

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

BIFURCAÇÃO DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS

PLÁCIDO TÁBOAS

N^o 21

NOTAS DIDÁTICAS



Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

ISSN - 0103-2585

BIFURCAÇÃO DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS

PLÁCIDO TÁBOAS

Nº 21

NOTAS DIDÁTICAS DO ICMSC

**São Carlos
Mar. /1996**

BIFURCAÇÃO DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS

PLÁCIDO TÁBOAS

1. INTRODUÇÃO

Estas notas constituem o assunto de um “mini-curso” que integrou o Programa de Verão de 1996 do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco. Foram quatro aulas de noventa minutos com o objetivo de apresentar o Método de Redução de Liapunov-Schmidt e aplicações a problemas de oscilações não lineares. O método de Liapunov-Schmidt tem extensões e se aplica a uma classe muito ampla de problemas. Contudo, ao apresentá-lo aqui estritamente em sua substância pretendemos oferecer aos interessados as idéias básicas de um importante recurso da Análise Não Linear.

As aplicações que fazemos acompanhar têm tipicidade suficiente para servir de motivação ao método, porém, mais importante do que isso, são interessantes em si mesmas. Considere uma equação diferencial ordinária que possui um centro em torno do qual uma órbita Γ tem um certo período T (T -periódica). Perturbe essa equação diferencial com uma perturbação que depende periodicamente do tempo, com o mesmo período T . O que fazemos é estudar a existência e bifurcação de soluções T -periódicas da equação perturbada com órbitas próximas de Γ . O fato da perturbação ser não autônoma é que dá ao problema sua peculiaridade mais distintiva: a equação perturbada é um problema de outra natureza e a fase das soluções desempenha um papel preponderante em nossa abordagem. Sob esse enfoque é possível destacar que, quando a perturbação tende a zero, as soluções da equação perturbada exibem um comportamento inesperado. Esse fato é descrito com precisão nos Teoremas 3.5 e 3.11 em termos da fase das soluções.

Nossa intenção é prioritariamente didática. Assim, não descemos a todas as minúcias mas apresentamos mais, e mais detalhadas, demonstrações do que faríamos em um trabalho de pesquisa.

Na Seção 2 descrevemos o Método Alternativo que, restrito a certo contexto, nada mais é do que o Método de Liapunov-Schmidt.

Na Seção 3 fazemos as aplicações. São dois problemas análogos; o primeiro relacionado com os efeitos de uma força periódica e um amortecimento sobre um oscilador; o segundo com o clássico sistema

predador-presa de Lotka-Volterra periodicamente forçado. Em cada um deles uma discussão inicial mostra como transcrever o problema de equações diferenciais para um contexto de Análise adequado à aplicação do método. A discussão leva às equações de bifurcação e, finalmente, a uma descrição completa do diagrama local das bifurcações de soluções periódicas.

Finalmente, queremos agradecer aos colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, especialmente ao Professor Hildeberto E. Cabral, Coordenador do Programa de Verão, por nos concederem a oportunidade de participar de intensas e elevadas atividades científicas e por sua calorosa hospitalidade durante nossa grata estadia em Recife.

2. O MÉTODO ALTERNATIVO

Frequentemente problemas de Análise e suas aplicações se reduzem a uma equação em um espaço de Banach. Não existem procedimentos gerais para resolver essas equações, mas o chamado *Método Alternativo* é um método de redução empregado com sucesso em muitas situações. Na seção seguinte alguns problemas de oscilações não lineares serão tratados com o auxílio do Método Alternativo, por esta razão o apresentamos agora sucintamente com base no Capítulo 2 do livro de Chow e Hale [2].

Daqui em diante ficam estabelecidas as seguintes convenções: se X é um espaço de Banach, sempre que escrevermos X_P subentende-se que existe uma projeção contínua $P : X \rightarrow X$, cuja imagem $\mathcal{R}(P)$ é X_P , isto é, $X_P = P(X)$. Se A é um operador linear, denotamos seu núcleo com $\mathcal{N}(A)$. Indicaremos sempre com I o operador identidade em qualquer espaço de Banach, não especificando o seu domínio.

Sejam X e Z espaços de Banach, $A : X \rightarrow Z$ um operador linear contínuo e $N : X \rightarrow Z$ um operador contínuo. Com relação à equação em $x \in X$

$$(2.1) \quad Ax - Nx = 0$$

precisamos do seguinte lema:

Lema 2.1. *Suponhamos*

$$\mathcal{N}(A) = X_U, \quad \mathcal{R}(A) = Z_E,$$

então existe um operador linear limitado $K : Z_E \rightarrow X_{I-U}$, conhecido como inverso a direita de A , tal que $AK = I$ em Z_E , $KA = I - U$ em X e, denotando $x = y + z$, com $y \in X_U$ e $z \in X_{I-U}$, a equação (2.1) é

equivalente ao sistema

$$(2.2) \quad \begin{aligned} (a) \quad & z - KEN(y + z) = 0 \\ (b) \quad & (I - E)N(y + z) = 0. \end{aligned}$$

Prova. O operador A é um-a-um de X_{I-U} sobre Z_E , logo, a existência do inverso a direita $K : Z_E \rightarrow X_{I-U}$ satisfazendo $AK = I$ em Z_E , $KA = I - U$ em X é óbvia. O fato de K ser limitado é consequência das projeções U e Z serem contínuas e uma aplicação direta do Teorema do Gráfico Fechado (veja [1], Capítulo 16, por exemplo).

Tomando $x = y + z$, como na formulação do lema, temos $KAx = KAy + KAz = z$ e, decompondo a equação (2.1) pelas projeções suplementares $I - E$ e E , vê-se que ela é equivalente ao sistema

$$(2.3) \quad \begin{aligned} E(A - N)(y + z) &= 0 \\ (I - E)(A - N)(y + z) &= 0. \end{aligned}$$

Como $EA = A$, $KA(y + z) = z$ e o primeiro membro da primeira equação de (2.3) está em Z_E , onde K é um-a-um, chegamos a (2.2) depois de aplicarmos K a ambos os membros da primeira equação do sistema (2.3). \square

Nas circunstâncias do Lema 2.1 podemos focalizar nossa atenção no sistema (2.2) nas incógnitas $y \in X_U$ e $z \in X_{I-U}$. Se for possível resolver a primeira equação para z em função de y , $z = z^*(y)$, a equação (2.1) se reduz a

$$(2.4) \quad (I - E)N(y + z^*(y)) = 0.$$

Neste caso, (2.4) é chamada *equação de bifurcação* e seu primeiro membro, visto como função de y , é chamado *função de bifurcação*. Esse procedimento no tratamento da equação (2.1) é chamado *Método Alternativo no Núcleo de A*. O método não leva em geral a uma solução do problema mas, como a nova incógnita y pertence ao subspaço X_U de X , pode levar a uma drástica redução de dimensão. É nesse sentido que chamamos o Método Alternativo de um método de redução. Em particular, o método é especialmente adequado ao caso em que A é um operador de Fredholm, isto é, $\mathcal{N}(A)$ tem dimensão finita e $\mathcal{R}(A)$ tem co-dimensão finita.

Consideremos agora uma especialização importante da equação (2.1). Sejam X , Y e Λ espaços de Banach, $A : X \rightarrow Z$ um operador linear limitado e $N : X \times \Lambda \rightarrow Z$ um operador contínuo juntamente com sua derivada de Fréchet em X tal que

$$(2.5) \quad N(0, 0) = 0, \quad \partial N(0, 0)/\partial x = 0.$$

A equação (2.1) agora fica

$$(2.6) \quad Ax - N(x, \lambda) = 0.$$

Considerando a equação (2.6) para (x, λ) numa vizinhança de $(0, 0)$ e mantendo as notações anteriores, se $x = y + z$, com $y \in X_U$ e $z \in X_{I-U}$, o Lema 2.1 implica que a equação (2.6) é equivalente ao sistema:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} (a) \quad & z - KEN(y + z, \lambda) = 0 \\ (b) \quad & (I - E)N(y + z, \lambda) = 0 \end{aligned}$$

O Teorema das Funções Implícitas aplicado à equação (2.7)(a) garante a existência de uma vizinhança V de $(0, 0)$ em $X_U \times \Lambda$ e uma função $z^* : V \rightarrow X_U$, $z^*(y, \lambda)$ contínua juntamente com sua derivada de Fréchet em y , $z^*(0, 0) = 0$, de modo que $z^*(y, \lambda)$ satisfaz a equação (2.7)(a):

$$z^*(y, \lambda) - KEN(y + z^*(y, \lambda), \lambda) = 0,$$

$z^*(y, \lambda)$ é a única solução da equação (2.7)(a) numa vizinhança de $z = 0$ em X_{I-U} , para $(y, \lambda) \in V$. A função $z^*(y, \lambda)$ tem a mesma classe de diferenciabilidade da de $N(x, \lambda)$ numa vizinhança de $(x, \lambda) = 0$. Desta forma, substituindo $z = z^*(y, \lambda)$ na equação (2.7)(b), a equação (2.6) fica reduzida à equação de bifurcação

$$(2.8) \quad (I - E)N(y + z^*(y, \lambda), \lambda) = 0$$

nas incógnitas $(y, \lambda) \in V$.

Nas condições particulares da equação (2.6), o Método Alternativo no Núcleo de A é conhecido por *Método de Liapunov-Schmidt*.

O leitor encontrará extensões do Método Alternativo, bem como aplicações e indicações bibliográficas em [2] e [5].

