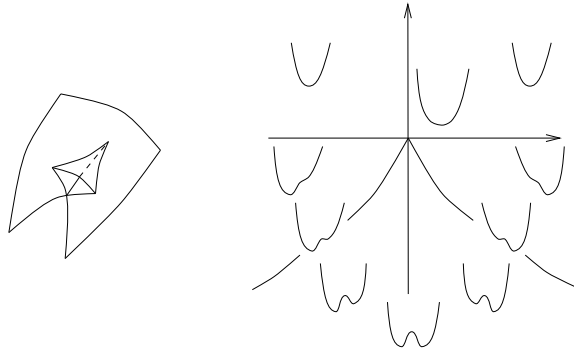


Figura 7.2: Discriminante e diagrama de bifurcação da singularidade A_3 .

7.3 Singularidades de corank 2

Pelo Lema de Decomposição temos que considerar germes de funções de duas variáveis $g(x, y)$ com $j^2g = 0$.

Seja $j^3g = a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3$. Podemos mudar variáveis e escrever g na forma

$$g \simeq_{\mathcal{R}} \begin{cases} x^3 \pm xy^2 & \text{se } g \text{ possui uma ou três raízes reais} \\ xy^2 & \text{se } g \text{ possui uma raiz dupla} \\ x^3 & \text{se } g \text{ é uma cúbica perfeita} \\ 0 & \text{se } g = 0 \end{cases}$$

O 3-jato $x^3 \pm xy^2$ é 3-determinado pois

$$m^3(x, y) \subset m(x, y) < 3x^2 \pm y^2, \pm 2xy > + m^4(x, y).$$

Esta singularidade é chamada D_4 e tem \mathcal{R}_e -codimensão 4. Um desdobramento versal é dado por

$$x^3 \pm xy^2 + u_3x^2 + u_2x + u_1y + u_0.$$

Como no caso anterior, não precisamos do termo u_0 no caso de um desdobramento potencial.

O 3-jato xy^2 : Suponha $j^{k-2}f = xy^2$, $k \geq 5$. Então

$$J^{k-1}(m^2(x, y) < y^2, 2xy >) \cap H^{k-1}(x, y) + \mathbb{R} \cdot \{x^{k-1}\} = H^{k-1}(x, y).$$

Segue do teorema da Transversal Completa que todos os $(k-1)$ -jatos cujos $(k-2)$ jatos são iguais a xy^2 são equivalentes a $xy^2 + ax^{k-1}$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Uma mudança de coordenadas mostra que as órbitas nesta família são

$$xy^2 \pm x^{k-1} \text{ e } xy^2.$$

A singularidade $xy^2 \pm x^{k-1}$ é $(k-1)$ -determinada, pois

$$m^{k-1}(x, y) \subset m(x, y) < y^2 \pm (k-1)x^{k-2}, 2xy > + m^k(x, y).$$

Esta singularidade é chamada D_k e tem \mathcal{R}_e -codimensão k . Um desdobramento versal é dado por

$$xy^2 \pm x^{k-1} + u_{k-1}x^{k-2} + \cdots + u_2x + u_1y + u_0.$$

O 3-jato x^3 : Temos $f_x = 3x^2$ e $f_y = 0$,

$$J^4(m^2(x, y) < 3x^2, 0 >) \cap H^4(x, y) + \mathbb{R} \cdot \{xy^3, y^4\} = H^4(x, y).$$

Então um elemento g de $J^4(2, 1)$ com $j^3g = f$ é equivalente a $x^3 + axy^3 + by^4$ para algum par $a, b \in \mathbb{R}$.

• Se $b \neq 0$, então $g \simeq_{\mathcal{R}} x^3 + axy^3 \pm y^4$. Seja $V = \{x^3 + axy^3 \pm y^4, a \in \mathbb{R}\}$ um espaço vetorial em $M = J^4(2, 1)$ e seja $G = J^4\mathcal{R}$. Aplicando o Lema de Mather segue que V está contido em uma só órbita, o que mostra que $g \simeq_{\mathcal{R}} x^3 \pm y^4$. Esta singularidade é 4-determinada e é denotada por E_6 . Ela tem \mathcal{R}_e -codimensão 6 com um desdobramento versal dado por

$$x^3 \pm y^4 + u_5xy^2 + u_4y^2 + u_3xy + u_2x + u_1y + u_0.$$

• Se $b = 0$ e $a \neq 0$, então $g \simeq_{\mathcal{R}} x^3 + xy^3$. Esta singularidade é 5 determinada e é denotada por E_7 . Tem \mathcal{R}_e -codimensão 7 com um desdobramento versal dado por

$$x^3 + xy^3 + u_6y^4 + u_5y^3 + u_4xy^2 + u_3y^2 + u_2xy + u_1x + u_0.$$

• Se $a = b = 0$, então um 5-jato cujo 4-jato é x^3 é equivalente a $x^3 + cxy^4 + dy^5$. Se $d \neq 0$, então $g \simeq x^3 + y^5$. Esta singularidade, denotada por E_8 , é 5-determinada e tem \mathcal{R}_e -codimensão 8. Um desdobramento versal é dado por

$$x^3 + y^5 + u_7xy^3 + u_6y^3 + u_5xy^2 + u_4y^2 + u_3xy + u_2x + u_1y^4 + u_0.$$

7.4 Singularidades simples

Definição 7.4.1 *Uma singularidade finitamente determinada $f \in m_n\mathcal{O}(n, p)$ é dita \mathcal{G} -simples se existe uma vizinhança V de $j^k f$ (k grande) em $J^k(n, p)$ tal que V contém um número finito de órbitas de $J^k\mathcal{G}$ em $J^k(n, p)$.*

Exemplo 7.4.2 (1) $n = p = 1$, $f(x) = \pm x^{k+1}$ é \mathcal{R} -simples, pois para $l \geq k + 1$, uma vizinhança de $j^l f$ que contém só as órbitas A_s , $s \leq k$. (Ver o desdobramento versal de A_k).

(2) Nem todos os germes são \mathcal{R} -simples. Seja

$$f_t(x, y) = xy(x + y)(x - ty).$$

O conjunto $f^{-1}(0)$ é formado por 4 retas passando pelo origem. Podemos mostrar que f_t é finitamente determinado mas f_t e $f_{t'}$ não são \mathcal{R} -equivalentes para $t \neq t'$.

Proposição 7.4.3 *Se $f \in m_n$ é \mathcal{R} -simples, então $\text{corank}(f) \leq 2$.*

Prova: $j^2 f$ define uma forma quadrática de rank r em \mathbb{R}^2 . O espaço nulo desta forma quadrática é um subespaço vetorial de dimensão $n - r$. $j^3 f$ define uma forma cúbica em V que é independente do sistema de coordenadas. Se $\phi \in \mathcal{R}$ então $D\phi(0)$ leva $V_{j^2 f}$

a $V_{j^2(f \circ \phi)}$. Então a ação de $J^3\mathcal{R}$ sobre $J^3(n, 1)$ induz uma ação de $GL(n - r, \mathbb{R})$ sobre o espaço das formas cúbicas de $(n - r)$ -variáveis. Assim, se as formas cúbicas definidas pelos germes f, g de rank r não são $GL(n - r, \mathbb{R})$ -equivalentes, então f e g não são \mathcal{R} -equivalentes.

O espaço de cúbicas de $(n - r)$ -variáveis é de dimensão $\binom{n - r + 2}{3}$. Mas $\dim GL(n - r, \mathbb{R}) = (n - r)^2$; logo se $n - r \geq 3$, então $\binom{n - r + 2}{3} > (n - r)^2$, e portanto as órbitas de $GL(n - r, \mathbb{R})$ têm codimensão > 1 . Isto é qualquer vizinhança encontra um número infinito de órbitas.

