



I.C.M.S.C.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
CAMPUS DE SÃO CARLOS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

SEQÜÊNCIAS ESPECTRAIS, ESPAÇOS  
DE EILLENBERG-MACLANE,  
TORRES DE POSTNIKOV

*D. Randall e J. Daccach*

n.<sup>o</sup> 2

**Notas Didáticas do ICMSC - USP**

SEQUÊNCIAS ESPECTRAIS, ESPAÇOS  
DE EILENBERG-MACLANE,  
TORRES DE POSTNIKOV

*D. Randall e J. Dacach*

n.º 2

SÃO CARLOS/SP/BRASIL  
setembro/1988

Estas notas foram baseadas em um mini-curso ministrado pelos Profs. Duane Randall e Janey Daccach no verão de 1988 no ICMSC-USP, com apoio financeiro da FINEP.

Queremos agradecer à FINEP pelo apoio financeiro e a Srta. Maria Helena Deriggi pelo excelente trabalho de datilografia.

## I N D I C E

INTRODUÇÃO .....	1
REFERÊNCIAS .....	3
CAPÍTULO I	
SEQUÊNCIAS ESPECTRAIS .....	5
A. Sequência Espectral de Cohomologia .....	5
B. Sequência Espectral-Homologia .....	22
CAPÍTULO II	
ESPAÇOS DE EILENBERG-MACLANE .....	29
CAPÍTULO III	
TORRES DE POSTNIKOV .....	49

## INTRODUÇÃO

O Teorema de Mayer-Vietoris estabelece uma diferença fundamental entre os grupos de homologia e os grupos de homotopia, ou seja, a computabilidade destes grupos. Os primeiros grupos são relativamente fáceis de se computar, enquanto que os grupos de homotopia são muitíssimo mais complicados de se computar.

Em contrapartida o teorema da seqüência exata de homotopia de uma fibração estabelece uma relação bem simples entre a homotopia da base da fibra com a homotopia do espaço total, ou seja, se

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & E \\ & & \downarrow p \\ & & B \end{array}$$

é uma fibração de Serre, então existe uma seqüência longa e exata de homotopia

$$\dots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \dots$$

O primeiro resultado fundamental e não trivial da computação de um grupo de homotopia foi o resultado de Hopf que estudando a fibração

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \longrightarrow & S^3 \\
 & & \downarrow \\
 & & S^2
 \end{array}$$

que leva seu nome, estabelece que  $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ .

Obviamente não existe uma seqüência exata em homologia para a fibração de Hopf uma vez que  $H_3(S^1) = H_3(S^2) = 0$  e  $H_3(S^3) = \mathbb{Z}$ .

Entretanto existe uma relação entre as homologias da base e da fibra, com a homologia do espaço total de uma fibração. Esta relação é obtida através do conceito de seqüências espectrais, conceito este introduzido por Leray na década de 40 e culminando com o importantíssimo trabalho de Serre no início da década de 50.

Nestas notas, no Capítulo I, vamos abordar somente a estrutura aditiva das seqüências espectrais. Num segundo Minicurso vamos explorar a estrutura multiplicativa desta seqüência. Assim sendo, em vez de definir seqüência espectral de homologia, vamos diretamente ao estudo da seqüência espectral de cohomologia, cuja estrutura aditiva é completamente equivalente à seqüência espectral de homologia.

No Capítulo II trataremos de definir e construir espaços de Eilenberg-MacLane e no Capítulo III trataremos de Torres de Postnikov de uma fibração e aplicações.

REFERÊNCIAS

- [1] JEAN-PIERRE SERRE, Homologie singulière des espaces fibrés. Annals of Mathematics, Vol. 54, n.º 3, 1951.
- [2] EDWIN SPANIER, Algebraic Topology, Springer-Verlag, 1966.
- [3] G. WHITEHEAD, Elements of Homotopy Theory, Springer-Verlag, 1977.

## CAPÍTULO I

### SEQÜÊNCIAS ESPECTRAIS

#### A. Seqüência Espectral de Cohomologia

##### Definição I.1

Uma seqüência espectral (de cohomologia) é uma seqüência de grupos diferenciais bigraduados  $(E_r, d_r)$  onde  $d_r$  é a diferencial com bigrau  $(r, 1-r)$  e  $E_{r+1} = H(E_r)$ .

Isto significa que para cada par de inteiros  $(p, q)$ ,  $d_r : E_r^{p, q} \rightarrow E_r^{p+r, q+1-r}$  é um homomorfismo satisfazendo  $d_r^2 = 0$  e se denotarmos  $Z_r^{p, q} = \text{Ker } d_r$  e  $B_r^{p, q} = \text{Im } d_r : E_r^{p-r, q+r-1} \rightarrow E_r^{p, q}$

então  $E_{r+1}^{p, q} = \frac{Z_r^{p, q}}{B_r^{p, q}}$ .

##### I.2. O Termo $E_\infty$

Vamos denotar por  $k_{r+1}^r : Z_r^{p, q} \rightarrow E_{r+1}^{p, q}$  a projeção do quociente acima definido.

Seja  $x \in Z_r^{p, q}$  e olhemos para o diagrama a seguir:



$$\begin{array}{ccccc}
 x \in Z_r^{p,q} & \longrightarrow & E_r^{p,q} & \xrightarrow{d_r} & E_r^{p+r, q+1-r} \\
 & \searrow k_{r+1}^r & & & \\
 & & Z_{r+1}^{p,q} & \longrightarrow & E_{r+1}^{p,q} \xrightarrow{d_{r+1}} E_r^{p+r+1, q-r} \\
 & & \searrow k_{r+2}^{r+1} & & \\
 & & & & Z_{r+2}^{p,q} \longrightarrow E_{r+2}^{p,q} \xrightarrow{d_{r+2}} E_{r+2}^{p+r+2, p-r-1} \\
 & & & & \vdots
 \end{array}$$

Então por definição  $x$  é um cociclo permanente se  $d_r x = 0$ ,  $d_{r+1} k_{r+1}^r x = 0$ ,  $d_{r+2} k_{r+2}^{r+1} k_{r+1}^r x = 0 \dots$

Definição I.3

O termo  $E_{p,q}^\infty$  é por definição

$$E_{p,q}^\infty = \{(x_i) \mid x_i \in E_i^{p,q} \text{ é cociclo permanente e } x_{i+1} = k_{i+1}^i(x_i)\}$$

onde duas seqüências  $(x_i)$  e  $(y_i)$  são iguais se  $x_k = y_k$  para  $k$  suficientemente grande.

As operações de soma e produto por escalar são defi

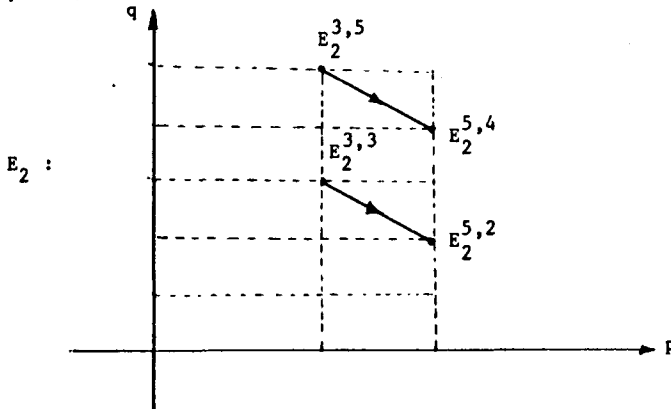
nidos por  $(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i)$  e  $\alpha(x_i) = (\alpha x_i)$ .

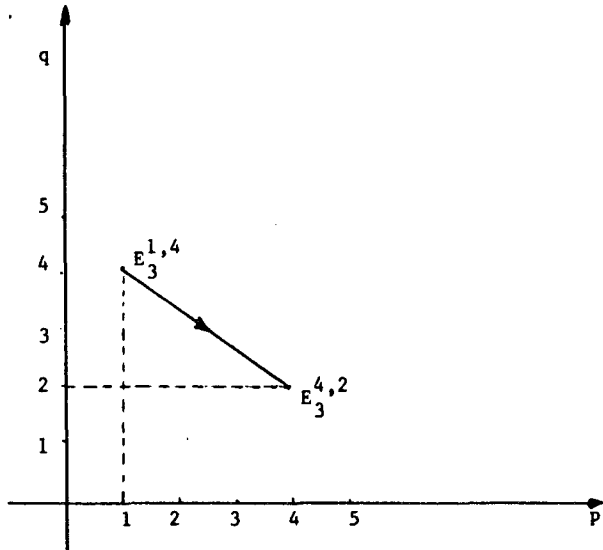
#### I.4. Seqüência Espectral de 1.º Quadrante

Uma seqüência espectral  $(E_r, d_r)$  é chamada de 1.º Quadrante se qualquer que seja  $r$ ,  $E_r^{p,q} = 0$  se  $p < 0$  ou  $q < 0$ .

#### I.5. Representação Reticular

Cónsideremos o reticulado integral no plano cartesiano onde o ponto de coordenadas inteiras  $(p,q)$  será de notado por  $E_r^{p,q}$ . Temos, assim, a representação reticular pelo segmento orientado que une o ponto  $(p,q)$  ao ponto  $(p+r, q+1-r)$ .



$E_3:$ 

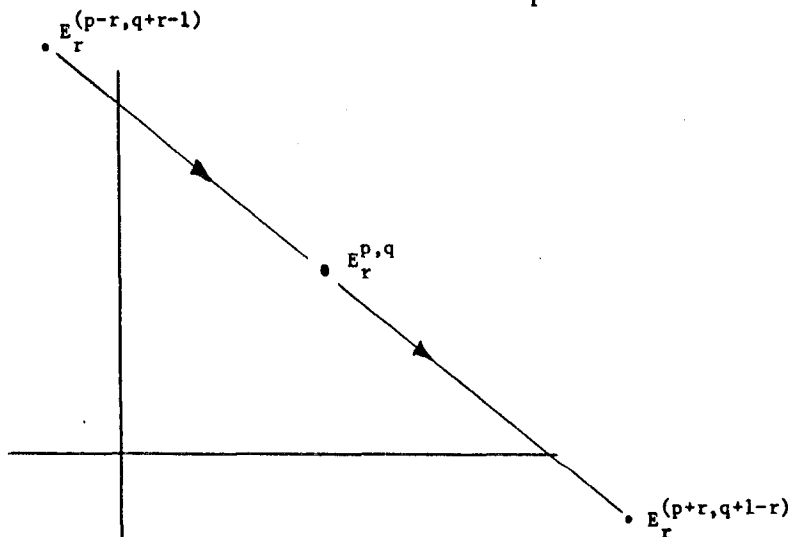
A partir deste ponto, todas as seqüências espectrais consideradas, serão de primeiro quadrante.

Lema I.6

Se  $r > \max\{p, q+1\}$  então  $E_{\infty}^{p,q} = E_r^{p,q}$ .

Demonstração

O diagrama reticular do elemento  $E_r$  é o seguinte:



Portanto,  $Z_r^{p,q} = E_r^{p,q}$  e

$$B_r^{p,q} = 0 \quad e$$

assim  $E_r^{p,q} \cong E_{r+1}^{p,q} \cong \dots \cong E_{\infty}^{p,q}$ . C.Q.D.

*Homomorfismos Laterais*

Analisemos os elementos de  $E_r$  da forma  $E_r^{p,0}$ ,  $r \geq 2$ .

Temos

$$E_r^{p-r, r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{p,0} \xrightarrow{d_r} E_r^{p+r, 1-r} \cong 0,$$

assim  $Z_r^{p,0} = E_r^{p,0}$  e portanto a projeção no quociente define uma sobrejeção  $E_r^{p,0} \twoheadrightarrow E_{r+1}^{p,0}$ ,  $\forall r \geq 2$ .

Temos assim uma seqüência de sobrejeções cuja composta é denominada  $e_B$ :

$$E_2^{p,0} \twoheadrightarrow E_3^{p,0} \twoheadrightarrow E_4^{p,0} \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow E_\infty^{p,0}.$$

$e_B$

Por outro lado, analisemos os elementos de  $E_r$  da forma  $E_r^{0,q}$ .