3. BIFURCAÇÃO NA VIZINHANÇA DE UMA FAMÍLIA DE SOLUÇÕES

Nas aplicações que se seguem o operador A considerado em (2.1) é fornecido por uma equação linear variacional de uma equação diferencial ordinária em torno de uma órbita periódica, isto é, uma equação da forma (3.1). A é definido num domínio do espaço $Y = \mathcal{P}_T$ das funções contínuas e T -periódicas em $(-\infty, \infty)$ com a norma do supremo. Um problema crucial é caracterizar a imagem $\mathcal{R}(A)$ de A para depois escrevê-la na forma Y_P . Por essa razão recordamos agora alguns fatos da Teoria Geral das equações diferenciais ordinárias segundo o capítulo IV de [5]. O Lema 3.1 (Alternativa de Fredholm) é que resolve o problema de caracterizar $\mathcal{R}(A)$. A prova aqui apresentada por questão de auto-suficiência está no Capítulo IV de [5].

Consideremos a equação linear homogênea

$$(3.1) \quad \dot{x} = B(t)x$$

onde B é uma matriz $n \times n$ contínua e T -periódica em $(-\infty, \infty)$. Denotemos com $X(t; \tau)$ a matriz fundamental de (3.1) tal que $X(\tau; \tau) = I$.

A equação adjunta de (3.1) é

$$(3.2) \quad \dot{y} = -yB(t).$$

Recordemos que se $X(t)$ é uma matriz fundamental de (3.1), então $X^{-1}(t)$ é matriz fundamental de (3.2). Fixemos $X(t) = X(t; 0)$ (matriz principal). Como B é T -periódica, uma condição necessária e suficiente para que uma solução y de (3.2) seja T -periódica é que $y(0) = y(T)$, e esta condição por seu turno é equivalente a $y(0)[X^{-1}(T) - I] = 0$. Assim, (3.2) tem uma solução T -periódica não trivial se e somente se $X^{-1}(T) - I$ é singular. Uma solução x da equação (3.1) é T -periódica se e somente se $[X(T) - I]x(0) = 0$. Como, a menos de multiplicação por uma matriz não singular, as matrizes $X^{-1}(T) - I$ e $X(T) - I$ são a mesma, decorre que os núcleos de $X^{-1}(T) - I$ e $X(T) - I$ têm a mesma dimensão. Isto é, os espaços das soluções T -periódicas de (3.1) e de sua adjunta (3.2) têm a mesma dimensão.

Lema 3.1. *Se B é uma matriz $n \times n$ contínua e T -periódica em \mathbb{R} e se $f \in \mathcal{P}_T$, então a equação*

$$(3.3) \quad \dot{x} = B(t)x + f(t)$$

tem uma solução T -periódica se e somente se

$$(3.4) \quad \int_0^T y(t)f(t) dt = 0,$$

para toda solução y da equação adjunta (3.2) tal que $y^t \in \mathcal{P}_T$ (y^t é a transposta de y). Se vale (3.4), o sistema (3.3) tem uma família a r -parâmetros de soluções em \mathcal{P}_T , onde r é a dimensão do espaço das soluções de (3.1) pertencentes a \mathcal{P}_T .

Prova. Uma solução $x(t)$ de (3.3) é T -periódica de, e somente se, $x(0) = x(T)$. Fazendo $x(0) = x_0$, a fórmula da variação das constantes dá

$$(3.5) \quad x(t) = X(t; 0)x_0 + \int_0^t X(t; s)f(s) ds.$$

Lembrando que $X(t; \tau)X(\tau; s) = X(t; s)$, $t, \tau, s \in \mathbb{R}$, a condição $x(T) = x_0$ é equivalente a

$$(3.6) \quad [X^{-1}(T; 0) - I]x_0 = \int_0^T X^{-1}(s; 0)f(s) ds.$$

Considerando, para simplificar, a matriz $D \stackrel{\text{def}}{=} X^{-1}(T; 0) - I$ e o vetor $b \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T X^{-1}(s; 0)f(s) ds$, a equação (3.6) fica $Dx_0 = b$. Esta equação tem uma solução x_0 se e somente se b pertence à imagem $\mathcal{R}(D)$ da aplicação linear definida por D , o que equivale a b pertencer ao espaço gerado pelas colunas, b_1, b_2, \dots, b_n , de D . Mas isto por seu turno é equivalente a $ab = 0$ para todo vetor-linha a tal que $aB = 0$ (ou seja, $a^t \perp b$ para todo a tal que $a^t \in [b_1, b_2, \dots, b_n]^\perp$). Como $X^{-1}(t; 0)$ é matriz principal de (3.2), o conjunto dos a 's tais que $aB = 0$ coincide com o conjunto dos valores iniciais das soluções T -periódicas de (3.2). Assim, (3.6) é equivalente a $ab = 0$, para todo a tal que $y(t) = aX^{-1}(t; 0)$ é solução T -periódica de (3.2). Retomando a definição de b , isto pode ser parafraseado nos seguintes termos: a condição (3.6) é equivalente a $\int_0^T aX^{-1}(s; 0)f(s) ds = 0$, para toda a solução T -periódica $y(t) = aX^{-1}(t; 0)$ de (3.2), o que encerra a prova da primeira parte do lema.

Para finalizar, suponhamos que (3.4) esteja satisfeita e que $\phi(t)$ seja uma particular solução T -periódica de (3.1). Então, a solução T -periódica geral de (3.3) é dada por $x = z + \phi$, onde z percorre o espaço das soluções T -periódicas de (3.1). \square

Se $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 , recordemos que uma *primeira integral* de

$$(3.7) \quad \dot{x} = h(x)$$

é uma função $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$\text{grad } u(x) \cdot h(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

significando que $du(x(t))/dt = 0$ ao longo das soluções $x(t)$ de (3.7), ou seja, as órbitas de (3.7) permanecem sempre em alguma superfície de nível de u .

Denotando com $x(t; x_0)$ a solução de (3.7) tal que $x(0; x_0) = x_0$, recordemos ainda que $V(t; x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \partial x(t; x_0)/\partial x_0$ é a matriz principal da equação variacional em torno de $x(t; x_0)$:

$$(3.8) \quad \dot{x} = Hx, \quad (H \stackrel{\text{def}}{=} dh(x(t; x_0))/dx).$$

O uso da Alternativa de Fredholm nas aplicações pode depender do lema abaixo, formulado como um caso especial do Lema 2.5 do Cap. VIII de [5].

Lema 3.2. *Se u é uma primeira integral de classe C^2 de (3.7), então $\nabla u \stackrel{\text{def}}{=} \text{grad } u(x(t; x_0))$ é uma solução da equação adjunta de (3.8):*

$$(3.9) \quad \dot{w} = -wH.$$

Prova. Como $u(x(t; x_0)) = u(x_0)$, para todo t e todo x_0 , derivando essa relação com respeito a x_0 obtemos: $\text{grad } u(x(t; x_0))V(t; x_0) = \text{grad } u(x_0)$, para todo t . Derivando esta relação com respeito a t , vem

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\nabla}uV(t; x_0) + \nabla u\dot{V}(t; x_0) \\ &= \dot{\nabla}uV(t; x_0) + \nabla uHV(t; x_0) \\ &= [\dot{\nabla}u + \nabla uH]V(t; x_0) \end{aligned}$$

e, como $V(t; x_0)$ é uma matriz não singular, a prova está encerrada. \square

Faremos agora duas aplicações do Método de Liapunov-Schmidt a problemas de equações diferenciais ordinárias. Vamos estudar a existência e bifurcações de soluções periódicas de certas equações. Usualmente, como se vê na seção 2, o método reduz uma equação em um espaço de Banach a um sistema de equações onde as incógnitas são as coordenadas da componente da solução no núcleo de um operador linear. Uma peculiaridade dos problemas tratados a seguir é que o papel da incógnita é desempenhado pela fase da solução periódica.

3.1. Interação de força periódica e termo dissipativo em um oscilador não linear. Apresentamos aqui um problema de oscilações não lineares tratado em [6]. Dada uma solução 2π -periódica de um oscilador, trata-se de saber se em sua proximidade existem soluções 2π -periódicas sob o efeito de um pequeno amortecimento e um pequeno termo forçante 2π -periódico. Neste caso o problema pode ser formulado no contexto da seção anterior, com os operadores A e N definidos apropriadamente em certos espaços de Banach. Entretanto, uma escolha não usual da inversa a direita de A será feita com o objetivo de utilizar a fase como parâmetro.

Consideremos a equação do oscilador

$$(3.10) \quad \ddot{x} + g(x) = 0$$

com $xg(x) > 0$, se $x \neq 0$, sendo g uma função (força restauradora) suficientemente suave de modo a garantir a continuidade das derivadas que virão a seguir. É sabido que a origem do plano (x, \dot{x}) é um centro; toda órbita não nula é periódica, circunda a origem, tem uma amplitude $\rho > 0$ e um período $2\pi/\omega(\rho)$ (definimos ρ pela propriedade de tal órbita passar pelo ponto $(\rho, 0)$, $\rho > 0$). Suponhamos que exista uma solução $p(t)$ de (3.10) de período 2π , uma vez que uma mudança na escala do tempo mostra não haver perda de generalidade nisso, e indiquemos com $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ sua órbita no plano (x, \dot{x}) , $\Gamma = \{(p(t), \dot{p}(t)) \mid 0 \leq t < 2\pi\}$.

Seja f uma função contínua 2π -periódica e consideremos a seguinte perturbação de (3.10):

$$(3.11) \quad \ddot{x} + g(x) = -\lambda\dot{x} + \mu f(t),$$

onde λ, μ parâmetros reais. O problema de que vamos tratar é o seguinte:

Para uma vizinhança W suficientemente pequena de Γ , existem soluções 2π -periódicas de (3.11), com órbita em W ? Como varia a quantidade dessas soluções quando (λ, μ) percorre uma vizinhança de $(0, 0)$ no plano (λ, μ) ?