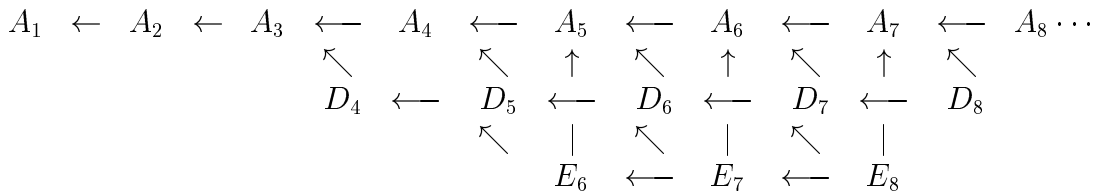
Teorema 7.4.4 *As singularidades \mathcal{R} -simples em m_n são as A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 .*

Prova: Usando os desdobramentos versais das singularidades no teorema, podemos mostrar que estas singularidades são simples. Segue da Proposição 7.4.3 que só precisamos considerar os germes de $\text{corank} \leq 2$.

Se $\text{corank}(f) = 1$, então $f \simeq_{\mathcal{R}} \pm x^{k+1}$ que é simples.

Se $\text{corank}(f) = 2$, então se f tem uma singularidade D_k, E_6, E_7 ou E_8 , f é simples. Caso contrário, usando o Lema de Mather podemos mostrar facilmente que f não é simples.

Podemos agora desenhar o **diagrama de adjacência** das singularidades simples:



Observação 7.4.5 1. *A relação entre as singularidades simples e as álgebras de Lie simples designadas pelos mesmos nomes ou grupos gerados pelas reflexões é estudada em [1].*

2. *Um germe de função é \mathcal{A} -simples se, somente se, é \mathcal{K} -simples se, somente se, é \mathcal{R} -simples.*

7.5 Caracterização geométrica dos germes finitamente determinados

Seja $f \in \mathcal{O}_n$ e denote $\Sigma(f) = \{x \in \mathbb{R}^n, 0 : \nabla f(x) = 0\}$. Se f é finitamente determinado, então $m_n^k \subset J(f)$ para algum k e portanto $\Sigma(f) \subset \{0\}$. O inverso não vale pois $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$ satisfaz $\Sigma(f) = \{0\}$, mas f não é finitamente determinado.

Seja f um germe de uma função analítica, e denote $f^{\mathbb{C}}$ a complexificação de f . Seja $\Sigma(f^{\mathbb{C}}) = \{x \in \mathbb{C}^n, 0 : \nabla f^{\mathbb{C}}(x) = 0\}$. Então $\Sigma(f^{\mathbb{C}})$ é um germe de uma variedade holomorfa em \mathbb{C}^n .

Proposição 7.5.1 $\Sigma(f^{\mathbb{C}}) \subseteq \{0\}$ se, e somente se, $m_n^k \subseteq J(f^{\mathbb{C}})$.

Prova: A suficiência é trivial. Suponha que $\Sigma(f^{\mathbb{C}}) = \{0\}$. Aplicando Nullstellensatz para cada $i = 1, \dots, n$ existem k_i tais que $x_i^{k_i} \in J(f^{\mathbb{C}})$. Portanto $m_n^k \subseteq J(f^{\mathbb{C}})$, onde $k = \max(k_i)$.

Corolário 7.5.2 Se f é um germe de uma função analítica, então f é \mathcal{R} -finitamente determinado se, e somente se, $\Sigma(f^{\mathbb{C}}) \subseteq \{0\}$.

O resultado acima pode ser generalizado para germes de aplicações em $\mathcal{O}(n, p)$. Um germe f é finitamente \mathcal{R} -determinado se, e somente se, $m_n^k \cdot \mathcal{O}(n, p) \subseteq L\mathcal{R}.f$. Um corolário da Proposição 7.5.1 é o seguinte.

Corolário 7.5.3 Se f é um germe de uma aplicação analítica em $\mathcal{O}(n, p)$, então f é \mathcal{R} -finitamente determinado se, e somente se, $\Sigma(f^{\mathbb{C}}) \subseteq \{0\}$, onde $\Sigma(f^{\mathbb{C}}) = \{x \in \mathbb{C}^n, 0 : df^{\mathbb{C}}(x) \text{ não é sobrejetora}\}$.

Proposição 7.5.4 Seja $f \in \mathcal{O}(n, p)$, $p \geq 2$. Então f é \mathcal{R} -finitamente determinado se, e somente se, f é equivalente a um germe de uma aplicação linear sobrejetora $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$.

Prova: Se f é equivalente a um germe de uma aplicação linear sobrejetora então f é 1- \mathcal{R} -determinado.

Suponha que f seja \mathcal{R} -finitamente determinado. Então podemos supor que f é um polinômio, portanto analítico. Logo $\Sigma(f^{\mathbb{C}}) \subseteq \{0\}$.

Vamos mostrar que $\Sigma(f^{\mathbb{C}})$ é vazio, provando que $df(0)$ é uma submersão. (Usando o teorema da Função Implícita, isto implica que f é equivalente a $df(0)$.) Mostraremos que se $\Sigma(f^{\mathbb{C}})$ não é vazio, então $\dim \Sigma(f^{\mathbb{C}}) \geq p - 1$.

Se $n < p$ então $\Sigma(f^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}^n, 0$. Suponha que $n \geq p$ e considere a aplicação

$$j^1 f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow J^1(n, p).$$

Então $\Sigma(f^{\mathbb{C}}) = (j^1 f)^{-1}(\overline{S}_1)$, onde \overline{S}_1 é a variedade das matrizes de corank 1. Temos $\text{codim}(\overline{S}_1) = n - p + 1$ e portanto $\text{codim} \Sigma(f^{\mathbb{C}}) \leq n - p + 1$. Isto implica que $\dim \Sigma(f^{\mathbb{C}}) \geq p - 1 \geq 1$, pois $p \geq 2$.

Observação 7.5.5 *A proposição acima mostra que para $p \geq 2$ a \mathcal{R} -equivalência não dá informações sobre o comportamento infinitesimal das aplicações. Por isso precisamos considerar também a ação do grupo \mathcal{L} (ou \mathcal{C}).*

7.6 Aplicação à geometria plana

A teoria de singularidades não somente reinterpreta resultados clássicos da geometria diferencial local das superfícies no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , como também permite a descoberta de novos resultados fascinantes sobre esta geometria. Os novos resultados seguiram da sugestão de René Thom que consiste em estudar o contato da superfície com conjuntos especiais tais como planos, linhas, esferas, círculos, etc.. J. Montaldi deu em [21] um método para estudar estes contatos. (Para um *survey* dos resultados nesta área nos últimos 20 anos, ver [4].)

Apresentamos nesta seção alguns resultados sobre a geometria plana de superfícies em \mathbb{R}^3 .

Seja M uma superfície suave em \mathbb{R}^3 . O contato de M com planos em \mathbb{R}^3 é dado pela família de funções altura

$$\begin{aligned} H : M \times S^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, u) &\mapsto \langle p, u \rangle \end{aligned}$$

Para u fixo, a função H_u é a função altura na direção u . Em $p \in M$ esta função descreve o contato de M com o plano pelo ponto p cujo vetor normal é u .

Escolhamos coordenadas locais em torno de p_0 , tais que a superfície M é dada como o gráfico da função $z = f(x, y)$. Suponhamos que as direções em S^2 são em torno de $u = (0, 0, 1)$. Estas direções podem ser parametrizadas por $(a, b, 1)$. Então a família (alterada) de funções altura é dada, localmente, por

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^2 M \times \mathbb{R}^2, 0 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (a, b)) &\mapsto f(x, y) + ax + by \end{aligned}$$

com $H_0(x, y) = f(x, y)$. Queremos identificar geometricamente os tipos de singularidades da função f e verificar se a família H é um desdobramento versal destas singularidades. Como H é uma deformação a 2 parâmetros de f , somente as singularidades de codimensão ≤ 2 de f podem ser desdobradas versalmente por H , ou seja, somente as singularidades A_1 , A_2 e A_3 .

- A função f é singular na origem se, e somente se, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, ou seja, se, e somente, se a direção $(0, 0, 1)$ é a direção normal a M em p_0 . Suponha que f seja singular em $(0, 0)$ e escreva $j^2 f(x, y) = a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 y^2$. A singularidade é de tipo A_1 se, e somente se, $j^2 f(x, y)$ é uma forma quadrática não degenerada, isto é, se, e somente se, $a_1^2 - 4a_0 a_2 \neq 0$. Isto significa que p_0 não é um ponto parabólico de M .