Temos:

$$0 \cong E_r^{-r, q-1+r} \xrightarrow{d_r} E_r^{0,q} \xrightarrow{d_r} E_r^{r, q+1-r}.$$

Portanto  $Z_r^{0,q} \cong E_{r+1}^{0,q} \hookrightarrow E_r^{0,q}$  e assim temos uma seqüência de inclusões cuja composta é chamada  $e_F$ :

$$\begin{array}{c}
 E_{\infty}^{0,q} \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} E_3^{0,q} \xrightarrow{\quad} E_2^{0,q} \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 e_F
 \end{array}$$

A razão da denominação de  $e_B$  e  $e_F$  para estes homomorfismos ficará clara futuramente. Os homomorfismos  $e_B$  e  $e_F$  são chamados homomorfismos laterais da base e da fibra, respectivamente.

Seqüências espectrais surgem naturalmente de uma filtração de um espaço  $X$  por uma família de subespaços.

Porém, as aplicações mais importantes surgem da seqüência espectral de Serre associada à uma fibração de Serre.

Enunciaremos o Teorema de Serre na sua formulação mais simples, exigindo que a base da fibração  $B$  seja simplesmente conexa, a fim de evitarmos trabalhar, no momento, com coeficientes torcidos na cohomologia.

Num segundo minicurso nos proporemos a tratar do caso geral, bem como da demonstração do Teorema de Serre.

Omitiremos denotar o grupo de coeficientes, que poderá ser qualquer grupo abeliano.

## I.7. Teorema de Serre

Seja

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{i} & E \\
 & & \downarrow \pi \\
 & & B
 \end{array}$$

uma fibração no sentido de Serre com base  $B$  simplesmente conexa e fibra  $F$  conexa. Então existe uma filtração

$$\begin{aligned}
 H^n(E) &= D^{0,n} \supset D^{1,n-1} \supset D^{2,n-2} \supset \dots \supset \\
 &\supset \dots \supset D^{r,n-r} \supset \dots \supset D^{n,0} \supset D^{n+1,-1} = 0
 \end{aligned}$$

e uma seqüência espectral de primeiro quadrante satisfazendo:

$$(1) \frac{D^{r,n-r}}{D^{r+1,n-r-1}} \cong E_{\infty}^{r,n-r}$$

$$(2) E_2^{p,q} \cong H^p(B; H^q(F))$$

e mais:

$$\begin{array}{ccccc}
 (3) & E_2^{p,0} & \xrightarrow{e_B} & E_{\infty}^{p,0} & \xrightarrow{j} & H^p(E) & & j \circ e_B = \pi^* \\
 & \cong & & \cong & & & & \\
 & H^p(B) & & D^{p,0} & & & & 
 \end{array}$$

$$H^q(E) \xrightarrow{\theta} E_\infty^{0,q} \xrightarrow{e_F} E_2^{0,q} \cong H^q(F)$$

$e_F \circ \theta = i^*$  onde  $\theta : H^q(E) \longrightarrow \frac{D^{0,q}}{D^{1,q-1}} = E_\infty^{0,q}$  e projeção no quociente.

### I.8. Aplicações do Teorema de Serre

#### (A<sub>1</sub>) Propriedade Multiplicativa da Característica de Euler

Seja

$$\begin{array}{ccc} F & \hookrightarrow & E \\ & & \downarrow \\ & & B \end{array}$$

uma fibração satisfazendo o Teorema de Serre. Se  $\chi(F)$  e  $\chi(B)$  estão definidas então  $\chi(E)$  está definida e  $\chi(E) = \chi(F)\chi(B)$ .

#### Demonstração

Vamos usar cohomologia com coeficientes racionais. Para cada módulo bigraduado  $E_r$  definamos

$$\chi(E_r) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim E_r^{p,q}.$$

Temos  $E_2^{p,q} \cong H^p(B; H^q(F)) \cong H^p(B) \otimes H^q(F)$  e assim



$$\chi(E_2) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim E_2^{p,q} = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} b_p(B) b_q(F),$$

e como  $\chi(B) = \sum_p (-1)^p b_p(B)$  e  $\chi(F) = \sum_q (-1)^q b_q(F)$  segue

que  $\chi(B)\chi(F) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} b_p(B) b_q(F) = \chi(E_2).$

Por outro lado, temos

$$0 \rightarrow Z_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p,q} \rightarrow B_r^{p+r, q+1-r} \rightarrow 0$$

e

$$0 \rightarrow B_r^{p,q} \rightarrow Z_r^{p,q} \rightarrow E_{r+1}^{p,q} \rightarrow 0.$$

Assim,

$$\dim E_{r+1}^{p,q} = \dim E_r^{p,q} - \dim B_r^{p,q} - \dim B_r^{p+r, q+1-r}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} & \sum (-1)^{p+q} \dim E_{r+1}^{p,q} = \\ & = \sum (-1)^{p+q} \dim E_r^{p,q} - \sum (-1)^{p+q} \dim B_r^{p,q} \\ & - \sum (-1)^{p+q} \dim B_r^{p+r, q+1-r}. \end{aligned}$$

Assim temos

$$\chi(E_{r+1}) = \chi(E_r) - \chi(B_r) + \chi(B_r)$$

e portanto

$$\chi(E_2) = \chi(E_3) = \dots = \chi(E_\infty).$$

Como a filtração de  $H^*(E)$  está associada a  $E_\infty$  temos

$$\chi(E_2) = \chi(B)\chi(F) = \chi(E). \quad \text{C.Q.D.}$$

(A<sub>2</sub>) Seqüência Exata de Wang

Seja

$$\begin{array}{ccc} F & \hookrightarrow & E \\ & & \downarrow \\ & & S^k \end{array}$$

uma fibração de Serre com fibra conexa. Então existe uma seqüência exata

$$\dots \longrightarrow H^{n-1}(E) \longrightarrow H^{n-1}(F) \xrightarrow{d_k} H^{n-k}(F) \longrightarrow H^n(E) \longrightarrow H^n(F) \longrightarrow \dots$$

chamada seqüência exata de Wang.

Demonstração

Observemos que a base  $\tilde{e}$  a esfera  $S^k$ . Desta forma os únicos termos limites não triviais são eventualmente  $E_\infty^{0,q}$  e  $E_\infty^{k,q}$ . Nestas condições obtemos as igualdades

$$E_2 \approx E_3 \approx \dots \approx E_k \quad \text{e} \quad E_{k+1} \approx E_{k+2} \approx \dots \approx E_\infty.$$

Temos portanto a seqüência

$$0 \longrightarrow E_\infty^{0,q} \xrightarrow{e_F} E_2^{0,q} = E_k^{0,q} \xrightarrow{d_k} E_k^{k,q-k+1} \longrightarrow E_\infty^{k,q-k+1} \longrightarrow 0$$

Como  $E_k \approx E_2$  temos:

$$E_k^{k,q-k+1} \approx E_2^{k,q-k+1} \approx H^{q-k+1}(F)$$

e portanto vale

$$0 \longrightarrow E_{\infty}^{0,q} \longrightarrow H^q(F) \xrightarrow{d_k} H^{q-k+1}(F) \longrightarrow E_{\infty}^{k,q-k+1} \longrightarrow 0.$$

Agora olhemos a filtração

$$H^q(E) = D^{0,q} \supset D^{1,q-1} \supset \dots$$

e  $E_{\infty}^{0,q} = \frac{H^q(E)}{D^{1,q-1}}$  e portanto temos a projeção

$$H^q(E) \longrightarrow E_{\infty}^{0,q} \longrightarrow 0$$

e por outro lado, temos:

$$H^{q+1}(E) \supset D^{k,q-k+1} \supset D^{k+1,q-k} = \dots = D^{q+1,0} = 0$$

$$\therefore E_{\infty}^{k,q-k+1} = D^{k,q-k+1} \subset H^{q+1}(E).$$

Então a seqüência mostrada em linhas pontilhadas é exata

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^q(E) & & & & 0 \\
 & & \downarrow & \searrow & & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & E_{\infty}^{0,q} & \longrightarrow & H^q(F) & \xrightarrow{\quad} & H^{q-k+1}(F) & \longrightarrow & E_{\infty}^{k,q-k+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & & & & & H^{q+1}(E) & & 
 \end{array}$$

Fazendo  $q = n-1$  obtemos

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(E) \rightarrow H^{n-1}(F) \rightarrow H^{n-k}(F) \rightarrow H^n(E) \rightarrow \dots \quad \text{C.Q.D.}$$

Com um procedimento inteiramente análogo ao teorema da seqüência exata de Wang obtemos:

(A<sub>3</sub>) *Seqüência Exata de Gysin*

Seja

$$\begin{array}{ccc} S^k & \xrightarrow{i} & E \\ & & \downarrow \pi \\ & & B \end{array}$$

uma fibração de Serre com  $B$  simplesmente conexo. Então existe uma seqüência exata

$$\dots \rightarrow H^i(B) \rightarrow H^i(E) \rightarrow H^{i-k}(B) \rightarrow H^{i+1}(B) \rightarrow \dots$$

Demonstração

Análogo à seqüência de Wang.

(A<sub>4</sub>) Seqüência Exata de SerreDefinição I.8

O homomorfismo  $d_n : E_n^{0,n-1} \rightarrow E_n^{n,0}$  é chamado transgressão.

Um elemento  $x \in H^{n-1}(F) = E_2^{0,n-1}$  é chamado transgressivo se  $d_2 x = 0$ ,  $d_3 k_3^2 x = 0$ , ...,  $d_{n-1} k_{n-1}^{n-2} k_{n-2}^{n-3} \dots k_3^2 x = 0$ , ou seja, se  $x$  sobrevive até ordem  $n$ , definindo um elemento em  $E_n^{0,n-1}$ .

Lema I.9

Seja

$$\begin{array}{ccc} F & \hookrightarrow & E \\ & & \downarrow \\ & & B \end{array}$$

uma fibração de Serre com base simplesmente conexa. Então se  $F$  é  $(q-1)$  conexo e  $B$  é  $(p-1)$  conexa, todo elemento em  $H^{n-1}(F)$  é transgressivo se  $n < p+q$ .

Demonstração

Consideremos a seqüência (não exata)

$$E_2^{-2,n} \xrightarrow{d_2} E_2^{0,n-1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,n-2}.$$

O primeiro módulo é zero, pois a seqüência espectral é de primeiro quadrante e  $E_2^{2,n-2}$  é também nulo pela conexão da

base e da fibra. Assim,  $E_2^{0,n-1} \cong E_3^{0,n-1}$ .

Repetindo o mesmo raciocínio para

$$E_3^{-3,n+1} \xrightarrow{d_3} E_3^{0,n-1} \xrightarrow{d_3} E_3^{3,n-3}$$

obteremos  $E_3^{0,n-1} \cong E_4^{0,n-1}$  e assim sucessivamente até concluirmos que  $E_2^{0,n-1} \cong E_n^{0,n-1}$  e portanto  $H^{n-1}(F) \cong E_n^{0,n-1}$  e assim todo elemento de  $H^{n-1}(F)$  é transgressivo. C.Q.D.

#### I.10. Teorema da Seqüência Exata de Serre

Seja

$$\begin{array}{ccc} F & \xhookrightarrow{i} & E \\ & & \downarrow \pi \\ & & B \end{array}$$

uma fibração de Serre com  $B$  simplesmente conexo. Se  $F$  é  $(q-1)$ -conexo e  $B$  é  $(p-1)$ -conexo então a seqüência (finita)

$$\dots \rightarrow H^{p+q-2}(F) \xrightarrow{\tau} H^{p+q-1}(B) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+q-1}(E) \xrightarrow{i^*} H^{p+q-1}(F)$$

é exata.

