

A variedade central dos pontos de Taub

Giuliano Pantarotto Semente

Dr. Phillip Lappicy Lemos Gomes

ICMC - Universidade de São Paulo

Bolsa FAPESP nº 2020/07646-7, giulianopantarotto@usp.br, lappicy@usp.br

Objetivos

Este trabalho é baseado em [HLU20], que analisa alguns modelos cosmológicos de evolução do Universo, dentro do contexto da teoria de gravitação de Horava-Lifshitz, que perturba a Teoria da Relatividade Geral (RG). Mais especificamente, são considerados os modelos espacialmente homogêneos de Bianchi tipo VIII e IX. Queremos contribuir para o entendimento do sistema dinâmico que surge neste contexto, descrito por uma EDO de dimensão 5 sujeita a um vínculo. A ela é adicionado um parâmetro real $v \in (0, 1)$, representando uma perturbação da RG, que ocorre quando $v = 0, 5$:

$$\Sigma_{\pm}' = 4v(1 - \Sigma^2)\Sigma_{\pm} + S_{\pm} \quad (1.1)$$

$$N_1' = -2(2v\Sigma^2 - 2\Sigma_{+})N_1 \quad (1.2)$$

$$N_2' = -2(2v\Sigma^2 + \Sigma_{+} + \sqrt{3}\Sigma_{-})N_2 \quad (1.3)$$

$$N_3' = -2(2v\Sigma^2 + \Sigma_{+} - \sqrt{3}\Sigma_{-})N_3 \quad (1.4)$$

sujeita ao vínculo

$$1 - \Sigma^2 - \Omega_k = 0, \quad (2)$$

onde as quantidades auxiliares são:

$$\Sigma^2 := \Sigma_{+}^2 + \Sigma_{-}^2 \quad (3.1)$$

$$\Omega_k := N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 - 2(N_1N_2 + N_2N_3 + N_3N_1) \quad (3.2)$$

$$S_{+} := 2[(N_2 - N_3)^2 - 2N_1^2 + N_1N_2 + N_1N_3] \quad (3.3)$$

$$S_{-} := 2\sqrt{3}(N_2 - N_3)(N_2 + N_3 - N_1). \quad (3.4)$$

O sistema apresentado possui um círculo de pontos fixos conhecido como círculo de Kasner, K° . A linearização das equações em K° revela três pontos especiais, chamados de Taub, por exemplo $T_1 = (-1, 0, 0, 0, 0)$, que possuem três autovalores nulos quando $v = 0, 5$. Dessa forma, não é possível aplicar o célebre teorema de Hartman-Grobman para descrever a dinâmica local destes pontos fixos a partir do sistema linearizado. Portanto, propomos usar outra estratégia para analisar a dinâmica: calculamos a variedade central e por consequência reduzimos o sistema original ao fluxo nas direções centrais.

Métodos e Procedimentos

Aplicamos os teoremas chaves da teoria de variedade central em [JC81] e [JP83] para aproximá-la através de um gráfico. Por fim, para investigar a dinâmica do fluxo reduzido, foram empregados métodos de *averaging*.

Resultados

Conseguimos encontrar a variedade central tridimensional do ponto de Taub T_1 , quando $v = 0, 5$, mostrando que ela coincide com os modelos de Bianchi tipo VI e VII. Mais especificamente:

Lema 1: A função $h: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ que descreve localmente o gráfico da variedade central em T_1 é dada por

$$h(\Sigma_-, N_2, N_3) = (1 - \sqrt{x}, 0), \quad (4)$$

onde $x = 1 - \Sigma_-^2 - (N_2 - N_3)^2$.

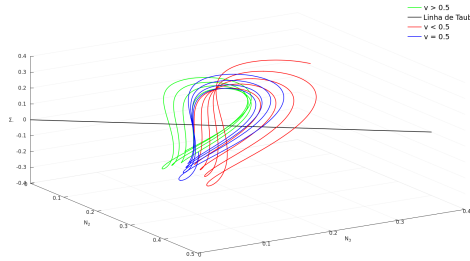


Figura 1: Simulações numéricas numa vizinhança do ponto T_1 com $N_1 = 0$, para $v = 0.5$ (azul), $v < 0.5$ (vermelho) e $v > 0.5$ (verde).

Note que o sistema possui retas de pontos fixos, sendo que uma delas (denominada de linha de Taub) está representada nas figuras. Para analisar teoricamente o fluxo quando $N_1 = 0$, truncamos o sistema completo até termos de segunda ordem, e vimos que o sistema resultante admite uma estrutura Hamiltoniana, com duas quantidades conservadas:

$$B := \Sigma_-^2 + N_2^2 + N_3^2 \quad (5.1)$$

$$F := N_2 N_3. \quad (5.2)$$

Assim, suas soluções são órbitas periódicas que estão sob esferas, e são descritas por

$$\Sigma_-'' + 24B\Sigma_- - 24\Sigma_-^3 = 0. \quad (6)$$

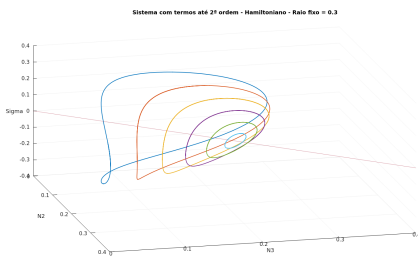


Figura 2: Soluções sob uma esfera do sistema truncado, descritas por um sistema Hamiltoniano.

Quando consideramos os demais termos de ordem mais alta, B e F não são mais conservados. Porém, para analisar localmente a dinâmica, utilizamos um método de *averaging* para calcular a média do campo vetorial, aproximando Σ_- do sistema original por órbitas periódicas da equação (6), de maneira que sua influência ao longo de uma oscilação é aproximada ao seu valor médio.

A EDO resultante obtida foi

$$B' = 2B^2[(1 - \eta) - (1 + \eta)^2 g(\eta)] \quad (7.1)$$

$$F' = 2FB[(1 - \eta) - 2(1 + \eta)g(\eta)] \quad (7.2)$$

$$\eta' = 2B\eta(\eta^2 - 1)g(\eta) \quad (7.3)$$

onde $\eta := \left(\frac{2F}{B}\right)$ e $g(\eta) := \left(1 - \frac{E}{K}\right)$ é uma função de η , sendo que K e E são integrais elípticas completas de 1º e 2º tipo respectivamente, avaliadas em $\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)$.

Conclusões

A dinâmica do sistema original (1) nas vizinhanças do ponto T_1 , para qualquer $v \approx 0,5$, pode ser descrita pelo sistema médio (7), de menor dimensão, em termos das variáveis B e F .

Referências Bibliográficas

- [HLU20] J. Hell, P. Lappicy e C. Uggla. Bifurcations and Chaos in Horava-Lifshitz Cosmology. 2020 arXiv:2012.07614
- [JC81] J. Carr. Applications of Centre Manifold Theory. Springer-Verlag, 1981.
- [JP83] J. Guckenheimer e P. Holmes. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, 1983.
- [LP21] P. Lappicy e G. Pantarotto. Averaging the Taub points in Horava-Lifshitz Cosmology, (em preparação), 2021.