Grupo de Automorfismos da Curva de Hurwitz

Herivelto Borges

ICMC-USP-São Carlos

Seja $\mathcal{X}$ uma curva algébrica plana, irredutível, definida sobre um corpo $\mathbb{K}$, algebricamente fechado, de característica $p \geq 0$. Um dos principais invariantes (por isomorfismo) de uma curva algébrica $\mathcal{X}$ é o seu *gênero*, que é um certo inteiro não-negativo e denotado por $g_{\mathcal{X}}$.

Se $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ denota o corpo de funções de $\mathcal{X}$, o grupo de todos os $\mathbb{K}$-automorfismos de $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ é chamado de *grupo de automorfismos de* $\mathcal{X}$ e denotado por $\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$. Tal grupo é um outro importante invariante da curva, e sua determinação tem papel central no estudo da mesma. Além disso, se conhecemos $\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$, podemos usar subgrupos $G \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{X})$ para construir novas curvas $\mathcal{Y} := \mathcal{X}/G$. Uma tal curva, chamada de *curva quociente*, tem várias propriedades interessantes que podem ser obtidas à partir da curva original $\mathcal{X}$.

Em 1890, Schwarz mostra que se $g_{\mathcal{X}} \geq 2$, então $\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$ é finito. Um pouco depois, em 1893, Hurwitz mostra que se $g_{\mathcal{X}} \geq 2$ e $\mathbb{K}$ tem característica $p = 0$, então

$$|\mathrm{Aut}(\mathcal{X})| \leq 84(g_{\mathcal{X}} - 1). \tag{1}$$

Hurwitz mostra ainda que tal cota é efetiva, pois a curva projetiva $\mathcal{H}_3 : X^3Y + Y^3Z + Z^3X = 0$, conhecida como quártica de Klein, tem gênero $g = 3$ e $|\mathrm{Aut}(\mathcal{H}_3)| = 168$. Ocorre, entretanto, que a cota de Hurwitz em geral não é valida para característica $p > 0$. De fato, se considerarmos a própria quártica de Klein sobre um corpo de característica $p = 3$, é possível mostrar que tal curva tem 6048 automorfismos. Mais geralmente, pode-se mostrar que a curva (Hermitiana!) definida sobre $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}_p}$, dada por

$$\mathcal{H}_q :\ X^qY + Y^qZ + Z^qX = 0, \tag{2}$$

onde q é uma potência de p, tem gênero $g_{\mathcal{H}_q} = q(q-1)/2$ e $84(g_{\mathcal{H}_q} - 1) < |\mathcal{H}_q| = q^3(q^3+1)(q^2-1)$.

Diante de tais fatos, é natural investigar a estrutura de $\mathrm{Aut}(\mathcal{H}_n)$ para o caso geral das curvas de Hurwitz

$$\mathcal{H}_n :\ X^nY + Y^nZ + Z^nX = 0. \tag{3}$$

Nessa palestra, discutiremos as noções básicas de grupos de automorfismos de curvas algébricas e apresentaremos ideias para obter o grupo $\mathrm{Aut}(\mathcal{H}_n)$ para qualquer $n \geq 3$. Em particular, veremos que, com exceção dos casos acima, temos $\mathrm{Aut}(\mathcal{H}_n) \cong \mathbb{Z}_{n^2-n+1} \rtimes \mathbb{Z}_3$.