- Suponha que $(0, 0)$ seja um ponto parabólico. Podemos fazer uma mudança de variáveis e escrever $j^2 f(x, y) = a_0 x^2$ (com um novo $a_0 \neq 0$ se necessário). Seja $j^3 f(x, y) = a_0 x^2 + b_0 x^3 + b_1 x^2 y + b_2 x y^2 + b_3 y^3$. A singularidade é de tipo A_2 , ou seja, equivalente a $\pm x^2 + y^3$ se, e somente se, $b_3 \neq 0$. Esta condição significa que a única direção assintótica no ponto parabólico é transversal ao conjunto parabólico.

• Suponha que $(0,0)$ seja um ponto parabólico de M e $b_3 = 0$, isto é, a única direção assintótica no ponto parabólico é tangente ao conjunto parabólico. Este ponto é chamado *cúspide de Gauss*. Escreva $j^4 f(x, y) = a_0x^2 + b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + c_0x^4 + c_1x^3y + c_2x^2y^2 + c_3xy^3 + c_4y^4$. A singularidade é de tipo A_3 , ou seja, equivalente a $\pm x^2 \pm y^4$ se, e somente se, $b_2^2 - 4a_0c_4 \neq 0$.

Conclusão: a função altura H_u tem uma singularidade

$$\begin{aligned} A_1 &\iff u \text{ é a direção normal em } p \\ A_2 &\iff u \text{ é a direção normal em } p, p \text{ é um ponto parabólico} \\ A_3 &\iff u \text{ é a direção normal em } p, p \text{ é uma cúspide de Gauss} \end{aligned}$$

Usando as notações acima, a família H de funções altura é um desdobramento versal de uma singularidade do tipo

$$\begin{aligned} A_1 &: \text{ Sempre} \\ A_2 &: \text{ Sempre} \\ A_3 &: \text{ Se } b_2 \neq 0, \text{ ou seja, se o conjunto parabólico é uma curva regular.} \end{aligned}$$

No caso onde H é versal, podemos usar as propriedades dos desdobramentos versais para obter algumas informações sobre a geometria de M . Em nosso caso, o discriminante de H é precisamente o *dual* da superfície M , e o conjunto de bifurcação é a imagem do conjunto parabólico na esfera de Gauss. Para ver isso, observe que a família H é singular em um ponto (p, u) se, e somente se, a direção u coincide com a normal à superfície no ponto p . Portanto, $H(p, u) = (\langle p, u \rangle, u)$ representa o plano tangente à superfície no ponto p , ou seja, o discriminante de H é o *dual* da superfície M . por outro lado, a parte local do conjunto de bifurcação de H consiste nos pontos u onde H_u tem uma singularidade instável. Isto é, o caso quando u é o vetor normal em um ponto parabólico. Segue que quando as condições de versalidade de H estão satisfeitas, temos os seguintes resultados (Figura 7.3).

O dual de M é localmente difeomorfo a

- uma superfície suave nos pontos A_1 ,
- uma *cuspidal-edge* nos pontos A_2 ,
- uma *Rabo de andorinha* no ponto A_3 .

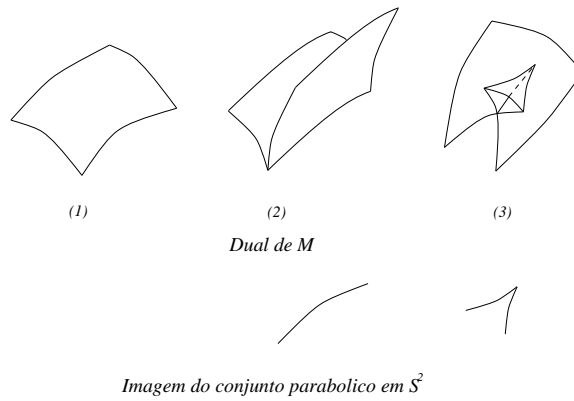


Figura 7.3: Estruturas estáveis do dual de uma superfície.

A imagem do conjunto parabólico na esfera de Gauss é localmente difeomorfa a

- uma curva suave nos pontos A_2 ,
- uma cúspide no ponto A_3 .

7.7 Lista de exercícios

1. Seja $f \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ um germe de uma aplicação suave.
 - (i) Mostre que se $m_n^{r+1} \subset f^*m_p^2$, então f é $r - \mathcal{L}$ -determinado.
 - (ii) Deduza que se $m_n^{r+1} \subset f^*m_p$, então f é $(2r + 1) - \mathcal{L}$ -determinado.
 - (iii) Deduza também que f é $r - \mathcal{L}$ -determinado se, e somente se, f é $r - \mathcal{L}_1$ -determinado.
 - (iv) Mostre que f é $r - \mathcal{L}$ -determinado se, e somente se, $m_n^{r+1} \subset f^*m_p^2 + m_n^{2r+2}$.
2. Obtenha a \mathcal{A} -classificação dos germes simples $\mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ e estude a geometria dos germes de \mathcal{A}_e -codimensão ≤ 2 .

Capítulo 8

Classificação dos germes

$$\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$$

Principais Referências

- [22] J.H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane. *J. London Math. Soc.* (2) 36 (1987), no. 2, 351–369.
- [13] T. Gaffney, The structure of $LA.f$, classification and an application to differential geometry, *Proceedings of Symposia in Pure Maths.*, Vol 40 (1983), Part 1, 409-427

A teoria de singularidades começou com os trabalhos de Whitney (1955) sobre a classificação de singularidades estáveis do plano ao plano. Muitas listas de germes $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ seguiram, a mais longa até hoje é aquela apresentada por Rieger. Daremos uma classificação dos germes de corank 1 e codimensão ≤ 2 usando a técnica da Transversal Completa.

Seja $F : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ um germe de uma aplicação suave. Se $\text{corank}(F) \leq 1$, então podemos mudar coordenadas e escrever F na forma

$$F(x, y) = (x, f(x, y)).$$

Pretendemos classificar germes sob a ação do grupo \mathcal{A} que tem $\mathcal{A}_e - \text{codim} \leq 2$. Seguimos o mesmo método da classificação de funções, a saber classificar pela indução sobre os espaços de jatos.

Denotamos por $a_{k,i}$ o coeficiente do monômio $x^{k-i}y^i$ na serie de Taylor de f .

Se $a_{1,1} \neq 0$ então F é um germe de um difeomorfismo, portanto $F \simeq_{\mathcal{A}} (x, y)$. Assim, suponhamos que $a_{1,1} = 0$.

8.1 Fase inicial

Lema 8.1.1 *As $J^2\mathcal{A}$ -órbitas singulares em $J^2(2, 2)$ são (x, y^2) , (x, xy) e $(x, 0)$.*

Prova: $j^2f = (x, a_{1,0}x + a_{2,0}x^2 + a_{2,1}xy + a_{2,2}y^2)$. Podemos eliminar o termo $a_{1,0}$ usando a ação à esquerda. Se $a_{2,2} \neq 0$, então a mudança $y \mapsto y - \frac{a_{2,1}}{2a_{2,2}}x$ elimina o termo xy . Para eliminar o termo x^2 , usamos uma mudança de variáveis na meta da forma $(u, v) \mapsto (u, v - \alpha u^2)$. O germe final é da forma $(x, a_{2,2}y^2)$. Uma mudança escalar reduz ao germe (x, y^2) .

Se $a_{2,2} = 0$ e $a_{2,1} \neq 0$, então a mudança $Y = a_{2,0}x + a_{2,1}y$, reduz a (x, xy) .

Se $a_{2,2} = a_{2,1} = 0$, então $j^2f \simeq (x, 0)$.

Proposição 8.1.2 *O germe $F(x, y) = (x, y^2)$ é $2\text{-}\mathcal{A}$ -determinado e é \mathcal{A}_e -estável.*

Prova: Temos $F_x = (1, 0)$, $F_y = (0, 2y)$, portanto

$$m_2^2 \cdot \theta_F \subset LK.F.$$

Não é difícil ver que

$$m_2^3 \cdot \theta_F \subset L\mathcal{A}_1F + m_2^5 \cdot \theta_F.$$

Pelo Corolário 5.2.7, F é $2\text{-}\mathcal{A}_1$ -determinado, portanto $2\text{-}\mathcal{A}$ -determinado. A $\mathcal{A}_e\text{-codim}(F)$ é igual a 0.