Existe uma função $\phi : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $\phi(\theta + 2\pi, \rho) = \phi(\theta, \rho)$, para $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, de modo que a solução geral da equação (3.10) é representada por $x(t) = \phi(\omega(\rho)(t + \alpha), \rho)$, onde α é um parâmetro real, $\rho > 0$ sua amplitude e $\omega(\rho)$ sua frequência. De fato, seja $x(t; \rho)$ a solução de (3.10) de amplitude $\rho > 0$ tal que $x(0; \rho) = \rho$ e $\dot{x}(0; \rho) = 0$. Denotando com $T(\rho)$ o seu período, coloquemos $\phi(\theta, \rho) \stackrel{\text{def}}{=} x(\theta T/2\pi; \rho)$. Assim, definindo a frequência por $\omega(\rho) = 2\pi/T$, fica verificada a nossa afirmação.

A solução 2π -periódica acima fixada tem uma amplitude ρ_0 tal que $\omega(\rho_0) = 1$ e a definimos por $p(t) = \phi(t, \rho_0)$.

Uma hipótese básica é a seguinte:

$$(H1) \quad \omega'(\rho_0) \neq 0.$$

Note que a hipótese (H1) exclui o oscilador linear, mas a despeito de sua generalidade, esse não é o único caso excluído, isto é, existem forças restauradoras não lineares g dando origem a soluções de (3.10) de período constante. Para interpretar o termo contendo a derivada primeira \dot{x} como um termo dissipativo é preciso considerar $\lambda > 0$; entretanto, permitiremos que λ varie numa vizinhança de 0.

Em alguns pontos da discussão que se segue é útil encarar a equação (3.11) como o sistema bi-dimensional equivalente

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x) - \lambda y + \mu f(t) \end{aligned}$$

e a equação (3.10) como o sistema:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x) \end{aligned}$$

Denotemos com $P^\perp(t)$ o vetor normal a Γ em $P(t) = (p(t), \dot{p}(t))$ dado por $P^\perp(t) = (\dot{p}(t), -p(t))$, $0 \leq t < 2\pi$. Podemos escolher W suficientemente pequena de modo que os pontos $x \in W$ sejam representados por coordenadas $(\tau, \sigma) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ definidas por

$$x = P(\tau) + \sigma P^\perp(\tau).$$

Para cada solução 2π -periódica de (3.11) que permanece em W fica univocamente associado um número α , $0 \leq \alpha < 2\pi$, de modo que $x(\alpha) = P(0) + \sigma P^\perp(0)$, isto é, $x(\alpha)$ tem coordenadas $(\tau, \sigma) = (0, \sigma)$. O número α é, pois, entendido como a fase de $x(t)$ e essa solução pode ser representada por

$$x(t) = p(t - \alpha) + z(t - \alpha), \quad Z(0) \cdot \dot{P}(0) = 0,$$

onde $Z(t) = (z(t), \dot{z}(t))$. Desta forma a condição $Z(0) \cdot \dot{P}(0) = 0$ significa $\dot{z}(0) = 0$. Como existe uma correspondência biunívoca entre as soluções $x(t)$ de (3.11) e as soluções $x(t + \alpha)$ de

$$(3.14) \quad \ddot{x} + g(x) = -\lambda \dot{x} + \mu f(t + \alpha)$$

nosso problema fica transformado em encontrar soluções $x(t)$ de (3.14) da forma

$$(3.15) \quad x(t) = p(t) + z(t), \quad Z(0) \cdot \dot{P}(0) = 0$$

com $|Z(t)|$ pequeno. Substituindo (3.15) na equação (3.14), o problema fica finalmente reduzido a encontrar soluções $z(t)$ de

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \ddot{z} + g'(p(t))z &= -\lambda \dot{p}(t) - \lambda \dot{z} + \mu f(t + \alpha) + G(t, z), \\ Z(0) \cdot \dot{P}(0) &= 0 \end{aligned}$$

com $|Z(t)|$ pequeno, onde $G(t, z)$ é uma função contínua, periódica em t para cada z fixado, satisfazendo $G(t, z) = O(|z|^2)$, quando $z \rightarrow 0$, uniformemente em t .

Notemos que a hipótese (H1) implica que $\dot{p}(t)$ gera o espaço das soluções 2π -periódicas da equação linear variacional de (3.10) em torno de $p(t)$:

$$(3.17) \quad \ddot{v} + g'(p(t))v = 0$$

De fato, substituindo $p(t)$ em (3.10) e derivando a equação com respeito a t vê-se que $\dot{p}(t)$ é realmente uma solução periódica de (3.17). Utilizando agora a função $\phi(\theta, \rho)$ para representar as soluções de (3.10), substituindo $\phi(\omega(\rho)t, \rho)$ em (3.10) e derivando a equação com respeito a ρ no ponto ρ_0 , vê-se que também $[\partial\phi(\omega(\rho)t, \rho)/\partial\rho]_{\rho=\rho_0}$ é uma solução

de (3.17). Mas,

$$\left[\frac{\partial \phi(\omega(\rho)t, \rho)}{\partial \rho} \right]_{\rho=\rho_0} = \phi_\theta(t, \rho_0)\omega'(\rho_0)t + \phi_\rho(t, \rho_0)$$

e, de acordo com a hipótese (H1), esta solução não é limitada sendo, portanto, linearmente independente com $\dot{p}(t)$.

Decorre da Alternativa de Fredholm que, se φ é uma função contínua 2π -periódica, a equação não homogênea associada a (3.17)

$$(3.18) \quad \ddot{v} + g'(p(t))v = \varphi(t)$$

tem uma solução 2π -periódica se e somente se $\int_0^{2\pi} \varphi(t)u(t) dt = 0$, para toda solução 2π -periódica da equação adjunta de (3.17). Mas como (3.17) é auto-adjunta esta condição é equivalente a

$$(3.19) \quad \int_0^{2\pi} \varphi(t)\dot{p}(t) dt = 0.$$

Consideremos os espaços de Banach $Z = \mathcal{P}_{2\pi}$ das funções contínuas 2π -periódicas com a norma do supremo e $X = \mathcal{P}_{2\pi}^{(2)}$, seu subspaço algébrico das funções $\varphi \in Z$ de classe C^2 , munido de uma norma C^2 , e definamos o operador linear contínuo $A : X \rightarrow Z$ e o operador contínuo $N : X \times \mathbb{R}^3 \rightarrow Z$ por

$$(3.20) \quad \begin{aligned} Az &= \ddot{z} + g'(p(\cdot))z \\ N(z, \lambda, \mu, \alpha) &= -\lambda\dot{p}(\cdot) - \lambda\dot{z} + \mu f(\cdot + \alpha) + G(\cdot, z) \end{aligned}$$

para todo $(z, \lambda, \mu, \alpha) \in X \times \mathbb{R}^3$. Como \dot{p} gera as soluções 2π -periódicas de (3.17) temos $\mathcal{N}(A) = [\dot{p}] \subset X$ e, de acordo com a condição (3.19), $Z = \mathcal{R}(A) \oplus [\dot{p}]$. Ou seja, A é um operador de Fredholm.

Tomando $\nu^{-1} = \int_0^{2\pi} [\dot{p}(t)]^2 dt$, definamos as projeções $Q : Z \rightarrow Z$ e $P : X \rightarrow X$ da seguinte forma:

$$(3.21) \quad \begin{aligned} Q\varphi &= \nu \left[\int_0^{2\pi} \dot{p}(t)\varphi(t) dt \right] \dot{p}, \quad \varphi \in Z, \\ P\varphi &= |\ddot{p}(0)|^{-2} \ddot{p}(0)\dot{\varphi}(0)\dot{p}, \quad \varphi \in X. \end{aligned}$$

Agora podemos formular o problema (3.16) do seguinte modo:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} Az &= N(z, \lambda, \mu, \alpha), \\ Pz &= 0. \end{aligned}$$

Observando que $X_Q = X_P = \mathcal{N}(A)$ e que a Alternativa de Fredholm, mais precisamente, a condição (3.19) implica $\mathcal{R}(A) = Z_{I-Q}$, estamos em condições de aplicar o Método de Liapunov-Schmidt à primeira equação de (3.22) com $I - Q$ no papel da projeção E da seção anterior

e Q no papel da projeção U . Assim, decompondo a primeira equação de (3.22) pelas projeções Q e $I - Q$, obtemos:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} (I - Q)Az &= (I - Q)N(z, \lambda, \mu, \alpha), \\ QAz &= QN(z, \lambda, \mu, \alpha), \\ Pz &= 0. \end{aligned}$$

Definimos, entretanto, a inversa a direita de A , utilizando a projeção P em vez de Q , isto é, notando que A é um-a-um de X_{I-P} sobre Z_{I-Q} , os argumentos do lema 2.1 mostram que existe um operador linear contínuo $K : Z_{I-Q} \rightarrow X_{I-P}$ de modo que $AK = I$ em Z_{I-Q} e $KA = I - P$ em X . Como K é um-a-um em Z_{I-Q} , podemos aplicar K a ambos os membros da primeira equação de (3.23) obtendo

$$(3.24) \quad \begin{aligned} z - Pz &= K(I - Q)N(z, \lambda, \mu, \alpha), \\ 0 &= QN(z, \lambda, \mu, \alpha), \\ Pz &= 0, \end{aligned}$$

que, por sua vez, é equivalente ao sistema

$$(3.25) \quad \begin{aligned} z &= K(I - Q)N(z, \lambda, \mu, \alpha), \\ 0 &= QN(z, \lambda, \mu, \alpha), \end{aligned}$$

pois qualquer solução z^* do sistema (3.25) necessariamente satisfaz a condição $Pz^* = 0$.