#### Demonstração

Observemos que  $E_2^{i,j} = 0$ , quando  $0 < i < p$  ou  $0 < j < q$ . Nestas condições se  $n = i+j$  a filtração de  $H^n(E)$  se reduz a

$$H^n(E) = D^{0,n} \supset D^{n,0} \supset 0$$

pois teremos  $E_{\infty}^{i,j} = 0$ , e assim concluímos que  $E_{\infty}^{n,0} \cong D^{n,0}$  e  $E_{\infty}^{0,n} \cong \frac{H^n(E)}{D^{n,0}}$  o que nos fornece a seguinte seqüência exata

$$(A) \quad 0 \rightarrow E_{\infty}^{n,0} \rightarrow H^n(E) \rightarrow E_{\infty}^{0,n} \rightarrow 0 \quad (A)$$

Para  $n < p+q$  o lema anterior nos garante que todo elemento de  $H^{n-1}(F)$  é transgressivo e que  $H^{n-1}(F) \cong E_n^{0,n-1}$ . Por outro lado, é imediato verificar que  $E_n^{n,0} \cong H^n(B)$ . Considerando a seqüência não exata

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_n^{-n,2n-2} & \xrightarrow{d_n} & E_n^{0,n-1} & \xrightarrow{d_n} & E_n^{n,0} & \xrightarrow{d_n} & 0 \\ & & \text{??} & & \text{??} & & \text{??} & & \\ & & 0 & & H^{n-1}(F) & & H^n(B) & & \end{array}$$

podemos concluir que  $E_{n+1}^{0,n-1} \cong E_{\infty}^{0,n-1} = \text{Ker } d_n \subset E_n^{0,n-1}$  e  $Z_n^{n,0} \cong E_n^{n,0}$  e, portanto, temos a projeção no quociente

$$E_n^{n,0} \longrightarrow E_{n+1}^{n,0} \cong E_{\infty}^{n,0},$$

obtendo, assim, a seqüência exata

$$(B) \quad 0 \longrightarrow E_{\infty}^{0,n-1} \xrightarrow{\theta} H^{n-1}(F) \xrightarrow{\tau} H^n(B) \xrightarrow{e_B} E_{\infty}^{n,0} \longrightarrow 0$$

Combinando as seqüências exatas (A) e (B) obtemos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^{n-1}(E) & & & & 0 \\
 & & \downarrow & \searrow & & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & E_{\infty}^{0, n-1} & \xrightarrow{\theta} & H^{n-1}(F) & \xrightarrow{\tau} & H^n(B) \xrightarrow{e_B} E_{\infty}^{n, 0} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & 0 & & & & H^n(E)
 \end{array}$$

De onde segue o teorema.

C.Q.D.

### Exercícios

(1) Mostre que se  $S^{\ell} \rightarrow S^m$  é uma fibração de Serre

$$\downarrow S^k$$

com  $k \geq 2$ , então  $\ell = k-1$ .

(2) Se  $F \hookrightarrow E$  é uma fibração de Serre com  $\pi_1 B = 0$  e

$$\downarrow B$$

$F$  e  $B$  variedades fechadas e conexas orientadas, então as orientações  $[F]$  e  $[B]$  definem canonicamente uma orientação em  $E$ .

(3) Calcular os grupos  $H^*(CP(n); \mathbb{Z})$  usando a fibração

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \hookrightarrow & S^{2n+1} \\
 & & \downarrow \\
 & & CP(n)
 \end{array}$$



### B. Seqüência Espectral-Homologia

Não existe basicamente nenhuma diferença entre a seqüência espectral de homologia e cohomologia; a definição é praticamente a mesma. Vamos neste parágrafo defini-la, enunciar os resultados principais visto no capítulo anterior no caso de homologia e demonstrar o Teorema de Gysin no caso de homologia cuja demonstração, no caso de cohomologia, foi deixada como exercício.

#### Definição I.11

Uma seqüência espectral de homologia é uma seqüência  $(E^r, d_r)$  onde  $E^r$  é um módulo bigraduado,  $d_r$  é uma diferencial de bigrau  $(-r, r-1)$  de forma tal que  $E^{r+1} = H(E^r)$ .

Isto significa que para todo par de inteiros  $(p, q)$ , temos

$$d_r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r, q+r-1}^r, \quad d_r^2 = 0$$

e

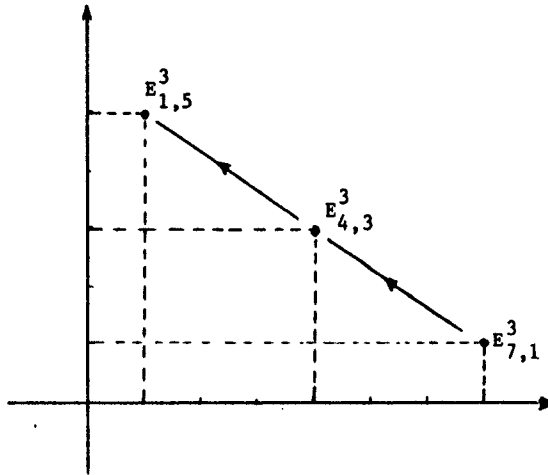
$$E_{p,q}^{r+1} = \frac{\text{Ker } d_r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r, q+r-1}^r}{\text{Im } d_r : E_{p+r, q-r+1}^r \rightarrow E_{p,q}^r}.$$

De forma inteiramente análoga define-se ciclo permanente e o termo  $E^\infty$ .

Uma seqüência espectral é a chamada de primeiro quadrante se  $E_{p,q}^r = 0$  quando  $p < 0$  ou  $q < 0$ .

A representação reticular de uma sequência espectral de cohomologia é a mesma que de cohomologia observando somente a inversão no sentido da flecha.

Por exemplo,



Usando a representação reticular podemos de forma análoga demonstrar que se  $(E^r, d_r)$  é uma sequência espectral de primeiro quadrante, então se  $r > \max(p, q+1)$  então  $E_{p,q}^r = E_{p,q}^\infty$ .

Dualmente obtemos o homomorfismo lateral da base

$$e_B : E_{p,0}^\infty = E_{p,0}^{p+1} \rightarrow E_{p,0}^p \rightarrow \dots \rightarrow E_{p,0}^3 \rightarrow E_{p,0}^2.$$

Neste caso  $e_B$  é injetor e o homomorfismo lateral da fibra

$$e_F : E_{0,q}^2 \rightarrow E_{0,q}^3 \rightarrow E_{0,q}^4 \rightarrow \dots \rightarrow E_{0,q}^{q+2} = E_{0,q}^\infty.$$

Neste caso  $e_F$  é sobrejetor, em contraposição no caso de cohomologia onde  $e_B$  era sobrejetor e  $e_F$  injetor.

### I.12. Teorema de Leray-Serre

Seja

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & E \\ & & \downarrow \pi \\ & & B \end{array}$$

uma fibração de Serre com base  $B$ , simplesmente conexa e fibra  $F$ , conexa. Então existe uma filtração

$$H_n(E) = D_{n,0} \supset D_{n-1,1} \supset \dots \supset D_{0,n} \supset D_{-1,n+1} = 0$$

e uma seqüência espectral  $(E^r, d_r)$  de primeiro quadrante satisfazendo:

$$E_{p,q}^2 = H_p(B, H_q F) \quad \text{e} \quad E_{p,q}^\infty = \frac{D_{p,q}}{D_{p-1,q+1}}$$

e mais, as composições

$$H_n(E) \longrightarrow \frac{D_{n,0}}{D_{n-1,1}} = E_{n,0}^\infty \xrightarrow{e_B} E_{n,0}^2 \cong H_n(B)$$

$$H_n(F) \cong E_{0,n}^2 \xrightarrow{e_F} E_{0,n}^\infty \longrightarrow H_n(E)$$

coincidem respectivamente aos morfismos  $\pi_*$  e  $i_*$ .

Todos os resultados que obtivemos anteriormente do Teorema de Leray-Serre com cohomologia podemos também obtê-los em homologia.

Vamos então enunciá-los e demonstrar no caso de homologia somente o Teorema de Gysin.

### I.13. Seqüência Exata de Wang

Se

$$\begin{array}{ccc} F & \hookrightarrow & E \\ & & \downarrow \\ & & S^k \end{array}$$

é uma fibração de Serre com  $k > 1$  e fibra conexa, então existe uma seqüência exata

$$\dots \rightarrow H_n(E) \rightarrow H_{n-k}(F) \xrightarrow{d_k} H_{n-1}(F) \rightarrow H_{n-1}(E) \rightarrow \dots$$

### I.14. Seqüência Exata de Gysin

Se

$$\begin{array}{ccc} S^k & \hookrightarrow & E \\ & & \downarrow \pi \\ & & B \end{array}$$

é uma fibração de Serre com  $B$  simplesmente conexo, então existe uma seqüência exata

$$\dots \rightarrow H_n(E) \xrightarrow{\pi_*} H_n(B) \rightarrow H_{n-k-1}(B) \rightarrow H_{n-1}(E) \rightarrow \dots$$

Demonstração

Temos que  $E_{p,q}^2 \cong H_p(B) \otimes H_q(S^k) \neq 0$  somente se  $q = 0$  ou  $q = k$ . Portanto, os termos infinitos são  $E_{p,0}^\infty$  e  $E_{p,k}^\infty$  que eventualmente são não nulos.

Obtemos assim a seqüência curta exata

$$(A) \quad 0 \rightarrow E_{p,0}^\infty \xrightarrow{e_B} E_{p,0}^2 = E_{p,0}^{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} E_{p-k-1,k}^2 \rightarrow E_{p-k-1,k}^\infty \rightarrow 0$$

Agora

$$E_{n,0}^\infty = \frac{H_n(E)}{D_{n-1,1}} = \frac{H_n(E)}{D_{n-k,k}} = \frac{H_n(E)}{E_{n-k,k}^\infty}$$

e obtemos assim as seqüências curta exata

$$(B) \quad 0 \rightarrow E_{n-k,k}^\infty \rightarrow H_n(E) \rightarrow E_{n,0}^\infty \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow E_{n-k-1,k}^\infty \rightarrow H_{n-1}(E) \rightarrow E_{n-1,0}^\infty \rightarrow 0$$

As seqüências (A) e (B) fornecem então o diagrama a seguir.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_n(E) & & & & 0 \\
 & & \downarrow & \searrow \pi_* & & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & E_{n,0}^\infty & \xrightarrow{e_B} & E_{n,0}^2 & \longrightarrow & E_{n-k-1,k}^2 \longrightarrow E_{n-1-k,k}^\infty \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & 0 & & & & H_{n-1}(E)
 \end{array}$$

e, portanto, obtemos

$$\dots \longrightarrow H_n(E) \xrightarrow{\pi_*} H_n(B) \longrightarrow H_{n-k-1}(B) \longrightarrow H_{n-1}(E) \longrightarrow \dots \quad \text{C.Q.D.}$$

A seqüência exata de Serre em homologia é obtida do seguinte:

Teorema I.15

Suponhamos

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{i} & E \\
 & & \downarrow \pi \\
 & & B
 \end{array}$$

seja uma fibração de Serre com  $B$  simplesmente conexo.

Suponhamos  $B$   $(p-1)$ -conexo e  $F$   $(q-1)$ -conexo. Então existe uma seqüência exata.

$$H_{p+q-1}(F) \xrightarrow{i_*} H_{p+q-1}(E) \xrightarrow{\pi_*} H_{p+q-1}(B) \xrightarrow{\tau} H_{p+q-2}(F) \rightarrow \dots \rightarrow H_1(E) \rightarrow 0$$

onde  $\tau$  é a transgressão em homologia.

## CAPÍTULO II

### ESPAÇOS DE EILENBERG-MACLANE

O objetivo deste capítulo é definir, para cada  $n \geq 1$  e para todo grupo abeliano  $G$ , um complexo celular, denotado por  $K(G, n)$  e chamado espaço de Eilenberg-MacLane. Estes espaços desempenham papel importante em topologia algébrica, uma vez que eles classificam grupos de cohomologia, no seguinte sentido: Para todo complexo celular  $X$  existe uma bijeção entre  $H^n(X; G) \longleftrightarrow [X; K(G, n)]$ .

Também veremos que nossa construção é única a menos de equivalência de homotopia, ou seja, dois complexos celulares que são  $K(G, n)$ 's possuem o mesmo tipo de homotopia.

#### Definição II.1

Um espaço topológico  $Y$  é chamado um espaço de Eilenberg-MacLane associado ao grupo abeliano  $G$  e ao inteiro  $n > 0$  caso o espaço  $Y$  tenha a seguinte propriedade:

$$\pi_i(Y) = \begin{cases} G & \text{se } i = n \\ 0 & \text{se } i \neq n \end{cases}$$



Dado um espaço topológico  $X$  qualquer com ponto base  $x_0$ .