8.2 Classificação dos germes com o 2-jato igual a (x, xy)

Considere um k -jato cujo 2-jato é (x, xy) . Usando uma mudança de coordenadas da forma $Y = y - p(x, y)$ podemos eliminar todos os termos divisíveis por x na segunda componente excepto xy . Então este k -jato é equivalente a $(x, xy + \sum_{i=3}^k a_{i,i}y^i)$.

Proposição 8.2.1 *Os germes de \mathcal{A}_e – $\text{codim} \leq 2$ com o 2-jato igual a (x, xy) são equivalentes a um dos seguintes germes*

| | | |
|--------------------------|-----------------------|------------------------------------|
| <i>Cúspide</i> | $(x, xy + y^3)$ | $\mathcal{A}_e - \text{codim} = 0$ |
| <i>Rabo de andorinha</i> | $(x, xy + y^4)$ | 1 |
| <i>Borboleta</i> | $(x, xy + y^5 + y^7)$ | 2 |

Prova: Considere o 3-jato $j^3F = (x, xy + a_{3,3}y^3)$. Se $a_{3,3} \neq 0$, então $j^3F \simeq (x, xy + y^3)$ por uma mudança escalar.

O germe $(x, xy + y^3)$ é 3- \mathcal{A} -determinado. Calculando

$$F_x = (1, y) \text{ e}$$

$$F_y = (0, x + 3y^2)$$

podemos verificar que

$$m_2^3 \cdot \theta_F \subset LK \cdot F + m_2^4 \cdot \theta_F.$$

Queremos mostrar que

$$m_2^4 \cdot \theta_F \subset L\mathcal{A}_1F + m_2^7 \cdot \theta_F.$$

Mostraremos primeiramente que os monômios de grau 6 estão contidos em $L\mathcal{A}_1F + m_2^7 \cdot \theta_F$. Usando F_x é claro que todos os monômios $(P, 0)$ de grau 6 estão em $L\mathcal{A}_1F + m_2^7 \cdot \theta_F$. Usando F_y podemos ver também que todos os monômios $(0, xP)$ de grau 6 estão em $L\mathcal{A}_1F + m_2^7 \cdot \theta_F$. Precisamos então mostrar que $(0, y^6) \in L\mathcal{A}_1F + m_2^7 \cdot \theta_F$. Considere os seguintes vetores em $L\mathcal{A}_1F + m_2^7 \cdot \theta_F$, (denotando f_1 e f_2 as componentes de F):

$$\begin{aligned} (0, f_2^2) &= (0, x^2y^2 + 2xy^4 + y^6), \\ y^4F_y &= (0, xy^4 + 3y^6), \\ xy^2F_y &= (0, x^2y^2 + 3xy^4). \end{aligned}$$

O determinante da matriz associada ao sistema acima não é nulo, portanto $y^6 \in L\mathcal{A}_1F + m_2^7.\theta_F$.

Usando os seguintes vetores

$$\begin{aligned} y^3 F_y &= (0, xy^3 + 3y^5), \\ xy F_y &= (0, x^2y + 3xy^3), \\ (0, f_1 f_2) &= (0, x^2y + xy^3), \end{aligned}$$

mostramos que $y^5 \in L\mathcal{A}_1F + m_2^6.\theta_F$. Para obter o termo y^4 precisamos considerar um grupo unipotente maior que \mathcal{A}_1 . Seja U o subgrupo de \mathcal{A} cujos elementos do grupo da direita tem 1-jato representados por uma matriz unipotente triangular inferior. Então os seguintes vetores pertencem a $LU.f$

$$\begin{aligned} y^2 F_y &= (0, xy^2 + 3y^4), \\ x F_y &= (0, x^2 + 3xy^2), \\ (0, f_1^2) &= (0, x^2). \end{aligned}$$

Logo, $y^4 \in LUF + m_2^5.\theta_F$. Pelo Corolário 5.2.7, F é 3- \mathcal{U} -determinado, portanto 3- \mathcal{A} -determinado. A $\mathcal{A}_e \text{codim}(F)$ é igual a 0.

O resto da demonstração da proposição é um exercício.

8.3 Classificação dos germes com o 2-jato igual a $(x, 0)$

Lema 8.3.1 *As $J^3\mathcal{A}$ -órbitas singulares em $J^3(2, 2)$ que têm o 2-jato equivalente a $(x, 0)$ são $(x, y^3 \pm x^2y)$, (x, y^3) , (x, xy^2) e $(x, 0)$.*

Prova: Seja $J^3F = (x, a_{3,0}x^3 + a_{3,1}x^2y + a_{3,2}xy^2 + a_{3,3}y^3)$.

• Se $a_{3,3} \neq 0$, então usando a mudança $Y = y - \frac{a_{3,2}}{3a_{3,3}}x$ e eliminando o termo x^3 por uma mudança de coordenadas na meta, reduzimos j^3F a $(x, (3a_{3,1}a_{3,3} - a_{3,2}^2)/a_{3,3}x^2y + a_{3,3}y^3)$.

Se $3a_{3,1}a_{3,3} - a_{3,2}^2 \neq 0$, então uma mudança escalar reduz a $(x, y^3 \pm x^2y)$. Se não, $j^3F \simeq (x, y^3)$.

- Se $a_{3,3} = 0$ e $a_{3,2} \neq 0$, então usando o Lema de Mather podemos mostrar que $j^3 F \simeq (x, a_{3,2}xy^2) \simeq (x, xy^2)$.

- Se $a_{3,3} = a_{3,2} = 0$ e $a_{3,1} \neq 0$, então usando o Lema de Mather $j^3 F \simeq (x, x^2y)$.

- Se todos os coeficientes se anulam, então $j^3 F = (x, 0)$.

Proposição 8.3.2 *Um $(k+1)$ -jato cujo k -jato ($k \geq 3$) é equivalente a (x, y^3) é equivalente a $(x, y^3 \pm x^k y)$ ou (x, y^3) . O germe $(x, y^3 \pm x^k y)$ ($k \geq 2$) é $(k+1)$ -determinado e tem \mathcal{A}_e -codim igual a $(k-1)$.*

Prova: Exercício.

Podemos mostrar que um k -jato cujo $(k-1)$ -jato ($k \geq 3$) é equivalente a (x, xy^2) é equivalente a $(x, xy^2 + \sum_{i=4}^k a_{i,i}y^i)$. Se $a_{4,4} \neq 0$, então o 4-jato é equivalente a $(x, xy^2 + y^4)$.

Proposição 8.3.3 *As órbitas finitamente determinadas da “raiz” $(x, xy^2 + y^4)$ são dadas por $(x, xy^2 + y^4 + y^{2k+1})$, $k \geq 2$. Este germe é $(2k+1)$ -determinado e tem \mathcal{A}_e -codim igual a $2k-2$.*

Prova: Exercício.

Observação 8.3.4 Os demais germes conduzem a k -jatos de codimensão > 2 .

Em conclusão temos

Proposição 8.3.5 *Os germes de codimensão ≤ 2 de aplicações $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ e seus desdobramentos \mathcal{A}_e -versais são os seguintes:*

| <i>Nome</i> | <i>Forma Normal</i> | <i>Desdobramento Versal</i> | $\mathcal{A}_e - \text{codim}$ |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|
| <i>Submersão</i> | (x, y) | (x, y) | 0 |
| <i>Dobra</i> | (x, y^2) | (x, y^2) | 0 |
| <i>Cúspide</i> | $(x, xy + y^3)$ | $(x, xy + y^3)$ | 0 |
| <i>Rabo de andorinha</i> | $(x, xy + y^4)$ | $(x, xy + y^4 + uy^2)$ | 1 |
| <i>Lábios/Bicos</i> | $(x, y^3 \pm x^2y)$ | $(x, y^3 \pm x^2y + uy)$ | 1 |
| <i>Borboleta</i> | $(x, xy + y^5 \pm y^7)$ | $(x, xy + y^5 + y^7 + uy^2 + vy^3)$ | 2 |
| <i>Ganso</i> | $(x, y^3 + x^3y)$ | $(x, y^3 + x^3y + uy + vxy)$ | 2 |
| <i>Gaiivota</i> | $(x, xy^2 + y^4 + y^5)$ | $(x, xy^2 + y^4 + y^5 + uy + vy^3)$ | 2 |

8.4 Geometria dos desdobramentos e aplicação à geometria de superfícies em \mathbb{R}^3

Seja M uma superfície suave em \mathbb{R}^3 . O contato de M com retas em \mathbb{R}^3 é dado pela família de projeções ortogonais. Seja $B = \{(u, a) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 : \langle u, a \rangle = 0\}$. B é simplesmente o fibrado tangente a S^2 . A família de projeções ortogonais é dada por

$$P : M \times S^2 \rightarrow B$$

$$(p, u) \mapsto (u, p - \langle p, u \rangle u).$$

Para u fixo, a aplicação P_u é a projeção ortogonal na direção u , ou seja, no ponto $p_0 \in M$ esta aplicação descreve o contato de M com a reta pelo ponto p_0 e paralela ao vetor u .