Notemos ainda que

$$N(0, 0, 0, \alpha) = 0, \quad \partial N(0, 0, 0, \alpha)/\partial z = 0, \quad \text{para todo } \alpha \in [0, 2\pi),$$

portanto, de acordo com o Teorema das Funções Implícitas, para cada $\alpha_0 \in [0, 2\pi)$, existem vizinhanças V_{α_0} de α_0 , V de (λ, μ) , U de 0 em X e uma função $z^* : V_{\alpha_0} \times V \rightarrow U$ de modo que $z^*(\alpha, \lambda, \mu)$ satisfaz a primeira equação de (3.25). Identificando o intervalo $[0, 2\pi)$ com S^1 , isto é, considerando $[0, 2\pi)$ como o espaço quociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, um argumento de compacidade permite estender z^* a $[0, 2\pi) \times V$ após um número finito de aplicações do Teorema das Funções Implícitas, diminuindo V se necessário. Desta forma, dada a periodicidade em α , o sistema (3.25) fica reduzido à única equação:

$$QN(z^*(\alpha, \lambda, \mu), \lambda, \mu, \alpha) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Isto significa que a equação (3.11) terá uma solução 2π -periódica próxima à solução $p(t - \alpha)$ de (3.10) se e somente se (α, λ, μ) satisfaz a equação de bifurcação:

$$(3.26) \quad \nu \int_0^{2\pi} \dot{p}[-\lambda z^*(\alpha, \lambda, \mu) - \lambda \dot{p} + \mu f(\cdot + \alpha) + G(\cdot, z^*(\alpha, \lambda, \mu))] = 0.$$

O primeiro membro da equação (3.26) define a função de bifurcação $F(\alpha, \lambda, \mu)$, de modo que $F(\alpha, 0, 0) = 0$ e, expandindo F , a equação de bifurcação finalmente assume a forma:

$$(3.27) \quad F(\alpha, \lambda, \mu) = -\lambda + h(\alpha)\mu + \text{t.o.s.} = 0$$

onde t.o.s indica termos de ordem superior em (λ, μ) e a função h é dada por

$$(3.28) \quad h(\alpha) = \int_0^{2\pi} \dot{p}(t)f(t + \alpha) dt.$$

Neste ponto, por uma análise heurística, já é possível prever como será aproximadamente o diagrama de bifurcação, no plano (λ, μ) , das soluções de (3.11) com órbita em W . De fato, a parte dominante da equação (3.27) para $|\lambda|, |\mu|$ pequenos, obtida desprezando-se os termos de ordem superior em (λ, μ) , é

$$(3.29) \quad (\lambda, \mu) \cdot (-1, h(\alpha)) = 0$$

onde “ \cdot ” indica o produto escalar usual. Façamos algumas hipóteses simplificadoras sobre a função h que serão também assumidas no teorema que estabelecemos a seguir:

(H2) A função 2π -periódica h é de classe C^2 e $h'(\alpha) \neq 0$ em $[0, 2\pi)$, exceto para um número finito de pontos $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N$, para os quais $h''(\alpha_j) \neq 0, j = 1, 2, \dots, N$.

(H3) Se $1 \leq j, k \leq N$, com $j \neq k$, então $h(\alpha_j) \neq h(\alpha_k)$

Valendo (H2) e (H3), sejam α_m e α_M os pontos de $[0, 2\pi)$ definidos por

$$(3.30) \quad h(\alpha_m) = \min h(\alpha), \quad h(\alpha_M) = \max h(\alpha),$$

ou seja, $(-1, h(\alpha))$ percorre o segmento $[(-1, h(\alpha_m)), (-1, h(\alpha_M))]$ quando α varia no intervalo $[0, 2\pi)$ e, de acordo com a Figura 1, existem soluções (α, λ, μ) da equação (3.29), com $\alpha \in [0, 2\pi)$, se e somente se (λ, μ) está num dos setores onde (λ, μ) é ortogonal a algum $(-1, h(\alpha))$. Neste caso, o número de soluções 2π -periódicas de (3.11), com órbita em W e fase $0 \leq \alpha < 2\pi$, é o número de valores de α em $[0, 2\pi)$ tais que vale a condição de ortogonalidade (3.29). A parte direita da Figura 1 mostra como é qualitativamente o diagrama de bifurcação quando $h(\alpha)$ tem a forma indicada na parte esquerda. Os números entre parênteses indicam o número de soluções no respectivo setor. Quando (λ, μ) cruza a fronteira de um desses setores, o número de soluções varia de dois.

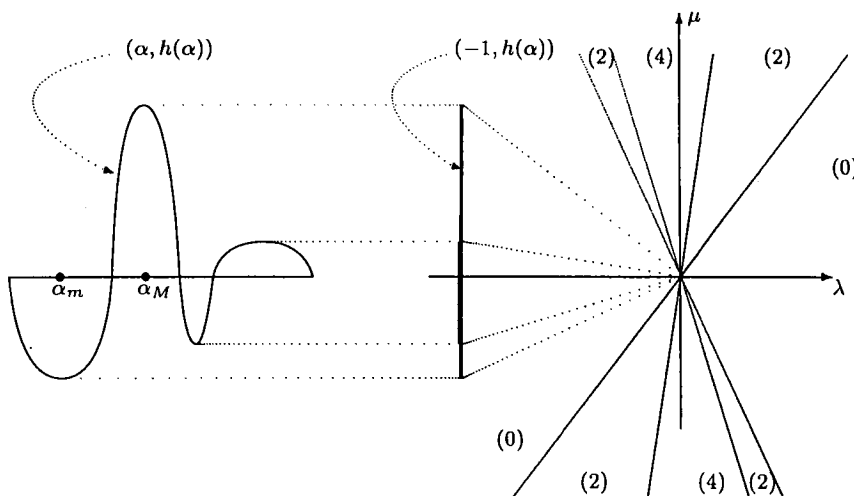


FIGURA 1. Diagrama de Bifurcação

Há ainda o interesse em saber como se comportam as soluções 2π -periódicas de (3.11) quando (λ, μ) tende a $(0, 0)$. Aproximar-se-iam de alguma solução de (3.10), $p(t + \alpha_0)$, com $\alpha_0 \in [0, 2\pi)$ fixo? Na verdade, dependendo da forma como (λ, μ) tende a $(0, 0)$ o comportamento dessas soluções é, como já dissemos, de algum modo inesperado.

Conclusões mais precisas são dadas nos teoremas 3.3 e 3.5. O primeiro estabelece que o diagrama local de bifurcação numa vizinhança de $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ é uma perturbação, ou seja, uma pequena deformação contínua, do diagrama apresentado na Figura 1. O segundo estabelece que se $(\lambda, \mu) \rightarrow (0, 0)$, com os parâmetros $(\lambda, \mu) \in S$ variando independentemente, as correspondentes soluções 2π -periódicas de (3.11) não permanecem em geral próximas de uma particular solução $p(t + \alpha_0)$, mas de uma família de soluções $p(t + \alpha)$ indexada em α . Com a finalidade de facilitar a formulação do Teorema 3.3, lembramos que α_m, α_M são dados por (3.30). Mantemos as demais notações e, para cada $\alpha \in [0, 2\pi)$, denotamos com r_α a reta do plano (λ, μ) :

$$r_\alpha : (\lambda, \mu) \cdot (-1, h(\alpha)) = 0$$

Como todas as funções são 2π -periódicas em α , daqui em diante consideraremos α variando no intervalo $[0, 2\pi)$ com a topologia da identificação com S^1 , ou seja $[0, T) = \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$.

Teorema 3.3. *Suponhamos que as hipóteses (H1)–(H3) estejam satisfeitas. Então existem vizinhanças W de Γ , V de $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ e curvas $\mathcal{C}_j \subset V$, tangentes na origem às retas r_{α_j} , $j = 1, 2, \dots, N$, $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k =$*

$(0, 0)$, se $j \neq k$, $1 \leq j, k \leq N$, de modo que o número de soluções 2π -periódicas de (3.11) com órbita em W e fase $\alpha \in [0, 2\pi)$ varia de dois quando $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ cruza uma dessas curvas. Mais ainda, se C_m e C_M são as curvas tangentes às retas r_{α_m} e r_{α_M} , respectivamente, elas dividem V em regiões "cônicas", S e S^c (isto é, as fronteiras de S e S^c em V coincidem com $C_m \cup C_M$), sendo S fechada em V e $S^c = V \setminus S$. Se $(\lambda, \mu) \in S^c$ não existem soluções 2π -periódicas de (3.11) com órbita em W e existem pelo menos duas se $(\lambda, \mu) \in S \setminus (C_m \cup C_M)$. Finalmente, tais soluções são duas a duas distintas se $(\lambda, \mu) \notin C_j$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Observação 3.4. O conjunto $S \subset V$ pode ser caracterizado como o fechado em V tal que $\partial S = C_m \cup C_M$ gosando da seguinte propriedade: se $h(\alpha_m) < h(\alpha) < h(\alpha_M)$, então a componente conexa de $r_\alpha \cap S$ contendo $(0, 0)$ é um segmento fechado contendo $(0, 0)$ no seu interior.

Prova. De acordo com a discussão precedente, devemos analisar a equação de bifurcação (3.27) que agora escrevemos na forma

$$(3.31) \quad (\lambda, \mu) \cdot (-1, h(\alpha)) + R(\alpha, \lambda, \mu) = 0,$$

com $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in [0, 2\pi)$. Para $(\lambda, \mu) \neq 0$, seja $(\lambda, \mu) = ru$, onde u é um vetor unitário e $r = |(\lambda, \mu)| > 0$. Portanto, definindo $v(\alpha) = (-1, h(\alpha))$, (3.31) é equivalente a

$$(3.32) \quad F(r, u, \alpha) = v(\alpha) \cdot u + V(r, u, \alpha) = 0$$

onde $V(r, u, \alpha) = (1/r)R(\alpha, ru)$. Assim, como $V(0, u, \alpha) = 0$, as únicas soluções de (3.32) para $r = 0$ são aquelas $(0, u_0, \alpha_0)$ tais que u_0 e $v(\alpha_0)$ são ortogonais.