Sejam

$$P(X) = (X, x_0) ([0, 1], \{0\})$$

e

$$\Omega(X) = (X, x_0) ([0, 1], \{0, 1\})$$

espaços de caminhos em  $X$  com ponto base  $x_0$  e o espaço de laços em  $X$  com ponto base  $x_0$ , munidos da topologia compacto-aberta.

Relembremos que  $\pi_i(\Omega X)$  é isomorfo a  $\pi_{i+1}(X)$ . Conseqüentemente obtemos que

$$\pi_i(\Omega K(G, n+1)) = \pi_{i+1}(K(G, n+1))$$

para todo  $i \geq 0$ , e isto implica que o espaço de laços em  $K(G, n+1)$  é um espaço  $K(G, n)$ .

Se  $X$  for um complexo celular, então  $\Omega X$  também é um complexo celular. Embora não sendo necessário, preferimos usar homologia celular na demonstração da existência de um  $K(G, n)$  como complexo celular.

Seja  $X^{[i]}$  o esqueleto de dimensão  $i$  de um complexo celular  $X$ . Lembremos que o grupo  $C_i(X; Z)$  de cadeias celulares de dimensão  $i$  com coeficientes em  $Z$  é por definição a homologia singular  $H_i(X^{[i]}, X^{[i-1]}; Z)$ .

Uma célula  $e^{i+1}$  produz uma esfera no espaço quociente  $X^{[i+1]}/X^{[i]}$ . O operador bordo

$$\partial : C_{i+1}(X;Z) \rightarrow C_i(X;Z)$$

leva a classe representada pela esfera  $S^{i+1}$  a uma soma finita  $\sum m_\alpha [S_\alpha^i]$  onde o inteiro  $m_\alpha$  é o grau da aplicação composta

$$\partial(D^{i+1}) = S^i \xrightarrow{f} X^{[i]} \rightarrow X^{[i]}/X^{[i-1]} = \vee S_\alpha^i + S_\alpha^i$$

entre as esferas  $S^i$  e  $S_\alpha^i$ . A aplicação  $f$  é a aplicação de colagem da célula  $e^{i+1}$  em  $X^{[i]}$ .

## II.2. Teorema de Existência

Seja  $G$  um grupo abeliano qualquer e  $n \geq 2$  um inteiro qualquer. Então existe um  $K(G,n)$  que é um complexo celular.

### Demonstração

Seja  $0 \rightarrow R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} G \rightarrow 0$  uma resolução livre do grupo abeliano  $G$ . Sejam  $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$  e  $\{r_\beta \mid \beta \in B\}$  bases para  $F$  e  $R$ , respectivamente.

O  $n$ -esqueleto do espaço que queremos construir é  $\bigvee_{\alpha \in A} S^n$  a união por um ponto de esferas  $S^n$ , uma para cada elemento  $f_\alpha$  da base de  $F$ . Obviamente,  $H_n(\bigvee_{\alpha \in A} S^n; Z)$  é isomorfo a  $G$ .

somorfo a  $F$ , onde a classe representada pela esfera  $S_\alpha^n$  corresponde ao elemento  $f_\alpha$  em  $F$ .

Construamos então o esqueleto de dimensão  $n+1$  do complexo desejado. Para cada  $\beta \in B$ , escolhemos uma aplicação  $g_\beta : S_\beta^n \rightarrow \bigvee_{\alpha \in A} S_\alpha^n$  tal que  $[g_\beta]$  pertencente a  $\pi_n(\bigvee_{\alpha \in A} S_\alpha^n) \cong H_n(\bigvee_{\alpha \in A} S_\alpha^n; Z) \cong F$  corresponde ao elemento  $i(r_\beta) \in F$  por meio do isomorfismo acima.

Então  $X = (\bigvee_{\alpha \in A} S_\alpha^n) \cup_{\cup g_\beta} \bigcup_{\beta \in B} e_\beta^{n+1}$  é um complexo celular de dimensão  $\leq n+1$ , que é obviamente  $(n-1)$ -conexo.

Afirmamos que  $\pi_n(X) = G$ . Basta provar que  $H_n(X; Z) \cong G$  pois  $\pi_n(X) \cong H_n(X; Z)$  pelo Teorema de Hurewicz.

Notemos que o grupo de cadeias celulares

$$C_n(X; Z) = H_n(X^{[n]}/X^{[n-1]}; Z) = H_n(\bigvee_{\alpha \in A} S_\alpha^n; Z) \cong F$$

enquanto

$$\begin{aligned} C_{n+1}(X; Z) &= H_{n+1}(X^{[n+1]}/X^{[n]}; Z) = \\ &= H_{n+1}(\bigvee_{\beta \in B} S_\beta^{n+1}; Z) \cong R. \end{aligned}$$

Além disso, o operador bordo  $\partial : C_{n+1}(X; Z) \rightarrow C_n(X; Z)$  corresponde à inclusão  $i : R \rightarrow F$  por meio dos isomorfismos acima. Conseqüentemente temos que  $H_n(X; Z) \cong F/i(R) \cong G$ .

Este espaço  $X$  chama-se espaço de Moore, pois  $\tilde{H}_i(X; Z) \cong 0$  para todo  $i \neq n$ , enquanto que  $H_n(X; Z) \cong G$ .

$X$  é o  $(n+1)$ -esqueleto do espaço que estamos querendo construir. O próximo passo é o seguinte.

Caso  $\pi_{n+1}(X)$  seja um grupo não trivial, colocaremos células de dimensão  $n+2$  em  $X$  para anular este grupo de homotopia. Escolhemos um conjunto  $\{[h_\gamma] \mid \gamma \in \Gamma\}$  de geradores para  $\pi_{n+1}(X)$ . Definimos  $h : \bigvee_{\gamma \in \Gamma} S_Y^{n+1} \rightarrow X$  por  $h \mid S_Y^{n+1} = h_\gamma$ . Seja  $Y$  o cone da aplicação  $h$ , isto é  $Y = X \cup \bigcup_{\gamma \in \Gamma} e_Y^{n+2}$  é um complexo celular de dimensão  $n+2$ . Afir-mamos que  $\pi_{n+1}(Y) = 0$ . A inclusão  $j : X \rightarrow Y$  induz o morfismo trivial  $j_* : \pi_{n+1}(X) \rightarrow \pi_{n+1}(Y)$ , pois cada gerador está no núcleo de  $j_*$  por construção de  $Y$ . Por outro lado, por celularidade todo elemento de  $\pi_{n+1}(Y)$  provém da homotopia do  $(n+1)$ -esqueleto de  $Y$ . Sendo que  $j_*$  é trivial em  $\pi_{n+1}(X) = 0$ , concluímos que  $\pi_{n+1}(Y) = 0$ .

Continuamos a construção do espaço desejado desta maneira. Colamos células de dimensão  $n+3$  em  $Y$  para anular o grupo  $\pi_{n+2}(Y)$  e, assim, sucessivamente, produziremos um complexo celular que representa  $K(G, n)$ .

Observação: Se  $G$  for um grupo abeliano livre, então  $F \cong G$  e, portanto,  $R = \{0\}$ . Assim, não seria necessário colar células de dimensão  $n+1$  acima do  $n$ -esqueleto. Mas certamente existiria homotopia não trivial em dimensão  $n+1$  do esqueleto. Portanto, o processo seguiria pela colagem de

células de dimensão  $n+2$ .

Como foi dito na introdução deste capítulo, os espaços  $K(G,n)$  são espaços classificantes para cohomologia.

Notemos que

$$H^n(K(G,n);G) \cong \text{Hom}(H_n(K(G,n);Z), \pi_n(K(G,n)))$$

pois  $K(G,n)$  é  $(n-1)$ -conexo.

Por meio deste isomorfismo, seja  $i$  a classe fundamental de  $K(G,n)$ . Isto é,  $i$  corresponde ao inverso  $h^{-1}$  do isomorfismo de Hurewicz  $h : \pi_n(K(G,n)) \rightarrow H_n(K(G,n),Z)$ .

Pela teoria clássica de obstruções, demonstra-se que os espaços  $K(G,n)$  classificam cohomologia no seguinte sentido:

Seja  $X$  um espaço topológico qualquer que tenha o tipo de homotopia de um complexo celular. Então existe um isomorfismo natural entre  $[X, K(G,n)]$  e  $H^n(X;G)$  definido por  $[f] \mapsto f_*i \in H^n(X;G)$ .

Convém notar que o conjunto das classes de homotopia de aplicações  $f : X \rightarrow K(G,n)$  possui a estrutura de grupo abeliano por meio da composição de laços em espaços de laços, sendo que  $K(G,n) = \Omega^2(K(G,n+2)) = \Omega(\Omega(K(G,n+2)))$ .

Observação: O caso  $n = 1$  foi excluído pois nossa construção foi baseada no fato  $\pi_n(\prod_{\alpha \in A} S_\alpha^n) = H_n(\prod_{\alpha \in A} S_\alpha^n; Z)$ . Ob-

viamente isto não acontece em dimensão 1, uma vez que  $\pi_1(S^1 \vee S^1)$  é um grupo não abeliano, e portanto diferente de  $H_1(S^1 \vee S^1, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Porém enfatizamos que mesmo neste caso é possível realizar um  $K(G, 1)$  como complexo celular, porém a construção difere da apresentada nestas notas.

### Exemplos

(1) Claramente o círculo  $S^1$  é um  $K(\mathbb{Z}, 1)$ . Afirmamos que  $\mathbb{R}P^\infty$  e  $\mathbb{C}P^\infty$  são  $K(\mathbb{Z}/2, 1)$  e  $K(\mathbb{Z}, 2)$ , respectivamente. Consideremos as fibrações de Hopf

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \hookrightarrow & S^n \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{R}P^n \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} S^1 & \hookrightarrow & S^{2n+1} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}P^n \end{array}$$

para todo  $n \geq 0$ .

Analisando as seqüências exatas de homotopia destas fibrações, concluimos que  $\pi_i(\mathbb{R}P^n) = 0$ ,  $1 < i < n$ , enquanto que  $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \approx \mathbb{Z}/2$  e analogamente concluimos que  $\pi_2(\mathbb{C}P^n) \approx \pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$ , para  $n \geq 1$ , enquanto que  $\pi_i(\mathbb{C}P^n) = 0$ , para  $i \leq 2n$  e  $i \neq 2$ . Sendo  $\mathbb{R}P^\infty = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{R}P^n$  e  $\mathbb{C}P^\infty = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{C}P^n$  concluimos que  $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty) = \varinjlim \pi_2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$ , enquanto que  $\pi_i(\mathbb{C}P^\infty) = \varinjlim \pi_i(\mathbb{C}P^n) = 0$  para  $i \neq 2$ .

De forma análoga,  $\pi_1(\mathbb{R}P^\infty) = \varinjlim \pi_1(\mathbb{R}P^n) \approx \mathbb{Z}/2$  e  $\pi_i(\mathbb{R}P^\infty) = \varinjlim \pi_i(\mathbb{R}P^n) = 0$  para  $i \neq 1$ .

(2) Um teorema clássico de Dold-Thom fornece uma construção para alguns espaços de Eilenberg-MacLane. Seja  $SP^n(X)$  o espaço de órbitas do produto cartesiano  $X^n = X \times X \times \dots \times X$   $n$  vezes pela ação do grupo simétrico  $S_n$ , onde  $\sigma \in S_n$  atua da seguinte maneira:

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in X^n.$$

$SP^n(X)$  é o  $n$ -ésimo produto simétrico de  $X$ . Aqui consideramos  $X$  com ponto base  $x_0$ . Então  $SP^n(X) \subset SP^{n+1}(X)$ .

Seja  $SP^\infty(X) = \bigcup_n SP^n(X)$ , o produto simétrico infinito de  $X$ .

Dold e Thom demonstraram que  $\pi_i(SP^\infty(X)) = \tilde{H}_i(X; Z)$ . Utilizando este resultado, concluímos, por exemplo, que

$$K(Z, n) = SP^\infty(S^n) \quad \text{para } n \geq 1.$$

Também  $K(G, n) = SP^\infty(M(G, n))$  onde  $M(G, n)$  é o espaço de Moore associado ao grupo  $G$  e ao inteiro  $n$ . Podemos ver diretamente que  $SP^\infty(S^2) = K(Z, 2) = CP^\infty$  da seguinte maneira:

A cada  $m$ -upla  $(z_1, z_2, \dots, z_m)$  de números complexos vamos associar uma  $(m+1)$ -upla homogênea  $[a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, 1] \in CP^m$  onde

$$z^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_{m-1-i} z^i$$

é um polinômio que tem exatamente  $z_1, \dots, z_m$  como raízes. Esta função é obviamente contínua, pois os  $a_i$ 's são funções simétricas elemen

tares das variáveis  $z_i$ .