Escolhamos coordenadas locais em torno de p_0 , tal que a superfície M é dada como gráfico da função $z = f(x, y)$. Suponhamos que as direções de interesse estão na vizinhança do vetor $u = (0, 1, 0)$. Estas direções podem ser parametrizadas por $(a, 1, b)$, que são pontos do plano $y = 1$, e projetamos no plano (x, z) . Estas projeções não são ortogonais, mas as propriedades da família das projeções ortogonais são preservadas.

As coordenadas da projeção de um ponto $p \in M$ no plano $y = 0$ ao longo da direção $(a, 1, b)$ são dadas por $(x, y, f(x, y)) + \lambda(a, 1, b) = (X, 0, Z)$, ou seja, $\lambda = -y$. Portanto

a família das projeções é dada por

$$P : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$((x, y), (a, b)) \mapsto (x - ay, f(x, y) - by)$$

e $P_0(x, y) = F(x, y) = (x, f(x, y))$. Queremos identificar geometricamente os tipos de singularidades de F e verificar se a família P é um desdobramento versal destas singularidades. Como H tem apenas 2 parâmetros, somente as singularidades de codimensão ≤ 2 podem ser desdobradas versalmente, ou seja, as singularidades enumeradas na Proposição 8.3.5. Temos a seguinte proposição:

Proposição 8.4.1 ([13]) *As singularidades genéricas da projeção ortogonal ao longo da direção u ocorrem em $p \in M$ quando*

| Nome | Condições Geométricas |
|--------------------------|---|
| <i>Dobra</i> | $u \in T_{p_0}M$ |
| <i>Cúspide</i> | u direção assintótica |
| <i>Rabo de andorinha</i> | u direção assintótica, p ponto de inflexão da curva assintótica |
| <i>Lábios/Bicos</i> | u direção assintótica, p ponto parabólico |
| <i>Borboleta</i> | u direção assintótica, p ponto de inflexão duplo da curva assintótica |
| <i>Ganso</i> | u direção assintótica, a imagem assintótica em S^2 da curva parabólica tem um cúspide, e a imagem Gaussiana tem uma inflexão |
| <i>Gaiivota</i> | u direção assintótica p cúspide de Gauss e a imagem assintótica da curva parabólica em S^2 tem um ponto de inflexão. |

Podemos verificar também que, em geral, a família P das projeções ortogonais é um desdobramento versal das singularidades na Proposição 8.3.5.

A projeção F é singular em um ponto $p \in M$ próximo da origem se, e somente se, $f_y(x, y) = 0$, ou seja, se, e somente se, a direção da projeção é tangente a M . A imagem do conjunto crítico Σ , o discriminante Δ de F , é chamado o *perfil/contorno aparente* da superfície M . Usando os resultados acima, podemos descrever a geometria do perfil e as mudanças que ocorrem em famílias a 1 ou 2 parâmetros. Supondo que

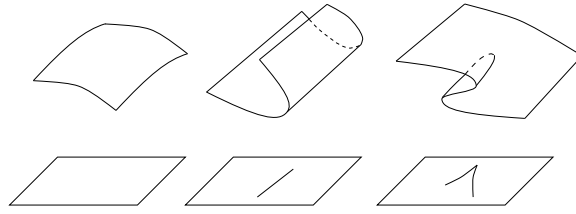


Figura 8.1: Projeções estáveis de superfícies.

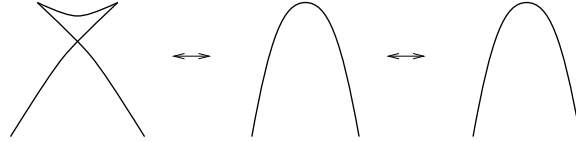


Figura 8.2: Transições do Rabo de andorinha.

P é versal, basta determinar os discriminantes das formas normais e suas deformações para obter modelos das singularidades dos perfis e das suas deformações.

8.5 Diagramas de bifurcação das singularidades de $\mathcal{A}_e - \text{codim} \leq 2$

Dobra: $F = (x, y^2)$, $\Sigma = \{y = 0\}$, $\Delta = \{(x, 0)\}$ que é uma curva suave (Figura 8.1).

Cúspide: $F = (x, xy + y^3)$, os pontos críticos são parametrizados por $x = -3y^2$, e o discriminante é dado por $\Delta = \{(-3y^2, -2y^3)\}$ que é uma cúspide (Figura 8.1).

Rabo de andorinha: $F = (x, xy + y^4)$, os pontos críticos são parametrizados por $x = -4y^3$, e o discriminante é dado por $\Delta = \{(-4y^3, -3y^4)\}$. Considerando o desdobramento versal $\bar{F}(x, y, u) = (x, xy + y^4 + uy^2)$, os pontos críticos de \bar{F}_u são parametrizados por $x = -4y^3 - 2uy$, e o discriminante de \bar{F}_u é dado por $\Delta_u = \{(-4y^3 - 2uy, -3y^4 - uy^2)\}$. As deformações na curva Δ_u são dadas na Figura 8.2, onde duas cúspides aparecem em um lado da transição.

Lábios/Bicos: Considere o desdobramento versal $\bar{F}(x, y, u) = (x, y^3 \pm x^2y + uy)$. O conjunto dos pontos críticos Σ_u é dado pela equação

$$3y^2 \pm x^2 + u = 0.$$

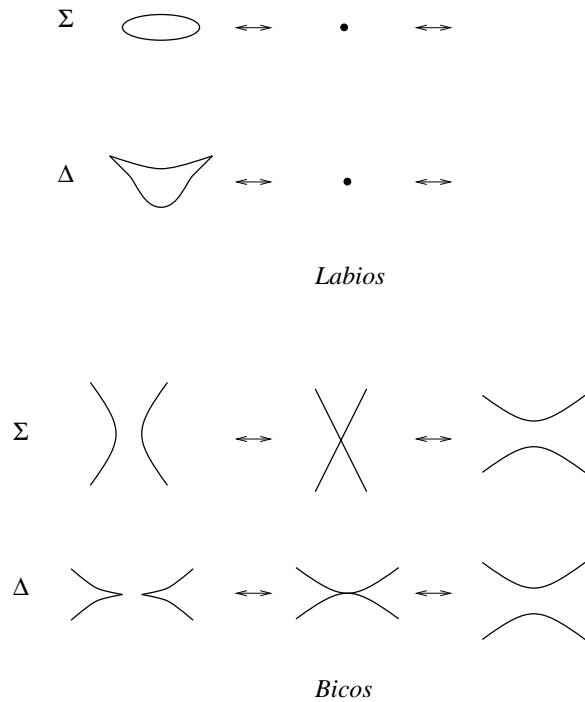


Figura 8.3: Transições de Lábios/Bicos.

Isto significa que Σ_u passa pelas transições de Morse (Figura 8.3). As transições no discriminante são dadas na mesma figura.