Para cada $\alpha_0 \in [0, 2\pi)$, escolhamos u_0 ortogonal a $v(\alpha_0)$ e estudemos a equação (3.32) para $(r, u, \alpha) \in \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{R}$, com $|\alpha - \alpha_0|$, $|u - u_0|$ e $|r|$ pequenos. Para isso definamos a função F , dada em (3.32), para $r < 0$ de modo a estendê-la a uma vizinhança completa do ponto $(0, u_0, \alpha_0)$ em $\mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{R}$, pondo $V(r, u, \alpha) = -(1/r)R(-ru, \alpha)$, quando $r < 0$ e $|r|$, $|u - u_0|$, $|\alpha - \alpha_0| < \delta_0$, para alguma constante $\delta_0 > 0$.

Há dois casos a serem analisados.

Primeiro, $h'(\alpha_0) \neq 0$. Neste caso $\partial F(0, u_0, \alpha_0)/\partial \alpha = v'(\alpha_0) \cdot u_0 \neq 0$ e uma aplicação do Teorema das Funções Implícitas mostra que existe um número positivo $\bar{\delta}$ de modo que, para cada $(r, u) \in \mathbb{R} \times S^1$, com $0 \leq r$, $|u - u_0| < \bar{\delta}$, existe $\alpha^*(r, u) \in \mathbb{R}$, sendo α^* uma função de classe C^1 tal que $F(r, u, \alpha^*(r, u)) = 0$. Mais ainda, $(r, u, \alpha^*(r, u))$ é a única solução de (3.32) numa conveniente vizinhança de $(0, u_0, \alpha_0)$. Desta forma, não há bifurcação de soluções de (3.32) próximas de $(0, u_0, \alpha_0)$.

Segundo, $h'(\alpha_0) = 0$. Neste caso $v'(\alpha_0) = 0$ e o Teorema das Funções Implícitas não se aplica exatamente nos moldes do caso anterior. Mas, de acordo com a hipótese (H2), $h''(\alpha_0) \neq 0$ e, portanto, $\partial^2 F(0, u_0, \alpha_0)/\partial \alpha^2 = v''(\alpha_0) \cdot u_0 \neq 0$. Novamente pelo Teorema das Funções Implícitas, existe um número $\bar{\delta} > 0$ tal que, para $(r, u) \in \mathbb{R} \times S^1$, com $0 \leq r, |u - u_0| < \bar{\delta}$, existe um único $\alpha^*(r, u) \in \mathbb{R}$, sendo α^* uma função de classe C^1 tal que $\partial F(r, u, \alpha^*(r, u))/\partial \alpha = 0$, $\alpha^*(0, u_0) = \alpha_0$. Portanto, $M(r, u) = F(r, u, \alpha^*(r, u))$ é um valor de mínimo ou de máximo da função $F(r, u, \cdot)$ conforme seja $v''(\alpha_0) \cdot u_0$ positivo ou negativo, respectivamente. A derivada parcial $\partial M(0, u_0)/\partial u$ é o funcional linear do espaço tangente a S^1 em u_0 , $TS_{u_0}^1$, que associa a cada vetor $\nu \neq 0$, ortogonal a u_0 , o número $V(\alpha_0) \cdot \nu$. Como $V(\alpha_0)$ e ν são colineares, pois $(0, u_0, \alpha_0)$ satisfaz a equação (3.32), segue que esse número é não nulo. Assim, pelo Teorema das Funções Implícitas em variedades, existe uma única função continuamente diferenciável, $u = u^*(r)$, $0 \leq r < \bar{\delta}$, $u^*(0) = 0$, para alguma constante $\bar{\delta} > 0$, tal que $M(r, u^*(r)) = 0$. A curva $\mathcal{C} : (\lambda, \mu) = ru^*(r)$, $0 \leq r < \bar{\delta}$ tem u_0 como vetor tangente em $(0, 0)$, assim, \mathcal{C} é tangente à reta $r_{\alpha_0} : (\lambda, \mu) \cdot v(\alpha_0)$.

Para mostrar que \mathcal{C} tem as propriedades estabelecidas no teorema para as curvas \mathcal{C}_j , $j = 1, 2, \dots, N$, suponhamos para fixar que $M(r, u)$ é um valor de mínimo de $F(r, u, \cdot)$, ou seja, $v''(\alpha_0) \cdot u_0 > 0$. Consideremos o caminho $u(t) = (\cos t, \sin t) \in S^1$, $0 \leq t < 2\pi$, com $u(t_0) = u_0$. Então, $[\partial M(r, u(t))/\partial t]_{(r,t)=(0,t_0)} = v(\alpha_0) \cdot (-\sin t_0, \cos t_0) \neq 0$, uma vez que $(-\sin t_0, \cos t_0)$ é ortogonal a u_0 , portanto, colinear com $v(\alpha_0)$. Assim, se (\bar{r}, \bar{t}) está numa vizinhança de $(r, t) = (0, t_0)$, $[\partial M(r, u(t))/\partial t]_{(\bar{r}, \bar{t})}$ mantém o sinal, isto é, $M(\bar{r}, t)$ é estritamente monotônica em t , o que equivale a dizer que existem duas soluções simples de (3.32) para u de um lado de $\bar{u} = u(\bar{t})$ e nenhuma do outro lado.

Usando um argumento de compacidade em $[0, 2\pi)$, após um número finito de aplicações do Teorema das Funções Implícitas, chegamos à descrição completa do diagrama local de bifurcação numa vizinhança V de $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. Para isso é necessário observar que quando (λ, μ) está nos setores de V que contêm o eixo λ não existem soluções de (3.32), ficando assim caracterizada a região S^c . \square

Teorema 3.5. *Seja γ uma curva contínua contida em S definida parametricamente por $\lambda = \lambda(\beta)$, $\mu = \mu(\beta)$, $0 \leq \beta \leq 1$, com $(\lambda(\beta), \mu(\beta)) = (0, 0)$ se e somente se $\beta = 0$. Seja $x(\cdot; \beta) \in \mathcal{P}_{2\pi}^{(2)}$ uma solução de (3.11), com $(\lambda, \mu) = (\lambda(\beta), \mu(\beta))$ cuja órbita $\cup_{t \in \mathcal{R}} \{(x(t; \beta), \dot{x}(t; \beta))\}$ está em*

W . Escolhamos $x(\cdot; \beta)$ de modo que $(x(\cdot; \beta), \dot{x}(\cdot; \beta)) \in \mathcal{P}_{2\pi} \times \mathcal{P}_{2\pi}$ dependa continuamente de β . Se

$$\mathcal{S}(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x(\cdot; \beta), \dot{x}(\cdot; \beta)) \in \mathcal{P}_{2\pi} \times \mathcal{P}_{2\pi} \mid 0 < \beta \leq 1\},$$

então $\mathcal{S}(\gamma)$ é relativamente compacto em $\mathcal{P}_{2\pi} \times \mathcal{P}_{2\pi}$ e todo ponto limite de $\mathcal{S}(\gamma)$ em $\mathcal{P}_{2\pi} \times \mathcal{P}_{2\pi}$, quando $\beta \rightarrow 0$, é uma solução 2π -periódica $(p(t + \alpha_0), \dot{p}(t + \alpha_0))$ de (3.13). Além disso, se as hipóteses (H1)–(H3) estão satisfeitas e

$$h_m(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{\beta \rightarrow 0} \frac{\lambda(\beta)}{\mu(\beta)}, \quad h_M(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{\beta \rightarrow 0} \frac{\lambda(\beta)}{\mu(\beta)},$$

então existe um intervalo $I(\gamma) = [\alpha_1, \alpha_2] \subset [0, 2\pi)$ tal que $h(I(\gamma)) = [h_m(\gamma), h_M(\gamma)]$ e

$$(3.33) \quad \overline{\mathcal{S}(\gamma)} \setminus \mathcal{S}(\gamma) = \{(p(\cdot + \alpha), \dot{p}(\cdot + \alpha)) \in \mathcal{P}_{2\pi} \times \mathcal{P}_{2\pi} \mid \alpha \in I(\gamma)\},$$

onde $\overline{\mathcal{S}(\gamma)}$ denota o fecho de $\mathcal{S}(\gamma)$ em $\mathcal{P}_{2\pi} \times \mathcal{P}_{2\pi}$.

Prova. O fato de $\mathcal{S}(\gamma)$ ser relativamente compacto é consequência direta do Teorema da Ascoli, uma vez que as órbitas de $(x(\cdot; \beta), \dot{x}(\cdot; \beta))$ estão em W e, portanto, a equação (3.11) implica que as famílias das derivadas $\dot{x}(\cdot; \beta)$, $\ddot{x}(\cdot; \beta)$, $\beta \in (0, 1]$ são uniformemente limitadas. O fato dos pontos limites de $\mathcal{S}(\gamma)$, quando $\beta \rightarrow 0$, serem soluções de (3.10) pode ser provado tomando uma sequência $\beta_n \rightarrow 0$ de modo que $(x(\cdot; \beta_n), \dot{x}(\cdot; \beta_n))$ seja convergente em $\mathcal{P}_{2\pi} \times \mathcal{P}_{2\pi}$. A forma integral do sistema (3.12) implica

$$(3.34) \quad \begin{aligned} x(t; \beta_n) &= x(0; \beta_n) + \int_0^t \dot{x}(s; \beta_n) ds \\ \dot{x}(t; \beta_n) &= \dot{x}(0; \beta_n) - \int_0^t g(x(s; \beta_n)) ds - \\ &\quad - \lambda(\beta_n) \int_0^t \dot{x}(s; \beta_n) ds + \mu(\beta_n) \int_0^t f(s) ds \end{aligned}$$

bastando agora tomar os limites dos dois membros do sistema (3.34) com $n \rightarrow \infty$. Assim, observando que $\lambda(\beta_n) \rightarrow 0$ e $\mu(\beta_n) \rightarrow 0$, com $n \rightarrow \infty$, obtemos $(x(\cdot; \beta_n), \dot{x}(\cdot; \beta_n)) \rightarrow (p(\cdot + \alpha_0), \dot{p}(\cdot + \alpha_0))$ com $n \rightarrow \infty$, para algum $\alpha_0 \in [0, 2\pi)$.

