Métodos assintóticos e a série de Taylor da função exponencial

Gabriel Passarelli

Guilherme Silva

Universidade de São Paulo – ICMC

gabrielpassarelli@usp.br

Objetivos

A função exponencial é um dos primeiros objetos estudados nos princípios de uma carreira em exatas. Como se sabe, ela possui uma expansão em série de Taylor válida em todo plano complexo. Truncando essa série, obtemos os chamados polinômios de Taylor, e uma constatação imediata é a de que, enquanto esses polinômios de Taylor têm tantos zeros no plano quanto seu grau, a função exponencial nunca se anula. Dessa forma, como a série converge uniformemente para a função exponencial em conjuntos limitados, infere-se que, à medida que o grau desses polinômios de Taylor aumenta, suas raízes divergem.

O objetivo deste trabalho é apresentar como técnicas clássicas de análise assintótica nos ajudam a compreender a forma com que essas raízes divergem.

Métodos e Procedimentos

Nosso ponto de partida para a análise sobre os zeros é a seguinte representação integral do polinômio de Taylor de grau N

$$S_N(Nw)=\frac{-w^{N+1}}{2\pi i}\int_K \frac{s^{-1}}{s-w}e^{N(s-\log s)}ds, \quad (1)$$

obtida a partir da Fórmula Integral de Cauchy. Note que a variável da soma parcial está reescalada. Isso é necessário, pois, como foi dito, os zeros divergem quando N cresce. Como (1) depende de N de forma paramétrica na exponencial do integrando, somos levados a considerar a teoria assintótica de integrais exponenciais, nossa ferramenta básica nesse estudo [2].

A integral (1) pode ser estudada a partir do Método do Decaimento Máximo. Ele dá expansões assintóticas para integrais da forma

$$F(\lambda)=\int_\gamma e^{-\lambda h(z)}\phi(z)\,dz,\ \gamma\subset\mathbb{C} \quad (2)$$

no limite $\lambda\to\infty$. Sua ideia básica é realizar uma deformação de contorno de modo que o novo contorno passe por um ponto de sela da função $h(z)$ (o ponto de sela será um ponto de crítico sobre a curva - essa exigência ficará clara mais a frente), e que ele esteja sobre uma curva de nível da função $\Im(h(z))$. Caso consigamos fazer isso, a integral (2) se torna uma integral real multiplicada por constantes complexas, e então somos levados a considerar integrais da forma (2), mas calculadas sobre a reta real.

Para obter a expansão assintótica de integrais exponenciais da forma

$$F(\lambda)=\int_a^b e^{-\lambda h(t)}\phi(t)\,dt, \quad (3)$$

um dos métodos mais poderosos é o Método de Laplace. Um ponto fundamental para entendê-lo é observar que, no limite $\lambda\to\infty$, a área do gráfico que a integral calcula se acumula no entorno dos pontos de mínimo de $h(t)$. Desse modo, vê-se que as demais regiões do intervalo de integração pouco influenciam o comportamento assintótico líder da integral. Essa intuição justifica o Método de Laplace, pois o que se faz é, através da expansão em série de Taylor de $h(t)$ em torno de seus pontos de mínimo, capturar a ordem de grandeza com que o expoente no integrando contribui para o valor da integral. Com a ordem de grandeza recuperada, realiza-se uma mudança de variáveis, que deixara a integral na forma à que se aplica o Lema de Watson, que é a base para a construção de toda a teoria.

Os métodos que enunciamos anteriormente são, basicamente, técnicas para se realizar mudanças de variáveis e deformações de contorno que reduzem integrais à forma das do Lema de Watson. Sua demonstração se utiliza, resumidamente, da série de Taylor de $\phi(t)$ em torno de 0, e do fato de que o integrando se acumula sobre um dos extremos do intervalo de integração.

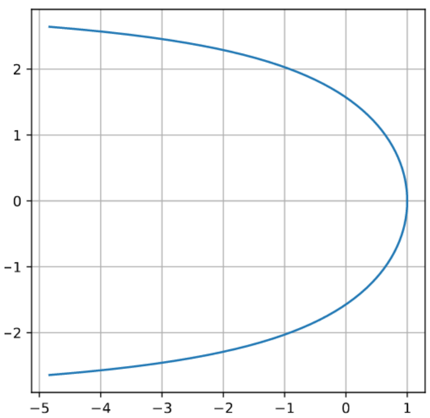

Figura 1: Curva de nível de $\Im(s - \log s)$.

Resultados

Como se vê, o estudo das técnicas básicas de análise assintótica nos deu ferramentas poderosas para lidar com integrais que não podem ser calculadas analiticamente.

Com o Método do Decaimento Máximo em mãos, determinamos as expansões assintóticas da integral (1). O contorno em que K foi deformado (tomando os devidos cuidados com a singularidade no integrando) é o da Figura 1. Ele passa pelo único ponto de sela de $\Im(s - \log s)$: $s = 1$.

De forma geral, pudemos comprovar que os zeros se concentram sobre a chamada curva de Szegö, tal qual na Figura 2. Mais especificamente, demonstramos que o termo assintótico líder de S_N , obtido como explicado, para qualquer região que não intersecta a curva de Szegö, não se anula quando N é suficientemente grande.

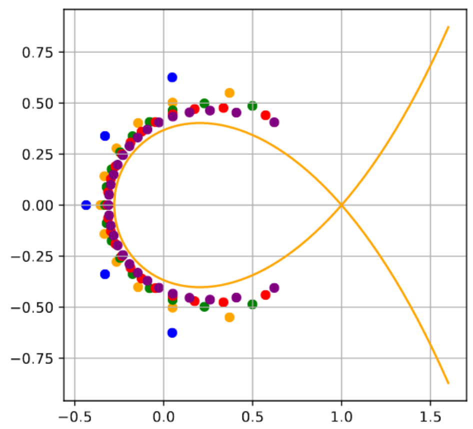

Figura 2: Curva de Szegö em laranja, e zeros das somas parciais da exponencial (reescaladas) no entorno.

Conclusões

Ao longo do trabalho, pudemos verificar a grande capacidade das técnicas da análise assintótica de nos dar visões elucidativas sobre o comportamento de funções que são difíceis (ou mesmo impossíveis) de serem calculadas explicitamente, tal qual no problema que resolvemos.

Nosso foco incidiu em integrais cuja forma lembra as transformadas de Laplace. Tais integrais, que surgem em diversos contextos, constantemente não podem ser expressas em termos de funções conhecidas. Assim, a análise assintótica surge como uma alternativa de estudo às abordagens que se utilizam das técnicas em análise.

Referências Bibliográficas

[1] T. Kriecherbauer, A. B. J. Kuijlaars, K. D. T.-R. McLaughlin, and P. D. Miller. *Locating the zeros of partial sums of ez with Riemann-Hilbert methods.* In Integrable systems and random matrices, volume 458 of Contemp. Math., pages 183–195. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[2] Peter D. Miller. *Applied asymptotic analysis,* volume 75 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.