Ganso: Um desdobramento versal é dado por $\overline{F}(x, y, u) = (x, y^3 + x^3y + uy + vxy)$. Esperamos encontrar algumas singularidades de codimensão 1 em uma curva no espaço dos parâmetros (u, v) . É claro que só as singularidades Lábios/Bicos podem acontecer neste caso. Estas singularidades ocorrem quando o conjunto dos pontos críticos é singular, ou seja, denotando $f = y^3 + x^3y + uy + vxy$, quando

$$f_y = f_{xy} = f_{yy} = 0.$$

Resolvendo o sistema obtemos $u = 2x^3$ e $v = -3x^2$. Então o stratum Lábios/Bicos é a curva cúspide $(u, v) = (2x^3, -3x^2)$. As transições no conjunto discriminante são dadas na Figura 8.4.

Borboleta: Considerando o $\overline{F}(x, y, u) = (x, xy + y^5 \pm y^7 + uy^2 + vy^3)$. Podemos esperar singularidades de tipo “rabo de andorinha” acontecerem em uma curva no plano (u, v) .

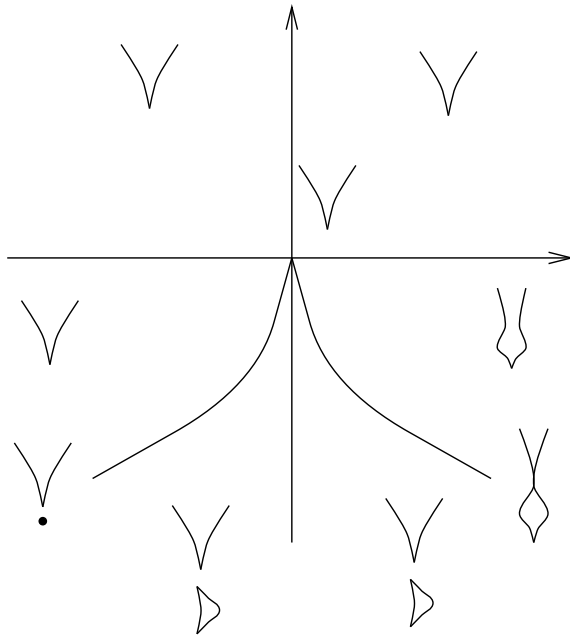


Figura 8.4: Diagrama de bifurcação da singularidade Ganso.

Estas singularidades ocorrem quando

$$f_y = f_{yy} = f_{yyy} = 0,$$

ou seja, ao longo da curva

$$(u, v) = (20y^3 \pm 84y^5, -10y^2 \mp 35y^4)$$

que é uma cuspide. Existe também uma outra curva onde singularidades de tipo cuspide-e-dobra ocorrem. Esta curva é parametrizada por

$$(-10/27t^3 + \dots, -5/3t^2 + \dots)$$

que é também uma cuspide. As bifurcações são mostradas na Figura 8.5.

Gaiivota: Seja $\bar{F}(x, y, u) = (x, xy^2 + y^4 + y^5 + uy + vy^3)$ o desdobramento versal da singularidade gaiivota. As singularidades do tipo rabo de andorinha ocorrem na curva

$$(u, v) = (-4y^3 - 15y^4, -4y - 10y^2)$$

e o estrato Lábios/Bicos é dado por $u = 0$ (só bicos).

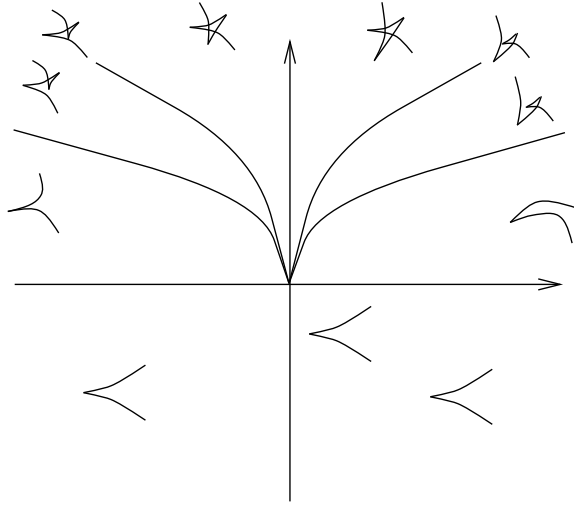


Figura 8.5: Diagrama de bifurcação da singularidade Borboleta.

Temos também multi-singularidades de tipo dobras tangentes. Esta bifurcação acontece quando existem dois pontos singulares distintos $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, e as curvas dobras correspondentes são tangenciais. Como Σ é dado por $f_y = 0$, a direção tangente é ao longo de $v = (f_{yy}, -f_{xy})$, e portanto a direção tangente à curva dobra é dada por

$$DF.v = f_{yy} \cdot (1, f_x).$$

Então as dobras são tangentes se as direções $(1, f_x(x_1, y_1, u, v))$ e $(1, f_x(x_2, y_2, u, v))$ são paralelas, ou seja se, e somente se, $y_1 = \pm y_2$. Como $(x_1, f(x_1, y_1, u, v)) = (x_2, f(x_2, y_2, u, v))$ temos $x_1 = x_2$ e portanto $y_1 = -y_2$. Agora $f(x_1, y_1, u, v) = f(x_1, -y_1, u, v)$ e $f_y(x_1, y_1, u, v) = f_y(x_1, -y_1, u, v) = 0$ implica que a função $g(y) = f(x_1, y, u, v) - f(x_1, y_1, u, v)$ tem duas raízes duplas y_1 e $-y_1$. Então

$$f(x_1, y, u, v) - f(x_1, y_1, u, v) = (y - y_1)^2 (y + y_1)^2 (y - y_3).$$

Comparando os coeficientes obtemos $u = y_1^4$ e $v = -2y_1^2$. Então as singularidades dobras tangentes ocorrem ao longo da curva $(y_1^4, -2y_1^2)$. Ver na Figura 8.6 o diagrama de bifurcação.

Podemos agora desenhar o **diagrama de Adjacência** das singularidades de codimensão ≤ 2 :

Capítulo 9

Dualidade

Principal Referência

- [7] J.W. Bruce e M.C. Romero-Fuster, Duality and projections of curves and surfaces in 3-space, *Quart. J. Math. Oxford* (2) 42 (1991) 433-441.

Seja M uma superfície suave em \mathbb{R}^3 . Estudamos duas famílias naturais sobre M , a família de funções altura

$$\begin{aligned} H : M \times S^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, u) &\mapsto \langle p, u \rangle . \end{aligned}$$

e a família de projeções ortogonais

$$\begin{aligned} P : M \times S^2 &\rightarrow B \\ (p, u) &\mapsto (u, p - \langle p, u \rangle u) \end{aligned}$$

O conjunto de bifurcação de cada família é o conjunto dos pontos em S^2 onde a função H_u (resp. P_u) não é estável. A instabilidade pode acontecer localmente, ou em situações multi-locais.

As singularidades locais da função altura H_u que podem ser desdobradas versalmente pela família H são dadas na Figura 9.1, e as multi-locais são $2A_1$, $3A_1$ e A_1A_2 .

Quando a família H é um desdobramento versal de uma das singularidades listadas acima, o conjunto de bifurcação de H nesta singularidade é difeomorfo ao conjunto de

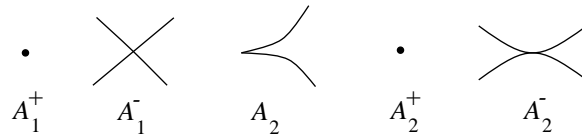


Figura 9.1: Os traços de M em $T_p M$.

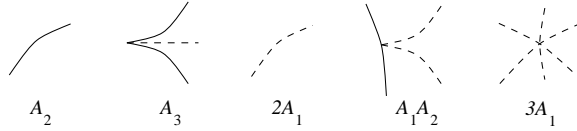


Figura 9.2: Conjuntos de bifurcação da família das funções altura.

bifurcação de um desdobramento versal a 2 parâmetros do modelo da singularidade em questão. Então, quando as condições de versalidade são satisfeitas pela família H , o conjunto de bifurcação é dado na Figura 9.2.

O mesmo argumento vale para a família P . As singularidades locais que podem ser desdobradas versalmente pela família P são dadas na Proposição 8.3.5. Os conjuntos de bifurcação da família P nestas singularidades (quando P é versal) são dados na Figura 9.3.

Podemos mostrar que existem 13 singularidades multi-locais do plano no plano de $\mathcal{A}_e - \text{codim} \leq 2$.