Para ver que α_0 é tal que $h(\alpha_0) \in [h_m(\gamma), h_M(\gamma)]$, basta notar que existe $\alpha(\beta_n) \in [0, 2\pi)$ tal que $(\alpha(\beta_n), \lambda(\beta_n), \mu(\beta_n))$ satisfaz a equação de bifurcação (3.31) e, portanto,

$$(3.35) \quad h(\alpha(\beta_n)) - \frac{\lambda(\beta_n)}{\mu(\beta_n)} + \frac{1}{\mu(\beta_n)} R(\alpha(\beta_n), \lambda(\beta_n), \mu(\beta_n)).$$

A escolha contínua de $(x(\cdot; \beta), \dot{x}(\cdot; \beta))$ nos força a tomar $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$, com $n \rightarrow \infty$. Como $R(\alpha, \lambda, \mu) = O(|(\lambda, \mu)|^2)$, com $(\lambda, \mu) \rightarrow (0, 0)$, passando (3.35) ao limite com $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$h(\alpha_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(\beta_n)}{\mu(\beta_n)}.$$

Reciprocamente, suponhamos que $\alpha_0 \in I(\gamma)$. Podemos escolher uma sequência $(\alpha(\beta_n), \lambda(\beta_n), \mu(\beta_n))$, com $\beta_n \rightarrow 0$, tal que (3.35) esteja satisfeita e $(\alpha(\beta_n), \lambda(\beta_n), \mu(\beta_n)) \rightarrow (\alpha_0, 0, 0)$, com $n \rightarrow \infty$.

Como $\overline{\mathcal{S}(\gamma)}$ é a reunião de $\mathcal{S}(\gamma)$ com seus pontos limite, com $\beta \rightarrow 0$, a relação (3.33) é agora imediata. \square

Escolhendo a curva $\gamma \subset S$ de modo que $h_m(\gamma) < h_M(\gamma)$, os pontos limite de $(x(\cdot; \beta), \dot{x}(\cdot; \beta))$ são as soluções de (3.10) cujas trajetórias preenchem uma faixa helicoidal numa superfície cilíndrica, como na Figura 2. Os pontos limite das condições iniciais $(x(0; \beta), \dot{x}(0; \beta))$, com $\beta \rightarrow 0$, formam um arco de Γ no plano de fase (x, \dot{x}) .

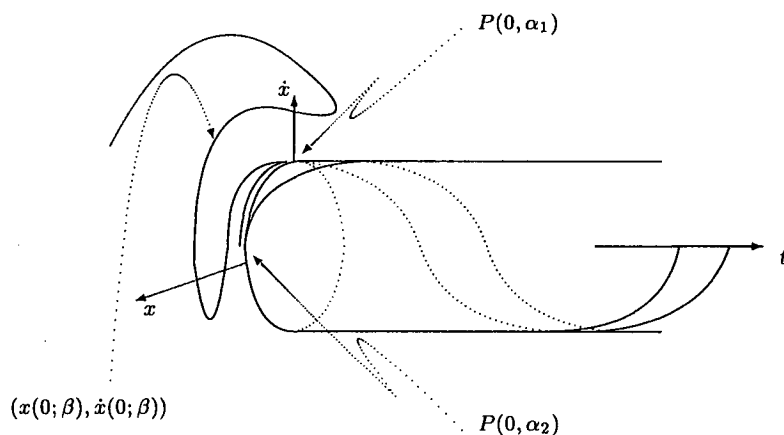


FIGURA 2. Limite de $(x(\cdot; \beta), \dot{x}(\cdot; \beta))$, com $\beta \rightarrow \infty$

Como consequência imediata do Teorema 3.5 temos o seguinte corolário:

Corolário 3.6. *Se $\gamma : \lambda = \lambda(\beta), \mu = \mu(\beta)$ é uma curva contínua contida em S e $x(\cdot; \beta) \in \mathcal{P}_{2\pi}^{(2)}$ uma solução de (3.11), com $(\lambda, \mu) = (\lambda(\beta), \mu(\beta))$, satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.5, uma condição necessária e suficiente para que*

$$(x(\cdot; \beta), \dot{x}(\cdot; \beta)) \rightarrow (p(\cdot + \alpha_0), \dot{p}(\cdot + \alpha_0)), \quad \text{com } \beta \rightarrow 0,$$

para algum $\alpha_0 \in [0, 2\pi)$, é que exista o limite $\lim_{\beta \rightarrow 0} \lambda(\beta)/\mu(\beta) = h_0$. Nesta caso a fase α_0 é dada pela equação $h(\alpha_0) = h_0$.

3.2. O modelo predador-presa de Lotka-Volterra periodicamente forçado. Vamos agora considerar o sistema clássico de Lotka-Volterra

$$(3.36) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1x_2 - dx_2 \end{aligned}$$

onde $a, b, c, d > 0$ são constantes, $x_1, x_2 \geq 0$ representam as populações de presas e predadores, sendo a e d suas taxas naturais de crescimento e declínio, respectivamente, enquanto b e c representam efeitos de predação. O sistema (3.36) tem dois equilíbrios: uma sela $(0, 0)$ e um centro $(d/c, a/b)$. O quadrante positivo $Q_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 > 0\}$ é o quadrante significativo do ponto de vista biológico e é invariante; todas as órbitas contidas em Q_1 são periódicas e circundam o equilíbrio $(d/c, a/b)$. Suponhamos que $e(t) = (e_1(t), e_2(t))$ seja uma solução T -periódica de (3.36) com órbita $\Gamma \subset Q_1$. Sendo ε_1 e ε_2 parâmetros reais e $f_1(t), f_2(t)$ funções T -periódicas suficientemente suaves.

Consideremos o sistema de Lotka-Volterra forçado:

$$(3.37) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - bx_1x_2 + \varepsilon_1 f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= cx_1x_2 - dx_2 + \varepsilon_2 f_2(t). \end{aligned}$$

Do ponto de vista biológico os termos forçantes $\varepsilon_i f_i(t)$ podem ser interpretados como caças T -periódicas com intensidades ε_i , $i = 1, 2$. Analogamente ao que foi feito na subseção 3.1 para o oscilador, podemos formular neste contexto o seguinte problema:

Para uma vizinhança W suficientemente pequena de Γ , existem soluções T -periódicas de (3.37), com órbita em W ? Como varia a quantidade dessas soluções quando $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ percorre uma vizinhança de $(0, 0)$ no plano $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$?

Esta questão será resolvida através do Método de Liapunov-Schmidt com essencialmente os mesmos passos da subseção anterior apresentando, entretanto, algumas características próprias. Por exemplo, como nenhum dos parâmetros ε_1 e ε_2 representa um termo dissipativo, é possível que (3.37) tenha soluções periódicas para todo $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ numa vizinhança completa de $(0, 0)$, ou seja, nem sempre temos a divisão de uma vizinhança de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0)$ nas regiões S e S^c , como no caso da equação (3.11). A discussão que se segue está baseada em [8].

O sistema (3.36) será denotado compactamente por

$$(3.38) \quad \dot{x} = g(x)$$

onde $x = \text{col}(x_1, x_2)$, $g(x) = \text{col}(ax_1 - bx_1x_2, cx_1x_2 - dx_2)$, e o sistema forçado será denotado por

$$(3.39) \quad \dot{x} = g(x) + \hat{e}f(t)$$

onde $f(t) = \text{col}(f_1(t), f_2(t))$ e \hat{e} é a matriz diagonal 2×2 $\hat{e} = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Analogamente ao caso da equação (3.10), aqui também temos uma representação para as soluções não constantes de (3.38) no quadrante Q_1 dada por $x(t) = \phi(\omega(\rho)(t + \alpha), \rho)$, onde $\phi : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow Q_1$ e $\omega : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ são funções suaves, $\phi(\theta + 1, \rho) = \phi(\theta, \rho)$, para todo $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, com $\rho > 0$ representando a amplitude, $\omega(\rho)$ a frequência e α a fase da solução. Assumindo que $e(t)$ tem amplitude $\rho_0 > 0$, isto é, $T = [\omega(\rho_0)]^{-1}$, tomaremos $e(t) = \phi(\omega(\rho_0)t, \rho_0)$.