Temos assim uma função contínua

$$h : \underbrace{C \times C \times \dots \times C}_{(m \text{ cópias de } C)} \rightarrow CP^m$$

Se permitimos haver raízes infinitas, o que corresponde a uma redução do grau do polinômio, teremos uma função bem definida  $\bar{h} : S^2 \times S^2 \times \dots \times S^2 \rightarrow CP^m$  e o Teorema Fundamental da Álgebra garante que  $\bar{h}$  é sobrejetora.

Consideremos o grupo das permutações  $S_m$  em  $m$ -variáveis e façamos  $S_m$  atuar em  $S^2 \times S^2 \times \dots \times S^2$  da seguinte maneira:

$$\sigma(x_1, \dots, x_m) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(m)})$$

considerando o espaço de órbitas temos então  $SP^m(S^2)$  e o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^2 \times S^2 \times \dots \times S^2 & \xrightarrow{\bar{h}} & CP^m \\ \pi \downarrow & \nearrow f & \\ SP^m(S^2) & & \end{array}$$



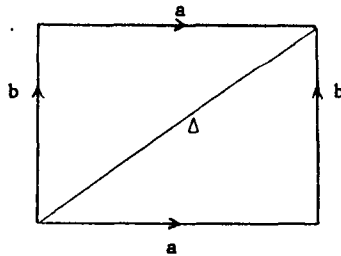
Como  $\bar{h}$  é constante nas "fibras de  $\pi$ " temos definida então uma função contínua injetora  $f : SP^m(S^2) \rightarrow CP^m$ .

Como  $\bar{h}$  é sobrejetora então  $f$  também é sobrejetora e como  $SP^m(S^2)$  é compacta temos que  $f$  é um homeomorfismo.

É interessante observar que este argumento não se aplica ao caso real; ou seja  $SP^m(S^1) \not\cong RP^m$ .

De fato, vamos mostrar que  $SP^2(S^1)$  é homeomorfo à faixa de Möebius.

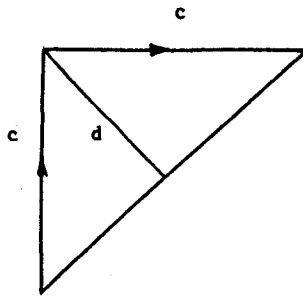
$S^1 \times S^1$  é o toro que pode ser representado como um quadrado com lados a serem identificados como na figura abaixo:



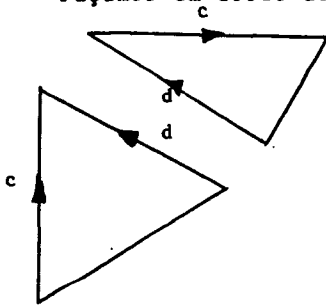
onde  $\Delta : S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$   
é a diagonal

Para se obter o quociente temos que identificar pontos simétricos relativamente à diagonal.

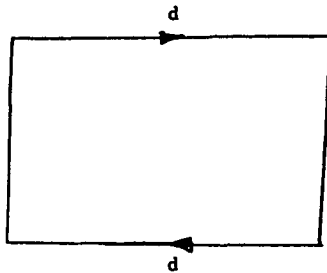
Então, considerando-se identificado o interior obtemos a seguinte figura com os lados c a serem identificados:



Façamos um corte ao longo de  $d$



e agora identifiquemos  $c$



obtendo finalmente a faixa de Möbius.

Queremos aqui agradecer ao colega e amigo Gilberto Francisco Loibel pela construção acima.

Um comentário final baseado nos exemplos dados é quanto a finititude dos espaços de Eilenberg-MacLane. Vimos que  $K(Z,1) = S^1$  e  $K(Z/2,1) = \mathbb{R}P^\infty$ , ou seja,  $K(Z,1)$  é um complexo celular finito enquanto que  $K(Z/2,1)$  é um complexo celular infinito. Este fato não é acidental em face da seguinte:

Proposição II.3

Se  $G$  é um grupo que possui elemento de torsão então  $K(G,1)$  não é um complexo celular finito.

Demonstração

Se  $G$  contém um elemento de torsão então existe um primo  $p$  tal que  $Z/p \subset G$ .

Suponhamos que  $K(G,1)$  seja um complexo celular finito.

Assim,  $\tilde{K} \rightarrow K(G,1)$  o recobrimento universal é um complexo celular de dimensão finita contrátil, logo sua característica de Euler está definida.

Como  $G$  atua livremente em  $\tilde{K}$  como grupo das transformações de recobrimento então  $Z/p$  atua livremente em  $K$  por restrição.

Como  $\tilde{K}$  tem dimensão finita, o grupo de transformações  $Z/p$  em  $\tilde{K}$  satisfaz as condições do Teorema de Smith. Assim, se  $F$  é o conjunto dos pontos fixos vale a seguinte relação  $\chi(\tilde{K}) \equiv \chi(F) \pmod{p}$ . Como  $\tilde{K}$  é contráctil e  $F$  é vazio temos  $\chi(\tilde{K}) = 1$  e  $\chi(F) = 0$ , o que é um absurdo.

C.Q.D.

Pode-se demonstrar que para qualquer grupo abeliano  $G$  e  $n \geq 2$ ,  $K(G, n)$  não possui cohomologia finita e portanto  $K(G, n)$  não pode ser um complexo celular finito.

Para finalizar este capítulo vamos mostrar uma interligação interessante entre álgebra e topologia.

#### Proposição II.4

Sejam  $H$  e  $G$  grupos abelianos quaisquer e  $n$  um inteiro  $\geq 2$ . Então existe um isomorfismo entre  $\text{Hom}(H, G)$  e  $[K(H, n), K(G, n)]$ .

Demonstração

Escolhamos isomorfismos fixos:

$$\ell_H : H \rightarrow \pi_n(K(H,n)) \quad \text{e} \quad \ell_G : G \rightarrow \pi_n(K(G,n)).$$

Seja  $\lambda : H \rightarrow G$  um morfismo qualquer. Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{\lambda} & G \\
 \ell_H \downarrow & & \downarrow \ell_G \\
 \pi_n(K(H,n)) & \xrightarrow{\lambda_1} & \pi_n(K(G,n)) \\
 h \downarrow & & \downarrow \text{Id} \\
 H_n(K(H,n); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\lambda_2} & \pi_n(K(G,n)) \\
 \text{Id} \downarrow & & \downarrow h \\
 H_n(K(H,n); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\lambda_3} & H_n(K(G,n); \mathbb{Z})
 \end{array}$$

onde definimos

$$\lambda_1 = \ell_G \circ \lambda \circ \ell_H^{-1}$$

$$\lambda_2 = \text{Id} \circ \lambda_1 \circ h^{-1}$$

$$\lambda_3 = h \circ \lambda_2$$

Queremos produzir  $f_\lambda : K(H, n) \rightarrow K(G, n)$  tal que  $(f_\lambda)_* = \lambda_3$ . Seja  $\bar{\lambda}$  a classe em  $H^n(K(H, n); G)$  que corresponde a  $\lambda_2$  por meio dos isomorfismos

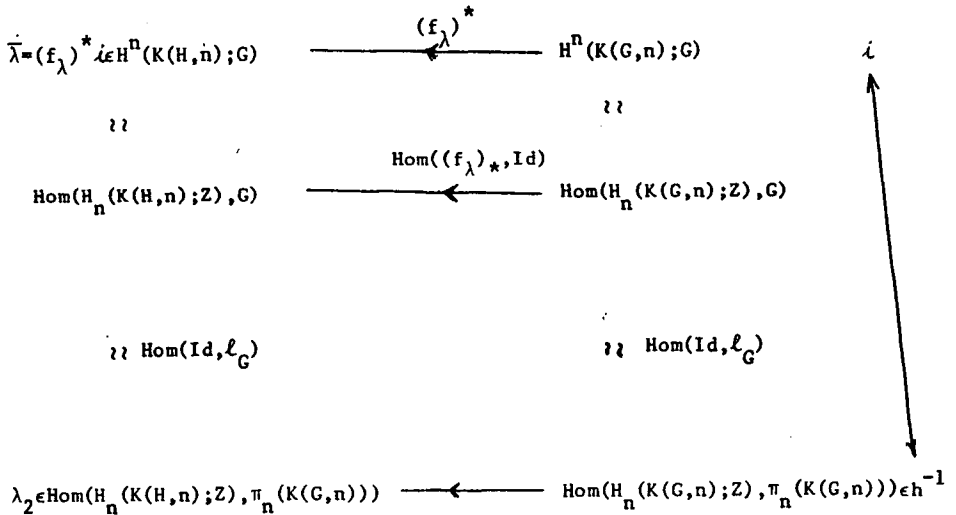
$$\begin{aligned} H^n(K(H, n); G) &\cong \text{Hom}(H_n(K(H, n); Z), G) \text{ Hgm}(\text{Id}, \ell_G) \\ &\cong \text{Hom}(H_n(K(H, n); Z), \pi_n(K(G, n))) \end{aligned}$$

Pelo teorema fundamental, existe uma aplicação

$f_\lambda : K(H, n) \rightarrow K(G, n)$  única a menos de homotopia, tal que  $(f_\lambda)^* i = \bar{\lambda}$ .

Afirmamos que  $(f_\lambda)_* = \lambda_3$ .

Consideremos o seguinte diagrama:



Concluimos que  $\lambda_2 = \text{Hom}((f_\lambda)_*, \text{Id})(h^{-1})$ . Isto é,  $\lambda_2 = h^{-1} \circ (f_\lambda)_*$ . Concluimos que  $\lambda_3 = h \circ \lambda_2 = (f_\lambda)_*$ .

Já provamos que todo  $\lambda : H \rightarrow G$  pode ser realizado geometricamente, isto é,  $\lambda_3 = (f_\lambda)_*$  para alguma aplicação  $f_\lambda : K(H, n) \rightarrow K(G, n)$ .

Claramente toda aplicação  $f : K(H, n) \rightarrow K(G, n)$  produz um elemento  $\lambda$  em  $\text{Hom}(H, G)$  dado por  $\lambda = \ell_G^{-1} \circ h^{-1} \circ f_* \circ h \circ \ell_H$  onde  $f_* : H_n(K(H, n); \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(K(G, n); \mathbb{Z})$ .

Esta correspondência é bijetora e define um isomorfismo de grupos. C.Q.D.

### Fibração Principal

#### Definição

Uma fibração  $\Omega C \xleftarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  é chamada de fibração principal caso exista uma aplicação contínua  $f : B \rightarrow C$  tal que a fibração  $E \xrightarrow{p} B$  é a induzida por  $f$  da fibração  $\Omega C \rightarrow PC \rightarrow C$ .

Todos os espaços que nós consideramos são munidos de ponto base, e todas as aplicações preservam ponto base.

Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega C & = & \Omega C \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E & \xrightarrow{\quad} & PC \\
 \downarrow & \ell & \downarrow \\
 B & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}$$

Aqui

$$E = \{(b, \lambda) \in B \times PC \mid f(b) = \lambda(1)\}$$

$\ell : E \rightarrow PC$  é dada por  $\ell(b, \lambda) = \lambda$ . Existe uma multiplicação  $m : \Omega C \times E \rightarrow E$  que provém da composição de laços com caminhos. Isto é,

$$m(u, (b, \lambda)) = (b, u*\lambda) \in E,$$

onde o caminho é dado por

$$(u*\lambda)(t) = \begin{cases} u(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \lambda(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$m$  induz então um morfismo

$$m_* : [X, \Omega C] \times [X, E] \rightarrow [X, E]$$

da seguinte maneira:

$$m_*([h], [g]) = [m(h, g)]$$

onde  $m(h, g)$  é a aplicação dada por

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{(h, g)} \Omega C \times E \xrightarrow{m} E$$

onde  $\Delta$  é a aplicação diagonal. Seja  $c_0 : X \rightarrow \Omega C$  a aplicação constante. Então  $m(c_0, g)$  é homotópica a  $g$ .