Vimos também na seção anterior que existe uma correspondência entre o acontecimento de algumas singularidades da projeção ortogonal e da função altura. Por exemplo, a singularidade lábios/bicos ocorre quando a projeção é ao longo da direção assintótica em um ponto parabólico ordinário. Mas a função altura ao longo da direção normal em um ponto parabólico tem uma singularidade do tipo A_2 . Então a singularidade A_2 da função altura e a singularidade lábios/bicos da projeção ortogonal estão

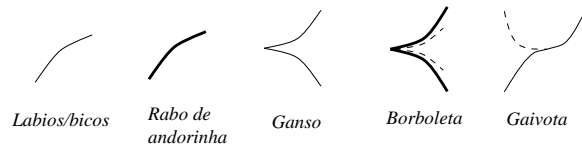


Figura 9.3: Conjuntos de bifurcação da família das projeções.

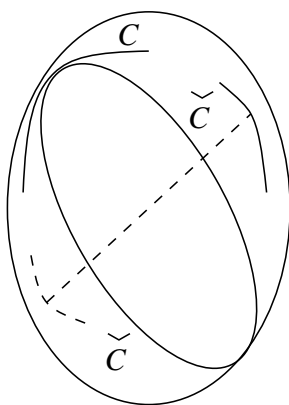


Figura 9.4: Dualidade na esfera.

relacionadas. Esta relação foi descoberta em [7]. Precisamos de alguns conceitos de dualidade antes de enunciar o resultado.

Seja C uma curva plana. O conjunto de todas as retas tangentes a C formam uma curva no plano projetivo afim $\mathbb{R}P^2$, chamada a curva *dual* de C e denotada por \check{C} . Esta dualidade pode ser vista também na esfera S^2 . Se C é uma curva em S^2 então a reta tangente em um ponto p de C pode ser identificada com o círculo principal em S^2 tangente a C (este círculo é único). O círculo principal (equador) determina (e é determinado por) um polo norte e um polo sul. Quando o ponto p varia sobre C os polos descrevem a curva dual de C (temos duas cópias), ver Figura 9.4.

Uma propriedade principal da dualidade entre curvas (planas ou na esfera) é que o dual de uma inflexão é um ponto cúspide.

Teorema 9.0.1 *Seja M uma superfície genérica. Então os conjuntos de bifurcação $Bif(H)$ e $Bif(P)$ em S^2 (ou $\mathbb{R}P^2$) são duais, isto é, $Bif(H) = Bif(P)$ e $Bif(P) = Bif(H)$, onde $Bif(P)$ é o fecho dos estratos lábios/bicos e dobras tangentes.*

Prova: Seja N a aplicação de Gauss da superfície. Lembramos que o *shape operator* S em um ponto p é a aplicação dN_p , ou seja

$$S(v) = \frac{d}{dt}(N(\beta(t)))|_{t=0},$$

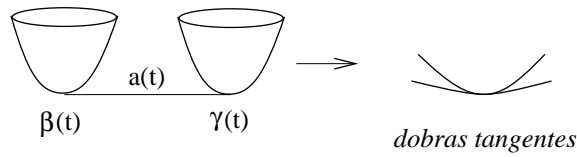


Figura 9.5: Dobras tangentes.

onde β é uma curva por $p = \beta(0)$, cujo vetor tangente em $t = 0$ é v .

Provemos que o dual do estrato lábios/bicos de $Bif(P)$ é o estrato A_2 de $Bif(H)$. Suponha que α parametriza parte da curva parabólica (que é suave nos pontos A_2), e que $A(t)$ seja a parametrização da direção assintótica única nos pontos $\alpha(t)$. Então $A(t)$ é precisamente o estrato lábios/bicos de $Bif(P)$. Pela definição da direção assintótica temos

$$\begin{aligned} \langle A(t), N(\alpha(t)) \rangle &\equiv 0, \quad \text{pois } A(t) \in T_{\alpha(t)}M. \\ \langle A(t), S(A(t)) \rangle &\equiv 0, \quad \text{pois } \langle A(t), S(A(t)) \rangle = \kappa_n(A(t)) = 0. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle A(t), N(\alpha(t)) \rangle = 0 &\Rightarrow \langle A'(t), N(\alpha(t)) \rangle + \langle A(t), S(\alpha'(t)) \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle A'(t), N(\alpha(t)) \rangle = 0 \end{aligned}$$

isto é, $A'(t)$ é ortogonal a $N(\alpha(t))$. Assim, o pólo definido pelo círculo equador em S^2 em $A(t)$ é $N(\alpha(t))$. Esta curva é exatamente o estrato A_2 de $Bif(H)$.

Inversamente, o tangente ao estrato A_2 em $Bif(H)$ é $S(\alpha'(t))$ que é um múltiplo de $S(A(t))$ (pois S tem rank 1 nos pontos parabólicos ordinários.) Então a direção dual que corresponde a $N(\alpha(t))$ é $\pm A(t)$, pois $\langle A(t), N(\alpha(t)) \rangle = 0$ e $\langle A(t), S(\alpha'(t)) \rangle = 0$.

Provemos que o estrato dobra tangente em $Bif(P)$ é dual do estrato $2A_1$ em $Bif(H)$.

Seja $a(t)$ uma porção suave do estrato dobras tangentes com $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ correspondentes pontos da curva (ver Figura 9.5)

É claro que $\beta(t) - \gamma(t)$ é um múltiplo de $a(t)$. Então $\langle \beta(t) - \gamma(t), N(\beta(t)) \rangle = 0$ e $N(\beta(t)) = \pm N(\gamma(t))$. É fácil verificar que $\beta(t) - \gamma(t)$ e $\beta'(t) - \gamma'(t)$ geram o mesmo

espaço que $a(t)$ e $a'(t)$. Então

$$\langle \beta(t) - \gamma(t), N(\beta(t)) \rangle = \langle \beta'(t) - \gamma'(t), N(\beta(t)) \rangle = 0,$$

ou seja, os vetores duais a $a(t)$ são $\pm N(\beta(t))$ que são os vetores em $Bif(H)$ correspondentes ao estrato $2A_1$.

Observações 9.0.2 1. *Uma consequência, por exemplo, do Teorema 9.0.1 é que a singularidade A_3 de H corresponde, sobre a dualidade em S^2 , à singularidade gaivota de P .*

2. *O resultado de dualidade acima é generalizado em [5] e em [6] para tratar todos os germes na lista de singularidades do plano no plano dada por J.H. Rieger em [22].*

Capítulo 10

Comentários

Obtemos duas classificações neste curso (germes de funções e germes de aplicações do plano no plano). Existem várias listas de \mathcal{G} -singularidades de $K^n, 0 \rightarrow K^p, 0$ ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), onde \mathcal{G} é um dos grupos de Mather. Alguns dos germes já classificados são os seguintes.

$p = 1$ [2]; $n = 1, p = 2$ [9]; $n = 1, p = 3$ [15]; $n = 2, p = 2$ [22]; $n \geq 2, p = 2$ [23];
 $n = 2, p = 3$ [20]; $n = 2, p = 4$ [10]; $n = 3, p = 3$ [17].

Os teoremas da determinação finita, da transversal completa, dos desdobramentos e a técnica de classificação apresentados neste curso para germes de aplicações diferenciáveis valem também para multi-germes. Existem algumas classificações de multi-germes, ver por exemplo, C.A. Hobbs (tese, Liverpool 1993), e R.G.W. Atique (tese, Warwick/ICMC-USP, 1998).

Os teoremas da determinação finita e dos desdobramentos são enunciados para grupos de Mather $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{K}$. J.N. Damon [12] mostrou que esta teoria vale para uma classe maior de subgrupos de Mather, a saber os *subgrupos geométricos* dos grupos de Mather. Um exemplo de uma classe de subgrupos geométricos são os subgrupos de \mathcal{K} que preservam um germe de uma variedade na fonte ou na meta.

Podemos associar a cada germe de uma singularidade finitamente determinada invariantes que só dependem da classe de equivalência da singularidade. Por exemplo,

a codimensão de um germe é um invariante. No caso dos germes de $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ o número máximo de singularidades cúspides que ocorrem em uma deformação do germe é um invariante. No caso dos germes de corank 1 da forma $F = (x, f(x, y))$ este número é dado por $c(F) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(x, y) / \langle f_y, f_{yy} \rangle$. Este número é igual 2 para as singularidades Lábios/Bicos e Rabo de andorinha e é igual a 3 para as singularidades Ganso, Gaivota e Borboleta.