Hsu provou em [7] que

$$(3.40) \quad \omega'(\rho_0) > 0,$$

portanto, através de argumentos completamente análogos aos da subseção anterior podemos provar que \hat{e} gera o espaço das soluções T -periódicas da equação variacional de (3.38) em torno de e :

$$(3.41) \quad \dot{x} = g'(e(t))x$$

onde

$$g'(e(t)) = \begin{bmatrix} a - be_2(t) & -be_1(t) \\ ce_2(t) & ce_1(t) - d \end{bmatrix}.$$

Vamos agora escrever o problema num contexto apropriado para aplicar o Método de Liapunov-Schmidt. Tomando W como uma vizinhança tubular de Γ , cada ponto $x \in W$ tem coordenadas (τ, σ) , $0 \leq \tau < T$, $|\sigma| < \sigma_0$ (onde $\sigma_0 > 0$ é uma constante), de modo que

$$(3.42) \quad x = e(\tau) + \sigma e^\perp(\tau),$$

onde $e^\perp(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} (\dot{e}_2(\tau), -\dot{e}_1(\tau))$. Uma solução T -periódica de (3.39) que permanece em W tem uma fase α , $0 \leq \alpha < T$, escolhida de tal modo que as coordenadas de $x(\alpha)$ em W sejam da forma $(\tau, \sigma) = (0, \sigma)$. Tal solução é representada, portanto, por

$$(3.43) \quad x(t) = e(t - \alpha) + z(t - \alpha), \quad z(0) \cdot \dot{e}(0) = 0.$$

A correspondência um-a-um entre soluções $x(t)$ de (3.39) e soluções $x(t + \alpha)$ de

$$(3.44) \quad \dot{x}(t) = g(x) + \hat{e}f(t + \alpha)$$

permite transferir o parâmetro α da condição (3.43) para dentro da equação diferencial, isto é, o problema passa a ser o de estudar as soluções T -periódicas de (3.44) com a condição (3.43) substituída por

$$(3.45) \quad x(t) = e(t) + z(t), \quad z(0) \cdot \dot{e}(0) = 0,$$

com $|z|$ pequeno. Substituindo (3.45) em (3.44) e expandindo g em torno de $e(t)$ somos levados ao problema de estudar soluções z pequenas T -periódicas de

$$(3.46) \quad \begin{aligned} \dot{z} &= g'(e(t))z + \hat{e}f(t + \alpha) + \mathcal{R}(z) \\ z(0) \cdot \dot{e}(0) &= 0 \end{aligned}$$

onde $\mathcal{R}(z) = O(|z|^2)$, com $z \rightarrow 0$.

Por analogia com a subseção anterior, agora é fácil encontrar o modo apropriado de formular o problema. Entretanto, como a equação variacional (3.41) não é auto-adjunta neste caso, vamos precisar da primeira integral da equação (3.38) $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} a \ln x_2 + d \ln x_1 - cx_1 - bx_2$, que é bastante conhecida. É agora uma aplicação direta do Lema 3.2 o fato de que

$$(3.47) \quad \eta(t) = (d/e_1(t) - c, a/e_2(t) - b)$$

é uma solução T -periódica da adjunta da equação variacional (3.41):

$$(3.48) \quad \dot{z} = -zg'(e(t))$$

e, portanto, gera o espaço das soluções T -periódicas de (3.48).

Seja $Z = \mathcal{P}_T$ o espaço de Banach das funções $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, contínuas T -periódicas com norma $|\phi| = \sup |\phi(t)|$ e consideremos $X = \mathcal{P}_T^{(1)}$ seu sub-espaço algébrico das funções $\phi \in Z$ de classe C^1 , munido com uma norma C^1 . Definamos também as projeções contínuas $P : X \rightarrow X$ e $Q : Z \rightarrow Z$ por

$$\begin{aligned} P\phi &= |\dot{e}(0)|^{-2}(\phi(0) \cdot \dot{e}(0))\dot{e}, & \phi \in X, \\ Q\phi &= \nu \left[\int_0^T \eta(t) \cdot \phi(t) \right] \eta, & \phi \in Z, \end{aligned}$$

onde

$$\nu = \left[\int_0^T \eta^2(t) dt \right]^{-1}.$$

Se as aplicações $L : X \rightarrow Z$, $N : X \times \mathbb{R}^3 \rightarrow Z$ são definidas por $Lz = \dot{z} - g'(e)z$, $N(z, \varepsilon, \alpha) = \hat{e}f(\cdot + \alpha) + \mathcal{R}(z)$, o problema (3.46) pode

ser escrito como um sistema de equações em X

$$(3.49) \quad \begin{aligned} (a) \quad & Lz = N(z, \varepsilon, \alpha) \\ (b) \quad & Pz = 0 \end{aligned}$$

e, de acordo com as definições de P e Q e nossa discussão anterior, $\mathcal{R}(L) = Z_{I-Q}$ e $\mathcal{N}(L) = X_P$. Assim, existe um inverso a direita de L , $K : Z_{I-Q} \rightarrow X$ tal que $LK = I$ em Z_{I-Q} e $KL = I - P$ em X . Decompondo a equação (3.49)(a) nos sub-espços suplementares QZ e $(I - Q)Z$ e, levando em conta as propriedades do operador K , vê-se que essa equação é equivalente ao sistema:

$$\begin{aligned} z &= Pz + K(I - Q)N(z, \varepsilon, \alpha) \\ 0 &= QN(z, \varepsilon, \alpha) \end{aligned}$$

Combinando agora este sistema com a equação (3.49)(b), obtemos que o sistema (3.49) é equivalente a

$$(3.50) \quad \begin{aligned} (a) \quad & z = K(Q - I)N(z, \varepsilon, \alpha) \\ (b) \quad & 0 = QN(z, \varepsilon, \alpha) \end{aligned}$$

Dada a compacidade do intervalo $[0, T)$ com a topologia da identificação com S^1 (isto é, $[0, T)$ é entendido como o espaço quociente $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$), após um número finito de aplicações do Teorema das Funções Implícitas (como foi feito no sistema (3.25)), concluímos que existe uma função suave $z = z^*(\varepsilon, \alpha)$ de $V \times [0, T)$ em X , onde V é uma vizinhança de $\varepsilon = 0$, tal que $z^*(0, \alpha) = 0$, $0 \leq \alpha < T$, e $z = z^*(\varepsilon, \alpha)$ é a única solução de (3.50)(a) numa vizinhança U de $z = 0$. Substituindo $z = z^*(\varepsilon, \alpha)$ em (3.50)(b), chegamos à equação de bifurcação:

$$(3.51) \quad \nu \int_0^T \eta(t) [\hat{\varepsilon}f(t + \alpha) + \mathcal{R}(z^*(\varepsilon, \alpha)(t))] dt.$$

que, de acordo com (3.47), pode ser escrita na forma

$$(3.52) \quad \begin{aligned} & \left[d \int_0^T \frac{f_1(t + \alpha)}{e_1(t)} dt - cM_1 \right] \varepsilon_1 \\ & + \left[a \int_0^T \frac{f_2(t + \alpha)}{e_2(t)} dt - bM_2 \right] \varepsilon_2 + S(\varepsilon, \alpha) = 0 \end{aligned}$$

onde

$$M_i = \int_0^T f_i(t) dt, \quad i = 1, 2$$

e $S(\varepsilon, \alpha)$ é T -periódica em α e $S(\varepsilon) = O(|\varepsilon|^2)$, com $\varepsilon \rightarrow 0$.

Definindo $v(\alpha) = (v_1(\alpha), v_2(\alpha))$ por

$$(3.53) \quad \begin{aligned} v_1(\alpha) &= \left[d \int_0^T \frac{f_1(t + \alpha)}{e_1(t)} dt - cM_1 \right] \\ v_2(\alpha) &= \left[a \int_0^T \frac{f_2(t + \alpha)}{e_2(t)} dt - bM_2 \right] \end{aligned}$$

a equação (3.52) se escreve numa forma mais compacta:

$$(3.54) \quad v(\alpha) \cdot \varepsilon + S(\varepsilon, \alpha) = 0.$$

Fazemos as seguintes hipóteses sobre a curva fechada $v(\alpha)$ do plano ε :

(H1) $v(\alpha)$ e $v'(\alpha)$ são vetores linearmente independentes, exceto possivelmente para um número finito de valores α_i , $i = 1, \dots, n$, com $v(\alpha_i)$, $v(\alpha_j)$ linearmente independentes, se $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Ainda, $v''(\alpha)$ nunca é colinear simultaneamente com $v(\alpha)$ e $v'(\alpha)$, $0 \leq \alpha < T$.

(H2) $v(\alpha) \neq 0$, $0 \leq \alpha < T$.

As hipóteses (H1) e (H2) são genéricas em f , isto é, o conjunto das funções $f \in \mathcal{P}_T$ tais que (H1) e (H2) valem é denso em \mathcal{P}_T . Sob essas hipóteses podemos antecipar uma análise heurística do problema, como foi feito na subseção anterior para o caso do oscilador.

O diagrama de bifurcação aproximado para as soluções T -periódicas de (3.39), com órbitas em W , pode ser obtido a partir da parte dominante da equação de bifurcação:

$$(3.55) \quad v(\alpha) \cdot \varepsilon = 0.$$

Cada valor α_i , $i = 1, \dots, n$, descrito na hipótese (H1) fornece um ponto $v(\alpha_i)$ em que a curva fechada $v(\alpha)$ é tangente à reta $r_i : \lambda v(\alpha_i)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $v''(\alpha_i)$ não é colinear com $v(\alpha_i)$, numa vizinhança U de $v(\alpha_i)$ a curva $v(\alpha)$ permanece em um dos semi-planos determinados pela reta r_i . Na Figura 3 (A) ou (C) $v(\alpha_i)$ é um dos pontos de tangência de $v(\alpha)$ com uma reta r_i (pontilhada). Além disso, diminuindo U se necessário, $v(\alpha_j) \notin U$, se $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$. Assim, se ε_0 estiver em um dos semiplanos abertos determinados pela reta $\ell_i : \varepsilon \cdot v(\alpha_i)$ (ortogonal a r_i) e suficientemente próximo de ℓ_i , não existem valores α_0 próximos de α_i tais que $(\varepsilon_0, \alpha_0)$ seja solução de (3.55). Se ε_0 estiver no outro semiplano, então existem dois valores distintos α'_0 e α''_0 , próximos de α_i , tais que $(\varepsilon_0, \alpha'_0)$ e $(\varepsilon_0, \alpha''_0)$ são soluções de (3.55). As retas ℓ_i , $i = 1, \dots, n$, correspondem, pois, a curvas aproximadas de bifurcação, uma vez que quando ε cruza uma dessas retas o número de soluções de (3.55) varia de dois.