Portanto  $m_*([c_0], [g]) = [g]$ . Claramente



$m_*([h], 0) = i_*[h]$  onde  $0$  é a aplicação constante  $X \rightarrow E$ .

O seguinte resultado é uma propriedade chave de fibrações principais, ou seja: dois levantamentos quaisquer de uma aplicação  $X \rightarrow B$  diferem por uma aplicação de  $X$  a  $\Omega C$ .

Proposição II.5

Sejam  $g_1 : X \rightarrow E$  e  $g_2 : X \rightarrow E$  duas aplicações tais que  $p \circ g_1$  e  $p \circ g_2$  são homotópicas. Então existe uma aplicação  $h : X \rightarrow \Omega C$  tal que  $[g_2] = m_*([h], [g_1])$ .

Demonstração

Seja  $G : X \times I \rightarrow B$  uma homotopia entre  $p \circ g_1$  e  $p \circ g_2$ , isto é,  $G(x, 0) = p(g_1(x))$  e  $G(x, 1) = p(g_2(x))$  para todo  $x$  em  $X$ . Por levantamento de homotopia, existe uma homotopia

$H : X \times I \rightarrow E$  tal que  $H(x, 0) = g_1(x)$  e  $p \circ H = G$ .

Seja  $g : X \rightarrow E$  a aplicação dada por  $g(x) = H(x, 1)$ . Claramente  $g \simeq g_1$ . Para todo  $x \in X$ , notemos que

$g(x) = (p(g(x)), \ell(g(x)))$ ,  $g_2(x) = (p(g_2(x)), \ell(g_2(x)))$   
com  $p(g(x)) = p(g_2(x))$ ,  $\ell(g(x))(1) = \ell(g_2(x))(1)$ .

Podemos definir  $h : X \rightarrow \Omega C$  por

$h(x) = \ell(g_2(x)) * \overline{\ell(g(x))}$

onde por definição

$$\overline{\ell(g(x))}(t) = \ell(g(x))(1-t)$$

para todo  $0 \leq t \leq 1$ . Isto é o caminho  $\overline{\ell(g(x))}$  percorre o caminho  $\ell(g(x))$  no sentido contrário. Consequentemente, a homotopia natural entre  $(\ell(g_2(x)) * \overline{\ell(g(x))}) * \ell(g(x))$  e  $\ell(g_2(x))$  fornece uma homotopia entre  $g_2$  e  $m(h, g)$ . Concluimos então que  $[g_2] = m_*([h], [g_1])$ , pois  $[g] = [g_1]$ .

CAPÍTULO III

TORRES DE POSTNIKOV

Consideremos

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & E \\ & & \downarrow p \\ & & B \end{array}$$

uma fibração no sentido de Hurewicz com  $B$  simplesmente conexo. A aplicação  $p$  induz uma aplicação de pares  $\bar{p} : (E, F) \rightarrow (B, b_0)$ , onde  $p^{-1}(b_0) = F$ .

Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H^q(E;G) & \xrightarrow{i^*} & H^q(F;G) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(E,F;G) & \rightarrow & H^{q+1}(E;G) & \rightarrow \\ & & & & & \uparrow \bar{p}^* & & \uparrow p^* & \\ & & & & & H^{q+1}(B, b_0; G) & \xrightarrow{\cong} & H^{q+1}(B; G) & \end{array}$$

onde  $G$  é um grupo abeliano qualquer.

Consideremos  $T^q(F;G) = \delta^{-1}(\bar{p}^* H^{q+1}(B, b_0; G))$  e  $S^{q+1}(B;G)$  o núcleo de  $p^*$  no diagrama acima.

Serre provou que  $T^q(F;G)$  é o conjunto dos elementos de  $H^q(F;G)$  que são transgressivos e o homomorfismo transgressão

$$\tau : T^q(F;G) \rightarrow S^{q+1}(B;G) / (\text{núcleo de } \bar{p}^*)$$

aqui é definido como a restrição do homomorfismo transgressivos são definido no capítulo anterior no conjunto dos elementos transgressivos projetados em  $E_n^{0,n-1}$ , e o seu valor é dado por  $\tau(u) = [v]$  onde  $\delta u = \bar{p}^*(v)$ .

Lema III.1

O homomorfismo  $\tau$  acima definido é natural para aplicações fibradas.

Demonstração

Consideremos o seguinte diagrama comutativo de fibrções e aplicações:

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{h} & F_0 \\
 i \downarrow & & \downarrow i_0 \\
 E & \xrightarrow{g} & E_0 \\
 p \downarrow & & \downarrow p_0 \\
 B & \xrightarrow{f} & B_0
 \end{array}$$

Notemos que  $f \circ p = p_0 \circ g$ , a restrição de  $g$  à fibra  $F$  é denotada por  $h$ ,  $F = p^{-1}(b)$ ,  $F_0 = p_0^{-1}(b_0)$  e  $f(b) = b_0$ .

Temos que provar: Se  $u \in T^q(F_0; G)$  então  $h^*(u) \in T^q(F; G)$  e além disso  $\tau(h^*(u)) = f^*(\tau u)$ .

A classe  $u$  satisfaz  $\delta(u) = \bar{p}_0^*(v)$  para alguma classe  $v$  no núcleo de  $p_0^* : H^{q+1}(B_0; G) \rightarrow H^{q+1}(E_0; G)$ .

Seja  $\bar{g} : (E, F) \rightarrow (E_0, F_0)$  a aplicação de pares definida por  $g$ . Então segue da naturalidade do operador co bordo que

$$\delta(h^*(u)) = \bar{g}^*(\delta u) = \bar{g}^*(\bar{p}_0^*(v)) = \bar{p}^*(f^*(v)),$$

de onde segue o resultado.

C.Q.D.

Na construção de Torres de Postnikov utilizamos o seguinte resultado:

Toda aplicação  $f : X \rightarrow Y$  se fatora segundo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \hat{X} \\ & \nearrow i & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

onde  $g$  é uma fibração de Hurewicz e a inclusão  $i$  é uma e quivalência de homotopia.

$\hat{X}$  pode ser construído da seguinte maneira:

Seja  $Y^I$  o espaço de caminhos livres em  $Y$ , isto é,  $Y^I = \{\lambda : I \rightarrow Y, \lambda \text{ função contínua}\}$ .

Definamos  $\hat{X} = \{(x, \lambda) \in X \times Y^I \mid f(x) = \lambda(0)\}$ . Definimos  $g : \hat{X} \rightarrow Y$  por  $g(x, \lambda) = \lambda(1)$ . A inclusão  $i$  é definida por  $i(x) = (x, C_{f(x)})$  onde  $C_{f(x)}$  denota o caminho constante em  $f(x)$ . Conseqüentemente  $f = g \circ i$ .

Seja  $p: \hat{X} \rightarrow X$  a projeção na primeira coordenada.

Afirmamos que  $p$  é uma aplicação inversa para a inclusão  $i$  a menos de homotopia.

Trivialmente temos  $p \circ i =$  identidade em  $X$ .

Dado um caminho  $\lambda : I \rightarrow X$  qualquer, definimos para todo  $t \in [0,1]$  o caminho  $\lambda_{1-t} : I \rightarrow X$  dado por  $\lambda_{1-t}(s) = \lambda(s(1-t))$  então  $\lambda_1 = \lambda$  enquanto que  $\lambda_0 = C_\lambda(0)$ . Uma homotopia  $F : \hat{X} \times I \rightarrow \hat{X}$  entre a identidade em  $\hat{X}$  e a composição  $i \circ p : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$  é dada por  $F((x, \lambda), t) = (x, \lambda_{1-t})$ .

Finalmente mostremos que  $g : \hat{X} \rightarrow Y$  é uma fibração de Hurewicz.

Sejam  $h : W \rightarrow \hat{X}$  e  $H : W \times I \rightarrow Y$  aplicações satisfazendo  $H(w, 0) = gh(w)$  para todo  $w$  em  $W$ .

A aplicação  $h$  determina um par de aplicações

$$h' : W \rightarrow X \quad \text{e} \quad h'' : W \rightarrow Y^I$$

tal que  $h(w) = (h'(w), h''(w))$ .

Além disso,  $h''(w)(0) = f(h'(w))$ . Definimos um levantamento  $H' : W \times I \rightarrow \hat{X}$  da homotopia  $H$  por

$$H'(w, t) = (h'(w), \bar{h}(w, t))$$

onde  $\bar{h}$  é definida por

$$\bar{h}(w,t)(s) = \begin{cases} h''(w) \left( \frac{2s}{2-t} \right) & \text{para } 0 \leq 2s \leq 2-t \leq 2, w \in W \\ H(w, 2s+t-2) & \text{para } 1 \leq 2-t \leq 2s \leq 2, w \in W \end{cases}$$

Claramente  $h = H'(\cdot, 0) : W \rightarrow \hat{X}$  pois  $\bar{h}(w,0) = h''(w)$

Além disso,  $g \circ H' = H$  pois

$$g(H'(w,t)) = \bar{h}(w,t)(1) = H(w,t).$$

### Definição III.2

Seja  $X$  um espaço topológico que tem o mesmo tipo de homotopia de um complexo celular com  $X$   $(n-1)$ -conexo  $n \geq 2$ . A classe fundamental  $i_X$  é a classe em  $H^n(X; \pi_n(X))$  que corresponde ao inverso  $h^{-1}$ , onde  $h : \pi_n(X) \rightarrow H_n(X; Z)$  denota o isomorfismo de Hurewicz, por meio do isomorfismo

$$H^n(X; \pi_n(X)) \cong \text{Hom}(H_n(X; Z), \pi_n(X)).$$

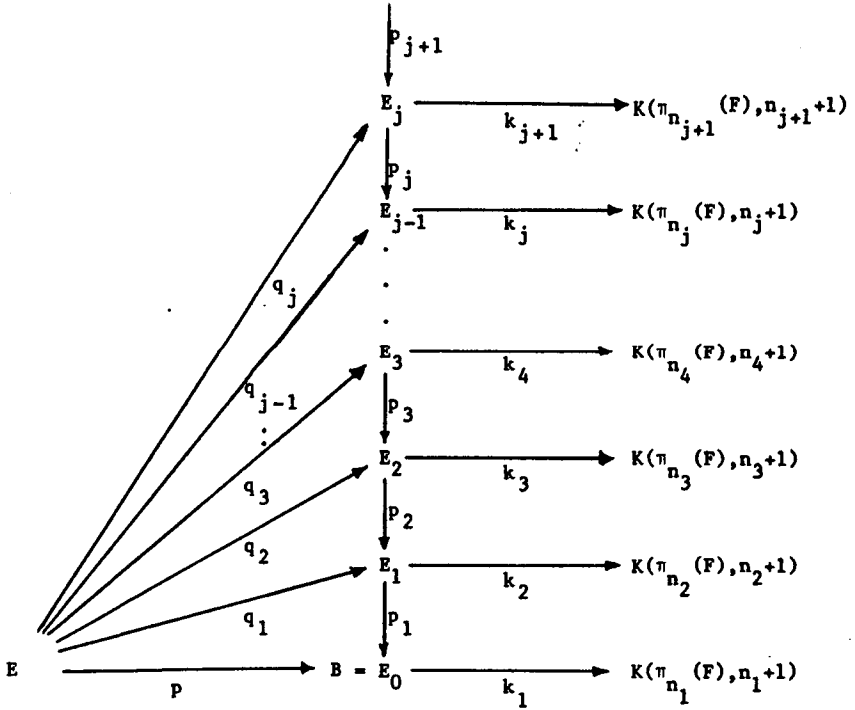
### Definição III.3

Torres de Postnikov para uma fibração de Hurewicz  $F \rightarrow E \rightarrow B$  onde  $E$  e  $B$  são espaços simplesmente conexos tendo o mesmo tipo de homotopia de um complexo celular é de finida da seguinte maneira:

Primeiro enumeramos os grupos não triviais de homotopia da fibra  $F$ .

Sejam  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_j < n_{j+1} < \dots$  uma sequência ascendente de inteiros tal que  $\pi_{n_j}(F)$  é o  $j$ -ésimo grupo não trivial de homotopia de  $F$  e, obviamente  $\pi_i(F) = 0$  caso  $i \neq n_j$  para todo  $j \geq 1$ .