A busca de invariantes é um ramo importante na teoria de singularidades de aplicações diferenciáveis. Invariantes podem ser usados para distinguir órbitas, pois dois germes que têm valores distintos associados a um invariante não são equivalentes. A constância de alguns invariantes ao longo de um parâmetro t em uma família dos germes f_t pode implicar, em alguns casos, que todos os germes da família são equivalentes.

Uma outra questão importante na teoria de singularidades é encontrar os conjuntos (n, p) onde os germes \mathcal{A} -estáveis $K^n, 0 \rightarrow K^p, 0$ são densos. (Esta questão deu origem ao trabalho de Whitney sobre aplicações do plano no plano.) Os pares que satisfazem esta propriedade se chamam as *boas dimensões de Mather* (ver [16]). Assim, nas boas dimensões, as aplicações podem ser aproximadas por aplicações estáveis. Uma pergunta de Thom é se todas as aplicações podem ser aproximadas por aplicações C^0 -estáveis. A questão de C^0 -estabilidade foi abordada por muitos pesquisadores e não está completamente resolvida.

Um outro assunto estudado na teoria de singularidades é a equisingularidade e trivialidade topológica de famílias de germes. Ver por exemplo os trabalhos de J.N. Damon, T. Gaffney e o livro de Andrew du Plessis e Terry Wall (*LMS Monographs, New series, 9. Oxford University Press 1995*).

A teoria de singularidades contribuiu bastante no desenvolvimento das outras áreas da matemática, tais como a geometria diferencial, a teoria de bifurcação e as equações diferenciais. O grupo de singularidades do ICMC-USP trabalha neste tipo de aplicações.

Capítulo 11

Apêndice 2: Prova Escrita

Duração 9-30 de junho de 1998

O objetivo desta prova é estudar as singularidades das projeções de superfícies com bordo regular, e assim descrever o perfil da superfície juntamente com seu bordo, localmente em um ponto p do bordo. Tomamos coordenadas locais de tal maneira que $p = (0, 0, 0)$ e a superfície seja parametrizada por $\phi(x, y) = (x, y, g(x, y)), y \geq 0, (x, y)$ próximo de $(0, 0)$. Assim, o bordo é dado por $y = 0$. Denotamos por $X, 0$ o germe $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R} \times 0)$ e suponhamos que a projeção é feita ao longo de $(0, 1, 0)$. Então o problema se reduz a classificar germes de aplicações $X, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ sobre o grupo $\mathcal{B} = \mathcal{R}_X \times \mathcal{L}$ onde \mathcal{R}_X é o subgrupo de \mathcal{R} de difeomorfismos que preservam o germe da variedade X na fonte.

1. Descreva os elementos h de \mathcal{R}_X .
2. Calcule $LB.f, f : X, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ um germe C^∞ .
3. Mostre que f é finitamente \mathcal{B} -determinado se, e somente se, $m_2^k \cdot \mathcal{O}(2, 2) \subset LB.f$ para algum k .
4. Mostre que se $m_2^{r+1} \cdot \mathcal{O}(2, 2) \subset LB_1.f$, então f é $r - \mathcal{B}$ -determinado.

5. Deduza que se

$$\begin{aligned} m_2^l \cdot \mathcal{O}(2, 2) &\subset \mathcal{O}_2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, y \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle + f^* m_2 \cdot \mathcal{O}(2, 2) + m_2^{l+1} \cdot \mathcal{O}(2, 2), \text{ e} \\ m_2^{r+1} \cdot \mathcal{O}(2, 2) &\subset L\mathcal{B}_1 \cdot f + m_2^{l+r+1} \cdot \mathcal{O}(2, 2), \end{aligned}$$

então f é $r - \mathcal{B}_1$ -determinado.

6. Obtenha a classificação de singularidades de \mathcal{B}_e -codimensão ≤ 1 e estude a geometria do conjunto dos pontos críticos e do discriminante. Interprete geometricamente estas singularidades no caso das projeções $X, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$.

Referências Bibliográficas

- [1] V.I. Arnold, Remarks on the stationary phase methods and the Coxeter numbers, *Russian Maths. Surveys*, 28:5, 19-48.
- [2] V.I. Arnold, A Varchenko, S. Goussien-Zade, *Singularities des applications différentiables*. Editions Mir Moscou, 1982.
- [3] T. Bröcker and L.Lander, *Differentiable Germs and Catastrophes*, London Math. Soc. Lecture Note séries **17**, (Cambridge University Press, 1975).
- [4] J.W.Bruce, Generic geometry and duality, LMS Lecture Note séries 201, Edited by J.P. Brasselet (1994) pp 29-60.
- [5] J.W Bruce, Generic geometry, transversality and projections, *J. London Math. Soc.* (2) 49 (1994) 183-194.
- [6] J.W. Bruce, P.J. Giblin and F. Tari, Families of surfaces: height functions and projections to plane, *Mathematica. Scandinavica*, 82 (1998) no 2, 165-185.
- [7] J.W. Bruce e M.C. Romero-Fuster, Duality and projections of curves and surfaces in 3-space, *Quart. J. Math. Oxford* (2) 42 (1991) 433-441.
- [8] J.W. Bruce, N.P. Kirk and A.A. du Plessis, Complete transversals and the classification of singularities, *Nonlinearity* 10 (1997), No. 1, 253-275.
- [9] J.W. Bruce and T. Gaffney, Simple singularities of mappings $\mathbb{C}^0 \rightarrow \mathbb{C}^0$, *J. London Math. Soc.* (2) 26 (1982), no. 3, 465-474

- [10] J.W. Bruce, N.P. Kirk & J. West. Singularities of map-germs $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Em preparação.
- [11] J.W. Bruce, A.A. du Plessis, C.T.C. Wall, Determinacy and unipotency, *Invent. Math.* 88 (1987) 521-554.
- [12] J.N.Damon, The unfolding and determinacy theorems for subgroups of \mathcal{A} and \mathcal{K} , *Mem. Amer. Math. Soc.* 50, No 306, (1984).
- [13] T. Gaffney, The structure of $L\mathcal{A}.f$, classification and an application to differential geometry, *Proceedings of Symposia in Pure Maths.*, Vol 40 (1983), Part 1, 409-427
- [14] C.G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*. Research Notes in Maths. 25, Pitman, London 1973.
- [15] C.G. Gibson and C.A. Hobbs, Simple singularities of space curves, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, (1993), 113, 297-310.
- [16] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*. Graduate Text in Mathematics, vol. 14, Springer-Verlag, N.Y. 1973.
- [17] W.L. Marar and F. Tari, On the geometry of simple germs of co-rank 1 maps from \mathbb{R}^3 to \mathbb{R}^3 . *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, (1996), 119, 469-481.
- [18] J. Martinet, *Singularities of smooth functions and maps*. LMS Lecture Notes 58, Cambridge University Press, 1982.
- [19] J.N. Mather, Stability of C^∞ mappings, IV: Classification of stable germs by R-algebras, *Pub. Math.*, IHES, 37 (1969), 223-248.
- [20] D. Mond, On the classification of germs of maps from \mathbb{R}^2 to \mathbb{R}^3 , *Proc. London Math. Soc.*, (3) 50 (1985), 333-369.

- [21] J. Montaldi, On contact between submanifolds, *Michigan Math.J.* 33(1986),195-199.
- [22] J.H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane. *J. London Math. Soc.* (2) 36 (1987), no. 2, 351-369.
- [23] J.H. Rieger and M.A.S. Ruas, Classification of \mathcal{A} -simple germs from K^n to K^2 , *Compositio Math.* 79 (1991), No. 1, 99-108.
- [24] C.T.C Wall, Finite Determinacy of Smooth map-germs, *Bull. London Math. Soc.*, 13 (1981), 481-539.
- [25] C.T.C Wall, Classification and stability of singularities of smooth maps. *Singularity theory (Trieste, 1991)*, 920-952, *World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995*.