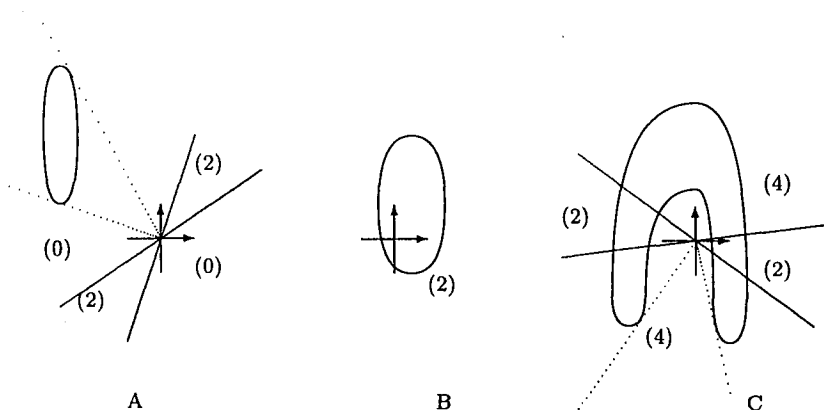


FIGURA 3. Diagramas de Bifurcação no Plano ε

Essas considerações mostram que, no caso da equação (3.39), não se pode garantir que uma vizinhança da origem no espaço dos parâmetros seja particionada em subconjuntos S e S^c , como acontecia no caso do oscilador. É possível que (3.39) tenha pelo menos duas soluções T -periódicas com órbita em W quando ε percorre uma vizinhança completa de $\varepsilon = 0$. A Figura 3 mostra algumas possibilidades de diagramas de bifurcação, de acordo com forma e posição de $v(\alpha)$.

Conclusões mais precisas são estabelecidas no teorema abaixo, cuja prova omitimos por ser mera repetição dos argumentos do Teorema 3.3:

Teorema 3.7. *Se as hipóteses (H1) e (H2) estão satisfeitas, então existe uma vizinhança W de Γ e uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ de $\varepsilon = 0$ de modo que:*

(A) *Se existem os valores $\alpha_i \in [0, T)$, $i = 1, \dots, n$, especificados na hipótese (H1), então existem curvas γ_i tangentes às retas $\ell_i : \varepsilon \cdot v(\alpha_i)$ em $\varepsilon = 0$, respectivamente, cada uma delas dividindo V em duas componentes conexas, $\gamma_i \cap \gamma_j = \{0\}$, $i \neq j$, tais que se $\varepsilon \neq 0$ cruza uma curva γ_i , o número de soluções T -periódicas de (3.39) com órbita em W varia de dois.*

(B) *Existe um subconjunto não vazio S de V tal que, se $\varepsilon \in S$, a equação (3.39) possui pelo menos duas soluções T -periódicas com órbita em W . Ou $S = V$ ou S consiste do interior de duas regiões setoriais tais que existem i, j , $1 \leq i, j \leq n$, com $\partial S = \gamma_i \cup \gamma_j$ em V .*

O seguinte corolário é imediato:

Corolário 3.8. *Seja $v(\alpha)$ dada por (3.53). Se $v(\alpha)$, $v'(\alpha)$ são linearmente independentes para todo α , $\alpha \in [0, T)$, então existe uma vizinhança W de Γ e uma vizinhança V de $\varepsilon = 0$ de modo que a equação*

(3.39) tem precisamente duas soluções T -periódicas com órbita em W quando ε varia na vizinhança V .

O Corolário 3.8 sugere a questão da existência de uma função T -periódica f tal que valha a hipótese desse corolário. O Corolário 3.9 é, no fundo, um exemplo que responde positivamente a essa questão, apresentado em [8].

Como temos feito até agora, consideremos o intervalo $[0, T)$ como o espaço quociente $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$. Se $r : [0, T) \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua, denotemos com $\hat{r}(n)$ seu n -ésimo coeficiente de Fourier, com respeito a $\exp(i2n\pi t/T)$, $n \in \mathbb{Z}$. Isto é, sendo $\omega \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi/T$:

$$\hat{r}(n) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega n t} r(t) dt.$$

Tomando $r_1(t) = 1/e_1(t)$ e $r_2(t) = 1/e_2(t)$, vamos precisar dos quatro números complexos não nulos $\hat{r}_1(n)$, $\hat{r}_2(n)$, $n = 1, 2$.

Corolário 3.9. *Suponhamos que o termo forçante f seja dado por*

$$(f_1(t), f_2(t)) = (a_{-1}e^{-i\omega t} + a_1e^{i\omega t}, b_{-1}e^{-i\omega t} + b_1e^{i\omega t}),$$

onde $a_n = [2T\hat{r}_1(n)]^{-1}$, $b_n = -i[2T\hat{r}_2(n)]^{-1}$, $n = -1, 1$. Então existe uma vizinhança W de Γ e uma vizinhança V de $\varepsilon = 0$ de modo que a equação (3.39) tem precisamente duas soluções T -periódicas com órbita em W quando ε varia na vizinhança V .

Prova. A prova consiste em calcular $v_j(\alpha)$, $j = 1, 2$, substituindo f por sua expressão dada no enunciado obtendo que $v(\alpha)$ é a circunferência $v(\alpha) = (\cos \omega\alpha, \sin \omega\alpha)$. O corolário segue então imediatamente do Corolário 3.8 \square

Observação 3.10. *O Corolário 3.9 sugere o seguinte problema inverso: Dado um feixe consistindo de um número par de retas l_i , $i = 1, \dots, n$, concorrentes na origem do plano ε , existe um termo forçante f tal que o diagrama de bifurcação das soluções T -periódicas de (3.39) com órbitas próximas de Γ seja dado por curvas γ_i tangentes a l_i em $\varepsilon = 0$? Este problema é tratado com maior generalidade em [4]*

Um comportamento descontínuo das soluções T -periódicas de (3.39), quando $\varepsilon \rightarrow 0$, análogo ao descrito no Teorema 3.5 para as soluções 2π -periódicas da equação (3.11) também acontece aqui.

Teorema 3.11. *Suponhamos válidas as hipóteses (H1) e (H2) e seja $S \subset V$ dado no Teorema 3.7-(B). Seja γ uma curva contínua contida em S definida parametricamente por $\gamma : \varepsilon = \varepsilon\beta$, $0 \leq \beta \leq 1$, tal que $\varepsilon(0) = 0$. Escolhamos uma solução T -periódica $x(\cdot; \beta) \in \mathcal{P}_T$ de*

(3.39), com $\varepsilon = \varepsilon(\beta)$, dependendo continuamente de β em \mathcal{P}_T . Consideremos coordenadas polares (ρ, θ) no plano ε , de modo que $\varepsilon(\beta) = \rho(\beta)(\cos \beta, \sin \beta)$, $0 < \beta \leq 1$. Definamos

$$\bar{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{\beta \rightarrow 0} \theta(\beta), \quad \underline{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{\beta \rightarrow 0} \theta(\beta).$$

Então $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{x(\cdot; \beta) \in \mathcal{P}_T \mid 0 < \beta \leq 1\}$ é relativamente compacto e todo ponto limite de \mathcal{S} , com $\beta \rightarrow 0$, é uma solução T -periódica de (3.38) $e(t + \alpha)$. Mais ainda, se $\bar{\theta} > \underline{\theta}$, existe um intervalo $I(\gamma) = [\alpha_0, \alpha_1] \subset [0, T)$ tal que se $\alpha \in I(\gamma)$, então existe $\varepsilon = \rho(\cos \theta, \sin \theta)$, $\bar{\theta} \geq \theta \geq \underline{\theta}$, com $v(\alpha) \cdot \varepsilon = 0$ e

$$\bar{\mathcal{S}} \setminus \mathcal{S} = \{e(\cdot + \alpha) \in \mathcal{P}_T \mid \alpha \in I(\gamma)\}.$$

Observação 3.12. Uma análise cuidadosa das duas aplicações feitas acima mostram que 2π , no caso do oscilador, ou T , no caso do sistema de Lotka-Volterra, não precisam ser períodos mínimos da órbita Γ . Assim, tomando-as como órbitas $2n\pi$ - ou nT -periódicas, respectivamente, as técnicas aqui empregadas podem ser utilizadas para o estudo de bifurcação de soluções sub-harmônicas de ordem n . Essa idéia foi tomada como motivação em [3] para o estudo de bifurcação de órbitas homoclínicas.

REFERÊNCIAS

- [1] G. Bachman and L. Narici, *Functional Analysis*, Academic Press, New York (1966).
- [2] S. N. Chow and J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York (1982).
- [3] S. N. Chow, J. Hale and J. Mallet-Paret, *An example of bifurcation to homoclinic orbits*, J. Differential Eqns., **37** (1980), 351-373.
- [4] M. A. Giongo and P. Táboas, *Inverse problems on bifurcation from families of periodic solutions*, Applicable Analysis **59** (1995) 185-199.
- [5] J. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Krieger, New York (1980).
- [6] J. Hale and P. Táboas, *Interaction of damping and forcing in a second order equation*, J. Nonlinear Anal. **2** (1978) 77-84.
- [7] S. Hsu, *A remark on the period of the periodic solution in the Lotka-Volterra system* J. Math. Anal. Appl., **95** (1983), 428-436.
- [8] P. Táboas, *Periodic solutions of a forced Lotka-Volterra equation* J. Math. Anal. Appl., **124** (1987), 82-97.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS - USP
 CAIXA POSTAL 668
 SÃO CARLOS, SP 13560-970
 E-mail address: pztaboas@icmsc.sc.usp.br