Queremos construir a seguinte torre:





satisfazendo as seguintes propriedades:

- (1)  $(p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_j) \circ q_j = p$  para todo  $j \geq 1$  e  
 $p_j \circ q_j = q_{j-1}$ .
- (2)  $(q_j)_* = \pi_i(E) \rightarrow \pi_i(E_j)$  é um isomorfismo para todo  
 $0 \leq i \leq n_{j+1} - 1$  e um epimorfismo para  $i = n_{j+1}$ .
- (3)  $p_j : E_j \rightarrow E_{j-1}$  é uma fibração principal com fibra  
 $K(\pi_{n_j}(F), n_j)$  classificada pela aplicação  
 $k_j : E_{j-1} \rightarrow K(\pi_{n_j}(F), n_j + 1)$ .

A classe de cohomologia  $k_j \rightarrow H^{n_j+1}(E_{j-1}; \pi_{n_j}(F))$  é  
o  $j$ -ésimo  $k$ -invariante da fibração  $p : E \rightarrow B$ .

Porque queremos construir uma tal torre ?

Seja  $X$  um complexo celular cuja dimensão é  $\leq n_{j+1} - 1$ .

Por celularidade  $q_j : E \rightarrow E_j$  induz uma bijeção

$$(q_j)_* : [X, E] \rightarrow [X, E_j].$$

Caso dimensão de  $X = n_{j+1}$  então  $(q_j)_* : [X, E] \rightarrow [X, E_j]$  é  
sobrejetora. Em outras palavras, dada uma aplicação qual-  
quer  $f : X \rightarrow B$  com  $\dim X \leq n_{j+1}$ , existe um levantamento  
 $g : X \rightarrow E$  tal que  $p \circ g = f$  se e somente se existe  $g_j : X \rightarrow E_j$   
tal que  $(p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_j) \circ g_j = f$ . Isto é, conseguimos redu-  
zir o problema da existência de um levantamento  $g$  de  $f$   
a existência de um levantamento na fibração  $E_j \rightarrow B$  com

$p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_{j-1} \circ p_j$ . É possível medir precisamente as obstruções a um levantamento na fibração composta  $E_j \rightarrow B$ , pois a obstrução em cada passo é uma classe de cohomologia. Lembremos que  $p_j : E_j \rightarrow E_{j-1}$  é uma fibração principal.

Obviamente o teorema principal sobre Torres de Postnikov é o:

#### III.4. Teorema de Existência

Dada uma fibração satisfazendo as condições do início deste capítulo  $E \rightarrow B$  então existe uma torre para  $E \rightarrow B$ .

#### Demonstração

A construção será feita por indução.

Seja então  $j = 1$  e lembremos que  $E_0 = B$ . Sendo que a fibra  $F$  é  $(n_1 - 1)$ -conexa e  $B$  é 1-conexo, a seqüência exata de Serre vale até dimensão  $n_1 + 2$ . Em particular, temos exatidão na seqüência

$$\rightarrow H^{n_1}(E; \pi_{n_1}(F)) \xrightarrow{i^*} H^{n_1}(F; \pi_{n_1}(F)) \rightarrow H^{n_1+1}(B; \pi_{n_1}(F)) \xrightarrow{p^*} H^{n_1+1}(E; \pi_{n_1}(F))$$

Seja  $\dot{\lambda}_F$  a classe fundamental de  $F$ . Definimos  $k_1 = \tau(\dot{\lambda}_F) \in H^{n_1+1}(B; \pi_{n_1}(F))$ . Escolhemos uma aplicação  $k_1 : B \rightarrow K(\pi_{n_1}(F), n_1 + 1)$ , única a menos de homotopia, que representa a classe  $\tau(\dot{\lambda}_F)$  por meio do isomorfismo

$$H^{n_1+1}(B; \pi_{n_1}(F)) \cong [B, K(\pi_{n_1}(F), n_1+1)].$$

Seja  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  a fibração principal classificada pela classe  $k_1$ , isto é,

$$E_1 = \{(b, \lambda) \in B \times PK(\pi_{n_1}(F), n_1+1) \mid k_1(b) = \lambda(1)\}.$$

Note que  $p^*(k_1) = p^*(\tau(\dot{\lambda}_F)) = 0$  pela exatidão da seqüência exata de Serre. Conseqüentemente, existe um levantamento  $q_1 : E \rightarrow E_1$  de  $p : E \rightarrow B$ .

Obtemos, assim, o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & K = K(\pi_{n_1}(F), n_1) & \hookrightarrow & E_1 \\
 & & & & \nearrow & & \nearrow \\
 & & & & s_1 = q_1|_F & & q_1 \\
 & & & & \nearrow & & \nearrow \\
 & & & & p & & p_1 \\
 F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & B & \xrightarrow{k_1} & K(\pi_{n_1}(F), n_1+1)
 \end{array}$$

Temos que ter cuidado em escolher o levantamento  $q_1$ , pois queremos que  $s_1 =$  restrição de  $q_1$  à fibra induza iso morfismo  $(s_1)_* : \pi_{n_1}(F) \rightarrow \pi_{n_1}(K)$ .

Consideremos então a seqüência exata de homotopia as sociada ao diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B \\
 s_1 \downarrow & & \downarrow q_1 & & \parallel \text{Id} \\
 K & \xrightarrow{\quad} & E_1 & \xrightarrow{p_1} & B
 \end{array}$$

onde  $q_1$  é qualquer levantamento de  $p : E \rightarrow B$ , e  $s_1$  sua restrição à fibra,

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & \pi_{n_1+1}(B) & \rightarrow & \pi_{n_1}(F) & \rightarrow & \pi_{n_1}(F) & \rightarrow & \pi_{n_1}(B) & \rightarrow \\
 & \text{Id} \downarrow & & \downarrow (s_1)_* & & \downarrow (q_1)_* & & \downarrow \text{Id} & \\
 \rightarrow & \pi_{n_1+1}(B) & \rightarrow & \pi_{n_1}(K) & \rightarrow & \pi_{n_1}(E_1) & \rightarrow & \pi_{n_1}(B) & \rightarrow
 \end{array}$$

concluimos então que  $(q_1)_*$  é isomorfismo, se e somente se  $(s_1)_*$  é um isomorfismo. Basta escolher  $q_1 : E \rightarrow E_1$  de tal modo que  $(s_1)^*(i_K) = i_F$  para que  $(s_1)_* : \pi_{n_1}(F) \rightarrow \pi_{n_1}(K)$  seja isomorfismo.

Por meio do isomorfismo entre  $H^{n_1}(F; \pi_{n_1}(F))$  e  $\text{Hom}(H_{n_1}(F; \mathbb{Z}), \pi_{n_1}(F))$ , sabemos que  $(s_1)^*(i_K)$  corresponde a composição:

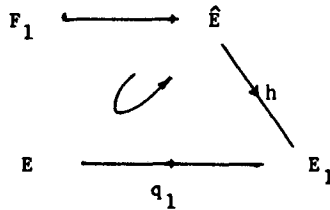
$$H_{n_1}(F; \mathbb{Z}) \xrightarrow{(s_1)_*} H_{n_1}(K; \mathbb{Z}) \xrightarrow{h^{-1}} \pi_{n_1}(K).$$

Conseqüentemente  $(s_1)^*(i_K) = i_F$  implica que  $h^{-1} \circ (s_1)_*$  é um isomorfismo. Isto é,  $(s_1)_*$  tem que ser um isomorfismo em homologia, e, portanto,  $(s_1)_* : \pi_{n_1}(F) \rightarrow \pi_{n_1}(K)$  tem que ser

um isomorfismo também.

Um levantamento  $q_1 : E \rightarrow E_1$  que induz um isomorfismo em  $\pi_{n_1}$  vai também induzir isomorfismo  $(q_1)_* : \pi_i(E) \rightarrow \pi_i(E_1)$  para todo  $0 \leq i \leq n_2 - 1$  e um epimorfismo em  $\pi_{n_2}$  pela seguinte razão:

Podemos converter  $q_1 : E \rightarrow E_1$  numa fibração de Hurewicz, isto é, temos os seguintes espaços e aplicações:



Seja  $F_1$  a fibra da projeção  $h : \hat{E} \rightarrow E_1$  onde a inclusão  $E \subset \hat{E}$  é uma equivalência de homotopia.

Sendo que  $(q_1)_* : \pi_{n_1}(E) \rightarrow \pi_{n_1}(E_1)$  é um isomorfismo, concluímos pela seqüência exata de homotopia para a fibração  $h$ , que  $E_1$  é  $(n_1 - 1)$ -conexo e  $\pi_i(F_1) \cong \pi_i(E)$  para  $i \geq n_2$ . Melhor ainda, use o diagrama comutativo de seqüências exatas de homotopia para o seguinte diagrama de fibrações verticais, observando que a primeira linha também é uma fibração.

$$\begin{array}{ccccc}
 F_1 & \xrightarrow{\quad} & F & \xrightarrow{s_1} & K \\
 \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow \\
 \hat{E} & \xrightarrow{\quad} & E & \xrightarrow{q_1} & E_1 \\
 \downarrow h & & \downarrow p & & \downarrow p_1 \\
 E_1 & \xrightarrow{p_1} & B & = & B
 \end{array}$$

Voltemos agora ao nosso objetivo, a escolha de  $q_1 : E \rightarrow E_1$  que induz um isomorfismo em  $\pi_{n_1}$ .

Consideremos outra vez o seguinte diagrama comutativo de fibrações onde  $q_1 : E \rightarrow E_1$  denota um levantamento qualquer de  $p : E \rightarrow B$  enquanto que  $s_1$  é a restrição de  $q_1$  à fibra  $F$ .

Temos as seguintes seqüências exatas de Serre:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & H^{n_1}(E; \pi_{n_1}(F)) & \xrightarrow{i^*} & H^{n_1}(F; \pi_{n_1}(F)) & \xrightarrow{\tau} & H^{n_1+1}(B; \pi_{n_1}(F)) & \xrightarrow{p^*} \\
 & \uparrow q_1^* & & \uparrow (s_1)^* & & \parallel & \\
 \rightarrow & H^{n_1}(E_1; \pi_{n_1}(F)) & \longrightarrow & H^{n_1}(K; \pi_{n_1}(F)) & \xrightarrow{\tau} & H^{n_1+1}(B; \pi_{n_1}(F)) & \xrightarrow{p^*}
 \end{array}$$

Por construção  $k_1 = \tau(i_F) \in H^{n_1+1}(B; \pi_{n_1}(F))$ . Afir-  
 mamos que  $\tau(i_K) = k_1$  onde  $\tau$  denota a transgressão para  
 a fibração  $K \subset E_1 \xrightarrow{p_1} B$ . Isto segue por naturalidade do  
 seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xlongequal{\quad} & K \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E_1 & \xrightarrow{\quad} & PK(\pi_{n_1}(F); n_1+1) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B & \xrightarrow[k_1]{} & K(\pi_{n_1}(F); n_1+1)
 \end{array}$$

Na fibração dos caminhos e laços sobre  $K(\pi_{n_1}(F); n_1+1)$ , sa-  
 bemos que  $\tau(i_K) = i_{K(\pi_{n_1}(F); n_1+1)}$ . Conseqüentemente,  
 $k_1 = k_1^*(i_{K(\pi_{n_1}(F); n_1+1)}) = \tau(i_K)$ .

Concluimos então que  $\tau(s_1^*(i_K)) = \tau(i_K) = k_1$ .

Pela seqüência exata de Serre existe uma classe  
 $\alpha \in H^{n_1}(E; \pi_{n_1}(F))$  tal que  $i^*(\alpha) = i_F - s_1^*(i_K)$ . Tomemos u-  
 ma aplicação  $\ell : E \rightarrow K$ , única a menos de homotopia tal que  
 $[\ell]$  corresponde à classe  $\alpha$  por meio do isomorfismo entre  
 $[E, K]$  e  $H^{n_1}(E; \pi_{n_1}(F))$ . Usaremos  $\ell$  para alterar o levanta-  
 mento  $q_1$  da seguinte maneira:

Definimos

$$\tilde{q}_1 = \text{mo}(\ell, q_1) \circ \Delta$$

$$\text{e } \tilde{s}_1 = \tilde{q}_1|_F = \text{mo}(\ell \circ i, s_1) \circ \Delta$$

utilizando o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 E & \xrightarrow{\Delta} & E \times E & \xrightarrow{(\ell, q_1)} & K \times E_1 & \xrightarrow{m} & E_1 \\
 \uparrow & & \cup & & \uparrow & & \cup \\
 F & \xrightarrow{\Delta} & F \times F & \xrightarrow{(\ell o i, s_1)} & K \times K & \xrightarrow{m} & K
 \end{array}
 \quad \text{inclus\~{a}o}$$

Segue-se que  $\tilde{q}_1$  é um levantamento de  $p$ . Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
 (\tilde{s}_1)^*(i_K) &= (s_1)^*(i_K) + (\ell o i)^*(i_K) = \\
 &= s_1^*(i_K) + i^*(\ell^*i_K) = s_1^*(i_K) + i^*\alpha = i_F,
 \end{aligned}$$

e concluindo portanto que  $\tilde{q}_1$  é o levantamento desejado. Já conseguimos realizar a construção do primeiro estágio da Torre de Postnikov para a fibração  $p : E \rightarrow B$ .

Por indução podemos provar a existência da Torre de Postnikov, repetindo basicamente o mesmo procedimento na construção do primeiro estágio da torre.

Supondo a existência do  $(j-1)$ -ésimo estágio, queremos definir o  $k$ -invariante  $k_j \in H^{j+1}(E_{j-1}; \pi_n(F))$  primeiro, em seguida definir a fibração principal  $p_j : E_j \rightarrow E_{j-1}$ , e depois escolher o levantamento  $q_j : E \rightarrow E_j$  de tal modo que as propriedades exigidas sejam satisfeitas. Sabemos por indu-



ção que a aplicação  $q_{j-1} : E \rightarrow E_{j-1}$  induz um isomorfismo  $(q_{j-1})_* : \pi_i(E) \rightarrow \pi_i(E_{j-1})$  para todo  $i \leq n_j - 1$  e um epimorfismo para  $i = n_j$ . Agora convertemos  $q_{j-1}$  numa fibração cuja fibra é, digamos, um espaço  $F_j$ . Temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 F_j & \xrightarrow{\quad} & \hat{E} \\
 & & \uparrow \text{J} \\
 & & E \\
 & & \xrightarrow{q_{j-1}} E_{j-1} \\
 & & \searrow g
 \end{array}$$

onde a inclusão  $E \subset \hat{E}$  é uma equivalência de homotopia. Conseqüentemente,  $F_j$  é  $(n_j - 1)$ -conexo e  $\pi_i(F_j) \simeq \pi_i(E)$  para  $i \geq n_j$ . Trocando  $\hat{E}$  e  $g$  por  $E$  e  $q_{j-1}$ , respectivamente, a seqüência exata de Serre para  $g : \hat{E} \rightarrow E_{j-1}$  produz a seguinte seqüência:

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow H^{n_j}(E; \pi_{n_j}(F_j)) \rightarrow H^{n_j}(F_j; \pi_{n_j}(F_j)) \xrightarrow{\tau} H^{n_j+1}(E_{j-1}; \pi_{n_j}(F_j)) \xrightarrow{(q_{j-1})_*} \\
 & \rightarrow H^{n_j+1}(E; \pi_{n_j}(F_j)) \rightarrow \dots
 \end{aligned}$$

Definimos  $k_j = \tau(\lambda_{F_j}) \in H^{n_j+1}(E_{j-1}; \pi_{n_j}(F_j))$ .

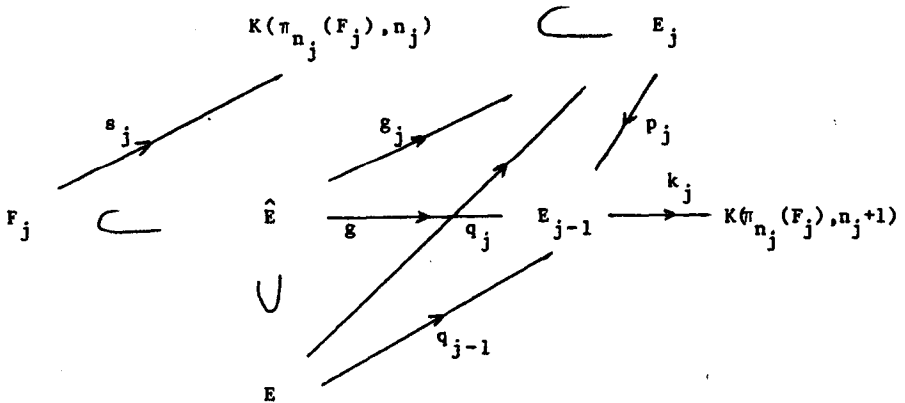
Representamos esta classe de cohomologia por uma aplicação  $k_j : E_{j-1} \rightarrow K(\pi_{n_j}(F_j), n_j + 1)$ , única a menos de homotopia.

Construimos  $p_j : E_j \rightarrow E_{j-1}$  sendo a fibração principal classificada pela aplicação  $k_j$ .

Notemos que

$$\begin{aligned} (q_{j-1})^*(k_j) &= (q_{j-1})^*(\tau(i_{F_j})) = \\ &= ((q_{j-1})^* \circ \tau)(i_{F_j}) = 0 \end{aligned}$$

Conseqüentemente existe um levantamento  $q_j : E \rightarrow E_j$  de  $q_{j-1} : E \rightarrow E_{j-1}$ . Consideremos o seguinte diagrama:



Aqui  $g_j : \hat{E} \rightarrow E_j$  é um levantamento de  $g : \hat{E} \rightarrow E_{j-1}$  enquanto  $s_j$  denota a restrição de  $g_j$  à fibra  $F_j$ . Queremos escolher um levantamento  $g_j$  de  $g : \hat{E} \rightarrow E_{j-1}$  tal que

$s_j$  induza um isomorfismo  $(s_j)_* : \pi_{n_j}(F_j) \rightarrow \pi_{n_j}(K(\pi_{n_j}(F_j), n_j))$ .

Pela mesma demonstração para  $j = 1$ , sempre conseguimos alterar  $g_j$ , se for necessário, de tal modo que

$(s_j)_*(i_K) = i_{F_j}$  onde  $K = K(\pi_{n_j}(F_j), n_j)$ .

Então concluímos que  $g_j$  e também  $q_j$  induzem isomorfismos em homotopia até  $\dim n_{j+1} - 1$  e induzem um epimorfismo em dimensão  $n_{j+1}$ . Portanto, a demonstração do teorema está completa.

### III.5. Exemplos

#### Exemplo 1

Podemos identificar a fibração de caminhos e laços sobre  $K(Z, 2) = CP^\infty$  com a fibração

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^\infty = \bigcup_{n \geq 0} S^{2n+1} \\ & & \downarrow \\ & & CP^\infty = \bigcup_{n \geq 0} CP^n \end{array}$$

Conseqüentemente, a restrição  $CP^n$  é uma fibração principal classificada pela inclusão  $CP^n \subset CP^\infty$ , isto é, a fibração de Hopf, é uma fibração principal classificada pela inclusão  $CP^n \subset CP^\infty$ .

Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{C}P^n$  uma aplicação qualquer de um complexo celular  $X$  a  $\mathbb{C}P^n$ . Concluímos que  $f$  possui um levantamento  $g : X \rightarrow S^{2n+1}$  se e somente se a composta  $X \xrightarrow{f} \mathbb{C}P^n \subset \mathbb{C}P^\infty$  é homotópica a uma aplicação constante se e somente se  $f^*(\beta) = 0$  em  $H^2(X; \mathbb{Z})$  onde  $\beta$  gera  $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$  se e somente se  $f^* : H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z})$  é trivial.

Em particular tomemos  $X = \mathbb{C}P^m$  para  $m > n$ . Concluímos que toda aplicação  $f : \mathbb{C}P^m \rightarrow \mathbb{C}P^n$  é trivial em cohomologia reduzida. Além disso, toda aplicação  $\mathbb{C}P^m \rightarrow S^1$  é homotópica a uma constante, pois  $H^1(\mathbb{C}P^m; \mathbb{Z}) = 0$ .

Conseqüentemente existe uma bijeção entre  $[\mathbb{C}P^m, S^{2n+1}]$  e  $[\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^n]$  para  $m > n$ .

### Exemplo 2

Seja  $X$  um complexo celular finito de dimensão  $\leq 2n$ . Seja  $\xi^m$  um fibrado vetorial orientável sobre  $X$  com  $m > 2n$ . O nosso objetivo é enumerar todos os fibrados vetoriais  $\eta^{2n}$  sobre  $X$  tais que  $\eta \oplus \mathbb{R}^{m-2n}$  é isomorfo a  $\xi^m$ .

Isto é, queremos classificar todos os fibrados vetoriais de dimensão  $2n$  sobre  $X$  que são estavelmente equivalentes.

Consideremos a fibração

$$\begin{array}{ccc} S^{2n} & \hookrightarrow & BSO(2n) \\ & & \downarrow \pi \\ & & BSO(2n+1) \end{array}$$

$BSO(t)$  é o espaço classificante para fibrados vetoriais orientados de dimensão  $t$  sobre complexos celulares. O primeiro estágio da Torre de Postnikov para  $\pi$  é dado pelo diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K(\mathbb{Z}, 2n) & \xrightarrow{j} & E \\
 & & \nearrow & & \downarrow p \\
 s = q \mid_{S^{2n}} & & & & \\
 & & & & \\
 S^{2n} \subset & BSO(2n) & \xrightarrow{\pi} & BSO(2n+1) & \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2n+1)
 \end{array}$$

Aqui  $\delta^* w_{2n}$  é a classe de Euler do fibrado classificante sobre  $BSO(2n+1)$ . Para todo complexo finito cuja dimensão é  $\leq 2n$ , obtemos uma bijeção  $q_* : [X, BSO(2n)] \rightarrow [X, E]$ .

Seja  $e \in H^{2n}(E; \mathbb{Z})$  a classe tal que  $q^*(e)$  é a classe de Euler do fibrado classificante sobre  $BSO(2n)$ . Note que  $j_* e = 2i_{2n}$  onde  $i_{2n}$  gera  $H^{2n}(K(\mathbb{Z}, 2n); \mathbb{Z})$ .

#### Teorema

Seja  $X$  um complexo celular finito de dimensão  $\leq 2n$  tal que  $H^{2n}(X; \mathbb{Z})$  não contém elementos de ordem 2. Então existe uma bijeção entre o conjunto de fibrados vetoriais de

dimensão  $2n$  estavelmente equivalentes a  $\xi^m$  e o conjunto das classes  $g^*(e) + 2H^{2n}(X;Z)$  onde  $g : X \rightarrow E$  é uma aplicação qualquer tal que  $po_g$  classifica  $\xi$ . Em outras palavras, as classes de Euler detectam as classes de isomorfismo de fibrados vetoriais de dimensão  $2n$  que são estavelmente equivalentes a  $\xi$ .

#### Demonstração

Por hipótese  $g : X \rightarrow E$  classifica algum fibrado vetorial de dimensão  $2n$  que é estavelmente equivalente a  $\xi$ . Qualquer outro levantamento de  $\xi : X \rightarrow BSO(2n+1)$  é obtido através de aplicações  $\ell : X \rightarrow K(Z, 2n)$ . Isto é, qualquer outro levantamento  $\hat{g}$  tem que ser da forma  $\hat{g} = m \circ (\ell, g) \circ \Delta$  para alguma aplicação  $\ell : X \rightarrow K(Z, 2n)$  única a menos de homotopia.

$$\begin{array}{c}
 X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{(\ell, g)} K(Z, 2n) \times E \xrightarrow{m} E \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hat{g}
 \end{array}$$

Note que  $m^*(e) = 2i_{2n} \otimes 1 + 1 \otimes e$ .

Conseqüentemente,

$$(\hat{g})^*(e) = \ell^*(2i_{2n}) + g^*(e) = g^*(e) + 2\ell^*(i_{2n}).$$

Quando  $\ell$  percorre todas as aplicações de  $X$  a  $K(Z, 2n)$ , a menos de homotopia, as classes de Euler percorrem todas as classes na classe lateral  $g^*(e) + 2H^{2n}(X; Z)$ , pois  $H^{2n}(X; Z)$  não tem classes de ordem 2 por hipótese. C.Q.D.